TP-2 Polígono Convexo

Nome: Matheus Alves Kühl

Departamento de Ciências da Computação

Universidade Federal de Minas Gerais

1. Resumo

A determinação eficiente dos tamanhos das peças de tecido é crucial na indústria têxtil para otimizar custos e minimizar desperdícios. Este artigo apresenta uma solução para o problema de determinar o polígono convexo mínimo que abrange um conjunto dado de pontos no plano cartesiano, conhecido como invólucro convexo. O invólucro convexo representa a forma da peça de tecido necessária para englobar todos os pontos sem qualquer buraco ou cavidade. Exploramos dois algoritmos conhecidos, o scan de Graham e a marcha de Jarvis, para resolver esse problema de forma eficiente. Descrições detalhadas desses métodos podem ser encontradas no livro-texto "Algoritmos: Teoria e Prática" de Thomas H. Cormen, especificamente no capítulo 33, seção 3.

2. Introdução:

A indústria têxtil frequentemente enfrenta desafios na determinação precisa dos tamanhos das peças de tecido que precisam ser adquiridas para períodos futuros. Para resolver essa questão, é proposta uma solução algorítmica para calcular o polígono convexo mínimo que abrange um conjunto dado de pontos no plano cartesiano. Ao encapsular todos os pontos dentro de uma forma convexa, garantimos a utilização eficiente do tecido sem desperdício.

O problema do invólucro convexo é um tópico bem estudado na geometria computacional, e numerosos algoritmos foram desenvolvidos para abordá-lo diretamente. Entre os métodos mais famosos estão o scan de Graham e a marcha de Jarvis. O scan de Graham utiliza um algoritmo de ordenação para ordenar os pontos de entrada antes de construir o invólucro convexo. Por outro lado, o algoritmo da marcha de Jarvis constrói o invólucro convexo de forma iterativa, sem exigir uma etapa de ordenação prévia.

Para implementar a solução, um programa é desenvolvido para processar um arquivo de entrada contendo uma sequência de pontos no plano cartesiano, sendo cada ponto representado em uma linha separada e suas coordenadas fornecidas como valores inteiros. O programa executa as quatro configurações: scan de Graham com MergeSort, scan de Graham com Insertion Sort, scan de Graham com um algoritmo de ordenação linear (Counting, Bucket ou Radix) e marcha de Jarvis. Cada configuração mede o tempo de execução necessário para calcular o invólucro convexo.

A solução apresentada oferece uma ferramenta valiosa para profissionais da indústria têxtil otimizarem as compras de tecido e reduzirem custos. Ao determinar com precisão o menor polígono convexo que engloba o conjunto dado de pontos, os fabricantes de tecidos podem minimizar o desperdício de tecido, contribuindo assim para práticas de produção sustentáveis.

3. Implementação e complexidade

Foram utilizadas 4 implementações e analisadas a complexidade de tempo de cada uma, a primeira Graham com merge sort, insertion sort, radix sort e por fim utilizei marcha de jarvis e avaliei o desempenho de cada implementação.

Complexidade de Tempo:

A etapa inicial do algoritmo de Graham com MergeSort envolve a ordenação dos pontos de entrada com base em seus ângulos polares em relação a um ponto de referência. O MergeSort possui uma complexidade de tempo média e pior caso de $O(n \log n)$, onde n é o número de pontos no conjunto de entrada. Construção do Invólucro Convexo: Após a ordenação dos pontos, o algoritmo de Graham percorre a lista ordenada para construir o invólucro convexo. Esse processo tem uma complexidade de tempo de $O(n)$, pois cada ponto é processado apenas uma vez. Portanto, a complexidade de tempo total do algoritmo de Graham com MergeSort é dominada pela etapa de ordenação, resultando em $O(n \log n)$ no pior caso. A mesma coisa pode ser dita dos outros algoritmos de graham, onde a etapa de ordenação é a mais custosa, portanto para o graham com insertionsort o custo foi de $O(n^2)$.

Já o algoritmo de Jarvis tem complexidade da ordem de $O(n*h)$ onde h é o número de vértices do polígono, no caso de um polígono com muitos pontos na borda a ordem de complexidade fica na ordem de n^2 já no caso em que há poucos pontos na borda o algoritmo supera e muito o algoritmo de Graham.

Ao contrário do MergeSort, o Radix Sort é um algoritmo de ordenação linear que aproveita as propriedades dos dígitos dos números para realizar a ordenação. A complexidade de tempo do Radix Sort é $O(kn)$, onde n é o número de pontos e k é o número médio de dígitos dos pontos. Após a ordenação dos pontos usando o Radix Sort, o algoritmo de Graham percorre a lista ordenada para construir o invólucro convexo. Essa etapa tem uma complexidade de tempo de $O(n)$, pois cada ponto é processado apenas uma vez. Assim, a complexidade de tempo total do algoritmo de Graham com Radix Sort é dominada pela etapa de ordenação, resultando em $O(kn)$ no pior caso. É importante mencionar que a escolha de k depende do intervalo dos valores dos pontos e da precisão necessária durante a conversão para inteiros. Desta forma neste experimento onde o máximo número de digitos é da ordem de 12, temos que a complexidade foi de $O(12*n)$

4. Conclusão:

Este experimento apresentou uma solução eficiente para o problema de determinar o menor polígono convexo que envolve um conjunto de pontos no plano cartesiano, conhecido como invólucro convexo. O objetivo principal é auxiliar a indústria têxtil na determinação precisa dos tamanhos das peças de tecido necessárias, visando otimizar custos e reduzir desperdícios.

Foram explorados dois algoritmos bem estabelecidos, o scan de Graham e a marcha de Jarvis. O scan de Graham utiliza um algoritmo de ordenação, como o MergeSort, para ordenar os pontos antes de construir o invólucro convexo. Já o algoritmo da marcha de Jarvis constrói o invólucro convexo iterativamente, sem a necessidade de uma etapa de ordenação prévia.

O programa implementado permite o processamento de um arquivo de entrada contendo os pontos no plano cartesiano e a execução das quatro configurações possíveis: scan de Graham com MergeSort, scan de Graham com Insertion Sort, scan de Graham com Radix Sort e marcha de Jarvis. Cada configuração é avaliada quanto ao tempo de execução necessário para calcular o invólucro convexo.

A solução proposta oferece uma ferramenta valiosa para os profissionais da indústria têxtil, possibilitando a otimização das compras de tecido e a redução de custos. Ao determinar com precisão o menor polígono convexo que abrange o conjunto de pontos fornecidos, é possível minimizar o desperdício de tecido, contribuindo para práticas de produção sustentáveis.

A análise de complexidade de tempo realizada revelou que a etapa de ordenação é a mais custosa nos algoritmos de Graham. No caso do Graham com MergeSort, a complexidade de tempo é $O(n \log n)$, enquanto o Graham com Insertion Sort tem complexidade $O(n^2)$. O Graham com Radix Sort possui uma complexidade de tempo $O(kn)$, onde k é o número médio de dígitos dos pontos. Já a marcha de Jarvis tem uma complexidade de tempo de $O(n*h)$, onde h é o número de vértices do polígono.

Em termos de complexidade de espaço, todas as implementações apresentadas têm uma complexidade de espaço de $O(n)$, onde n é o número de pontos no conjunto de entrada.

Portanto, a solução proposta oferece uma abordagem eficiente para o problema do invólucro convexo na indústria têxtil, permitindo uma tomada de decisão mais precisa e econômica no dimensionamento das peças de tecido. Com a implementação dos algoritmos de Graham e Jarvis, juntamente com as diferentes configurações de ordenação, é possível selecionar a abordagem mais adequada para cada situação, considerando as características dos conjuntos de pontos e os requisitos de desempenho.

5. Bibliografia

Cormen, T. H. (2007). Algoritmos: Teoria e Prática (Capítulo 33, Seção 3).