

Интегралы и дифференциальные уравнения

Лекции
2 семестр

GitHub: [malyinik](#)

2024 г.

Содержание

1	Первообразная и неопределённый интеграл	2
1.1	Первообразная	2
1.1.1	Свойства первообразной	2
1.2	Неопределённый интеграл	3
1.2.1	Свойства неопределённого интеграла	3
1.2.2	Геометрический смысл	5
1.2.3	Таблица основных интегралов	6
1.3	Основные методы интегрирования	7
2	Правильные и неправильные рациональные дроби	9
2.1	Интегрирование простейших рациональных дробей	9
2.1.1	$\frac{A}{x - a}$	9
2.1.2	$\frac{A}{(x - a)^k}$	9
2.1.3	$\frac{Mx + N}{x^k + px + q}$	10
2.2	Неправильные рациональные дроби	10
2.3	Метод неопределённых коэффициентов	12
2.4	Метод конкретных значений	12
2.5	Выводы	12
2.6	Неберущиеся интегралы	13
3	Определённый интеграл. Криволинейная трапеция	14
3.1	Определённый интеграл	14
3.2	Криволинейная трапеция	15
3.2.1	Геометрический смысл	15
3.3	Свойства определённого интеграла	15

1 Первообразная и неопределённый интеграл

1.1 Первообразная

Определение 1. Функция $F(x)$ называется **первообразной** функции $f(x)$ на интервале $(a; b)$, если $F(x)$ дифференцируема на $(a; b)$ и $\forall x \in (a; b)$:

$$\boxed{F'(x) = f(x)} \quad (1)$$

Пример.

$$f(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}, \quad D_f = (0; +\infty)$$

$$F(x) = \sqrt{x} - \text{первообразная } f(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

$$F'(x) = (\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}} = f(x)$$

$$F(x) = \sqrt{x} + 3 - \text{первообразная } f(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

1.1.1 Свойства первообразной

Свойство 1.

Если $F(x)$ — первообразная функции $f(x)$ на $(a; b)$, то $F(x) + C$ — первообразная функции $f(x)$ на $(a; b)$, где $\forall C — const$.

Свойство 2.

Если $\Phi(x)$ дифференцируема на $(a; b)$ и $\forall x \in (a; b): \Phi'(x) = 0$, то $\Phi(x) = const$, $\forall x \in (a; b)$.

Свойство 3 (*Существование первообразной*).

Любая непрерывная функция на $(a; b)$ имеет множество первообразных на этом интервале, причём любые две из них отличаются друг от друга на константу.

$$\begin{aligned} \Phi(x), F(x) &— \text{первообразные функции } f(x) \text{ на } (a; b) \\ \Phi(x) - F(x) &= const \end{aligned}$$

1.2 Неопределённый интеграл

Определение 2. Множество первообразных функции $f(x)$ на $(a; b)$ называется **неопределённым интегралом**.

$$\int f(x) dx = F(x) + C \quad (2)$$

\int — знак интеграла

$f(x)$ — подынтегральная функция

$f(x) dx$ — подынтегральное выражение

x — переменная

$F(x) + C$ — множество первообразных

C — произвольная константа

Определение 3. Интегрирование — нахождение неопределённого интеграла.

1.2.1 Свойства неопределённого интеграла

Свойство 1.

Производная от неопределённого интеграла равна подынтегральной функции.

$$\left(\int f(x) dx \right)' = f(x)$$

Доказательство.

$$\left(\int f(x) dx \right)' \stackrel{(2)}{=} (F(x) + C)' = F'(x) + C' = F'(x) \stackrel{(1)}{=} f(x)$$

■

Свойство 2.

Дифференциал от неопределённого интеграла равен подынтегральному выражению.

$$d \left(\int f(x) dx \right) = f(x) dx$$

Доказательство.

$$\begin{aligned} d \left(\int f(x) dx \right) &\stackrel{(2)}{=} d(F(x) + C) = (F(x) + C)' dx = \\ &= (F'(x) + C') dx = F'(x) dx \stackrel{(1)}{=} f(x) dx \end{aligned}$$

■

Свойство 3.

Неопределённый интеграл от дифференциала от некоторой функции равен сумме этой функции и константы.

$$\boxed{\int d(F(x)) = F(x) + C, \quad \forall C = \text{const}}$$

Доказательство.

$$\int d(F(x)) = \int F'(x) dx \stackrel{(1)}{=} \int f(x) dx \stackrel{(2)}{=} F(x) + C, \quad \forall C = \text{const}$$

■

Свойство 4.

Константу можно выносить за знак неопределённого интеграла.

$$\boxed{\int \lambda \cdot f(x) dx = \lambda \int f(x) dx, \quad \lambda \neq 0}$$

Доказательство.

Пусть $F(x)$ — первообразная $f(x)$

$$\lambda \int f(x) dx \stackrel{(2)}{=} \lambda \cdot (F(x) + C), \quad \forall C = \text{const}$$

Функция $\lambda \cdot F(x)$ — первообразная $\lambda \cdot f(x)$:

$$\begin{aligned} (\lambda \cdot F(x))' &= \lambda \cdot F'(x) \stackrel{(1)}{=} \lambda \cdot f(x) \\ \int \lambda \cdot f(x) dx &\stackrel{(2)}{=} \lambda \cdot F(x) + C_1, \quad \forall C_1 = \text{const} \end{aligned}$$

Так как константы C_1, C — произвольные, $\lambda \neq 0$, то их всегда можно выбрать так, чтобы $C_1 = \lambda C$. Тогда множества $\lambda \cdot (F(x) + C)$ и $\lambda \cdot F(x) + C_1$ совпадают. ■

Свойство 5.

Если функции $f_1(x)$ и $f_2(x)$ на $(a; b)$ имеют первообразные $F_1(x)$ и $F_2(x)$ соответственно, то функция $\lambda_1 f_1(x) + \lambda_2 f_2(x)$, где $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$, имеет первообразную на $(a; b)$, причём $\lambda_1^2 + \lambda_2^2 > 0$:

$$\int (\lambda_1 f_1(x) + \lambda_2 f_2(x)) dx = \lambda_1 \int f_1(x) dx + \lambda_2 \int f_2(x) dx$$

Доказательство.

$F_1(x)$ — первообразная $f_1(x)$

$F_2(x)$ — первообразная $f_2(x)$

$$\begin{aligned} \lambda_1 \int f_1(x) dx + \lambda_2 \int f_2(x) dx &\stackrel{(2)}{=} \lambda_1 (F_1(x) + C_1) + \lambda_2 (F_2(x) + C_2) = \\ &= \lambda_1 F_1(x) + \lambda_2 F_2(x) + \lambda_1 C_1 + \lambda_2 C_2, \quad \forall C_1, C_2 = \text{const} \end{aligned}$$

Функция $F(x) = \lambda_1 F_1(x) + \lambda_2 F_2(x)$ — первообразная функции $\lambda_1 f_1(x) + \lambda_2 f_2(x)$.

$$F'(x) = (\lambda_1 F_1(x) + \lambda_2 F_2(x))' = \lambda_1 F_1'(x) + \lambda_2 F_2'(x) \stackrel{(1)}{=} \lambda_1 f_1(x) + \lambda_2 f_2(x) \\ \int (\lambda_1 f_1(x) + \lambda_2 f_2(x)) dx \stackrel{(2)}{=} \lambda_1 f_1(x) + \lambda_2 f_2(x) + C, \quad \forall C - const$$

Так как константы C_1, C_2, C — произвольные, то всегда можно добиться выполнения равенства $C = \lambda_1 C_1 + \lambda_2 C_2$.

Тогда множества $\lambda_1 F_1(x) + \lambda_2 F_2(x) + \lambda_1 C_1 + \lambda_2 C_2$ и $\lambda_1 F_1(x) + \lambda_2 F_2(x) + C$ совпадают. ■

Свойство 6 (Инвариантность формы интегрирования).

Если $\int f(x) dx = F(x) + C$, где $C - const$, то $\int f(u) du = F(u) + C$, где $C - const$, $u = \varphi(x)$ — непрерывно-дифференцируемая функция.

Доказательство.

x — независимая переменная

$f(x)$ — непрерывная функция

$F(x)$ — первообразная $f(x)$

$$\int f(x) dx = F(x) + C, \quad \forall C - const$$

Рассмотрим сложную функцию $F(u) = F(\varphi(x))$. Найдём дифференциал $F(u)$:

$$d(F(u)) = F'(u) \cdot \underbrace{\varphi'(x) dx}_{du} = \left| \begin{array}{l} u = \varphi(x) \\ du = \varphi'(x) dx \end{array} \right| = F'(u) du \stackrel{(1)}{=} f(u) du$$

Неопределённый интеграл:

$$\int f(u) du = \int d(F(u)) \stackrel{(\text{св. 3})}{=} F(u) + C, \quad \forall C - const$$

■

Пример.

$$\int \sin x dx = -\cos x + C \quad \sin(2x) d(2x) = -\cos(2x) + C$$

1.2.2 Геометрический смысл

Неопределённый интеграл геометрически представляет собой семейство интегральных кривых (графиков функций) вида $y = F(x) + C$, $\forall C - const$.

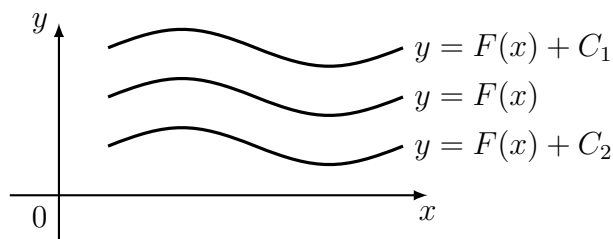


Рис. 1: Геометрический смысл неопределённого интеграла

1.2.3 Таблица основных интегралов

Таблица 1: Таблица основных интегралов

1. $\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C, \forall C - const$	11. $\int \frac{dx}{a^2 - x^2} = \frac{1}{2a} \ln \left \frac{a+x}{a-x} \right + C$
2. $\int dx = x + C$	12. $\int \frac{dx}{x^2 - a^2} = \frac{1}{2a} \ln \left \frac{a-x}{a+x} \right + C$
3. $\int \frac{dx}{x} = \ln x + C$	13. $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \arcsin \frac{x}{a} + C$
4. $\int e^x dx = e^x + C$	14. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} = \ln \left x + \sqrt{x^2 \pm a^2} \right + C$
5. $\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$	15. $\int \operatorname{sh} x dx = \operatorname{ch} x + C$
6. $\int \sin x dx = -\cos x + C$	16. $\int \operatorname{ch} x dx = \operatorname{sh} x + C$
7. $\int \cos x dx = \sin x + C$	17. $\int \frac{dx}{\operatorname{ch}^2 x} = \operatorname{th} x + C$
8. $\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x + C$	18. $\int \frac{dx}{\operatorname{sh}^2 x} = -\operatorname{cth} x + C$
9. $\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\operatorname{ctg} x + C$	19. $\int \frac{dx}{\sin x} = \ln \left \operatorname{tg} \frac{x}{2} \right + C$
10. $\int \frac{dx}{a^2 + x^2} = \frac{1}{a} \operatorname{arctg} \frac{x}{a} + C$	20. $\int \frac{dx}{\cos x} = \ln \left \operatorname{tg} \left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4} \right) \right + C$

Доказательство (19).

$$\begin{aligned}
 \int \frac{dx}{\sin x} &= \int \frac{dx}{2 \sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2}} = \frac{1}{2} \int \frac{\frac{1}{\cos^2 \frac{x}{2}}}{\frac{\sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2}}{\cos^2 \frac{x}{2}}} dx = \int \frac{\frac{1}{2 \cos^2 \frac{x}{2}}}{\operatorname{tg} \frac{x}{2}} dx = \int \frac{d(\operatorname{tg} \frac{x}{2})}{\operatorname{tg} \frac{x}{2}} = \\
 &= \left| \operatorname{tg} \frac{x}{2} \right| = \int \frac{dt}{t} = \ln |t| + C = \ln \left| \operatorname{tg} \frac{x}{2} \right| + C
 \end{aligned}$$

■

1.3 Основные методы интегрирования

1. Непосредственное интегрирование (свойства + таблица)

Пример.

$$\begin{aligned}\int \left(3e^x + \sin x - \frac{1}{1+x^2} \right) dx &= 3 \int e^x dx + \int \sin x dx - \int \frac{dx}{1+x^2} = \\ &= 3e^x - \cos x - \operatorname{arctg} x + C, \quad \forall C - \text{const}\end{aligned}$$

2. Метод подстановки

(2.1) Занесение под знак дифференциала

Пример.

$$\int \frac{e^{\arcsin x} \cdot 1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \int e^{\arcsin x} d(\arcsin x) = e^{\arcsin x} + C, \quad \forall C - \text{const}$$

(2.2) Замена переменной

Пусть функция $x = \varphi(t)$ определена и дифференцируема на T , а множество X — множество значений этой функции, на котором определена $f(x)$. Тогда, если существует первообразная функции $f(x)$ на X , то на множестве T верно равенство:

$$\int f(x) dx = \left| \begin{array}{l} x = \varphi(t) \\ dx = \varphi'(t) \end{array} \right| = \int f(\varphi(t)) \varphi'(t) dt$$

Пример.

$$\int x(3x-1)^{2024} dx = \left| \begin{array}{l} 3x-1=t \quad 3x=t+1 \\ x=\frac{1}{3}(t+1) \\ dx=\left(\frac{1}{3}t+\frac{1}{3}\right)' dt = \frac{1}{3}dt \end{array} \right| = \int \frac{1}{3}(t+1) \cdot t^{2024} \frac{1}{3} dt$$

3. Интегрирование по частям

Пусть функции $u = u(x)$ и $v = v(x)$ непрерывно-дифференцируемые, тогда справедлива формула интегрирования по частям:

$$\int u dv = u \cdot v - \int v du$$

Доказательство.

Рассмотрим произведение $u \cdot v = u(x) \cdot v(x)$

Дифференциал:

$$d(u \cdot v) = u \cdot dv + v \cdot du$$

Выразим $u \cdot dv$:

$$u \cdot dv = d(u \cdot v) - v \cdot du$$

Интегрируем:

$$\int u \, dv = \int (d(uv) - v \, du)$$

По свойству неопределённого интеграла (5):

$$\int u \, dv = \int d(uv) - \int v \, du$$

По свойству неопределённого интеграла (3):

$$\int u \, dv = u \cdot v - \int v \, du$$



Пример.

$$1. \quad \int x e^x \, dx = \int \underbrace{x}_u d(\underbrace{e^x}_v) = x e^x - \int e^x \, dx = x e^x - e^x + C, \quad \forall C - const$$

$$\begin{aligned} 2. \quad \int \underbrace{\arccos x}_u x \underbrace{dx}_{dv} &= \left| \begin{array}{l} u = \arccos x, \, du = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx \\ dv = dx, \, v = \int dv = \int dx = x \end{array} \right| = \\ &= x \cdot \arccos x - \int \frac{-x \, dx}{\sqrt{1-x^2}} = x \cdot \arccos x - \frac{1}{2} \int \frac{d(1-x^2)}{\sqrt{1-x^2}} = \\ &= x \cdot \arccos x - \frac{1}{2} \cdot \frac{(1-x^2)^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} + C = \\ &= x \cdot \arccos x - \sqrt{1-x^2} + C, \quad \forall C - const \end{aligned}$$

2 Правильные и неправильные рациональные дроби

Определение 1. Дробно-рациональной функцией или рациональной дробью называется функция, равная частному от деления двух многочленов.

$$\frac{P_m(x)}{Q_n(x)} = \frac{a_m x^m + a_{m-1} x^{m-1} + \dots + a_1 x + a_0}{b_n x^n + b_{n-1} x^{n-1} + \dots + b_1 x + b_0},$$

$$a_m, a_{m-1}, \dots, a_1, a_0, b_n, b_{n-1}, \dots, b_1, b_0 - \text{const}$$

где $P_m(x)$, $Q_n(x)$ — многочлены степени m и n соответственно.

Определение 2. Рациональная дробь называется **правильной**, если степень числителя меньше степени знаменателя, то есть $m < n$.

Определение 3. Рациональная дробь называется **неправильной**, если степень числителя не меньше степени знаменателя, то есть $m \geq n$.

Простейшие рациональные дроби

$$1. \frac{A}{x-a} \quad 2. \frac{A}{(x-a)^k} \quad 3. \frac{Mx+N}{x^2+px+q} \quad 4. \frac{Mx+N}{(x^2+px+q)^k}$$

где $A, a, M, N, p, q - \text{const}$, $K \in \mathbb{N}$, $k \geq 2$
 $x^2 + px + q$ не имеет действительных корней.

$$D = p^2 - 4q < 0, \quad 4q - p^2 > 0, \quad \boxed{q - \frac{p^2}{4} > 0} \quad (*)$$

2.1 Интегрирование простейших рациональных дробей

2.1.1 $\frac{A}{x-a}$

$$\int \frac{A}{x-a} dx = A \int \frac{dx}{x-a} = A \int \frac{d(x-a)}{x-a} = A \cdot \ln|x-a| + C, \quad \forall C - \text{const}$$

2.1.2 $\frac{A}{(x-a)^k}$

$$\int \frac{A}{(x-a)^k} dx = A \int \frac{dx}{(x-a)^k} = A \int \frac{d(x-a)}{(x-a)^k} = A \int (x-a)^{-k} d(x-a) = A \cdot \frac{(x-a)^{-k+1}}{-k+1} + C,$$

$$\forall C - \text{const}$$

2.1.3 $\frac{Mx + N}{x^k + px + q}$

$$\begin{aligned}
 \int \frac{Mx + N}{x^2 + px + q} dx &= \left| \begin{aligned} x^2 + px + q &= x^2 + 2 \cdot \frac{p}{2}x + \frac{p^2}{4} - \frac{p^2}{4} + q = \\ &= \left(x + \frac{p}{2}\right)^2 + \left(q - \frac{p^2}{4}\right) \stackrel{(*)}{=} \left(x + \frac{p}{2}\right)^2 + b^2 \end{aligned} \right| = \int \frac{Mx + N}{\left(x + \frac{p}{2}\right)^2 + b^2} dx = \\
 &= \left| x + \frac{p}{2} = t \quad x = t - \frac{p}{2} \quad dx = dt \right| = \int \frac{M \left(t - \frac{p}{2}\right) + N}{t^2 + b^2} dt = \\
 &= M \int \frac{t}{t^2 + b^2} dt + \left(N - \frac{p}{2}M\right) \int \frac{dt}{t^2 + b^2} = \\
 &= \frac{M}{2} \int \frac{d(t^2 + b^2)}{t^2 + b^2} + \left(N - \frac{p}{2}M\right) \frac{1}{b} \operatorname{arctg} \frac{t}{b} = \\
 &= \frac{M}{2} \ln |t^2 + b^2| + \frac{\left(N - \frac{p}{2}M\right)}{b} \operatorname{arctg} \frac{t}{b} + C = \\
 &= \frac{M}{2} \ln |x^2 + px + q| + \frac{\left(N - \frac{p}{2}M\right)}{\sqrt{q - \frac{p^2}{4}}} \operatorname{arctg} \frac{x + \frac{p}{2}}{\sqrt{q - \frac{p^2}{4}}} + C, \quad \forall C - \text{const}
 \end{aligned}$$

Пример.

$$\begin{aligned}
 \int \frac{3x - 5}{x^2 + 2x + 10} dx &= \int \frac{3x - 5}{(x + 1)^2 + 3^2} = \left| \begin{aligned} x + 1 &= t \\ x &= t - 1 \\ dx &= dt \end{aligned} \right| = \int \frac{3(t - 1) - 5}{t^2 + 3^2} dt = \\
 &= 3 \int \frac{t}{t^2 + 3^2} dt - 8 \int \frac{dt}{t^2 + 3^2} = 3 \cdot \frac{1}{2} \int \frac{d(t^2 + 3^2)}{t^2 + 3^2} - 8 \cdot \frac{1}{3} \operatorname{arctg} \frac{t}{3} = \\
 &= \frac{3}{2} \ln |t^2 + 9| - \frac{8}{3} \operatorname{arctg} \frac{t}{3} + C = \frac{3}{2} \ln |x^2 + 2x + 10| - \frac{8}{3} \operatorname{arctg} \frac{x + 1}{3} + C, \\
 &\quad \forall C - \text{const}
 \end{aligned}$$

2.2 Неправильные рациональные дроби

Любая неправильная рациональная дробь может быть представлена в виде суммы многочлена и правильной рациональной дроби.

$$\boxed{\frac{P(x)}{Q(x)} = L(x) + \frac{r(x)}{Q(x)}} \quad (\vee)$$

$\frac{P(x)}{Q(x)}$ — неправильная рациональная дробь

$L(x)$ — многочлен/частное от деления $P(x)$ на $Q(x)$

$r(x)$ — остаток от деления $P(x)$ на $Q(x)$

$\frac{r(x)}{Q(x)}$ — правильная рациональная дробь.

Интегрируя (V) получаем:

$$\int \frac{P(x)}{Q(x)} dx = \int L(x) dx + \int \frac{r(x)}{Q(x)} dx$$

Вывод: Интегрирование неправильной рациональной дроби сводится к интегрированию многочлена и правильной рациональной дроби.

Теорема 1 (О разложении правильной рациональной дроби на простейшие).

Любая правильная рациональная дробь $\frac{P(x)}{Q(x)}$, знаменатель которой можно разложить на множители:

$$Q(x) = (x - x_1)^{k_1} \cdot (x - x_2)^{k_2} \cdot \dots \cdot (x - x_n)^{k_n} \cdot (x^2 + p_1x + q_1)^{s_1} \cdot \dots \cdot (x^2 + p_mx + q_m)^{s_m},$$

может быть представлена и при том единственным образом в виде суммы простейших рациональных дробей:

$$\begin{aligned} \frac{P(x)}{Q(x)} = & \frac{A_1}{x - x_1} + \frac{B_1}{(x - x_1)^2} + \dots + \frac{C_1}{(x - x_1)^{k_1}} + \dots + \frac{A_n}{(x - x_n)} + \frac{B_n}{(x - x_n)^2} + \dots + \\ & + \frac{C_n}{(x - x_n)^{k_n}} + \frac{M_1x + N_1}{x^2 + p_1x + q_1} + \dots + \frac{M_{s_1}x + N_{s_1}}{(x^2 + p_1x + q_1)^{s_1}} + \dots + \\ & + \frac{E_1x + F_1}{x^2 + p_mx + q_m} + \dots + \frac{E_{s_m}x + F_{s_m}}{(x^2 + p_mx + q_m)^{s_m}} \end{aligned}$$

$$\left. \begin{array}{l} A_1, B_1, \dots, C_1 \\ A_n, B_n, \dots, C_n \\ M_1, N_1, \dots, M_{s_1}, N_{s_1} \\ E_1, F_1, \dots, E_{s_m}, F_{s_m} \end{array} \right\} \in \mathbb{R} \quad \begin{array}{l} x^2 + p_1x + q_1 \\ \dots\dots\dots \\ x^2 + p_mx + q_m \end{array} \quad \begin{array}{l} \text{не имеют} \\ \text{действительных корней} \end{array}$$

$k_1, k_2, \dots, k_n, s_1, \dots, s_m \in \mathbb{N}$

Пример.

$$1) \quad \frac{x^2 + 4}{(x - 2)(x - 3)^3} = \frac{A}{x - 2} + \frac{B}{x - 3} + \frac{C}{(x - 3)^2} + \frac{D}{(x - 3)^3}$$

$$2) \quad \frac{x^3 + 1}{x^2(x^2 + 1)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x^2} + \frac{Cx + D}{x^2 + 1}$$

$$3) \quad \frac{x^2 + x + 13}{(x - 1)^2(x^2 - 4)(x^2 + 4)^2} = \frac{A}{x - 1} + \frac{B}{(x - 1)^2} + \underbrace{\frac{Cx + D}{x^2 - 4}}_{\frac{C}{x-2} + \frac{D}{x+2}} + \frac{Ex + F}{x^2 + 4} + \frac{Gx + H}{(x^2 + 4)^2}$$

2.3 Метод неопределённых коэффициентов

Равенство в теореме о разложении правильной рациональной дроби на простейшие (Т. 1) представляет собой тождество. Поэтому, приводя дроби к общему знаменателю, получим тождество числителей слева и справа. Приравнявая коэффициенты при одинаковых степенях x получаем СЛАУ для определения неизвестных коэффициентов.

Пример.

$$\begin{aligned} \int \frac{3x-4}{x(x-2)(x+1)} dx &\ominus \\ \frac{3x-4}{x(x-2)(x+1)} &= \frac{A}{x} + \frac{B}{x-2} + \frac{C}{x+1} = \frac{A(x-2)(x+1) + Bx(x+1) + Cx(x-2)}{x(x-2)(x+1)} \\ 0 \cdot x^2 + 3x - 4 &= A(x-2)(x+1) + Bx(x+1) + Cx(x-2) = \\ &= x^2(A+B+C) + (B-A-2C)x - 2A \end{aligned} \quad (**)$$
$$\left. \begin{array}{l} x^2 \mid 0 = A + B + C \\ x^1 \mid 3 = B - A - 2C \\ x^0 \mid -4 = -2A \end{array} \right\} \text{СЛАУ} \quad A = 2 \quad B = \frac{1}{3} \quad C = -\frac{7}{3}$$
$$\begin{aligned} \ominus \int \left(\frac{2}{x} + \frac{\frac{1}{3}}{x-2} + \frac{-\frac{7}{3}}{x+1} \right) dx &= 2 \int \frac{dx}{x} + \frac{1}{3} \int \frac{dx}{x-2} - \frac{7}{3} \int \frac{dx}{x+1} = \\ &= 2 \ln |x| + \frac{1}{3} \ln |x-2| - \frac{7}{3} \ln |x+1| + C, \quad \forall C - \text{const} \end{aligned}$$

2.4 Метод конкретных значений

После получения тождества числителей (**) подставляем конкретные значения переменной x , так как оно верно для любого x .

Обычно вместо x подставляют действительные корни знаменателя.

Пример.

$$\begin{aligned} x=0: \quad -4 &= -2A \Rightarrow A=2 \\ x=2: \quad 3 \cdot 2 - 4 &= B \cdot 2 \cdot 3 \Rightarrow B=\frac{1}{3} \\ x=-1: \quad -3 - 4 &= -C \cdot (-3) \Rightarrow C=-\frac{7}{3} \end{aligned}$$

2.5 Выводы

1. **Метод конкретных значений** лучше использовать, когда в знаменателе правильной рациональной дроби нет кратных корней.
2. **Метод неопределённых коэффициентов** лучше использовать, когда в знаменателе правильной рациональной дроби кратные или комплексные (не действительные) корни.
3. Лучше комбинировать два метода.

2.6 Неберущиеся интегралы

1. $\int e^{-x^2} dx$ — интеграл Пуассона (теория вероятности)
2. $\int \frac{dx}{\ln x}$ — логарифмический интеграл (теория чисел)
3. $\int \cos x^2 dx, \int \sin x^2 dx$ — интегралы Френеля (физика)

3 Определённый интеграл. Криволинейная трапеция

3.1 Определённый интеграл

Пусть функция $y = f(x)$ определена на $[a; b]$

Определение 1. Множество точек $a = x_0 < x_1 < \dots < x_i < \dots < x_n = b$ называется **разбиением отрезка $[a; b]$** , при этом отрезки $[x_{i-1}; x_i]$ называются **отрезками разбиения**.

$$i = 1, \dots, n \quad i = \overline{1, n}$$

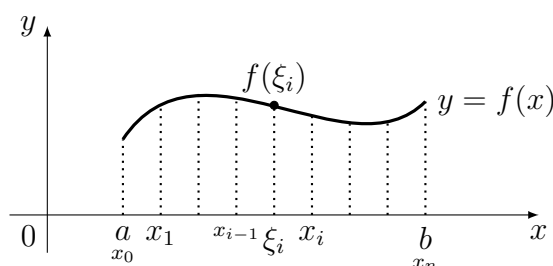
$$\Delta x_i = x_i - x_{i-1} \text{ — длина } i\text{-го отрезка разбиения} \quad i = \overline{1, n}$$

$$\lambda = \max_i \Delta x_i \text{ — диаметр разбиения}$$

Рассмотрим произвольное разбиение $[a; b]$. В каждом из отрезков разбиения $[x_{i-1}; x_i]$ выберем точку ξ_i , $i = \overline{1, n}$. Составим сумму

$$S_n = \sum_{i=1}^n f(\xi_i) \cdot \Delta x_i \quad (1)$$

(1) — интегральная сумма для функции $y = f(x)$ на $[a; b]$.



Определение 2. **Определённым интегралом** от функции $y = f(x)$ на $[a; b]$ называется конечный предел интегральной суммы (1), когда число отрезков разбиения растёт, а их длины стремятся к нулю.

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(\xi_i) \cdot \Delta x_i \quad (2)$$

Предел (2) не зависит от способа разбиения отрезка $[a; b]$ и выбора точек ξ_i , $\overline{1, n}$.

$f(x)$ — подынтегральная функция

$f(x) dx$ — подынтегральное выражение

\int_a^b — знак определённого интеграла

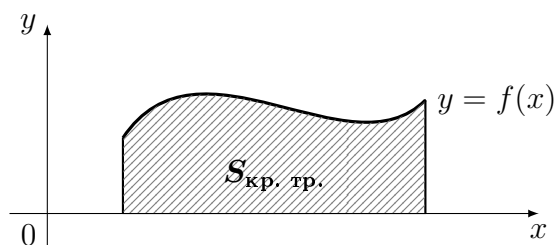
a — нижний предел интегрирования

b — верхний предел интегрирования

3.2 Криволинейная трапеция

Определение 3. Криволинейной трапецией называется фигура, ограниченная графиком функции $y = f(x)$, отрезком $[a; b]$ на Ox , прямыми $x = a$ и $x = b$ параллельными оси Oy .

3.2.1 Геометрический смысл



Определённый интеграл численно равен площади криволинейной трапеции.

$$S_{\text{кр. тр.}} = \int_a^b f(x) dx$$

Определение 4. Функция $y = f(x)$ называется **интегрируемой** на $[a; b]$, если существует конечный предел интегральной суммы (1) на $[a; b]$.

Теорема 1 (Существование определённого интеграла).

Если функция $y = f(x)$ непрерывна на $[a; b]$, то она на этом отрезке интегрируема.

3.3 Свойства определённого интеграла

Теорема 2.

Если функция $y = f(x)$ интегрируема на отрезке $[a; b]$, то имеет место равенство

$$\int_a^b f(x) dx = - \int_b^a f(x) dx$$

Доказательство.

По определению определённого интеграла (**опр. 2**)

$$\begin{aligned} \int_a^b f(x) dx &= \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(\xi_i) \cdot \Delta x = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(\xi_i)(x_i - x_{i-1}) = - \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(\xi_i)(x_{i-1} - x_i) \\ &= - \int_b^a f(x) dx \end{aligned}$$

■

Теорема 3 (*Аддитивность определённого интеграла*).

Если функция $y = f(x)$ интегрируема на каждом из отрезков $[a; c]$, $[c; b]$ ($a < c < b$), то она интегрируема на $[a; b]$ и верно равенство

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx$$

Доказательство.

Рассмотрим произвольное разбиение $[a; b]$ такое, что одна из точек разбиения совпадает с точкой c :

$$a = x_0 < x_1 < \dots < x_m = c < x_{m+1} < \dots < x_n = b$$

Данное разбиение определяет ещё два разбиения:

$$\begin{aligned} a = x_0 < x_1 < \dots < x_{m-1} < x_m = c & \quad \lambda_1 = \max_i \Delta x_i, \quad i = \overline{1, m} \\ c = x_m < x_{m+1} < \dots < x_{n-1} < x_n = b & \quad \lambda_2 = \max_i \Delta x_i, \quad i = \overline{m+1, n} \end{aligned}$$

Так как функция $y = f(x)$ интегрируема на $[a; c]$ и на $[c; b]$, то

$$\begin{aligned} \int_a^c f(x) dx &= \lim_{\lambda_1 \rightarrow 0} \sum_{i=1}^m f(\xi_i) \cdot \Delta x_i \\ \int_c^b f(x) dx &= \lim_{\lambda_2 \rightarrow 0} \sum_{i=m+1}^n f(\xi_i) \cdot \Delta x_i \end{aligned}$$

$$\lambda = \max\{\lambda_1; \lambda_2\} \quad \lambda \rightarrow 0$$

Суммируем интегральные суммы:

$$\sum_{i=1}^m f(\xi_i) \cdot \Delta x_i + \sum_{i=m+1}^n f(\xi_i) \cdot \Delta x_i = \sum_{i=1}^n f(\xi_i) \cdot \Delta x_i$$

Вычислим предел:

$$\begin{aligned} \lim_{\lambda \rightarrow 0} \left(\sum_{i=1}^m f(\xi_i) \cdot \Delta x_i + \sum_{i=m+1}^n f(\xi_i) \cdot \Delta x_i \right) &= \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(\xi_i) \cdot \Delta x_i \\ \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^m f(\xi_i) \cdot \Delta x_i + \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=m+1}^n f(\xi_i) \cdot \Delta x_i &= \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(\xi_i) \cdot \Delta x_i \\ \lim_{\lambda_1 \rightarrow 0} \sum_{i=1}^m f(\xi_i) \cdot \Delta x_i + \lim_{\lambda_2 \rightarrow 0} \sum_{i=m+1}^n f(\xi_i) \cdot \Delta x_i &= \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(\xi_i) \cdot \Delta x_i \end{aligned}$$

Из последнего равенства следует, что $f(x)$ — интегрируема на $[a; b]$ и верно равенство

$$\int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx = \int_a^b f(x) dx$$

■

Теорема 4.

Если $C = \text{const}$, то

$$\int_a^b c \, dx = c \cdot (b - a)$$

Доказательство.

$$\int_a^b c \, dx = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n c \cdot \Delta x_i = c \cdot \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n x_i - x_{i-1} = c \cdot (b - a)$$

■

Теорема 5.

Если функции $f_1(x)$, $f_2(x)$ интегрируемы на $[a; b]$, то их линейная комбинация

$$\lambda_1 f_1(x) + \lambda_2 f_2(x), \text{ где } \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$$

интегрируема на $[a; b]$ и верно равенство:

$$\int_a^b (\lambda_1 f_1(x) + \lambda_2 f_2(x)) \, dx = \lambda_1 \int_a^b f_1(x) \, dx + \lambda_2 \cdot \int_a^b f_2(x) \, dx$$

Доказательство.

$$\begin{aligned} \int_a^b (\lambda_1 f_1(x) + \lambda_2 f_2(x)) \, dx &= \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n (\lambda_1 f_1(\xi_i) + \lambda_2 f_2(\xi_i)) \cdot \Delta x_i = \\ &= \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n (\lambda_1 f_1(\xi_i) \cdot \Delta x_i + \lambda_2 f_2(\xi_i) \cdot \Delta x_i) = \\ &= \lim_{\lambda \rightarrow 0} \left(\sum_{i=1}^n \lambda_1 f_1(\xi_i) \cdot \Delta x_i + \sum_{i=1}^n \lambda_2 f_2(\xi_i) \cdot \Delta x_i \right) = \\ &= \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n \lambda_1 f_1(\xi_i) \cdot \Delta x_i + \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n \lambda_2 f_2(\xi_i) \cdot \Delta x_i = \\ &= \lambda_1 \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f_1(\xi_i) \cdot \Delta x_i + \lambda_2 \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f_2(\xi_i) \cdot \Delta x_i = \\ &= \lambda_1 \int_a^b f_1(x) \, dx + \lambda_2 \int_a^b f_2(x) \, dx = \\ &= \int_a^b (\lambda_1 f_1(x) + \lambda_2 f_2(x)) \, dx \end{aligned}$$

■

Следствие 5.1.

$$\int_a^a f(x) dx = 0$$

Теорема 6 (*О сохранении определённым интегралом знака подынтегральной функции*).

Если $f(x)$ интегрируема и неотрицательна на $[a; b]$, то

$$\int_a^b f(x) dx \geq 0$$

Доказательство.

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(\xi_i) \cdot \Delta x_i$$

Δx_i — длины отрезков разбиения $\Delta x_i > 0$
 $f(\xi_i) \geq 0$ по условию

$$f(\xi_i) \cdot \Delta x_i \geq 0, \quad i = \overline{1, n}$$

$$\sum_{i=1}^n f(\xi_i) \cdot \Delta x_i \geq 0 \quad \text{как сумма неотрицательных чисел}$$

$$\lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(\xi_i) \cdot \Delta x_i \geq 0 \quad \text{по следствию из теоремы о сохранении функции знака своего предела}$$

\Downarrow

$$\int_a^b f(x) dx \geq 0$$

■