# Содержание

# 1 Теоретические вопросы

## 1.1 Сформулируйте определение наклонной асимптоты

**Определение 1.**

## 1.2 Сформулируйте определение производной функции в точке

**Определение 2.** **Производной функции** $y = f(x)$ в точке $x_0$ называется предел отношения приращения функции к приращению аргумента при стремлении последнего к нулю.

$$\boxed{y'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}}$$

## 1.3 Сформулируйте определение односторонней производной функции

**Определение 3.** Производной функции $y = f(x)$ в точке $x_0$ справа(слева) или **правосторонней (левосторонней) производной** называется предел отношения приращения функции к приращению аргумента при стремлении к нулю справа(слева).

$$\boxed{y'_+(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0+} \frac{\Delta y}{\Delta x}} \qquad \boxed{y'_-(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0-} \frac{\Delta y}{\Delta x}}$$

## 1.4 Сформулируйте определение производной $n$-го порядка

**Определение 4.** **Производной $n$-го порядка** или **$n$-ой производной** функции $y = f(x)$ называется производная от $(n-1)$-ой производной функции $y = f(x)$

$$\boxed{y^{(n)} = \left(y^{(n-1)}\right)'}$$

## 1.5 Сформулируйте определение дифференцируемой функции в точке

**Определение 5.** Функция $y = f(x)$ называется **дифференцируемой в точке** $x_0$, если существует константа $A$ такая, что приращение функции в этой точке представимо в виде:

$$\boxed{\Delta y = A \cdot \Delta x + \alpha(\Delta x) \cdot \Delta x}$$

где $\alpha(\Delta x)$ – б.м.ф. при $\Delta x \to 0$

## 1.6 Сформулируйте определение дифференциала первого порядка

Пусть функция $y = f(x)$ определена в окрестности точки $x_0$ и дифференцируема в точке $x_0$.
Тогда по определению дифференцируемой функции:

$$\Delta y = f'(x_0) \cdot \Delta x + \alpha(\Delta x) \cdot \Delta x \tag{1}$$

где $\alpha(\Delta x)$ – б.м.ф. при $\Delta x \to 0$

**Определение 6.** **Дифференциалом** функции $y = f(x)$ в точке $x_0$ называется главная часть приращения функции $\Delta y$ или первое слагаемое в равенстве (1).

$$\boxed{dy = f'(x_0) \cdot \Delta x} \tag{2}$$

## 1.7 Сформулируйте определение дифференциала $n$-го порядка

**Определение 7.** $n$-ым дифференциалом или **дифференциалом $n$-го порядка** называется дифференциал от дифференциала $(n-1)$-го порядка.

$$d^n y = d(d^{n-1} y), \quad n = 2, 3, \ldots$$

## 1.8 Сформулируйте определение возрастающей функции

**Определение 8.** Функция $f(x)$ называется **возрастающей** на промежутке $I$, если для любых точек $x_1, x_2 \in I$, таких что $x_2 > x_1$ выполняется неравенство $f(x_2) > f(x_1)$.

*Пояснение*: Функция $f(x)$ называется **возрастающей** на промежутке $I$, если бо́льшему значению аргумента соответствует бо́льшее значение функции.

## 1.9 Сформулируйте определение невозрастающей функции

**Определение 9.** Функция $f(x)$ называется **невозрастающей** на промежутке $I$, если для любых точек $x_1, x_2 \in I$ , таких что $x_2 > x_1$ выполняется неравенство $f(x_2) \leq f(x_1)$.

*Пояснение*: Функция $f(x)$ называется **невозрастающей** на промежутке $I$, если бо́льшему значению аргумента соответствует не бо́льшее значение функции.

## 1.10 Сформулируйте определение убывающей функции

**Определение 10.** Функция $f(x)$ называется **убывающей** на промежутке $I$, если для любых точек $x_1, x_2 \in I$, таких что $x_2 > x_1$ выполняется неравенство $f(x_2) < f(x_1)$.

*Пояснение*: Функция $f(x)$ называется **убывающей** на промежутке $I$, если бо́льшему значению аргумента соответствует меньшее значение функции.

## 1.11 Сформулируйте определение неубывающей функции

**Определение 11.** Функция $f(x)$ называется **неубывающей** на промежутке $I$, если для любых точек $x_1, x_2 \in I$, таких что $x_2 > x_1$ выполняется неравенство $f(x_2) \geq f(x_1)$.

*Пояснение*: Функция $f(x)$ называется **неубывающей** на промежутке $I$, если бóльшему значению аргумента соответствует не меньшее значение функции.

## 1.12 Сформулируйте определение монотонной функции

**Определение 12.** Возрастающая, убывающая, невозрастающая и неубывающая функции называются **монотонными**.

## 1.13 Сформулируйте определение строго монотонной функции

**Определение 13.** Возрастающая и убывающая функции называются **строго монотонными**.

## 1.14 Сформулируйте определение локального минимума

**Теорема.**
Функция $f(x)$ имеет локальный минимум в точке $x_0$, если существует окрестность $U(x_0)$ точки $x_0$ такая, что для любого $x \in U(x_0)$ выполняется неравенство:

$$f(x) \geq f(x_0)$$

**Определение 14.** Точка $x_0$, в которой функция $f(x)$ имеет локальный минимум, называется точкой **локального минимума** этой функции.

## 1.15 Сформулируйте определение строгого локального минимума

**Теорема.**
Функция $f(x)$ имеет строгий локальный минимум в точке $x_0$, если существует окрестность $U(x_0)$ точки $x_0$ такая, что для любого $x \in U(x_0)$ выполняется неравенство:

$$f(x) > f(x_0)$$

**Определение 15.** Точка $x_0$, в которой функция $f(x)$ имеет строгий локальный минимум, называется точкой **строгого локального минимума** этой функции.

## 1.16 Сформулируйте определение локального максимума

**Теорема.**
Функция $f(x)$ имеет локальный максимум в точке $x_0$, если существует окрестность $U(x_0)$ точки $x_0$ такая, что для любого $x \in U(x_0)$ выполняется неравенство:

$$f(x) \leq f(x_0)$$

**Определение 16.** Точка $x_0$, в которой функция $f(x)$ имеет локальный максимум, называется точкой **локального максимума** этой функции.

## 1.17 Сформулируйте определение строгого локального максимума

**Теорема.**
Функция $f(x)$ имеет строгий локальный максимум в точке $x_0$, если существует окрестность $U(x_0)$ точки $x_0$ такая, что для любого $x \in U(x_0)$ выполняется неравенство:

$$f(x) < f(x_0)$$

**Определение 17.** Точка $x_0$, в которой функция $f(x)$ имеет строгий локальный максимум, называется точкой **строгого локального максимума** этой функции.

## 1.18 Сформулируйте определение экстремума

**Определение 18.** Минимум, максимум, строгий минимум, строгий максимум функции $f(x)$ называются **экстремумами** этой функции.

**Определение.** Точка $x_0$, в которой функция $f(x)$ имеет экстремум, называется **точкой экстремума** этой функции.

## 1.19 Сформулируйте определение строгого экстремума

**Определение 19.** Строгий минимум и строгий максимум функции $f(x)$ называются **строгими экстремумами** этой функции.

**Определение.** Точка $x_0$, в которой функция $f(x)$ имеет строгий экстремум, называется **точкой строго экстремума** этой функции.

## 1.20 Сформулируйте определение стационарной точки

**Определение 20.** Точка $x_0$, в которой производная функции $f(x)$ равна нулю, называется **стационарной точкой** этой функции.

## 1.21 Сформулируйте определение критической точки

**Определение 21.** Точка $x_0$, в которой производная функции $f(x)$ равна нулю или не существует, называется **критической точкой** этой функции.

## 1.22 Сформулируйте определение выпуклости функции на промежутке

**Определение 22.** Пусть функция $f(x)$ определена на интервале $(a; b)$. Функция $f(x)$ называется **выпуклой вверх (вниз)** на этом интервале, если любая точка касательной, проведённой к графику функции $f(x)$ (кроме точки касания) лежит выше (ниже) точки графика функции $f(x)$ с такой же абсциссой.

## 1.23 Сформулируйте определение точки перегиба графика функции

**Определение 23.** Пусть функция $f(x)$ определена на интервале $(a; b)$.
Точка $x_0 \in (a; b)$ называется **точкой перегиба <u>функции</u>** $f(x)$, если эта функция непрерывна в точке $x_0$ и если существует число $\delta > 0$ такое, что направление выпуклости функции $f(x)$ на интервалах $(x_0 - \delta, x_0)$ и $(x_0, x_0 + \delta)$ различны.
При этом точка $\big(x_0, f(x_0)\big)$ называется **точкой перегиба <u>графика функции</u>** $f(x)$.

*Пояснение*: Точка $x_0 \in (a; b)$ является **точкой перегиба <u>функции</u>** $f(x)$, если при переходе через эту точку, направление выпуклости функции меняется на противоположное.

## 2 Теоретические вопросы (формулировки теорем)

### 2.1 Сформулируйте необходимое и достаточное условие наличия наклонной асимптоты

**Теорема 1.**

### 2.2 Сформулируйте необходимое и достаточное условие дифференцируемости функции в точке

**Теорема 2** *(Необходимое и достаточное условие дифференцируемости функции)***.**
Функция $y = f(x)$ дифференцируема в точке $x_0$ тогда и только тогда, когда она имеет в этой точке конечную производную.

### 2.3 Сформулируйте теорему о связи дифференцируемости и непрерывности функции

**Теорема 3** *(Связь дифференцируемости и непрерывности функции)***.**
Если функция дифференцируема в точке $x_0$, то она в этой точке непрерывна.

### 2.4 Сформулируйте теорему о производной произведения

**Теорема 4** *(Производная произведения)***.**
Пусть функции $u = u(x),\ v = v(x)$ дифференцируемы в точке $x$.
Тогда в этой точке дифференцируемо их произведение и справедливо равенство:

$$(u \cdot v)' = u' \cdot v + v' \cdot u$$

### 2.5 Сформулируйте теорему о производной частного

**Теорема 5** *(Производная частного)***.**
Пусть функции $u = u(x),\ v = v(x)$ дифференцируемы в точке $x$.
Тогда в этой точке дифференцируемо их частное и справедливо равенство:

$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u' \cdot v - v' \cdot u}{v^2}$$

### 2.6 Сформулируйте свойство инвариантности формы записи дифференциала первого порядка

**Теорема 6** *(Инвариантность формы первого дифференциала)***.**
Форма записи первого дифференциала не зависит от того, является ли $x$ независимой переменной или функцией другого аргумента.

## 2.7 Сформулируйте теорему Ферма

**Теорема 7** *(**Теорема Ферма** (о нулях производной)).*
Пусть функция $y = f(x)$ определена на промежутке $X$ и во внутренней точке $\boldsymbol{c}$ этого промежутка достигает наибольшего или наименьшего значения. Если в этой точке существует производная $f'(c)$, то $f'(c) = 0$.

## 2.8 Сформулируйте теорему Ролля

**Теорема 8** *(**Теорема Ролля**).*
Пусть $y = f(x)$

1. непрерывна на $[a; b]$
2. дифференцируема на $(a; b)$
3. $f(a) = f(b)$

Тогда $\exists\ c \in (a; b):\ f'(c) = 0$

## 2.9 Сформулируйте теорему Лагранжа

**Теорема 9** *(**Теорема Лагранжа**).*
Пусть функция $y = f(x)$

1. непрерывна на $[a; b]$
2. дифференцируема на $(a; b)$

Тогда $\exists\ c \in (a; b):\ \boxed{f(b) - f(a) = f'(c) \cdot (b - a)}$

## 2.10 Сформулируйте теорему Коши

**Теорема 10** *(**Теорема Коши**).*
Пусть функции $f(x)$ и $\varphi(x)$

1. непрерывны на $[a; b]$
2. дифференцируемы на $(a; b)$
3. $\forall x \in (a; b):\ \varphi'(x) \neq 0$

Тогда $\exists\ c \in (a; b):$

$$\boxed{\frac{f(b) - f(a)}{\varphi(b) - \varphi(a)} = \frac{f'(c)}{\varphi'(c)}}$$