

# Интегралы и дифференциальные уравнения

Лекции  
2 семестр

GitHub: [malyinik](#)

2024 г.

# Содержание

<b>1</b>	<b>Первообразная и неопределённый интеграл</b>	<b>3</b>
1.1	Первообразная . . . . .	3
1.1.1	Свойства первообразной . . . . .	3
1.2	Неопределённый интеграл . . . . .	4
1.2.1	Свойства неопределённого интеграла . . . . .	4
1.2.2	Геометрический смысл . . . . .	6
1.2.3	Таблица основных интегралов . . . . .	7
1.3	Основные методы интегрирования . . . . .	8
<b>2</b>	<b>Правильные и неправильные рациональные дроби</b>	<b>10</b>
2.1	Интегрирование простейших рациональных дробей . . . . .	10
2.1.1	$\frac{A}{x-a}$ . . . . .	10
2.1.2	$\frac{A}{(x-a)^k}$ . . . . .	10
2.1.3	$\frac{Mx+N}{x^k+px+q}$ . . . . .	11
2.2	Неправильные рациональные дроби . . . . .	11
2.3	Метод неопределённых коэффициентов . . . . .	13
2.4	Метод конкретных значений . . . . .	13
2.5	Выводы . . . . .	13
2.6	Неберущиеся интегралы . . . . .	14
<b>3</b>	<b>Определённый интеграл. Криволинейная трапеция</b>	<b>15</b>
3.1	Определённый интеграл . . . . .	15
3.2	Криволинейная трапеция . . . . .	16
3.2.1	Геометрический смысл . . . . .	16
3.3	Свойства определённого интеграла . . . . .	16
3.4	Определённый интеграл с переменным верхним пределом интегрирования . . . . .	22
3.4.1	Свойства . . . . .	22
3.4.2	Формула Ньютона-Лейбница . . . . .	23
3.5	Методы вычисления определённого интеграла . . . . .	24
3.5.1	Метод интегрирования по частям . . . . .	24
3.5.2	Метод подстановки (замена переменной) . . . . .	25
3.6	Интегрирование чётных и нечётных функций по симметричному относительно начала координат промежутку . . . . .	26
3.7	Интегрирование периодических функций . . . . .	27
<b>4</b>	<b>Приложения определённого интеграла</b>	<b>28</b>
4.1	Площадь плоской фигуры . . . . .	28
4.1.1	Прямоугольная декартова система координат . . . . .	28
4.1.2	Параметрически заданная функция . . . . .	29
4.1.3	Полярная система координат . . . . .	30
4.2	Объём тела . . . . .	31
4.3	Тела вращения . . . . .	32
4.3.1	Прямоугольная декартова система координат . . . . .	32
4.3.2	Полярная система координат . . . . .	33
4.4	Длина дуги . . . . .	35
4.4.1	Прямоугольная декартова система координат . . . . .	35
4.4.2	Параметрически заданная функция . . . . .	36
4.4.3	Полярная система координат . . . . .	36
4.5	Площадь поверхности вращения (внешняя оболочка) . . . . .	38

4.5.1	Следствия . . . . .	39
<b>5</b>	<b>Несобственные интегралы</b>	<b>41</b>
5.1	Интегралы по бесконечному промежутку . . . . .	41
5.1.1	Признаки сходимости и расходимости несобственных интегралов 1-го рода . . . . .	42
5.1.2	Интегралы для сравнения. Эталоны . . . . .	45
5.2	Абсолютная и условная сходимость . . . . .	46
5.3	Несобственные интегралы 2-го рода . . . . .	47
5.3.1	Интегралы для сравнения. Эталоны . . . . .	49
5.3.2	Признаки сходимости несобственного интеграла 2-го рода . . . . .	49
<b>6</b>	<b>Дифференциальные уравнения</b>	<b>52</b>
<b>7</b>	<b>Дифференциальные уравнения 1-го порядка</b>	<b>53</b>
7.1	ДУ с разделяющимися переменными . . . . .	55
7.2	Однородные ДУ 1-го порядка . . . . .	57
7.3	Линейные ДУ 1-го порядка . . . . .	58
7.3.1	Метод Лагранжа (метод вариации произвольной постоянной) . . . . .	58
7.3.2	Метод Бернулли (метод подстановки) . . . . .	60
<b>8</b>	<b>Дифференциальные уравнения высшего порядка</b>	<b>64</b>
8.1	ДУ, допускающие понижение порядка . . . . .	66
8.1.1	1 тип . . . . .	66
8.1.2	2 тип . . . . .	66
8.1.3	3 тип . . . . .	68
8.2	Линейные ДУ высшего порядка . . . . .	69
8.2.1	Свойства частных решений ЛОДУ n-го порядка . . . . .	70
<b>9</b>	<b>Определитель Вронского (вронскиан)</b>	<b>72</b>
<b>10</b>	<b>Фундаментальная система решений ЛОДУ n-го порядка</b>	<b>75</b>
10.1	Формула Остроградского-Лиувилля для ЛОДУ 2-го порядка . . . . .	78
10.1.1	Нахождение общего решения ЛОДУ 2-го порядка по одному известному частному решению . . . . .	79
10.2	ЛОДУ с постоянными коэффициентами . . . . .	80
10.3	Методы построения общего решения ЛОДУ 2-го порядка по корням характеристического уравнения . . . . .	81
10.4	Построение общего решения ЛОДУ n-го порядка по корням характеристического уравнения . . . . .	83
<b>11</b>	<b>Линейные неоднородные дифференциальные уравнения</b>	<b>85</b>
11.1	Метод Лагранжа или метод вариации произвольных постоянных для нахождения общего решения ЛНДУ 2-го порядка. Система варьируемых переменных . . . . .	88
11.2	Метод построения частных решений ЛНДУ n-го порядка с постоянными коэффициентами и специальной правой частью (квазиполином) . . . . .	90

# 1 Первообразная и неопределённый интеграл

## 1.1 Первообразная

**Определение 1.** Функция  $F(x)$  называется **первообразной** функции  $f(x)$  на интервале  $(a; b)$ , если  $F(x)$  дифференцируема на  $(a; b)$  и  $\forall x \in (a; b)$ :

$$\boxed{F'(x) = f(x)} \quad (1)$$

**Пример.**

$$f(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}, \quad D_f = (0; +\infty)$$

$$F(x) = \sqrt{x} - \text{первообразная } f(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

$$F'(x) = (\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}} = f(x)$$

$$F(x) = \sqrt{x} + 3 - \text{первообразная } f(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

### 1.1.1 Свойства первообразной

**Свойство 1.**

Если  $F(x)$  — первообразная функции  $f(x)$  на  $(a; b)$ , то  $F(x) + C$  — первообразная функции  $f(x)$  на  $(a; b)$ , где  $\forall C = \text{const}$ .

**Свойство 2.**

Если  $\Phi(x)$  дифференцируема на  $(a; b)$  и  $\forall x \in (a; b): \Phi'(x) = 0$ , то  $\Phi(x) = \text{const}$ ,  $\forall x \in (a; b)$ .

**Свойство 3** (*Существование первообразной*).

Любая непрерывная функция на  $(a; b)$  имеет множество первообразных на этом интервале, причём любые две из них отличаются друг от друга на константу.

$$\Phi(x), F(x) - \text{первообразные функции } f(x) \text{ на } (a; b)$$

$$\Phi(x) - F(x) = \text{const}$$

## 1.2 Неопределённый интеграл

**Определение 2.** Множество первообразных функции  $f(x)$  на  $(a; b)$  называется **неопределённым интегралом**.

$$\int f(x) dx = F(x) + C \quad (2)$$

$\int$  — знак интеграла

$f(x)$  — подынтегральная функция

$f(x) dx$  — подынтегральное выражение

$x$  — переменная

$F(x) + C$  — множество первообразных

$C$  — произвольная константа

**Определение 3. Интегрирование** — нахождение неопределённого интеграла.

### 1.2.1 Свойства неопределённого интеграла

#### Свойство 1.

Производная от неопределённого интеграла равна подынтегральной функции.

$$\left( \int f(x) dx \right)' = f(x)$$

Доказательство.

$$\left( \int f(x) dx \right)' \stackrel{(2)}{=} (F(x) + C)' = F'(x) + C' = F'(x) \stackrel{(1)}{=} f(x)$$

■

#### Свойство 2.

Дифференциал от неопределённого интеграла равен подынтегральному выражению.

$$d \left( \int f(x) dx \right) = f(x) dx$$

Доказательство.

$$\begin{aligned} d \left( \int f(x) dx \right) &\stackrel{(2)}{=} d(F(x) + C) = (F(x) + C)' dx = \\ &= (F'(x) + C') dx = F'(x) dx \stackrel{(1)}{=} f(x) dx \end{aligned}$$

■

**Свойство 3.**

Неопределённый интеграл от дифференциала от некоторой функции равен сумме этой функции и константы.

$$\boxed{\int d(F(x)) = F(x) + C, \quad \forall C - const}$$

**Доказательство.**

$$\int d(F(x)) = \int F'(x) dx \stackrel{(1)}{=} \int f(x) dx \stackrel{(2)}{=} F(x) + C, \quad \forall C - const$$

■

**Свойство 4.**

Константу можно выносить за знак неопределённого интеграла.

$$\boxed{\int \lambda \cdot f(x) dx = \lambda \int f(x) dx, \quad \lambda \neq 0}$$

**Доказательство.**

Пусть  $F(x)$  — первообразная  $f(x)$

$$\lambda \int f(x) dx \stackrel{(2)}{=} \lambda \cdot (F(x) + C), \quad \forall C - const$$

Функция  $\lambda \cdot F(x)$  — первообразная  $\lambda \cdot f(x)$ :

$$\begin{aligned} (\lambda \cdot F(x))' &= \lambda \cdot F'(x) \stackrel{(1)}{=} \lambda \cdot f(x) \\ \int \lambda \cdot f(x) dx &\stackrel{(2)}{=} \lambda \cdot F(x) + C_1, \quad \forall C_1 - const \end{aligned}$$

Так как константы  $C_1, C$  — произвольные,  $\lambda \neq 0$ , то их всегда можно выбрать так, чтобы  $C_1 = \lambda C$ . Тогда множества  $\lambda \cdot (F(x) + C)$  и  $\lambda \cdot F(x) + C_1$  совпадают. ■

**Свойство 5.**

Если функции  $f_1(x)$  и  $f_2(x)$  на  $(a; b)$  имеют первообразные  $F_1(x)$  и  $F_2(x)$  соответственно, то функция  $\lambda_1 f_1(x) + \lambda_2 f_2(x)$ , где  $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ , имеет первообразную на  $(a; b)$ , причём  $\lambda_1^2 + \lambda_2^2 > 0$ :

$$\int (\lambda_1 f_1(x) + \lambda_2 f_2(x)) dx = \lambda_1 \int f_1(x) dx + \lambda_2 \int f_2(x) dx$$

**Доказательство.**

$F_1(x)$  — первообразная  $f_1(x)$

$F_2(x)$  — первообразная  $f_2(x)$

$$\begin{aligned} \lambda_1 \int f_1(x) dx + \lambda_2 \int f_2(x) dx &\stackrel{(2)}{=} \lambda_1 (F_1(x) + C_1) + \lambda_2 (F_2(x) + C_2) = \\ &= \lambda_1 F_1(x) + \lambda_2 F_2(x) + \lambda_1 C_1 + \lambda_2 C_2, \quad \forall C_1, C_2 - const \end{aligned}$$

Функция  $F(x) = \lambda_1 F_1(x) + \lambda_2 F_2(x)$  — первообразная функции  $\lambda_1 f_1(x) + \lambda_2 f_2(x)$ .

$$F'(x) = (\lambda_1 F_1(x) + \lambda_2 F_2(x))' = \lambda_1 F_1'(x) + \lambda_2 F_2'(x) \stackrel{(1)}{=} \lambda_1 f_1(x) + \lambda_2 f_2(x)$$

$$\int (\lambda_1 f_1(x) + \lambda_2 f_2(x)) dx \stackrel{(2)}{=} \lambda_1 f_1(x) + \lambda_2 f_2(x) + C, \quad \forall C - const$$

Так как константы  $C_1, C_2, C$  — произвольные, то всегда можно добиться выполнения равенства  $C = \lambda_1 C_1 + \lambda_2 C_2$ .

Тогда множества  $\lambda_1 F_1(x) + \lambda_2 F_2(x) + \lambda_1 C_1 + \lambda_2 C_2$  и  $\lambda_1 F_1(x) + \lambda_2 F_2(x) + C$  совпадают. ■

### Свойство 6 (Инвариантность формы интегрирования).

Если  $\int f(x) dx = F(x) + C$ , где  $C - const$ , то  $\int f(u) du = F(u) + C$ , где  $C - const$ ,  $u = \varphi(x)$  — непрерывно-дифференцируемая функция.

**Доказательство.**

$x$  — независимая переменная

$f(x)$  — непрерывная функция

$F(x)$  — первообразная  $f(x)$

$$\int f(x) dx = F(x) + C, \quad \forall C - const$$

Рассмотрим сложную функцию  $F(u) = F(\varphi(x))$ . Найдём дифференциал  $F(u)$ :

$$d(F(u)) = F'(u) \cdot \underbrace{\varphi'(x) dx}_{du} = \left| \begin{array}{l} u = \varphi(x) \\ du = \varphi'(x) dx \end{array} \right| = F'(u) du \stackrel{(1)}{=} f(u) du$$

Неопределённый интеграл:

$$\int f(u) du = \int d(F(u)) \stackrel{(\text{св. 3})}{=} F(u) + C, \quad \forall C - const$$

■

**Пример.**

$$\int \sin x dx = -\cos x + C \quad \sin(2x) d(2x) = -\cos(2x) + C$$

## 1.2.2 Геометрический смысл

Неопределённый интеграл геометрически представляет собой семейство интегральных кривых (графиков функций) вида  $y = F(x) + C$ ,  $\forall C - const$ .

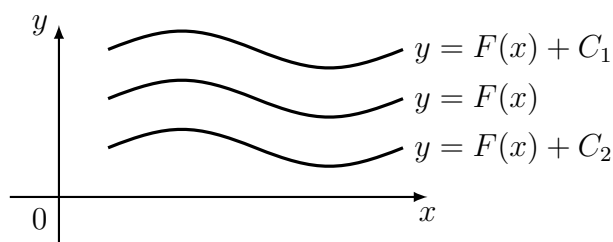


Рис. 1: Геометрический смысл неопределённого интеграла

### 1.2.3 Таблица основных интегралов

Таблица 1: Таблица основных интегралов

1. $\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C, \forall C - const$	11. $\int \frac{dx}{a^2 - x^2} = \frac{1}{2a} \ln \left  \frac{a+x}{a-x} \right  + C$
2. $\int dx = x + C$	12. $\int \frac{dx}{x^2 - a^2} = \frac{1}{2a} \ln \left  \frac{a-x}{a+x} \right  + C$
3. $\int \frac{dx}{x} = \ln  x  + C$	13. $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \arcsin \frac{x}{a} + C$
4. $\int e^x dx = e^x + C$	14. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} = \ln \left  x + \sqrt{x^2 \pm a^2} \right  + C$
5. $\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$	15. $\int \operatorname{sh} x dx = \operatorname{ch} x + C$
6. $\int \sin x dx = -\cos x + C$	16. $\int \operatorname{ch} x dx = \operatorname{sh} x + C$
7. $\int \cos x dx = \sin x + C$	17. $\int \frac{dx}{\operatorname{ch}^2 x} = \operatorname{th} x + C$
8. $\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x + C$	18. $\int \frac{dx}{\operatorname{sh}^2 x} = -\operatorname{cth} x + C$
9. $\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\operatorname{ctg} x + C$	19. $\int \frac{dx}{\sin x} = \ln \left  \operatorname{tg} \frac{x}{2} \right  + C$
10. $\int \frac{dx}{a^2 + x^2} = \frac{1}{a} \operatorname{arctg} \frac{x}{a} + C$	20. $\int \frac{dx}{\cos x} = \ln \left  \operatorname{tg} \left( \frac{x}{2} + \frac{\pi}{4} \right) \right  + C$

Доказательство (19).

$$\begin{aligned}
 \int \frac{dx}{\sin x} &= \int \frac{dx}{2 \sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2}} = \frac{1}{2} \int \frac{\frac{1}{\cos^2 \frac{x}{2}}}{\frac{\sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2}}{\cos^2 \frac{x}{2}}} dx = \int \frac{\frac{1}{2 \cos^2 \frac{x}{2}}}{\operatorname{tg} \frac{x}{2}} dx = \int \frac{d(\operatorname{tg} \frac{x}{2})}{\operatorname{tg} \frac{x}{2}} = \\
 &= \left| \operatorname{tg} \frac{x}{2} \right| = \int \frac{dt}{t} = \ln |t| + C = \ln \left| \operatorname{tg} \frac{x}{2} \right| + C
 \end{aligned}$$

■



## 1.3 Основные методы интегрирования

### 1. Непосредственное интегрирование (свойства + таблица)

Пример.

$$\begin{aligned}\int \left( 3e^x + \sin x - \frac{1}{1+x^2} \right) dx &= 3 \int e^x dx + \int \sin x dx - \int \frac{dx}{1+x^2} = \\ &= 3e^x - \cos x - \operatorname{arctg} x + C, \quad \forall C - \text{const}\end{aligned}$$

### 2. Метод подстановки

#### (2.1) Занесение под знак дифференциала

Пример.

$$\int \frac{e^{\arcsin x} \cdot 1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \int e^{\arcsin x} d(\arcsin x) = e^{\arcsin x} + C, \quad \forall C - \text{const}$$

#### (2.2) Замена переменной

Пусть функция  $x = \varphi(t)$  определена и дифференцируема на  $T$ , а множество  $X$  — множество значений этой функции, на котором определена  $f(x)$ . Тогда, если существует первообразная функции  $f(x)$  на  $X$ , то на множестве  $T$  верно равенство:

$$\int f(x) dx = \left| \begin{array}{l} x = \varphi(t) \\ dx = \varphi'(t) \end{array} \right| = \int f(\varphi(t)) \varphi'(t) dt$$

Пример.

$$\int x(3x-1)^{2024} dx = \left| \begin{array}{l} 3x-1=t \quad 3x=t+1 \\ x=\frac{1}{3}(t+1) \\ dx=\left(\frac{1}{3}t+\frac{1}{3}\right)' dt = \frac{1}{3}dt \end{array} \right| = \int \frac{1}{3}(t+1) \cdot t^{2024} \frac{1}{3} dt$$

### 3. Интегрирование по частям

Пусть функции  $u = u(x)$  и  $v = v(x)$  непрерывно-дифференцируемые, тогда справедлива формула интегрирования по частям:

$$\int u dv = u \cdot v - \int v du$$

Доказательство.

Рассмотрим произведение  $u \cdot v = u(x) \cdot v(x)$

Дифференциал:

$$d(u \cdot v) = u \cdot dv + v \cdot du$$

Выразим  $u \cdot dv$ :

$$u \cdot dv = d(u \cdot v) - v \cdot du$$

Интегрируем:

$$\int u \, dv = \int (d(uv) - v \, du)$$

По свойству неопределённого интеграла (5):

$$\int u \, dv = \int d(uv) - \int v \, du$$

По свойству неопределённого интеграла (3):

$$\int u \, dv = u \cdot v - \int v \, du$$



Пример.

$$1. \quad \int x e^x \, dx = \int \underbrace{x}_u d(\underbrace{e^x}_v) = x e^x - \int e^x \, dx = x e^x - e^x + C, \quad \forall C - const$$

$$\begin{aligned} 2. \quad \int \underbrace{\arccos x}_u x \underbrace{dx}_{dv} &= \left| \begin{array}{l} u = \arccos x, \, du = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx \\ dv = dx, \, v = \int dv = \int dx = x \end{array} \right| = \\ &= x \cdot \arccos x - \int \frac{-x \, dx}{\sqrt{1-x^2}} = x \cdot \arccos x - \frac{1}{2} \int \frac{d(1-x^2)}{\sqrt{1-x^2}} = \\ &= x \cdot \arccos x - \frac{1}{2} \cdot \frac{(1-x^2)^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} + C = \\ &= x \cdot \arccos x - \sqrt{1-x^2} + C, \quad \forall C - const \end{aligned}$$

## 2 Правильные и неправильные рациональные дроби

**Определение 1.** Дробно-рациональной функцией или рациональной дробью называется функция, равная частному от деления двух многочленов.

$$\frac{P_m(x)}{Q_n(x)} = \frac{a_m x^m + a_{m-1} x^{m-1} + \dots + a_1 x + a_0}{b_n x^n + b_{n-1} x^{n-1} + \dots + b_1 x + b_0},$$
$$a_m, a_{m-1}, \dots, a_1, a_0, b_n, b_{n-1}, \dots, b_1, b_0 - const$$

где  $P_m(x)$ ,  $Q_n(x)$  — многочлены степени  $m$  и  $n$  соответственно.

**Определение 2.** Рациональная дробь называется **правильной**, если степень числителя меньше степени знаменателя, то есть  $m < n$ .

**Определение 3.** Рациональная дробь называется **неправильной**, если степень числителя не меньше степени знаменателя, то есть  $m \geq n$ .

### Простейшие рациональные дроби

$$1. \quad \frac{A}{x-a} \quad 2. \quad \frac{A}{(x-a)^k} \quad 3. \quad \frac{Mx+N}{x^2+px+q} \quad 4. \quad \frac{Mx+N}{(x^2+px+q)^k}$$

где  $A, a, M, N, p, q - const, K \in \mathbb{N}, k \geq 2$   
 $x^2 + px + q$  не имеет действительных корней.

$$D = p^2 - 4q < 0, \quad 4q - p^2 > 0, \quad \boxed{q - \frac{p^2}{4} > 0} \quad (*)$$

### 2.1 Интегрирование простейших рациональных дробей

#### 2.1.1 $\frac{A}{x-a}$

$$\int \frac{A}{x-a} dx = A \int \frac{dx}{x-a} = A \int \frac{d(x-a)}{x-a} = A \cdot \ln|x-a| + C, \quad \forall C - const$$

#### 2.1.2 $\frac{A}{(x-a)^k}$

$$\int \frac{A}{(x-a)^k} dx = A \int \frac{dx}{(x-a)^k} = A \int \frac{d(x-a)}{(x-a)^k} = A \int (x-a)^{-k} d(x-a) = A \cdot \frac{(x-a)^{-k+1}}{-k+1} + C,$$
$$\forall C - const$$

### 2.1.3 $\frac{Mx+N}{x^2+px+q}$

$$\begin{aligned}
 \int \frac{Mx+N}{x^2+px+q} dx &= \left| \begin{aligned} x^2+px+q &= x^2+2 \cdot \frac{p}{2}x + \frac{p^2}{4} - \frac{p^2}{4} + q = \\ &= \left(x + \frac{p}{2}\right)^2 + \left(q - \frac{p^2}{4}\right) \stackrel{(*)}{=} \left(x + \frac{p}{2}\right)^2 + b^2 \end{aligned} \right| = \int \frac{Mx+N}{\left(x + \frac{p}{2}\right)^2 + b^2} dx = \\
 &= \left| x + \frac{p}{2} = t \quad x = t - \frac{p}{2} \quad dx = dt \right| = \int \frac{M\left(t - \frac{p}{2}\right) + N}{t^2 + b^2} dt = \\
 &= M \int \frac{t}{t^2 + b^2} dt + \left(N - \frac{p}{2}M\right) \int \frac{dt}{t^2 + b^2} = \\
 &= \frac{M}{2} \int \frac{d(t^2 + b^2)}{t^2 + b^2} + \left(N - \frac{p}{2}M\right) \frac{1}{b} \operatorname{arctg} \frac{t}{b} = \\
 &= \frac{M}{2} \ln |t^2 + b^2| + \frac{\left(N - \frac{p}{2}M\right)}{b} \operatorname{arctg} \frac{t}{b} + C = \\
 &= \frac{M}{2} \ln |x^2 + px + q| + \frac{\left(N - \frac{p}{2}M\right)}{\sqrt{q - \frac{p^2}{4}}} \operatorname{arctg} \frac{x + \frac{p}{2}}{\sqrt{q - \frac{p^2}{4}}} + C, \quad \forall C - \text{const}
 \end{aligned}$$

**Пример.**

$$\begin{aligned}
 \int \frac{3x-5}{x^2+2x+10} dx &= \int \frac{3x-5}{(x+1)^2+3^2} = \left| \begin{aligned} x+1 &= t \\ x &= t-1 \\ dx &= dt \end{aligned} \right| = \int \frac{3(t-1)-5}{t^2+3^2} dt = \\
 &= 3 \int \frac{t}{t^2+3^2} - 8 \int \frac{dt}{t^2+3^2} = 3 \cdot \frac{1}{2} \int \frac{d(t^2+3^2)}{t^2+3^2} - 8 \cdot \frac{1}{3} \operatorname{arctg} \frac{t}{3} = \\
 &= \frac{3}{2} \ln |t^2+9| - \frac{8}{3} \operatorname{arctg} \frac{t}{3} + C = \frac{3}{2} \ln |x^2+2x+10| - \frac{8}{3} \operatorname{arctg} \frac{x+1}{3} + C, \\
 &\quad \forall C - \text{const}
 \end{aligned}$$

## 2.2 Неправильные рациональные дроби

Любая неправильная рациональная дробь может быть представлена в виде суммы многочлена и правильной рациональной дроби.

$$\boxed{\frac{P(x)}{Q(x)} = L(x) + \frac{r(x)}{Q(x)}} \quad (\vee)$$

$\frac{P(x)}{Q(x)}$  — неправильная рациональная дробь

$L(x)$  — многочлен/частное от деления  $P(x)$  на  $Q(x)$

$r(x)$  — остаток от деления  $P(x)$  на  $Q(x)$

$\frac{r(x)}{Q(x)}$  — правильная рациональная дробь.

Интегрируя (V) получаем:

$$\int \frac{P(x)}{Q(x)} dx = \int L(x) dx + \int \frac{r(x)}{Q(x)} dx$$

**Вывод:** Интегрирование неправильной рациональной дроби сводится к интегрированию многочлена и правильной рациональной дроби.

**Теорема 1** (*О разложении правильной рациональной дроби на простейшие*).

Любая правильная рациональная дробь  $\frac{P(x)}{Q(x)}$ , знаменатель которой можно разложить на множители:

$$Q(x) = (x - x_1)^{k_1} \cdot (x - x_2)^{k_2} \cdot \dots \cdot (x - x_n)^{k_n} \cdot (x^2 + p_1x + q_1)^{s_1} \cdot \dots \cdot (x^2 + p_mx + q_m)^{s_m},$$

может быть представлена и при том единственным образом в виде суммы простейших рациональных дробей:

$$\begin{aligned} \frac{P(x)}{Q(x)} = & \frac{A_1}{x - x_1} + \frac{B_1}{(x - x_1)^2} + \dots + \frac{C_1}{(x - x_1)^{k_1}} + \dots + \frac{A_n}{(x - x_n)} + \frac{B_n}{(x - x_n)^2} + \dots + \\ & + \frac{C_n}{(x - x_n)^{k_n}} + \frac{M_1x + N_1}{x^2 + p_1x + q_1} + \dots + \frac{M_{s_1}x + N_{s_1}}{(x^2 + p_1x + q_1)^{s_1}} + \dots + \\ & + \frac{E_1x + F_1}{x^2 + p_mx + q_m} + \dots + \frac{E_{s_m}x + F_{s_m}}{(x^2 + p_mx + q_m)^{s_m}} \end{aligned}$$

$$\left. \begin{array}{l} A_1, B_1, \dots, C_1 \\ A_n, B_n, \dots, C_n \\ M_1, N_1, \dots, M_{s_1}, N_{s_1} \\ E_1, F_1, \dots, E_{s_m}, F_{s_m} \end{array} \right\} \in \mathbb{R} \quad \begin{array}{l} x^2 + p_1x + q_1 \\ \dots\dots\dots \\ x^2 + p_mx + q_m \end{array} \quad \begin{array}{l} \text{не имеют} \\ \text{действительных корней} \end{array}$$

$k_1, k_2, \dots, k_n, s_1, \dots, s_m \in \mathbb{N}$

**Пример.**

$$\begin{aligned} 1) \quad & \frac{x^2 + 4}{(x - 2)(x - 3)^3} = \frac{A}{x - 2} + \frac{B}{x - 3} + \frac{C}{(x - 3)^2} + \frac{D}{(x - 3)^3} \\ 2) \quad & \frac{x^3 + 1}{x^2(x^2 + 1)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x^2} + \frac{Cx + D}{x^2 + 1} \\ 3) \quad & \frac{x^2 + x + 13}{(x - 1)^2(x^2 - 4)(x^2 + 4)^2} = \frac{A}{x - 1} + \frac{B}{(x - 1)^2} + \underbrace{\frac{Cx + D}{x^2 - 4}}_{\frac{C}{x-2} + \frac{D}{x+2}} + \frac{Ex + F}{x^2 + 4} + \frac{Gx + H}{(x^2 + 4)^2} \end{aligned}$$

## 2.3 Метод неопределённых коэффициентов

Равенство в теореме о разложении правильной рациональной дроби на простейшие (Т. 1) представляет собой тождество. Поэтому, приводя дроби к общему знаменателю, получим тождество числителей слева и справа. Приравнявая коэффициенты при одинаковых степенях  $x$  получаем СЛАУ для определения неизвестных коэффициентов.

**Пример.**

$$\begin{aligned} \int \frac{3x-4}{x(x-2)(x+1)} dx &\ominus \\ \frac{3x-4}{x(x-2)(x+1)} &= \frac{A}{x} + \frac{B}{x-2} + \frac{C}{x+1} = \frac{A(x-2)(x+1) + Bx(x+1) + Cx(x-2)}{x(x-2)(x+1)} \\ 0 \cdot x^2 + 3x - 4 &= A(x-2)(x+1) + Bx(x+1) + Cx(x-2) = \\ &= x^2(A+B+C) + (B-A-2C)x - 2A \end{aligned} \quad (**)$$
$$\left. \begin{array}{l} x^2 \mid 0 = A + B + C \\ x^1 \mid 3 = B - A - 2C \\ x^0 \mid -4 = -2A \end{array} \right\} \text{СЛАУ} \quad A = 2 \quad B = \frac{1}{3} \quad C = -\frac{7}{3}$$
$$\begin{aligned} \ominus \int \left( \frac{2}{x} + \frac{\frac{1}{3}}{x-2} + \frac{-\frac{7}{3}}{x+1} \right) dx &= 2 \int \frac{dx}{x} + \frac{1}{3} \int \frac{dx}{x-2} - \frac{7}{3} \int \frac{dx}{x+1} = \\ &= 2 \ln |x| + \frac{1}{3} \ln |x-2| - \frac{7}{3} \ln |x+1| + C, \quad \forall C - \text{const} \end{aligned}$$

## 2.4 Метод конкретных значений

После получения тождества числителей (\*\*) подставляем конкретные значения переменной  $x$ , так как оно верно для любого  $x$ .

Обычно вместо  $x$  подставляют действительные корни знаменателя.

**Пример.**

$$\begin{aligned} x = 0: \quad -4 &= -2A \quad \Rightarrow A = 2 \\ x = 2: \quad 3 \cdot 2 - 4 &= B \cdot 2 \cdot 3 \quad \Rightarrow B = \frac{1}{3} \\ x = -1: \quad -3 - 4 &= -C \cdot (-3) \quad \Rightarrow C = -\frac{7}{3} \end{aligned}$$

## 2.5 Выводы

1. **Метод конкретных значений** лучше использовать, когда в знаменателе правильной рациональной дроби нет кратных корней.
2. **Метод неопределённых коэффициентов** лучше использовать, когда в знаменателе правильной рациональной дроби кратные или комплексные (не действительные) корни.
3. Лучше комбинировать два метода.

## 2.6 Неберущиеся интегралы

1.  $\int e^{-x^2} dx$  — интеграл Пуассона (теория вероятности)
2.  $\int \frac{dx}{\ln x}$  — логарифмический интеграл (теория чисел)
3.  $\int \cos x^2 dx, \int \sin x^2 dx$  — интегралы Френеля (физика)

### 3 Определённый интеграл. Криволинейная трапеция

#### 3.1 Определённый интеграл

Пусть функция  $y = f(x)$  определена на  $[a; b]$ .

**Определение 1.** Множество точек  $a = x_0 < x_1 < \dots < x_i < \dots < x_n = b$  называется **разбиением отрезка  $[a; b]$** , при этом отрезки  $[x_{i-1}; x_i]$  называются **отрезками разбиения**.

$i = 1, \dots, n \quad i = \overline{1, n}$

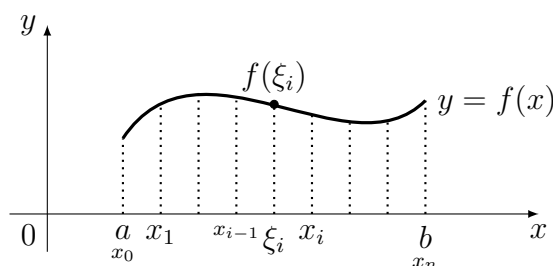
$\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$  — длина  $i$ -го отрезка разбиения  $i = \overline{1, n}$

$\lambda = \max_i \Delta x_i$  — диаметр разбиения

Рассмотрим произвольное разбиение  $[a; b]$ . В каждом из отрезков разбиения  $[x_{i-1}; x_i]$  выберем точку  $\xi_i$ ,  $i = \overline{1, n}$ . Составим сумму

$$S_n = \sum_{i=1}^n f(\xi_i) \cdot \Delta x_i \quad (1)$$

(1) — интегральная сумма для функции  $y = f(x)$  на  $[a; b]$ .



**Определение 2.** Определённым интегралом от функции  $y = f(x)$  на  $[a; b]$  называется конечный предел интегральной суммы (1), когда число отрезков разбиения растёт, а их длины стремятся к нулю.

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(\xi_i) \cdot \Delta x_i \quad (2)$$

Предел (2) не зависит от способа разбиения отрезка  $[a; b]$  и выбора точек  $\xi_i$ ,  $\overline{1, n}$ .

$f(x)$  — подынтегральная функция

$f(x) dx$  — подынтегральное выражение

$\int_a^b$  — знак определённого интеграла

$a$  — нижний предел интегрирования

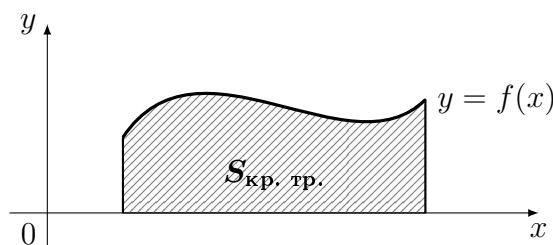
$b$  — верхний предел интегрирования



## 3.2 Криволинейная трапеция

**Определение 3.** Криволинейной трапецией называется фигура, ограниченная графиком функции  $y = f(x)$ , отрезком  $[a; b]$  на  $Ox$ , прямыми  $x = a$  и  $x = b$  параллельными оси  $Oy$ .

### 3.2.1 Геометрический смысл



Определённый интеграл численно равен площади криволинейной трапеции.

$$S_{\text{кр. тр.}} = \int_a^b f(x) dx$$

**Определение 4.** Функция  $y = f(x)$  называется **интегрируемой** на  $[a; b]$ , если существует конечный предел интегральной суммы (1) на  $[a; b]$ .

**Теорема 1** (*Существование определённого интеграла*).

Если функция  $y = f(x)$  непрерывна на  $[a; b]$ , то она на этом отрезке интегрируема.

## 3.3 Свойства определённого интеграла

**Теорема 2.**

Если функция  $y = f(x)$  интегрируема на отрезке  $[a; b]$ , то имеет место равенство

$$\int_a^b f(x) dx = - \int_b^a f(x) dx$$

**Доказательство.**

По определению определённого интеграла (**опр. 2**)

$$\begin{aligned} \int_a^b f(x) dx &= \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(\xi_i) \cdot \Delta x = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(\xi_i)(x_i - x_{i-1}) = - \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(\xi_i)(x_{i-1} - x_i) \\ &= - \int_b^a f(x) dx \end{aligned}$$

■

**Теорема 3** (*Аддитивность определённого интеграла*).

Если функция  $y = f(x)$  интегрируема на каждом из отрезков  $[a; c]$ ,  $[c; b]$  ( $a < c < b$ ), то она интегрируема на  $[a; b]$  и верно равенство

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx$$

**Доказательство.**

Рассмотрим произвольное разбиение  $[a; b]$  такое, что одна из точек разбиения совпадает с точкой  $c$ :

$$a = x_0 < x_1 < \dots < x_m = c < x_{m+1} < \dots < x_n = b$$

Данное разбиение определяет ещё два разбиения:

$$\begin{aligned} a = x_0 < x_1 < \dots < x_{m-1} < x_m = c & \quad \lambda_1 = \max_i \Delta x_i, \quad i = \overline{1, m} \\ c = x_m < x_{m+1} < \dots < x_{n-1} < x_n = b & \quad \lambda_2 = \max_i \Delta x_i, \quad i = \overline{m+1, n} \end{aligned}$$

Так как функция  $y = f(x)$  интегрируема на  $[a; c]$  и на  $[c; b]$ , то

$$\begin{aligned} \int_a^c f(x) dx &= \lim_{\lambda_1 \rightarrow 0} \sum_{i=1}^m f(\xi_i) \cdot \Delta x_i \\ \int_c^b f(x) dx &= \lim_{\lambda_2 \rightarrow 0} \sum_{i=m+1}^n f(\xi_i) \cdot \Delta x_i \end{aligned}$$

$$\lambda = \max\{\lambda_1; \lambda_2\} \quad \lambda \rightarrow 0$$

Суммируем интегральные суммы:

$$\sum_{i=1}^m f(\xi_i) \cdot \Delta x_i + \sum_{i=m+1}^n f(\xi_i) \cdot \Delta x_i = \sum_{i=1}^n f(\xi_i) \cdot \Delta x_i$$

Вычислим предел:

$$\begin{aligned} \lim_{\lambda \rightarrow 0} \left( \sum_{i=1}^m f(\xi_i) \cdot \Delta x_i + \sum_{i=m+1}^n f(\xi_i) \cdot \Delta x_i \right) &= \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(\xi_i) \cdot \Delta x_i \\ \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^m f(\xi_i) \cdot \Delta x_i + \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=m+1}^n f(\xi_i) \cdot \Delta x_i &= \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(\xi_i) \cdot \Delta x_i \\ \lim_{\lambda_1 \rightarrow 0} \sum_{i=1}^m f(\xi_i) \cdot \Delta x_i + \lim_{\lambda_2 \rightarrow 0} \sum_{i=m+1}^n f(\xi_i) \cdot \Delta x_i &= \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(\xi_i) \cdot \Delta x_i \end{aligned}$$

Из последнего равенства следует, что  $f(x)$  — интегрируема на  $[a; b]$  и верно равенство

$$\int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx = \int_a^b f(x) dx$$

■

**Теорема 4.**

Если  $C = \text{const}$ , то

$$\int_a^b c \, dx = c \cdot (b - a)$$

**Доказательство.**

$$\int_a^b c \, dx = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n c \cdot \Delta x_i = c \cdot \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n x_i - x_{i-1} = c \cdot (b - a)$$

■

**Теорема 5.**

Если функции  $f_1(x)$ ,  $f_2(x)$  интегрируемы на  $[a; b]$ , то их линейная комбинация

$$\lambda_1 f_1(x) + \lambda_2 f_2(x), \text{ где } \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$$

интегрируема на  $[a; b]$  и верно равенство:

$$\int_a^b (\lambda_1 f_1(x) + \lambda_2 f_2(x)) \, dx = \lambda_1 \int_a^b f_1(x) \, dx + \lambda_2 \int_a^b f_2(x) \, dx$$

**Доказательство.**

$$\begin{aligned} \int_a^b (\lambda_1 f_1(x) + \lambda_2 f_2(x)) \, dx &= \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n (\lambda_1 f_1(\xi_i) + \lambda_2 f_2(\xi_i)) \cdot \Delta x_i = \\ &= \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n (\lambda_1 f_1(\xi_i) \cdot \Delta x_i + \lambda_2 f_2(\xi_i) \cdot \Delta x_i) = \\ &= \lim_{\lambda \rightarrow 0} \left( \sum_{i=1}^n \lambda_1 f_1(\xi_i) \cdot \Delta x_i + \sum_{i=1}^n \lambda_2 f_2(\xi_i) \cdot \Delta x_i \right) = \\ &= \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n \lambda_1 f_1(\xi_i) \cdot \Delta x_i + \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n \lambda_2 f_2(\xi_i) \cdot \Delta x_i = \\ &= \lambda_1 \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f_1(\xi_i) \cdot \Delta x_i + \lambda_2 \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f_2(\xi_i) \cdot \Delta x_i = \\ &= \lambda_1 \int_a^b f_1(x) \, dx + \lambda_2 \int_a^b f_2(x) \, dx = \\ &= \int_a^b (\lambda_1 f_1(x) + \lambda_2 f_2(x)) \, dx \end{aligned}$$

■

**Следствие 5.1.**

$$\int_a^a f(x) dx = 0$$

**Теорема 6** (*О сохранении определённым интегралом знака подынтегральной функции*).

Если  $f(x)$  интегрируема и неотрицательна на  $[a; b]$ , то

$$\int_a^b f(x) dx \geq 0$$

**Доказательство.**

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(\xi_i) \cdot \Delta x_i$$

$\Delta x_i$  — длины отрезков разбиения  $\Delta x_i > 0$   
 $f(\xi_i) \geq 0$  по условию

$$f(\xi_i) \cdot \Delta x_i \geq 0, \quad i = \overline{1, n}$$

$$\sum_{i=1}^n f(\xi_i) \cdot \Delta x_i \geq 0 \quad \text{как сумма неотрицательных чисел}$$

$$\lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(\xi_i) \cdot \Delta x_i \geq 0 \quad \text{по следствию из теоремы о сохранении функции знака своего предела}$$

$\Downarrow$

$$\int_a^b f(x) dx \geq 0$$

■

**Теорема 7** (*Об интегрировании неравенства*).

Пусть функции  $f(x)$  и  $g(x)$  интегрируемы на  $[a; b]$  и  $\forall x \in [a; b]: f(x) \geq g(x)$ , то

$$\int_a^b f(x) dx \geq \int_a^b g(x) dx$$

**Доказательство.**

По условию  $f(x) \geq g(x)$ ,  $\forall x \in [a; b]$ . Обозначим  $h(x) = f(x) - g(x) \geq 0$ .

По теореме 6

$$\int_a^b (f(x) - g(x)) dx \geq 0$$

По теореме 5:

$$\begin{aligned} \int_a^b f(x) dx - \int_a^b g(x) dx &\geq 0 \\ \Downarrow \\ \int_a^b f(x) dx &\geq \int_a^b g(x) dx \end{aligned}$$

■

**Теорема 8** (Об оценке модуля определённого интеграла).

Если функция  $f(x)$  и  $|f(x)|$  интегрируемы на  $[a; b]$ , то справедливо неравенство

$$\left| \int_a^b f(x) dx \right| \leq \int_a^b |f(x)| dx$$

**Доказательство.**

$\forall x \in [a; b]$  справедливо неравенство

$$-|f(x)| \leq f(x) \leq |f(x)|$$

По теореме 5 и 7:

$$-\int_a^b |f(x)| dx \leq \int_a^b f(x) dx \leq \int_a^b |f(x)| dx$$

Сворачиваем двойное неравенство:

$$\left| \int_a^b f(x) dx \right| \leq \int_a^b |f(x)| dx$$

■

**Теорема 9** (О среднем значении для определённого интеграла).

Если  $f(x)$  непрерывна на  $[a; b]$ , то

$$\exists c \in [a; b]: f(c) = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx$$

**Доказательство.**

Так как функция  $y = f(x)$  непрерывна на  $[a; b]$ , то по теореме Вейерштрасса она достигает своего наибольшего и наименьшего значения.

То есть  $\exists m, M \in \mathbb{R}, \forall x \in [a; b]: m \leq f(x) \leq M$

По теореме 7:

$$\int_a^b m dx \leq \int_a^b f(x) dx \leq \int_a^b M dx$$

По теореме 5:

$$m \int_a^b dx \leq \int_a^b f(x) dx \leq M \int_a^b dx$$

По теореме 4:

$$m(b-a) \leq \int_a^b f(x) dx \leq M(b-a) \quad | : (b-a)$$

Так как функция  $y = f(x)$  непрерывна на  $[a; b]$ , то по теореме *Больцано-Коши* она принимает все свои значения между наибольшим и наименьшим значением.

$$m \leq \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx \leq M$$

По теореме *Больцано-Коши*  $\exists c \in [a; b]$ :

$$f(c) = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx$$

■

**Теорема 10** (*Об оценке определённого интеграла*).

Пусть функции  $f(x)$  и  $g(x)$  интегрируемы на  $[a; b]$  и  $\forall x \in [a; b]: m \leq f(x) \leq M, g(x) \geq 0$ . Тогда

$$m \int_a^b g(x) dx \leq \int_a^b f(x) g(x) dx \leq M \int_a^b g(x) dx$$

**Доказательство.**

Так как  $\forall x \in [a; b]$  верны неравенства

$$\begin{aligned} m &\leq f(x) \leq M & | \cdot g(x) \\ g(x) &\geq 0 & m, M \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

$$m \cdot g(x) \leq f(x) \cdot g(x) \leq M \cdot g(x)$$

По теореме 7 и 5:

$$m \int_a^b g(x) dx \leq \int_a^b f(x) g(x) dx \leq M \int_a^b g(x) dx$$

■

**Следствие 10.1.**  $g(x) \equiv 1, \forall x \in [a; b]$

$$m(b-a) \leq \int_a^b f(x) dx \leq M(b-a)$$

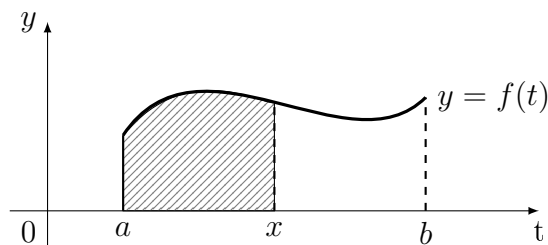
### 3.4 Определённый интеграл с переменным верхним пределом интегрирования

Пусть  $f(x)$  непрерывна на  $[a; b]$ . Рассмотрим  $\int_a^b f(x) dx$ . Закрепим нижний предел интегрирования  $a$ . Изменяем верхний предел интегрирования  $b$ , чтобы подчеркнуть изменение верхнего предела интегрирования.

$$b \longrightarrow x \quad x \in [a; b] \quad [a; x] \subset [a; b] \quad I(x) = \int_a^x f(t) dt.$$

**Определение 1.** Определённым интегралом с переменным верхним пределом интегрирования от непрерывной функции  $f(x)$  на  $[a; b]$  называется интеграл вида

$$I(x) = \int_a^x f(t) dt, \text{ где } x \in [a; b]$$



$I(x)$  — переменная площадь криволинейной трапеции с основанием  $[a; x] \subset [a; b]$ .

#### 3.4.1 Свойства

**Теорема 1** (Непрерывность  $I(x)$ ).

Если функция  $f(x)$  на  $[a; b]$  непрерывна, то  $I(x) = \int_a^x f(t) dt$  — непрерывна на  $[a; b]$ .

**Доказательство.**

Рассмотрим  $I(x) = \int_a^x f(t) dt$

$$\begin{aligned} I(x + \Delta x) &= \int_a^{x+\Delta x} f(t) dt \\ \Delta I(x) &= I(x + \Delta x) - I(x) = \int_a^{x+\Delta x} f(t) dt - \int_a^x f(t) dt \stackrel{*, \text{ T3}}{=} \\ &= \int_a^x \cancel{f(t)} dt + \int_x^{x+\Delta x} f(t) dt - \int_a^x \cancel{f(t)} dt = \int_a^{x+\Delta x} f(t) dt \stackrel{\text{T9}}{=} \\ &= f(c) \cdot (x + \Delta x - x) = f(c) \cdot \Delta x, \text{ где } c \in [x; x + \Delta x] \end{aligned}$$

\* — Так как функция  $f(x)$  непрерывна на  $[a; b]$ , то  $f(x)$  интегрируема на  $[a; b] \Rightarrow$  применяем свойство аддитивности определённого интеграла.

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \Delta I(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} f(c) \cdot \Delta x = 0$$

По определению непрерывной функций  $\Rightarrow I(x) = \int_a^x f(t) dt$  непрерывна на  $[a; b]$ . ■

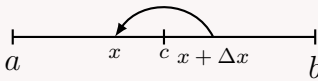
**Теорема 2** (О производной  $I(x)$ ).

Если функция  $y = f(x)$  непрерывна на  $[a; b]$ , то  $\forall x \in [a; b]$  верно равенство

$$(I(x))' = \left( \int_a^x f(t) dt \right)' = f(x)$$

**Доказательство.**

$$(I(x))' = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta I(x)}{\Delta x} \stackrel{T1}{=} \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(c) \cdot \Delta x}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} f(c) \stackrel{*}{=} f(x)$$

\*:  при  $\Delta x \rightarrow 0 \quad x + \Delta x \rightarrow x \quad c \rightarrow x$

■

**Следствие 2.1.** Функция  $I(x)$  — первообразная функции  $f(x)$  на  $[a; b]$ , так как по теореме 2  $(I(x))' = f(x)$ .

### 3.4.2 Формула Ньютона-Лейбница

**Теорема 3.**

Пусть функция  $f(x)$  — непрерывна на  $[a; b]$ . Тогда

$$\int_a^b f(x) dx = F(x) \Big|_a^b = F(b) - F(a)$$

где  $F(x)$  — первообразная  $f(x)$ .

**Доказательство.**

Пусть  $F(x)$  первообразная  $f(x)$  на  $[a; b]$ . По следствию из теоремы 2  $I(x)$  — первообразная  $f(x)$  на  $[a; b]$ .

По свойству первообразной (с.3, св.3):

$$I(x) - F(x) = C$$

$$I(x) = F(x) + C, \text{ где } C - const$$

$$\int_a^x f(t) dt = F(x) + C, \text{ где } C - const \quad (\vee)$$

•  $x = a$ :

$$\int_a^a f(t) dt = F(a) + C$$

$$0 = F(a) + C$$

$$C = -F(a)$$

$C = -F(a)$  подставим в  $(\vee)$ :

$$\int_a^x f(t) dt = F(x) - F(a)$$



•  $x = b$ :

$$\int_a^b f(t) dt = F(b) - F(a)$$

■

### 3.5 Методы вычисления определённого интеграла

#### 3.5.1 Метод интегрирования по частям

**Теорема 1.**

Пусть функции  $u = u(x)$  и  $v = v(x)$  непрерывно дифференцируемы на  $[a; b]$ . Тогда имеет место равенство

$$\int_a^b u dv = uv \Big|_a^b - \int_a^b v du$$

**Доказательство.**

Рассмотрим произведение функций  $u \cdot v$ .

Дифференцируем:

$$\begin{aligned} d(u \cdot v) &= v du + u dv \\ u dv &= d(uv) - v du \end{aligned}$$

Интегрируем:

$$\int_a^b u dv = \int_a^b (d(uv) - v du) = \int_a^b d(uv) - \int_a^b v du = uv \Big|_a^b - \int_a^b v du$$

■

**Пример.**

$$\begin{aligned} \int_1^e \ln x dx &= \left| \begin{array}{ll} u = \ln x & du = \frac{1}{x} dx \\ dv = dx & v = x \end{array} \right| = x \ln x \Big|_1^e - \int_1^e x \cdot \frac{1}{x} dx = (e \ln e - 1 \cdot \ln 1) - x \Big|_1^e = \\ &= e - (e - 1) = \cancel{e} - \cancel{e} + 1 = 1 \end{aligned}$$

### 3.5.2 Метод подстановки (замена переменной)

#### Теорема 2.

Пусть

1.  $y = f(x)$  непрерывна на  $[a; b]$
2.  $x = \varphi(t)$  непрерывно дифференцируема при  $t \in [t_1; t_2]$
3. при  $t \in [t_1; t_2]$  значения функции  $\varphi(t)$  не выходят за пределы  $[a; b]$
4.  $\varphi(t_1) = a, \varphi(t_2) = b$

$$\text{Тогда } \int_a^b f(x) dx = \left| \begin{array}{lll} x = \varphi(t), & x_{\text{н}} = a, & t_{\text{н}} = t_1 \\ dx = \varphi'(t) dt, & x_{\text{в}} = b, & t_{\text{в}} = t_2 \end{array} \right| = \int_{t_1}^{t_2} f(\varphi(t)) \varphi'(t) dt$$

**Доказательство.**

Так как

1.  $y = f(x)$  непрерывна на  $[a; b]$ , а
2.  $x = \varphi(t)$  непрерывна на  $[t_1; t_2]$ ,

то сложная  $y = f(\varphi(t))$  непрерывна на  $[t_1; t_2]$  по теореме о непрерывности сложной функции.

Так как  $y = f(x)$  непрерывна на  $[a; b]$ , а функция  $f(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t)$  — непрерывна на  $[t_1; t_2]$ , то существует определённый и неопределённый интеграл от этих функций.

Пусть  $F(x)$  — первообразная функции  $f(x)$  на  $[a; b]$ . В силу инвариантности неопределённого интеграла  $F(\varphi(t))$  — первообразная функции  $f(\varphi(t))$  на  $[t_1; t_2]$ .

Тогда

$$\begin{aligned} \int_a^b f(x) dx &= F(x) \Big|_a^b \stackrel{\text{Н-Л}}{=} \boxed{F(b) - F(a)} \\ \int_{t_1}^{t_2} f(\varphi(t)) \varphi'(t) dt &= F(\varphi(t)) \Big|_{t_1}^{t_2} \stackrel{\text{Н-Л}}{=} F(\varphi(t_2)) - F(\varphi(t_1)) = \boxed{F(b) - F(a)} \end{aligned}$$

■

#### Замечание.

- ⊕ При замене переменной в определённом интеграле обратную замену не делают.
- ⊖ Нужно не забыть изменить пределы интегрирования.

#### Пример.

$$\begin{aligned} \int_1^e \frac{\ln x}{x} dx &= \int_1^e \ln x d(\ln x) \ominus \frac{\ln^2 x}{2} \Big|_1^e = \frac{\ln^2 e}{2} - \frac{\ln^2 1}{2} = \frac{1}{2} \\ \ominus \left| \begin{array}{l} \ln x = t \\ x_{\text{н}} = 1, t_{\text{н}} = 0 \\ x_{\text{в}} = e, t_{\text{в}} = 1 \end{array} \right| &= \int_0^1 t dt = \frac{t^2}{2} \Big|_0^1 = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

### 3.6 Интегрирование чётных и нечётных функций по симметричному относительно начала координат промежутку

#### Теорема 1.

Пусть функция  $y = f(x)$  непрерывна на  $[-a; a]$ , где  $a \in \mathbb{R}$ ,  $a > 0$ . Тогда

$$\int_{-a}^a f(x) dx = \begin{cases} 2 \int_0^a f(x) dx, & f - \text{чётная} \\ 0, & f - \text{нечётная} \end{cases}$$

**Доказательство.**

$$\begin{aligned} \int_{-a}^a f(x) dx &= \int_{-a}^0 f(x) dx + \int_0^a f(x) dx \Leftrightarrow \\ \int_{-a}^0 f(x) dx &= \left| \begin{array}{ll} x = -t, & dx = -dt \\ x_{\text{н}} = -a, & t_{\text{н}} = a \\ x_{\text{в}} = 0, & t_{\text{в}} = 0 \end{array} \right| = \int_a^0 f(-t) (-dt) = \int_0^a f(-t) dt = \\ &= \begin{cases} \int_0^a f(t) dt, & f - \text{чётная} \\ -\int_0^a f(t) dt, & f - \text{нечётная} \end{cases} \\ \Leftrightarrow \int_0^a f(x) dx + \begin{cases} \int_0^a f(x) dx, & f - \text{чётная} \\ -\int_0^a f(x) dx, & f - \text{нечётная} \end{cases} &= \begin{cases} 2 \int_0^a f(x) dx, & f - \text{чётная} \\ 0, & f - \text{нечётная} \end{cases} \end{aligned}$$

■

**Пример.**

$$\begin{aligned} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos x dx &\Leftrightarrow \sin x \Big|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} = \sin \frac{\pi}{2} - \sin \left( -\frac{\pi}{2} \right) = 1 - (-1) = 2 \\ \Leftrightarrow 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x dx &= 2 \end{aligned}$$

**Пример.**

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sin x dx \Leftrightarrow -\cos x \Big|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} = -\left( \cos \frac{\pi}{2} - \cos \left( -\frac{\pi}{2} \right) \right) = 0$$

**Пример.**

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos^2 x \sin^3 x dx = 0 \quad \text{т.к. } \cos^2 x \sin^3 x = y \text{ нечётная функция на } [-\pi; \pi]$$

### 3.7 Интегрирование периодических функций

#### Теорема 2.

Пусть  $f(x)$  непрерывная периодическая функция с периодом  $T$ . Тогда

$$\int_a^{a+T} f(x) dx = \int_0^T f(x) dx, \quad \forall a \in \mathbb{R}$$

Доказательство.

$$\int_a^{a+T} f(x) dx = \int_a^0 f(x) dx + \int_0^T f(x) dx + \int_T^{T+a} f(x) dx$$

$$\int_T^{T+a} f(x) dx = \left| \begin{array}{l} t = x - T, \quad x = t + T, \quad dx = dt \\ x_{\text{н}} = T, \quad t_{\text{н}} = 0 \\ x_{\text{к}} = T + a, \quad t_{\text{к}} = a \end{array} \right| = \int_0^a f(t + T) dt \stackrel{\text{период.}}{=} \int_0^a f(t) dt$$

$$\int_a^{a+T} f(x) dx = \int_a^0 f(x) dx + \int_0^T f(x) dx + \int_0^a f(x) dx$$

$$\int_a^{a+T} f(x) dx = -\cancel{\int_0^a f(x) dx} + \int_0^T f(x) dx + \cancel{\int_0^a f(x) dx}$$

$$\int_a^{a+T} f(x) dx = \int_0^T f(x) dx, \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

■

Пример.

$$\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{5\pi}{2}} \sin x dx = \int_{\frac{\pi}{2}}^{2\pi + \frac{\pi}{2}} \sin x dx = \int_0^{2\pi} \sin x dx = 0$$

## 4 Приложения определённого интеграла

### 4.1 Площадь плоской фигуры

#### 4.1.1 Прямоугольная декартова система координат

Пусть функция  $y = f(x)$  непрерывна на  $[a; b]$  и  $\forall x \in [a; b]: f(x) \geq 0$ . Из геометрического смысла определённого интеграла:

$$S = \int_a^b f(x) dx \quad (1)$$

**Этапы вывода формулы:**

1. Разбиваем  $[a; b]$  точками  $a = x_0 < x_1 < \dots < x_i < \dots < x_n = b$
2.  $[x_{i-1}; x_i]$ ,  $i = \overline{1, n}$  — отрезки разбиения  
 $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$  — длины отрезков разбиения
3.  $\forall \xi_i \in [x_{i-1}; x_i]$ ,  $i = \overline{1, n}$   $f(\xi_i)$   
Криволинейную трапецию с основанием  $\Delta x_i$  заменяем прямоугольником длины  $f(\xi_i)$ .  
Криволинейная трапеция с основанием  $[a; b]$  заменяется на ступенчатую фигуру.
4.  $\lambda = \max_i \Delta x_i$   
 $\sum_{i=1}^n f(\xi_i) \cdot \Delta x_i$  — интегральная сумма
5.  $\lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(\xi_i) \cdot \Delta x_i = \int_a^b f(x) dx = S$

**Следствие 1.1.** Если функция  $y = f(x)$  непрерывна на  $[a; b]$  и  $f(x) < 0 \forall x \in [a; b]$ , то

$$S = - \int_a^b f(x) dx \quad (2)$$

**Следствие 1.2.** Пусть функция ограничена графиками функции  $\begin{cases} y_1 = f_1(x) \\ y_2 = f_2(x) \end{cases}$ , непрерывных и неотрицательных на  $[a; b]$ . Тогда

$$S = \int_a^b (f_1(x) - f_2(x)) dx \quad (3)$$

**Следствие 1.3.** Если фигура симметрична относительно хотя бы одной из координатных осей, то

$$S_{\Phi} = 2S_{\text{пол}}$$

**Следствие 1.4.** Если функция  $y = f(x)$  конечное число раз меняет знак на  $[a; b]$ , то определённый интеграл от этой функции на  $[a; b]$  равен алгебраической сумме площадей соответствующих криволинейных трапеций.

$$S = \int_a^b f(x) dx = -S_1 + S_2 - S_3$$

**Пример.**  $S_\Phi$  — ?  $x = y^2, x = a$

$$S_a = 2 \cdot S_{\text{пол}}$$

$$S_{\text{пол}} = \int_0^a \sqrt{x} dx = \left. \frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} \right|_0^a = \frac{2}{3} a \sqrt{a}$$

$$S_\Phi = \frac{4}{3} a \sqrt{a}$$

#### 4.1.2 Параметрически заданная функция

$$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t), \quad t \in [t_1; t_2] \end{cases}$$

$x(t), y(t)$  — непрерывно дифференцируемы при  $t \in [t_1; t_2]$   
 $x(t_1) = a, \quad x(t_2) = b, \quad x(t) \geq 0, \quad \forall t \in [t_1; t_2]$

Тогда:

$$S_\Phi = \int_a^b y(x) dx = \left| \begin{array}{ll} y = y(t), & a = x(t_1) \\ x = x(t), & b = x(t_2) \\ dx = x'(t) dt \end{array} \right| = \boxed{\int_{t_1}^{t_2} y(t) x'(t) dt = S} \quad (4)$$

**Замечание.** Изменение параметра  $t \in [t_1; t_2]$  способствует росту переменной  $x$ . (обход параметра  $t \in [t_1; t_2]$  происходит по часовой стрелке)

**Пример.**

$$\begin{cases} x = a \cos^3 t \\ y = a \sin^3 t \end{cases}$$

$t$	0	$\frac{\pi}{2}$	$\pi$	$\frac{3\pi}{2}$	$2\pi$
$x$	$a$	0	$-a$	0	$a$
$y$	0	$a$	0	$-a$	0

$$S_\Phi = 4S^*$$

$$S^* = \int_{\frac{\pi}{2}}^0 \underbrace{a \sin^3 t}_{y(t)} \cdot \underbrace{3a \cdot \cos^3 t \cdot (-\sin t)}_{x'(t)} dt = 3a^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^4 t \cos^3 t dt = \dots = \frac{3\pi a^2}{32}$$

$$S_\Phi = \frac{3\pi a^2}{8}$$

### 4.1.3 Полярная система координат

**Определение 1. Криволинейный сектор** — это фигура, ограниченная лучами  $\varphi = \alpha$ ,  $\varphi = \beta$  и графиком непрерывной кривой  $r = r(\varphi)$ ,  $\varphi \in [\alpha; \beta]$

Этапы вывода формулы:

1. Разбиваем сектор  $A_0OA_n$  лучами  $\alpha = \varphi_0 < \varphi_1 < \dots < \varphi_n = \beta$  на углы  $\angle A_0OA_1, \angle A_1OA_2, \dots, \angle A_{n-1}OA_n$   
 $\Delta\varphi_i = \varphi_i - \varphi_{i-1}$  — величина  $\angle A_{i-1}OA_i$  в радианах  
 $\lambda = \max_i \Delta\varphi_i, i = \overline{1, n}$
2.  $\forall$  выберем и проведём  $\Psi_i, \Psi_i \in \angle A_{i-1}OA_i$   
Находим  $r = r(\Psi_i)$   
 $M_i(\Psi_i, r(\Psi_i)), M_i \in \angle A_{i-1}OA_i, M_i \in r = r(\varphi)$
3. Заменяем каждый  $i$ -ый криволинейный сектор на круговой сектор  $R = r(\Psi_i), i = \overline{1, n}$   
 $S_i = \frac{1}{2}R^2 \cdot \Delta\varphi_i$  — площадь  $i$ -го кругового сектора  
 $R = r(\Psi_i)$   

$$\sum_{i=1}^n S_i = \sum_{i=1}^n \frac{1}{2}r^2(\Psi_i) \cdot \Delta\varphi_i = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n r^2(\Psi_i) \cdot \Delta\varphi_i$$
4. Вычисляем предел

$$\lim_{\lambda \rightarrow 0} \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n r^2(\Psi_i) \cdot \Delta\varphi_i = \boxed{\frac{1}{2} \int_{\alpha}^{\beta} r^2 d\varphi = S} \quad (5)$$

**Пример.**  $S_\Phi$  — ?

Вне окружности  $r = 1$  Внутри окружности  $r = 1 + \cos \varphi$

$$\begin{cases} r = 1 \\ r = 1 + \cos \varphi \end{cases} \quad \cos \varphi = 0, \varphi = \pm \frac{\pi}{2}$$

$\varphi$	0	$\frac{\pi}{2}$	$\pi$
$r$	2	1	0

$$S_\Phi = 2(S_{\text{кар}} - S_{\text{окр}}) = 2 \left( \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 + \cos \varphi)^2 d\varphi - \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} 1^2 d\varphi \right) = \dots = 2 \left( 1 + \frac{\pi}{8} \right) = 2 + \frac{\pi}{4}$$

## 4.2 Объём тела

Пусть  $T$  — тело,  $S$  — площадь сечения тела плоскостью перпендикулярной  $Ox$  или площадь поперечного сечения.

$S = S(x)$  — непрерывная функция на  $[a; b]$

1. Разбиваем отрезок  $[a; b]$  точками  $a = x_0 < x_1 < \dots < x_{i-1} < x_i < \dots < x_n = b$

Отрезки разбиения  $[x_{i-1}; x_i]$

$\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$  — длина отрезка разбиения

$a = \max_i \Delta x_i, \quad i = \overline{1, n}$

2. Проводим плоскости

$$\left\{ \begin{array}{l} x = x_0 = a \\ \dots\dots\dots \\ x = x_{i-1} \\ x = x_i \\ \dots\dots\dots \\ x = x_n = b \end{array} \right. \quad \text{— эти плоскости разбивают тело } T \text{ на слои}$$

3.  $\forall \xi_i \in [x_{i-1}; x_i], \quad i = \overline{1, n}$

Проводим плоскость  $x = \xi_i$ . Находим  $S(\xi_i)$ .

Каждый слой заменяем цилиндром с основанием  $S(\xi_i)$  и высотой  $\Delta x_i, \quad i = \overline{1, n}$

4.  $V_{\text{ц}} = S(\xi_i) \cdot \Delta x_i$  — объём  $i$ -го цилиндра

$\sum_{i=1}^n S(\xi_i) \cdot \Delta x_i$  — интегральная сумма

5. Вычисляем предел

$$\lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n S(\xi_i) \cdot \Delta x_i = \boxed{\int_a^b S(x) dx = V_T} \quad (6)$$



## 4.3 Тела вращения

### 4.3.1 Прямоугольная декартова система координат

#### Вокруг оси $Ox$

Рассмотрим криволинейную трапецию, ограниченную графиком непрерывной функции  $y = f(x)$ ,  $x = a$ ,  $x = b$  и осью  $Ox$ . Пусть  $\forall x \in [a; b]: f(x) \geq 0$

Поперечное сечение — круг

$$S_{\text{круга}} = \pi R^2 = (R = y) = \pi y^2$$

$$V_{Ox} = \pi \int_a^b y^2 dx \quad (7)$$

Пусть криволинейная трапеция ограничена графиками непрерывных функций  $y_1 = f_1(x)$  и  $y_2 = f_2(x)$ , прямыми  $x = a$ ,  $x = b$

$$V_{Ox} = V_{Ox}^1 - V_{Ox}^2 = \pi \int_a^b y_1^2 dx - \pi \int_a^b y_2^2 dx = \pi \int_a^b (y_1^2 - y_2^2) dx = V_{Ox} \quad (8)$$

#### Вокруг $Oy$

Пусть непрерывная функция  $x = f(y)$ ,  $y \in [c; d]$

$$V_{Oy} = \pi \int_c^d x^2 dy \quad (9)$$

Пусть  $y = f(x)$  — непрерывная на  $[a; b]$  функция,  $\forall x \in [a; b]: f(x) \geq 0$ .

Криволинейная трапеция ограничена графиком функции  $y = f(x)$ ,  $x = a$ ,  $x = b$  и осью  $Ox$ .

Аналогично формула (6) и (8):

$$V_{Oy} = 2\pi \int_a^b x|y| dx \quad \begin{matrix} a \geq 0 \\ y \geq 0 \end{matrix} \quad (10)$$

**Следствие 1.1.** Если функция  $y = f(x)$  задана параметрически:

$$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases} \text{ — непрерывно дифференцируемы на } [t_1; t_2]$$

$$\begin{aligned} x(t_1) &= a & y(t_1) &= c \\ x(t_2) &= b & y(t_2) &= d \end{aligned} \quad (*)$$

Тогда:

$$\begin{cases} V_{Ox} \stackrel{(7)}{=} \pi \int_a^b y^2 dx \stackrel{(*)}{=} \pi \int_{t_1}^{t_2} y^2(t) x'(t) dt \\ V_{Oy} \stackrel{(9)}{=} \pi \int_c^d x^2 dy \stackrel{(*)}{=} \pi \int_{t_1}^{t_2} x^2(t) y'(t) dt \\ V_{Oy} \stackrel{(10)}{=} \pi \int_a^b x(t) y(t) x'(t) dt \end{cases} \quad (11)$$

#### 4.3.2 Полярная система координат

Пусть  $r = r(\varphi)$  — непрерывная на  $[\alpha; \beta]$ .

Криволинейный сектор ограничен графиком непрерывной функции  $r = r(\varphi)$  и  $\varphi = \alpha$ ,  $\varphi = \beta$ .

$$V_{Or} = \frac{2}{3} \pi \int_{\alpha}^{\beta} r^3 \sin \varphi d\varphi \quad (12)$$

**Пример.**

$y = e^{-2x} - 1$	
$y = e^{-x} + 1$	
$x = 0$	
$V_{Ox} - ?$	
$V_{Oy} - ?$	

$$\begin{aligned} e^{-2x} - 1 &= e^{-x} + 1 & t^2 - t - 2 &= 0 & e^{-x} &= 2 \\ e^{-2x} - e^{-x} - 2 &= 0 & t_1 &= 2 & x &= -\ln 2 \\ e^{-x} &= t & t_2 &= -1 \quad \emptyset \end{aligned}$$

$$V_{Ox} = V_1 - V_2 = \pi \int_{-\ln 2}^0 \left( (e^{-x} + 1)^2 - (e^{-2x} - 1)^2 \right) dx = \dots = \frac{11}{4} \pi$$

$$V_{Oy} = V_1 - V_2 = 2\pi \int_0^{\ln 2} x \left( e^x + 1 - (e^{2x} - 1) \right) dx = \dots = \ln^2 2 \cdot \frac{1}{4}$$

Пример.

$$\left. \begin{array}{l} x = a \cos^3 t \\ y = a \sin^3 t \end{array} \right| \frac{V_{Ox} - ?}{}$$

$$V_{Ox}^* = \pi \int_{\frac{\pi}{2}}^0 (a \sin^3 t)^2 \cdot \underbrace{3a \cos^2 t (-\sin t)}_{x'} dt = 3\pi a^3 \int_{\frac{\pi}{2}}^0 \sin^6 t \cos^2 t d(\cos t) =$$

$$= 3\pi a^3 \sin^3 \int_{\frac{\pi}{2}}^0 (1 - \cos^2 t)^3 \cos^2 t d(\cos t) = \dots = \frac{128}{105} \pi$$

$$V_{Ox} = 2V_{Ox}^* = \frac{256}{105} \pi$$

Пример.

$$\left. \begin{array}{l} r = a \sin^2 \varphi \end{array} \right| \frac{V_{Or} - ?}{}$$

$$\begin{array}{c|c|c|c|c|c} \varphi & 0 & \frac{\pi}{2} & \frac{\pi}{4} & \frac{3\pi}{4} & \pi \\ \hline r & 0 & a & \frac{a}{2} & \frac{a}{2} & 0 \end{array} \quad \forall \varphi \in [0; 2\pi]$$

$$V_{Or} = \frac{2}{3} \pi \int_0^\pi (a \sin^2 \varphi)^3 \sin \varphi d\varphi = -\frac{2}{3} \pi a^3 \int_0^\pi \sin^6 \varphi d \cos \varphi =$$

$$= -\frac{2}{3} \pi a^3 \int_0^\pi (1 - \cos^2 \varphi)^3 d \cos \varphi = \dots = \frac{64}{105} \pi a^3$$

## 4.4 Длина дуги

### 4.4.1 Прямоугольная декартовая система координат

Пусть  $y = f(x)$  непрерывна на  $[a; b]$ .

$M_0(x_0, y_0)$   $M(x, y)$

$\Delta x$  — приращение  $x$   $\Delta y$  — приращение  $y$

$x \rightarrow x + \Delta x$   
 $y \rightarrow y + \Delta y$   $M(x, y) \rightarrow M_1(x + \Delta x, y + \Delta y)$

$l_0 - \widehat{M_0 M_1}$  — дуга кривой  $\Delta l$  — приращение дуги кривой  $\Delta l = \widehat{M M_1}$

Найдём  $l'_x$  — ?

$$l'_x = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta l}{\Delta x}$$

$\triangle M M_1 A$   $MA = \Delta x$   $AM_1 = \Delta y$

$$MM_1^2 = \Delta x^2 + \Delta y^2 \quad | \cdot \Delta l^2 | : \Delta l^2$$

$$\left( \frac{MM_1}{\Delta l} \right)^2 \cdot (\Delta l)^2 = \Delta x^2 + \Delta y^2 \quad | : \Delta x^2$$

$$\left( \frac{MM_1}{\Delta l} \right)^2 \cdot \left( \frac{\Delta l}{\Delta x} \right)^2 = 1 + \left( \frac{\Delta y}{\Delta x} \right)^2$$

Вычислим предел при  $\Delta x \rightarrow 0$ .

Левая часть:

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left( \frac{MM_1}{\Delta l} \right)^2 \cdot \left( \frac{\Delta l}{\Delta x} \right)^2 = \left| \begin{array}{l} \text{при } \Delta x \rightarrow 0 \quad M \rightarrow M_1 \\ \Delta l \rightarrow MM_1 \quad \text{дуга} \rightarrow \text{хорда} \end{array} \right| = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} 1^2 \cdot \left( \frac{\Delta l}{\Delta x} \right)^2 = (l'_x)^2$$

Правая часть:

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left( 1 + \left( \frac{\Delta y}{\Delta x} \right)^2 \right) = 1 + \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left( \frac{\Delta y}{\Delta x} \right)^2 = 1 + (y'_x)^2$$

Получаем:

$$\begin{aligned} (l'_x)^2 &= 1 + (y'_x)^2 \\ l'_x &= \sqrt{1 + (y'_x)^2} \quad | \cdot dx \\ l'_x dx &= \sqrt{1 + (y'_x)^2} dx \\ dl &= \sqrt{1 + (y'_x)^2} dx \end{aligned} \quad (\vee)$$

$$\boxed{l = \int_a^b \sqrt{1 + (y'_x)^2} dx} \quad (13)$$

#### 4.4.2 Параметрически заданная функция

$$(\vee) = dl = \sqrt{1 + (y'_x)^2} dx = \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} dx = \sqrt{\frac{(dx)^2 + (dy)^2}{(dx)^2}} dx = \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2} = dl$$

(VV)

Пусть кривая задана параметрически:

$$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases} \text{ — непрерывно дифференцируемые функции на } [t_1; t_2].$$

$$x(t_1) = a, \quad x(t_2) = b$$

$$\begin{aligned} (VV) = dl &= \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2} = \sqrt{(x'(t) dt)^2 + (y'(t) dt)^2} = \sqrt{[(x'(t))^2 + (y'(t))^2] (dt)^2} = \\ &= \sqrt{(x'_t)^2 + (y'_t)^2} dt = \sqrt{(x'_t)^2 + (y'_t)^2} dt \end{aligned}$$

$$l = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{(x'_t)^2 + (y'_t)^2} dt \quad (14)$$

#### 4.4.3 Полярная система координат

Пусть  $r = r(\varphi)$  — непрерывная на  $[\alpha; \beta]$  функция.

$$(\vee\vee) = dl = \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2} \ominus$$

$$x = r \cos \varphi \quad y = r \sin \varphi$$

$$dx = (r \cos \varphi)'_{\varphi} d\varphi = (r' \cos \varphi - r \sin \varphi) d\varphi$$

$$dy = (r \sin \varphi)'_{\varphi} d\varphi = (r' \sin \varphi + r \cos \varphi) d\varphi$$

$$\begin{aligned} (dx)^2 + (dy)^2 &= [(r' \cos \varphi - r \sin \varphi)^2 + (r' \sin \varphi + r \cos \varphi)^2] (d\varphi)^2 = \\ &= \left[ (r')^2 \cos^2 \varphi - \cancel{2r'r \cos \varphi \sin \varphi} + r^2 \sin^2 \varphi + \right. \\ &\quad \left. + (r')^2 \sin^2 \varphi + \cancel{2r'r \cos \varphi \sin \varphi} + r^2 \cos^2 \varphi \right] (d\varphi)^2 = \\ &= [(r')^2 (\cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi) + r^2 (\cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi)] (d\varphi)^2 = [(r')^2 + r^2] (d\varphi)^2 \end{aligned}$$

$$\ominus \sqrt{(r')^2 + r^2} d\varphi = dl$$

$$l = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{(r')^2 + r^2} d\varphi \quad (15)$$

**Пример.**  $y = x^2$ , от  $x = 0$  до  $x = 1$

$$l = \int_0^1 \sqrt{1 + (2x)^2} dx = \int_0^1 \sqrt{1 + 4x^2} dx = \dots = \frac{1}{2} \sqrt{5} + \frac{1}{4} \ln(2 + \sqrt{5})$$

**Пример.**  $x = e^t \cos t$   $y = e^t \sin t$   $t = 0, t = 1$   $l = ?$

$$l = \int_0^1 \sqrt{(x'_t)^2 + (y'_t)^2} dt = \left| \begin{array}{l} x'_t = e^t \cos t - e^t \sin t \\ y'_t = e^t \sin t + e^t \cos t \\ (x'_t)^2 + (y'_t)^2 = \dots = 2e^{2t} \end{array} \right| = \int_0^1 \sqrt{2e^{2t}} dt = \dots = \sqrt{2}(e - 1)$$

**Пример.**

$$r = 2(1 - \cos \varphi)$$

$$r = 1$$

внутри окружности

вне кардиоиды

$$l = ?$$

$\varphi$	0	$\frac{\pi}{2}$	$\pi$
$r$	0	2	4

$$2(1 - \cos \varphi) = 1$$

$$1 - \cos \varphi = \frac{1}{2}$$

$$\cos \varphi = \frac{1}{2} \Rightarrow \varphi = \frac{\pi}{3}$$

$$l^* = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{(r')^2 + r^2} d\varphi = \left| r' = 2 \sin \varphi \quad (r')^2 = 4 \sin^2 \varphi \quad r^2 = 4(1 - \cos \varphi)^2 \right| =$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{3}} \sqrt{4 \sin^2 \varphi + 4 - 8 \cos \varphi + 4 \cos^2 \varphi} d\varphi = \int_0^{\frac{\pi}{3}} \sqrt{8 - 8 \cos \varphi} d\varphi =$$

$$= 2\sqrt{2} \int_0^{\frac{\pi}{3}} \sqrt{1 - \cos \varphi} d\varphi = \left| \begin{array}{l} \sin^2 \frac{\varphi}{2} = \frac{1 - \cos \varphi}{2} \\ 1 - \cos \varphi = 2 \sin^2 \frac{\varphi}{2} \end{array} \right| = 4 \int_0^{\frac{\pi}{3}} \sqrt{\sin^2 \frac{\varphi}{2}} d\varphi =$$

$$= 4 \int_0^{\frac{\pi}{3}} \left| \sin \frac{\varphi}{2} \right| d\varphi = 4 \int_0^{\frac{\pi}{3}} \sin \frac{\varphi}{2} d\varphi = \dots = 4(2 - \sqrt{3})$$

$$l = 2l^* = 8(2 - \sqrt{3})$$

## 4.5 Площадь поверхности вращения (внешняя оболочка)

Пусть  $y = f(x)$  — непрерывно дифференцируема на  $[a; b]$ . Будем искать площадь поверхности, образованной вращением дуги  $\widehat{AB}$  графика функции  $y = f(x)$  вокруг оси  $Ox$ .

**Этапы вывода формулы:**

1. Разбиваем отрезок  $[a; b]$  точками:  $a = x_0 < x_1 < \dots < x_{i-1} < x_i < \dots < x_n < b$   
 $[x_{i-1}; x_i]$  — отрезок разбиения  
 $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$  — длина отрезка разбиения  
 $y_i = f(x_i), i = \overline{1, n}$   
 $M_i(x_i, f(x_i)) — i = \overline{1, n}$   
 Хорды:  $AM_1, M_1M_2, \dots, M_{i-1}M_i, \dots, M_{n-1}B$

2. Хорда при вращении опишет усечённый конус

$$Q_i = 2\pi R_i \Delta S_i \quad \pi l(1 + R)$$

$R_i$  — средний радиус

$$R_i = \frac{f(x_{i-1}) + f(x_i)}{2}$$

$\Delta S_i$  — хорда  $M_{i-1}M_i$

По теореме *Больцано-Коши* функция  $y = f(x)$  принимает все свои значения между  $f(a)$  и  $f(b)$ :

$$R_i = \frac{f(x_{i-1}) + f(x_i)}{2} = f(\xi_i) \quad \exists \xi_i \in [x_{i-1}; x_i], i = \overline{1, n}$$

$$\Delta S_i^2 = \Delta x_i^2 + \Delta y_i^2$$

$$\Delta S_i = \sqrt{\Delta x_i^2 + \Delta y_i^2} \quad \Big| \cdot \frac{\Delta x_i}{\Delta x_i}$$

$$\Delta S_i = \sqrt{\Delta x_i^2 + \Delta y_i^2} \cdot \frac{\Delta x_i}{\Delta x_i}$$

$$\Delta S_i = \sqrt{\frac{\Delta x_i^2 + \Delta y_i^2}{\Delta x_i^2}} \cdot \Delta x_i$$

$$\Delta S_i = \sqrt{1 + \left(\frac{\Delta y_i}{\Delta x_i}\right)^2} \cdot \Delta x_i$$

По теореме *Лагранжа*:

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(c) \quad \exists c \in (a; b)$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_i) - f(x_{i-1})}{x_i - x_{i-1}} = f'(\xi_i) \quad \exists \xi_i \in (x_{i-1}; x_i)$$

$$\Delta S_i = \sqrt{1 + (f'(\xi_i))^2} \cdot \Delta x_i$$

$$Q_i = 2\pi f(\xi_i) \cdot \sqrt{1 + (f'(\xi_i))^2} \cdot \Delta x_i$$

3. Суммируем

$$Q = \sum_{i=1}^n Q_i = 2\pi \sum_{i=1}^n f(\xi_i) \cdot \sqrt{1 + (f'(\xi_i))^2} \cdot \Delta x_i$$

4. Вычислим предел:

$$\lim_{\lambda \rightarrow 0} 2\pi \overbrace{\sum_{i=1}^n f(\xi_i) \cdot \sqrt{1 + (f'(\xi_i))^2} \cdot \Delta x_i}^{\text{интегральная сумма}} = 2\pi \int_a^b f(x) \sqrt{1 + (f')^2} dx =$$

$$\lambda = \max_i \Delta x_i = \boxed{2\pi \int_a^b y \underbrace{\sqrt{1 + (y'_x)^2}}_{dl} dx = Q_{Ox}} \quad (16)$$

Если  $x = f(y) \in C[c; d]$ , тогда:

$$\boxed{Q_{Oy} = 2\pi \int_c^d x \underbrace{\sqrt{1 + (x'_y)^2}}_{dl} dy} \quad (17)$$

#### 4.5.1 Следствия

**Следствие 1.2.** Параметрически заданная функция  $\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}$  — непрерывно дифференцируема на  $[t_1; t_2]$

$$y'_x = \frac{y'_t}{x'_t} \quad \begin{matrix} x(t_1) = a \\ x(t_2) = b \end{matrix} \quad \begin{cases} y(t_1) = c \\ y(t_2) = d \end{cases}$$

$$Q_{Ox} \stackrel{(16)}{=} 2\pi \int_a^b y \sqrt{1 + (y'_x)^2} dx = 2\pi \int_{t_1}^{t_2} y(t) \sqrt{1 + \left(\frac{y'_t}{x'_t}\right)^2} x'_t dt =$$

$$= 2\pi \int_{t_1}^{t_2} y(t) \cdot \frac{\sqrt{(x'_t)^2 + (y'_t)^2}}{x'_t} \cdot x'_t dt = \boxed{2\pi \int_{t_1}^{t_2} y(t) \underbrace{\sqrt{(x'_t)^2 + (y'_t)^2}}_{dl} dt = Q_{Ox}} \quad (18)$$

Аналогично:

$$\boxed{Q_{Oy} \stackrel{(17)}{=} 2\pi \int_{t_1}^{t_2} x(t) \sqrt{(x'_t)^2 + (y'_t)^2} dt} \quad (19)$$

**Следствие 1.3.** Полярная система координат:

$r = r(\varphi)$  — непрерывно дифференцируема на  $[\alpha; \beta]$   $\begin{cases} x = r \cos \varphi \\ y = r \sin \varphi \end{cases}$

$$Q_{Or} \stackrel{(16)}{=} 2\pi \int_{\alpha}^{\beta} r \sin \varphi dl = \boxed{2\pi \int_{\alpha}^{\beta} r \sin \varphi \sqrt{(r')^2 + r^2} d\varphi = Q_{Or}} \quad (20)$$



Пример.

$$\left. \begin{array}{l} y = \operatorname{ch} x \\ x = -\ln 3 \\ x = \ln 2 \end{array} \right| Q_{Ox} = ?$$

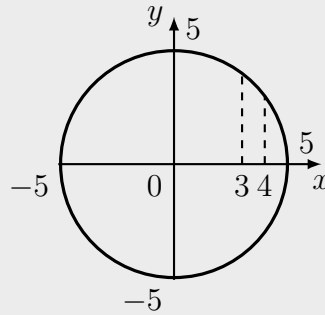
$$y = \operatorname{ch} x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

$x$	0	$\ln 2$	$-\ln 2$	$\ln 3$	$-\ln 3$
$y$	1	$\frac{5}{4}$	$\frac{5}{4}$	$\frac{5}{3}$	$\frac{5}{3}$

$$\begin{aligned} Q_{Ox} &= 2\pi \int_{-\ln 3}^{\ln 2} \operatorname{ch} x \cdot \sqrt{1 + \operatorname{sh}^2 x} dx = \left| \begin{array}{l} \operatorname{ch}^2 x - \operatorname{sh}^2 x = 1 \\ 1 + \operatorname{sh}^2 x = \operatorname{ch}^2 x \end{array} \right| = 2\pi \int_{-\ln 3}^{\ln 2} \operatorname{ch} x \cdot \operatorname{ch} x dx = \\ &= 2\pi \int_{-\ln 3}^{\ln 2} \operatorname{ch}^2 x dx = \dots = \frac{\pi}{2} \left( 2 \ln 6 \cdot \frac{455}{72} \right) \end{aligned}$$

Пример.

$$\left. \begin{array}{l} \begin{cases} x = 5 \sin t \\ y = 5 \cos t \end{cases} \\ \text{от } (3; 4) \\ \text{до } (4; 3) \end{array} \right| Q_{Ox} = ?$$



$$\sin t = \frac{x}{5} \quad \cos t = \frac{y}{5} \quad \sin^2 t + \cos^2 t = 1 \Rightarrow \boxed{\frac{x^2}{5^2} + \frac{y^2}{5^2} = 1}$$

$$y^2 = 25 - x^2 \Rightarrow y = \pm \sqrt{25 - x^2} \quad y'_x = \frac{-2x}{2\sqrt{25 - x^2}}$$

$$\begin{aligned} Q_{Ox} &\stackrel{(16)}{=} 2\pi \int_3^4 \underbrace{\sqrt{25 - x^2}}_y \cdot \underbrace{\sqrt{1 + \frac{x^2}{25 - x^2}}}_{1 + y'^2_2} dx = 2\pi \int_3^4 \sqrt{25 - x^2} \cdot \frac{5}{\sqrt{25 - x^2}} dx = \\ &= 5 \cdot 2\pi \int_3^4 dx = 10\pi \end{aligned}$$

Пример.

$$\left. \begin{array}{l} r = \cos \varphi \\ \varphi = \frac{\pi}{4} \quad \varphi = \frac{\pi}{3} \end{array} \right| r \geq 0 \quad \cos \varphi \geq 0$$

$$Q_{Or} = ?$$

$$Q_{Or} = 2\pi \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} -\cos \varphi \cdot \sin \varphi \cdot \sqrt{\cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi} d\varphi = 2\pi \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \cos \varphi \sin \varphi d\varphi = \dots = \frac{\pi}{4}$$

## 5 Несобственные интегралы

### 5.1 Интегралы по бесконечному промежутку

Пусть  $y = f(x)$  определена на  $[a; +\infty)$ , интегрируема на  $[a; b] \subset [a; +\infty)$ . Тогда определена функция

$$\boxed{\Phi(b) = \int_a^b f(x) dx} \text{ на } [a; +\infty) \quad (1)$$

как определённый интеграл с переменным верхним пределом интегрирования.

**Определение 1.** Предел функции  $\Phi(b)$  при  $b \rightarrow +\infty$  называется несобственным интегралом от функции  $f(x)$  по бесконечному промежутку  $[a; +\infty)$  или **несобственным интегралом 1-го рода** и обозначается

$$\boxed{\int_a^{+\infty} f(x) dx = \lim_{b \rightarrow +\infty} \Phi(b) = \lim_{b \rightarrow +\infty} \int_a^b f(x) dx} \quad (2)$$

Если предел в правой части равенства (2) существует и конечен, то несобственный интеграл в левой части равенства (2) **сходится**.

Если предел в правой части равенства (2) не существует или равен бесконечности, то несобственный интеграл в левой части равенства (2) **расходится**.

Аналогично:

$$\int_{-\infty}^b f(x) dx = \lim_{a \rightarrow -\infty} \int_a^b f(x) dx \quad (3)$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = \int_{-\infty}^c f(x) dx + \int_c^{+\infty} f(x) dx \quad c - \text{число} \quad (4)$$

Несобственный интеграл левой части (4) **сходится**, если оба несобственных интеграла в правой части (4) сходятся. Если хотя бы один несобственный интеграл в правой части (4) расходится, то несобственный интеграл в левой части (4) **расходится**.

**Геометрический смысл:** если  $f(x) \geq 0, \forall x > 0$ , то значение сходящегося несобственного интеграла от функции  $f(x)$  по промежутку  $[a; +\infty)$  соответствует площади бесконечно длинной криволинейной трапеции.

**Пример.**

$$\int_0^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2} - ? \quad y = \frac{1}{1+x^2}$$

$$\begin{aligned} \int_0^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2} &= \lim_{b \rightarrow +\infty} \int_0^b \frac{dx}{1+x^2} = \lim_{b \rightarrow +\infty} \left( \arctg x \Big|_0^b \right) = \lim_{b \rightarrow +\infty} (\arctg b - \arctg 0) = \\ &= \lim_{b \rightarrow +\infty} \arctg b - 0 = \frac{\pi}{2} - 0 = \frac{\pi}{2} \end{aligned}$$

$$\int_0^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2} - \text{сходится}$$

### 5.1.1 Признаки сходимости и расходимости несобственных интегралов 1-го рода

**Теорема 1** (*Признак сходимости по неравенству*).

Пусть функции  $f(x)$  и  $g(x)$  интегрируемы на  $[a; b] \subset [a; +\infty)$ , причём

$$\forall x \geq a: 0 \leq f(x) \leq g(x)$$

Тогда:

1. Если  $\int_a^{+\infty} g(x) dx$  сходится, то  $\int_a^{+\infty} f(x) dx$  — сходится
2. Если  $\int_a^{+\infty} f(x) dx$  расходится, то  $\int_a^{+\infty} g(x) dx$  — расходится

**Доказательство.**

(опр. 1)

$\int_a^{+\infty} g(x) dx$  — сходится  $\Rightarrow$  по определению несобственного интеграла 1-го рода

$$\int_a^{+\infty} g(x) dx = \lim_{b \rightarrow +\infty} \int_a^b g(x) dx = C \quad C — \text{число}$$

Так как  $\forall x \geq a: g(x) \geq 0$

$$\Phi(b) = \int_a^b g(x) dx \leq C, \quad b > a$$

По условию:  $\forall x \geq a: 0 \leq f(x) \leq g(x)$

Интегрируем:

$$\int_a^b f(x) dx \leq \int_a^b g(x) dx \leq C$$

Так как  $f(x) \geq 0$ ,  $\forall x \geq a$  и  $b > a$ , то функция

$$\Psi(b) = \int_a^b f(x) dx \text{ монотонно возрастает и ограничена сверху}$$

**Утверждение:** монотонная и ограниченная сверху функция при  $x \rightarrow +\infty$  имеет конечный предел.

По утверждению функция  $\Psi(b)$  имеет конечный предел при  $x \rightarrow +\infty$ , то есть

$$\int_a^{+\infty} f(x) dx = \lim_{b \rightarrow +\infty} \Psi(b) = \lim_{b \rightarrow +\infty} \int_a^b f(x) dx — \text{конечный предел}$$

■

**Доказательство** (Метод от противного).

**Дано:**  $\int_a^{+\infty} f(x) dx$  — расходится

Предположим, что  $\int_a^{+\infty} g(x) dx$  — сходится

Тогда по первой части теоремы:

$$\int_a^{+\infty} f(x) dx — \text{сходится}$$

А это противоречит условию теоремы  $\Rightarrow \int_a^{+\infty} g(x) dx$  — расходится

■

**Пример.**

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2(1+3^x)} dx - ? \quad \text{несобственный интеграл 1-го рода } x \in [1; +\infty)$$

$$\left. \begin{aligned} f(x) &= \frac{1}{x^2(1+3^x)} \\ g(x) &= \frac{1}{4x^2} \end{aligned} \right\} \frac{1}{x^2(1+3^x)} \leq \frac{1}{4x^2}$$

$$\begin{aligned} \int_1^{+\infty} g(x) dx &= \frac{1}{4} \int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^2} = \frac{1}{4} \cdot \lim_{b \rightarrow +\infty} \int_1^b \frac{dx}{x^2} = \frac{1}{4} \cdot \lim_{b \rightarrow +\infty} \left( \frac{x^{-1}}{-1} \Big|_1^b \right) = \\ &= -\frac{1}{4} \lim_{b \rightarrow +\infty} \left( \frac{1}{b} - 1 \right) = \frac{1}{4} \end{aligned}$$

$\Downarrow$

$$\int_1^{+\infty} g(x) dx = \frac{1}{4} \int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^2} - \text{сходится}$$

По признаку сходимости по неравенству:

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2(1+3^x)} dx \text{ сходится}$$

**Пример.**

$$\int_1^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{x} + \cos^2 x} - ? \quad \text{несобственный интеграл 1-го рода } x \in [1; +\infty)$$

$$f(x) = \frac{dx}{\sqrt{x} + \cos^2 x}$$

$$0 \leq \cos^2 x \leq 1 \Rightarrow \sqrt{x} \leq \sqrt{x} + \cos^2 x \leq \sqrt{x} + 1 \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{x} + 1} \leq \frac{1}{\sqrt{x} + \cos^2 x} \leq \frac{1}{\sqrt{x}}$$

$$g(x) = \frac{1}{\sqrt{x} + 1}$$

$$\begin{aligned} \int_1^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{x} + 1} &= \lim_{b \rightarrow +\infty} \int_1^b \frac{dx}{\sqrt{x} + 1} = \left| x = t^2 \quad dx = 2t dt \right|_{x=1, t=1}^b = \lim_{b \rightarrow +\infty} \int_1^b \frac{2t dt}{t + 1} = \\ &= 2 \lim_{b \rightarrow +\infty} \int_1^b \frac{t + 1 - 1}{t + 1} dt = 2 \lim_{b \rightarrow +\infty} \left( \int_1^b dt - \int_1^b \frac{dt}{t + 1} \right) = \\ &= 2 \lim_{b \rightarrow +\infty} (b - 1 - \ln |b + 1| + \ln 2) = \infty \end{aligned}$$

$$\int_1^{+\infty} g(x) dx = \int_1^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{x} + 1} - \text{расходится}$$

$$\int_1^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{x} + \cos^2 x} - \text{расходится по неравенству}$$

**Теорема 2** (*Предельный признак сходимости*).

Пусть  $f(x)$  и  $g(x)$  интегрируемы на  $[a; b] \subset [a; +\infty)$  и  $\forall x \geq a: f(x) \geq 0, g(x) > 0$ . Если существует конечный предел:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lambda > 0 \quad (5)$$

то  $\int_a^{+\infty} f(x) dx$  и  $\int_a^{+\infty} g(x) dx$  сходятся или расходятся одновременно.

**Доказательство.**

Из (5)  $\Rightarrow$  по определению предела:

$$\begin{aligned} \forall \varepsilon > 0, \exists M(\varepsilon) > 0: \forall x > M &\Rightarrow \left| \frac{f(x)}{g(x)} - \lambda \right| < \varepsilon \\ -\varepsilon < \frac{f(x)}{g(x)} - \lambda < \varepsilon \\ \lambda - \varepsilon < \frac{f(x)}{g(x)} < \lambda + \varepsilon \\ (\lambda - \varepsilon) \cdot g(x) < f(x) < (\lambda + \varepsilon) \cdot g(x) \quad \forall x > M \end{aligned} \quad (*)$$

**1 шаг** Рассмотрим  $f(x) < (\lambda + \varepsilon)g(x)$

Интегрируем:

$$\int_a^{+\infty} f(x) dx < (\lambda + \varepsilon) \int_a^{+\infty} g(x) dx$$

Число  $(\lambda + \varepsilon)$  не влияет на сходимость/расходимость несобственного интеграла.

Пусть  $\int_a^{+\infty} g(x) dx$  — сходится, тогда:

$$(\lambda + \varepsilon) \int_a^{+\infty} g(x) dx \text{ — сходится}$$

По теореме 1  $\int_a^{+\infty} f(x) dx$  — сходится.

Пусть  $\int_a^{+\infty} f(x) dx$  расходится, тогда по теореме 1

$$(\lambda + \varepsilon) \int_a^{+\infty} g(x) dx \text{ — расходится} \Rightarrow \int_a^{+\infty} g(x) dx \text{ — расходится}$$

**2 шаг** Рассмотрим  $(\lambda - \varepsilon) \cdot g(x) < f(x)$

Интегрируем:

$$(\lambda - \varepsilon) \int_a^{+\infty} g(x) dx < \int_a^{+\infty} f(x) dx$$

$(\lambda - \varepsilon)$  не влияет на сходимость/расходимость несобственного интеграла

Пусть  $\int_a^{+\infty} f(x) dx$  — сходится, тогда по теореме 1

$$(\lambda - \varepsilon) \int_a^{+\infty} g(x) dx \text{ — сходится} \Rightarrow \int_a^{+\infty} g(x) dx \text{ — сходится}$$

Пусть  $(\lambda - \varepsilon) \int_a^{+\infty} g(x) dx$  — расходится, тогда  $\int_a^{+\infty} g(x) dx$  — расходится

По теореме 1  $\int_a^{+\infty} f(x) dx$  расходится, тогда

$$\int_a^{+\infty} f(x) dx \text{ и } \int_a^{+\infty} g(x) dx \text{ сходятся и расходятся одновременно}$$

■

**Пример.**

$$\int_1^{+\infty} \frac{\sqrt{x^3} + \sqrt{x^2 + 1}}{x^3 + 3x + 1} dx$$

$$f(x) = \frac{\sqrt{x^3} + \sqrt{x^2 + 1}}{x^3 + 3x + 1} \quad g(x) = \frac{1}{x^{3/2}}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\left(x^{\frac{3}{2}} + \sqrt{x^2 + 1}\right) \cdot x^{\frac{3}{2}}}{(x^3 + 3x + 1) \cdot 1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^3 \left(1 + \sqrt{\frac{1}{x} + \frac{1}{x^3}}\right)}{x^3 \left(1 + \frac{3}{x^2} + \frac{1}{x^3}\right)} = \frac{1}{1} = 1 = \lambda > 0$$

$$\int_1^{+\infty} g(x) dx = \int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^{\frac{3}{2}}} = \lim_{b \rightarrow +\infty} \int_1^b x^{-\frac{3}{2}} dx = \lim_{b \rightarrow +\infty} \left. \frac{x^{-\frac{1}{2}}}{-\frac{1}{2}} \right|_1^b = -2 \lim_{b \rightarrow +\infty} \left. \frac{1}{\sqrt{x}} \right|_1^b = 2$$

### 5.1.2 Интегралы для сравнения. Эталоны

$$\begin{aligned} \int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha} &= \lim_{b \rightarrow +\infty} \int_1^b x^{-\alpha} dx = \lim_{b \rightarrow +\infty} \left( \frac{x^{-\alpha+1}}{-\alpha+1} \Big|_1^b \right) = \frac{1}{1-\alpha} \cdot \lim_{b \rightarrow +\infty} x^{-\alpha+1} \Big|_1^b = \\ &= \frac{1}{1-\alpha} \left( \lim_{b \rightarrow +\infty} b^{-\alpha+1} - 1 \right) = \begin{cases} \frac{1}{\alpha-1} & \alpha > 1 \\ \infty & \alpha < 1 \end{cases} \end{aligned}$$

$$\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x} = \lim_{b \rightarrow +\infty} \int_1^b \frac{dx}{x} = \lim_{b \rightarrow +\infty} (\ln |b| - \ln |1|) = \lim_{b \rightarrow +\infty} \ln |b| = \infty$$

**Вывод:**

$$\boxed{\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha} = \begin{cases} \text{сходится при } \alpha > 1 \\ \text{расходится при } \alpha \leq 1 \end{cases}}$$

**интеграл Дирихле**

## 5.2 Абсолютная и условная сходимость

**Определение 2.** Если наряду с несобственным интегралом от функции  $f(x)$  по бесконечному промежутку  $[a; +\infty)$  сходится и несобственный интеграл от функции  $|f(x)|$  по этому же промежутку, то первый несобственный интеграл называется **сходящимся абсолютно**.

$$\boxed{\begin{array}{l} \text{несобственный интеграл} \\ \text{от } f(x) \text{ сходится абсолютно} \end{array}} = \boxed{\begin{array}{l} \text{несобственный интеграл} \\ \text{от } f(x) \text{ сходится} \end{array}} + \boxed{\begin{array}{l} \text{несобственный интеграл} \\ \text{от } |f(x)| \text{ сходится} \end{array}}$$

**Определение 3.** Если несобственный интеграл от функции  $f(x)$  по бесконечному промежутку  $[a; +\infty)$  сходится, а несобственный интеграл от функции  $|f(x)|$  по этому же промежутку расходится, то первый несобственный интеграл называется **сходящимся условно**.

$$\boxed{\begin{array}{l} \text{несобственный интеграл} \\ \text{от } f(x) \text{ сходится условно} \end{array}} = \boxed{\begin{array}{l} \text{несобственный интеграл} \\ \text{от } f(x) \text{ сходится} \end{array}} + \boxed{\begin{array}{l} \text{несобственный интеграл} \\ \text{от } |f(x)| \text{ расходится} \end{array}}$$

**Теорема 3** (*Признак абсолютной сходимости*).

Пусть функция  $f(x)$  знакопеременна на  $[a; +\infty)$ . Если функции  $f(x)$  и  $|f(x)|$  интегрируемы на любом отрезке  $[a; b] \subset [a; +\infty)$  и несобственный интеграл от функции  $|f(x)|$  по бесконечному промежутку  $[a; +\infty)$  сходится, то сходится и несобственный интеграл от функции  $f(x)$  по  $[a; +\infty)$ , причём абсолютно.

**Доказательство.**

Так как  $\forall x \in [a; +\infty)$  верно неравенство

$$\begin{aligned} -|f(x)| &\leq f(x) \leq |f(x)| & \left| \begin{array}{l} \\ \end{array} \right| &+ |f(x)| \\ 0 &\leq f(x) + |f(x)| \leq 2|f(x)| \end{aligned}$$

По условию  $\int_a^{+\infty} |f(x)| dx$  сходится  $\Rightarrow 2 \int_a^{+\infty} |f(x)| dx$  сходится.

По теореме 1 (*признак сходимости по неравенству*):

$$\int_a^{+\infty} (f(x) + |f(x)|) dx \text{ — сходится}$$

Рассмотрим

$$\int_a^{+\infty} f(x) dx = \underbrace{\int_a^{+\infty} (f(x) + |f(x)|) dx}_{\text{сх-ся по Т1}} - \underbrace{\int_a^{+\infty} |f(x)| dx}_{\text{сх-ся по условию}}$$

По определению сходящегося несобственного интеграла  $\Rightarrow \int_a^{+\infty} f(x) dx$  сходится

По определению абсолютной сходимости  $\Rightarrow \int_a^{+\infty} f(x) dx$  сходится абсолютно ■

**Пример.**

$\int_1^{+\infty} \frac{\sin x}{x^3} dx$  — несобственный интеграл 1-го рода  $x \in [1; +\infty)$

$f(x) = \frac{\sin x}{x^3}$  — знакопеременна на  $[1; +\infty)$

$$|f(x)| = \left| \frac{\sin x}{x^3} \right| = \frac{|\sin x|}{x^3} \leq \frac{1}{x^3}$$

$$g(x) = \frac{1}{x^3}$$

$$\int_1^{+\infty} g(x) dx = \int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^3} \quad \alpha = 3 > 1 \Rightarrow \int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^3} \text{ сходится}$$

$$\int_1^{+\infty} |f(x)| dx = \int_1^{+\infty} \frac{|\sin x|}{x^3} dx \text{ — сходится по неравенству}$$

$$\int_1^{+\infty} f(x) dx = \int_1^{+\infty} \frac{\sin x}{x^3} dx \text{ — сходится абсолютно}$$

### 5.3 Несобственные интегралы 2-го рода

Пусть функция  $f(x)$  определена на полуинтервале  $[a; b)$ , а в точке  $x = b$  терпит разрыв 2-го рода. Предположим, что функция  $f(x)$  интегрируема на  $[a; \eta] \subset [a; b)$ . Тогда на  $[a; b)$  определена функция

$$\Phi(\eta) = \int_a^\eta f(x) dx \quad (1)$$

как интеграл с переменным верхним пределом.

**Определение 1.** Предел функции  $\Phi(\eta)$  при  $\eta \rightarrow b-$  называется несобственным интегралом от неограниченной функции  $f(x)$  на  $[a; b)$  или **несобственным интегралом 2-го рода** и обозначается

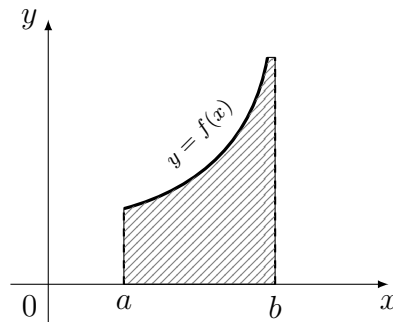
$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{\eta \rightarrow b-} \Phi(\eta) = \lim_{\eta \rightarrow b-} \int_a^\eta f(x) dx \quad (2)$$

Если предел в правой части равенства (2) существует и конечен, то несобственный интеграл от неограниченной функции  $f(x)$  по  $[a; b)$  **сходится**.

Если предел в правой части равенства (2) не существует или равен  $\infty$ , то несобственный интеграл от неограниченной функции  $f(x)$  по  $[a; b)$  **расходится**.



**Геометрический смысл:** Если  $\forall x \in [a; b): f(x) \geq 0$ , то сходящийся несобственный интеграл от функции  $f(x)$  на промежутке  $[a; b)$  соответствует площади бесконечно высокой криволинейной трапеции, ограниченной графиком функции  $y = f(x)$ ,  $x = a$ , осью  $Ox$  и  $x = b$  — асимптотой.



Аналогично:

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{\eta \rightarrow a+} \int_{\eta}^b f(x) dx \quad (3)$$

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx = \lim_{\eta \rightarrow c-} \int_a^{\eta} f(x) dx + \lim_{\xi \rightarrow c+} \int_{\xi}^b f(x) dx \quad (4)$$

Несобственный интеграл в левой части равенства (4) сходится, когда оба несобственных интеграла в правой части равенства (4) сходятся. Если хотя бы один несобственный интеграл в правой части равенства (4) расходится, то несобственный интеграл в левой части расходится.

**Пример.**

$$\begin{aligned} \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{dx}{x \ln x} &= \left| \text{нес. инт. 2-го рода} \right|_{x=0} = \lim_{\eta \rightarrow 0+} \int_{\eta}^{\frac{1}{2}} \frac{dx}{x \ln x} = \lim_{\eta \rightarrow 0+} \int_{\eta}^{\frac{1}{2}} \frac{d(\ln x)}{\ln x} = \\ &= \lim_{\eta \rightarrow 0+} \left( \ln |\ln x| \Big|_{\eta}^{\frac{1}{2}} \right) = \lim_{\eta \rightarrow 0+} \left( \ln \left| \ln \frac{1}{2} \right| - \ln |\ln \eta| \right) = \\ &= \ln \left| \ln \frac{1}{2} \right| - \lim_{\eta \rightarrow 0+} \ln |\ln \eta| = \infty \end{aligned}$$

$$\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{dx}{x \ln x} - \text{расходится}$$

**Пример.**

$$\begin{aligned} \int_0^2 \frac{dx}{\sqrt{4-x^2}} &= \left| \text{нес. инт. 2-го рода} \right|_{x=2} = \lim_{\eta \rightarrow 2-} \int_0^{\eta} \frac{dx}{\sqrt{4-x^2}} = \lim_{\eta \rightarrow 2-} \left( \arcsin \frac{1}{2} \Big|_0^{\eta} \right) = \\ &= \lim_{\eta \rightarrow 2-} \arcsin \frac{\eta}{2} - \arcsin 0 = \frac{\pi}{2} - 0 = \frac{\pi}{2} \end{aligned}$$

$$\int_0^2 \frac{dx}{\sqrt{4-x^2}} - \text{сходится}$$

### 5.3.1 Интегралы для сравнения. Эталоны

$$\int_0^b \frac{dx}{x^\alpha} = \left| \text{нес. инт. 2-го рода} \right|_{x=0} = \lim_{\eta \rightarrow 0+} \int_\eta^b x^{-\alpha} dx = \lim_{\eta \rightarrow 0+} \left. \frac{x^{-\alpha+1}}{-\alpha+1} \right|_\eta^b =$$

$$= \frac{1}{-\alpha+1} \left( b^{-\alpha+1} - \lim_{\eta \rightarrow 0+} \eta^{-\alpha+1} \right) = \begin{cases} \frac{b^{-\alpha+1}}{-\alpha+1} & \alpha < 1 \\ \infty & \alpha > 1 \end{cases}$$

$$\boxed{\alpha = 1}: \int_0^b \frac{dx}{x} = \lim_{\eta \rightarrow 0+} \left( \ln x \Big|_\eta^b \right) = \ln b - \lim_{\eta \rightarrow 0+} \ln \eta = \infty$$

$$\boxed{\int_0^b \frac{dx}{x^\alpha} = \begin{cases} \text{сходится} & \alpha < 1 \\ \text{расходится} & \alpha \geq 1 \end{cases}}$$

$$\boxed{\int_a^b \frac{dx}{(x-a)^\alpha} = \begin{cases} \text{сходится} & \alpha < 1 \\ \text{расходится} & \alpha \geq 1 \end{cases}}$$

интеграл Дирихле

$$\boxed{\int_a^b \frac{dx}{(b-x)^\alpha} = \begin{cases} \text{сходится} & \alpha < 1 \\ \text{расходится} & \alpha \geq 1 \end{cases}}$$

### 5.3.2 Признаки сходимости несобственного интеграла 2-го рода

**Теорема 1** (*Признак сходимости по неравенству*).

Пусть функции  $f(x)$  и  $g(x)$  интегрируемы на  $\forall$  отрезке  $[a; \eta] \subset [a; b)$ , являются неотрицательными  $\forall x \in [a; b)$  и в точке  $x = b$  терпят разрыв 2-го рода, причём выполнено неравенство  $0 \leq f(x) \leq g(x)$ . Тогда

1. Если несобственный интеграл  $\int_a^b g(x) dx$  сходится, то несобственный интеграл  $\int_a^b f(x) dx$  сходится.
2. Если собственный интеграл  $\int_a^b f(x) dx$  расходится, то несобственный интеграл  $\int_a^b g(x) dx$  расходится.

**Теорема 2** (*Предельный признак сходимости*).

Пусть функции  $f(x)$  и  $g(x)$  интегрируемы на  $\forall$  отрезке  $[a; \eta] \subset [a; b)$ , являются неотрицательными  $\forall x \in [a; b)$  и в точке  $x = b$  терпят разрыв 2-го рода. Если существует конечный положительный предел

$$\lim_{x \rightarrow b-} \frac{f(x)}{g(x)} = \lambda > 0 \quad (5)$$

то  $\int_a^b f(x) dx$  и  $\int_a^b g(x) dx$  сходятся или расходятся одновременно.

**Пример.**

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1 - \cos x}{x^3} = \left| \begin{array}{l} \text{нес. инт. 2-го рода} \\ x = 0 \end{array} \right|$$

$$f(x) = \frac{1 - \cos x}{x^3} \quad g(x) = \frac{1}{x^\alpha}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1 - \cos x) \cdot x^\alpha}{x^3 \cdot 1} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 \cdot x^\alpha}{2 \cdot x^3} = \frac{1}{2}, \quad \alpha = 1$$

$$g(x) = \frac{1}{2x}$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{2x} - \text{расходится } \alpha = 1$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1 - \cos x}{x^3} dx - \text{расходится по предельному признаку}$$

**Определение 2.** Если несобственный интеграл от неограниченной функции  $f(x)$  при  $x \rightarrow b-$  по промежутку  $[a; b)$  сходится и несобственный интеграл функции  $|f(x)|$  по этому же промежутку сходится, то первый из несобственных интегралов **сходится абсолютно**.

**Определение 3.** Если несобственный интеграл от неограниченной функции  $f(x)$  при  $x \rightarrow b-$  по промежутку  $[a; b)$ , сходится, а несобственный интеграл от функции  $|f(x)|$  по этому же промежутку расходится, то первый из несобственных интегралов **сходится условно**.

**Теорема 3** (*Признак абсолютной сходимости*).

Пусть функция  $f(x)$  знакопеременна на  $[a; b)$ . Если  $f(x)$  и  $|f(x)|$  интегрируемы на  $\forall [a; \eta] \subset [a; b)$  и несобственный интеграл от функции  $|f(x)|$  сходится по этому промежутку, то несобственный интеграл от функции  $f(x)$  сходится, причём абсолютно.

**Пример.**

$$\int_0^1 \frac{\cos \frac{1}{x}}{\sqrt[3]{x}} dx - \text{несобственный интеграл 2-го рода } x = 0$$

$$f(x) = \frac{\cos \frac{1}{x}}{\sqrt[3]{x}} - \text{знакопеременна при } x \in [0; 1]$$

$$|f(x)| = \left| \frac{\cos \frac{1}{x}}{\sqrt[3]{x}} \right| = \boxed{\frac{|\cos \frac{1}{x}|}{\sqrt[3]{x}} \leq \frac{1}{\sqrt[3]{x}}}$$

$$g(x) = \frac{1}{\sqrt[3]{x}}$$

$$\int_0^1 g(x) dx = \int_0^1 \frac{dx}{x^{1/3}} \quad \alpha = 1/3 < 1 - \text{сходится}$$

$$\int_0^1 |f(x)| dx = \int_0^1 \frac{|\cos \frac{1}{x}|}{\sqrt[3]{x}} dx - \text{сходится по неравенству}$$

$$\int_0^1 f(x) dx = \int_0^1 \frac{\cos \frac{1}{x}}{\sqrt[3]{x}} dx - \text{сходится абсолютно (по признаку абсолютной сходимости)}$$

## 6 Дифференциальные уравнения

**Определение 1.** Дифференциальным уравнением  $n$ -го порядка называется уравнение, которое зависит от одной независимой переменной  $x$ , неизвестной функции  $y(x)$  и её производных до  $n$ -го порядка включительно.

$$F(x, y(x), y'(x), \dots, y^{(n)}(x)) = 0 \quad (1)$$

$F$  — известная функция от  $n + 2$  переменных

**Определение 2.** Если из ДУ (1) можно выразить старшую производную как функцию остальных переменных:

$$y^{(n)}(x) = f(x, y(x), y'(x), \dots, y^{(n-1)}(x)) \quad (2)$$

то уравнение (2) называется **ДУ  $n$ -го порядка, разрешённым относительно старшей производной**.

**Определение 3.** Если неизвестная искомая функция  $y(x)$  зависит от одной переменной  $x$ , то ДУ называется **обыкновенным (ОДУ)**.

**Определение 4.** Если неизвестная искомая функция  $y(x)$  зависит от нескольких переменных, то ДУ называется **ДУ в частных производных (ДУЧП)**.

Далее рассматриваем ОДУ.

**Определение 5.** Максимальный порядок производной неизвестной функции  $y(x)$  называется **порядком ДУ**.

**Определение 6.** Процесс решения ДУ называется **интегрированием**.

**Определение 7.** Решением дифференциального уравнения (1) или (2) называется  $n$  раз непрерывно дифференцируемая функция  $y = \varphi(x)$  на промежутке  $I \subseteq \mathbb{R}$  такая, что после подстановки её и её производных в (1) или (2) получаем верное тождество.

## 7 Дифференциальные уравнения 1-го порядка

**Определение 1.** Дифференциальным уравнением 1-го порядка называется уравнение, которое зависит от одной независимой переменной  $x$ , неизвестной функции  $y(x)$  и её производной:

$$F(x, y(x), y'(x)) \quad (1)$$

$F$  — известная функция 3-х переменных

**Определение 2.** Если в ДУ (1) можно выразить старшую производную как функцию остальных переменных:

$$y' = f(x, y) \quad (2)$$

то уравнение (2) называется **ДУ 1-го порядка, разрешённым относительно старшей производной**.

Интегрирование ДУ в общем случае приводит к бесконечному множеству решений, отличающихся друг от друга константой. Чтобы выделить из множества решений одно, нужно подчинить его некоторому дополнительному условию.

**Определение 3.** Условие такое, что при  $x = x_0$  функция  $y$  принимает значение  $y_0$  называется **начальным условием**.

$$\begin{aligned} x_0, y_0 & \text{ — начальные значения} \\ y(x_0) = y_0 & \text{ — начальное условие} \end{aligned} \quad (3)$$

**Определение 4.** Задача нахождения решения ДУ (1) или (2), удовлетворяющего начальному условию называется **задачей Коши**.

Задача Коши = ДУ + начальное условие

$$\begin{cases} y' = f(x, y) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases} \quad \text{— Задача Коши}$$

**Теорема 1** (*О существовании и единственности решения ЗК для ДУ 1-го порядка*). Если в ДУ (2) функция  $f(x, y)$  и её частная производная по  $y$ , то есть функция  $f'_y(x, y)$ , непрерывны в некоторой области  $D$  плоскости  $xOy$ , содержащей точку  $M_0(x_0, y_0)$ , то существует и при том единственное решение ДУ (2), удовлетворяет начальному условию (3).

**Определение 5.** **Общим решением** ДУ 1-го порядка называется функция  $y = \varphi(x, C)$ , удовлетворяющая условиям:

1.  $y = \varphi(x, C)$  — решение ДУ при  $\forall C = \text{const}$
2. Какого бы ни было начальное условие (3), можно найти константу  $C = C_0$  такую, что  $\varphi(x, C_0) = y$  будет удовлетворять начальному условию (3).

**Определение 6.** **Частным решением** ДУ (1) или (2) называется любая функция  $\varphi(x, C_0) = y$ , полученная из общего решения при конкретном значении  $C = C_0$ .

**Общее решение** ДУ — множество всех частных решений.

**Определение 7.** Если общее решение ДУ найдено в неявном виде

$$\Phi(x, y, C) = 0$$

то такое решение называется **общим интегралом** ДУ.

**Определение 8.** Равенство

$$\Phi(x, y, C_0) = 0$$

полученное из общего интеграла при конкретном значении  $C = C_0$  называется **частным интегралом** ДУ.

ДУ 1-го порядка:

1. ДУ с разделяющимися переменными
2. Однородные ДУ
3. Линейные ДУ
  - (3.1) ЛОДУ
  - (3.2) ЛНДУ
4. Бернулли

## 7.1 ДУ с разделяющимися переменными

**Определение 1.** ДУ 1-го порядка с разделяющимися переменными называется ДУ вида:

$$y' = f(x) g(y) \quad (1)$$

$f$  — функция зависящая только от  $x$

$g$  — функция зависящая только от  $y$

**Этапы решения:**

1. Умножим на  $dx$  и разделим на  $g(y) \neq 0$

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= f(x) g(y) \\ dy &= f(x) g(y) dx \\ \frac{dy}{g(y)} &= f(x) dx \end{aligned}$$

2. Интегрируем

$$\int \frac{dy}{g(y)} = \int f(x) dx$$

Находим общее решение или общий интеграл ДУ.

**Замечание.** При разделяющихся переменных проведено деление на  $g(y) \neq 0$ , однако  $g(y) = 0$  может быть решением ДУ. Поэтому следует отдельно проверить, является ли функция  $g(y) = 0$  решением ДУ. Для этого  $g(y) = 0$  нужно подставить в само дифференциальное уравнение.

$$f_1(x) g_1(y) dx + f_2(x) g_2(y) dy = 0$$

$f_1, f_2$  — функции зависящие только от  $x$

$g_1, g_2$  — функции зависящие только от  $y$

**Этапы решения:**

1. Перенесём второе слагаемое вправо:

$$f_1(x) g_1(y) dx = -f_2(x) g_2(y) dy$$

2. Разделим на произведение функций  $g_1(y) \cdot f_2(x) \neq 0$

$$\frac{f_1(x)}{f_2(x)} dx = -\frac{g_2(y)}{g_1(y)} dy$$

3. Интегрируем:

$$\int \frac{f_1(x)}{f_2(x)} dx = - \int \frac{g_2(y)}{g_1(y)} dy$$

Находим общее решение или общий интеграл ДУ.



**Замечание.** Отдельно проверить, являются ли решениями функции  $g_1(y) = 0$  и  $f_2(x) = 0$ .

**Определение 2.** Решения, потерянные в процессе разделения переменных, называются **особыми**.

**Определение 3.** График решения ДУ — **интегральная кривая**.

**Пример.**

$$(xy + y) dx + (x - xy) dy = 0$$

$$y(x + 1) dx + x(1 - y) dy = 0$$

$$y(x + 1) dx = x(y - 1) dy \quad | : xy \quad \begin{matrix} x \neq 0 \\ y \neq 0 \end{matrix}$$

$$\Downarrow$$

$$\frac{x+1}{x} dx = \frac{y-1}{y} dy$$

$$\int \frac{x+1}{x} dx = \int \frac{y-1}{y} dy$$

$$\int dx + \int \frac{dx}{x} = \int dy - \int \frac{dy}{y}$$

$$x + \ln |x| = y - \ln |y| + C, \quad \forall C - const$$

$$x - y + \ln |x| + \ln |y| = C$$

$$x - y + \ln |xy| = C, \quad \forall C - const$$

Особые решения:

$$\boxed{x = 0} :$$

$$y \cdot (0 + 1) d(0) = 0 \cdot (y - 1) dy$$

$$y \cdot 1 \cdot 0 = 0 \cdot (y - 1) dy$$

$$0 = 0$$

$x = 0$  является особым решением ДУ

$$\boxed{y = 0} :$$

$$0(x + 1) dx = x \cdot (0 - 1) d(0)$$

$$0 = 0$$

$y = 0$  является особым решением ДУ

Ответ:  $x - y + \ln |xy| = C, \quad \forall C - const$

$$x = 0$$

$$y = 0$$

## 7.2 Однородные ДУ 1-го порядка

**Определение 1.** Функция  $P(x, y)$  называется **однородной порядка  $k$** , если

$$P(\lambda x, \lambda y) = \lambda^k P(x, y), \quad \forall \lambda > 0$$

**Определение 2.** ДУ вида:

$$\boxed{P(x, y) dx + Q(x, y) dy = 0} \quad (1)$$

называются **однородными ДУ 1-го порядка**, если функции  $P(x, y)$  и  $Q(x, y)$  являются однородными функциями одного порядка.

Уравнение (1) можно представить в виде:

$$y' = f\left(\frac{y}{x}\right) \quad \text{или} \quad \frac{dy}{dx} = f\left(\frac{y}{x}\right)$$

где  $f$  — однородная функция относительно  $\frac{y}{x}$

Метод решения: замена  $\frac{y}{x} = u(x) \Rightarrow \boxed{\begin{array}{l} y = u(x) \cdot x \\ y' = u'x + u \end{array}}$

**Пример.**

$$y' = \frac{x}{y} + \frac{y}{x}$$

$$\text{Замена: } \frac{y}{x} = u \Rightarrow \frac{x}{y} = \frac{1}{u} \quad y = u \cdot x \quad y' = u'x + u$$

$$u'x + u = \frac{1}{u} + u$$

$$u'x = \frac{1}{u}$$

$$x \frac{du}{dx} = \frac{1}{u} \quad \Big| \cdot dx$$

$$x du = \frac{dx}{u} \quad \Big| \cdot u$$

$$ux du = dx \quad \Big| : x \neq 0$$

$$u du = \frac{dx}{x}$$

$$\int u du = \int \frac{dx}{x}$$

$$\frac{u^2}{2} = \ln |x| + C, \quad \forall C = \text{const}$$

Обратная замена:  $u = \frac{y}{x}$

$$\frac{y^2}{2x^2} = \ln|x| + C$$
$$y^2 = 2x^2 (\ln|x| + C), \quad \forall C - \text{const}$$

$x = 0$ ?  $x = 0$  не является решением ДУ  
Ответ:  $y^2 = 2x^2 (\ln|x| + C), \quad \forall C - \text{const}$

## 7.3 Линейные ДУ 1-го порядка

**Определение 1.** ДУ 1-го порядка называется **линейным**, если неизвестная функция  $y(x)$  и её производная  $y'$  входят в уравнение в первой степени, не перемножаясь между собой.

$$y' + p(x) \cdot y = f(x) \quad (1)$$

$p(x), f(x)$  — непрерывны на  $I \subset \mathbb{R}$

**Определение 2.** Если  $f(x) = 0 \forall x \in I$ , то линейное ДУ (1) называется **однородным**. Если же  $f(x) \neq 0$ , то линейное ДУ (1) называется **неоднородным**.

$$y' + p(x) \cdot y = 0 \quad \text{— линейное однородное ДУ 1-го порядка (ЛОДУ)}$$

$$y' + p(x) \cdot y = f(x) \quad \text{— линейное неоднородное ДУ 1-го порядка (ЛНДУ)}$$

$p(x), f(x)$  — непрерывны на  $I \subset \mathbb{R}$

**Определение 3.** ДУ 1-го порядка называется **уравнением Бернулли**, если оно имеет вид:

$$y' + p(x) \cdot y = y^m \cdot f(x) \quad m \neq 0, m \neq 1$$

$$m = 0 \Rightarrow \text{уравнение Бернулли} \rightarrow \text{ЛНДУ}$$

$$m = 1 \Rightarrow \text{уравнение Бернулли} \rightarrow \text{ЛОДУ}$$

$p(x), f(x)$  — непрерывны на  $I \subset \mathbb{R}$

ЛОДУ сводится к ДУ с разделяющимися переменными. Метод решения — это разделение переменных.

### 7.3.1 Метод Лагранжа (метод вариации произвольной постоянной)

Рассмотрим ЛНДУ 1-го порядка:

$$y' + p(x) \cdot y = f(x) \text{ — ЛНДУ}$$

$p(x), f(x)$  — непрерывны на  $I \subset \mathbb{R}$

1 этап Решение соответствующего ЛОДУ

$$y' + p(x) \cdot y = 0 \quad \text{ЛОДУ}$$

$$y' = -p(x) \cdot y \quad \text{ДУ с разделяющимися переменными}$$

$$\frac{dy}{dx} = -p(x) \cdot y \quad \Big| \cdot dx \quad \Big| : y \neq 0$$

$$\frac{dy}{y} = -p(x) dx$$

Интегрируем:

$$\int \frac{dy}{y} = - \int p(x) dx$$

$$\ln |y| = - \int p(x) dx + C, \quad \forall C - const$$

$$e^{\ln |y|} = e^{- \int p(x) dx + C}, \quad \forall C - const$$

$$e^{\ln |y|} = e^{- \int p(x) dx} \cdot e^C, \quad \forall C - const$$

$$|y| = C_1 \cdot e^{- \int p(x) dx}, \quad \forall C_1 = e^C > 0$$

$$y = C_2 \cdot e^{- \int p(x) dx}, \quad C_2 = \pm C_1, \quad C_2 \neq 0$$

Особые решения:  $y = 0$

$$(0)' + p(x) \cdot 0 = 0$$

$$0 = 0$$

$y = 0$  — особое решение

$$\begin{cases} y = C_2 \cdot e^{- \int p(x) dx} \\ y = 0 \end{cases} \quad C_2 \neq 0$$

$$y = k \cdot e^{- \int p(x) dx}, \quad \forall k - const$$

Общее решение ЛОДУ:

$$y_{\text{оо}} = k \cdot e^{- \int p(x) dx}, \quad \forall k - const$$

2 этап Предполагаемый вид решения ЛНДУ

$$y_{\text{оН}} = k(x) \cdot e^{- \int p(x) dx}$$

Представим предполагаемый вид решения ЛНДУ  $y_{\text{оН}}$  в ЛНДУ:

$$\left( k(x) \cdot e^{- \int p(x) dx} \right)' + p(x) \cdot k(x) \cdot e^{- \int p(x) dx} = f(x)$$

$$k'(x) \cdot e^{- \int p(x) dx} + \cancel{k(x) \cdot e^{- \int p(x) dx} \cdot (-p(x))} + \cancel{p(x) \cdot k(x) \cdot e^{- \int p(x) dx}} = f(x)$$

$$k'(x) \cdot e^{- \int p(x) dx} = f(x) - \text{ДУ с разд. перем.}$$

$$k'(x) = f(x) \cdot e^{\int p(x) dx}$$

$$\frac{dk}{dx} = f(x) \cdot e^{\int p(x) dx}$$

$$dk = f(x) \cdot e^{\int p(x) dx} dx$$

Интегрируем:

$$k(x) = \int f(x) \cdot e^{\int p(x) dx} dx + k, \quad k - const$$

Подставляем  $k(x)$  в предполагаемое решение ЛНДУ:

$$y_{\text{оН}} = k(x) \cdot e^{- \int p(x) dx} = e^{- \int p(x) dx} \left( \int f(x) e^{\int p(x) dx} dx + k \right), \quad \forall k - const$$

### 7.3.2 Метод Бернулли (метод подстановки)

Рассмотрим ЛНДУ:

$$y' + p(x) \cdot y = f(x)$$

$p(x)$ ,  $f(x)$  — непрерывные функции  $I \subset \mathbb{R}$ .

Метод подстановки:  $y(x) = u(x) \cdot v(x)$

Подставим  $y(x) = u(x) \cdot v(x)$  в ЛНДУ:

$$\begin{aligned} u'(x) \cdot v(x) + u(x) \cdot v'(x) + p(x) \cdot u(x) \cdot v(x) &= f(x) \\ v(x) \left( u'(x) + p(x) \cdot u(x) \right) + u(x) \cdot v'(x) &= f(x) \\ v(x) \underbrace{\left( u'(x) + p(x) \cdot u(x) \right)}_0 &= f(x) - u(x) \cdot v'(x) \end{aligned}$$

Так как одну неизвестную переменную  $y(x)$  заменили на две функции  $u(x)$  и  $v(x)$ , то одну из этих двух функций можно выбрать так, как удобно. Произвольная постоянная будет учтена при нахождении второй неизвестной функции.

$u'(x) + p(x) \cdot u(x) = 0$  — ДУ с разделяющимися переменными

$$u' = -p(x) \cdot u$$

$$\frac{du}{dx} = -p(x) \cdot u \quad \Big| \cdot dx \Big| : u \neq 0$$

$$\frac{du}{u} = -p(x) dx$$

Интегрируем:

$$\begin{aligned} \int \frac{du}{u} &= - \int p(x) dx \\ \ln |u| &= - \int p(x) dx + C, \quad \forall C - const \\ e^{\ln |u|} &= e^{- \int p(x) dx + C}, \quad \forall C - const \\ |u| &= C_1 \cdot e^{- \int p(x) dx}, \quad \forall C_1 = e^C > 0 \\ u &= C_2 \cdot e^{- \int p(x) dx}, \quad C_2 \neq \pm C_1 \quad C_2 \neq 0 \end{aligned}$$

$C_2 = 1$  для удобства вычислений

$$u = e^{- \int p(x) dx}$$

$C_2 \neq 0$ , так как  $u(x) = 0$ ,  $y(x) = 0$ , а  $y(x) = 0$  не является решением ЛНДУ.

Конкретизировать данное решение можно, так имеется произвольный выбор по одной из переменных. Произвольная постоянная будет учтена при нахождении второй неизвестной функции.

$$v(x) \left( \underbrace{u'(x) + p(x) \cdot u(x)}_0 \right) = f(x) - u(x) \cdot v'(x)$$

$$\boxed{f(x) - u(x)v'(x) = 0} \quad u(x) = e^{- \int p(x) dx}$$

$f(x) - v' \cdot e^{-\int p(x)dx} = 0$  — ДУ с разделяющимися переменными

$$v' \cdot e^{-\int p(x)dx} = f(x)$$

$$v' = f(x) \cdot e^{\int p(x)dx}$$

$$\frac{dv}{dx} = f(x) \cdot e^{\int p(x)dx}$$

$$dv = f(x) \cdot e^{\int p(x)dx} dx$$

Интегрируем:

$$\int dv = \int f(x) \cdot e^{-\int p(x)dx} dx$$

$$v = \int f(x) \cdot e^{-\int p(x)dx} dx + k, \quad \forall k - const$$

Подставим  $u(x)$  и  $v(x)$  в подстановку  $y(x) = u(x) \cdot v(x)$ :

$$y(x) = e^{-\int p(x)dx} \left( \int f(x) \cdot e^{\int p(x)dx} dx + k \right), \quad \forall k - const$$

Общее решение ЛНДУ:

$$y_{\text{он}}(x) = e^{-\int p(x)dx} \left( \int f(x) \cdot e^{\int p(x)dx} dx + k \right), \quad \forall k - const$$

**Пример.**  $y' + \underbrace{2x}_{p(x)} \cdot y = \underbrace{xe^{-x^2}}_{f(x)}$  — ЛНДУ

Метод Лагранжа:

1 этап

$$y' + 2xy = 0 \quad \text{ЛОДУ}$$

$$y' = -2xy \quad \text{с разд. переменными}$$

$$\frac{dy}{dx} = -2xy \quad \left| \cdot dx \right| : y \neq 0$$

$$\frac{dy}{y} = -2x dx$$

Интегрируем:

$$\int \frac{dy}{y} = -2 \int x dx$$

$$\ln |y| = 2 \cdot \frac{x^2}{2} + C, \quad \forall C - const$$

$$\ln |y| = -x^2 + C, \quad \forall C - const$$

$$e^{\ln |y|} = e^{-x^2+C}$$

$$e^{\ln |y|} = e^{-x^2} \cdot e^C$$

$$|y| = C_1 \cdot e^{-x^2}, \quad C_1 = e^C > 0$$

$$y = C_2 \cdot e^{-x^2}, \quad C_2 = \pm C_1 \quad C_2 \neq 0$$

$y = 0$  ?

$$(0)' = -2x \cdot 0$$

$$0 = 0$$

$y = 0$  — особое решение

$$\begin{cases} y = C_2 \cdot e^{-x^2}, & C_2 \neq 0 \\ y = 0 \end{cases} \Rightarrow y = k \cdot e^{-x^2}, \quad \forall k - const$$

$$\boxed{y_{\text{оо}} = k \cdot e^{-x^2}}, \quad \forall k - const$$

2 этап  $y_{\text{оо}} = k(x) \cdot e^{-x^2}$  подставим в ЛНДУ

$$\begin{aligned} (k(x) \cdot e^{-x^2})' + 2x \cdot k(x) \cdot e^{-x^2} &= x e^{-x^2} \\ k'(x) \cdot e^{-x^2} + \cancel{k(x) \cdot e^{-x^2} \cdot (-2x)} + \cancel{2x \cdot k(x) \cdot e^{-x^2}} &= x e^{-x^2} \\ k'(x) \cdot \cancel{e^{-x^2}} &= x \cdot \cancel{e^{-x^2}} \\ k'(x) &= x \\ \frac{dk}{dx} &= x \quad | \cdot dx \\ dk &= x dx \\ k &= \frac{x^2}{2} + k, \quad \forall k - const \end{aligned}$$

Подставим  $k(x)$  в  $y_{\text{оо}}$

$$y_{\text{оо}} = e^{-x^2} \cdot \left( \frac{x^2}{2} + k \right), \quad \forall k - const$$

**Пример.**

$$\begin{aligned} xy' + y &= 2x^2y \cdot \ln y \cdot y' \\ y'(x - 2x^2y \ln y) &= -y \\ y'x(1 - 2xy \ln y) &= -y \\ y' &= -\frac{y}{x(1 - 2xy \ln y)} \\ x' &= -\frac{x(1 - 2xy \ln y)}{y} \\ x' + \frac{1}{\frac{y}{p(y)}} \cdot x &= \frac{2x^2 \ln y}{f(y)} - \text{уравнение Бернулли} \end{aligned}$$

Замена  $x(y) = u(y) \cdot v(y)$

$$u'(y) \cdot v(y) + u \cdot v' + \frac{u \cdot v}{y} = 2 \ln y u^2 \cdot v^2$$

$$u'v + \frac{u \cdot v}{y^2} = 2 \ln y \cdot v^2 \cdot u^2 - uv'$$

$$v \left( u' + \frac{u}{y} \right) = 2u^2 v^2 \ln y - uv'$$

$$u' + \frac{u}{y} = 0 \Rightarrow \frac{du}{dy} + \frac{u}{y} = 0$$

$$\frac{du}{u} = -\frac{dy}{y}$$

$$\ln |u| = -\ln |y| + C, \quad \forall C - const$$

$$e^{\ln |u|} = e^{\ln |y|^{-1}}$$

$$|u| = \frac{1}{|y|} \cdot C_1, \quad C_1 = e^C > 0$$

$$u = \frac{C_2}{y}, \quad C_2 = \pm C_1, \quad C_2 \neq 0$$

$$C_2 = 1 \quad u = \frac{1}{y}$$

$$0 = 2u^2 v^2 \ln y - uv'$$

$$\frac{2v^2}{y^2} \cdot \ln y = \frac{v'}{y}$$

$$v' = \frac{2v^2}{y} \ln y$$

$$\frac{dv}{dy} = \frac{2v^2}{y} \cdot \ln y \quad \Big| \cdot dy \Big| : v^2 \neq 0$$

$$\frac{dv}{v^2} = \frac{2}{y} \cdot \ln y dy$$

$$-\frac{1}{v} = 2 \int \ln y d \ln y + k, \quad \forall k - const$$

$$-\frac{1}{v} = 2 \cdot \frac{\ln^2 y}{2} + k, \quad \forall k - const$$

$$-\frac{1}{v} = \ln^2 y + k, \quad \forall k - const$$

$$v = -\frac{1}{\ln^2 y + k}, \quad \forall k - const$$

Обратная замена:

$$x(y) = u(y) \cdot v(y) = -\frac{1}{y} \cdot \frac{1}{\ln^2 y + k} = x$$

$$\begin{cases} xy (\ln^2 y + k) = -1 \\ x = 0 \end{cases} \quad \forall k = const$$



## 8 Дифференциальные уравнения высшего порядка

**Определение 1.** Дифференциальное уравнение порядка выше первого называется дифференциальными уравнениями высшего порядка.

**Определение 2.** ДУ 2-го порядка называется уравнение вида:

$$F(x, y, y', y'') = 0 \quad (1)$$

**Определение 3.** ДУ 2-го порядка, разрешённым относительно старшей производной, называется уравнение вида:

$$y'' = f(x, y, y') \quad (2)$$

**Определение 4.** Задача Коши для ДУ 2-го порядка заключается в отыскании решения ДУ 2-го порядка (2), удовлетворяющего начальному условию:

$$\begin{cases} y(x_0) = y_0 \\ y'(x_0) = y_{10} \end{cases} \quad (3)$$

Задача Коши для ДУ 2-го порядка:

$$y'' = f(x, y, y') - \text{ДУ} \quad (2)$$

+

$$\begin{cases} y(x_0) = y_0 \\ y'(x_0) = y_{10} \end{cases} - \text{начальное условие} \quad (3)$$

**Теорема 1** (О существовании и единственности решения ЗК для ДУ 2-го порядка). Если в ДУ 2-го порядка (2) функция  $f(x, y, y')$  и её частные производные по переменным  $y$  и  $y'$ , то есть функции  $f'_y(x, y, y')$  и  $f'_{y'}(x, y, y')$ , непрерывны в некоторой области  $D \subset \mathbb{R}^3$ , содержащей точку  $M_0(x_0, y_0, y_{10})$ , то существует и при том единственное решение ДУ (2), удовлетворяющее начальному условию (3).

**Определение 5.** Общим решением ДУ 2-го порядка называется функция  $y = \varphi(x, C_1, C_2)$ , удовлетворяющая условиям:

1.  $y = \varphi(x, C_1, C_2)$  — решение ДУ (2) при любых  $C_1, C_2 - \text{const}$ .
2. Какого бы ни было начальное условие (3), можно найти такие  $C_1^0, C_2^0$ , что функция  $y = \varphi(x, C_1^0, C_2^0)$  будет удовлетворять начальному условию (3).

**Определение 6.** Частным решением ДУ 2-го порядка называется любая функция  $y = \varphi(x, C_1^0, C_2^0)$ , полученная из общего решения при конкретных значениях  $C_1^0$  и  $C_2^0$ .

Аналогично:

**Определение 1.** ДУ  $n$ -го порядка называется уравнение вида:

$$F(x, y, y', \dots, y^{(n)}) = 0 \quad (1)$$

$F$  — известная функция от  $n + 2$  переменных

**Определение 2.** ДУ  $n$ -го порядка, разрешённым относительно старшей производной, называется уравнение вида:

$$y^{(n)} = f(x, y, y', \dots, y^{(n-1)}) \quad (2)$$

**Определение 3.** Задача Коши для ДУ  $n$ -го порядка заключается в отыскании решения ДУ (2), удовлетворяющего начальному условию:

$$\begin{cases} y(x_0) = y_0 \\ y'(x_0) = y_{10} \\ y''(x_0) = y_{20} \\ \dots\dots\dots \\ y^{(n-1)}(x_0) = y_{n-10} \end{cases} \quad (3)$$

Задача Коши = ДУ (2) + начальное условие (3)

**Теорема 1** (О существовании и единственности решения ЗК для ДУ  $n$ -го порядка). Если функция  $f(x, y, y', \dots, y^{(n-1)})$  и её частные производные по переменным  $y, y', \dots, y^{(n-1)}$ , то есть функции  $f'_y(x, y, y', \dots, y^{(n-1)}), f'_{y'}(x, y, y', \dots, y^{(n-1)}), \dots, f'_{y^{(n-1)}}(x, y, y', \dots, y^{(n-1)})$ , непрерывны в некоторой области  $D \subset \mathbb{R}^{n+1}$ , содержащей точку  $M_0(x_0, y_0, y_{10}, y_{20}, \dots, y_{n-10})$ , то существует и при том единственное решение ЗК (2), (3).

**Определение 4.** Общим решением ДУ  $n$ -го порядка называется функция  $y = \varphi(x, C_1, C_2, \dots, C_n)$  удовлетворяющая условиям:

1.  $y = \varphi(x, C_1, C_2, \dots, C_n)$  — решение ДУ  $n$ -го порядка при любых  $C_1, C_2, \dots, C_n = \text{const}$ .
2. Какого бы ни было начальное условие (3), можно найти такие  $C_1^0, C_2^0, \dots, C_n^0$ , что функция  $y = \varphi(x, C_1^0, C_2^0, \dots, C_n^0)$  будет удовлетворять начальным условиям (3).

**Определение 5.** Частным решением ДУ  $n$ -го порядка называется функция  $y = \varphi(x, C_1^0, C_2^0, \dots, C_n^0)$ , полученная из общего решения  $y = \varphi(x, C_1, C_2, \dots, C_n)$  при конкретных значениях  $C_1^0, C_2^0, \dots, C_n^0$ .

## 8.1 ДУ, допускающие понижение порядка

### 8.1.1 1 тип

Уравнения вида

$$y^{(n)} = f(x)$$

Метод решения: n-кратное интегрирование

**Пример.**

$$y'' = \sin x$$

$$y' = \int \sin dx = -\cos x + C_1, \quad \forall C_1 - const$$

$$y = -\int \cos dx + C_1 \int dx + C_2, \quad \forall C_2 - const$$

$$y = -\sin x + C_1 x + C_2, \quad \forall C_1, C_2 - const$$

### 8.1.2 2 тип

Уравнения, которые не содержат переменную  $x$ , то есть

$$F(y, y', \dots, y^{(n)}) = 0$$

Замена:

$$y' = p(y)$$

$$y'' = p' \cdot y' = p' \cdot p$$

.....

Для ДУ 2-го порядка:  $F(y, p, p' \cdot p) = 0$

Замена:

$$\begin{cases} y' = p(y) \\ y'' = p' \cdot p \end{cases} \quad (*)$$

$\Downarrow$

$$F(y, p, p' \cdot p) = 0$$

Замена (\*) позволяет понизить порядок ДУ на единицу.

**1 шаг** Решаем ДУ  $F(y, p, p' \cdot p) = 0$ . Интегрируем. Находим функцию  $P = \Psi(y, C_1)$ ,  $C_1 - const$ .

**2 шаг** Обратная замена  $p = y'$

**3 шаг**  $y' = \Psi(y, C_1), \forall C_1 - const$

Решаем ДУ 1-го порядка. Интегрируем:

$$y = \varphi(x, C_1, C_2)$$

**Пример.**  $yy'' + (y')^2 = 3(y')^3$  ДУ 2-го порядка

Замена:

$$\begin{cases} y' = p(y) \\ y'' = p' \cdot p \end{cases} \quad (*)$$

$$yp'p + p^2 = 3p^3 \quad | : yp$$

$$\boxed{p' + p \cdot \frac{1}{y} = 3p^3 \cdot \frac{1}{y}} \text{ — уравнение Бернулли } m = 2$$

$P(y) = u(y) \cdot v(y)$  — подстановка | метод Бернулли

$$\begin{aligned} u'v + uv' + uv \cdot \frac{1}{y} &= 3u^2v^2 \cdot \frac{1}{y} \\ v \left( u' + \frac{u}{y} \right) &= 3u^2v^2 \cdot \frac{1}{y} - uv' \\ &\parallel \\ &0 \end{aligned}$$

$u' + \frac{u}{y} = 0$  — с разделяющимися переменными

$$u' = -\frac{u}{y}$$

$$\frac{du}{dy} = -\frac{u}{y} \quad | : u \quad | \cdot dy$$

$$\frac{du}{u} = -\frac{dy}{y}$$

$$\ln |u| = -\ln |y| + C, \quad \forall C - const$$

$$e^{\ln |u|} = e^{\ln |y|^{-1} + C}$$

$$|u| = \frac{1}{|y|} \cdot C_1, \quad \forall C_1 = e^C > 0$$

$$u = \frac{C_2}{y}, \quad \forall C_2 = \pm C_1$$

$$C_2 = 1 \quad u = \frac{1}{y}$$

$$\begin{aligned}
3u^2v^2 \cdot \frac{1}{y} - uv' &= 0 \\
3 \cdot \frac{1}{y^2} \cdot v^2 \cdot \frac{1}{y} &= \frac{1}{y} \cdot v' \\
\frac{dv}{dy} &= \frac{3v^2}{y^2} \quad | : v^2 | \cdot dy \\
\frac{dv}{v^2} &= \frac{3}{y^2} dy \\
-\frac{1}{v} &= -\frac{3}{y} + C_2, \quad \forall C_2 = const \\
-\frac{1}{v} &= \frac{-3 + C_2y}{y} \\
v &= -\frac{y}{-3 + C_2y} \\
v &= \frac{y}{3 - C_2y} \\
p(y) &= u(y) \cdot v(y) \\
p(y) &= \frac{1}{3 - C_2y}
\end{aligned}$$

Обратная замена:

$$\begin{aligned}
y' &= p \\
y' &= \frac{1}{3 - C_2y} \\
\frac{dy}{dx} &= \frac{1}{3 - C_2y} \\
(3 - C_2y) dy &= dx \\
3y - \frac{C_2y^2}{2} &= x + C_3 \\
3y + C_4y^2 &= x + C_3 \quad \forall C_3, C_4 = const
\end{aligned}$$

### 8.1.3 3 тип

Уравнения, в которых в явном виде отсутствует  $y$ , то есть

$$F(x, y', y'', \dots, y^{(n)}) = 0$$

Замена:

$$\begin{cases} y' = p(x) \\ y'' = p' \end{cases} \quad (*)$$

С помощью  $(*)$  понижаем порядок ДУ на единицу.

Для ДУ 2-го порядка:

$$F(x, y', y'') = 0$$

Замена:

$$\begin{aligned}
\begin{cases} y' = p(x) \\ y'' = p' \end{cases} & \quad (*) \\
F(x, p, p') &= 0
\end{aligned}$$

**1 шаг** Решаем ДУ 1-го порядка  $F(x, p, p') = 0$ . Интегрируем. Находим функцию  $P = \Psi(x, C_1)$ ,  $\forall C_1 - const$

**2 шаг** Обратная замена  $p = y'$

**3 шаг**  $y' = \Psi(x, C_1)$  — ДУ 1-го порядка. Решаем ДУ 1-го порядка. Интегрируем. Находим  $y = \varphi(x, C_1, C_2)$ ,  $\forall C_1, C_2 - const$

## 8.2 Линейные ДУ высшего порядка

**Определение 1.** ДУ  $n$ -го порядка называется **линейным**, если неизвестная функция  $y(x)$  и её производные до  $n$ -го порядка включительно входят в уравнение в первой степени, не перемножаясь между собой.

$$y^{(n)} + p_1(x)y^{(n-1)} + p_2(x)y^{(n-2)} + \dots + p_{n-1}(x)y' + p_n(x)y = f(x) \quad (1)$$

$p_1(x), \dots, p_n(x)$  — функции, заданные на некотором промежутке  $I$ .

$p_1(x), \dots, p_n(x)$  — коэффициенты

$f(x)$  — функция, определена на промежутке  $I$

$f(x)$  — свободный член

### Определение 2.

Если  $f(x) = 0$ ,  $\forall x \in I$ , то ДУ (1) называется **линейным однородным ДУ** (ЛОДУ).

$$y^{(n)} + p_1(x)y^{(n-1)} + p_2(x)y^{(n-2)} + \dots + p_{n-1}(x)y' + p_n(x)y = f(x) \quad (1)$$

(1) ЛНДУ  $n$ -го порядка

Если  $f(x) \neq 0$  хотя бы для одного  $x \in I$ , то ДУ (1) называется **линейным неоднородным ДУ**  $n$ -го порядка (ЛНДУ).

$$y^{(n)} + p_1(x)y^{(n-1)} + p_2(x)y^{(n-2)} + \dots + p_{n-1}(x)y' + p_n(x)y = 0 \quad (2)$$

(2) ЛОДУ  $n$ -го порядка

**Определение 3. Задача Коши** для линейного дифференциального уравнения  $n$ -го порядка заключается в отыскании решения ДУ (1), удовлетворяющего начальному условию:

$$\begin{cases} y(x_0) = y_0 \\ y'(x_0) = y_{10} \\ y''(x_0) = y_{20} \\ \dots\dots\dots \\ y^{(n-1)}(x_0) = y_{n-10} \end{cases} \quad (3)$$

$$\text{Задача Коши} = \text{ДУ (1)} + \text{начальное условие (3)} \quad (4)$$

**Теорема 1** (О существовании и единственности решения ЗК (1), (3)).

Если в ЛНДУ (1) функции  $p_1(x), \dots, p_n(x), f(x)$  непрерывны на некотором промежутке  $I$ , то задача Коши для ЛНДУ (1) имеет единственное решение удовлетворяющее начальному условию (3).

### 8.2.1 Свойства частных решений ЛОДУ n-го порядка

**Теорема 1.**

Множество частных решений ЛОДУ n-го порядка (2) с непрерывными функциями  $p_1(x), \dots, p_n(x)$  на промежутке  $I$  образует линейное пространство.

**Доказательство.**

Пусть  $y_1$  и  $y_2$  — частные решения ЛОДУ n-го порядка (2). Тогда:

$$\begin{aligned} & y_1^{(n)} + p_1(x)y_1^{(n-1)} + \dots + p_{n-1}(x)y_1' + p_n(x)y_1 = 0 \\ & + \\ & y_2^{(n)} + p_1(x)y_2^{(n-1)} + \dots + p_{n-1}(x)y_2' + p_n(x)y_2 = 0 \end{aligned}$$

Складываем уравнения:

$$(y_1^{(n)} + y_2^{(n)}) + p_1(x)(y_1^{(n-1)} + y_2^{(n-1)}) + \dots + p_{n-1}(x)(y_1' + y_2') + p_n(x)(y_1 + y_2) = 0$$

По свойству производной:

$$(y_1 + y_2)^{(n)} + p_1(x)(y_1 + y_2)^{(n-1)} + \dots + p_{n-1}(x)(y_1 + y_2)' + p_n(x)(y_1 + y_2) = 0$$

Обозначим  $y = y_1 + y_2$ :

$$y^{(n)} + p_1(x)y^{(n-1)} + p_2(x)y^{(n-2)} + \dots + p_{n-1}(x)y' + p_n(x)y = 0$$

$y = y_1 + y_2$  — частное решение ЛОДУ (2).

Пусть  $y_1$  — частное решение ЛОДУ n-го порядка (2) Тогда:

$$\begin{aligned} & y_1^{(n)} + p_1(x)y_1^{(n-1)} + p_2(x)y_1^{(n-2)} + \dots + p_{n-1}(x)y_1' + p_n(x)y_1 = 0 \quad \Big| \cdot C = const, C \neq 0 \\ & C \cdot y_1^{(n)} + C \cdot p_1(x)y_1^{(n-1)} + \dots + C \cdot p_{n-1}(x)y_1' + C \cdot p_n(x)y_1 = 0 \\ & (Cy_1)^{(n)} + p_1(x)(Cy_1)^{(n-1)} + \dots + p_{n-1}(x)(Cy_1)' + p_n(x)(Cy_1) = 0 \end{aligned}$$

Обозначим  $y = Cy_1, C = const, C \neq 0$ :

$$y^{(n)} + p_1(x)y^{(n-1)} + \dots + p_{n-1}(x)y' + p_n(x)y = 0$$

$\Downarrow$

$$y = C \cdot y_1, \text{ где } C = const, C \neq 0 \quad \text{— решение ЛОДУ (2)}$$

По определению линейного пространства  $\Rightarrow$  частные решения ЛОДУ n-го порядка образуют линейное пространство. ■

Если  $y_1, \dots, y_n$  — частные решения ЛОДУ (2), то их линейная комбинация, то есть  $y = C_1 y_1 + \dots + C_n y_n$ , где  $C_1, \dots, C_n$  — *const* являются решением ЛОДУ (2).

Пусть  $y_1, \dots, y_n$  — частные решения ЛОДУ (2).

[illegible]

$$\begin{aligned} & \left( C_1 y_1^{(n)} + C_2 y_2^{(n)} + \dots + C_n y_n^{(n)} \right) + p_1(x) \left( C_1 y_1^{(n-1)} + C_2 y_2^{(n-1)} + \dots + C_n y_n^{(n-1)} \right) + \\ & \quad + \dots + \\ & \quad + p_{n-1}(x) (C_1 y_1' + C_2 y_2' + \dots + C_n y_n') + \\ & \quad + p_n(x) (C_1 y_1 + C_2 y_2 + \dots + C_n y_n) = 0 \end{aligned}$$
$$\begin{aligned} & (C_1y_1 + C_2y_2 + \dots + C_ny_n)^{(n)} + p_1(x) (C_1y_1 + C_2y_2 + \dots + C_ny_n)^{(n-1)} + \\ & \quad + \dots + \\ & \quad + p_{n-1}(x) (C_1y_1 + C_2y_2 + \dots + C_ny_n)' + \\ & \quad + p_n(x) (C_1y_1 + C_2y_2 + \dots + C_ny_n) = 0 \end{aligned}$$
$$y^{(n)} + p_1(x)y^{(n-1)} + \dots + p_{n-1}(x)y' + p_n(x)y = 0$$

$y = C_1 y_1 + C_2 y_2 + \dots + C_n y_n$  – решение ЛОДУ  $n$ -го порядка

$$C_1 y_1(x) + \dots + C_n y_n(x) = 0$$

**Определение 2.** Система функций  $y_1(x), \dots, y_n(x)$  называется **линейно независимой** на некотором промежутке  $I$ , если их линейная комбинация равна нулю, то есть

$$C_1 y_1(x) + \dots + C_n y_n(x) = 0$$

где все  $C_i = 0$ ,  $i = \overline{1, n}$



## 9 Определитель Вронского (вронскиан)

Если существует хотя бы одна точка  $x_0 \in I$ ,  $W(x_0) \neq 0$ , то система функций  $y_1(x), \dots, y_n(x)$  линейно независима.

Если функции  $y_1(x), \dots, y_n(x)$  линейно независимы на некотором промежутке  $I$  и являются частными решениями ЛОДУ  $n$ -го порядка

$$y^{(n)} + p_1(x)y^{(n-1)} + \dots + p_{n-1}(x)y' + p_n(x)y = 0$$

с непрерывными на промежутке  $I$  коэффициентами  $p_1(x), \dots, p_n(x)$ , то  $W(x) \neq 0$ ,  $\forall x \in I$

Предположим, что  $\exists x_0 \in I: W(x_0) \neq 0$

$$W(x_0) = \begin{vmatrix} y_1(x_0) & y_2(x_0) & \cdots & y_n(x_0) \\ y_1'(x_0) & y_2'(x_0) & \cdots & y_n'(x_0) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ y_1^{(n-1)}(x_0) & y_2^{(n-1)}(x_0) & \cdots & y_n^{(n-1)}(x_0) \end{vmatrix} = 0$$

$$\begin{cases} C_1 y_1(x_0) + C_2 y_2(x_0) + \dots + C_n y_n(x_0) = 0 \\ C_1 y'_1(x_0) + C_2 y'_2(x_0) + \dots + C_n y'_n(x_0) = 0 \\ \vdots \\ C_1 y^{(n-1)}_1(x_0) + C_2 y^{(n-1)}_2(x_0) + \dots + C_n y^{(n-1)}_n(x_0) = 0 \end{cases}$$

Рассмотрим функцию

$$y = C_1 y_1 + \dots + C_n y_n$$

$y = C_1 y_1 + \dots + C_n y_n$  – решение ЛОДУ  $n$ -го порядка

$$y(x_0) = C_1 y_1(x_0) + \dots + C_n y_n(x_0) = 0$$
$$y'(x_0) = C_1 y_1'(x_0) + \dots + C_n y_n'(x_0) = 0$$

$$y''(x_0) = C_1 y_1''(x_0) + \dots + C_n y_n''(x_0) = 0$$

$$y^{(n-1)}(x_0) = C_1 y_1^{(n-1)}(x_0) + \dots + C_n y_n^{(n-1)}(x_0) = 0$$

Получили, что  $y = C_1 y_1 + \dots + C_n y_n$  — решение ЛОДУ  $n$ -го порядка (2), удовлетворяющее начальному условию:

$$\begin{cases} y(x_0) = 0 \\ y'(x_0) = 0 \\ \dots\dots\dots \\ y^{(n-1)}(x_0) = 0 \end{cases}$$

Но  $y = 0$  — решение ЛОДУ (2), удовлетворяющее начальному условию (3)

По теореме  $\exists!$  решения задачи Коши для линейного дифференциального уравнения  $n$ -го порядка (**с.70, Т.1**)  $\Rightarrow$

$$y = C_1 y_1 + \dots + C_n y_n = 0$$

при этом  $C_1, \dots, C_n$  — ненулевые константы  $\Rightarrow y_1, \dots, y_n$  — линейно зависимы по определению линейной зависимости (**с.71, опр.1**). Это противоречит условию  $\Rightarrow$  предположение не является верным  $\forall x \in I: W(x) \neq 0$  ■

## 10 Фундаментальная система решений ЛОДУ n-го порядка

Пусть дано ЛОДУ n-го порядка

$$y^{(n)} + p_1(x)y^{(n-1)} + \dots + p_{n-1}(x)y' + p_n(x)y = 0 \quad (2)$$

**Определение 1.** Фундаментальной системой решений ЛОДУ n-го порядка (2) называется любая система линейно независимых частных решений ЛОДУ n-го порядка.

### Утверждение 2.

Если имеем ФСР на промежутке, то  $W(x) \neq 0$  на этом промежутке.

$$\text{ФСР} \rightarrow \text{лин. нез.} \rightarrow W(x) \neq 0$$

### Теорема 1 (О структуре общего решения ЛОДУ n-го порядка).

Общим решением ЛОДУ n-го порядка

$$y^{(n)} + p_1(x)y^{(n-1)} + \dots + p_{n-1}(x)y' + p_n(x)y = 0 \quad (2)$$

с непрерывными коэффициентами  $p_1(x), \dots, p_n(x)$  на промежутке  $I$  является линейной комбинацией частных решений, входящих в ФСР.

$$y_{\text{оо}} = C_1 y_1 + \dots + C_n y_n \quad (5)$$

«оо» — общее решение однородного уравнения

$$y_1, \dots, y_n — \text{ФСР ЛОДУ (2), } C_1, \dots, C_n — \text{const}$$

### Доказательство.

1) Покажем, что (5) решение ЛОДУ (2), но не общее. Для этого подставим (5) в (2):

$$\begin{aligned} (C_1 y_1 + \dots + C_n y_n)^{(n)} + p_1(x) (C_1 y_1 + \dots + C_n y_n)^{(n-1)} + \\ + \dots + \\ + p_{n-1}(x) (C_1 y_1 + \dots + C_n y_n)' + \\ + p_n(x) (C_1 y_1 + \dots + C_n y_n) = 0 \end{aligned}$$

Вычислим производные:

$$\begin{aligned} C_1 y_1^{(n)} + \dots + C_n y_n^{(n)} + p_1(x) C_1 y_1^{(n-1)} + \dots + p_1(x) C_n y_n^{(n-1)} + \\ + \dots + \\ + p_{n-1}(x) C_1 y_1' + \dots + p_{n-1}(x) C_n y_n' + \\ + p_n(x) C_1 y_1 + \dots + p_n(x) C_n y_n = 0 \end{aligned}$$

Группируем:

$$\begin{aligned} & \overbrace{C_1 \left( y_1^{(n)} + p_1(x)y_1^{(n-1)} + \dots + p_{n-1}(x)y_1' + p_n(x)y_1 \right)}^0 + \\ & + \dots + \\ & + \underbrace{C_n \left( y_n^{(n)} + p_1(x)y_n^{(n-1)} + \dots + p_{n-1}(x)y_n' + p_n(x)y_n \right)}_0 = 0 \end{aligned}$$

Так как  $y_1, \dots, y_n$  — частные решения ЛОДУ (2), то:

$$\begin{aligned} C_1 \cdot 0 + \dots + C_n \cdot 0 &= 0 \\ 0 &= 0 \Rightarrow (5) — \text{решение (2)} \end{aligned}$$

2) Покажем, что (5) — это общее решение (2), то есть из него можно выделить единственное частное решение, удовлетворяющее начальному условию:

$$\left\{ \begin{array}{l} y(x_0) = y_0 \\ y'(x_0) = y_{10} \\ y''(x_0) = y_{20} \\ \dots\dots\dots \\ y^{(n-1)}(x_0) = y_{n-10} \end{array} \quad x_0 \in I \right. \quad (6)$$

Подставим (5) в (6):

$$\left\{ \begin{array}{l} y(x_0) = C_1 y_1(x_0) + \dots + C_n y_n(x_0) = y_0 \\ y'(x_0) = C_1 y_1'(x_0) + \dots + C_n y_n'(x_0) = y_{10} \\ y''(x_0) = C_1 y_1''(x_0) + \dots + C_n y_n''(x_0) = y_{20} \\ \dots\dots\dots \\ y^{(n-1)}(x_0) = C_1 y_1^{(n-1)}(x_0) + \dots + C_n y_n^{(n-1)}(x_0) = y_{n-10} \end{array} \right. \quad \text{— СЛАУ}$$

СЛАУ относительно  $C_1, \dots, C_n$ . Определитель этой системы — это определитель Вронского.

$$W(x_0) = \begin{vmatrix} y_1(x_0) & y_2(x_0) & \dots & y_n(x_0) \\ y_1'(x_0) & y_2'(x_0) & \dots & y_n'(x_0) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ y_1^{(n-1)}(x_0) & y_2^{(n-1)}(x_0) & \dots & y_n^{(n-1)}(x_0) \end{vmatrix}$$

так как  $y_1, \dots, y_n$  ФСР  $\Rightarrow y_1, \dots, y_n$  линейно независимы  $\Rightarrow W(x_0) \neq 0 \Rightarrow$  ранг расширенной матрицы СЛАУ совпадает с рангом основной матрицы  $\Rightarrow$  число неизвестных совпадает с числом уравнений  $\Rightarrow$  СЛАУ имеет единственное решение:

$$C_1^0, \dots, C_n^0$$

В силу теоремы о существовании и единственности решения задачи Коши (с.65, Т.1):

$$y = C_1^0 y_1 + \dots + C_n^0 y_n — \text{единственное решение ЗК (2), (6)}$$

То есть получилось из (5) выделить частное решение, удовлетворяющее начальному условию (6)  $\Rightarrow$  по определению общего решения (**с.65, опр.4**) (5) — общее решение ЛОДУ (2). ■

**Теорема 2** (*О размерности пространства решений ЛОДУ  $n$ -го порядка*).

Максимальное число линейно независимых решений ЛОДУ  $n$ -го порядка (2) с непрерывными коэффициентами  $p_1(x), \dots, p_n(x)$  на промежутке  $I$  равно  $n$ .

**Теорема 3** (*О существовании ФСР ЛОДУ  $n$ -го порядка*).

Любое ЛОДУ  $n$ -го порядка (2) с непрерывными на промежутке  $I$  коэффициентами  $p_1(x), \dots, p_n(x)$  имеет ФСР, то есть системы из  $n$  линейно независимых функций.

**Доказательство.**

Рассмотрим ЛОДУ  $n$ -го порядка

$$y^{(n)} + p_1(x)y^{(n-1)} + \dots + p_{n-1}(x)y' + p_n(x)y = 0$$

$p_1(x), \dots, p_n(x)$  — непрерывны на  $I$ .

Рассмотрим произвольный числовой определитель, отличный от нуля:

$$\begin{vmatrix} \gamma_{11} & \gamma_{12} & \dots & \gamma_{1n} \\ \gamma_{21} & \gamma_{22} & \dots & \gamma_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \gamma_{n1} & \gamma_{n2} & \dots & \gamma_{nn} \end{vmatrix} \neq 0 \quad \gamma_{ij} \in \mathbb{R}, (ij) = \overline{1, n}$$

Возьмём  $\forall x_0 \in I$  и сформулируем для ЛОДУ  $n$ -го порядка задачи Коши, причём начальное условие в точке  $x_0$  для  $i$ -ой ЗК возьмём из  $i$ -го столбца определителя.

**1 ЗК:**

$$\begin{aligned} & y^{(n)} + p_1(x)y^{(n-1)} + \dots + p_{n-1}(x)y' + p_n(x)y = 0 \text{ — ДУ} \\ & \begin{cases} y(x_0) = \gamma_{11} \\ y'(x_0) = \gamma_{21} \\ \dots \\ y^{(n-1)}(x_0) = \gamma_{n1} \end{cases} \text{ — начальное условие} \end{aligned}$$

По теореме о существовании и единственности решения (**с.65, Т.1**) 1-ая задача Коши имеет единственное решение  $y_1(x)$ .

.....

**n ЗК:**

$$\begin{aligned} & y^{(n)} + p_1(x)y^{(n-1)} + \dots + p_{n-1}(x)y' + p_n(x)y = 0 \text{ — ДУ} \\ & \begin{cases} y(x_0) = \gamma_{1n} \\ y'(x_0) = \gamma_{2n} \\ \dots \\ y^{(n-1)}(x_0) = \gamma_{nn} \end{cases} \text{ — начальное условие} \end{aligned}$$

По теореме о существовании и единственности решения  $n$ -ая задача Коши имеет единственное решение  $y_n(x)$ .

Рассмотрим функции:

$y_1$  — решение 1-ой ЗК  
 $y_2$  — решение 2-ой ЗК  
 .....  
 $y_n$  — решение n-ой ЗК

Определитель Вронского функций  $y_1, \dots, y_n$ :

$$\begin{vmatrix} \gamma_1(x_0) & \gamma_2(x_0) & \cdots & \gamma_n(x_0) \\ \gamma'_1(x_0) & \gamma'_2(x_0) & \cdots & \gamma'_n(x_0) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \gamma_1^{(n-1)}(x_0) & \gamma_2^{(n-1)}(x_0) & \cdots & \gamma_n^{(n-1)}(x_0) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \gamma_{11} & \gamma_{12} & \cdots & \gamma_{1n} \\ \gamma_{21} & \gamma_{22} & \cdots & \gamma_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \gamma_{n1} & \gamma_{n2} & \cdots & \gamma_{nn} \end{vmatrix} \neq 0$$

По утверждению 1 (**с.73**):  $\exists x_0 \in I: W(x_0) \neq 0 \Rightarrow y_1, \dots, y_n$  — линейно независимы  $\Rightarrow y_1, \dots, y_n$  образуют ФСР. ■

## 10.1 Формула Остроградского-Лиувилля для ЛОДУ 2-го порядка

Рассмотрим ЛОДУ 2-го порядка

$$y'' + p_1(x)y' + p_2(x)y = 0 \quad (1)$$

Пусть  $y_1$  и  $y_2$  — два частных решения ЛОДУ (1). Для  $y_1$  и  $y_2$  верны равенства:

$$\begin{cases} y_1'' + p_1(x)y_1' + p_2(x)y_1 = 0 \\ y_2'' + p_1(x)y_2' + p_2(x)y_2 = 0 \end{cases} \begin{array}{l} \cdot (-y_2) \\ \cdot y_1 \end{array} \quad \text{«+»}$$

$$y_1y_2'' - y_2y_1'' + p_1(x)(y_1y_2' - y_2y_1') + p_2(x)(y_1y_2 - y_2y_1) = 0 \quad (2)$$

Введём обозначение:

$$W(x) = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix} = y_1y_2' - y_1'y_2$$

$$(W(x))' = (y_1y_2' - y_2y_1')' = y_1'y_2' + y_1y_2'' - y_1''y_2 - y_1'y_2' = y_1y_2'' - y_1''y_2$$

(2) примет вид:

$$W' + p_1(x) \cdot W = 0 \text{ ДУ с разделяющимися переменными}$$

$$W' = -p_1(x) \cdot W$$

$$\frac{dW}{dx} = -p_1(x) \cdot W \quad \left| : W \neq 0 \right| \cdot dx$$

$$\frac{dW}{W} = -p_1(x) dx$$

$$\ln |W| = - \int p_1(x) dx + C, \quad \forall C = const$$

$$e^{\ln |W|} = e^{- \int p_1(x) dx} \cdot e^C$$

$$|W| = e^{- \int p_1(x) dx} \cdot C_1, \quad \forall C_1 = e^C > 0$$

$$W = C_2 \cdot e^{- \int p_1(x) dx}, \quad \forall C_2 = \pm C_1 \neq 0$$

$W = 0$  — особое решение

$$W = C_3 \cdot e^{-\int p_1(x)dx}, \quad \forall C_3 = \text{const}$$

Формула Остроградского-Лиувилля

**Замечание.** Формула Остроградского-Лиувилля для ЛОДУ  $n$ -го порядка имеет тот же вид, что и для ЛОДУ 2-го порядка, где  $p_1(x)$  — коэффициент при  $(n - 1)$ -ой производной при условии, что коэффициент при  $n$ -ой производной равен 1.

### 10.1.1 Нахождение общего решения ЛОДУ 2-го порядка по одному известному частному решению

Пусть дано ЛОДУ 2-го порядка

$$y'' + p_1(x)y' + p_2(x)y = 0 \quad (1)$$

$y_1$  — частное решение ЛОДУ (1) дано по условию.

$y_2$  — ? — второе частное решение ЛОДУ (1) линейно независимо с  $y_1$

$$W(x) = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix} = y_1 y_2' - y_2 y_1' \neq 0$$

Рассмотрим:

$$\begin{aligned} \left(\frac{y_2}{y_1}\right)' &= \frac{y_1 y_2' - y_2 y_1'}{y_1^2} = \frac{W(x)}{y_1^2} \stackrel{\text{Ф. О-Л}}{=} \frac{1}{y_1^2} \cdot C_3 \cdot e^{-\int p_1(x)dx} \\ \left(\frac{y_2}{y_1}\right)' &= \frac{1}{y_1^2} \cdot C_3 \cdot e^{-\int p_1(x)dx} \end{aligned}$$

Интегрируем:

$$\begin{aligned} \frac{y_2}{y_1} &= C_3 \int \frac{1}{y_1^2} \cdot e^{-\int p_1(x)dx} dx + C_4 \\ y_2 &= y_1 \cdot \left( C_3 \int \frac{1}{y_1^2} \cdot e^{-\int p_1(x)dx} dx + C_4 \right) \end{aligned}$$

$y_2$  — частное решение  $C_4 = 0$   $C_3 = 1$

Главное  $C_3 \neq 0$ , так как иначе  $y_1$  и  $y_2$  линейно зависимы.

$$y_2 = y_1 \int \frac{1}{y_1^2} \cdot e^{-\int p_1(x)dx} dx$$

По теореме о структуре общего решения ЛОДУ (с.75, Т.1):

$$\begin{aligned} y_{\text{оо}} &= C_1 y_1 + C_2 y_2 \\ y_{\text{оо}} &= C_1 y_1 + C_2 y_1 \int \frac{1}{y_1^2} \cdot e^{-\int p_1(x)dx} dx \end{aligned}$$

**Пример.**  $xy'' + y' - \frac{1}{x} \cdot y = 0$   $y_1 = \frac{1}{x}$



$$y'' + \frac{1}{x} \cdot y' - \frac{1}{x^2} \cdot y = 0 \quad p_1(x) = \frac{1}{x}$$

$$\begin{aligned} y_2 &= \frac{1}{x} \cdot \int x^2 e^{-\int \frac{dx}{x}} dx = \frac{1}{x} \int x^2 e^{-\ln|x|} dx = \frac{1}{x} \int x^2 \cdot \frac{1}{|x|} dx = \frac{1}{x} \int |x| dx = \\ &= \frac{1}{x} \int |x| dx = \frac{1}{x} \int x dx = \frac{1}{x} \cdot \frac{x^2}{2} = \frac{x}{2} \end{aligned}$$

$$y_{\text{oo}} = C_1 y_1 + C_2 y_2 = C_1 \cdot \frac{1}{x} + C_2 \cdot \frac{x}{2} = C_1 \cdot \frac{1}{x} + C_3 \cdot x \quad \forall C_1, C_3 - \text{const}$$

## 10.2 ЛОДУ с постоянными коэффициентами

Ранее рассматривали ЛОДУ  $n$ -го порядка с переменными коэффициентами

$$y^{(n)} + p_1(x)y^{(n-1)} + \dots + p_{n-1}(x)y' + p_n(x)y = 0$$

$p_1(x), \dots, p_n(x)$  — функции, определённые на  $I$

Далее будем рассматривать уравнения вида:

$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \dots + a_{n-1} y' + a_n y = 0 \quad (2.1)$$

где  $C_1, \dots, C_n$  — постоянные числа.

Решение ЛОДУ с постоянными коэффициентами будем искать в виде  $y = e^{kx}$  где  $k \in \mathbb{R}$ . Почему?

1. Функция  $y = e^{kx}$  практически не меняет свой вид после дифференцирования.
2.  $y = e^{kx} \neq 0, \forall x \in I$ .
3. Не происходит потери решений, либо нахождения лишних решений.

Подставим  $y = e^{kx}$  в (2.1):

$$\begin{aligned} y' &= k e^{kx} \\ y'' &= k^2 e^{kx} \\ &\dots\dots\dots \\ y^{(n)} &= k^n e^{kx} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} k^n e^{kx} + a_1 k^{n-1} e^{kx} + \dots + a_{n-1} k e^{kx} + a_n e^{kx} &= 0 \\ e^{kx} \cdot (k^n + a_1 k^{n-1} + \dots + a_{n-1} k + a_n) &= 0 \quad e^{kx} \neq 0, \forall x \in I \end{aligned}$$

$$\boxed{k^n + a_1 k^{n-1} + \dots + a_{n-1} k + a_n = 0} \quad (2.2)$$

**Определение 1.** Уравнение (2.2) называется характеристическим уравнением. **Характеристическое уравнение** — это алгебраическое уравнение/полином/многочлен, полученный из ДУ (2.1) путём замены  $n$ -ой производной неизвестной функции  $y$  на  $n$ -ую степень величины  $k$ , а сама функция  $y$  заменена на единицу.

Уравнение (2.2) имеет  $n$  корней  $k_1, \dots, k_n$ .  
ФСР ЛОДУ (2.1):

$$\begin{cases} y_1 = e^{k_1 x} \\ y_2 = e^{k_2 x} \\ \dots\dots\dots \\ y_n = e^{k_n x} \end{cases}$$

$$y_{\text{оо}} = C_1 y_1 + \dots + C_n y_n = C_1 e^{k_1 x} + \dots + C_n e^{k_n x}$$

### 10.3 Методы построения общего решения ЛОДУ 2-го порядка по корням характеристического уравнения

$$\boxed{y'' + a_1 y' + a_2 y = 0} \quad a_1, a_2 - \text{const} \quad \text{ЛОДУ} \quad (1)$$

$$\boxed{k^2 + a_1 k + a_2 = 0} \quad \text{характеристическое уравнение}$$

$$D = a_1^2 - 4a_2$$

$\boxed{1 \text{ случай}}$   $D > 0 \Rightarrow$  характеристическое уравнение имеет два действительных различных корня.

$$k_1 \neq k_2 \in \mathbb{R}$$

ФСР ЛОДУ (1):

$$\begin{cases} y_1 = e^{k_1 x} \\ y_2 = e^{k_2 x} \end{cases}$$

Покажем, что  $y_1$  и  $y_2$  линейно независимы, то есть образуют ФСР ЛОДУ (1):

$$W(X) = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} e^{k_1 x} & e^{k_2 x} \\ k_1 e^{k_1 x} & k_2 e^{k_2 x} \end{vmatrix} = e^{(k_1+k_2)x} (k_2 - k_1)$$

$$\left. \begin{aligned} e^{(k_1+k_2)x} &\neq 0, \forall x \in I \\ k_2 - k_1 &\neq 0, \text{ т.к. } k_2 \neq k_1 \end{aligned} \right\} \Rightarrow W(x) \neq 0 \Rightarrow \text{функции } y_1 = e^{k_1 x}, y_2 = e^{k_2 x} \text{ лин. независимы} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \text{ФСР ЛОДУ (1)}$$

По теореме о структуре общего решения ЛОДУ (с.75, Т.1):

$$y_{\text{оо}} = C_1 y_1 + C_2 y_2 = C_1 e^{k_1 x} + C_2 e^{k_2 x}$$

**2 случай**  $D = 0 \Rightarrow$  характеристическое уравнение имеет два действительных равных между собой корня / один корень кратности два.

$$\begin{aligned} k_1 = k_2 = k \in \mathbb{R} \\ y_1 = e^{kx} \quad k = -\frac{a_1}{2} \end{aligned}$$

Найдём  $y_2$  — частное решение ЛОДУ (1) по известному частному решению  $y_1$ , причём  $y_1$  и  $y_2$  линейно независимы:

$$\begin{aligned} y_2 &= y_1 \int \frac{1}{y_1^2} e^{-\int p_1(x) dx} dx = \left| \begin{array}{l} p_1(x) = a_1 - \text{const} \\ y_1 = e^{kx}, \quad k \in \mathbb{R} \end{array} \right| e^{kx} \int \frac{1}{e^{2kx}} \cdot e^{-\int a_1 dx} = \\ &= e^{-\frac{a_1}{2}x} \int \frac{1}{e^{-a_1x}} \cdot e^{-a_1x} dx = e^{-\frac{a_1}{2}x} \int dx = e^{-\frac{a_1}{2}x} x \end{aligned}$$

$$\left. \begin{aligned} y_1 &= e^{-\frac{a_1}{2}x} \\ y_2 &= xe^{-\frac{a_1}{2}x} \end{aligned} \right\} \text{ два частных решения ЛОДУ (1)}$$

Покажем, что  $y_1$  и  $y_2$  линейно независимы:

$$\begin{aligned} W(x) &= \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} e^{-\frac{a_1}{2}x} & xe^{-\frac{a_1}{2}x} \\ -\frac{a_1}{2}e^{-\frac{a_1}{2}x} & e^{-\frac{a_1}{2}x} - \frac{a_1}{2}xe^{-\frac{a_1}{2}x} \end{vmatrix} = e^{-a_1x} - \frac{a_1}{2}xe^{-a_1x} + \frac{a_1}{2}xe^{-a_1x} = \\ &= e^{-a_1x} \neq 0, \quad \forall x \in I \Rightarrow y_1, y_2 \text{ лн. з.} \Rightarrow \text{образуют ФСР} \end{aligned}$$

ФСР ЛОДУ (1):

$$\begin{cases} y_1 = e^{-\frac{a_1}{2}x} \\ y_2 = xe^{-\frac{a_1}{2}x} \end{cases}$$

По теореме о структуре общего решения ЛОДУ (с.75, Т.1):

$$y_{\text{оо}} = C_1 y_1 + C_2 y_2 = C_1 e^{-\frac{a_1}{2}x} + C_2 x e^{-\frac{a_1}{2}x}$$

**3 случай**  $D < 0 \Rightarrow$  характеристическое уравнение имеет комплексные корни.

$$k_{1,2} = \alpha \pm \beta \cdot i \quad i - \text{мнимая единица, } \sqrt{-1} = i$$

$\alpha$  — действительная часть       $\beta$  — мнимая часть

Формула Эйлера:

$$\begin{cases} e^{i\varphi} = \cos \varphi + i \sin \varphi \\ e^{-i\varphi} = \cos \varphi - i \sin \varphi \end{cases}$$

По корням характеристического уравнения находим частные решения ЛОДУ (1).

$k_1 = \alpha + \beta i$ :

$$y_1 = e^{k_1 x} = e^{(\alpha + \beta i)x} = e^{\alpha x} \cdot e^{\beta i x} = \boxed{e^{\alpha x} (\cos \beta x + i \cdot \sin \beta x)}$$

$k_2 = \alpha - \beta i$ :

$$y_2 = e^{k_2 x} = e^{(\alpha - \beta i)x} = e^{\alpha x} \cdot e^{-\beta i x} = \boxed{e^{\alpha x} (\cos \beta x - i \cdot \sin \beta x)}$$

Найдём действительные решения ЛОДУ (1). Составим линейные комбинации:

$$\begin{aligned}\widetilde{y}_1 &= \frac{y_1 + y_2}{2} = e^{\alpha x} \cos \beta x \\ \widetilde{y}_2 &= \frac{y_1 - y_2}{2i} = e^{\alpha x} \sin \beta x\end{aligned}$$

Из свойств частных решений ЛОДУ следует, что  $\widetilde{y}_1$  и  $\widetilde{y}_2$  — тоже решения ЛОДУ (как линейная комбинация).

Покажем, что  $\widetilde{y}_1$  и  $\widetilde{y}_2$  линейно независимы:

$$\begin{aligned}W(x) &= \begin{vmatrix} \widetilde{y}_1 & \widetilde{y}_2 \\ \widetilde{y}_1' & \widetilde{y}_2' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} e^{\alpha x} \cos \beta x & e^{\alpha x} \sin \beta x \\ \alpha e^{\alpha x} \cos \beta x - \beta e^{\alpha x} \sin \beta x & \alpha e^{\alpha x} \sin \beta x + \beta e^{\alpha x} \cos \beta x \end{vmatrix} = \\ &= \alpha e^{2\alpha x} \cos \beta x \sin \beta x + \beta e^{2\alpha x} \cos^2 \beta x - \alpha e^{2\alpha x} \cos \beta x \sin \beta x + \beta e^{2\alpha x} \sin^2 \beta x = \\ &= e^{2\alpha x} \beta \cdot 1 \neq 0 \quad \text{т.к. } e^{2\alpha x} \neq 0 \quad \forall x \in I\end{aligned}$$

$\beta \neq 0$ , так как если  $\beta = 0$ , то  $k_1 = k_2 = \alpha$  — действительные корни

$$\Rightarrow \left. \begin{aligned} \widetilde{y}_1 &= e^{\alpha x} \cos \beta x \\ \widetilde{y}_2 &= e^{\alpha x} \sin \beta x \end{aligned} \right\} \text{линейно независимы} \Rightarrow \text{ФСР}$$

По теореме о структуре решений ЛОДУ (с.75, Т.1):

$$y_{\text{оо}} = C_1 y_1 + C_2 y_2 = e^{\alpha x} (C_1 \cos \beta x + C_2 \sin \beta x)$$

## 10.4 Построение общего решения ЛОДУ n-го порядка по корням характеристического уравнения

$$\begin{aligned}y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \dots + a_{n-1} y' + a_n y &= 0 \quad \text{ЛОДУ} \\ k^n + a_1 k^{n-1} + \dots + a_{n-1} k + a_n &= 0 \quad \text{характеристическое уравнение} \\ a_1, \dots, a_n &= \text{const}\end{aligned}$$

Характеристическое уравнение имеет  $n$  корней.

1. Все  $n$  корней действительные и они различны.

$$\begin{aligned}k_1 &\neq k_2 \neq \dots \neq k_n \\ \text{ФСР: } \{ &e^{k_1 x}, e^{k_2 x}, \dots, e^{k_n x} \} \\ y_{\text{оо}} &= C_1 e^{k_1 x} + \dots + C_n e^{k_n x}, \quad C_1, \dots, C_n = \text{const}\end{aligned}$$

2. Характеристическое уравнение имеет один корень кратности  $n$ .

$$\begin{aligned}k_1 &= k_2 = \dots = k_n = k \\ \text{ФСР: } \left\{ \begin{aligned} y_1 &= e^{kx} \\ y_2 &= x e^{kx} \\ y_3 &= x^2 e^{kx} \\ &\dots\dots\dots \\ y_n &= x^{n-1} e^{kx} \end{aligned} \right\} \\ y_{\text{оо}} &= e^{kx} (C_1 + C_2 x + \dots + C_n x^{n-1})\end{aligned}$$

3. Характеристическое уравнение имеет все комплексные корни.

$$n = 2m, \quad m \in \mathbb{N}$$

В этом случае ФСР ЛОДУ (1) состоит из  $2m$  линейно зависимых решений или  $m$  пар решений.

$$\begin{array}{ccc}
 & n = 2m & \\
 \swarrow & & \searrow \\
 k_1 = \alpha + \beta i & & k_2 = \alpha - \beta i \\
 \downarrow & & \downarrow \\
 e^{\alpha x} \cos \beta x & & e^{\alpha x} \sin \beta x \\
 x e^{\alpha x} \cos \beta x & & x e^{\alpha x} \sin \beta x \\
 x^2 e^{\alpha x} \cos \beta x & & x^2 e^{\alpha x} \sin \beta x \\
 \dots\dots\dots & & \dots\dots\dots \\
 x^{m-1} e^{\alpha x} \cos \beta x & & x^{m-1} e^{\alpha x} \sin \beta x
 \end{array}$$

$$\begin{aligned}
 y_{00} &= e^{\alpha x} \cos \beta x (C_1 + C_2 x + \dots + C_m x^{m-1}) + e^{\alpha x} \sin \beta x (k_1 + k_2 x + \dots + k_m x^{m-1}) \\
 &\quad \forall \left. \begin{array}{c} C_1, \dots, C_m \\ k_1, \dots, k_m \end{array} \right\} - \text{const}
 \end{aligned}$$

## 11 Линейные неоднородные дифференциальные уравнения

$$y^{(n)} + p_1(x)y^{(n-1)} + \dots + p_{n-1}(x)y' + p_n(x)y = f(x) \quad \text{ЛНДУ} \quad (1)$$

$p_1(x), \dots, p_n(x), f(x)$  — функции на  $I$

$$y^{(n)} + p_1(x)y^{(n-1)} + \dots + p_{n-1}(x)y' + p_n(x)y = 0 \quad \text{ЛОДУ} \quad (2)$$

$$\begin{cases} y(x_0) = y_0 \\ y'(x_0) = y_{10} \\ \dots\dots\dots \\ y^{(n-1)}(x_0) = y_{n-10} \end{cases} \quad \text{начальное условие} \quad (3)$$

**Теорема 1** (О структуре общего решения ЛНДУ).

Общее решение ЛНДУ (1) с непрерывными на промежутке  $I$  функциями  $p_1(x), \dots, p_n(x), f(x)$  равно сумме общего решения соответствующего ЛОДУ (2) и некоторого частного решения ЛНДУ (1).

$$\boxed{y_{\text{он}} = y_{\text{оо}} + y_{\text{чн}}} \quad (4)$$

- «оо» — общее решение однородного уравнения
- «чн» — частное решение неоднородного уравнения

**Доказательство.**

Сначала покажем, что (4) решение ЛНДУ (1), но не общее. Подставим (4) в (1):

$$(y_{\text{оо}} + y_{\text{чн}})^{(n)} + p_1(x)(y_{\text{оо}} + y_{\text{чн}})^{(n-1)} + \dots + p_{n-1}(x)(y_{\text{оо}} + y_{\text{чн}})' + p_n(x)(y_{\text{оо}} + y_{\text{чн}}) = f$$

Вычислим производные:

$$\begin{aligned} y_{\text{оо}}^{(n)} + y_{\text{чн}}^{(n)} + p_1(x)y_{\text{оо}}^{(n-1)} + p_1(x)y_{\text{чн}}^{(n-1)} + \dots + p_{n-1}(x)y_{\text{оо}}' + p_{n-1}(x)y_{\text{чн}}' + \\ + p_n(x)y_{\text{оо}} + p_n(x)y_{\text{чн}} = f \end{aligned}$$

Группируем  $y_{\text{оо}}, y_{\text{чн}}$ :

$$\overbrace{y_{\text{оо}}^{(n)} + p_1(x)y_{\text{оо}}^{(n-1)} + \dots + p_{n-1}(x)y_{\text{оо}}' + p_n(x)y_{\text{оо}}}^0 + \underbrace{y_{\text{чн}}^{(n)} + p_1(x)y_{\text{чн}}^{(n-1)} + \dots + p_{n-1}(x)y_{\text{чн}}' + p_n(x)y_{\text{чн}}}_f = f$$

Так как  $y_{\text{оо}}$  — общее решение ЛОДУ (2),  $y_{\text{чн}}$  — частное решение ЛНДУ (1):

$$0 + f = f \Rightarrow f = f \Rightarrow (4) \text{ — решение ЛНДУ (1)}$$

По теореме о существовании и единственности решения задачи Коши (с.65, Т.1) следует, что ЗК (1), (3) имеет единственное решение.



**Теорема 2** (О суперпозиции (наложении) решений ЛНДУ  $n$ -го порядка).

Если

$$\begin{aligned} y_1 & \text{— решение ЛНДУ (1) с правой частью } f_1, \\ & \dots\dots\dots \\ y_n & \text{— решение ЛНДУ (1) с правой частью } f_n \end{aligned}$$

то линейная комбинация

$$y = C_1 y_1 + \dots + C_n y_n$$

является решением ЛНДУ (1) с правой частью

$$f = C_1 f_1 + \dots + C_n f_n$$

**Доказательство.**

Так как

$$\begin{aligned} y_1 & \text{— решение ЛНДУ (1) с правой частью } f_1, \\ & \dots\dots\dots \\ y_n & \text{— решение ЛНДУ (1) с правой частью } f_n \end{aligned}$$

то верны равенства

$$\begin{cases} y_1^{(n)} + p_1(x)y_1^{(n-1)} + \dots + p_{n-1}(x)y_1' + p_n(x)y_1 = f_1 \\ \dots\dots\dots \\ y_n^{(n)} + p_1(x)y_n^{(n-1)} + \dots + p_{n-1}(x)y_n' + p_n(x)y_n = f_n \end{cases} \quad (*)$$

Рассмотрим

$$y = C_1 y_1 + \dots + C_n y_n \quad (V)$$

Подставим (V) в левую часть (1):

$$\begin{aligned} (C_1 y_1 + \dots + C_n y_n)^{(n)} + p_1(x)(C_1 y_1 + \dots + C_n y_n)^{(n-1)} + \dots + \\ + p_{n-1}(x)(C_1 y_1 + \dots + C_n y_n)' + p_n(x)(C_1 y_1 + \dots + C_n y_n) \end{aligned}$$

Вычислим производные:

$$\begin{aligned} C_1 y_1^{(n)} + \dots + C_n y_n^{(n)} + p_1(x)C_1 y_1^{(n-1)} + \dots + p_1(x)C_n y_n^{(n-1)} + \dots + \\ + p_{n-1}(x)C_1 y_1' + \dots + p_{n-1}(x)C_n y_n' + p_n(x)C_1 y_1 + \dots + p_n(x)C_n y_n \end{aligned}$$

Группируем  $y_1/y_n$ :

$$\begin{aligned} & \overbrace{C_1 (y_1^{(n)} + p_1(x)y_1^{(n-1)} + \dots + p_{n-1}(x)y_1' + p_n(x)y_1)}^{f_1} + \dots + \\ & + C_n \underbrace{(y_n^{(n)} + p_1(x)y_n^{(n-1)} + \dots + p_{n-1}(x)y_n' + p_n(x)y_n)}_{f_n} \stackrel{(*)}{=} C_1 f_1 + \dots + C_n f_n \end{aligned}$$

■



### 11.1 Метод Лагранжа или метод вариации произвольных постоянных для нахождения общего решения ЛНДУ 2-го порядка. Система варьируемых переменных

Рассмотрим ЛНДУ 2-го порядка

$$y'' + p_1(x)y' + p_2(x)y = f(x) \quad (1)$$

$$y_1'' + p_1(x)y_1' + p_2(x)y_1 = 0 \quad \text{ЛОДУ} \quad (2)$$

$p_1(x), \dots, p_n(x)$  — функции.

Пусть  $y_1$  и  $y_2$  — это ФСР ЛОДУ (2). Тогда по теореме о структуре общего решения ЛОДУ (с.75, Т.1):

$$y_{\text{оо}} = \underbrace{C_1 y_1 + C_2 y_2}_{\text{ФСР ЛОДУ}} \quad C_1, C_2 = \forall \text{const}$$

Метод Лагранжа: предполагаемый вид решения ЛНДУ (1):

$$y_{\text{он}} = C_1(x)y_1 + C_2(x)y_2 \quad (3)$$

$C_1(x), C_2(x)$  — некоторые функции.

Вычислим:

$$y'_{\text{он}} = C'_1 y_1 + C_1 y'_1 + C'_2 y_2 + C_2 y'_2 = \underbrace{C'_1 y_1 + C'_2 y_2}_0 + C_1 y'_1 + C_2 y'_2$$

**Первое дополнительное условие Лагранжа:**

$$\boxed{C'_1 y_1 + C'_2 y_2 = 0}$$

$$y'_{\text{он}} = C_1 y'_1 + C_2 y'_2$$

$$y''_{\text{он}} = C'_1 y'_1 + C_1 y''_1 + C'_2 y'_2 + C_2 y''_2$$

$y_{\text{он}}, y'_{\text{он}}, y''_{\text{он}}$  в (1):

$$C'_1 y'_1 + C_1 y''_1 + C'_2 y'_2 + C_2 y''_2 + p_1(x) \cdot (C_1 y'_1 + C_2 y'_2) + p_2(x)(C_1 y_1 + C_2 y_2) = f$$

Группируем:

$$C'_1 y'_1 + C'_2 y'_2 + C_1 \underbrace{(y''_1 + p_1(x)y'_1 + p_2(x)y_1)}_0 + C_2 \underbrace{(y''_2 + p_1(x)y'_2 + p_2(x)y_2)}_0 = f$$

Так как  $y_1, y_2$  — решения ЛОДУ (2), то

**Второе условие Лагранжа:**

$$\boxed{C'_1 y'_1 + C'_2 y'_2 = f}$$

Предполагаемое решение (3) будет являться решением ЛНДУ (1), если функции  $C_1(x)$  и  $C_2(x)$  удовлетворяют условиям:

$$\begin{cases} C'_1 y_1 + C_2 y_2 = 0 \\ C'_1 y'_1 + C'_2 y'_2 = f \end{cases} \text{ — система варьируемых переменных}$$

Определяем из системы варьируемых переменных  $C'_1(x)$  и  $C'_2(x)$ .

$$C'_1(x) = \varphi(x) \quad C'_2(x) = \Psi(x)$$

Интегрируем:

$$C_1(x) = \int \varphi(x) dx + k_1, \quad \forall k_1 = \text{const}$$

$$C_2(x) = \int \Psi(x) dx + k_2, \quad \forall k_2 = \text{const}$$

Подставляем  $C_1(x)$ ,  $C_2(x)$  в (3):

$$y_{\text{он}} = C_1(x)y_1 + C_2(x)y_2 = \left( \int \varphi(x) dx + k_1 \right) y_1 + \left( \int \Psi(x) dx + k_2 \right) y_2 =$$

$$= \underbrace{k_1 y_1 + k_2 y_2}_{y_{\text{оо}}} + \underbrace{y_1 \int \varphi(x) dx + y_2 \int \Psi(x) dx}_{y_{\text{чн}}}$$

Система варьируемых переменных имеет единственное решение, так как определитель — это определитель Вронского.

$$W(x) = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix} \neq 0 \quad \text{т.к. } y_1 \text{ и } y_2 \text{ ФСР ЛОДУ}$$

**Пример.**  $y'' + y = \frac{1}{\cos x}$  ЛНДУ  $y_{\text{он}} = ?$

$y'' + y = \boxed{0}$  — ЛОДУ

$k^2 + 1 = 0$  — характеристическое уравнение  $k_{1,2} = 0 \pm i$

ФСР ЛОДУ:  $\{e^{0x} \cos x, e^{0x} \sin x\}$

$$y_{\text{оо}} = C_1 \cos x + C_2 \sin x, \quad \forall C_1, C_2 = \text{const}$$

$$y_{\text{он}} = C_1(x) \cos x + C_2(x) \sin x, \quad \forall C_1(x), C_2(x) \text{ — функции}$$

Система варьируемых переменных:

$$\begin{cases} C_1' \cos x + C_2' \sin x = 0 \\ -C_1' \sin x + C_2' \cos x = \frac{1}{\cos x} \end{cases}$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} \cos x & \sin x \\ -\sin x & \cos x \end{vmatrix} = 1 \quad \Delta_1 = \begin{vmatrix} 0 & \sin x \\ \frac{1}{\cos x} & \cos x \end{vmatrix} = -\operatorname{tg} x \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} \cos x & 0 \\ -\sin x & \frac{1}{\cos x} \end{vmatrix} = 1$$

$$C_1'(x) = \frac{\Delta_1}{\Delta} = -\operatorname{tg} x \quad C_2'(x) = \frac{\Delta_2}{\Delta} = 1$$

Интегрируем:

$$C_1(x) = - \int \frac{\sin x}{\cos x} dx = \int \frac{d(\cos x)}{\cos x} = \ln |\cos x| + k_1, \quad \forall k_1 = \text{const}$$

$$C_2(x) = \int dx = x + k_2, \quad \forall k_2 = \text{const}$$

$C_1(x)$  и  $C_2(x)$  подставляем в  $y_{\text{он}}$

$$\begin{aligned} y_{\text{он}} &= C_1(x)y_1 + C_2(x)y_2 = (\ln |\cos x| + k_1) \cos x + (x + k_2) \sin x = \\ &= \underbrace{k_1 \cos x + k_2 \sin x}_{y_{\text{оо}}} + \underbrace{\cos x \cdot \ln |\cos x| + x \sin x}_{y_{\text{чн}}} \end{aligned}$$

## 11.2 Метод построения частных решений ЛНДУ n-го порядка с постоянными коэффициентами и специальной правой частью (квазиполином)

Рассмотрим ЛНДУ n-го порядка с постоянными коэффициентами

$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \dots + a_{n-1} y' + a_n y = f \quad \text{ЛНДУ} \quad (1)$$

$a_1 \dots, a_n - \text{const}$

Соответствующее ЛОДУ:

$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \dots + a_{n-1} y' + a_n y = 0 \quad \text{ЛОДУ}$$

$a_1 \dots, a_n - \text{const}$

Характеристическое уравнение:

$$k^n + a_1 k^{n-1} + \dots + a_{n-1} k + a_n = 0$$

$k_1 \dots, k_n$  — корни характеристического уравнения

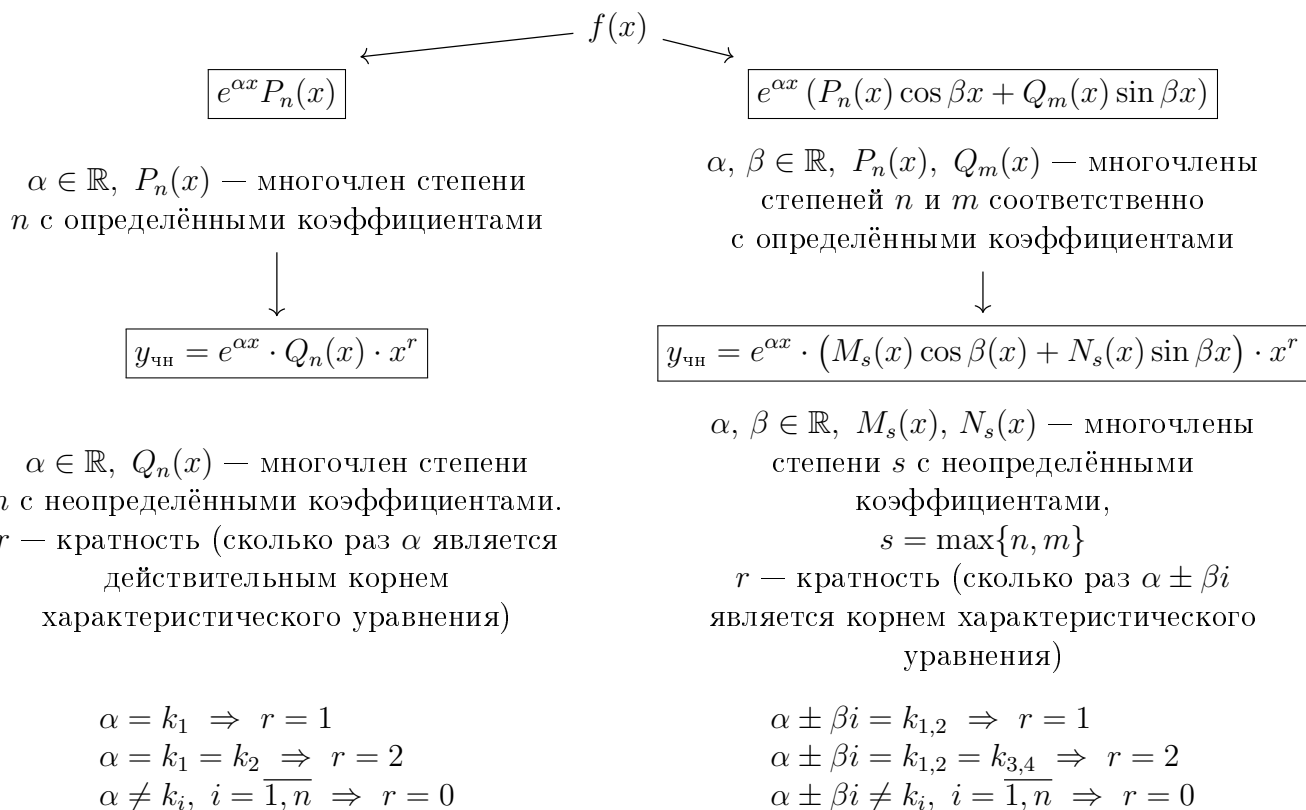
ФСР ЛОДУ:  $\{e^{k_1 x}, \dots, e^{k_n x}\}$

$$y_{\text{оо}} = C_1 e^{k_1 x} + \dots + C_n e^{k_n x}$$

где  $C_1 \dots, C_n - \text{const}$

Если правая часть ЛНДУ (1) представима специальным видом, то есть *квазиполиномом*, то по её виду можно найти некоторое частное решение ЛНДУ (1).

Суть метода: по виду функции  $f$  записывается предполагаемый вид частного решения ЛНДУ с неопределёнными коэффициентами. Затем это предполагаемое решение подставляем в ЛНДУ (1) и из полученного равенства находим неопределённые коэффициенты.



**Пример.**

$$y'' + 2y' + y = e^{2x} \text{ ЛНДУ}$$

$$y'' + 2y' + y = 0 \text{ ЛОДУ}$$

$$k^2 + 2k + 1 = 0 \text{ характеристическое уравнение}$$

$$(k + 1)^2 = 0 \Rightarrow k_1 = k_2 = -1 \Rightarrow \text{ФСР: } \{e^{-x}, e^{-x}x\} \Rightarrow y_{\text{оо}} = C_1 e^{-x} + C_2 e^{-x}x$$

$$f = e^{2x} \Rightarrow \alpha = 2$$

$$\alpha = 2 \neq k_1 \neq k_2 \Rightarrow r = 0$$

$$f = 1 \cdot x^0 \cdot e^{2x}$$

1 — это *const* — это многочлен нулевой степени  $n = 0$

$$\left. \begin{aligned} y_{\text{чн}} &= e^{2x} \cdot x^0 \cdot A = Ae^{2x} \\ y'_{\text{чн}} &= 2Ae^{2x} \\ y''_{\text{чн}} &= 4Ae^{2x} \end{aligned} \right\} \rightarrow \text{в ЛНДУ}$$

$$\begin{aligned} 4Ae^{2x} + 2 \cdot 2Ae^{2x} + Ae^{2x} &= e^{2x} \\ 9Ae^{2x} &= e^{2x} \\ 9A &= 1 \\ A &= \frac{1}{9} \\ \Downarrow \\ y_{\text{чн}} &= \frac{1}{9}e^{2x} \\ y_{\text{оо}} &= y_{\text{оо}} + y_{\text{чн}} \\ y_{\text{оо}} &= C_1 e^{-x} + C_2 x e^{-x} + \frac{1}{9}e^{2x}
 \end{aligned}$$