Интегралы и дифференциальные уравнения

Рубежный контроль

2 семестр | Модуль №2

непроверенная версия

GitHub: malyinik

2024 г.

Содержание

1 Теоретические вопросы, оцениваемые в 1 балл

1.1 Сформулировать определение общего решения ОДУ n-го порядка

$$\begin{cases} y(x_0) = y_0 \\ y'(x_0) = y_{10} \\ y''(x_0) = y_{20} \\ \dots\dots\dots\dots\dots \\ y^{(n-1)}(x_0) = y_{n\cdot 10} \end{cases} \quad \text{— начальное условие}$$

Определение. **Общим решением** ДУ n-го порядка называется функция $y = \varphi(x,\, C_1,\, C_2,\, \dots,\, C_n)$ удовлетворяющая условиям:

1. $y = \varphi(x,\, C_1,\, C_2,\, \dots,\, C_n)$ — решение ДУ n-го порядка при любых $C_1, C_2, \dots, C_n$— $const$
2. Какого бы ни было начальное условие, можно найти точки $C_1^0, C_2^0, \dots, C_n^0$, что функция $y = \varphi(x,\, C_1^0,\, C_2^0,\, \dots,\, C_n^0)$ будет удовлетворять начальным условиям.

1.2 Сформулировать определение задачи Коши для ОДУ n-го порядка

Определение. **Задача Коши** для ДУ n-го порядка заключается в отыскании решения ДУ, удовлетворяющего начальному условию:

$$\begin{cases} y(x_0) = y_0 \\ y'(x_0) = y_{10} \\ y''(x_0) = y_{20} \\ \dots\dots\dots \\ y^{(n-1)}(x_0) = y_{n\cdot 10} \end{cases}$$

Задача Коши = ДУ + начальное условие

1.3 Сформулировать определение линейного ОДУ n-го порядка

Определение. ДУ n-го порядка называется **линейным**, если неизвестная функция $y(x)$ и её производные до n-го порядка включительно входят в уравнение в первой степени, не перемножаясь между собой.

$$\boxed{y^{(n)} + p_1(x)y^{(n-1)} + p_2(x)y^{(n-2)} + \ldots + p_{n-1}(x)y' + p_n(x)y = f(x)} \tag{1}$$

Если $f(x) = 0,\ \forall x \in I$, то ДУ (1) называется **линейным однородным ДУ** (ЛОДУ).

$$\boxed{y^{(n)} + p_1(x)y^{(n-1)} + p_2(x)y^{(n-2)} + \ldots + p_{n-1}(x)y' + p_n(x)y = 0} \tag{2}$$

(2) ЛОДУ n-го порядка

1.4 Сформулировать определение линейной зависимости и линейной независимости системы функций на промежутке

Определение. Система функций $y_1(x),\ \ldots,\ y_n(x)$ называется **линейно зависимой** на некотором промежутке I, если их линейная комбинация равна нулю, то есть

$$C_1 y_1(x) + \ldots + C_n y_n = 0$$

при этом существует хотя бы один $C_i \neq 0,\ i = \overline{1, n},\ C_1,\ \ldots,\ C_n$ — $const$

Определение. Система функций $y_1(x),\ \ldots,\ y_n(x)$ называется **линейно независимой** на некотором промежутке I, если их линейная комбинация равна нулю, то есть

$$C_1 y_1(x) + \ldots + C_n y_n = 0$$

где все $C_1 = 0,\ i = \overline{1, n}$

1.5 Сформулировать определение определителя Вронского системы функций

Определение. Определитель Вронского (вронскианом) системы $(n-1)$ раз дифференцируемых функций $y_1(x),\ \ldots,\ y_n(x)$ называется определитель вида:

$$W(x) = \begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) & \ldots & y_n(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) & \ldots & y_n'(x) \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ y_1^{(n-1)}(x) & y_2^{(n-1)}(x) & \ldots & y_n^{(n-1)}(x) \end{vmatrix}$$

1.6 Сформулировать определение фундаментальной системы решений линейного однородного ОДУ

Пусть дано ЛОДУ n-го порядка

$$y^{(n)} + p_1(x) y^{(n-1)} + \ldots + p_{n-1} y' + p_n(x) y = 0 \tag{1}$$

Определение. Фундаментальной системой решений ЛОДУ n-го порядка (1) называется любой набор линейно независимых частных решений ЛОДУ n-го порядка.

1.7 Сформулировать определение характеристического уравнения линейного ОДУ с постоянными коэффициентами

Определение. Рассмотрим линейное однородное дифференциальное уравнение с постоянными коэффициентами

$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \ldots + a_n y = 0$$

где $a_1, \ldots, a_n$ — вещественные числа.
Уравнение

$$\lambda^n + a_1 \lambda^{n-1} + \ldots + a_{n-1}\lambda + a_n = 0$$

называется **характеристическим уравнением** дифференциального уравнения.

2 Теоретические вопросы, оцениваемые в 3 балла

2.1 Сформулировать и доказать теорему о вронскиане системы линейно зависимых функций

Теорема 1.
Если $(n-1)$ раз дифференцируемые функции $y_1(x), \ldots, y_n(x)$ линейно зависимы на некотором промежутке I, то

$$W(x) = 0, \ \forall x \in I$$

Доказательство.
Так как $y_1(x), \ldots, y_n(x)$ линейно зависимы на I, то

$$\boxed{C_1 y_1(x), \ \ldots, \ C_n y_n(x) = 0} \qquad \exists C_i \neq 0, \ i = \overline{1, n} \tag{$*$}$$

Продифференцируем $(*)$ $(n-1)$ раз:

$$\boxed{C_1 y_1'(x), \ \ldots, \ C_n y_n'(x) = 0} \qquad \exists C_i \neq 0, \ i = \overline{1, n} \tag{$**$}$$

По определению линейной зависимости $\Rightarrow y_1'(x), \ \ldots, \ y_n'(x)$ — линейно зависимы
. . . .

$$\boxed{C_1 y_1^{(n-1)}(x), \ \ldots, \ C_n y_n^{(n-1)}(x) = 0} \qquad \exists C_i \neq 0, \ i = \overline{1, n} \tag{$***$}$$

По определению линейной зависимости $\Rightarrow y_1^{(n-1)}(x), \ \ldots, \ y_n^{(n-1)}(x)$ — линейно зависимы
Составим систему из $(*)$, $(**)$ и $(***)$:

$$\begin{cases} C_1 y_1(x), \ \ldots, \ C_n y_n(x) = 0 \\ C_1 y_1'(x), \ \ldots, \ C_n y_n'(x) = 0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ C_1 y_1^{(n-1)}(x), \ \ldots, \ C_n y_n^{(n-1)}(x) = 0 \end{cases}$$

Это однородная СЛАУ относительно $C_1, \ \ldots, \ C_n$.

Определитель этой СЛАУ:

$$\begin{vmatrix} y_1(x) & \dots & y_n(x) \\ y_1'(x) & \dots & y_n'(x) \\ \dots & \dots & \dots \\ y_1^{(n-1)}(x) & \dots & y_n^{(n-1)}(x) \end{vmatrix} = W(X) \text{ — это определитель Вронского}$$

$W(x) = 0$, так как все строки определителя линейно зависимы. ■

2.2 Сформулировать и доказать теорему о вронскиане системы линейно независимых частных решений линейного однородного ОДУ

Теорема *(О вронскиане линейно независимых частных решений ЛОДУ n-го порядка)*.
Если функции $y_1(x), \dots, y_n(x)$ линейно независимы на некотором промежутке I и являются частными решениями ЛОДУ n-го порядка

$$y^{(n)} + p_1(x)y^{(n-1)} + \ldots + p_{n-1}(x)y' + p_n(x)y = 0$$

с непрерывными на промежутке I коэффициентами $p_1(x), \dots, p_n(x)$, то $W(x) \neq 0,\ \forall x \in I$

Доказательство (Метод от противного).
Предположим, что $\exists x_0 \in I : W(x_0) \neq 0$

$$W(x_0) = \begin{vmatrix} y_1(x_0) & y_2(x_0) & \dots & y_n(x_0) \\ y_1'(x_0) & y_2'(x_0) & \dots & y_n'(x_0) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ y_1^{(n-1)}(x_0) & y_2^{(n-1)}(x_0) & \dots & y_n^{(n-1)}(x_0)c \end{vmatrix} = 0$$

Построим СЛАУ по определителю

$$\begin{cases} C_1y_1(x_0) + C_2y_2(x_0) + \ldots + C_ny_n(x_0) = 0 \\ C_1y_1'(x_0) + C_2y_2'(x_0) + \ldots + C_ny_n'(x_0) = 0 \\ \dots\dots\dots\dots \\ C_1y_1^{(n-1)}(x_0) + C_2y_2^{(n-1)}(x_0) + \ldots + C_ny_n^{(n-1)}(x_0) = 0 \end{cases}$$

Данная СЛАУ имеет ненулевое решение, так как $W(x_0) = 0$
Рассмотрим функцию $y = C_1y_1 + \ldots + C_ny_n$
Так как $y_1, \dots, y_n$ — частные решения ЛОДУ n-го порядка, то по Т2:

$$y = C_1y_1 + \ldots + C_ny_n \text{ — решение ЛОДУ n-го порядка}$$

Найдём $y(x_0)$:

$$y(x_0) = C_1y_1(x_0) + \ldots + C_ny_n(x_0) = 0$$

Дифференцируем $(n-1)$ раз функцию $y = C_1y_1 + \ldots + C_ny_n$:

$$\begin{aligned} y'(x_0) &= C_1y_1'(x_0) + \ldots + C_ny_n'(x_0) = 0 \\ y''(x_0) &= C_1y_1''(x_0) + \ldots + C_ny_n''(x_0) = 0 \\ &\ldots\ldots\ldots \\ y^{(n-1)}(x_0) &= C_1y_1^{(n-1)}(x_0) + \ldots + C_ny_n^{(n-1)}(x_0) = 0 \end{aligned}$$

Получили, что $y = C_1y_1 + \ldots + C_ny_n$ — решение ЛОДУ n-го порядка (2), удовлетворяющего начальному условию:

$$\begin{cases} y(x_0) = 0 \\ y'(x_0) = 0 \\ \ldots\ldots\ldots \\ y^{(n-1)}(x_0) = 0 \end{cases} \tag{2}$$

Но $y = 0$ – решение ЛОДУ (2), удовлетворяющего начальному условию (3)
По теореме $\exists!$ решения задачи Коши для линейного дифференциального уравнения n-го порядка $\Rightarrow$

$$y = C_1y_1 + \ldots + C_ny_n = 0$$

при этом $C_1, \ \ldots, \ C_n$ – ненулевые константы $\Rightarrow$

$$y_1, \ \ldots, \ y_n \text{ — линейно зависимы по определению линейной зависимости}$$

Это противоречит условию $\Rightarrow$ предположение не является верным $\forall x \in I \colon W(x) \neq 0$ ■

2.3 Сформулировать и доказать теорему о существовании фундаментальной системы решений линейного однородного ОДУ n-го порядка

Теорема *(О существовании ФСР ЛОДУ n-го порядка)*.
Любые ЛОДУ n-го порядка (2) с непрерывными на промежутке I коэффициентами $p_1(x), \ \ldots, \ p_n(x)$ имеет ФСР, то есть системы из n линейно зависимых функций.

Доказательство.
Рассмотрим ЛОДУ n-го порядка

$$y^{(n)} + p_1(x)y^{(n-1)} + \ldots + p_{n-1}(x)y' + p_n(x)y = 0$$

$p_1(x), \ \ldots, \ p_n(x)$ — непрерывны на I.
Рассмотрим произвольный числовой определитель, отличный от нуля:

$$\begin{vmatrix} \gamma_{11} & \gamma_{12} & \cdots & \gamma_{1n} \\ \gamma_{21} & \gamma_{22} & \cdots & \gamma_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \gamma_{n1} & \gamma_{n2} & \cdots & \gamma_{nn} \end{vmatrix} \neq 0 \qquad \gamma_{ij} \in \mathbb{R}, \ (ij) = \overline{1, n}$$

Возьмём $\forall x_0 \in I$ и сформулируем для ЛОДУ n-го порядка задачи Коши, причём начальное условие в точке x_0 для i-ой ЗК возьмём из i-го столбца определителя.
$\boxed{\text{1 ЗК}}$:

$$y^{(n)} + p_1(x)y^{(n-1)} + \ldots + p_{n-1}(x)y' + p_n(x)y = 0 \text{ — ДУ}$$
$$\begin{cases} y(x_0) = \gamma_{11} \\ y'(x_0) = \gamma_{21} \\ \ldots\ldots\ldots \\ y^{(n-1)}(x_0) = \gamma_{n1} \end{cases} \text{— начальное условие}$$

По теореме о существовании и единственности решения 1-ая задача Коши имеет единственное решение $y_1(x)$.
....
$\boxed{\text{n ЗК}}$:

$$y^{(n)} + p_1(x)y^{(n-1)} + \ldots + p_{n-1}(x)y' + p_n(x)y = 0 \text{ — ДУ}$$
$$\begin{cases} y(x_0) = \gamma_{1n} \\ y'(x_0) = \gamma_{2n} \\ \ldots\ldots\ldots \\ y^{(n-1)}(x_0) = \gamma_{nn} \end{cases} \text{— начальное условие}$$

По теореме о существовании и единственности решения n-ая задача Коши имеет единственное решение $y_n(x)$.
Рассмотрим функции:

$$\begin{aligned} &y_1 \text{ — решение 1-ой ЗК} \\ &y_2 \text{ — решение 2-ой ЗК} \\ &\ldots \\ &y_n \text{ — решение n-ой ЗК} \end{aligned}$$

Определитель Вронского функций $y_1, \ \ldots, \ y_n$:

$$\begin{vmatrix} \gamma_1(x_0) & \gamma_2(x_0) & \ldots & \gamma_n(x_0) \\ \gamma_2'(x_0) & \gamma_2'(x_0) & \ldots & \gamma_n'(x_0) \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \gamma_1^{(n-1)}(x_0) & \gamma_2^{(n-1)}(x_0) & \ldots & \gamma_n^{(n-1)}(x_0) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \gamma_{11} & \gamma_{12} & \ldots & \gamma_{1n} \\ \gamma_{21} & \gamma_{22} & \ldots & \gamma_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \gamma_{n1} & \gamma_{n2} & \ldots & \gamma_{nn} \end{vmatrix} \neq 0$$

По утверждению 1: $\exists x_0 \colon W(x_0) \neq 0 \ \Rightarrow \ y_1, \ldots, y_n$ — линейно зависимы $\Rightarrow$ образуют ФСР. ■

2.4 Сформулировать и доказать теорему о структуре общего решения линейного однородного ОДУ n-го порядка

Теорема *(О структуре общего решения ЛОДУ n-го порядка)*.
Общим решением ЛОДУ n-го порядка

$$y^{(n)} + p_1(x)y^{(n-1)} + \ldots + p_{n-1}(x)y' + p_n(x)y = 0 \tag{3}$$

с непрерывными коэффициентами $p_1(x),\ \ldots,\ p_n(x)$ на промежутке I является линейной комбинацией частных решений, входящих в ФСР.

$$y_{\text{оо}} = C_1 y_1 + \ldots + C_n y_n \tag{5}$$

«оо» — общее решение однородного уравнения

$$y_1, \ldots, y_n \qquad \text{— ФСР ЛОДУ}, \quad C_1, \ldots, C_n - const \tag{4}$$

Доказательство.

1. Покажем, что (5) решение ЛОДУ (2), но не общее. Для этого подставим (5) в (2):

$$\begin{aligned}(C_1y_1 + \ldots + C_ny_n)^{(n)} &+ p_1(x)\left(C_1y_1 + \ldots + C_ny_n\right)^{(n-1)} + \ldots + \\ &+ p_{n-1}(x)\left(C_1y_1 + \ldots + C_ny_n\right)' + \ldots + \\ &+ p_n(x)\left(C_1y_1 + \ldots + C_ny_n\right) = 0\end{aligned}$$

   Вычислим производные:

$$\begin{aligned}C_1y_1^{(n)} + \ldots + C_ny_n^{(n)} &+ p_1(x)C_1y_1^{(n-1)} + \ldots + \\ &+ p_1(x)C_ny_n^{(n-1)} + \ldots + p_{n-1}(x)C_1y_1' + \ldots + \\ &+ p_{n-1}(x)C_ny_n' + p_n(x)C_1y_1 + \ldots + p_n(x)C_ny_n = 0\end{aligned}$$

   Группируем:

$$\begin{aligned}C_1\left(y_1^{(n)} + p_1(x)y_1^{(n-1)} + \ldots + p_{n-1}(x)y_1' + p_n(x)y_1\right) + \ldots + \\ + C_n\left(y_n^{(n)} + p_1(x)y_n^{(n-1)} + \ldots + p_{n-1}(x)y_n' + p_n(x)y_n\right) = 0\end{aligned}$$

   Так как $y_1,\ \ldots,\ y_n$ — частные решения ЛОДУ (2), то:

$$\begin{aligned}C_1 \cdot 0 + \ldots + C_n \cdot 0 = 0 \\ 0 = 0 \ \Rightarrow\ (5) \text{ — решение } (2)\end{aligned}$$

2. Покажем, что (5) — это общее решение (2), то есть из него можно выделить

единственное частное решение, удовлетворяющее начальному условию:

$$\begin{cases} y(x_0) = y_0 \\ y'(x_0) = y_{10} \\ y''(x_0) = y_{20} \qquad x_0 \in I \\ \dots\dots\dots \\ y^{(n-1)}(x_0) = y_{n\cdot 10} \end{cases} \tag{5}$$

Подставим (5) в (6):

$$\begin{cases} y(x_0) = C_1 y_1(x_0) + \ldots + C_n y_n(x_0) = y_0 \\ y'(x_0) = C_1 y_1'(x_0) + \ldots + C_n y_n'(x_0) = y_{10} \\ y''(x_0) = C_1 y_1''(x_0) + \ldots + C_n y_n''(x_0) = y_{20} \\ \dots\dots\dots \\ y^{(n-1)}(x_0) = C_1 y_1^{(n-1)}(x_0) + \ldots + C_n y_n^{(n-1)}(x_0) = y_{n\cdot 10} \end{cases} \quad \text{— СЛАУ}$$

СЛАУ относительно $C_1, \ \ldots, \ C_n$. Определитель этой системы — это определитель Вронского.

$$W(x_0) = \begin{vmatrix} y_1(x_0) & y_2(x_0) & \ldots & y_n(x_0) \\ y_1'(x_0) & y_2'(x_0) & \ldots & y_n'(x_0) \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ y_1^{(n-1)}(x_0) & y_2^{(n-1)}(x) & \ldots & y_n^{(n-1)}(x_0) \end{vmatrix}$$

так как $y_1, \ \ldots, \ y_n$ ФСР $\Rightarrow$ $y_1, \ \ldots, \ y_n$ линейно независимы $\Rightarrow$ $W(x_0) \neq 0$ $\Rightarrow$ ранг расширенной матрицы СЛАУ совпадает с рангом основной матрицы $\Rightarrow$ число неизвестных совпадает с числом уравнений $\Rightarrow$ СЛАУ имеет единственное решение:

$$C_1^0, \ \ldots, \ C_n^0$$

В силу теоремы о существовании и единственности решения задачи Коши:

$$y = C_1^0 y_1 + \ldots + C_n^0 y_n \text{ — единственное решение ЗК (2), (6)}$$

То есть получилось из (5) выделить частное решение, удовлетворяющее начальному условию (6) $\Rightarrow$ по определению общего решения (5) — общее решение ЛОДУ (2).

■

2.5 Сформулировать и доказать теорему о структуре общего решения линейного неоднородного ОДУ n-го порядка

Теорема *(О структуре общего решения ЛНДУ).*
Общее решение ЛНДУ (1) с непрерывными на промежутке I функциями $p_1(x),\ \ldots,\ p_n(x),\ f(x)$ равно сумме общего решения соответствующего ЛОДУ (2) и некоторого частного решения ЛНДУ (1).

$$\boxed{y_{\text{он}} = y_{\text{оо}} + y_{\text{чн}}} \tag{6}$$

- «о» — общее решение
- «ч» — частное решение
- «о» — однородного уравнения
- «н» — неоднородного уравнения

Доказательство.
Сначала покажем, что (4) решение ЛНДУ (1), но не общее. Подставим (4) в (1):

$$\Big(y_{\text{оо}} + y_{\text{чн}}\Big)^{(n)} + p_1(x)\Big(y_{\text{оо}} + y_{\text{чн}}\Big)^{(n-1)} + \ldots + p_{n-1}(x)\Big(y_{\text{оо}} + y_{\text{чн}}\Big)' + \\ + p_n(x)\Big(y_{\text{оо}} + y_{\text{чн}}\Big) = f$$

Вычислим производные:

$$y_{\text{оо}}^{(n)} + y_{\text{чн}}^{(n)} + p_1(x)y_{\text{оо}}^{(n-1)} + p_1(x)y_{\text{чн}}^{(n-1)} + \ldots + p_{n-1}(x)y'_{\text{оо}} + p_{n-1}(x)y'_{\text{чн}} + p_n(x)y_{\text{оо}} + \\ + p_n(x)y_{\text{чн}} = f$$

Группируем $y_{\text{оо}},\ y_{\text{чн}}:$

$$y_{\text{оо}}^{(n)} + p_1(x)y_{\text{оо}}^{(n-1)} + \ldots + +p_{n-1}(x)y'_{\text{оо}} + p_n(x)y_{\text{оо}} + y_{\text{чн}}^{(n)} + p_1(x)y_{\text{чн}}^{(n-1)} + \ldots + p_{n-1}(x)y'_{\text{чн}} + \\ + p_n(x)y_{\text{чн}} = f$$

Так как $y_{\text{оо}}$ — общее решение ЛОДУ (2) ■

2.6 Сформулировать и доказать теорему о наложении (суперпозиции) частных решений линейного неоднородного ОДУ

Теорема *(О наложении (суперпозиции) частных решений ЛНДУ).*
Пусть имеются два линейных неоднородных уравнения

$$y^{(n)} + a_1y^{(n-1)} + \ldots + a_{n-1}y' + a_ny = f_1(x)$$
$$y^{(n)} + a_1y^{(n-1)} + \ldots + a_{n-1}y' + a_ny = f_2(x)$$

и пусть $y_1 = y_1(x)$ и $y_2 = y_2(x)$ — решения этих уравнений.
Тогда $y_1(x) + y_2(x)$ будет решением уравнения

$$y^{(n)} + a_1y^{(n-1)} + \ldots + a_{n-1}y' + a_ny = f_1(x) + f_2(x)$$

2.7 Сформулировать и доказать свойства частных решений линейного однородного ОДУ

Теорема.
Множество частных решений ЛОДУ n-го порядка (2) с непрерывными функциями $p_1(x),\ \ldots,\ p_n(x)$ на промежутке I образует линейное пространство.

Доказательство.
Пусть y_1 и y_2 — частные решения ЛОДУ n-го порядка (2). Тогда:

$$
\begin{aligned}
y_1^{(n)} + p_1(x)y_1^{(n-1)} + p_2(x)y_1^{(n-2)} + \ldots + p_{n-1}(x)y_1' + p_n(x)y_1 = 0\\
y_2^{(n)} + p_1(x)y_2^{(n-1)} + p_2(x)y_2^{(n-2)} + \ldots + p_{n-1}(x)y_2' + p_n(x)y_2 = 0
\end{aligned}
$$

Складываем уравнения:

$$\left(y_1^{(n)} + y_2^{(n)}\right) + p_1(x)\left(y_1^{(n-1)} + y_2^{(n-1)}\right) + \ldots + p_{n-1}(x)\left(y_1' + y_2'\right) + p_n(x)\left(y_1 + y_2\right) = 0$$

По свойству производной:

$$(y_1 + y_2)^{(n)} + p_1(x)(y_1 + y_2)^{(n-1)} + \ldots + p_{n-1}(y_1 + y_2)' + p_n(x)(y_1 + y_2) = 0$$

Обозначим $y = y_1 + y_2$:

$$y^{(n)} + p_1(x)y^{(n-1)} + p_2(x)y^{(n-2)} + \ldots + p_{n-1}(x)y' + p_n(x)y = 0$$

$y = y_1 + y_2$ — частное решение ЛОДУ (2).
Пусть y_1 — частное решение ЛОДУ n-го порядка (2) Тогда:

$$
\begin{aligned}
y_1^{(n)} + p_1(x)y_1^{(n-1)} + p_2(x)y_1^{(n-2)} + \ldots + p_{n-1}(x)y_1' + p_n(x)y_1 = 0 \quad &\Big| \cdot C = const,\ C \neq 0\\
C \cdot y_1^{(n)} + C \cdot p_1(x)y_1^{(n-1)} + C \cdot p_2(x)y_1^{(n-2)} + \ldots + C \cdot p_{n-1}(x)y_1' + C \cdot p_n(x)y_1 &= 0\\
(Cy_1)^{(n)} + p_1(x)(Cy_1)^{(n-1)} + p_2(x)(Cy_1)^{(n-2)} + \ldots + p_{n-1}(x)C \cdot y_1' + p_n(x)(Cy_1) &= 0
\end{aligned}
$$

Обозначим $y = Cy_2, \quad C$ — $const,\ C \neq 0$:

$$
\begin{gathered}
y^{(n)} + p_1(x)y^{(n-1)} + p_2(x)y^{(n-2)} + \ldots + p_{n-1}(x)y' + p_n(x)y = 0\\
\Downarrow\\
y = C \cdot y_1,\ \text{где } C - const \quad \text{— решение ЛОДУ (2)}
\end{gathered}
$$

По определению линейного пространства $\Rightarrow$ частные решения ЛОДУ n-го порядка образуют линейное пространство. ■

Теорема.
Если $y_1,\ \ldots,\ y_n$ — частные решения ЛОДУ (2), то их линейная комбинация, то есть $y = C_1y_1 + \ldots + C_ny_n$, где $C_1,\ \ldots,\ C_n$ — *const* являются решением ЛОДУ (2).

Доказательство.

$$\begin{aligned}
&y_1^{(n)} + p_1(x)y_1^{(n-1)} + p_2(x)y_1^{(n-2)} + \ldots + p_{n-1}(x)y_1' + p_n(x)y_1 = 0 &&\Big|\cdot C_1\\
&y_2^{(n)} + p_1(x)y_2^{(n-1)} + p_2(x)y_2^{(n-2)} + \ldots + p_{n-1}(x)y_2' + p_n(x)y_2 = 0 &&\Big|\cdot C_2\\
&\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\ldots\\
&y_n^{(n)} + p_1(x)y_n^{(n-1)} + p_2(x)y_n^{(n-2)} + \ldots + p_{n-1}(x)y_n' + p_n(x)y_n = 0 &&\Big|\cdot C_n
\end{aligned}$$

Умножим каждое уравнение на константу $C_1,\ C_2,\ \ldots,\ C_n$, где $C_i \neq 0,\ i = \overline{1,n}$.

$$\begin{aligned}
\left(C_1y_1^{(n)} + C_2y_2^{(n)} + \ldots + C_ny^{(n)}\right) + p_1(x)\left(C_1y_1^{(n-1)} + C_2y_2^{(n-1)} + \ldots + C_ny^{(n-1)}\right) + \ldots +\\
+ p_{n-1}(x)\left(C_1y_1' + C_2y_2' + \ldots + C_ny'\right) +\\
+ p_n(x)\left(C_1y_1 + C_2y_2 + \ldots + C_ny\right) = 0
\end{aligned}$$

По свойству производной:

$$\begin{aligned}
(C_1y_1 + C_2y_2 + \ldots + C_ny)^{(n)} + p_1(x)\left(C_1y_1 + C_2y_2 + \ldots + C_ny\right)^{(n-1)} + \ldots +\\
+ p_{n-1}(x)\left(C_1y_1 + C_2y_2 + \ldots + C_ny\right)' +\\
+ p_n(x)\left(C_1y_1 + C_2y_2 + \ldots + C_ny\right) = 0
\end{aligned}$$

Обозначим $y' = C_1y_1 + C_2y_2 + \ldots + C_ny_n$:

$$y^{(n)} + p_1(x)y^{(n-1)} + \ldots + p_{n-1}(x)y' + p_n(x)y = 0$$

$$\Downarrow$$

$$y = C_1y_1 + C_2y_2 + \ldots + C_ny_n \text{ — решение ЛОДУ n-го порядка}$$

■

2.8 Вывести формулу Остроградского - Лиувилля для линейного ОДУ 2-го порядка

Рассмотрим ЛОДУ 2-го порядка

$$y'' + p_1(x)y' + p_2(x)y = 0 \tag{7}$$

Пусть y_1 и y_2 — два частных решения ЛОДУ (1). Для y_1 и y_2 верны равенства:

$$\begin{cases} y_1'' + p_1(x)y_1' + p_2(x)y_1 = 0 \\ y_2'' + p_1(x)y_2' + p_2(x)y_2 = 0 \end{cases} \left|\begin{matrix}\cdot(-y_2) \\ \cdot y_1\end{matrix}\right. \text{„}+\text{”}$$

$$y_1y_2'' - y_2y_1'' + p_1(x)\left(y_1y_2' - y_2y_1'\right) = 0 \tag{8}$$

Введём обозначение:

$$W(x) = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix} = y_1y_2' - y_1'y_2$$

$$\Big(W(x)\Big)' = \Big(y_1 y_2' - y_2 y_1'\Big)' = y_1' y_2' + y_1 y_2'' - y_1'' y_2 - y_1' y_2' = y_1 y_2'' - y_1'' y_2$$

(2) примет вид:

$$\begin{aligned}
W' + p_1(x) \cdot W = 0 \text{ ДУ с разделяющимися переменными} \\
W' &= -p_1(x) \cdot W \\
\frac{dW}{dx} &= -p_1(x) \cdot W \quad \Big| : W \neq 0 \quad \Big| \cdot dx \\
\frac{dW}{W} &= -p_1(x)\, dx \\
\ln|W| &= -\int p_1(x)\, dx + C,\ \forall C \text{ — } const \\
e^{\ln|W|} &= e^{-\int p_1(x) dx} \cdot e^{C} \\
|W| &= e^{-\int p_1(x) dx} \cdot C_1,\ \forall C_1 = e^C > 0 \\
W &= C_2 \cdot e^{-\int p_1(x) dx}, \forall C_2 = \pm C_1 \neq 0
\end{aligned}$$

$W = 0$ — особое решение

$$\boxed{W = C_3 \cdot e^{-\int p_1(x) dx},\ \forall C_3 \text{ — } const}$$

Формула Остроградского-Лиувилля

> **Замечание.** Формула Остроградского-Лиувилля для ЛОДУ n-го порядка имеет тот же вид, что и для ЛОДУ 2-го порядка, где $p_1(x)$ — коэффициент при $(n-1)$-ой производной при условии, что коэффициент при n-ой производной равен 1.

2.9 Вывести формулу для общего решения линейного однородного ОДУ 2-го порядка с постоянными коэффициентами в случае простых действительных корней характеристического уравнения

$\boxed{\text{1 случай}}$ $D > 0 \ \Rightarrow$ характеристическое уравнение имеет два действительных различных корней
$k_1 \neq k_2 \in \mathbb{R}$
ФСР ЛОДУ (1):

$$\begin{cases} y_1 = e^{k_1 x} \\ y_2 = e^{k_2 x} \end{cases}$$

Покажем, что y_1 и y_2 линейно зависимы, то есть образуют ФСР ЛОДУ (1):

$$W(X) = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} e^{k_1 x} & e^{k_2 x} \\ k_1 e^{k_1 x} & k_2 e^{k_2 x} \end{vmatrix} = e^{(k_1+k_2)x}(k_2 - k_1)$$

$$\left.\begin{aligned} e^{(k_1+k_2)x} \neq 0,\ \forall x \in I \\ k_2 - k_1 \neq 0,\ \text{т.к. } k_2 \neq k_1 \end{aligned}\right\} \Rightarrow W(x) \neq 0 \ \Rightarrow \text{ функции } y_1 = e^{k_1 x},\ y_2 = e^{k_2 x} \text{ лин. зависимы } \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \text{ ФСР ЛОДУ (1)}$$

По теореме *о структуре общего решения ЛОДУ*:

$$y_{\text{оо}} = C_1 y_1 + C_2 y_2 = C_1 e^{k_1 x} + C_2 e^{k_2 x}$$

2.10 Вывести формулу для общего решения линейного однородного ОДУ 2-го порядка с постоянными коэффициентами в случае комплексных корней характеристического уравнения

$\boxed{\text{2 случай}}$ $D = 0 \;\Rightarrow$ характеристическое уравнение имеет два действительных равных между собой корней / один корень кратности два
$k_1 = k_2 = k \in \mathbb{R}$
$y_1 = e^{kx} \qquad k = -\frac{a}{2}$
Найдём y_2 — частное решение ЛОДУ (1) по известному частному решению y_1, причём y_1 и y_2 линейно зависимы:

$$y_2 = y_1 \int \frac{1}{y_2^2} e^{-\int p_1(x_0)dx}\,dx = \begin{vmatrix} p_1(x) = a_1 - const \\ y_1 = e^{kx},\; k \in \mathbb{R} \end{vmatrix} = e^{kx} \int \frac{1}{e^{2kx}} \cdot e^{-\int a_1 dx} =$$
$$= e^{-\frac{a}{2}x} \int \frac{1}{e^{-ax}} \cdot e^{-a_1 x}\,dx = e^{-\frac{a_1}{2}x} \int dx = e^{-\frac{a_1}{2}x} x$$

$$\left.\begin{aligned} y_1 &= e^{-\frac{a_1}{2}x} \\ y_2 &= xe^{-\frac{a_1}{2}x} \end{aligned}\right\} \text{ два частных решения ЛОДУ (1)}$$

Покажем, что y_1 и y_2 линейно зависимы:

$$W(x) = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} e^{-\frac{a_1}{2}x} & xe^{-\frac{a}{2}x} \\ -\frac{a_1}{2}e^{-\frac{a_1}{2}x} & e^{-\frac{a_1}{2}x} - \frac{a_1}{2}xe^{-\frac{a_1}{2}x} \end{vmatrix} = e^{-a_1 x} - \frac{a_1}{2}xe^{-a_1 x} + \frac{a_1}{2}xe^{-a_1 x} = e^{-a_1 x} \neq 0,$$
$$\forall x \in I \;\Rightarrow\; y_1, y_2 \text{ лн. з} \;\Rightarrow\; \text{образуют ФСР}$$

ФСР ЛОДУ (1):

$$\begin{cases} y_1 = e^{-\frac{a_1}{2}x} \\ y_2 = xe^{-\frac{a_1}{2}x} \end{cases}$$

По теореме *о структуре общего решения ЛОДУ*:

$$y_{\text{оо}} = C_1 y_1 + C_2 y_2 = C_1 e^{-\frac{a_1}{2}x} + C_2 x e^{-\frac{a_1}{2}x}$$

2.11 Вывести формулу для общего решения линейного однородного ОДУ 2-го порядка с постоянными коэффициентами в случае кратных корней характеристического уравнения

$\boxed{\text{3 случай}}$ $D < 0 \;\Rightarrow$ характеристическое уравнение имеет комплексные корни
$k_{1,2} = \alpha \pm \beta \cdot i \qquad i$ — мнимая единица, $\sqrt{-1} = i$
α — действительная часть $\qquad \beta$ — мнимая часть
Формула Эйлера:

$$\begin{cases} e^{i\varphi} = \cos\varphi + i\sin\varphi \\ e^{-i\varphi} = \cos\varphi - i\sin\varphi \end{cases}$$

По корням характеристического уравнения находим частные решения ЛОДУ (1).
$k_1 = \alpha + \beta i$:

$$y_1 = e^{k_1 x} = e^{(\alpha+\beta i)x} = e^{\alpha x} \cdot e^{\beta i x} = \boxed{e^{\alpha x}\left(\cos\beta x + i \cdot \sin\beta x\right)}$$

$k_2 = \alpha - \beta i$:

$$y_2 = e^{(\alpha-\beta i)x} = e^{\alpha x} \cdot e^{-\beta x} = \boxed{e^{\alpha x}\left(\cos\beta x = i \cdot \sin\beta x\right)}$$

Найдём действительные решения ЛОДУ (1). Составим линейные комбинации:

$$\widetilde{y_1} = \frac{y_1 + y_2}{2} = e^{\alpha x}\cos\beta x$$
$$\widetilde{y_2} = \frac{y_1 - y_2}{2i} = e^{\alpha x}\sin\beta x$$

По свойству частных решений ЛОДУ следует, что $\widetilde{y_1}$ и $\widetilde{y_2}$ — тоже решения ЛОДУ (как линейная комбинация).
Покажем, что $\widetilde{y_1}$ и $\widetilde{y_2}$ линейно зависимы:

$$\begin{aligned} W(x) = \begin{vmatrix} \widetilde{y_1} & \widetilde{y_2} \\ \widetilde{y_1}' & \widetilde{y_2}' \end{vmatrix} &= \begin{vmatrix} e^{\alpha x}\cos\beta x & e^{\alpha x}\sin\beta x \\ \alpha e^{\alpha x}\cos\beta x - \beta e^{\alpha x}\sin\beta x & \alpha e^{\alpha x}\sin\beta x + \beta e^{\alpha x}\cos\beta x \end{vmatrix} = \\ &= \alpha e^{2\alpha x}\cos\beta x\sin\beta x - \beta e^{2\alpha x}\cos^2\beta x - \alpha e^{2\alpha x}\cos\beta x\sin\beta x + \beta e^{2\alpha x}\sin^2\beta x = \\ &= e^{2\alpha x}\beta \cdot 1 \neq 0 \qquad \text{т.к } e^{2\alpha x} \neq 0 \ \forall x \in I \end{aligned}$$

$\beta \neq 0$, так как если $\beta = 0$, то $k_1 = k_2 = \alpha$ — действительные корни

$$\Rightarrow \left.\begin{aligned} \widetilde{y_1} = e^{\alpha x}\cos\beta x \\ \widetilde{y_2} = e^{\alpha x}\sin\beta x \end{aligned}\right\} \text{ линейно зависимы } \Rightarrow \text{ ФСР}$$

По теореме *о структуре решений ЛОДУ*

$$y_{\text{оо}} = C_1 y_1 + C_2 y_2 = e^{\alpha x}\left(C_1\cos\beta x + C_2\sin\beta x\right)$$

2.12 Описать метод Лагранжа вариации произвольных постоянных для линейного неоднородного ОДУ 2-го порядка и вывести систему соотношений для варьируемых переменных

Рассмотрим ЛНДУ 2-го порядка

$$y'' + p_1(x)y' + p_2(x)y = f(x) \tag{9}$$
$$y_1'' + p_1(x)y' + p_2(x)y = 0 \qquad \text{ЛОДУ} \tag{10}$$

$p_1(x)$, …, $p_n(x)$ — функции
Пусть y_1 и y_2 — это ФСР ЛОДУ (2). Тогда по теореме *о структуре общего решения ЛОДУ*:

$$y_{\text{оо}} = \underbrace{C_1 y_1 + C_2 y_2}_{\text{ФСР ЛОДУ}}$$

C_1, C_2 — $\forall const$
Метод Лагранжа: предполагаемый вид решения ЛНДУ (1):

$$y_{\text{он}} = C_1(x)y_1 + C_2(x)y_2 \tag{11}$$

$C_1(x)$, $C_2(x)$ — некоторые функции.
Вычислим:

$$y'_{\text{он}} = C_1'y_1 + C_1y_1' + C_2'y_2 + C_2y_2' = \underbrace{C_1'y_1 + C_2'y_2}_{0} + C_1y_1' + C_2y_2'$$

Первое дополнительное условие Лагранжа:

$$\boxed{C_1'y_1 + C_2'y_2 = 0}$$

$$\begin{aligned} y'_{\text{он}} &= C_1y_1' + C_2y_2' \\ y''_{\text{он}} &= C_1'y_1'C_1y_1' + C_2'y_2' + C_2y_2'' \end{aligned}$$

$y_{\text{он}}$, $y'_{\text{он}}$, $y''_{\text{он}}$ в (1):

$$C_1'y_1'C_1y_1' + C_2'y_2' + C_2y_2'' + p_1(x) \cdot \Big(C_1y_1' + C_2y_2'\Big) + p_2(x)\Big(C_1y_1 + C_2y_2\Big) = f$$

Группируем:

$$C_1'y_1' + c_2'y_2' + C_1\underbrace{\Big(y_1'' + p_1(x)y_1' + p_2(x)y_1\Big)}_{0} + C_2\underbrace{\Big(y_2'' + p_1(x)y_2' + p_2(x)y_2\Big)}_{0} = f$$

Так как y_1, y_2 — решения ЛОДУ (2), то

$$\boxed{C_1'y_1' + C_2'y_2' = f}$$

Второе условие Лагранжа

Предполагаемое решение (3) будет являться решением ЛНДУ (1), если функции $C_1(x)$ и $C_2(x)$ удовлетворяют условиям:

$$\begin{cases} C_1'y_1 + C_2y_2 = 0 \\ C_1'y_1' + C_2'y_2' = f \end{cases} \text{— система варьируемых переменных}$$

Определяем из системы варьируемых переменных $C_1'(x)$ и $C_2'(x)$.

$$C_1'(x) = \varphi(x) \qquad C_2'(x) = \Psi(x)$$

Интегрируем:

$$\begin{aligned} C_1(x) &= \int \varphi(x)\,dx + k_1, \quad \forall k_1 - const \\ C_2(x) &= \int \Psi(x)\,dx + k_2, \quad \forall k_2 - const \end{aligned}$$

Подставляем $C_1(x),\ C_2(x)$ в (3):

$$y_{\text{он}} = C_1(x)y_1 + C_2(x)y_2 = \left(\int \varphi(x)\,dx + k_1\right)y_1 + \left(\int \Psi(x)\,dx + k_2\right)y_2 =$$

$$= \underbrace{k_1y_1 + k_2y_2}_{y_{\text{оо}}} + \underbrace{y_1\int \varphi(x)\,dx + y_2\int \Psi(x)\,dx}_{y_{\text{чн}}}$$

Система варьируемых переменных имеет единственное решение, так как определитель — это определитель Вронского.

$$W(x) = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix} \neq 0 \text{ т.к. } y_1 \text{ и } y_2 \text{ ФСР ЛОДУ}$$