

# Аналитическая геометрия

## Содержание

<b>1</b>	<b>Векторная алгебра</b>	<b>4</b>
1.1	Свойства векторов . . . . .	5
1.2	Ортогональная проекция вектора на направление . . . . .	6
1.3	Линейная зависимость и независимость векторов . . . . .	7
1.3.1	Критерии линейной зависимости 2 и 3 векторов . . . . .	8
1.4	Базис . . . . .	9
1.4.1	Пространство $V_1$ . . . . .	9
1.4.2	Пространство $V_2$ . . . . .	9
1.4.3	Пространство $V_3$ . . . . .	9
<b>2</b>	<b>Координаты вектора. Действия с векторами</b>	<b>12</b>
2.1	Скалярное произведение векторов . . . . .	13
2.1.1	Свойства скалярного произведения . . . . .	13
2.1.2	Формула для вычисления скалярного произведения двух векторов, заданных ортонормированным базисом . . . . .	13
2.1.3	Формула косинуса между векторами, заданными ортонормированным базисом . . . . .	14
2.2	Векторное произведение векторов . . . . .	14
2.2.1	Свойства векторного произведения векторов . . . . .	14
2.2.2	Геометрическое приложение векторов. . . . .	14
2.3	Смешанное произведение . . . . .	15
2.3.1	Свойства смешанных произведений . . . . .	15
2.3.2	Формула смешанного произведения трёх векторов в правом ортонормированном базисе . . . . .	16
2.3.3	Геометрическое приложение смешанного произведения . . . . .	16
<b>3</b>	<b>Прямая на плоскости</b>	<b>17</b>
3.1	Способы задания прямой . . . . .	17
3.1.1	Каноническое уравнение . . . . .	17
3.1.2	Параметрическое уравнение . . . . .	17
3.1.3	Через две точки . . . . .	17
3.1.4	В отрезках . . . . .	17
3.1.5	С угловым коэффициентом . . . . .	18
3.1.6	Общего вида . . . . .	18
3.2	Угол между прямыми . . . . .	18
3.2.1	Прямые, заданные каноническими уравнениями . . . . .	18
3.2.2	Прямые, заданные общими уравнениями . . . . .	19
3.2.3	Прямые, заданные угловыми коэффициентами . . . . .	19
3.3	Условие параллельности прямых . . . . .	19
3.3.1	Прямые, заданные каноническими уравнениями . . . . .	19
3.3.2	Прямые, заданные общими уравнениями . . . . .	19
3.3.3	Прямые, заданные угловыми коэффициентами . . . . .	19
3.4	Условие перпендикулярности прямых . . . . .	19
3.4.1	Прямые, заданные каноническими уравнениями . . . . .	19
3.4.2	Прямые, заданные общими уравнениями . . . . .	20
3.4.3	Прямые, заданные угловыми коэффициентами . . . . .	20

3.5	Расстояние от точки до прямой . . . . .	20
<b>4</b>	<b>Уравнение плоскости</b>	<b>21</b>
4.1	Способы задания плоскости . . . . .	21
4.1.1	Через три точки . . . . .	21
4.1.2	Через две точки с направляющим вектором . . . . .	21
4.1.3	Проходящей через точку с двумя направляющими векторами . . . . .	22
4.1.4	Уравнение плоскости в отрезках . . . . .	22
4.1.5	Общее уравнение . . . . .	23
4.2	Угол между плоскостями . . . . .	23
4.2.1	Условие перпендикулярности . . . . .	23
4.2.2	Условие параллельности . . . . .	23
4.3	Расстояние от точки до плоскости . . . . .	24
<b>5</b>	<b>Прямая в пространстве</b>	<b>25</b>
5.1	Способы задания прямой в пространстве . . . . .	25
5.1.1	Каноническое уравнение прямой . . . . .	25
5.1.2	Параметрическое уравнение . . . . .	25
5.1.3	Через две точки . . . . .	25
5.1.4	Общее уравнение . . . . .	25
5.2	Расстояние от точки до прямой в пространстве . . . . .	26
5.2.1	Расстояние между параллельными прямыми . . . . .	27
5.2.2	Расстояние между скрещивающимися прямыми . . . . .	27
5.3	Взаимное расположение прямых в пространстве . . . . .	28
5.3.1	Совпадают . . . . .	28
5.3.2	Параллельны . . . . .	28
5.3.3	Пересекаются . . . . .	29
5.3.4	Скрещиваются . . . . .	29
5.4	Угол между прямой и плоскостью . . . . .	29
5.4.1	Условие параллельности прямой и плоскости . . . . .	29
5.4.2	Условие перпендикулярности прямой и плоскости . . . . .	30
5.4.3	Примеры задач . . . . .	30
<b>6</b>	<b>Кривые и поверхности 2-го порядка</b>	<b>35</b>
6.1	Эллипс . . . . .	35
6.2	Гипербола . . . . .	38
6.3	Парабола . . . . .	41
<b>7</b>	<b>Матрицы</b>	<b>43</b>
7.1	Основные понятия . . . . .	43
7.2	Действия с матрицами . . . . .	44
7.2.1	Сумма матриц . . . . .	44
7.2.2	Умножение матрицы на число . . . . .	44
7.2.3	Свойства сложения матриц и умножения матрицы на число . . . . .	45
7.2.4	Транспонирование матриц . . . . .	45
7.2.5	Свойства транспонирования матриц . . . . .	45
7.2.6	Произведение матриц . . . . .	45
7.2.7	Свойство антикоммутативности матрицы и его исключения . . . . .	46
7.2.8	Свойства произведения матриц . . . . .	47
7.3	Элементарные преобразования матриц . . . . .	48
7.4	Минор матрицы. Ранг матрицы. . . . .	48

7.5	Вычисление ранга матрицы . . . . .	50
7.5.1	Метод окаймляющих миноров . . . . .	50
7.5.2	Метод элементарных преобразований . . . . .	50
7.6	Обратные матрицы . . . . .	51
7.6.1	Критерий существования обратной матрицы . . . . .	51
7.7	Вычисление обратной матрицы . . . . .	54
7.7.1	Метод алгебраических дополнений . . . . .	54
7.7.2	Метод Жордана-Гаусса (с помощью элементарных преобразований) .	55
<b>8</b>	<b>Системы линейных алгебраических уравнений (СЛАУ)</b>	<b>56</b>
8.1	Формы записи СЛАУ . . . . .	56
8.1.1	Координатная форма записи . . . . .	56
8.1.2	Матричная форма записи . . . . .	56
8.1.3	Векторная форма записи . . . . .	56
8.2	Решение линейных уравнений . . . . .	57
8.3	Формулы Крамера для решения СЛАУ . . . . .	58
8.4	Теорема Кронекера-Капелли . . . . .	59
8.5	Однородные СЛАУ . . . . .	61
8.6	Неоднородные СЛАУ . . . . .	66

# 1 Векторная алгебра

**Определение 1.** Вектором называется отрезок, с выбранным на нём направлением.

**Определение 2.** Два вектора называется **коллинеарными**, если они лежат на одной прямой или на параллельных прямых.

**Определение 3.** Три вектора называются **компланарными**, если они лежат на прямых, параллельных некоторой плоскости.

**Примечание.** Вектор определяется точкой начала и точкой конца.  $(\overrightarrow{AB})$

**Определение 4.** Вектор, у которого точка начала фиксирована, называется **связанным**.

**Определение 5.** Вектор, у которого точка начала не фиксированная, называется **свободным**.

**Примечание.** Вектор характеризуется *длиной* и *направлением*.

**Определение 6.** Два вектора называются **сонаправленными**, если они *коллинеарны* и имеют одно и то же направление.

**Определение 7.** Два вектора называются **противоположно направленными** если они *коллинеарны* и имеют противоположные направления.

**Определение 8.** Два вектора называются **равными**, если:

1. Они коллинеарны и сонаправлены
2. Их длины равны

**Определение 9.** Вектор, длина которого равна 1 называется единичным вектором или **ортом**.

$$\vec{e} \quad |\vec{e}| = 1.$$

**Определение 10.** Вектор, длина которого равна нулю (начало и конец совпадают) называется **нулевым вектором**. Направление нулевого вектора произвольное. Нулевой вектор коллинеарен всем векторам.

$$|\vec{0}| = 0.$$

**Определение 11.** Суммой векторов  $\vec{a}$  и  $\vec{b}$  называется  $\vec{c}$ , который получается по правилу треугольника:

1. Конец вектора  $\vec{a}$  совмещают с началом вектора  $\vec{b}$
2. Тогда вектор, идущий из начала вектора  $\vec{a}$  к концу вектора  $\vec{b}$  и будет вектором  $\vec{c}$ .

**Определение 12.** Суммой векторов  $\vec{a}$  и  $\vec{b}$  называется вектор  $\vec{c}$ , который получается по правилу параллелограмма следующим образом:

1. Совмещают начала векторов  $\vec{a}$  и  $\vec{b}$
2. Достраивают фигуры до параллелограмма
3. Тогда вектор, идущий из начала вектором по диагонали параллелограмма и будет исходным вектором  $\vec{c}$ .

**Примечание.** Если два вектора коллинеарны, то их можно сложить только правилу треугольника.

**Определение 13.** Произведение вектора  $\vec{a}$  на число  $\lambda$  называется вектор  $\vec{c}$ , который будет коллинеарен вектору  $\vec{a}$ , длина которого будет или меньше в  $|\lambda|$  раз и будет сонаправлен, если  $\lambda > 0$ , и противоположен, если  $\lambda < 0$ .

## 1.1 Свойства векторов

1.  $\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$
2.  $\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$
3.  $(\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c} = \vec{a} + (\vec{b} + \vec{c})$
4.  $\forall \vec{a} \exists \vec{0} \quad \vec{a} + \vec{0} = \vec{a}$
5.  $\forall \vec{a} \exists \vec{b} \quad \vec{a} + \vec{b} = \vec{0} \implies -\vec{b} = \vec{a}$
6.  $\lambda(\vec{a} + \vec{b}) = \lambda\vec{a} + \lambda\vec{b}$
7.  $\lambda(\mu\vec{a}) = (\lambda\mu)\vec{a}$
8.  $(\lambda + \mu)\vec{a} = \lambda\vec{a} + \mu\vec{a}$

**Определение 14.** Разностью векторов  $\vec{a}$  и  $\vec{b}$  называется вектор  $\vec{c}$ , который получается следующим образом:

1. Совмещаем начала векторов  $\vec{a}$  и  $\vec{b}$
2. Вектор, который идёт из конца вектора  $\vec{b}$  в начало вектора  $\vec{a}$  и есть искомым вектор  $\vec{c}$ .

## 1.2 Ортогональная проекция вектора на направление

**Определение 1.** Основание точки  $O_a$  перпендикуляра, опущенного из точки  $A$  на прямую  $L$  называется **ортогональной проекцией точки  $A$  на прямую  $L$** .

**Определение 2.** Пусть имеем вектор  $\overrightarrow{AB}$ . Пусть  $O_a$  - ортогональная проекция начала вектора  $\overrightarrow{AB}$  на прямую  $L$ , а  $O_b$  - это ортогональная проекция конца вектора  $\overrightarrow{AB}$  на прямую  $L$ . Тогда вектор  $\overrightarrow{O_aO_b}$ , соединяющий проекции и лежащий на прямой  $L$ , называется **ортогональной проекцией вектора  $\overrightarrow{AB}$  на прямую  $L$** .

**Определение 3.** **Осью** называется прямая с выбранным на ней направлением.

**Примечание.** Если на прямой  $L$  выбрано направление, то длину  $\overrightarrow{O_aO_b}$  берут со знаком  $+$ , если направление вектора совпадает с выбранным направлением  $L$ , и со знаком  $-$ , если нет.

**Определение 4.** Длину вектора  $\overrightarrow{O_aO_b}$  со знаком, определяющим направление этого вектора, называют **ортогональной проекцией вектора  $\overrightarrow{AB}$  на ось  $\vec{l}$** .

$$\text{пр}_{\vec{l}} \overrightarrow{AB}.$$

**Определение 5.** Ортогональную проекцию вектора на ненулевой вектор  $\vec{l}$  называют **ортогональной проекцией этого вектора на направление вектора  $\vec{l}$** .

**Примечание.** Важно! *Ортогональная проекция вектора на направление - это число!*

### Теорема 1.

Ортогональная проекция вектора  $\vec{a}$  на направление ненулевого вектора  $\vec{l}$  равна произведению длины вектора  $\vec{l}$  на  $\cos \varphi = \cos(\widehat{(\vec{a}, \vec{l})})$

### Теорема 2.

Ортогональная проекция суммы векторов  $\vec{a}$  и  $\vec{b}$  на направление ненулевого вектора  $\vec{l}$  равна сумме ортогональных проекций вектора  $\vec{a}$  и  $\vec{b}$  на направление ненулевого вектора  $\vec{l}$ .

$$\text{пр}_{\vec{l}}(\vec{a} + \vec{b}) = \text{пр}_{\vec{l}}\vec{a} + \text{пр}_{\vec{l}}\vec{b}.$$

### Теорема 3.

Ортогональная проекция вектора произведения  $\vec{a}$  и числа  $\lambda$  на направление ненулевого вектора  $\vec{l}$  равна произведению числа  $\lambda$  на ортогональную проекцию вектора  $\vec{a}$ .

$$\text{пр}_{\vec{l}}\lambda\vec{a} = \lambda \text{пр}_{\vec{l}}\vec{a}.$$

## 1.3 Линейная зависимость и независимость векторов

### Определение 1.

$$\lambda_1 \vec{a}_1 + \lambda_2 \vec{a}_2 + \dots + \lambda_n \vec{a}_n$$

где  $\lambda_i$  — произвольные числа

называется **линейной комбинацией** системы векторов  $\vec{a}$ , а числа  $\lambda$  — коэффициентом линейной комбинации.

### Определение 2.

Если  $\forall \lambda = 0$ , то линейную комбинацию называют **тривиальной**.

Если  $\neg \forall \lambda = 0$ , то линейную комбинацию называют **нетривиальной**.

**Определение 3.** Система векторов называется **линейно-зависимой**, если существует нетривиальная равная нулевому вектору линейной комбинация этих векторов:

$$\begin{aligned} \lambda_1 \vec{a}_1 + \lambda_2 \vec{a}_2 + \dots + \lambda_n \vec{a}_n &= \vec{0} \\ \lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \dots + \lambda_n^2 &\neq 0 \end{aligned}$$

**Определение 4.** Система векторов называется **линейно-независимой**, если существует только тривиальная равная нулевому вектору линейная комбинация.

$$\lambda_1 \vec{a}_1 + \lambda_2 \vec{a}_2 + \dots + \lambda_n \vec{a}_n = \vec{0}$$

### Теорема 1.

Система векторов линейно-зависима тогда и только тогда, когда один из этих векторов можно представить в виде линейной комбинации других векторов.

#### Доказательство.

Пусть система векторов линейно-зависима.

Тогда по определению существует нетривиальная равная нулевому вектору линейная комбинация этих векторов:

$$\begin{aligned} \lambda_1 &\neq 0 \\ \lambda_1 \vec{a}_1 + \lambda_2 \vec{a}_2 + \dots + \lambda_n \vec{a}_n &= \vec{0} \\ \vec{a}_1 &= -\frac{\lambda_2}{\lambda_1} \vec{a}_2 - \frac{\lambda_3}{\lambda_1} \vec{a}_3 - \dots - \frac{\lambda_n}{\lambda_1} \vec{a}_n \end{aligned}$$

Обозначим  $\beta_i = -\frac{\lambda_i}{\lambda_1}$ , где  $i \in N \wedge 2 \leq i \leq n$ .

Получаем:

$$\vec{a}_1 = \beta_2 \vec{a}_2 + \beta_3 \vec{a}_3 + \dots + \beta_n \vec{a}_n$$

Что и требовалось доказать. ■

#### Доказательство.

Пусть один из векторов можно представить в виде линейной комбинации других векторов системы (возьмем  $\vec{a}_1$ . Перенесём слагаемые из правой части в левую:

$$\vec{a}_1 - \lambda_2 \vec{a}_2 - \lambda_3 \vec{a}_3 - \dots - \lambda_n \vec{a}_n = \vec{0}$$

Получили нетривиальную равную нулевому вектору линейную комбинацию векторов. По определению, данная система векторов является *линейно-зависимой*. ■

### 1.3.1 Критерии линейной зависимости 2 и 3 векторов

#### Теорема 2.

Два вектора *линейно-зависимы* тогда и только тогда, когда они *коллинеарны*.

**Доказательство** (Необходимость).

Пусть система векторов  $\vec{a}_1, \vec{a}_2$  линейно-зависима. Тогда по определению  $\exists$  нетривиальная линейная зависимость  $= \vec{0}$  этих векторов. Пусть  $\lambda_1 \neq 0$ , тогда  $\vec{a}_1 = -\frac{\lambda_2}{\lambda_1} \vec{a}_2$ . Обозначим  $\beta = -\frac{\lambda_2}{\lambda_1}$ , тогда  $\vec{a}_1 = \beta \vec{a}_2$ . По определению произведение вектора на число  $\vec{a}_1$  и  $\vec{a}_2$  коллинеарны. ■

**Доказательство** (Достаточность).

Пусть  $\vec{a}_1 \parallel \vec{a}_2$ . Тогда  $\vec{a}_1 = \lambda \vec{a}_2$  (по определению произведения вектора на число). Перенесем все влево:

$$\vec{a}_1 - \lambda \vec{a}_2 = \vec{0}$$

По определению  $\vec{a}_1$  и  $\vec{a}_2$  являются линейной зависимостью. ■

#### Теорема 3.

Три вектора линейной зависимости тогда и только тогда, когда они компланарны.

**Доказательство.**

Пусть  $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3$  - линейная зависимость, тогда по определению существуют:

$$\lambda_1 \vec{a}_1 + \lambda_2 \vec{a}_2 + \lambda_3 \vec{a}_3 = \vec{0}$$

Тогда:  $\lambda_1 \neq 0$

$$\vec{a}_1 = -\frac{\lambda_2}{\lambda_1} \vec{a}_2 - \frac{\lambda_3}{\lambda_1} \vec{a}_3$$

Обозначим  $\beta = -\frac{\lambda_i}{\lambda}$ , где  $i = 2, 3$ .

$$\vec{a}_1 = \beta_2 \vec{a}_2 + \beta_3 \vec{a}_3$$

Совместим начала  $\vec{a}_2$  и  $\vec{a}_3$  и построим  $\beta_2 \vec{a}_2$  и  $\beta_3 \vec{a}_3$ , где  $\beta_2, \beta_3 > 0$ .

Т.к.  $\vec{a}_3$  лежит на диагонали параллелограмма (из правила сложения векторов параллелограммом), получается, что вектора  $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3$  лежат в одной плоскости, что и требовалось доказать. ■

**Доказательство.**

Пусть  $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3$  лежат в одной плоскости (компланарны). Совместим начала векторов, концы векторов обозначим  $A_i$ . Проведём через  $A_1$  прямую, параллельную  $\vec{a}_3$ .

$$\begin{aligned} \overrightarrow{OA_2'} \parallel \overrightarrow{OA_2} &\implies \overrightarrow{OA_2'} = \lambda_2 \overrightarrow{OA_2} \\ \overrightarrow{OA_3'} \parallel \overrightarrow{OA_3} &\implies \overrightarrow{OA_3'} = \lambda_3 \overrightarrow{OA_3} \end{aligned}$$

Тогда согласно правилу параллелограмма сложения векторов:

$$\overrightarrow{OA_1} = \overrightarrow{OA_2'} + \overrightarrow{OA_3'}, \text{ то } \vec{a}_1 = \lambda_2 \vec{a}_2 + \lambda_3 \vec{a}_3$$

■



#### Теорема 4.

Любые 4 вектора линейно зависимы.

### 1.4 Базис

**Определение 1. Базис** - упорядоченный набор векторов.

Введём обозначения:

- $V_1$  - пространство всех *коллинеарных* векторов
- $V_2$  - пространство всех *компланарных* векторов
- $V_3$  - пространство всех *свободных* векторов

#### 1.4.1 Пространство $V_1$

**Определение 2.** Пусть  $\vec{e} \neq \vec{0} \in V_1$ , тогда  $\forall \vec{x} \in V_1$  ( $\vec{x} = \lambda \vec{e}$ , т.к.  $\vec{x} \parallel \vec{e}$ ).

Тогда

$$\vec{x} = \lambda \vec{e}$$

называется **разложением  $\vec{x}$  по базису  $\vec{e}$  в  $V_1$** , а  $\lambda$  — координаты  $\vec{x}$  в этом базисе.

#### 1.4.2 Пространство $V_2$

**Определение 3.** Любая упорядоченная пара неколлинеарных векторов в  $V_2$  является **базисом  $V_2$** .

Пусть в  $V_2$   $\vec{e}_1 \nparallel \vec{e}_2$ , тогда эти вектора можно рассматривать как базис  $V_2$ ,  $\vec{x} \in V_2 \implies \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{x}$  — линейная зависимость.

$$\vec{x} = \lambda_1 \vec{e}_1 + \lambda_2 \vec{e}_2$$

— **разложение вектора  $\vec{x}$  по базису  $\vec{e}_1, \vec{e}_2$** .  $\lambda_1$  и  $\lambda_2$  называются координатами  $\vec{x}$  в этом базисе.

**Определение 4.** Базис в  $V_2$  называется **ортогональным**, если базисные вектора лежат на перпендикулярных прямых.

#### 1.4.3 Пространство $V_3$

**Определение 5.** Любая упорядоченная тройка некопланарных векторов в  $V_3$  называется **базисом в  $V_3$** .

Пусть  $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$  - упорядоченная тройка векторов в  $V_3$ ,  $\vec{x} \in V_3$ . Тогда система векторов линейно зависима (по теореме 4). По теореме 1

$$\vec{x} = \lambda_1 \vec{e}_1 + \lambda_2 \vec{e}_2 + \lambda_3 \vec{e}_3$$

Данное выражение называется **разложением  $\vec{x}$  по базису  $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$  в  $V_3$** , а  $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$  называются координатами  $\vec{x}$  в базисе.

Базис в  $V_3$ , если базисные вектора лежат на взаимно перпендикулярных прямых.

**Определение 6. Ортонормированный базис** — ортогональный базис из  $\vec{e}$  векторов.

**Теорема 1** (*О разложении вектора по базису*).

Любой вектор можно разложить по базису и при этом единственным образом.

**Доказательство.**

Пусть в пространстве  $V_3$  зафиксирован базис  $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ . Возьмём вектор  $\vec{x}$ . Тогда система векторов  $\vec{x}, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$  — линейно зависима, если вектор  $\vec{x}$  можно представить в виде линейной комбинации векторов  $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ :

$$\vec{x} = \lambda_1 \vec{e}_1 + \lambda_2 \vec{e}_2 + \lambda_3 \vec{e}_3 \quad (1)$$

Предположим, что разложение вектора  $\vec{x}$  — не единственное.

$$\vec{x} = \rho \vec{e}_1 + \rho \vec{e}_2 + \rho \vec{e}_3 \quad (2)$$

Вычтем из (1) уравнение (2). Тогда:

$$\vec{0} = (\lambda_1 - \rho) \vec{e}_1 + (\lambda_2 - \rho) \vec{e}_2 + (\lambda_3 - \rho) \vec{e}_3 \quad (3)$$

Поскольку базисные вектора  $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$  — линейно независимы, то выражение (3) представляет собой тривиальную линейную комбинацию векторов  $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ , равную нулю. Тогда получаем:

$$\begin{aligned} \lambda_1 - \rho &= 0 & \lambda_1 &= \rho \\ \lambda_2 - \rho &= 0 & \lambda_2 &= \rho \\ \lambda_3 - \rho &= 0 & \lambda_3 &= \rho \end{aligned} \implies$$

Коэффициенты равны, что и требовалось доказать. ■

**Пример.** Пусть в пространстве  $V_2$  зафиксирован базис  $\vec{i}, \vec{j}$ .

$$\begin{aligned} |\vec{i}| &= 1, \quad |\vec{j}| = 1 \\ \vec{a} &= \vec{OA} + \vec{OB} \\ \vec{OA} \parallel \vec{i} &\implies \vec{OA} = x_a \vec{i} \\ \vec{OB} \parallel \vec{j} &\implies \vec{OB} = y_a \vec{j} \\ \implies \vec{a} &= x_a \vec{i} + y_a \vec{j} \end{aligned}$$

**Пример.** Пусть в пространстве  $V_3$  зафиксирован ортонормированный базис  $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ . Тогда:

$$\begin{aligned} \vec{a} &= \{x_a, y_a, z_a\} \\ \vec{a} &= x_a \vec{i} + y_a \vec{j} + z_a \vec{k} \end{aligned}$$

Разложить  $\vec{a}$  по векторам  $\vec{b}, \vec{c}$ .

Дано:

$$\vec{a} = 3\vec{i} - 4\vec{j}$$

$$\vec{b} = 2\vec{i} - \vec{j}$$

$$\vec{c} = -\vec{i} - 5\vec{j}$$

Решение:

$$\vec{a} = \alpha\vec{b} + \beta\vec{c}$$

$$3\vec{i} - 4\vec{j} = \alpha(2\vec{i} + \vec{j}) + \beta(-\vec{i} + 5\vec{j})$$

$$3\vec{i} - 4\vec{j} = (2\alpha - \beta)\vec{i} + (\alpha + 5\beta)\vec{j} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} 3 = 2\alpha - \beta \\ -4 = \alpha + 5\beta \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \beta = -1 \\ \alpha = 1 \end{cases}$$

## 2 Координаты вектора. Действия с векторами

Пусть:

$$\vec{a} = \{x_a, y_a, z_a\}$$

$$\vec{b} = \{x_b, y_b, z_b\}$$

**Примечание.** Два вектора равны, если равны соответствующие координаты.

Тогда:

$$\vec{c} = \vec{a} + \vec{b} = \{x_a + x_b, y_a + y_b, z_a + z_b\}$$

$$k\vec{a} = \{kx_a, ky_a, kz_a\}$$

**Замечание.**  $k\vec{a} = k \cdot \{\dots\}$  - так записывать нельзя!

Если  $\vec{a} \parallel \vec{b}$ , то  $\vec{b} = \lambda \vec{a}$ , где  $\lambda = \text{const}$

$$\begin{cases} x_b = \lambda x_a \\ y_b = \lambda y_a \\ z_b = \lambda z_a \end{cases} \implies \frac{x_a}{x_b} = \frac{y_a}{y_b} = \frac{z_a}{z_b}$$

Расчёт косинуса угла по разложению в базисе

**Пример.** В  $V_2$ :

$$\vec{a} = \{x_a, y_a, z_a\}$$

$$|\vec{a}| = \sqrt{x_a^2 + y_a^2 + z_a^2}$$

$$\cos \alpha = \frac{x_a}{|\vec{a}|} \quad \cos \beta = \frac{y_a}{|\vec{a}|}$$

**Пример.** Для  $V_3$ :

$$\cos \alpha = \frac{x_a}{|\vec{a}|} \quad x_a = |\vec{a}| \cos \alpha$$

$$\cos \beta = \frac{y_a}{|\vec{a}|} \quad y_a = |\vec{a}| \cos \beta$$

$$\cos \gamma = \frac{z_a}{|\vec{a}|} \quad z_a = |\vec{a}| \cos \gamma$$

Возведём в квадрат:

$$\begin{aligned} |\vec{a}|^2 \cos^2 \alpha + |\vec{a}|^2 \cos^2 \beta + |\vec{a}|^2 \cos^2 \gamma &= x_a^2 + y_a^2 + z_a^2 = |\vec{a}|^2 \\ \implies \cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma &= 1 \end{aligned}$$

В результате получаем орт вектора  $\vec{a}$ :

$$\vec{e}_a = \{\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma\}$$

## 2.1 Скалярное произведение векторов

**Определение 1.** Скалярным произведением векторов  $\vec{a}, \vec{b}$  называется *число* равное произведению длин этих векторов на косинус угла между ними.

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos \phi$$

### 2.1.1 Свойства скалярного произведения

1. Коммутативность

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a}$$

2.

$$\begin{aligned} \vec{a}^2 &\geq 0 \\ \vec{a}^2 = 0 &\iff \vec{a} = \vec{0} \\ \vec{a}^2 &= |\vec{a}|^2 \end{aligned}$$

3. Дистрибутивность

$$(\vec{a} + \vec{b}) \cdot \vec{c} = \vec{a} \cdot \vec{c} + \vec{b} \cdot \vec{c}$$

4. Ассоциативность

$$(\lambda \vec{a}) \cdot \vec{b} = \lambda (\vec{a} \cdot \vec{b})$$

### 2.1.2 Формула для вычисления скалярного произведения двух векторов, заданных ортонормированным базисом

$$\begin{aligned} \vec{a} \cdot \vec{b} &= |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cos \varphi \\ \vec{a} \cdot \vec{b} &> 0, \text{ если } \varphi \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right) \\ \vec{a} \cdot \vec{b} &< 0, \text{ если } \varphi \in \left(\frac{\pi}{2}; \pi\right) \\ \vec{a} \cdot \vec{b} &= 0, \text{ если } \varphi = \frac{\pi}{2} \end{aligned}$$

Пусть в пространстве  $V_3$  с заданным ортонормированным базисом  $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$  заданы вектора  $\vec{a}, \vec{b}$ :

$$\begin{aligned} \vec{a} &= x_a \vec{i} + y_a \vec{j} + z_a \vec{k} \\ \vec{b} &= x_b \vec{i} + y_b \vec{j} + z_b \vec{k} \end{aligned}$$

Тогда:

$$\begin{aligned} \vec{i}^2 = \vec{i} \cdot \vec{i} = |\vec{i}|^2 &= 1 & \vec{i} \perp \vec{j} &\implies \vec{i} \cdot \vec{j} = 0 \\ \vec{j}^2 = \vec{j} \cdot \vec{j} = |\vec{j}|^2 &= 1 & \vec{i} \perp \vec{k} &\implies \vec{i} \cdot \vec{k} = 0 \\ \vec{k}^2 = \vec{k} \cdot \vec{k} = |\vec{k}|^2 &= 1 & \vec{j} \perp \vec{k} &\implies \vec{j} \cdot \vec{k} = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \vec{a} \cdot \vec{b} &= (x_a \vec{i} + y_a \vec{j} + z_a \vec{k}) \cdot (x_b \vec{i} + y_b \vec{j} + z_b \vec{k}) = x_a x_b \vec{i}^2 + x_a y_b (\vec{i} \cdot \vec{j}) + x_a z_b (\vec{i} \cdot \vec{k}) + \\ &+ y_a x_b (\vec{j} \cdot \vec{i}) + y_a y_b \vec{j}^2 + y_a z_b (\vec{j} \cdot \vec{k}) + z_a x_b (\vec{k} \cdot \vec{i}) + z_a y_b (\vec{k} \cdot \vec{j}) + z_a z_b \vec{k}^2 = \\ &= x_a x_b + y_a y_b + z_a z_b \end{aligned}$$

$$\boxed{\vec{a} \cdot \vec{b} = x_a x_b + y_a y_b + z_a z_b}$$

### 2.1.3 Формула косинуса между векторами, заданными ортонормированным базисом

Т.к.  $\vec{a}\vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}| \cos \varphi$ , то:

$$\begin{aligned} \cos \varphi &= \frac{\vec{a}\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|} \\ &= \frac{x_a x_b + y_a y_b + z_a z_b}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|} \\ &= \frac{x_a x_b + y_a y_b + z_a z_b}{\sqrt{x_a^2 + y_a^2 + z_a^2} \cdot \sqrt{x_b^2 + y_b^2 + z_b^2}} \\ \cos \varphi &= \frac{x_a x_b + y_a y_b + z_a z_b}{\sqrt{x_a^2 + y_a^2 + z_a^2} \cdot \sqrt{x_b^2 + y_b^2 + z_b^2}} \end{aligned}$$

## 2.2 Векторное произведение векторов

**Определение 2.** Тройка векторов называется **правой**, если кратчайший поворот от вектора  $\vec{a}$  к  $\vec{b}$  осуществляется *против часовой стрелки* (смотря из конца вектора  $\vec{c}$ ).

**Определение 3.** Тройка векторов называется **левой**, если кратчайший поворот от вектора  $\vec{a}$  к  $\vec{b}$  осуществляется *по часовой стрелки* (смотря из конца вектора  $\vec{c}$ ).

**Определение 4.** Векторным произведением векторов  $\vec{a}$  и  $\vec{b}$  называется вектор  $\vec{c}$ , который удовлетворяет следующему условию:

1.  $\vec{c}$  ортогонален векторам  $\vec{a}$  и  $\vec{b}$  (перпендикулярен плоскости, в которой лежат вектора  $\vec{a}$  и  $\vec{b}$ );
2.  $\vec{c} = |\vec{a}||\vec{b}| \cdot \sin \phi$
3. Вектора  $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$  образуют *правую* тройку векторов.

Обозначение:

$$\vec{a} \times \vec{b} \text{ или } [\vec{a}, \vec{b}]$$

### 2.2.1 Свойства векторного произведения векторов

1. Антикоммутативность

$$\vec{a} \times \vec{b} = -\vec{b} \times \vec{a}$$

2. Дистрибутивность

$$(\vec{a}_1 + \vec{a}_2) \times \vec{b} = \vec{a}_1 \times \vec{b} + \vec{a}_2 \times \vec{b}$$

3. Ассоциативность

$$(\lambda \vec{a}) \times \vec{b} = \lambda (\vec{a} \times \vec{b})$$

### 2.2.2 Геометрическое приложение векторов.

Пусть  $\vec{a} = \{x_a, y_a, z_a\}$  и  $\vec{b} = \{x_b, y_b, z_b\}$ . Совместим начала этих векторов и построим до параллелограмма. Тогда площадь этого параллелограмма будет равна модулю векторного произведения этих векторов.

Пример.

$$A(1, 2, -1), \quad B(-1, 1, 0), \quad C(0, -1, 2)$$

$$\overrightarrow{AB} = \{-2, -1, 1\}$$

$$\overrightarrow{AC} = \{-1, -3, 3\}$$

$$\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -2 & -1 & 1 \\ -1 & -3 & 3 \end{vmatrix} =$$

$$\vec{i} \cdot (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ -3 & 3 \end{vmatrix} + \vec{j} \cdot (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} -2 & 1 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} + \vec{k} \cdot (-1)^{1+3} \begin{vmatrix} -2 & -1 \\ -1 & -3 \end{vmatrix} =$$

$$0\vec{i} + 5\vec{j} + 5\vec{k}$$

$$\vec{c} = \{0, 5, 5\} \implies |\vec{c}| = \sqrt{50} = 5\sqrt{2}$$

$$S_{ABC} = \frac{1}{2} S_{ABCD} = \frac{1}{2} \cdot 5\sqrt{2} = \frac{5}{\sqrt{2}}$$

## 2.3 Смешанное произведение

**Определение 5.** Смешанное произведение векторов  $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$  называется скалярное произведение первых двух векторов  $\vec{a}$  и  $\vec{b}$  на третий вектор  $\vec{c}$ .

$$\vec{a}\vec{b}\vec{c} = (\vec{a} \cdot \vec{b}) \times \vec{c}$$

### 2.3.1 Свойства смешанных произведений

#### 1. Свойство перестановки (кососимметричности)

$$\vec{a}\vec{b}\vec{c} = \vec{c}\vec{a}\vec{b} = \vec{b}\vec{c}\vec{a} = -\vec{b}\vec{a}\vec{c} = -\vec{c}\vec{b}\vec{a} = -\vec{a}\vec{c}\vec{b}$$

2. Три вектора компланарны тогда и только тогда, когда их смешанное произведение равно 0.

$$\vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \text{ - компланарны } \iff \vec{a}\vec{b}\vec{c} = 0$$

**Примечание.**

$\vec{a}\vec{b}\vec{c} > 0$ , если  $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$  - правая тройка векторов.

$\vec{a}\vec{b}\vec{c} < 0$ , если  $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$  - левая тройка векторов.

#### 3. Свойство ассоциативности (работает для любого положения $\lambda$ )

$$(\lambda\vec{a})\vec{b}\vec{c} = \lambda(\vec{a}\vec{b}\vec{c})$$

**Доказательство.**

$$(\lambda\vec{a})\vec{b}\vec{c} = (\lambda\vec{a})\vec{d} = \lambda(\vec{a}\vec{d}) = \lambda(\vec{a}(\vec{b}\vec{c})) = \lambda(\vec{a}\vec{b}\vec{c})$$



4. **Свойство коммутативности** (работает не только для  $\vec{a}$ , но и векторов  $\vec{b}$  и  $\vec{c}$ )

$$(\vec{a}_1 + \vec{a}_2)\vec{b}\vec{c} = \vec{a}_1\vec{b}\vec{c} + \vec{a}_2\vec{b}\vec{c}$$

**Доказательство.**

$$(\vec{a}_1 + \vec{a}_2)\vec{b}\vec{c} = (\vec{a}_1 + \vec{a}_2)\vec{d} = \vec{a}_1\vec{d} + \vec{a}_2\vec{d} = \vec{a}_1(\vec{b}\vec{c}) + \vec{a}_2(\vec{b}\vec{c}) = \vec{a}_1\vec{b}\vec{c} + \vec{a}_2\vec{b}\vec{c}$$

■

### 2.3.2 Формула смешанного произведения трёх векторов в правом ортонормированном базисе

Пусть  $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$  заданы координатами:

$$\vec{a} = \{x_a, y_a, z_a\}$$

$$\vec{b} = \{x_b, y_b, z_b\}$$

$$\vec{c} = \{x_c, y_c, z_c\}$$

Найдём смешанное произведение:

$$\begin{aligned} \vec{a}\vec{b}\vec{c} &= (\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c} = \left\{ \begin{vmatrix} y_a & z_a \\ y_b & z_b \end{vmatrix}, -\begin{vmatrix} x_a & z_a \\ x_b & z_b \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} x_a & y_a \\ x_b & y_b \end{vmatrix} \right\} \cdot \vec{c} = \\ &= \begin{vmatrix} y_a & z_a \\ y_b & z_b \end{vmatrix} \cdot x_c - \begin{vmatrix} x_a & z_a \\ x_b & z_b \end{vmatrix} \cdot y_c + \begin{vmatrix} x_a & y_a \\ x_b & y_b \end{vmatrix} \cdot z_c = \\ &= \begin{vmatrix} x_a & y_a & z_a \\ x_b & y_b & z_b \\ x_c & y_c & z_c \end{vmatrix} \end{aligned}$$

Т.е.

$$\vec{a}\vec{b}\vec{c} = \begin{vmatrix} x_a & y_a & z_a \\ x_b & y_b & z_b \\ x_c & y_c & z_c \end{vmatrix}$$

### 2.3.3 Геометрическое приложение смешанного произведения

Пусть  $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ . Совместим начала этих векторов и построим до параллелепипеда. Тогда  $V_{\text{paral}} = |\vec{a}\vec{b}\vec{c}|$ .

**Примечание.**

$$V_{\text{pyramid}} = \frac{1}{6} V_{\text{paral}} = \frac{1}{6} \cdot |\vec{a}\vec{b}\vec{c}|$$



## 3 Прямая на плоскости

### 3.1 Способы задания прямой

#### 3.1.1 Каноническое уравнение

Пусть прямая  $l$  проходит через точку  $M_0(x_0, y_0)$  и задана направляющим вектором  $\vec{S} = \{m, n\}$  (т.е. вектор параллелен прямой).

Выберем на прямой  $l$  произвольную точку  $M$ . Составим  $\overrightarrow{M_0M} = \{x - x_0, y - y_0, z - z_0\}$ .

$$\overrightarrow{M_0M} \parallel \vec{s} \implies \boxed{\frac{x - x_0}{m} = \frac{y - y_0}{n}}$$

#### 3.1.2 Параметрическое уравнение

Пусть прямая  $l$  задана каноническим уравнением:

$$\frac{x - x_0}{m} = \frac{y - y_0}{n}$$

Обозначим коэффициент пропорциональности через  $t$ . Тогда:

$$\begin{aligned} \frac{x - x_0}{m} = t \\ \frac{y - y_0}{n} = t \end{aligned} \implies \boxed{\begin{cases} x = x_0 + mt \\ y = y_0 + nt \end{cases}}$$

#### 3.1.3 Через две точки

Пусть прямая  $l$  проходит через точки  $M_0(x_0, y_0)$  и  $M(x, y)$ . Выберем на прямой  $l$  произвольную точку  $M_1(x_1, y_1)$ . Составим два вектора  $\overrightarrow{M_0M}$ ,  $\overrightarrow{M_0M_1}$ .

$$\begin{aligned} \overrightarrow{M_0M} &= \{x - x_0, y - y_0\} \\ \overrightarrow{M_0M_1} &= \{x_1 - x_0, y_1 - y_0\} \end{aligned}$$

Т.к. вектора коллинеарны, то и соответствующие координаты пропорциональны:

$$\boxed{\frac{x - x_0}{x_1 - x_0} = \frac{y - y_0}{y_1 - y_0}}$$

#### 3.1.4 В отрезках

Пусть прямая  $l$  отсекает от координатного угла отрезки  $a$  и  $b$ . Тогда прямая  $l$  проходит через точки  $A(0, a)$  и  $B(b, 0)$ .

$$\frac{x - a}{0 - a} = \frac{y - 0}{b - 0} \implies \boxed{\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1}$$

### 3.1.5 С угловым коэффициентом

Пусть прямая  $l$  проходит через точку  $M_0(x_0, y_0)$ . Выберем произвольную точку  $M(x, y)$ . Тогда из прямоугольного треугольника  $\triangle M_0AM$ :

$$\triangle M_0AM : \operatorname{tg} \varphi = \frac{y - y_0}{x - x_0}$$

$$\text{Пусть } \operatorname{tg} \varphi = k$$

$$k = \frac{y - y_0}{x - x_0}$$

$$y - y_0 = kx - x_0$$

$$y = kx - kx_0 + y_0$$

$$-kx_0 + y_0 = \operatorname{const} = b$$

$$\boxed{y = kx + b}$$

### 3.1.6 Общего вида

Пусть прямая  $l$  проходит через точку  $M_0(x_0, y_0)$ , а также дан перпендикулярный ей вектор  $\vec{n} = \{A, B\}$ . Выберем произвольную точку  $M(x, y)$ . Тогда:

$$\vec{n} = \{A, B\} \quad \overrightarrow{M_0M} = \{x - x_0, y - y_0\}$$

$$\vec{n} \perp \overrightarrow{M_0M} \implies \vec{n} \cdot \overrightarrow{M_0M} = 0$$

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) = 0$$

$$Ax + By + (-Ax_0 - By_0) = 0$$

Обозначим:  $-Ax_0 - By_0 = \operatorname{const} = C$ . Получаем:

$$\boxed{Ax + By + C = 0}$$

## 3.2 Угол между прямыми

### 3.2.1 Прямые, заданные каноническими уравнениями

$$l_1 : \frac{x - 0}{m_1} = \frac{y - y_0}{n_1}$$

$$l_2 : \frac{x - \tilde{x}_0}{m_2} = \frac{y - \tilde{y}_0}{n_2}$$

Угол между прямыми  $l_1, l_2$  соответствует углу между направляющими векторами  $\vec{S}_1, \vec{S}_2$  для соответствующих прямых.

$$\widehat{(l_1, l_2)} = \widehat{(\vec{S}_1, \vec{S}_2)} = \varphi$$

$$\cos \varphi = \frac{|\vec{S}_1 \cdot \vec{S}_2|}{|\vec{S}_1| \cdot |\vec{S}_2|}$$

$$\boxed{\cos \varphi = \frac{|m_1 \cdot m_2 + n_1 \cdot n_2|}{\sqrt{m_1^2 + n_1^2} \cdot \sqrt{m_2^2 + n_2^2}}}$$

### 3.2.2 Прямые, заданные общими уравнениями

$$l_1 : A_1x + B_1y + C_1 = 0$$

$$l_2 : A_2x + B_2y + C_2 = 0$$

$$\vec{n}_1 = \{A_1, B_1\}$$

$$\vec{n}_2 = \{A_2, B_2\}$$

Угол между прямыми  $l_1, l_2$  соответствует углу между нормальными  $\vec{n}_1, \vec{n}_2$  к соответствующим прямым.

$$\widehat{(l_1, l_2)} = \widehat{(\vec{n}_1, \vec{n}_2)} = \varphi$$

$$\cos \varphi = \frac{\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2}{|\vec{n}_1| \cdot |\vec{n}_2|}$$

$$\cos \varphi = \frac{|A_1A_2 + B_1B_2|}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2} \cdot \sqrt{A_2^2 + B_2^2}}$$

### 3.2.3 Прямые, заданные угловыми коэффициентами

$$\begin{cases} l_1 : y = k_1x + b_1, & k_1 = \operatorname{tg} \varphi_1 \\ l_2 : y = k_2x + b_2, & k_2 = \operatorname{tg} \varphi_2 \end{cases} \implies \varphi = \varphi_2 - \varphi_1$$

$$\operatorname{tg} \varphi = \operatorname{tg} \varphi_2 - \operatorname{tg} \varphi_1 = \frac{\operatorname{tg} \varphi_2 - \operatorname{tg} \varphi_1}{1 + \operatorname{tg} \varphi_1 \operatorname{tg} \varphi_2} = \frac{k_2 - k_1}{1 + k_1k_2} \implies$$

$$\implies \varphi = \operatorname{arctg} \frac{k_2 - k_1}{1 + k_1k_2}$$

## 3.3 Условие параллельности прямых

### 3.3.1 Прямые, заданные каноническими уравнениями

$$\text{Если } l_1 \parallel l_2, \text{ то } \vec{s}_1 \parallel \vec{s}_2 \implies \boxed{\frac{m_1}{m_2} = \frac{n_1}{n_2}}$$

### 3.3.2 Прямые, заданные общими уравнениями

$$\text{Если } l_1 \parallel l_2, \text{ то } \vec{n}_1 \parallel \vec{n}_2 \implies \boxed{\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2}}$$

### 3.3.3 Прямые, заданные угловыми коэффициентами

$$\text{Если } l_1 \parallel l_2, \text{ то } \varphi = 0 \implies \operatorname{tg} \varphi = 0 \implies k_2 - k_1 = 0 \implies \boxed{k_2 = k_1}$$

## 3.4 Условие перпендикулярности прямых

### 3.4.1 Прямые, заданные каноническими уравнениями

$$\text{Если } l_1 \perp l_2, \text{ то } \vec{S}_1 \perp \vec{S}_2 \implies \vec{S}_1 \cdot \vec{S}_2 = 0 \implies \boxed{m_1m_2 + n_1n_2 = 0}$$

### 3.4.2 Прямые, заданные общими уравнениями

Если  $l_1 \perp l_2$ , то  $\vec{n}_1 \perp \vec{n}_2 \Rightarrow \boxed{\frac{A_1}{A_2} + \frac{B_1}{B_2} = 0}$

### 3.4.3 Прямые, заданные угловыми коэффициентами

Если  $l_1 \perp l_2$ , то:

$$\varphi = \frac{\pi}{2} \Rightarrow \nexists \operatorname{tg} \varphi \Rightarrow 1 + k_1 k_2 = 0 \Rightarrow k_1 k_2 = -1 \Rightarrow \boxed{k_2 = -\frac{1}{k_1}}$$

### 3.5 Расстояние от точки до прямой

Пусть прямая  $l$  задана общим уравнением:

$$l: Ax + By + C = 0 \implies \vec{n} = \{A, B\}$$

Требуется найти расстояние от точки  $M_0(x_0, y_0)$  до прямой  $l$ .

Возьмём на прямой  $l$  произвольную точку  $M$ . Тогда расстояние от точки  $M_0$  будет равно проекции вектора  $\overrightarrow{MM_0}$  на направление вектора нормали прямой  $l$ .

$$\rho(M_0, l) = \operatorname{пр}_{\vec{n}} \overrightarrow{MM_0}$$
$$\overrightarrow{MM_0} = \{x_0 - x, y_0 - y\}$$

$$\begin{aligned} \vec{n} \cdot \overrightarrow{MM_0} &= |\vec{n}| \cdot |\overrightarrow{MM_0}| \cdot \cos \varphi = |\vec{n}| \cdot \operatorname{пр}_{\vec{n}} \overrightarrow{MM_0} \Rightarrow \\ \Rightarrow \operatorname{пр}_{\vec{n}} \overrightarrow{MM_0} &= \frac{|\vec{n} \cdot \overrightarrow{MM_0}|}{|\vec{n}|} = \frac{A(x_0 - x) + B(y_0 - y)}{\sqrt{A^2 + B^2}} = \\ &= \frac{Ax_0 + By_0 + (-Ax - By)}{\sqrt{A^2 + B^2}} \end{aligned}$$

Из общего уравнения прямой  $l$ :

$$-Ax - By = C$$

$$\boxed{\rho(M_0, l) = \frac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}}$$

**Пример.** Найти расстояние от точки  $M_0(1, -2)$  до прямой  $l: y = 3x - 1$ .

$3x - y - 1 = 0$  - общее уравнение прямой

$$Ax + By + C = 0$$

$$\rho(M_0, l) = \frac{|3 \cdot (-1) + (-1) \cdot (-2) - 1|}{\sqrt{3^2 + (-1)^2}} = \frac{4}{\sqrt{10}}$$

## 4 Уравнение плоскости

### 4.1 Способы задания плоскости

#### 4.1.1 Через три точки

Пусть заданы точки  $M_1(x_1, y_1, z_1)$ ,  $M_2(x_2, y_2, z_2)$ ,  $M_3(x_3, y_3, z_3)$ , которые принадлежат плоскости  $\alpha$ .

$$M_1(x_1, y_1, z_1) \in \alpha$$

$$M_2(x_2, y_2, z_2) \in \alpha$$

$$M_3(x_3, y_3, z_3) \in \alpha$$

Выберем точку на плоскости  $\alpha$  точку  $M(x, y, z)$ .

Составим вектора:

$$\overrightarrow{M_1M} = \{x - x_1, y - y_1, z - z_1\}$$

$$\overrightarrow{M_1M_2} = \{x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1\}$$

$$\overrightarrow{M_1M_3} = \{x_3 - x_1, y_3 - y_1, z_3 - z_1\}$$

$\overrightarrow{M_1M}$ ,  $\overrightarrow{M_1M_2}$ ,  $\overrightarrow{M_1M_3}$  - компланарны, а значит:

$$\overrightarrow{M_1M} \cdot \overrightarrow{M_1M_2} \cdot \overrightarrow{M_1M_3} = 0$$

Следовательно:

$$\begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \end{vmatrix} = 0$$

#### 4.1.2 Через две точки с направляющим вектором

Пусть даны:

$$M_1(x_1, y_1, z_1) \in \alpha$$

$$M_2(x_2, y_2, z_2) \in \alpha$$

$$\vec{S} = \{m, n, p\} \in \beta$$

$$\alpha \parallel \beta$$

Выберем на плоскости  $\alpha$  произвольную точку  $M(x, y, z) \in \alpha$

Составим вектора:

$$\overrightarrow{M_1M} = \{x - x_1, y - y_1, z - z_1\}$$

$$\overrightarrow{M_1M_2} = \{x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1\}$$

Тогда вектора  $\overrightarrow{M_1M}$ ,  $\overrightarrow{M_1M_2}$ ,  $\vec{S}$  - компланарны, а следовательно:

$$\overrightarrow{M_1M} \cdot \overrightarrow{M_1M_2} \cdot \vec{S} = 0 \implies \begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ m & n & p \end{vmatrix} = 0$$

### 4.1.3 Проходящей через точку с двумя направляющими векторами

Пусть даны:

$$\begin{aligned} M_1(x_1, y_1, z_1) &\in \alpha \\ \vec{S}_1 = \{m_1, n_1, p_1\} &\in \beta \\ \vec{S}_2 = \{m_2, n_2, p_2\} &\in \beta \\ \alpha &\parallel \beta \end{aligned}$$

Выберем на плоскости  $\alpha$  произвольную точку  $M(x, y, z) \in \alpha$

Составим вектор  $\overrightarrow{M_1M} = \{x - x_1, y - y_1, z - z_1\}$

Тогда вектора  $\overrightarrow{M_1M}, \vec{S}_1, \vec{S}_2$  - компланарны, а следовательно:

$$\overrightarrow{M_1M} \cdot \vec{S}_1 \cdot \vec{S}_2 = 0 \implies \begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ m_1 & n_1 & p_1 \\ m_2 & n_2 & p_2 \end{vmatrix} = 0$$

### 4.1.4 Уравнение плоскости в отрезках

Пусть плоскость  $\alpha$  отсекает от координатного угла отрезки  $a, b, c$  на осях  $x, y, z$  соответственно. Обозначим точки пересечения  $A, B, C$ . Тогда:

$$A(a, 0, 0) \quad B(0, b, 0) \quad C(0, 0, c)$$

Выберем на плоскости  $\alpha$  произвольную точку  $M(x, y, z) \in \alpha$

Составим вектора:

$$\begin{aligned} \overrightarrow{AM} &= \{x - a, y, z\} \\ \overrightarrow{AB} &= \{-a, b, 0\} \\ \overrightarrow{AC} &= \{-a, 0, c\} \end{aligned}$$

Тогда вектора  $\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}$  - компланарны, а следовательно:

$$\begin{aligned} \overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 0 &\implies \begin{vmatrix} x - a & y & z \\ -a & b & 0 \\ -a & 0 & c \end{vmatrix} = 0 \implies \\ \implies (x - a) \cdot (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} b & 0 \\ 0 & c \end{vmatrix} + y \cdot (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} -a & 0 \\ -a & c \end{vmatrix} + z \cdot (-1)^{1+3} \begin{vmatrix} -a & b \\ -a & 0 \end{vmatrix} = 0 \implies \\ (x - a)bc - y(-ac) + zab = 0 & \\ xbc + yac + zab = abc & \\ \boxed{\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1} & \end{aligned}$$

### 4.1.5 Общее уравнение

Пусть даны:

$$M_0(x_0, y_0, z_0) \in \alpha$$

$$\vec{n} = \{A, B, C\} \text{ - вектор нормали}$$

Выберем на плоскости  $\alpha$  произвольную точку  $M(x, y, z) \in \alpha$

Составим вектор  $\overrightarrow{M_0M} = \{x - x_0, y - y_0, z - z_0\}$

Тогда:

$$\begin{aligned} \vec{n} \perp \overrightarrow{M_0M} &\Rightarrow \vec{n} \cdot \overrightarrow{M_0M} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow Ax + By + Cz + (-Ax_0 - By_0 - Cz_0) = D \Leftrightarrow \\ &\boxed{Ax + By + Cz + D = 0} \end{aligned}$$

## 4.2 Угол между плоскостями

Пусть заданы плоскости общими уравнениями:

$$\alpha_1 : A_1x + B_1y + Cz_1 + D_1 = 0 \Rightarrow \vec{n}_1 = \{A_1, B_1, C_1\}$$

$$\alpha_2 : A_2x + B_2y + Cz_2 + D_2 = 0 \Rightarrow \vec{n}_2 = \{A_2, B_2, C_2\}$$

Угол между плоскостями  $\alpha_1, \alpha_2$  равен углу между нормальными  $n_1, n_2$  к этим плоскостям.

Тогда можно найти:

$$\cos \varphi = \frac{\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2}{|\vec{n}_1| \cdot |\vec{n}_2|} = \frac{A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2} \cdot \sqrt{A_2^2 + B_2^2 + C_2^2}}$$

### 4.2.1 Условие перпендикулярности

Если  $\alpha_1 \perp \alpha_2$ , то  $\vec{n}_1 \perp \vec{n}_2 \Rightarrow \vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2 = 0 \Rightarrow \boxed{A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2 = 0}$

### 4.2.2 Условие параллельности

Если  $\alpha_1 \parallel \alpha_2$ , то  $\vec{n}_1 \parallel \vec{n}_2 \Rightarrow \boxed{\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2}}$

**Примечание.** Если  $\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2} = \frac{D_1}{D_2}$ , то плоскости **совпадают**.

**Примечание.** Если  $\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2} \neq \frac{D_1}{D_2}$ , то плоскости **не совпадают**.

### 4.3 Расстояние от точки до плоскости

Пусть плоскость  $\alpha$  задана общим уравнением:

$$\alpha : Ax + By + Cz + D = 0, \text{ где } \vec{n} = \{A, B, C\}$$

Пусть задана некоторая точка  $M_0(x_0, y_0, z_0)$ . Возьмём некоторую точку  $M(x, y, z) \in \alpha$ . Составим вектор  $\overrightarrow{M_0M} = \{x_0 - x, y_0 - y, z_0 - z\}$ . Тогда модуль проекции  $\overrightarrow{MM_0}$  на вектор на направление вектора нормали и есть искомое расстояние. Найдём:

$$\overrightarrow{M_0M} \cdot \vec{n} = |\overrightarrow{M_0M}| \underbrace{|\vec{n}| \cdot \cos \varphi}_{\text{пр}_{\vec{n}} \overrightarrow{M_0M}}$$

$$\begin{aligned} \vec{n} \cdot \overrightarrow{M_0M} &= A(x_0 - x) + B(y_0 - y) + C(z_0 - z) \\ &= Ax_0 + By_0 + Cz_0 + (-Ax - By - Cz) \\ &= Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D \end{aligned}$$

$$|\vec{n}| = \sqrt{A^2 + B^2 + C^2}$$

$$\boxed{\rho(M_0, \alpha) = |\text{пр}_{\vec{n}} \overrightarrow{M_0M}| = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}}$$



## 5 Прямая в пространстве

### 5.1 Способы задания прямой в пространстве

#### 5.1.1 Каноническое уравнение прямой

Пусть прямая  $l$  проходит через точку  $M_0(x_0, y_0, z_0)$  и имеет направляющий вектор  $\vec{S} = \{m, n, p\}$ . Возьмём на прямой  $l$  произвольную точку  $M(x, y, z)$ . Составим вектор:

$$\overrightarrow{M_0M} = \{x - x_0, y - y_0, z - z_0\}$$

Отсюда:

$$\overrightarrow{M_0M} \parallel \vec{S} \implies \boxed{\frac{x - x_0}{m} = \frac{y - y_0}{n} = \frac{z - z_0}{p}}$$

#### 5.1.2 Параметрическое уравнение

Пусть прямая  $l$  задана каноническим уравнением:

$$l : \frac{x - x_0}{m} = \frac{y - y_0}{n} = \frac{z - z_0}{p} = (t)$$

Отсюда:

$$\begin{cases} \frac{x - x_0}{m} = t \\ \frac{y - y_0}{n} = t \\ \frac{z - z_0}{p} = t \end{cases} \implies \boxed{\begin{cases} x = x_0 + mt \\ y = y_0 + nt \\ z = z_0 + pt \end{cases}}$$

#### 5.1.3 Через две точки

Пусть прямая  $l$  проходит через точки  $M_0(x_0, y_0, z_0)$  и  $M_1(x_1, y_1, z_1)$ . Возьмём на прямой  $l$  точку  $M(x, y, z)$ . Составим два вектора:

$$\begin{aligned} \overrightarrow{M_0M} &= \{x - x_0, y - y_0, z - z_0\} \\ \overrightarrow{M_0M_1} &= \{x_1 - x_0, y_1 - y_0, z_1 - z_0\} \end{aligned}$$

Отсюда:

$$\overrightarrow{M_0M} \parallel \overrightarrow{M_0M_1} \implies \boxed{\frac{x - x_0}{x_1 - x_0} = \frac{y - y_0}{y_1 - y_0} = \frac{z - z_0}{z_1 - z_0}}$$

#### 5.1.4 Общее уравнение

Пусть плоскости  $\alpha_1$  и  $\alpha_2$  заданы общими уравнениями:

$$\alpha_1 : A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$$

$$\alpha_2 : A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$$

Если  $\alpha_1 \nparallel \alpha_2$ , то они пересекаются по прямой  $l$ . Тогда  $\forall M(x, y, z) \in l$  будет выполняться система:

$$\boxed{\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0 \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0 \end{cases}}$$

**Пример.** Составить уравнение прямой, являющейся пересечением плоскостей:

$$\alpha_1 : 2x + y - z + 4 = 0$$

$$\alpha_2 : 3x + 2y + z - 6 = 0$$

Для того, чтобы составить уравнение прямой  $l$ , нужно знать  $M_0(x_0, y_0, z_0)$  направляющий вектор  $\vec{S} = \{m, n, p\}$ .

$$\text{Из (1)} \implies \vec{n}_1 = \{2, 1, -1\}$$

$$\text{Из (2)} \implies \vec{n}_2 = \{3, 2, 1\}$$

$$\alpha_1 \neq \alpha_2$$

Найдем точку  $M_0$ . Пусть  $z_0 = 0$  (прямая обязательно пересечёт плоскость  $oXY$ ):

$$\begin{cases} 2x_0 + y_0 + 4 = 0 \\ 3x_0 + 2y_0 - 6 = 0 \end{cases} \implies \begin{cases} 4x_0 + 2y_0 + 8 = 0 \\ 3x_0 + 2y_0 - 6 = 0 \end{cases} \implies \begin{cases} x_0 = -14 \\ y_0 = 24 \end{cases} \implies \\ \implies M_0(-14, 24, 0)$$

Найдем направляющий вектор  $\vec{S}$

$$\vec{S} = \vec{n}_2 \cdot \vec{n}_1 = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 3 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \end{vmatrix} = -3\vec{i} + 5\vec{j} - \vec{k} \Rightarrow \vec{S} = \{-3, 5, 1\}$$

Составим каноническое уравнение прямой:

$$\frac{x + 14}{-3} = \frac{y - 24}{5} = \frac{z}{-1}$$

## 5.2 Расстояние от точки до прямой в пространстве

Пусть прямая  $l$  задана каноническим уравнением:

$$l : \frac{x - x_0}{m} = \frac{y - y_0}{n} = \frac{z - z_0}{p}$$

$$\vec{S} = \{m, n, p\}$$

Задаана точка  $M_1(x_1, y_1, z_1) \notin l$ . Составим вектор:

$$\overrightarrow{M_0M_1} = \{x_1 - x_0, y_1 - y_0, z_1 - z_0\}$$

Построим на векторах  $\vec{S}$  и  $\overrightarrow{M_0M_1}$  параллелограмм. Тогда высота этого параллелограмма из точки  $M_1$  и есть искомое расстояние от точки  $M_1$  до прямой  $l$ .

$$S_{par} = h \cdot |\vec{S}|$$

$$h = \frac{S_{par}}{|\vec{S}|}$$

$$S_{par} = |\overrightarrow{M_0M_1} \times \vec{S}|$$

Тогда:

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{M_0M_1} \times \vec{S} &= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x_1 - x_0 & y_1 - y_0 & z_1 - z_0 \\ m & n & p \end{vmatrix} = \\
&= \begin{vmatrix} y_1 - y_0 & z_1 - z_0 \\ n & p \end{vmatrix} \cdot \vec{i} - \begin{vmatrix} x_1 - x_0 & z_1 - z_0 \\ m & p \end{vmatrix} \cdot \vec{j} + \begin{vmatrix} x_1 - x_0 & y_1 - y_0 \\ m & n \end{vmatrix} \cdot \vec{k} \Rightarrow \\
\overrightarrow{M_0M_1} \times \vec{S} &= \left\{ \begin{vmatrix} y_1 - y_0 & z_1 - z_0 \\ n & p \end{vmatrix}, -\begin{vmatrix} x_1 - x_0 & z_1 - z_0 \\ m & p \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} x_1 - x_0 & y_1 - y_0 \\ m & n \end{vmatrix} \right\} \Rightarrow \\
|\overrightarrow{M_0M_1} \times \vec{S}| &= \sqrt{\begin{vmatrix} y_1 - y_0 & z_1 - z_0 \\ n & p \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} x_1 - x_0 & z_1 - z_0 \\ m & p \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} x_1 - x_0 & y_1 - y_0 \\ m & n \end{vmatrix}^2} \Rightarrow \\
\rho(M_1, l) = \frac{|\overrightarrow{M_1M_0} \times \vec{S}|}{|\vec{S}|} &= \frac{\sqrt{\begin{vmatrix} y_1 - y_0 & z_1 - z_0 \\ n & p \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} x_1 - x_0 & z_1 - z_0 \\ m & p \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} x_1 - x_0 & y_1 - y_0 \\ m & n \end{vmatrix}^2}}{\sqrt{m^2 + n^2 + p^2}}
\end{aligned}$$

### 5.2.1 Расстояние между параллельными прямыми

Пусть прямые заданы каноническими уравнениями:

$$\begin{aligned}
l_1 : \frac{x - x_0}{m_1} = \frac{y - y_0}{n_1} = \frac{z - z_0}{p_1} &\Rightarrow M_0(x_0, y_0, z_0), \vec{S}_1 = \{m_1, n_1, p_1\} \\
l_2 : \frac{x - x_0}{m_2} = \frac{y - y_0}{n_2} = \frac{z - z_0}{p_2} &\Rightarrow M_0(x_0, y_0, z_0), \vec{S}_2 = \{m_2, n_2, p_2\} \\
l_1 \parallel l_2 &\Rightarrow \frac{m_1}{m_2} = \frac{n_1}{n_2} = \frac{p_1}{p_2}
\end{aligned}$$

Построим параллелограмм на векторах  $\vec{S}_1$  и  $\overrightarrow{M_1M_2}$ . Тогда расстояние между прямыми  $l_1$  и  $l_2$  будет высота данного параллелограмма.

$$\rho(l_1, l_2) = \frac{|\overrightarrow{M_1M_0} \times \vec{S}|}{|\vec{S}|} = \frac{\sqrt{\begin{vmatrix} y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ n_1 & p_1 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} x_2 - x_1 & z_2 - z_1 \\ m_1 & p_1 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 \\ m_1 & n_1 \end{vmatrix}^2}}{\sqrt{m_1^2 + n_1^2 + p_1^2}}$$

### 5.2.2 Расстояние между скрещивающимися прямыми

Пусть прямые заданы каноническими уравнениями:

$$\begin{aligned}
l_1 : \frac{x - x_1}{m_1} = \frac{y - y_1}{n_1} = \frac{z - z_1}{p_1} &\Rightarrow M_1(x_1, y_1, z_1), \vec{S}_1 = \{m_1, n_1, p_1\} \\
l_2 : \frac{x - x_2}{m_2} = \frac{y - y_2}{n_2} = \frac{z - z_2}{p_2} &\Rightarrow M_2(x_2, y_2, z_2), \vec{S}_2 = \{m_2, n_2, p_2\}
\end{aligned}$$

Составим вектор  $\overrightarrow{M_1M_2} = \{x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1\}$

Вектора  $\vec{S}$  и  $\overrightarrow{M_1M_2}$  не компланарны. Поэтому на этих векторах можно построить парал-

леленипед. Тогда расстояние между прямыми  $l_1$  и  $l_2$  будет равно высоте этого параллелепипеда.

$$V = |\overrightarrow{M_1M_2} \cdot \vec{s}_1 \cdot \vec{s}_2|$$

$$V = h \cdot S$$

$$\overrightarrow{M_1M_2} \cdot \vec{s}_1 \cdot \vec{s}_2 = \begin{vmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ m_1 & n_1 & p_1 \\ m_2 & n_2 & p_2 \end{vmatrix}$$

$$S = |\vec{s}_1 \times \vec{s}_2| = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ m_1 & n_1 & p_1 \\ m_2 & n_2 & p_2 \end{vmatrix} = \vec{i} \cdot \begin{vmatrix} n_1 & p_1 \\ n_2 & p_2 \end{vmatrix} - \vec{j} \cdot \begin{vmatrix} m_1 & p_1 \\ m_2 & p_2 \end{vmatrix} + \vec{k} \cdot \begin{vmatrix} m_1 & n_1 \\ m_2 & n_2 \end{vmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \rho(l_2, l_1) = \frac{\left| \begin{vmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ m_1 & n_1 & p_1 \\ m_2 & n_2 & p_2 \end{vmatrix} \right|}{\sqrt{\begin{vmatrix} n_1 & p_1 \\ n_2 & p_2 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} m_1 & p_1 \\ m_2 & p_2 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} m_1 & n_1 \\ m_2 & n_2 \end{vmatrix}^2}}$$

### 5.3 Взаимное расположение прямых в пространстве

Пусть прямые  $l_1$  и  $l_2$  заданы каноническими уравнениями:

$$l_1 : \frac{x - x_1}{m_1} = \frac{y - y_1}{n_1} = \frac{z - z_1}{p_1} \Rightarrow M_1(x_1, y_1, z_1), \vec{S}_1 = \{m_1, n_1, p_1\}$$

$$l_2 : \frac{x - x_2}{m_2} = \frac{y - y_2}{n_2} = \frac{z - z_2}{p_2} \Rightarrow M_2(x_2, y_2, z_2), \vec{S}_2 = \{m_2, n_2, p_2\}$$

Составим вектор  $\overrightarrow{M_1M_2}$ .

#### 5.3.1 Совпадают

Если прямые  $l_1$  и  $l_2$  **совпадают**, то:

$$\frac{m_1}{m_2} = \frac{n_1}{n_2} = \frac{p_1}{p_2}$$

$$\frac{x_2 - x_1}{m_1} = \frac{y_2 - y_1}{n_1} = \frac{z_2 - z_1}{p_1}$$

#### 5.3.2 Параллельны

Если прямые  $l_1$  и  $l_2$  **параллельны** то:

$$\frac{m_1}{m_2} = \frac{n_1}{n_2} = \frac{p_1}{p_2}$$

И **не** выполняется условие:

$$\frac{x_2 - x_1}{m_1} = \frac{y_2 - y_1}{n_1} = \frac{z_2 - z_1}{p_1}$$

### 5.3.3 Пересекаются

Если прямые  $l_1$  и  $l_2$  **пересекаются**, они лежат в одной плоскости. В таком случае вектора  $\overrightarrow{M_1M_2}, \vec{s}_1, \vec{s}_2$  – компланарны:

$$\overrightarrow{M_1M_2} \cdot \vec{s}_1 \cdot \vec{s}_2 = 0$$

$$\begin{vmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ m_1 & n_1 & p_1 \\ m_2 & n_2 & p_2 \end{vmatrix} = 0$$

### 5.3.4 Скрещиваются

Если прямые  $l_1$  и  $l_2$  **скрещиваются**, то они не лежат в одной плоскости. В таком случае вектора  $\overrightarrow{M_1M_2}, \vec{s}_1, \vec{s}_2$  – некопланарны:

$$\overrightarrow{M_1M_2} \cdot \vec{s}_1 \cdot \vec{s}_2 \neq 0$$

$$\begin{vmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ m_1 & n_1 & p_1 \\ m_2 & n_2 & p_2 \end{vmatrix} \neq 0$$

## 5.4 Угол между прямой и плоскостью

Пусть плоскость задана общим уравнением:

$$\alpha : Ax + By + Cz + D = 0$$

Пусть прямая  $l$  задана каноническим уравнением:

$$l : \frac{x - x_0}{m} = \frac{y - y_0}{n} = \frac{z - z_0}{p} \quad \vec{s} = \{m, n, p\}$$

Обозначим угол  $\varphi$  - между прямой плоскостью, и  $\beta$  - между прямой и нормалью. Тогда:

$$\cos \beta = \frac{\vec{n} \cdot \vec{s}}{|\vec{n}| \cdot |\vec{s}|}$$

$$\beta = 90 - \varphi$$

$$\cos(90 - \varphi) = \frac{\vec{n} \cdot \vec{s}}{|\vec{n}| \cdot |\vec{s}|} \Rightarrow \sin(\varphi) = \frac{\vec{n} \cdot \vec{s}}{|\vec{n}| \cdot |\vec{s}|}$$

$$\sin \varphi = \frac{|Am + Bn + Cp|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2} \cdot \sqrt{m^2 + n^2 + p^2}}$$

### 5.4.1 Условие параллельности прямой и плоскости

Пусть плоскость задана общим уравнением:

$$\alpha : Ax + By + Cz + D = 0 \quad \vec{n} = \{A, B, C\}$$

Пусть прямая  $l$  задана каноническим уравнением:

$$l : \frac{x - x_0}{m} = \frac{y - y_0}{n} = \frac{z - z_0}{p} \quad \vec{s} = \{m, n, p\}$$

$$l \parallel \alpha \implies \vec{n} \perp \vec{s} \implies \vec{n} \cdot \vec{s} = 0$$

$$Am + Bn + Cp = 0$$

### 5.4.2 Условие перпендикулярности прямой и плоскости

Пусть плоскость задана общим уравнением:

$$\alpha : Ax + By + Cz + D = 0 \quad \vec{n} = \{A, B, C\}$$

Пусть прямая  $l$  задана каноническим уравнением:

$$l : \frac{x - x_0}{m} = \frac{y - y_0}{n} = \frac{z - z_0}{p} \quad \vec{s} = \{m, n, p\}$$

$$l \perp \alpha \implies \vec{n} \parallel \vec{s} \implies \boxed{\frac{A}{m} = \frac{B}{n} = \frac{C}{p}}$$

### 5.4.3 Примеры задач

**Пример.** Задача: составить уравнение прямой  $l_2$  симметричной прямой  $l_1$ , которая задана каноническим уравнением:

$$\frac{x - 1}{2} = \frac{y}{1} = \frac{z + 1}{0} \quad \vec{s} = \{2, 1, 0\}$$

относительно плоскости  $\alpha$ :

$$\alpha : x - y + 2z - 1 = 0 \quad \vec{n} = \{1, -1, 2\}$$

Решение: (1) Проверим, является ли прямая  $l_1$  параллельной плоскости  $\alpha$ :

$$\vec{s} \cdot \vec{n} = 2 \cdot 1 + 1 \cdot (-1) + 0 \cdot 2 = 2 - 1 = 1 \neq 0 \implies l_1 \not\parallel \alpha$$

(2) Находим точку пересечения прямой  $l$  с плоскостью  $\alpha$  - пусть это точка  $A(x_2, y_2, z_2)$ . Из канонического уравнения прямой  $l_1$  получим параметрическое уравнение:

$$\begin{aligned} \frac{x - 1}{2} = \frac{y}{1} = \frac{z + 1}{0} = t \\ \left\{ \begin{array}{l} \frac{x - 1}{2} = t \\ \frac{y}{1} = t \\ \frac{z + 1}{0} = t \end{array} \right. \implies \left\{ \begin{array}{l} x = 2t + 1 \\ y = t \\ z = -1 \end{array} \right. \end{aligned}$$

Т.к. точка  $A$  принадлежит и прямой, и плоскости, то её координаты удовлетворяют и параметрическому уравнению прямой, и общему уравнению плоскости:

$$\begin{aligned} 2t + 1 - t - 2 - 1 &= 0 \\ t = 2 \implies \left\{ \begin{array}{l} x_2 = 5 \\ y_2 = 2 \\ z_2 = -1 \end{array} \right. &\implies A(5, 2, -1) \end{aligned}$$

(3) Из канонического уравнения прямой возьмем точку  $M_1(1, 0, -1) \in l_1$ . Найдем ей симметричную относительно плоскости  $\alpha$  точку  $M_2(x_2, y_2, z_2)$ . Составим уравнение прямой  $l_3$ , проходящей через точку  $M_1$  и с направляющим вектором  $\vec{n}$ .

$$\frac{x-1}{1} = \frac{y}{-1} = \frac{z+1}{2}$$

Найдём точку пересечения  $O(x_3, y_3, z_3)$  прямой  $l_3$  с плоскостью  $\alpha$ . Составим параметрическое уравнение прямой  $l_3$ :

$$\frac{x-1}{1} = \frac{y}{-1} = \frac{z+1}{2} = t$$

$$\begin{cases} \frac{x-1}{1} = t \\ \frac{y}{-1} = t \\ \frac{z+1}{2} = t \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = t + 1 \\ y = -t \\ z = 2t - 1 \end{cases}$$

Т.к. точка  $O$  принадлежит и прямой, и плоскости, то её координаты удовлетворяют и параметрическому уравнению прямой, и общему уравнению плоскости:

$$t + 1 + t + 4t - 2 = 0$$

$$t = \frac{1}{3} \Rightarrow \begin{cases} x_3 = \frac{4}{3} \\ y_3 = -\frac{1}{3} \\ z_3 = \frac{1}{3} \end{cases}$$

Составляем вектор  $\overrightarrow{M_1O}$ :

$$\overrightarrow{M_1O} = \left\{ \frac{1}{3}, -\frac{1}{3}, \frac{2}{3} \right\}$$

Пусть  $M_2(x_2, y_2, z_2)$ . Тогда:

$$\overrightarrow{OM_2} = \{x_2, y_2, z_2\}$$

$$\overrightarrow{M_1O} = \overrightarrow{OM_2} \Rightarrow \begin{cases} x_2 - \frac{4}{3} = \frac{1}{3} \\ y_2 + \frac{1}{3} = -\frac{1}{3} \\ z_2 + \frac{1}{3} = \frac{2}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_2 = \frac{5}{3} \\ y_2 = \frac{2}{3} \\ z_2 = \frac{1}{3} \end{cases}$$

4) Составляем уравнение прямой, проходящей через точки  $A(5, 2, -1)$  и  $M_2\left(\frac{5}{3}, -\frac{2}{3}, \frac{1}{3}\right)$ :

$$\begin{aligned}\frac{x - x_a}{x_1 - x_a} &= \frac{y - y_a}{y_2 - y_a} = \frac{z - z_a}{z_2 - z_a} \\ \frac{x - 5}{\frac{5}{3} - 5} &= \frac{y - 2}{-\frac{2}{3} - 2} = \frac{z + 1}{\frac{1}{3} + 1} \\ \frac{x - 5}{-\frac{10}{3}} &= \frac{y - 2}{-\frac{8}{3}} = \frac{z + 1}{\frac{4}{3}} \\ \boxed{\frac{x - 5}{-5} = \frac{y - 2}{-4} = \frac{z + 1}{4}}\end{aligned}$$

**Пример.** Задача: Составить каноническое уравнение общего перпендикуляра к прямым  $l_1$  и  $l_2$ , заданными параметрическими уравнениями:

$$l_1: \begin{cases} x = t + 2 \\ y = 3t + 4 \\ z = -2t - 2 \end{cases} \quad l_2: \begin{cases} x = -3t + 2 \\ y = t \\ z = 3t - 4 \end{cases}$$

Решение:

1) Составим канонические уравнения прямых для  $l_1$  и  $l_2$ :

$$l_1: \begin{cases} t = \frac{x - 2}{2} \\ t = \frac{y - 4}{3} \\ t = \frac{z + 2}{-2} \end{cases} \Rightarrow \frac{x - 2}{2} = \frac{y - 4}{3} = \frac{z + 2}{-2} \Rightarrow$$

$$M_1(2, 4, -2) \quad \vec{S}_1 = \{2, 3, -2\}$$

$$l_2: \begin{cases} t = \frac{x - 1}{-3} \\ t = \frac{y}{1} \\ t = \frac{z + 4}{3} \end{cases} \Rightarrow \frac{x - 1}{-3} = \frac{y}{1} = \frac{z + 4}{3} \Rightarrow$$

$$M_2(1, 4, -2) \quad \vec{S}_2 = \{-3, 1, 3\}$$

Найдём вектор  $\overrightarrow{M_1M_2}$ :

$$\overrightarrow{M_1M_2} = \{0, -4, -2\}$$

Проверим, являются ли прямые  $l_1$  и  $l_2$  скрещивающимися или параллельными. Найдём смешанное произведение  $\overrightarrow{M_1M_2} \vec{S}_1 \vec{S}_2$ :

$$\overrightarrow{M_1M_2} \vec{S}_1 \vec{S}_2 = \begin{vmatrix} 0 & -4 & -2 \\ 2 & 3 & -2 \\ -3 & 1 & 3 \end{vmatrix} = -22 \neq 0$$



Значит, прямые не лежат в одной плоскости, следовательно, они скрещивающиеся. 2) Найдем направляющий вектор общего перпендикуляра к прямым  $l_1$  и  $l_2$ .

$$\left. \begin{array}{l} \vec{S} \perp \vec{S}_1 \\ \vec{S} \perp \vec{S}_2 \end{array} \right\} \iff \vec{S} = \vec{S}_1 \times \vec{S}_2$$

$$\vec{S}_1 \times \vec{S}_2 = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & 3 & -2 \\ -3 & 1 & 3 \end{vmatrix} = 11\vec{i} + 11\vec{k} \implies \vec{S} = \{1, 0, 1\}$$

3) Составим уравнение плоскости  $\alpha_1$ , проходящей через точки  $M_1$  и вектора  $\vec{S}_1, \vec{S}$ . Возьмём произвольную точку  $M(x, y, z) \in \alpha_1$ . Составим вектор  $\overrightarrow{M_1M}$ :

$$\overrightarrow{M_1M} = \{x - 2, y - 4, z + 2\}$$

Вектора  $\overrightarrow{M_1M}, \vec{S}_1, \vec{S}$  - компланарные, а следовательно:

$$\overrightarrow{M_1M} \vec{S}_1 \vec{S} = 0$$

$$\overrightarrow{M_1M} \vec{S}_1 \vec{S} = \begin{vmatrix} x - 2 & y - 4 & z + 2 \\ 2 & -3 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -3x + 4y + 3z - 4$$

$$\boxed{\alpha_1: -3x + 4y + 3z - 4 = 0}$$

4) Составим плоскость  $\alpha_2$  через точку  $M_2$  и вектора  $\vec{S}_1$  и  $\vec{S}_2$ . Возьмём произвольную точку  $M(x, y, z) \in \alpha_2$ . Составим вектор  $\overrightarrow{M_2M}$ :

$$\overrightarrow{M_2M} = \{x - 2, y, z + 4\}$$

Вектора  $\overrightarrow{M_2M}, \vec{S}_2, \vec{S}$  - компланарные, а следовательно:

$$\overrightarrow{M_2M} \vec{S}_2 \vec{S} = 0$$

$$\overrightarrow{M_2M} \vec{S}_2 \vec{S} = \begin{vmatrix} x - 2 & y & z + 4 \\ -3 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = x + 6y - z - 6 = 0$$

$$\boxed{\alpha_2: x + 6y - z - 6 = 0}$$

5) Для начала, определим одну из координат точек. Прямая  $l$  пересекает плоскость  $oXY$ , т.е. можем взять  $z = 0$ . Тогда в системе уравнений:

$$\begin{cases} -3x + 4y + 3z - 4 = 0 \\ x + 6y - z - 6 = 0 \end{cases}$$

Полагаем, что  $z = 0$ :

$$\begin{cases} -3x + 4y - 4 = 0 \\ x + 6y - 6 = 0 \end{cases} \implies \begin{cases} x = 0 \\ y = 1 \end{cases} \implies A(0, 1, 0)$$

где точка  $A \in \alpha_1, \alpha_2, l$ .

Составляем каноническое уравнение прямой  $l$ , проходящей через точку  $A$ , и с направляющим вектором  $\vec{S}$ .

$$\frac{x-0}{1} = \frac{y-1}{0} = \frac{z-0}{1}$$
$$\boxed{\frac{x}{1} = \frac{y-1}{0} = \frac{z}{1}}$$

## 6 Кривые и поверхности 2-го порядка

**Определение 1.** Уравнением второго порядка называется уравнение вида:

$$\boxed{Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0}$$
$$A, B, C, D, E, F = \text{const}, \quad A^2 + B^2 + C^2 > 0$$

### 6.1 Эллипс

**Определение 1.** Эллипс — геометрическое место точек, сумма расстояний от каждой из которых до двух фиксированных точек, называемых **фокусами**, постоянна и равна  $2a$ .

$F_1, F_2$  — **фокусы эллипса**

**Определение 2.** Расстояние между фокусами называется **фокальным расстоянием**

**Определение 3.** Расстояние от каждой точки эллипса до фокуса называется **фокальным радиусом**

**Определение 4.** Прямая (*большая ось*), на которой лежат фокусы, и прямая (*малая ось*), которая проходит на равном расстоянии от фокусов, являются **осями симметрии** эллипса.

1 прямая — **большая ось**

2 прямая — **малая ось**

**Определение 5.** Точка пересечения осей называется **центром эллипса**

**Определение 6.** Точки пересечения с осями называются **вершинами эллипса**.

## Уравнение эллипса

Расположим декартову систему координат так, чтобы её начало координат совпадало с центром эллипса, а фокусы лежали на оси абсцисс.

$O$  – центр эллипса

$F_1, F_2$  – фокусы эллипса

$A_1(a, 0), A_2(0, b), A_3(-a, 0), A_4(0, -b)$  – вершины эллипса

$F_1(-c, 0), F_2(c, 0)$

Возьмём точку  $M(x, y)$ , принадлежащую эллипсу

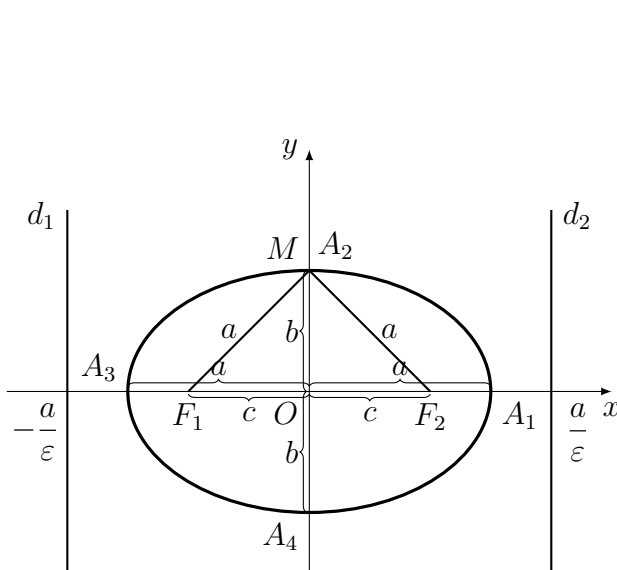
Составим векторы  $\overrightarrow{F_1M} = \{x + c, y\}, \overrightarrow{F_2M} = \{x - c, y\}$

$a = A_3O = OA_1$

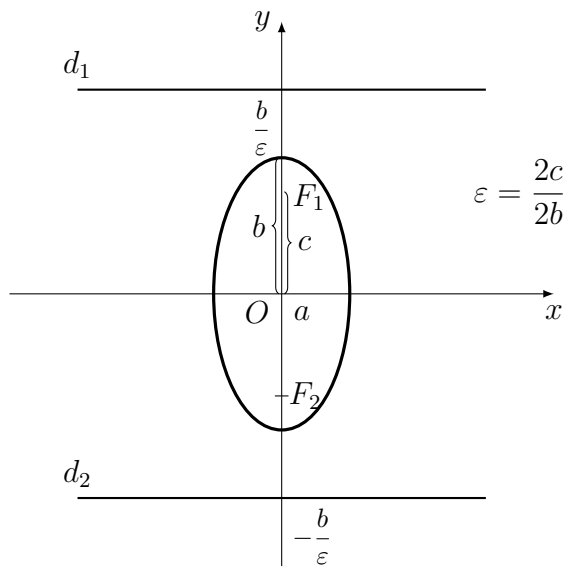
$$\begin{aligned}
 |\overrightarrow{F_1M}| + |\overrightarrow{F_2M}| &= 2a \\
 \sqrt{(x+c)^2 + y^2} + \sqrt{(x-c)^2 + y^2} &= 2a \\
 \sqrt{(x+c)^2 + y^2} &= 2a - \sqrt{(x-c)^2 + y^2} \\
 (x+c)^2 + y^2 &= 4a^2 - 4a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} + (x-c)^2 + y^2 \\
 x^2 + 2xc + c^2 + y^2 &= 4a^2 - 4a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} + x^2 - 2xc + c^2 + y^2 \\
 4a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} &= 4a^2 - 4xc \\
 a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} &= a^2 - xc \\
 a^2c^2 + x^2a^2 - 2a^2xc + a^2y^2 &= a^4 - 2a^2xc + x^2c^2 \\
 x^2a^2 - x^2c^2 + a^2y^2 &= a^4 - a^2c^2 \\
 x^2(a^2 - c^2) + a^2y^2 &= a^2(a^2 - c^2) \quad | : a^2(a^2 - c^2) \\
 \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2 - c^2} &= 1
 \end{aligned}$$

Обозначим  $b^2 = a^2 - c^2 \Rightarrow \boxed{\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1}$  — каноническое уравнение эллипса

$a$  — большая полуось эллипса,  $b$  — малая полуось эллипса



(a) Эллипс



(b) Примечание №6

**Замечание.**  $a = 2$ ,  $b = \sqrt{2}$

Неверная запись уравнения:  ~~$\frac{x^2}{2^2} + \frac{y^2}{(\sqrt{2})^2} = 1$~~

Верная запись уравнения:  $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{2} = 1$

**Определение 7.** Отношение фокального расстояния эллипса к большой оси называется **эксцентриситетом**.

Обозначение –  $\varepsilon$

$$\frac{F_1 F_2}{A_3 A_1} = \frac{2c}{2a} = \varepsilon \Rightarrow \varepsilon = \frac{c}{a}$$

$$\text{т.к. } c < a \Rightarrow 0 < \varepsilon < 1$$

**Теорема 1.**

Отношение фокального радиуса точки эллипса к расстоянию от этой точки до некоторой прямой, называемой **директрисой**, постоянно и равно эксцентриситету.

Директриса перпендикулярна прямой, на которой лежат фокусы.

Уравнение директрисы:

$$d_1: x = -\frac{a}{\varepsilon}$$

$$d_2: x = \frac{a}{\varepsilon}$$

**Примечание.**

1. Уравнение эллипса с центром в точке  $O(x_0, y_0)$

$$\boxed{\frac{(x - x_0)^2}{a^2} + \frac{(y - y_0)^2}{b^2} = 1}$$

2. Уравнение мнимого эллипса (с центром в точке  $O(0, 0)$ )

$$\boxed{\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = -1}$$

3. Уравнение окружности с центром в точке  $O(0, 0)$  и радиусом  $R$

$$a = b = R$$

$$\frac{x^2}{R^2} + \frac{y^2}{R^2} = 1$$

$\Downarrow$

$$\boxed{x^2 + y^2 = R^2}$$

4. Уравнение окружности с центром в точке  $O'(x_0, y_0)$  и радиусом  $R$ ,  $\varepsilon = 0$

$$\boxed{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = R^2}$$

5. Уравнение точки  $O'(x_0, y_0)$

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = 0$$

6. Если  $a < b$ , то эллипс будет вытянут вдоль оси  $y$  и фокусы будут располагаться на оси  $Oy$ . (Рис. 1b)

$$\varepsilon = \frac{2c}{2b}$$

## 6.2 Гипербола

**Определение 1.** Гиперболой называется геометрическое место точек, разность расстояний от каждой из которых до двух фиксированных точек, называемых фокусами, постоянна и равна  $2a$ .

**Определение 2.** Прямая (*действительная ось*), на которой лежат фокусы, и прямая (*мнимая ось*), которая проходит через середину отрезка между фокусами перпендикулярно первой прямой, называются **осями гиперболы**.

1 ось – **действительная ось**

2 ось – **мнимая ось**

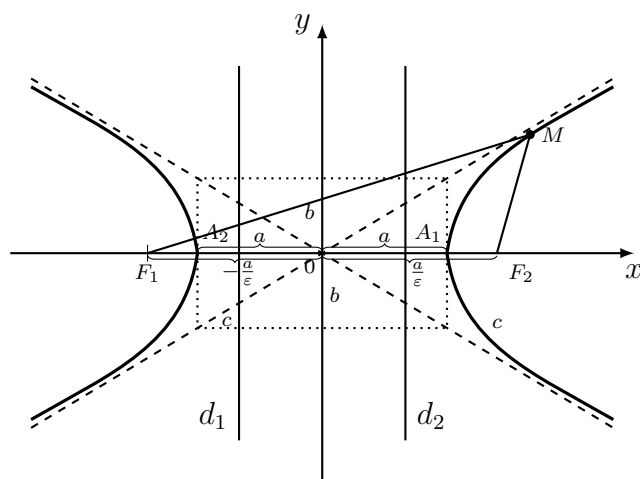
**Определение 3.** Расстояние между фокусами называется **фокальным расстоянием**.

$F_1, F_2$  – фокусы гиперболы

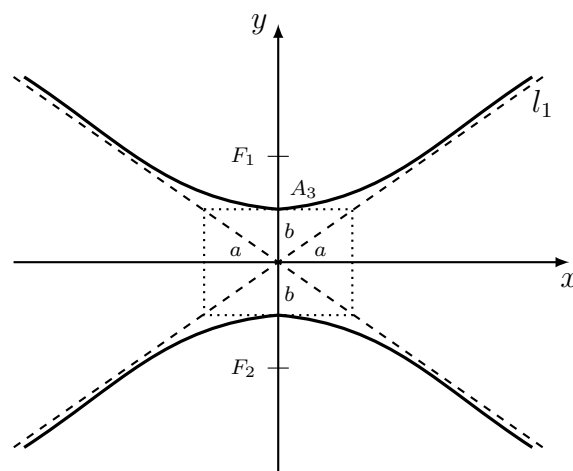
$$F_1F_2 = 2c$$

**Определение 4.** Точка пересечения действительной и мнимой осей называется **центром гиперболы**.

**Определение 5.** Точки пересечения гиперболы с действительной осью называются **вершинами гиперболы**.



(a) Гипербола



(b) Примечание

Рис. 2

## Уравнение гиперболы

Расположим декартову прямоугольную систему координат так, чтобы её начало совпадало с центром гиперболы, а фокусы лежали на оси абсцисс (Рис. 2а).

$F_1(-c, 0)$ ,  $F_2(c, 0)$ ,  $M(x, y)$

Составим два вектора:  $\overrightarrow{F_1M} = \{x + c, y\}$ ,  $\overrightarrow{F_2M} = \{x - c, y\}$

$$|\overrightarrow{F_1M}| - |\overrightarrow{F_2M}| = 2a$$

$$\sqrt{(x + c)^2 + y^2} - \sqrt{(x - c)^2 + y^2} = 2a$$

$$\sqrt{(x + c)^2 + y^2} = 2a + \sqrt{(x - c)^2 + y^2}$$

$$(x + c)^2 + y^2 = 4a^2 + 4a\sqrt{(x - c)^2 + y^2} + (x - c)^2 + y^2$$

$$x^2 + 2xc + c^2 + y^2 = 4a^2 + 4a\sqrt{(x - c)^2 + y^2} + x^2 - 2xc + c^2 + y^2$$

$$-4a\sqrt{(x - c)^2 + y^2} = 4a^2 - 4xc$$

$$-a\sqrt{(x - c)^2 + y^2} = a^2 - xc$$

$$a^2c^2 + x^2a^2 - 2a^2xc + a^2y^2 = a^4 - 2a^2xc + x^2c^2$$

$$x^2a^2 - x^2c^2 + a^2y^2 = a^4 - a^2c^2$$

$$x^2(a^2 - c^2) + a^2y^2 = a^2(a^2 - c^2) \quad | : a^2(a^2 - c^2)$$

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2 - c^2} = 1$$

Обозначим  $b^2 = c^2 - a^2 \Rightarrow \boxed{\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1}$  — **каноническое уравнение гиперболы** с центром в точке  $O(0, 0)$

$a$  — действительная ось гиперболы,  $b$  — мнимая ось гиперболы

**Определение 6.** Отношение фокального расстояния к величине действительной оси гиперболы называется **эксцентриситетом** ( $\varepsilon$ )

$$\varepsilon = \frac{2c}{2a} \text{ т.к. } c > a, \text{ то } \varepsilon > 1 \Rightarrow \varepsilon = \frac{c}{a}$$

Эксцентриситет характеризует форму гиперболы. Чем меньше эксцентриситет, тем меньше отношение  $\frac{b}{a}$  её полуосей, а значит, тем более вытянут её основной прямоугольник.

**Определение 7.** Директриса (см. определение эллипса)

$$d_1: x = -\frac{a}{\varepsilon}$$

$$d_2: x = \frac{a}{\varepsilon}$$

### Примечание.

1. Канонические уравнения сопряжённой гиперболы (с центром в точке  $O(0, 0)$ )

$$-\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \text{ или } \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = -1$$

2. Уравнение гиперболы с центром в точке  $O(x_0, y_0)$

$$\frac{(x - x_0)^2}{a^2} - \frac{(y - y_0)^2}{b^2} = 1$$

3. Если  $a = b$ , то равносторонняя:

$$\frac{(x - x_0)^2}{a^2} - \frac{(y - y_0)^2}{a^2} = 1$$

4. Две прямые

$$\begin{aligned} \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} &= 0 \\ b^2 x^2 - a^2 y^2 &= 0 \\ (bx - ay)(bx + ay) &= 0 \Rightarrow \\ bx - ay = 0 &\Rightarrow y = \frac{b}{a}x \\ \Rightarrow bx + ay = 0 &\Rightarrow y = -\frac{b}{a}x \end{aligned}$$

5. Уравнения асимптот

$$l_1: y = \frac{b}{a}x$$

$$l_2: y = -\frac{b}{a}x$$

Если центр гиперболы  $O(x_0, y_0)$ , то:

$$l_1: y - y_0 = \frac{b}{a}(x - x_0) \Rightarrow y = y_0 + \frac{b}{a}(x - x_0) \Rightarrow y = \frac{b}{a}x + \left(y_0 - \frac{b}{a}x_0\right)$$

$$l_2: y - y_0 = -\frac{b}{a}(x - x_0) \Rightarrow y = y_0 - \frac{b}{a}(x - x_0) \Rightarrow y = -\frac{b}{a}x + \left(y_0 + \frac{b}{a}x_0\right)$$



## 6.3 Парабола

**Определение 1.** Параболой называется геометрическое место точек, расстояния от каждой из которых до некоторой фиксированной точки, называемой *фокусом*, и некоторой фиксированной прямой, называемой *директрисой*, равны.

### Уравнение параболы

Обозначим расстояние от директрисы до фокуса буквой  $p$ .

Расположим декартову прямоугольную систему координат так, чтобы начало координат совпадало с вершиной параболы, а фокус находился на оси абсцисс. (Рис. 3а)

Возьмём произвольную точку  $M(x, y)$ .

$A(-\frac{p}{2}, y)$ ;  $F(\frac{p}{2}, 0)$  – фокус параболы

Составим два вектора:  $\overrightarrow{AM} = \{x + \frac{p}{2}, 0\}$  и  $\overrightarrow{FM} = \{x - \frac{p}{2}, y\}$

По определению  $|\overrightarrow{AM}| = |\overrightarrow{FM}|$

$$\sqrt{\left(x + \frac{p}{2}\right)^2 + 0^2} = \sqrt{\left(x - \frac{p}{2}\right)^2 + y^2}$$

$$x^2 + xp + \frac{p^2}{4} = x^2 - xp + \frac{p^2}{4} + y^2$$

$y^2 = 2px$  — **каноническое уравнение параболы** с вершиной в точке  $O(0, 0)$

- Если  $p > 0$ , то ветви параболы направлены вправо
  - Если  $p < 0$ , то ветви параболы направлены влево
- $$y^2 = 3x \Rightarrow p = \frac{3}{2}$$

**Примечание:**  $x^2 = 2py$  (каноническое уравнение параболы)

- Если  $p > 0$ , то ветви параболы направлены вверх (Рис. 3б)
- Если  $p < 0$ , то ветви параболы направлены вниз

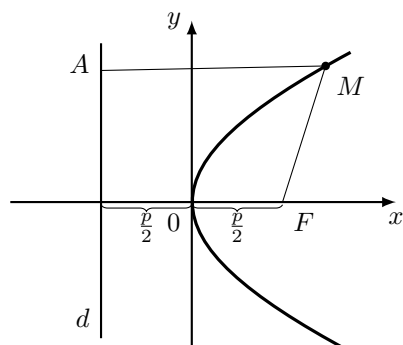
Если вершина параболы находится в  $O'(x_0, y_0)$ , то:

$$(y - y_0)^2 = 2p(x - x_0) \text{ или } (x - x_0)^2 = 2p(y - y_0)$$

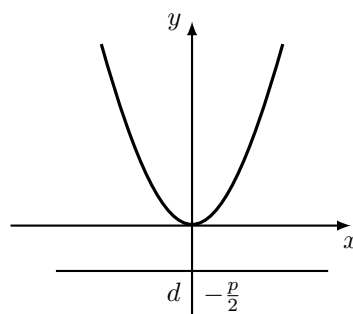
### Уравнение директрисы:

•  $y^2 = 2px \Rightarrow d: x = -\frac{p}{2}$  (Если  $O(x_0, y_0)$ , то  $d: x - x_0 = -\frac{p}{2} \Rightarrow x = x_0 - \frac{p}{2}$ )

•  $x^2 = 2py \Rightarrow d: y = -\frac{p}{2}$  (Если  $O'(x_0, y_0)$ , то  $d: y - y_0 = -\frac{p}{2} \Rightarrow y = y_0 - \frac{p}{2}$ )



(а) Парабола



(b) Парабола, ветви вверх

Рис. 3

Пример.

$$2x^2 - 4y^2 - 6x + 8y - 10 = 0$$

$$2(x^2 - 3x) - 4(y^2 - 2y) - 10 = 0$$

$$2\left(x^2 - 3x + \frac{9}{4} - \frac{9}{4}\right) - 4(y^2 - 2y + 1 - 1) - 10 = 0$$

$$2\left(x - \frac{3}{2}\right)^2 - \frac{9}{2} - 4(y - 1)^2 + 4 - 10 = 0$$

$$2\left(x - \frac{3}{2}\right)^2 - 4(y - 1)^2 = \frac{21}{2}$$

$$\frac{\left(x - \frac{3}{2}\right)^2}{\frac{21}{4}} - \frac{(y - 1)^2}{\frac{21}{8}} = 1 \quad \text{— уравнение}$$

Гипербола с центром в точке  $O'\left(\frac{3}{2}, 1\right)$

Действительная полуось:  $a = \frac{\sqrt{21}}{2}$

Мнимая полуось:  $b = \sqrt{\frac{21}{8}}$

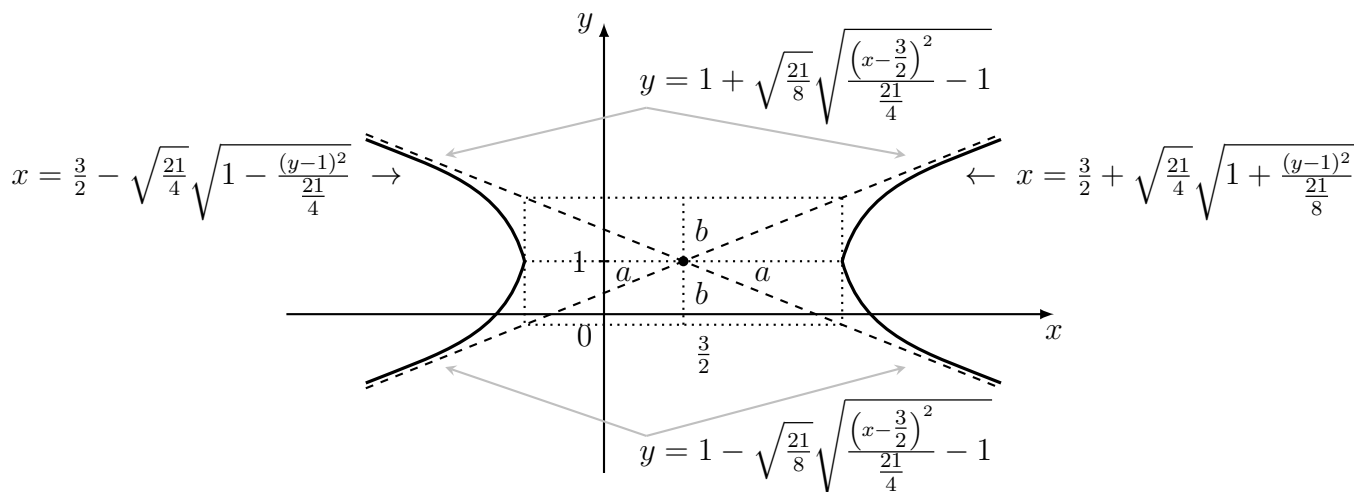


Рис. 4: Пример

## 7 Матрицы

### 7.1 Основные понятия

**Определение 1.** **Матрицей** называется таблица (чисел), в которой элементы расположены по строкам и столбцам.

- Матрицы обозначаются большими латинскими буквами:  $A, B, C, \dots$
- **Размерность** определяется количеством строк ( $m$ ) и количеством столбцов ( $n$ ) и обозначается  $m \times n$
- Элемент  $a_{ij}$  — элемент, который находится в  $i$ -ой строке и в  $j$ -ом столбце.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

**Определение 2.** Матрицы называются **квадратными**, если количество строк равно количеству столбцов ( $m = n$ ).

**Определение 3.** Матрицы называются **диагональными**, если все элементы матрицы, кроме элементов на главной диагонали, равны нулю. При этом эта матрица квадратная.

$$D = \begin{pmatrix} d_{11} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & d_{22} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & d_{nn} \end{pmatrix} \quad d_{ij} \neq 0, \quad 1 \leq i \leq n$$

**Определение 4.**

**Главная диагональ** — последовательность элементов, которая идёт из левого верхнего угла в правый нижний.

**Побочная диагональ** — последовательность элементов, которая идёт из правого верхнего угла в левый нижний.

**Определение 5.** **Единичная матрица** — матрица, у которой все элементы на главной диагонали равны единице, а остальные равны нулю.

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

**Определение 6.** **Нулевой матрицей** называется матрица, элементы которой равны нулю.

**Определение 7.** Верхней треугольной матрицей называется квадратная матрица, у которой под главной диагональю все элементы равны нулю.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 5 & 6 & 11 \\ 0 & 3 & 7 & 10 \\ 0 & 0 & 4 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & 8 \end{pmatrix}$$

**Определение 8.** Нижней треугольной матрицей называется квадратная матрица, у которой над главной диагональю все элементы равны нулю.

**Определение 9.** Две матрицы **равны**, если они имеют одинаковую размерность и их соответствующие элементы равны.

$$A_{m \times n}, B_{m \times n}$$

$$A = B \iff a_{ij} = b_{ij}, \text{ где } \begin{matrix} i = 1, \dots, m \\ j = 1, \dots, n \end{matrix}$$

## 7.2 Действия с матрицами

### 7.2.1 Сумма матриц

**Определение 1.** Суммой матриц  $A_{m \times n}$  и  $B_{m \times n}$  называется матрица  $C$ , элементы которой являются суммами соответствующих элементов  $A$  и  $B$ .

$$A_{m \times n} + B_{m \times n} = C_{m \times n}, \text{ где } c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}, \begin{matrix} i = 1 \dots m \\ j = 1 \dots n \end{matrix}$$

**Замечание.** Операция сложения матриц вводится только для матриц одинаковых размеров.

Пример.

$$A_{2 \times 2} = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \quad B_{2 \times 2} = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$$

$$C_{2 \times 2} = A + B = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3+4 & 2+1 \\ 1+0 & -1+3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

### 7.2.2 Умножение матрицы на число

**Определение 2.** Произведением матрицы  $A_{m \times n}$  на число  $k = const$  называется матрица  $C_{m \times n}$ , элементы которой равны произведению соответствующего элемента матрицы  $a_{ij}$  на число  $k$ .

$$C = k \cdot A \quad c_{ij} = k \cdot a_{ij}, \text{ где } \begin{matrix} i = 1, \dots, m \\ j = 1, \dots, n \end{matrix}$$

### 7.2.3 Свойства сложения матриц и умножения матрицы на число

1.  $A + B = B + A$
2.  $(A + B) + C = A + (B + C) = B + (A + C)$
3. Если  $O$  — нулевая матрица, то  $A + O = A$
4. Найдётся такая матрица  $B$ , что  $A + B = O$  ( $B = -A$ )
5.  $\lambda \cdot (A + B) = \lambda A + \lambda B$   
 $\lambda = \text{const}$
6.  $(\lambda + \mu) \cdot A = \lambda A + \mu A$
7.  $\lambda \cdot (\mu A) = (\lambda \mu) \cdot A$

### 7.2.4 Транспонирование матриц

**Определение 3.** Транспонированной матрицей ( $A_{m \times n}^T$ ) называется матрица  $A_{n \times m}$ , элементы которой равны  $a_{ij}^T = a_{ji}$ ,  $i = 1, \dots, m$   
 $j = 1, \dots, n$

$$A_{2 \times 3} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} \longrightarrow A_{3 \times 2}^T = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}$$

### 7.2.5 Свойства транспонирования матриц

1.  $(A + B)^T = A^T + B^T$
2.  $(\lambda \cdot A)^T = \lambda \cdot A^T$

### 7.2.6 Произведение матриц

**Определение 4.** Произведением матриц  $A_{m \times k}$  и  $B_{k \times n}$  называется матрица  $C_{m \times n}$ , которая получается следующим образом:

$$c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \dots + a_{ik}b_{kj} = \sum_{l=1}^k a_{il} \cdot b_{lj} \quad \begin{matrix} i = 1, \dots, m \\ j = 1, \dots, n \end{matrix}$$

**Замечание.** Матрицы можно перемножить, если количество столбцов первой матрицы равно количеству строк второй матрицы. Тогда результирующая матрица будет иметь количество строк первой матрицы и количество столбцов второй матрицы.

$$C_{4 \times 5} = A_{4 \times 2} \cdot B_{2 \times 5}$$

Пример.

$$\begin{aligned} C_{2 \times 2} &= \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & 3 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 & 5 \\ 2 & -1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} 1 \cdot 4 + (-1) \cdot 2 + 2 \cdot 3 & 1 \cdot 5 + (-1)(-1) + 2(-2) \\ 2 \cdot 4 + 3 \cdot 2 + 0 \cdot 3 & 2 \cdot 5 + 3 \cdot (-1) + 0 \cdot (-2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & 2 \\ 14 & 17 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

### 7.2.7 Свойство антикоммутативности матрицы и его исключения

$$\boxed{A \cdot B \neq B \cdot A}$$

**Исключения:**  $A_{m \times n}$  и  $B_{m \times n}$

1.  $A = B$   
 $A \cdot B = A \cdot A = A^2$
2.  $B = 0$   
 $A \cdot 0 = 0 \cdot A = 0$
3.  $B = E$   
 $A \cdot E = E \cdot A = A$
4.  $B = A^{-1}$  – обратная матрица к  $A$   
 $A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = E$

Пример.

$$\begin{aligned} A &= \begin{pmatrix} 4 & 5 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} & B &= \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \\ A \cdot B &= \begin{pmatrix} 4 & 5 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ -1 & 8 \end{pmatrix} \\ B \cdot A &= \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 & 5 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & -3 \\ 0 & 7 \end{pmatrix} \end{aligned} \left. \vphantom{\begin{aligned} A \cdot B \\ B \cdot A \end{aligned}} \right\} A \cdot B \neq B \cdot A$$

### 7.2.8 Свойства произведения матриц

1.  $A \cdot B \neq B \cdot A$
2.  $1 \cdot A = A$
3.  $(A \cdot B) \cdot C = A \cdot (B \cdot C)$  – ассоциативность умножения матриц

**Доказательство.**

Пусть  $A_{m \times n}$ ,  $B_{k \times n}$ ,  $C_{n \times k}$

$$\begin{aligned}(A \cdot B) \cdot C &= \sum_{r=1}^n [(A \cdot B)]_{ir} [C]_{rj} = \sum_{r=1}^k \left( \sum_{s=1}^s [A]_{is} \cdot [B]_{sr} \right) \cdot [C]_{rj} = \\ &= \sum_{r=1}^n \sum_{s=1}^k [A]_{is} \cdot [B]_{sr} \cdot [C]_{rj} = \sum_{s=1}^k [A]_{is} \cdot \sum_{r=1}^n [B]_{sr} \cdot [C]_{rj} = \sum_{s=1}^k [A]_{is} \cdot [(B \cdot C)]_{sj} = A \cdot (B \cdot C)\end{aligned}$$

■

4.  $(A + B) \cdot C = A \cdot C + B \cdot C$  – дистрибутивность умножения матриц относительно сложения

**Доказательство.**

Пусть  $A_{m \times k}$ ,  $B_{m \times k}$ ,  $C_{k \times n}$

$$\begin{aligned}(A + B) \cdot C &= \sum_{r=1}^k [(A + B)]_{ir} \cdot [C]_{rj} = \sum_{r=1}^k ([A]_{ir} + [B]_{ir}) \cdot [C]_{rj} = \\ &= \sum_{r=1}^k ([A]_{ir} \cdot [C]_{rj} + [B]_{ir} \cdot [C]_{rj}) = \sum_{r=1}^k [A]_{ir} \cdot [C]_{rj} + \sum_{r=1}^k [B]_{ir} \cdot [C]_{rj} = A \cdot C + B \cdot C\end{aligned}$$

■

5.  $(A \cdot B)^T = B^T \cdot A^T$  – применение транспонирования к произведению матриц

**Доказательство.**

$A_{m \times n}$   $B_{m \times n}$

$$\begin{aligned}(A \cdot B)^T &= [(A \cdot B)^T]_{ij} = [A \cdot B]_{ji} = \sum_{r=1}^k [A]_{jr} \cdot [B]_{ri} = \\ &= \sum_{r=1}^k [A^T]_{ri} \cdot [B^T]_{ir} = \sum_{r=1}^k [B^T]_{ir} \cdot [A^T]_{ri} = [B^T \cdot A^T]_{ij} = B^T \cdot A^T\end{aligned}$$

■

### 7.3 Элементарные преобразования матриц

1. Перестановка строк (столбцов) матриц
2. Умножение элементов строки (столбца) матрицы на число, отличное от нуля
3. Прибавление к элементам одной строки (столбца) соответствующих элементов другой строки (столбца), умноженной на одно и то же число

Используя элементарные преобразования любую матрицу можно привести к ступенчатому виду

**Пример.** Ступенчатый вид

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 & 4 \\ -1 & 3 & 1 & -2 \\ 5 & 6 & -1 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & 10 & 5 & -2 \\ 0 & 13 & -13 & -20 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & 10 & 5 & -2 \\ 0 & 0 & -195 & -174 \end{pmatrix}$$

### 7.4 Минор матрицы. Ранг матрицы.

**Определение 1.** Минором  $k$ -го порядка матрицы  $A$  называется определитель, составленный из пересечения  $k$  строк и  $k$  столбцов матрицы  $A$  с сохранением их порядка.

**Определение 2.** Окаймляющим минором для минора  $M$  матрицы  $A$  называется минор  $M'$ , который получается из минора  $M$  путём добавления одной строки одного столбца. Порядок окаймляющего минора на единицу больше минора  $M$ .

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 5 & 1 & 3 \\ 3 & 2 & 7 & 5 \\ 1 & -1 & 0 & 7 \end{pmatrix} \quad M_2 = \begin{vmatrix} 4 & 5 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} \longrightarrow M'_3 = \begin{vmatrix} 4 & 5 & 1 \\ 3 & 2 & 7 \\ 1 & -1 & 0 \end{vmatrix} \text{ или } M'_3 = \begin{vmatrix} 4 & 5 & 3 \\ 3 & 2 & 5 \\ 1 & -1 & 7 \end{vmatrix}$$

**Определение 3.** Базисным минором матрицы  $A$  называется минор, который удовлетворяет следующим условиям:

1. Он не равен нулю
2. Его порядок равен рангу матрицы  $A$

**Определение 4.** Рангом матрицы  $A$  называется число, равное наибольшему порядку, отличного от нуля минора матрицы  $A$ .

Обозначение:  $\text{Rg } A$  или  $\text{rg } A$

**Определение 5.** Строки (столбцы) матрицы  $A$ , входящие в базисный минор, называются **базисом**.



**Теорема 1** (*О базисном миноре*).

- Базисные строки (столбцы) матрицы  $A$ , входящие в базисный минор, линейно независимы.
- Любую строку (столбец), не входящую в базисный минор, можно представить в виде линейной комбинации базисных строк (столбцов).

**Доказательство.**

- Пусть ранг матрицы  $A = r$ . Предположим, что строки матрицы  $A$  линейно зависимы. Тогда одну из них можно выразить как линейную комбинацию остальных базисных строк. Значит, в базисном миноре одна строка будет линейной комбинацией остальных строк и, по свойству определителей, этот минор будет равен нулю, что противоречит определению базисного минора. Следовательно, наше предположение неверно, и базисные строки, входящие в базисный минор, линейно независимы.
- Пусть базисный минор состоит из первых  $r$  строк и  $r$  столбцов матрицы  $A$ . Добавим к этому минору произвольную  $i$ -ую строку и  $j$ -й столбец. В результате получаем окаймляющий минор:

$$M = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1r} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2r} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{r1} & a_{r2} & \dots & a_{rr} \end{vmatrix} \longrightarrow M' = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1r} & a_{1j} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2r} & a_{2j} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{r1} & a_{r2} & \dots & a_{rr} & a_{rj} \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{ir} & a_{ij} \end{vmatrix}$$

Если  $j \leq r$ , то в миноре  $M'$  будет два одинаковых столбца и этот минор будет равен нулю.

Если  $j > r$ , то минор  $M'$  так же будет равен нулю (*Пояснение: Ранг матрицы  $A$  равен  $r$ , значит, наибольший порядок отличного от нуля минора равен  $r$ . Минор  $M'$  имеет ранг  $r + 1$ , значит, он равен нулю*).

Определитель можно вычислить путём разложения по какой-либо строке (столбцу), поэтому найдём определитель  $M'$  путём его разложения по  $j$ -ому столбцу.

$$\begin{aligned} a_{1j}A_{ij} + a_{2j}A_{2j} + \dots + a_{rj}A_{rj} + a_{ij}A_{ij} &= 0 \\ j = r + 1, \quad i = r + 1 &\Rightarrow \\ \Rightarrow a_{1,r+1}A_{1,r+1} + a_{2,r+1}A_{2,r+1} + \dots + a_{r,r+1}A_{r,r+1} + a_{r+1,r+1}A_{r+1,r+1} &= 0 \end{aligned}$$

$A_{ij} = (-1)^{i+j}M_{ij}$  – алгебраическое дополнение элемента  $a_{ij}$

$A_{r+1,r+1} = M$  – базисный минор; т.к.  $M \neq 0$ , то  $A_{r+1,r+1} \neq 0$

$$a_{r+1,r+1} = -\frac{A_{1,r+1}}{A_{r+1,r+1}}a_{1,r+1} - \frac{A_{2,r+1}}{A_{r+1,r+1}}a_{2,r+1} - \dots - \frac{A_{r,r+1}}{A_{r+1,r+1}}a_{r,r+1}$$

Обозначим:  $\lambda_i = -\frac{A_{i,r+1}}{A_{r+1,r+1}}, \quad i = 1, \dots, r$

$$a_{r+1,r+1} = \lambda_1 a_{1,r+1} + \lambda_2 a_{2,r+1} + \dots + \lambda_r a_{r,r+1}$$

Получили, что элементы  $i$ -й строке можно представить в виде линейной комбинации соответствующих элементов базисных строк, где  $j = 1, \dots, r$ .

Аналогично доказывается для столбцов. ■

## 7.5 Вычисление ранга матрицы

### 7.5.1 Метод окаймляющих миноров

Сначала берём минор 1-го порядка, то есть любой ненулевой элемент матрицы  $A$ . Составляем окаймляющий минор 2-го порядка для этого элемента, вычисляем его.

- Если он не равен нулю, то составляем окаймляющий минор 3-го порядка и так далее.
- Если окаймляющий минор равен нулю, то рассматриваем другой элемент.
- Если миноры  $(k + 1)$ -го порядка равны нулю, а среди миноров  $k$ -го порядка есть неравные нулю, значит, ранг матрицы  $A = k$

**Пример.**

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 & 7 \\ -1 & 4 & 0 & 5 \\ -3 & 1 & -1 & -2 \end{pmatrix}$$

$$M_1 = |2| = 2 \neq 0$$

$$M_2 = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 4 \end{vmatrix} = 8 + 3 = 11 \neq 0$$

$$M_{3_a} = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 \\ -1 & 4 & 0 \\ -3 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 0$$

$$M_{3_b} = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 7 \\ -1 & 4 & 5 \\ -3 & 1 & -2 \end{vmatrix} = 0$$

$$M_{3_c} = \begin{vmatrix} 3 & 1 & 7 \\ 4 & 0 & 5 \\ 1 & -1 & -2 \end{vmatrix} = 0$$

$$M_{3_d} = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 7 \\ -1 & 0 & 5 \\ -3 & -1 & -2 \end{vmatrix} = 0$$

$$\Downarrow \\ \text{Rg } A = 2$$

Все миноры 3-го порядка равны нулю, а среди миноров 2-го порядка есть определитель не равный нулю, значит, ранг матрицы равен 2.

### 7.5.2 Метод элементарных преобразований

#### **Теорема 2.**

Ранг матрицы не меняется при элементарных преобразованиях строк (столбцов) матрицы.

- Ранг матрицы равен количеству ненулевых строк ступенчатой матрицы, полученной из исходной путём элементарных преобразований.

**Пример.**

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 & 7 \\ -1 & 4 & 0 & 5 \\ -3 & 1 & -1 & -2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 & 7 \\ 0 & 11 & 1 & 17 \\ 0 & 11 & 1 & 17 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 & 7 \\ 0 & 11 & 1 & 17 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \text{Rg } A = 2$$

2-ю строку умножаем на 2 и прибавляем 1-ю.

3-ю строку умножаем на 2 и прибавляем 1-ю, умноженную на 3.

## 7.6 Обратные матрицы

**Определение 1.** Обратной матрицей квадратной матрицы  $A_{m \times n}$  называется матрица  $A_{m \times n}^{-1}$  такая, что

$$A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = E$$

Обратная матрица вычисляется по формуле:

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \cdot \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & \dots & A_{1n} \\ A_{21} & A_{22} & \dots & A_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{n1} & A_{n2} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix}^T$$

$\det A$  – определитель матрицы  $A$

$A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$  – алгебраическое дополнение элемента  $a_{ij}$  матрицы  $A$ .

**Определение 2.** Матрица  $A^*$ , являющаяся транспонированной матрицей алгебраических дополнений элементов матрицы  $A$ , называется **присоединённой матрицей**.

$$A^* = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & \dots & A_{1n} \\ A_{21} & A_{22} & \dots & A_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{n1} & A_{n2} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \dots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \dots & A_{n2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{1n} & A_{2n} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix}$$
$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \cdot A^*$$

### 7.6.1 Критерий существования обратной матрицы

#### Теорема 1.

Для того чтобы матрица  $A$  имела обратную матрицу, необходимо и достаточно, чтобы определитель матрицы  $A$  был не равен нулю.

**Доказательство** (Необходимость).

Пусть матрица  $A$  имеет обратную матрицу. Тогда по определению  $A \cdot A^{-1} = E$ .

Значит,  $\det(A \cdot A^{-1}) = \det E = 1$ .

По свойству определителей (с учётом предыдущего):

$$\det(A \cdot A^{-1}) = \det A \cdot \det A^{-1} = 1 \Rightarrow \det A \neq 0$$

■

**Доказательство** (Достаточность).

Пусть определитель матрицы  $A$  не равен нулю. Если определитель матрицы разложить по  $i$ -ой строке:

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} A_{ij} = a_{i1} A_{i1} + a_{i2} A_{i2} + \dots + a_{in} A_{in} = \det A$$
$$\sum_{j=1}^n a_{ij} A_{kj} = a_{i1} A_{k1} + a_{i2} A_{k2} + \dots + a_{in} A_{kn} = 0$$

Рассмотрим матрицу  $B$ :  $b_{ij} = \frac{A_{ji}}{\det A}$

$A_{ij}$  – алгебраическое дополнение элемента  $a_{ji}$  матрицы  $A$ .

Найдём  $C = A \cdot B$ :

$$C_{ij} = \sum_{k=1}^n a_{ik} \cdot b_{kj} = \sum_{k=1}^n a_{ik} \cdot \frac{A_{jk}}{\det A} = \frac{1}{\det A} \sum_{k=1}^n a_{ik} A_{jk} = \begin{cases} \frac{1}{\det A} \cdot \det A = 1 & , \text{ если } i = j \\ \frac{1}{\det A} \cdot 0 = 0 & , \text{ если } i \neq j \end{cases}$$

$$\Rightarrow C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{matrix} C_{ij} = 1, \text{ если } i = j \\ C_{ij} = 0, \text{ если } i \neq j \end{matrix}$$

Аналогично  $C' = B \cdot A$

$$C'_{ij} = \sum_{k=1}^n b_{ik} \cdot a_{kj} = \sum_{k=1}^n \frac{A_{ki}}{\det A} \cdot a_{kj} = \frac{1}{\det A} \sum_{k=1}^n A_{ki} a_{kj} = \begin{cases} \frac{1}{\det A} \cdot \det A = 1 & , \text{ если } i = j \\ \frac{1}{\det A} \cdot 0 = 0 & , \text{ если } i \neq j \end{cases}$$

$$\Rightarrow C' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{matrix} C'_{ij} = 1, \text{ если } i = j \\ C'_{ij} = 0, \text{ если } i \neq j \end{matrix}$$

Получим  $\left. \begin{matrix} A \cdot B = E \\ B \cdot A = E \end{matrix} \right\} \Rightarrow$  по определению  $B = A^{-1}$

Таким образом, доказали, что если определитель матрицы не равен нулю, то эта матрица имеет обратную. ■

## Теорема 2.

Пусть матрицы  $A_{n \times n}$  и  $B_{n \times n}$  имеют обратные матрицы  $A_{n \times n}^{-1}$  и  $B_{n \times n}^{-1}$ . Тогда обратная матрица к их произведению равна произведению обратных матриц:

$$(A \cdot B)^{-1} = B^{-1} \cdot A^{-1}$$

**Доказательство.**

$$C = A \cdot B \quad C^{-1} = (A \cdot B)^{-1}$$

$$\overbrace{(A \cdot B)}^C \cdot \overbrace{(A \cdot B)^{-1}}^{C^{-1}} = (A \cdot B) \cdot (B^{-1} \cdot A^{-1}) = A \cdot \underbrace{(B \cdot B^{-1})}_E \cdot A^{-1} = \underbrace{A \cdot E}_A \cdot A^{-1} = A \cdot A^{-1} = E$$

$$(A \cdot B)^{-1} \cdot (A \cdot B) = (B^{-1} \cdot A^{-1}) \cdot (A \cdot B) = B^{-1} \cdot \underbrace{(A^{-1} \cdot A)}_E \cdot B = B^{-1} \cdot \underbrace{E \cdot B}_B = B^{-1} \cdot B = E$$

$$C \cdot C^{-1} = E \quad C^{-1} \cdot C = E \quad \blacksquare$$

**Теорема 3.**

Пусть матрица  $A_{n \times n}$  имеет обратную матрицу. Тогда:

$$(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$$

**Доказательство.**

$$C = A^T$$

$$C \cdot C^{-1} = A^T \cdot (A^T)^{-1} = A^T \cdot (A^{-1})^T = (A \cdot A^{-1})^T = E^T = E$$

$$C^{-1} \cdot C = (A^T)^{-1} \cdot A^T = (A^{-1})^T \cdot A^T = (A^{-1} \cdot A)^T = E^T = E$$

■

**Определение 3.** Матрица, у которой определитель не равен нулю, называется **невырожденной**. Её также называют **обратимой**.

**Определение 4.** Матрица, у которой определитель равен нулю, называется **вырожденной**.

## 7.7 Вычисление обратной матрицы

### 7.7.1 Метод алгебраических дополнений

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \cdot \left( \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & \dots & A_{1n} \\ A_{21} & A_{22} & \dots & A_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{n1} & A_{n2} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix}^T \right)$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

1. Находим определитель:

$$\det A = \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 4$$

2. Находим алгебраическое дополнение элементов матрицы  $A$ :  $A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$

$$A_{11} = (-1)^{1+1} M_{11} = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -3 \quad A_{21} = (-1)^{2+1} M_{21} = \begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -1$$

$$A_{12} = (-1)^{1+2} M_{12} = \begin{vmatrix} -1 & 3 \\ 3 & 0 \end{vmatrix} = 9 \quad A_{22} = (-1)^{2+2} M_{22} = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 0 \end{vmatrix} = 3$$

$$A_{13} = (-1)^{1+3} M_{13} = \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = -7 \quad A_{23} = (-1)^{2+3} M_{23} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = -1$$

$$A_{31} = (-1)^{3+1} M_{31} = \begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = 2$$

$$A_{32} = (-1)^{3+2} M_{32} = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} = -2$$

$$A_{33} = (-1)^{3+3} M_{33} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = 2$$

3. Находим обратную матрицу ( $A^{-1}$ ):

$$A^{-1} = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} -3 & 9 & -7 \\ -1 & 3 & -1 \\ 2 & -2 & 2 \end{pmatrix} = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} -3 & -1 & 2 \\ 9 & 3 & -2 \\ -7 & -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{3}{4} & -\frac{1}{4} & \frac{2}{4} \\ \frac{9}{4} & \frac{3}{4} & -\frac{2}{4} \\ -\frac{7}{4} & -\frac{1}{4} & \frac{2}{4} \end{pmatrix}$$

Проверка:  $A^* = A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = E$

$$A^{-1} \cdot A = \underbrace{\frac{1}{4} \cdot \begin{pmatrix} -3 & -1 & 2 \\ 9 & 3 & -2 \\ -7 & -1 & 2 \end{pmatrix}}_{A^{-1}} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 0 \end{pmatrix}}_A = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

### 7.7.2 Метод Жордана-Гаусса (с помощью элементарных преобразований)

1. Приписываем к матрице  $A$  справа единичную матрицу такой же размерности  $A|E$
2. С помощью элементарных преобразований строк матрицы приводим матрицу  $A$  к треугольному виду
  - (2.1) Перепишем первую строку без изменения
  - (2.2) С помощью элементарных преобразований получаем нулевые элементы в первом столбце матрицы  $A$  под элементом  $A_{11}$
  - (2.3) Перепишем первые две строки без изменения
  - (2.4) С помощью элементарных преобразований строк получаем нулевые элементы во втором столбце под элементом  $A_{22}$
  - (2.5) и так далее ...
3. С помощью элементарных преобразований строк получаем в левой части расширенной матрицы диагональную матрицу
  - (3.1) Перепишем первую строку без изменений
  - (3.2) Получаем нулевые элементы в последнем столбце над элементом  $a'_{nn}$
  - (3.3) Перепишем первые две строки без изменений
  - (3.4) Получаем нулевые элементы в предпоследнем столбце над элементом  $a'_{n-1,n-1}$
  - (3.5) и так далее ...
4. Делим каждую строку матрицы на соответствующий диагональный элемент в левой части полученной матрицы.
5. В результате в левой части получается единичная матрица  $E$ , а в правой части обратная матрица  $A^{-1}$

**Примечание.** Если элемент  $a_{11} = 0$ , то переставляем две строки матрицы так, чтобы  $a_{11} \neq 0$

**Пример.**

$$\begin{aligned} A|E &= \left( \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \sim \left( \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & -3 & 0 & 1 \end{array} \right) \sim \\ &\sim \left( \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -4 & 7 & 1 & -2 \end{array} \right) \sim \left( \begin{array}{ccc|ccc} -4 & 0 & 0 & 3 & 1 & -2 \\ 0 & 4 & 0 & 9 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & -4 & 7 & 1 & -2 \end{array} \right) \sim \left( \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -\frac{3}{4} & -\frac{1}{4} & \frac{2}{4} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{9}{4} & \frac{3}{4} & -\frac{2}{4} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{7}{4} & -\frac{1}{4} & \frac{2}{4} \end{array} \right) \end{aligned}$$





**Определение 3.**

СЛАУ, имеющая решение, называется **совместной**.

СЛАУ, не имеющая решение, называется **не совместной**.

**Определение 4.**

Совместная СЛАУ, имеющая единственное решение, называется

**совместной определённой**.

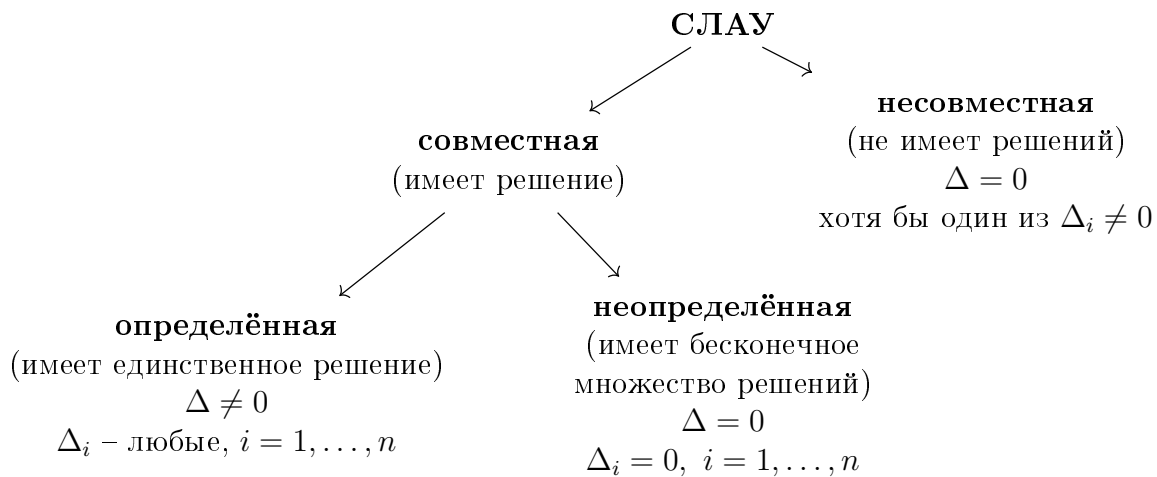
Совместная СЛАУ, имеющая бесконечное множество решений, называется

**совместной неопределённой**.

**Определение 5.**

СЛАУ (1), у которой все члены равны нулю, называется **однородной**.

СЛАУ (1), у которой хотя бы один  $b_i \neq 0$ ,  $0 \leq i \leq m$ , называется **неоднородной**.

**8.2 Решение линейных уравнений**

1.  $A \cdot X = B$

Умножим обе части уравнения на обратную матрицу слева

$$\underbrace{A^{-1} \cdot A}_E \cdot X = A^{-1} \cdot B \Rightarrow \underbrace{E \cdot X}_X = A^{-1} \cdot B \Rightarrow \boxed{X = A^{-1} \cdot B}$$

2.  $X \cdot A = B$

Умножим обе части уравнения на обратную матрицу справа

$$X \cdot \underbrace{A^{-1} \cdot A}_E = B \cdot A^{-1} \Rightarrow \underbrace{X \cdot E}_X = B \cdot A^{-1} \Rightarrow \boxed{X = B \cdot A^{-1}}$$

3.  $A \cdot X \cdot C = B$

Умножим обе части уравнения на обратную матрицу  $A$  слева и на обратную матрицу  $C$  справа

$$\underbrace{A^{-1} \cdot A}_E \cdot X \cdot \underbrace{C \cdot C^{-1}}_E = A^{-1} \cdot B \cdot C^{-1} \Rightarrow \underbrace{E \cdot X \cdot E}_X = A^{-1} \cdot B \cdot C^{-1} \Rightarrow X = \boxed{A^{-1} \cdot B \cdot C^{-1}}$$

**Пример.**

$$X \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 5 & 0 \end{pmatrix}}_A = \underbrace{\begin{pmatrix} -3 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}}_B \quad X \cdot A = B \quad X = B \cdot A^{-1}$$

$$A|E = \left( \begin{array}{cc|cc} 2 & -1 & 1 & 0 \\ 5 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \sim \left( \begin{array}{cc|cc} 2 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 5 & -5 & 2 \end{array} \right) \sim \left( \begin{array}{cc|cc} 10 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 5 & -5 & 2 \end{array} \right) \sim \left( \begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{5} \\ 0 & 1 & -1 & \frac{2}{5} \end{array} \right)$$

$$X = B \cdot A^{-1} = \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{5} \\ -1 & \frac{2}{5} \end{pmatrix} = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -5 & 2 \end{pmatrix} = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} -10 & 1 \\ 5 & -1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} -2 & \frac{1}{5} \\ 1 & -\frac{1}{5} \end{pmatrix}$$

### 8.3 Формулы Крамера для решения СЛАУ

Пусть задана СЛАУ в координатной форме (1). Запишем эту СЛАУ в матричном виде, где  $A$  имеет размерность  $n \times n$  (количество уравнений = количество переменных).

$$A \cdot X = B$$

$$A_{n \times n} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}, \quad B_{n \times 1} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$

Пусть матрица  $A$  невырожденная,  $\det A \neq 0$ . Тогда обратная матрица будет иметь вид:

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \cdot \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & \dots & A_{1n} \\ A_{21} & A_{22} & \dots & A_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{n1} & A_{n2} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} \frac{A_{11}}{\det A} & \frac{A_{21}}{\det A} & \dots & \frac{A_{n1}}{\det A} \\ \frac{A_{12}}{\det A} & \frac{A_{22}}{\det A} & \dots & \frac{A_{n2}}{\det A} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{A_{1n}}{\det A} & \frac{A_{2n}}{\det A} & \dots & \frac{A_{nn}}{\det A} \end{pmatrix}$$

Решением уравнения будет  $X = A^{-1} \cdot B$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = X = \begin{pmatrix} \frac{A_{11}}{\det A} & \frac{A_{21}}{\det A} & \dots & \frac{A_{n1}}{\det A} \\ \frac{A_{12}}{\det A} & \frac{A_{22}}{\det A} & \dots & \frac{A_{n2}}{\det A} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{A_{1n}}{\det A} & \frac{A_{2n}}{\det A} & \dots & \frac{A_{nn}}{\det A} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$

$$x_1 = \frac{A_{11}}{\det A} \cdot b_1 + \frac{A_{21}}{\det A} \cdot b_2 + \dots + \frac{A_{n1}}{\det A} \cdot b_n = \frac{A_{11}b_1 + A_{21}b_2 + \dots + A_{n1}b_n}{\det A}$$

Числитель – разложение определителя  $A_1$  по столбцу:

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ b_2 & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_n & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} \quad \Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$\det A = \Delta \quad x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta}$$

Определитель  $\Delta_1$  получается из определителя  $\Delta$ , если заменить первый столбец этого определителя на столбец свободных членов СЛАУ. Определитель  $\Delta_1$  называется **главным**.

$$x_i = \frac{\Delta_i}{\Delta}, \quad i = 1, \dots, n \quad \text{— формула Крамера}$$

Определитель  $\Delta_i$  получается из главного определителя путём замены  $i$ -го столбца на столбец свободных членов СЛАУ.

**Замечание.** Если главный определитель равен нулю, то формулу Крамера использовать нельзя.

**Примечание.** Однородная СЛАУ всегда совместная.

**Примечание.**

- Если матрица  $A$  квадратная и невырожденная и её определитель не равен нулю, то СЛАУ имеет единственное решение:

$$x_1 = x_2 = \dots = x_n = 0$$

- Если матрица  $A$  квадратная и вырожденная, то СЛАУ имеет бесконечное множество решений.

## 8.4 Теорема Кронекера-Капелли

**Теорема 1.**

Для того чтобы СЛАУ была совместной, необходимо и достаточно, чтобы ранг матрицы  $A$  был равен рангу расширенной матрицы.

$$A \cdot X = B \quad A|B \quad \text{Rg } A = \text{Rg}(A|B)$$

**Доказательство (Необходимость).**

Пусть СЛАУ  $A \cdot X = b$  — совместная и пусть  $\text{Rg } A = r$ .

Пусть базисный минор состоит из первых  $r$  строк и  $r$  столбцов матрицы  $A$ .

$$M = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1r} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2r} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{r1} & a_{r2} & \dots & a_{rr} \end{vmatrix}$$

Если использовать векторную запись СЛАУ, то если СЛАУ имеет решение  $x_1, x_2, \dots, x_n$ , тогда любой столбец матрицы  $A$  можно представить в виде:

$$a_1 x_1 + a_2 x_2 + \dots + a_r x_r + a_{r+1} x_{r+1} + \dots + a_n x_n = b \quad (1)$$

Согласно теореме о базисном миноре (С.49, Т.1), любой столбец матрицы  $A$ , который не входит в базисный минор, можно представить в виде линейной комбинации столбцов базисного минора.

Тогда:

[illegible]

Подставим (2) в (1):

$$\begin{aligned}
& a_1x_1 + a_2x_2 + \dots + a_rx_r + (\lambda_{1,r+1}a_1 + \lambda_{2,r+1}a_2 + \dots + \lambda_{r,r+1}a_r)x_{r+1} + \\
& \quad + \dots + (\lambda_{1n}a_1 + \lambda_{2n}a_2 + \dots + \lambda_{rn}a_n)x_n = b \\
& \underbrace{(x_1 + \lambda_{1,r+1}x_{r+1} + \dots + \lambda_{1n}x_n)}_{\beta_1} a_1 + \underbrace{(x_2 + \lambda_{2,r+1}x_{r+1} + \dots + \lambda_{2n}x_n)}_{\beta_2} a_2 + \dots + \\
& \quad + \underbrace{(x_r + \lambda_{r,r+1}x_{r+1} + \dots + \lambda_{rn}x_n)}_{\beta_r} a_r = b \\
& \Downarrow \\
& \beta_1 a_1 + \beta_2 a_2 + \dots + \beta_r a_r = b \\
& \beta_i = \text{const}, \quad i = 1, \dots, r
\end{aligned}$$

В результате столбец свободных членов можно представить в виде линейной комбинации столбцов базисного минора. Отсюда следует, что базисный минор  $M$  матрицы  $A$  будет и базисным минором расширенной матрицы  $A|B$ , так как минор  $M$  не равен нулю и любой окаймляющий минор  $M'$  будет равен нулю.

1. Если в качестве окаймляющего минора будет минор, который входит в столбец матрицы  $A$ , то этот минор будет равен нулю по определению базисного минора матрицы  $A$ .
2. Если в окаймляющем миноре будет столбец свободных членов, то этот минор будет равен нулю по свойству определителей, так как этот столбец  $b$  будет линейной комбинацией остальных столбцов определителя.

$$\underbrace{\text{Rg } A}_r = \underbrace{\text{Rg}(A|B)}_r$$

**Доказательство (Достаточность).**

Пусть  $\text{Rg } A = \text{Rg}(A|B)$  и пусть базисный минор состоит из первых  $r$  строк и  $r$  столбцов матрицы  $A$ .

$$M = \begin{vmatrix} a_1 1 & a_1 2 & \dots & a_1 r \\ a_2 1 & a_2 2 & \dots & a_2 r \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_r 1 & a_r 2 & \dots & a_r r \end{vmatrix}$$

Тогда столбец  $b$  можно представить в виде линейной комбинации столбцов базисного минора.

$$b = x_1^\circ a_2 + x_2^\circ a_2 + \dots + x_r^\circ a_r + 0 \cdot a_{r+1} + 0 \cdot a_{r+2} + \dots + 0 \cdot a_n$$

$x_1^\circ, x_2^\circ, \dots, x_r^\circ$  – коэффициенты линейной комбинации

$$x_i = const, \quad i = 1, \dots, r$$

Добавим к этой линейной комбинации вектора:

$$a_{r+1}, a_{r+2}, \dots, a_n \quad x_{r+1}^o = 0, x_{r+2}^o = 0, \dots, x_n^o = 0$$

$$\begin{aligned} x &= (x_1, x_2, \dots, x_r, x_{r+1}, x_{r+2}, \dots, x) = \\ &= (x_1, x_2, \dots, x_r, 0, 0, \dots, 0) \end{aligned}$$

Этот набор переменных составляет решение СЛАУ, то есть СЛАУ является совместной. ■

## 8.5 Однородные СЛАУ

$$A \cdot X = \Theta \quad \Theta_{m \times 1} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} \quad X_{n \times 1} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \quad A_{m \times n} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

$X$  – матрица-столбец или столбец неизвестных

$A$  – матрица

**Теорема 2** (*О свойствах решений однородных СЛАУ*).

Пусть  $X^{(1)}, X^{(2)}, \dots, X^{(k)}$  – решение СЛАУ. Тогда их линейная комбинация тоже является решением СЛАУ.

**Доказательство.**

$$A \cdot X = \Theta$$

$$X = \lambda_1 X^{(1)} + \lambda_2 X^{(2)} + \dots + \lambda_k X^{(k)} = \sum_{i=1}^k \lambda_i \cdot X^{(i)}$$

$$\lambda_i = const, \quad i = 1, \dots, k$$

$$A \cdot X = A \cdot \sum_{i=1}^k \lambda_i \cdot X^{(i)} \stackrel{\substack{\text{исп. св-ва} \\ \text{действий} \\ \text{с матрицами}}}{=} \sum_{i=1}^k A \cdot \lambda_i \cdot X^{(i)} = \sum_{i=1}^k \lambda_i \cdot \underbrace{A \cdot X^{(i)}}_{\Theta} = \sum_{i=1}^k \lambda_i \cdot \Theta = \Theta$$

То есть получили  $A \cdot X = \Theta$

$$A \cdot X^{(i)} = \Theta, \text{ т.к. } X^{(i)} \text{ – решение однородной СЛАУ } A \cdot X = \Theta$$

В результате получили, что столбец  $X$ , который является линейной комбинацией решения однородной СЛАУ, является решением однородной СЛАУ. ■

**Определение 6.** Набор  $k = n - r$  линейно-независимых решений однородной СЛАУ называется **фундаментальной системой решений** однородной СЛАУ, где  $n$  – количество неизвестных, а  $r$  – ранг матрицы  $A$ .

**Теорема 3** (О существовании фундаментальной системы решений однородной СЛАУ). Пусть имеется однородная СЛАУ  $A \cdot X = \Theta$  с  $n$  неизвестными и  $\text{Rg } A = r$ . Тогда существует набор  $k = n - r$  решений однородной СЛАУ, который образует фундаментальную систему решений.

$$X^{(1)}, X^{(2)}, \dots, X^{(k)}$$

**Доказательство.**

Пусть базисный минор матрицы  $A$  состоит из первых  $r$  строк и  $r$  столбцов матрицы  $A$ . Тогда любая строка матрицы  $A$  с номерами  $r+1, \dots, m$  будет линейной комбинацией строк базисного минора по теореме о базисном миноре (С.49, Т.1).

Если решение СЛАУ  $x_1, x_2, \dots, x_n$  удовлетворяет уравнениям СЛАУ, соответствующим строкам базисного минора, то это решение будет удовлетворять и остальным уравнениям СЛАУ (с  $r + 1$  до  $m$ ). Поэтому исключим из системы уравнения с  $r + 1$  до  $m$ . В результате получим следующую систему уравнений:

[illegible]

Переменные, соответствующие базисным столбцам, называются базисными переменными, а остальные свободными.

В системе (3) базисными переменными являются  $x_1, x_2, \dots, x_r$ , а свободными являются  $x_{r+1}, \dots, x_n$

В системе (3) оставим в левой части слагаемые, содержащие базисные переменные, а в правой свободные:

[illegible]

Если свободным переменным  $x_1, x_2, \dots, x_r$  придавать различные значения, то в системе (4) главный определитель левой части будет не равен нулю, так как этот определитель равен базисному минору матрицы  $A$  и эта система будет иметь единственное решение.

Возьмём  $k$  наборов свободных переменных вида:

$$\begin{array}{cccc}
 x_{r+1}^{(1)} = 1 & x_{r+1}^{(2)} = 0 & \dots & x_{r+1}^{(k)} = 0 \\
 x_{r+2}^{(1)} = 0 & x_{r+2}^{(2)} = 1 & \dots & x_{r+2}^{(k)} = 0 \\
 \dots & \dots & \dots & \dots \\
 x_n^{(1)} = 0 & x_n^{(2)} = 0 & \dots & x_n^{(k)} = 1
 \end{array}$$

При каждом наборе свободных переменных получаем решение однородной СЛАУ.

$$x^{(i)} = \begin{pmatrix} x_1^{(i)} \\ x_2^{(i)} \\ \vdots \\ x_r^{(i)} \\ x_{r+1}^{(i)} \\ \vdots \\ x_n^{(i)} \end{pmatrix} \quad \text{из СЛАУ (4)} \quad i = 1, \dots, k$$

В результате получаем  $k$  решений однородной СЛАУ. Покажем, что они являются линейно-независимыми. Пусть линейная комбинация этих решений равна нулю.

$$\lambda_1 \underbrace{\begin{pmatrix} x_1^{(1)} \\ x_2^{(1)} \\ \vdots \\ x_r^{(1)} \\ x_{r+1}^{(1)} \\ x_{r+2}^{(1)} \\ \vdots \\ x_n^{(1)} \end{pmatrix}}_{X^{(1)}} + \lambda_2 \underbrace{\begin{pmatrix} x_1^{(2)} \\ x_2^{(2)} \\ \vdots \\ x_r^{(2)} \\ x_{r+1}^{(2)} \\ x_{r+2}^{(2)} \\ \vdots \\ x_n^{(2)} \end{pmatrix}}_{X^{(2)}} + \dots + \lambda_k \underbrace{\begin{pmatrix} x_1^{(k)} \\ x_2^{(k)} \\ \vdots \\ x_r^{(k)} \\ x_{r+1}^{(k)} \\ x_{r+2}^{(k)} \\ \vdots \\ x_n^{(k)} \end{pmatrix}}_{X^{(k)}} = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}}_{\Theta}$$

$$r+1: \quad 1 \cdot \lambda_1 + 0 \cdot \lambda_2 + \dots + 0 \cdot \lambda_k = 0 \Rightarrow \lambda_1 = 0$$

$$r+2: \quad 0 \cdot \lambda_1 + 1 \cdot \lambda_2 + \dots + 0 \cdot \lambda_k = 0 \Rightarrow \lambda_2 = 0$$

$$n: \quad 0 \cdot \lambda_1 + 0 \cdot \lambda_2 + \dots + 1 \cdot \lambda_k = 0 \Rightarrow \lambda_k = 0$$

В результате получили тривиальную, равную нулю, линейную комбинацию решений однородной СЛАУ.

Тогда по определению эти решения являются линейно-независимыми.

Тогда по определению они образуют фундаментальную систему решений СЛАУ. ■

**Определение 7.** Если в каждом столбце фундаментальной системе решений все свободные переменные равны нулю, кроме одного, равного единице, то такая ФСР называется **нормальной**.





Решаем систему и получаем следующее решение:

[illegible]

Если столбцы  $X^{(1)}, X^{(2)}, \dots, X^{(k)}$  образуют ФСР, то они удовлетворяют решению (4).

[illegible]

$$X^{(i)} = \begin{pmatrix} X_1^{(i)} \\ X_2^{(i)} \\ \vdots \\ X_r^{(i)} \\ X_{r+1}^{(i)} \\ \vdots \\ X_n^{(i)} \end{pmatrix} \quad i - \text{номер столбца, входящего в ФСР.}$$

Составим матрицу, в которой первый столбец — это столбец  $X$ , являющийся решением СЛАУ:

$$B = \begin{pmatrix} x_1 & x_1^{(1)} & x_1^{(2)} & \dots & x_1^{(k)} \\ x_2 & x_2^{(1)} & x_2^{(2)} & \dots & x_2^{(k)} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ x_r & x_r^{(1)} & x_r^{(2)} & \dots & x_r^{(k)} \\ x_{r+1} & x_{r+1}^{(1)} & x_{r+1}^{(2)} & \dots & x_{r+1}^{(k)} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ x_n & x_n^{(1)} & x_n^{(2)} & \dots & x_n^{(k)} \\ X & X^{(1)} & X^{(2)} & \dots & X^{(k)} \end{pmatrix}$$

Вычтем из элементов первой строки линейную комбинацию соответствующих элементов строк с  $r + 1$  до  $n$  с коэффициентами  $\lambda_{1,r+1}, \lambda_{1,r+2}, \dots, \lambda_{1n}$  :

$$\begin{array}{lcl} x_1^{(1)} - \lambda_{1,r+1}x_{r+1}^{(1)} - \lambda_{1,r+2}x_{r+2}^{(1)} - \dots - \lambda_{1n}x_n^{(1)} = 0 & (\text{используя } 5) \\ x_2^{(2)} - \lambda_{1,r+1}x_{r+1}^{(2)} - \lambda_{1,r+2}x_{r+2}^{(2)} - \dots - \lambda_{1n}x_n^{(2)} = 0 & (\text{используя } 5) \\ \vdots \\ x_r^{(k)} - \lambda_{1,r+1}x_{r+1}^{(i)} - \lambda_{1,r+2}x_{r+2}^{(k)} - \dots - \lambda_{1n}x_n^{(k)} = 0 & (\text{используя } 5) \\ \Downarrow \\ x_1 - \lambda_{1,r+1}x_{r+1} - \lambda_{1,r+2}x_{r+2} - \dots - \lambda_{1n}x_n = 0 \end{array}$$

Получили, что элементы первой строки равны нулю.

Аналогично вычитаем из элементов второй строки соответствующие элементы строк с  $r + 1$  до  $n$  с коэффициентами  $\lambda_{2,r+1}, \lambda_{2,r+2}, \dots, \lambda_{2n}$ .

Используя (5) получаем, что все элементы второй строки тоже равны нулю. Далее продолжаем вычитать из элементов  $r$ -ой строки соответствующие элементы строк с  $r + 1$  до  $n$  с коэффициентами  $\lambda_{r,r+1}, \lambda_{r,r+2}, \dots, \lambda_{rn}$ .

В результате получаем, что в преобразованной матрице первые  $r$  строк будут нулевыми.

$$B \sim \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ x_{r+1} & x_{r+1}^{(1)} & x_{r+1}^{(2)} & \dots & x_{r+1}^{(k)} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ x_n & x_n^{(1)} & x_n^{(2)} & \dots & x_n^{(k)} \\ X & X^{(1)} & X^{(2)} & \dots & X^{(k)} \end{pmatrix}$$

Поскольку элементарные преобразования не меняют ранг матрицы, то получаем, что  $\text{Rg } B = k$ , где  $k = n - r$ . По условию столбцы  $X^{(1)}, X^{(2)}, \dots, X^{(k)}$  образуют ФСР, следовательно, являются линейно независимыми. Значит, первый столбец матрицы  $B$  можно представить в виде линейной комбинации столбцов  $X^{(1)}, X^{(2)}, \dots, X^{(k)}$ . Получили:

$$X = c_1 X^{(1)} + c_2 X^{(2)} + \dots + c_k X^{(k)}$$

■

## 8.6 Неоднородные СЛАУ

**Теорема 5** (О связи решений неоднородной и соответствующей однородной СЛАУ). Пусть  $X^{(0)}$  – это некоторое решение неоднородной СЛАУ  $A \cdot X = B$ . Произвольный столбец  $X$  является решением СЛАУ  $A \cdot X = B$  тогда и только тогда, когда его можно представить в виде:

$$X = X^{(0)} + Y, \text{ где } Y \text{ – решение соответствующей однородной СЛАУ } A \cdot Y = \Theta$$

**Доказательство** (Необходимость).

Пусть  $X$  – решение СЛАУ  $A \cdot X = B$ . Обозначим  $Y = X - X^{(0)}$ .

Найдём произведение:

$$A \cdot Y = A(X - X^{(0)}) = \underbrace{A \cdot X}_B - \underbrace{A \cdot X^{(0)}}_B = \Theta \Rightarrow Y \text{ – решение соответствующей однородной СЛАУ } A \cdot Y = \Theta$$

■

**Доказательство** (Достаточность).

Пусть  $X$  можно представить в виде  $X = X^{(0)} + Y$ , где  $Y$  – решение соответствующей однородной СЛАУ  $A \cdot Y = \Theta$ . Тогда найдём произведение:

$$A \cdot X = A(X^{(0)} + Y) = \underbrace{A \cdot X^{(0)}}_B + \underbrace{A \cdot Y}_\Theta = B + \Theta = B \Rightarrow X \text{ – решение неоднородной СЛАУ } A \cdot X = B$$

■

**Теорема 6** (*О структуре общего решения неоднородной СЛАУ*).

Пусть  $X^{(0)}$  — частное решение неоднородной СЛАУ  $A \cdot X = B$ .

Пусть  $X^{(1)}, X^{(2)}, \dots, X^{(k)}$  — некоторая ФСР, соответствующая однородной СЛАУ  $A \cdot X = \Theta$ . Тогда общее решение неоднородной СЛАУ будет иметь вид:

$$X_{\text{неод.}} = X^{(0)} + c_1 X^{(1)} + c_2 X^{(2)} + \dots + c_k X^{(k)} \quad c_i \in \mathbb{R}, i = 1, \dots, k$$

**Доказательство.**

$$X^{(i)}, i = 1, \dots, k \quad A \cdot X^{(i)} = \Theta$$

$$\begin{aligned} A \cdot X_{\text{неод.}} &= A \cdot (X^{(0)} + c_1 X^{(1)} + c_2 X^{(2)} + \dots + c_k X^{(k)}) = \\ &= \underbrace{A \cdot X^{(0)}}_B + c_1 \cdot \underbrace{A X^{(1)}}_{\Theta} + c_2 \cdot \underbrace{A X^{(2)}}_{\Theta} + \dots + c_k \cdot \underbrace{A X^{(k)}}_{\Theta} = \\ &= B + c_1 \Theta + c_2 \Theta + \dots + c_k \Theta = B \end{aligned}$$

■

**Пример.** Найти ФСР однородной СЛАУ:

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 2x_3 - x_4 = 0 \\ -x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = 0 \\ 3x_1 - 2x_2 + 3x_3 - 2x_4 = 0 \end{cases}$$

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 & -1 \\ -1 & 1 & -1 & 1 \\ 3 & -2 & 3 & -2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{Rg } A = 2$$

Базисные переменные:  $x_1, x_2$

Свободные переменные:  $x_3, x_4$

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 2x_3 - x_4 = 0 \\ -x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = 0 \end{cases} \quad \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\ 2 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\text{Пусть } \begin{cases} x_3 = t, t \in \mathbb{R} \\ x_4 = q, q \in \mathbb{R} \end{cases} \quad \begin{cases} x_2 = -q \\ x_1 = -\frac{1}{2}q - t + \frac{1}{2}q = -t \end{cases}$$

$$X_{\text{одн.}} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -t \\ -q \\ t \\ q \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -t \\ 0 \\ t \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ -q \\ 0 \\ q \end{pmatrix} = t \underbrace{\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}}_{X^{(1)}} + q \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}}_{X^{(2)}}$$

$$\text{ФСР: } X^{(1)} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad X^{(2)} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

**Пример.**

$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + x_3 = 0 \\ 3x_1 + 7x_2 + 2x_3 = -2 \end{cases}$$

$$A|B = \left( \begin{array}{ccc|c} 3 & 2 & 1 & 0 \\ 3 & 7 & 2 & -2 \end{array} \right) \sim \left( \begin{array}{ccc|c} x_1 & x_2 & x_3 & \\ 3 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 5 & 1 & -2 \end{array} \right) \quad \text{Rg } A|B = 2$$

Базисные переменные:  $x_1, x_2$

Свободные переменные:  $x_3$

$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + x_3 = 0 \\ \quad + 5x_2 + x_3 = -2 \end{cases} \quad \text{Обозначим:} \quad \begin{array}{l} x_3 = t \\ x_2 = -\frac{1}{5}t - \frac{2}{5} \end{array} \quad \begin{array}{l} 3x_1 - \frac{2}{5}t - \frac{4}{5} + t = 0 \\ x_1 = -\frac{1}{5}t + \frac{4}{15} \end{array}$$

$$X_{\text{неод.}} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{5}t + \frac{4}{15} \\ -\frac{1}{5}t - \frac{2}{5} \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{4}{15} \\ -\frac{2}{5} \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -\frac{1}{5} \\ -\frac{1}{5} \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$X_{\text{неод.}} = X^{(0)} + X_{\text{одн.}}$$