

Интегралы и дифференциальные уравнения

Рубежный контроль
2 семестр | Модуль №1

GitHub: malyinik

2024 г.

Содержание

1	Вопросы, оцениваемые в 1 балл	2
1.1	Сформулировать определение первообразной	2
1.2	Сформулировать определение неопределённого интеграла	2
1.3	Сформулировать определение определённого интеграла	2
1.4	Сформулировать определение интеграла с переменным верхним пределом .	3
1.5	Сформулировать определение несобственного интеграла 1-го рода	3
1.6	Сформулировать определение несобственного интеграла 2-го рода	4
1.7	Сформулировать определение сходящегося несобственного интеграла 1-го рода	4
1.8	Сформулировать определение абсолютно сходящегося несобственного инте- грала 1-го рода	4
1.9	Сформулировать определение условно сходящегося несобственного интеграла 1-го рода	5
1.10	Сформулировать определение сходящегося несобственного интеграла 2-го рода	5
1.11	Сформулировать определение абсолютно сходящегося несобственного инте- грала 2-го рода	5
1.12	Сформулировать определение условно сходящегося несобственного интеграла 2-го рода	5
2	Вопросы, оцениваемые в 3 балла	6
2.1	Сформулировать и доказать теорему об оценке определённого интеграла . .	6
2.2	Сформулировать и доказать теорему о среднем	6
2.3	Сформулировать и доказать теорему о производной интеграла с переменным верхним пределом	7
2.4	Сформулировать и доказать теорему Ньютона - Лейбница	8
2.5	Сформулировать и доказать теорему об интегрировании по частям в опре- делённом интеграле	9
2.6	Сформулировать и доказать признак сходимости по неравенству для несоб- ственных интегралов 1-го рода	10
2.7	Сформулировать и доказать предельный признак сравнения для несобствен- ных интегралов 1-го рода	11
2.8	Сформулировать и доказать признак абсолютной сходимости для несоб- ственных интегралов 1-го рода	12
2.9	Вывести формулу для вычисления площади криволинейного сектора, огра- ниченного лучами $\varphi = \alpha$, $\varphi = \beta$ и кривой $\rho = \rho(\varphi)$	13
2.10	Вывести формулу для вычисления длины дуги графика функции $y = f(x)$, отсечённой прямыми $x = a$ и $x = b$	13
3	Используемые теоремы	15

1 Вопросы, оцениваемые в 1 балл

1.1 Сформулировать определение первообразной

Определение 1. Функция $F(x)$ называется **первообразной** функции $f(x)$ на интервале $(a; b)$, если $F(x)$ дифференцируема на $(a; b)$ и $\forall x \in (a; b)$:

$$F'(x) = f(x) \quad (1)$$

1.2 Сформулировать определение неопределённого интеграла

Определение 2. Множество первообразных функции $f(x)$ на $(a; b)$ называется **неопределённым интегралом**.

$$\int f(x) dx = F(x) + C \quad (2)$$

\int — знак интеграла

$f(x)$ — подынтегральная функция

$f(x) dx$ — подынтегральное выражение

x — переменная

$F(x) + C$ — множество первообразных

C — произвольная константа

1.3 Сформулировать определение определённого интеграла

Пусть функция $y = f(x)$ определена на $[a; b]$.

Рассмотрим произвольное разбиение $[a; b]$. В каждом из отрезков разбиения $[x_{i-1}; x_i]$ выберем точку ξ_i , $i = \overline{1, n}$. Составим сумму

$$S_n = \sum_{i=1}^n f(\xi_i) \cdot \Delta x_i \quad (3)$$

Определение 3. **Определённым интегралом** от функции $y = f(x)$ на $[a; b]$ называется конечный предел интегральной суммы (3), когда число отрезков разбиения растёт, а их длины стремятся к нулю.

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(\xi_i) \cdot \Delta x_i \quad (4)$$

Предел (4) не зависит от способа разбиения отрезка $[a; b]$ и выбора точек ξ_i , $\overline{1, n}$.

$f(x)$ — подынтегральная функция

$f(x) dx$ — подынтегральное выражение

\int_a^b — знак определённого интеграла

a — нижний предел интегрирования

b — верхний предел интегрирования

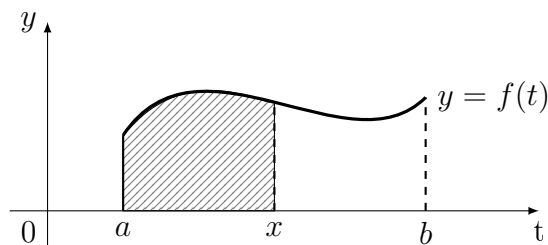
1.4 Сформулировать определение интеграла с переменным верхним пределом

Пусть $f(x)$ непрерывна на $[a; b]$. Рассмотрим $\int_a^b f(x) dx$. Закрепим нижний предел интегрирования a . Изменяем верхний предел интегрирования b , чтобы подчеркнуть изменение верхнего предела интегрирования.

$$b \longrightarrow x \quad x \in [a; b] \quad [a; x] \subset [a; b] \quad I(x) = \int_a^x f(t) dt.$$

Определение 4. Определённым интегралом с переменным верхним пределом интегрирования от непрерывной функции $f(x)$ на $[a; b]$ называется интеграл вида

$$I(x) = \int_a^x f(t) dt, \text{ где } x \in [a; b]$$



$I(x)$ — переменная площадь криволинейной трапеции с основанием $[a; x] \subset [a; b]$.

1.5 Сформулировать определение несобственного интеграла 1-го рода

Пусть $y = f(x)$ определена на $[a; +\infty)$, интегрируема на $[a; b] \subset [a; +\infty)$. Тогда определена функция

$$\Phi(b) = \int_a^b f(x) dx \text{ на } [a; +\infty) \quad (5)$$

как определённый интеграл с переменным верхним пределом интегрирования.

Определение 5. Предел функции $\Phi(b)$ при $b \rightarrow +\infty$ называется **несобственным интегралом** от функции $f(x)$ по бесконечному промежутку $[a; +\infty)$ или **несобственным интегралом 1-го рода** и обозначается

$$\int_a^{+\infty} f(x) dx = \lim_{b \rightarrow +\infty} \Phi(b) = \lim_{b \rightarrow +\infty} \int_a^b f(x) dx \quad (6)$$

Если предел в правой части равенства (6) существует и конечен, то несобственный интеграл в левой части равенства (6) **сходится**.

Если предел в правой части равенства (6) не существует или равен бесконечности, то несобственный интеграл в левой части равенства (6) **расходится**.

1.6 Сформулировать определение несобственного интеграла 2-го рода

Пусть функция $f(x)$ определена на полуинтервале $[a; b)$, а в точке $x = b$ терпит разрыв 2-го рода. Предположим, что функция $f(x)$ интегрируема на $[a; \eta] \subset [a; b)$. Тогда на $[a; b)$ определена функция

$$\Phi(\eta) = \int_a^{\eta} f(x) dx \quad (7)$$

как интеграл с переменным верхним пределом.

Определение 6. Предел функции $\Phi(\eta)$ при $\eta \rightarrow b-$ называется несобственным интегралом от неограниченной функции $f(x)$ на $[a; b)$ или **несобственным интегралом 2-го рода** и обозначается

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{\eta \rightarrow b-} \Phi(\eta) = \lim_{\eta \rightarrow b-} \int_a^{\eta} f(x) dx \quad (8)$$

Если предел в правой части равенства (8) существует и конечен, то несобственный интеграл от неограниченной функции $f(x)$ по $[a; b)$ **сходится**.

Если предел в правой части равенства (8) не существует или равен ∞ , то несобственный интеграл от неограниченной функции $f(x)$ по $[a; b)$ **расходится**.

1.7 Сформулировать определение сходящегося несобственного интеграла 1-го рода

Определение 7.

$$\int_a^{+\infty} f(x) dx = \lim_{b \rightarrow +\infty} \Phi(b) = \lim_{b \rightarrow +\infty} \int_a^b f(x) dx$$

Если предел в правой части равенства существует и конечен, то несобственный интеграл в левой части равенства **сходится**.

1.8 Сформулировать определение абсолютно сходящегося несобственного интеграла 1-го рода

Определение 8. Если наряду с несобственным интегралом от функции $f(x)$ по бесконечному промежутку $[a; +\infty)$ сходится и несобственный интеграл от функции $|f(x)|$ по этому же промежутку, то первый несобственный интеграл называется **сходящимся абсолютно**.

несобственный интеграл от $f(x)$ сходится абсолютно	=	несобственный интеграл от $f(x)$ сходится	+	несобственный интеграл от $ f(x) $ сходится
--	---	--	---	--

1.9 Сформулировать определение условно сходящегося несобственного интеграла 1-го рода

Определение 9. Если несобственный интеграл от функции $f(x)$ по бесконечному промежутку $[a; +\infty)$ сходится, а несобственный интеграл от функции $|f(x)|$ по этому же промежутку расходится, то первый несобственный интеграл называется **сходящимся условно**.

$$\boxed{\text{несобственный интеграл от } f(x) \text{ сходится условно}} = \boxed{\text{несобственный интеграл от } f(x) \text{ сходится}} + \boxed{\text{несобственный интеграл от } |f(x)| \text{ расходится}}$$

1.10 Сформулировать определение сходящегося несобственного интеграла 2-го рода

Определение 10.

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{\eta \rightarrow b-} \Phi(\eta) = \lim_{\eta \rightarrow b-} \int_a^\eta f(x) dx$$

Если предел в правой части равенства существует и конечен, то несобственный интеграл от неограниченной функции $f(x)$ по $[a; b)$ **сходится**.

1.11 Сформулировать определение абсолютно сходящегося несобственного интеграла 2-го рода

Определение 11. Если несобственный интеграл от неограниченной функции $f(x)$ при $x \rightarrow b-$ по промежутку $[a; b)$ сходится и несобственный интеграл функции $|f(x)|$ по этому же промежутку сходится, то первый из несобственных интегралов **сходится абсолютно**.

1.12 Сформулировать определение условно сходящегося несобственного интеграла 2-го рода

Определение 12. Если несобственный интеграл от неограниченной функции $f(x)$ при $x \rightarrow b-$ по промежутку $[a; b)$, сходится, а несобственный интеграл от функции $|f(x)|$ по этому же промежутку расходится, то первый из несобственных интегралов **сходится условно**.

2 Вопросы, оцениваемые в 3 балла

2.1 Сформулировать и доказать теорему об оценке определённого интеграла

Теорема 1 (Об оценке определённого интеграла).

Пусть функции $f(x)$ и $g(x)$ интегрируемы на $[a; b]$ и $\forall x \in [a; b]: m \leq f(x) \leq N, g(x) \geq 0$. Тогда

$$m \int_a^b g(x) dx \leq \int_a^b f(x) g(x) dx \leq M \int_a^b g(x) dx$$

Доказательство.

Так как $\forall x \in [a; b]$ верны неравенства

$$\begin{aligned} m &\leq f(x) \leq M & | \cdot g(x) \\ g(x) &\geq 0 & m, M \in \mathbb{R} \\ m \cdot g(x) &\leq f(x) \cdot g(x) \leq M \cdot g(x) \end{aligned}$$

По теореме 11 и 10:

$$m \int_a^b g(x) dx \leq \int_a^b f(x) g(x) dx \leq M \int_a^b g(x) dx$$

■

2.2 Сформулировать и доказать теорему о среднем

Теорема 2 (О среднем значении для определённого интеграла).

Если $f(x)$ непрерывна на $[a; b]$, то

$$\exists c \in [a; b]: f(c) = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx$$

Доказательство.

Так как функция $y = f(x)$ непрерывна на $[a; b]$, то по теореме Вейерштрасса она достигает своего наибольшего и наименьшего значения.

То есть $\exists m, M \in \mathbb{R}, \forall x \in [a; b]: m \leq f(x) \leq M$

По теореме 11:

$$\int_a^b m dx \leq \int_a^b f(x) dx \leq \int_a^b M dx$$

По теореме 10:

$$m \int_a^b dx \leq \int_a^b f(x) dx \leq M \int_a^b dx$$

По теореме 9:

$$m(b-a) \leq \int_a^b f(x) dx \leq M(b-a) \quad | : (b-a)$$

Так как функция $y = f(x)$ непрерывна на $[a; b]$, то по теореме *Больцано-Коши* она принимает все свои значения между наибольшим и наименьшим значением.

$$m \leq \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx \leq M$$

По теореме *Больцано-Коши* $\exists c \in [a; b]$:

$$f(c) = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx$$

■

2.3 Сформулировать и доказать теорему о производной интеграла с переменным верхним пределом

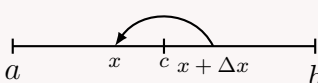
Теорема 3 (*О производной $I(x)$*).

Если функция $y = f(x)$ непрерывна на $[a; b]$, то $\forall x \in [a; b]$ верно равенство

$$(I(x))' = \left(\int_a^x f(t) dt \right)' = f(x)$$

Доказательство.

$$(I(x))' = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta I(x)}{\Delta x} \stackrel{\text{T12}}{=} \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(c) \cdot \Delta x}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} f(c) \stackrel{*}{=} f(x)$$

*:  при $\Delta x \rightarrow 0 \quad x + \Delta x \rightarrow x \quad c \rightarrow x$

■

Следствие 3.1. Функция $I(x)$ — первообразная функции $f(x)$ на $[a; b]$, так как по теореме 3 $(I(x))' = f(x)$.

2.4 Сформулировать и доказать теорему Ньютона - Лейбница

Теорема 4.

Пусть функция $f(x)$ — непрерывна на $[a; b]$. Тогда

$$\int_a^b f(x) dx = F(x) \Big|_a^b = F(b) - F(a)$$

где $F(x)$ — первообразная $f(x)$.

Доказательство.

Пусть $F(x)$ первообразная $f(x)$ на $[a; b]$. По следствию из теоремы 3 $I(x)$ — первообразная $f(x)$ на $[a; b]$.

По свойству первообразной:

$$I(x) - F(x) = C$$

$$I(x) = F(x) + C, \text{ где } C — const$$

$$\int_a^x f(t) dt = F(x) + C, \text{ где } C — const \quad (\vee)$$

• $x = a$:

$$\int_a^a f(t) dt = F(a) + C$$

$$0 = F(a) + C$$

$$C = -F(a)$$

$C = -F(a)$ подставим в (\vee) :

$$\int_a^x f(t) dt = F(x) - F(a)$$

• $x = b$:

$$\int_a^b f(t) dt = F(b) - F(a)$$

■

2.5 Сформулировать и доказать теорему об интегрировании по частям в определённом интеграле

Теорема 5.

Пусть функции $u = u(x)$ и $v = v(x)$ непрерывно дифференцируемы на $[a; b]$. Тогда имеет место равенство

$$\int_a^b u \, dv = u v \Big|_a^b - \int_a^b v \, du$$

Доказательство.

Рассмотрим произведение функций $u \cdot v$.

Дифференцируем:

$$\begin{aligned} d(u \cdot v) &= v \, du + u \, dv \\ u \, dv &= d(uv) - v \, du \end{aligned}$$

Интегрируем:

$$\int_a^b u \, dv = \int_a^b (d(uv) - v \, du) = \int_a^b d(uv) - \int_a^b v \, du = u v \Big|_a^b - \int_a^b v \, du$$



2.6 Сформулировать и доказать признак сходимости по неравенству для несобственных интегралов 1-го рода

Теорема 6 (*Признак сходимости по неравенству*).

Пусть функции $f(x)$ и $g(x)$ интегрируемы на $[a; b] \subset [a; +\infty)$, причём

$$\forall x \geq a: 0 \leq f(x) \leq g(x)$$

Тогда:

1. Если $\int_a^{+\infty} g(x) dx$ сходится, то $\int_a^{+\infty} f(x) dx$ — сходится
2. Если $\int_a^{+\infty} f(x) dx$ расходится, то $\int_a^{+\infty} g(x) dx$ — расходится

Доказательство.

(опр. 5)
 $\int_a^{+\infty} g(x) dx$ — сходится \Rightarrow по определению несобственного интеграла 1-го рода

$$\int_a^{+\infty} g(x) dx = \lim_{b \rightarrow +\infty} \int_a^b g(x) dx = C \quad C — \text{число}$$

Так как $\forall x \geq a: g(x) \geq 0$

$$\Phi(b) = \int_a^b g(x) dx \leq C, \quad b > a$$

По условию: $\forall x \geq a: 0 \leq f(x) \leq g(x)$

Интегрируем:

$$\int_a^b f(x) dx \leq \int_a^b g(x) dx \leq C$$

Так как $f(x) \geq 0$, $\forall x \geq a$ и $b > a$, то функция

$$\Psi(b) = \int_a^b f(x) dx \text{ монотонно возрастает и ограничена сверху}$$

Утверждение: монотонная и ограниченная сверху функция при $x \rightarrow +\infty$ имеет конечный предел.

По утверждению функция $\Psi(b)$ имеет конечный предел при $x \rightarrow +\infty$, то есть

$$\int_a^{+\infty} f(x) dx = \lim_{b \rightarrow +\infty} \Psi(b) = \lim_{b \rightarrow +\infty} \int_a^b f(x) dx — \text{конечный предел}$$

■

Доказательство (Метод от противного).

Дано: $\int_a^{+\infty} f(x) dx$ — расходится

Предположим, что $\int_a^{+\infty} g(x) dx$ — сходится

Тогда по первой части теоремы:

$$\int_a^{+\infty} f(x) dx — \text{сходится}$$

А это противоречит условию теоремы $\Rightarrow \int_a^{+\infty} g(x) dx$ — расходится

■

2.7 Сформулировать и доказать предельный признак сравнения для несобственных интегралов 1-го рода

Теорема 7 (*Предельный признак сходимости*).

Пусть $f(x)$ и $g(x)$ интегрируемы на $[a; b] \subset [a; +\infty)$ и $\forall x \geq a: f(x) \geq 0, g(x) > 0$. Если существует конечный предел:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lambda > 0 \quad (9)$$

то $\int_a^{+\infty} f(x) dx$ и $\int_a^{+\infty} g(x) dx$ сходятся или расходятся одновременно.

Доказательство.

Из (5) \Rightarrow по определению предела:

$$\forall \varepsilon > 0, \exists M(\varepsilon) > 0: \forall x > M \Rightarrow \left| \frac{f(x)}{g(x)} - \lambda \right| < \varepsilon$$

$$-\varepsilon < \frac{f(x)}{g(x)} - \lambda < \varepsilon$$

$$\lambda - \varepsilon < \frac{f(x)}{g(x)} < \lambda + \varepsilon$$

$$(\lambda - \varepsilon) \cdot g(x) < f(x) < (\lambda + \varepsilon) \cdot g(x) \quad \forall x > M \quad (*)$$

1 шаг Рассмотрим $f(x) < (\lambda + \varepsilon)g(x)$

Интегрируем:

$$\int_a^{+\infty} f(x) dx < (\lambda + \varepsilon) \int_a^{+\infty} g(x) dx$$

Число $(\lambda + \varepsilon)$ не влияет на сходимость/расходимость несобственного интеграла.

Пусть $\int_a^{+\infty} g(x) dx$ — сходится, тогда:

$$(\lambda + \varepsilon) \int_a^{+\infty} g(x) dx \text{ — сходится}$$

По теореме 6 $\int_a^{+\infty} f(x) dx$ — сходится.

Пусть $\int_a^{+\infty} f(x) dx$ расходится, тогда по теореме 6

$$(\lambda + \varepsilon) \int_a^{+\infty} g(x) dx \text{ — расходится} \Rightarrow \int_a^{+\infty} g(x) dx \text{ — расходится}$$

2 шаг Рассмотрим $(\lambda - \varepsilon) \cdot g(x) < f(x)$

Интегрируем:

$$(\lambda - \varepsilon) \int_a^{+\infty} g(x) dx < \int_a^{+\infty} f(x) dx$$

$(\lambda - \varepsilon)$ не влияет на сходимость/расходимость несобственного интеграла

Пусть $\int_a^{+\infty} f(x) dx$ — сходится, тогда по теореме 6

$$(\lambda - \varepsilon) \int_a^{+\infty} g(x) dx \text{ — сходится} \Rightarrow \int_a^{+\infty} g(x) dx \text{ — сходится}$$

Пусть $(\lambda - \varepsilon) \int_a^{+\infty} g(x) dx$ — расходится, тогда $\int_a^{+\infty} g(x) dx$ — расходится

По теореме 6 $\int_a^{+\infty} f(x) dx$ расходится, тогда

$$\int_a^{+\infty} f(x) dx \text{ и } \int_a^{+\infty} g(x) dx \text{ сходятся и расходятся одновременно}$$

■

2.8 Сформулировать и доказать признак абсолютной сходимости для несобственных интегралов 1-го рода

Теорема 8 (*Признак абсолютной сходимости*).

Пусть функция $f(x)$ знакопеременна на $[a; +\infty)$. Если функции $f(x)$ и $|f(x)|$ интегрируемы на любом отрезке $[a; b] \subset [a; +\infty)$ и несобственный интеграл от функции $|f(x)|$ по бесконечному промежутку $[a; +\infty)$ сходится, то сходится и несобственный интеграл от функции $f(x)$ по $[a; +\infty)$, причём абсолютно.

Доказательство.

Так как $\forall x \in [a; +\infty)$ верно неравенство

$$\begin{aligned} -|f(x)| &\leq f(x) \leq |f(x)| \quad \Big| + |f(x)| \\ 0 &\leq f(x) + |f(x)| \leq 2|f(x)| \end{aligned}$$

По условию $\int_a^{+\infty} |f(x)| dx$ сходится $\Rightarrow 2 \int_a^{+\infty} |f(x)| dx$ сходится.

По теореме 6 (*признак сходимости по неравенству*):

$$\int_a^{+\infty} (f(x) + |f(x)|) dx \text{ — сходится}$$

Рассмотрим

$$\int_a^{+\infty} f(x) dx = \underbrace{\int_a^{+\infty} (f(x) + |f(x)|) dx}_{\text{сх-ся по Т6}} - \underbrace{\int_a^{+\infty} |f(x)| dx}_{\text{сх-ся по условию}}$$

По определению сходящегося несобственного интеграла $\Rightarrow \int_a^{+\infty} f(x) dx$ сходится

По определению абсолютной сходимости $\Rightarrow \int_a^{+\infty} f(x) dx$ сходится абсолютно

■

2.9 Вывести формулу для вычисления площади криволинейного сектора, ограниченного лучами $\varphi = \alpha$, $\varphi = \beta$ и кривой $\rho = \rho(\varphi)$

1. Разбиваем сектор A_0OA_n лучами $\alpha = \varphi_0 < \varphi_1 < \dots < \varphi_n = \beta$ на углы $\angle A_0OA_1, \angle A_1OA_2, \dots, \angle A_{n-1}OA_n$

$\Delta\varphi_i = \varphi_i - \varphi_{i-1}$ — величина $\angle A_{i-1}OA_i$ в радианах

$$\lambda = \max_i \Delta\varphi_i, \quad i = \overline{1, n}$$

2. \forall выберем и проведём $\Psi_i, \Psi_i \in \angle A_{i-1}OA_i$

Находим $\rho = \rho(\Psi_i)$

$$M_i(\Psi_i, r(\Psi_i)), \quad M_i \in \angle A_{i-1}OA_i, \quad M_i \in r = r(\varphi)$$

3. Заменяем каждый i -ый криволинейный сектор на круговой сектор $R = \rho(\Psi_i), i = \overline{1, n}$

$S_i = \frac{1}{2}R^2 \cdot \Delta\varphi_i$ — площадь i -го кругового сектора

$$R = \rho(\Psi_i)$$

$$\sum_{i=1}^n S_i = \sum_{i=1}^n \frac{1}{2} \rho^2(\Psi_i) \cdot \Delta\varphi_i = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \rho^2(\Psi_i) \cdot \Delta\varphi_i$$

4. Вычисляем предел

$$\lim_{\lambda \rightarrow 0} \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \rho^2(\Psi_i) \cdot \Delta\varphi_i = \boxed{\frac{1}{2} \int_{\alpha}^{\beta} \rho^2 d\varphi = S}$$

2.10 Вывести формулу для вычисления длины дуги графика функции $y = f(x)$, отсечённой прямыми $x = a$ и $x = b$

Пусть $y = f(x)$ непрерывна на $[a; b]$.

$$M_0(x_0, y_0) \quad M(x, y)$$

Δx — приращение x Δy — приращение y

$$x \rightarrow x + \Delta x$$

$$y \rightarrow x + \Delta y \quad M(x, y) \rightarrow M_1(x + \Delta x, y + \Delta y)$$

$$l_0 = \widehat{M_0M} \text{ — дуга кривой} \quad \Delta l \text{ — приращение дуги кривой} \quad \Delta l = \widehat{MM_1}$$

Найдём $l'_x = ?$

$$l'_x = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta l}{\Delta x}$$

$$\triangle MM_1A \quad MA = \Delta x \quad AM_1 = \Delta y$$

$$MM_1^2 = \Delta x^2 + \Delta y^2 \quad | \cdot \Delta l^2 | : \Delta l^2$$

$$\left(\frac{MM_1}{\Delta l} \right)^2 \cdot (\Delta l)^2 = \Delta x^2 + \Delta y^2 \quad | : \Delta x^2$$

$$\left(\frac{MM_1}{\Delta l} \right)^2 \cdot \left(\frac{\Delta l}{\Delta x} \right)^2 = 1 + \left(\frac{\Delta y}{\Delta x} \right)^2$$

Вычислим предел при $\Delta x \rightarrow 0$.

Левая часть:

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left(\frac{MM_1}{\Delta l} \right)^2 \cdot \left(\frac{\Delta l}{\Delta x} \right)^2 = \left| \begin{array}{cc} \text{при } \Delta x \rightarrow 0 & M \rightarrow M_1 \\ \Delta l \rightarrow MM_1 & \text{дуга} \rightarrow \text{хорда} \end{array} \right| = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} 1^2 \cdot \left(\frac{\Delta l}{\Delta x} \right)^2 = (l'_x)^2$$

Правая часть:

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left(1 + \left(\frac{\Delta y}{\Delta x} \right)^2 \right) = 1 + \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left(\frac{\Delta y}{\Delta x} \right)^2 = 1 + (y'_x)^2$$

Получаем:

$$\begin{aligned} (l'_x)^2 &= 1 + (y'_x)^2 \\ l'_x &= \sqrt{1 + (y'_x)^2} \quad | \cdot dx \\ l'_x dx &= \sqrt{1 + (y'_x)^2} dx \\ dl &= \sqrt{1 + (y'_x)^2} dx \end{aligned} \tag{V}$$

$$\boxed{l = \int_a^b \sqrt{1 + (y'_x)^2} dx} \tag{10}$$

3 Используемые теоремы

Теорема 9.

Если $C = \text{const}$, то

$$\int_a^b c \, dx = c \cdot (b - a)$$

Теорема 10.

Если функции $f_1(x)$, $f_2(x)$ интегрируемы на $[a; b]$, то их линейная комбинация

$$\lambda_1 f_1(x) + \lambda_2 f_2(x), \text{ где } \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$$

интегрируема на $[a; b]$ и верно равенство:

$$\int_a^b (\lambda_1 f_1(x) + \lambda_2 f_2(x)) \, dx = \lambda_1 \int_a^b f_1(x) \, dx + \lambda_2 \cdot \int_a^b f_2(x) \, dx$$

Теорема 11 (Об интегрировании неравенства).

Пусть функции $f(x)$ и $g(x)$ интегрируемы на $[a; b]$ и $\forall x \in [a; b]: f(x) \geq g(x)$, то

$$\int_a^b f(x) \, dx \geq \int_a^b g(x) \, dx$$

Теорема 12 (Непрерывность $I(x)$).

Если функция $f(x)$ на $[a; b]$ непрерывна, то $I(x) = \int_a^x f(t) \, dt$ — непрерывна на $[a; b]$.