Содержание

1 Сформулируйте и докажите теорему о единственности предела сходящейся последовательности.

Теорема 1 *(О единственности предела сходящейся последовательности)*.
Любая сходящаяся последовательность имеет единственный предел.

Доказательство (Аналитическое доказательство).
Пусть $\{x_n\}$ — сходящаяся последовательность (**опр.22**) .
Рассуждаем методом от противного. Пусть последовательность $\{x_n\}$ имеет более одного предела.

$$\lim_{n\to\infty} x_n = a \qquad \lim_{n\to\infty} x_n = b \qquad a \neq b$$

$$\lim_{n\to\infty} x_n = a \iff (\forall \varepsilon_1 > 0)(\exists N_1(\varepsilon_1) \in \mathbb{N})\colon (\forall n > N_1(\varepsilon_1) \Rightarrow |x_n - a| < \varepsilon_1) \tag{1}$$

$$\lim_{n\to\infty} x_n = b \iff (\forall \varepsilon_2 > 0)(\exists N_2(\varepsilon_2) \in \mathbb{N})\colon (\forall n > N_2(\varepsilon_2) \Rightarrow |x_n - b| < \varepsilon_2) \tag{2}$$

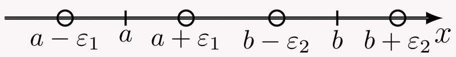
Выберем $N = \max\{N_1(\varepsilon_1) ; N_2(\varepsilon_2)\}$.

Пусть $\varepsilon = \varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \dfrac{|b-a|}{3}$

$$\left.\begin{aligned} 3\varepsilon &= |b-a| = |b-a+x_n-x_n| = \\ &= |(x_n-a)-(x_n-b)| \leq |x_n-a| + |x_n-b| < \varepsilon_1 + \varepsilon_2 = 2\varepsilon \end{aligned}\right. \Rightarrow 3\varepsilon < 2\varepsilon$$

Противоречие. Значит, предположение не является верным $\implies$ последовательность $\{x_n\}$ имеет единственный предел, то есть $a = b$ $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$. ■

Доказательство (Геометрическое доказательство).
Нельзя уложить бесконечное число членов последовательности $\{x_n\}$ в две непересекающиеся окрестности.



$S(a;\varepsilon_1)$ (1) бесконечное число членов последовательности $\{x_n\} \in S(a;\varepsilon_1)$.
$S(b;\varepsilon_2)$ (2) бесконечное число членов последовательности $\{x_n\} \in S(b;\varepsilon_2)$. ■

2 Сформулируйте и докажите теорему об ограниченности сходящейся последовательности.

Теорема 2 *(Об ограниченности сходящейся последовательности)*.
Любая сходящаяся последовательность ограничена.

Доказательство.
По определению сходящейся последовательности (**опр.22**)

$$\lim_{n\to\infty} x_n = a \iff (\forall \varepsilon > 0)(\exists N(\varepsilon) \in \mathbb{N})\colon (\forall n > N(\varepsilon) \;\Rightarrow\; |x_n - a| < \varepsilon).$$

Выберем в качестве $M = \max\{|x_1|, |x_2|, \ldots, |x_n|, |a-\varepsilon|, |a+\varepsilon|\}$.
Тогда для $\forall n \in \mathbb{N}$ будет верно $|x_n| \leq M$ – это и означает, что $\{x_n\}$ — ограничена. ■

3 Сформулируйте и докажите теорему о локальной ограниченности функции, имеющей конечный предел.

Теорема 3 *(О локальной ограниченности функции, имеющей конечный предел)***.**
Функция, имеющая конечный предел, локально ограничена.

Доказательство.

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = a \iff (\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta(\varepsilon) > 0) : (\forall x \in \mathring{S}(x_0; \delta) \Rightarrow |f(x) - a| < \varepsilon)$$

Распишем:

$$\begin{aligned} -\varepsilon <& f(x) - a < \varepsilon \\ a - \varepsilon <& f(x) < a + \varepsilon \end{aligned} \qquad \forall x \in \mathring{S}(x_0; \delta)$$

Выберем $M = \max\{|a - \varepsilon|; |a + \varepsilon|\}$. Тогда $|f(x)| \le M$, $\forall x \in \mathring{S}(x_0; \delta)$. ■

4 Сформулируйте и докажите теорему о сохранении функцией знака своего предела.

Теорема 4 *(О сохранении функцией знака своего предела)***.**
Если $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = a \neq 0$, то $\exists\ \mathring{S}(x_0; \delta)$ такая, что функция в ней сохраняет знак своего предела.

$$\text{Кратко:}\quad \text{Если } \lim_{x\to x_0} f(x) = a \neq 0 \longrightarrow \begin{array}{l} a > 0 \Rightarrow f(x) > 0 \\ a < 0 \Rightarrow f(x) < 0 \end{array} \quad \forall x \in \mathring{S}(x_0; \delta)$$

Доказательство.
• Пусть $a > 0$. Выберем $\varepsilon = a > 0$.

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = a \iff \big(\forall \varepsilon = a > 0\big)\big(\exists \delta(\varepsilon) > 0\big) : \big(\forall x \in \mathring{S}(x_0; \delta) \Rightarrow |f(x) - a| < \varepsilon = a\big)$$

Распишем:

$$-a < f(x) - a < a \Rightarrow \boxed{0 < f(x) < 2a} \quad \forall x \in \mathring{S}(x_0; \delta)$$

Знаки у функции $f(x)$ и числа a — одинаковые, «+».

• Пусть $a < 0$. Выберем $\varepsilon = -a > 0$.

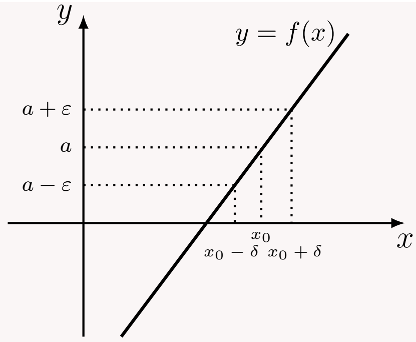
$$\lim_{x\to x_0} f(x) = a \iff \big(\forall \varepsilon = -a > 0\big)\big(\exists \delta(\varepsilon) > 0\big) : \big(\forall x \in \mathring{S}(x_0; \delta) \Rightarrow |f(x) - a| < \varepsilon = -a\big)$$

Распишем:

$$a < f(x) - a < -a \Rightarrow \boxed{2a < f(x) < 0} \quad \forall x \in \mathring{S}(x_0; \delta)$$

Знаки у функции $f(x)$ и числа a — одинаковые, «−».

Значит, $f(x)$ сохраняет знак своего предела $\forall x \in \mathring{S}(x_0; \delta)$.



$$\lim_{x\to x_0} f(x) = a > 0 \;\Rightarrow\; \forall x \in \mathring{S}(x_0;\delta)\colon\, f(x) > 0$$

■

Следствие 4.1. Если функция $y = f(x)$ имеет предел в точке x_0 и знакопостоянна в $\mathring{S}(x_0;\delta)$, тогда её предел не может иметь с ней противоположные знаки.

5 Сформулируйте и докажите теорему о предельном переходе в неравенстве.

Теорема 5 *(О предельном переходе в неравенстве)*.
Пусть существуют конечные пределы функций $f(x)$ и $g(x)$ в точке x_0 и $\forall x \in \mathring{S}(x_0;\delta)$ верно $f(x) < g(x)$. Тогда $\forall x \in \mathring{S}(x_0;\delta)$ имеет место неравенство $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) \le \lim\limits_{x\to x_0} g(x)$.

Доказательство.
По условию $f(x) < g(x), \forall x \in \mathring{S}(x_0;\delta)$.
Введём функцию $F(x) = f(x) - g(x) < 0, \forall x \in \mathring{S}(x_0;\delta)$.
Так как $f(x)$ и $g(x)$ имеют конечные пределы в точке x_0, то и функция $F(x)$ имеет конечный предел в точке x_0 (как разность $f(x)$ и $g(x)$).
По следствию **4.1** $\Longrightarrow \lim\limits_{x\to x_0} F(x) \le 0$
Подставим $F(x) = f(x) - g(x)$:

$$\lim_{x\to x_0} \big(f(x) - g(x)\big) \le 0 \;\Rightarrow\; \lim_{x\to x_0} f(x) - \lim_{x\to x_0} g(x) \le 0 \;\Rightarrow\; \lim_{x\to x_0} f(x) \le \lim_{x\to x_0} g(x)$$
$$\forall x \in \mathring{S}(x_0;\delta)$$

■

6 Сформулируйте и докажите теорему о пределе промежуточной функции.

Теорема 6 *(О пределе промежуточной функции)*.
Пусть существуют конечные пределы функций $f(x)$ и $g(x)$ в точке x_0.
$\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = a$, $\lim\limits_{x\to x_0} g(x) = a$ и $\forall x \in \mathring{S}(x_0;\delta)$ верно неравенство $f(x) \le h(x) \le g(x)$.
Тогда существует $\lim\limits_{x\to x_0} h(x) = a$.

Доказательство.
По условию:

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = a \iff \big(\forall\varepsilon > 0\big)\big(\exists\delta_1(\varepsilon) > 0\big): \big(\forall x \in \mathring{S}(x_0;\delta_1) \Rightarrow |f(x) - a| < \varepsilon\big) \qquad (1)$$

$$\lim_{x\to x_0} g(x) = a \iff \big(\forall\varepsilon > 0\big)\big(\exists\delta_2(\varepsilon) > 0\big): \big(\forall x \in \mathring{S}(x_0;\delta_2) \Rightarrow |g(x) - a| < \varepsilon\big) \qquad (2)$$

Выберем $\delta_0 = \min\{\delta_1;\delta_2;\delta\}$, тогда (1), (2) и $f(x) \le h(x) \le g(x)$ верны одновременно $\forall x \in \mathring{S}(x_0;\delta_0)$.

$$\left.\begin{aligned} (1) \quad a-\varepsilon <&f(x) < a+\varepsilon \\ (2) \quad a-\varepsilon <&g(x) < a+\varepsilon \\ f(x) \le& h(x) \le g(x) \end{aligned}\right\} \Rightarrow a-\varepsilon < f(x) \le h(x) \le g(x) < a+\varepsilon \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \forall x \in \mathring{S}(x_0;\delta_0) \quad a-\varepsilon < h(x) < a+\varepsilon$$

В итоге:

$$\big(\forall\varepsilon > 0\big)\big(\exists\delta_0(\varepsilon) > 0\big): \big(\forall x \in \mathring{S}(x_0;\delta_0) \Rightarrow |h(x) - a| < \varepsilon\big)$$
$$\Downarrow$$
$$\text{По определению предела } (\mathbf{50.2}): \lim_{x\to x_0} h(x) = a$$

■

7 Сформулируйте и докажите теорему о пределе произведения функций.

Теорема 7 *(О пределе произведения функций)*.
Предел произведения функций равен произведению пределов этих функций.

$$\lim_{x\to x_0}\big(f(x)\cdot g(x)\big) = \lim_{x\to x_0} f(x) \cdot \lim_{x\to x_0} g(x)$$

Доказательство.
Пусть: (1) $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = a$ (2) $\lim\limits_{x\to x_0} g(x) = b$

По теореме *о связи функции, её предела и бесконечно малой функции* (**Т.10**):

$$(1): f(x) = a + \alpha(x), \text{ где } \alpha(x) \text{ — б.м.ф. при } x \to x_0$$
$$(2): g(x) = b + \beta(x), \text{ где } \beta(x) \text{ — б.м.ф. при } x \to x_0$$

Рассмотрим $f(x)\cdot g(x)$:

$$f(x)\cdot g(x) = \big(a+\alpha(x)\big)\cdot\big(b+\beta(x)\big) = ab + \underbrace{a\cdot\beta(x)+\alpha(x)\cdot b+\alpha(x)\cdot\beta(x)}_{\gamma(x)} = ab+\gamma(x)$$

По следствиям из теоремы **Т.10**:

$$\begin{aligned} a\cdot\beta(x) &= \text{б.м.ф. при } x\to x_0 \qquad (\textbf{сл.10.2})\\ b\cdot\alpha(x) &= \text{б.м.ф. при } x\to x_0 \qquad (\textbf{сл.10.2})\\ \alpha(x)\cdot\beta(x) &= \text{б.м.ф. при } x\to x_0 \qquad (\textbf{сл.10.1}) \end{aligned}$$

По теореме *о сумме конечного числа б.м.ф.* (**Т.48**):

$$\gamma(x) = \text{б.м.ф. при } x\to x_0$$

Распишем предел произведения:

$$\begin{aligned} \lim_{x\to x_0}\big(f(x)\cdot g(x)\big) &= \lim_{x\to x_0}\big(ab+\gamma(x)\big) = \lim_{x\to x_0} ab + \lim_{x\to x_0}\gamma(x) = \\ &= ab + 0 = ab = \lim_{x\to x_0} f(x)\cdot\lim_{x\to x_0} g(x) \end{aligned}$$

■

8 Сформулируйте и докажите теорему о пределе сложной функции.

Теорема 8 *(О пределе сложной функции)*.
Если функция $y=f(x)$ имеет предел в точке x_0 равный a, то функция $\varphi(y)$ имеет предел в точке a, равный c, тогда сложная функция $\varphi\big(f(x)\big)$ имеет предел в точке x_0 равный c. Кратко:

$$\left.\begin{aligned} y &= f(x)\\ \lim_{x\to x_0} f(x) &= a\\ \lim_{y\to a}\varphi(y) &= c \end{aligned}\right\} \Rightarrow \lim_{x\to x_0}\varphi\big(f(x)\big) = c$$

Доказательство.
По условию:

$$\lim_{y\to a}\varphi(y) = c \iff \big(\forall\varepsilon>0\big)\big(\exists\delta_1>0\big)\colon \big(\forall y\colon 0<|y-a|<\delta_1 \;\Rightarrow\; |\varphi(y)-c|<\varepsilon\big) \qquad (1)$$

Выберем в качестве ε в пределе найденное δ_1 ($\varepsilon=\delta_1$):

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = a \iff \big(\forall\delta_1>0\big)\big(\exists\delta_2>0\big)\colon \big(\forall x\colon 0<|x-x_0|<\delta_2 \;\Rightarrow\; |f(x)-a|<\delta_1\big) \quad (2)$$

В итоге:

$$\big(\forall\varepsilon>0\big)\big(\exists\delta_2>0\big)\colon \big(\forall x\colon 0<|x-x_0|<\delta_2 \;\Rightarrow\; \big|\varphi\big(f(x)\big)-c\big|<\varepsilon\big)$$

Что равносильно:

$$\lim_{x\to x_0}\varphi\big(f(x)\big) = c$$

■

9 Докажите, что $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$.

Теорема 9.

$$\boxed{\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1}$$

Доказательство.

1. Рассмотрим $\lim\limits_{x\to 0+} \dfrac{\sin x}{x} = 1,\ \lim\limits_{x\to 0-} \dfrac{\sin x}{x} = 1 \ \Rightarrow\ \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin x}{x} = 1$

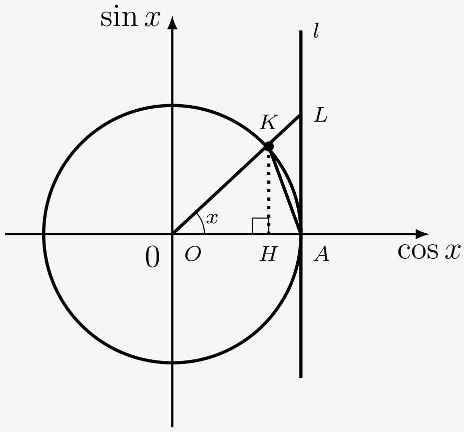
2. Пусть x — угол в радианах, $x \to 0+,\ x \in \left(0; \dfrac{\pi}{2}\right)$.
Окружность $R = 1$.

3. Отложим $\angle x$: вершина совпадает с точкой $O(0;0)$, 1 сторона — с положительным направлением OX, $A(1;0)$.
K — точка пересечения $\angle x$ и окружности.
l — касательная к окружности в точке A, пересекает OK.
$KH \perp OA$, $H \in OA$.

4. Рассмотрим $\triangle OKH$: $OK = 1 = R_{\text{окр.}}$ $\quad \sin x = \dfrac{KH}{OK} = KH.$

5. Рассмотрим $\triangle OLA$: $OA = 1 = R_{\text{окр.}}$ $\quad \operatorname{tg} x = \dfrac{LA}{OA} = LA.$

6. Из геометрических построений:



$$S_{\triangle OKA} < S_{\text{сек. } OKA} < S_{\triangle OLA}$$

$$S_{\triangle OKA} = \frac{1}{2} \cdot OA \cdot KH = \frac{1}{2} \cdot \sin x = \frac{\sin x}{2}$$

$$S_{\text{сек. } OKA} = \frac{1}{2} \cdot OA \cdot OK \cdot \overset{\frown}{KA} = \frac{1}{2} \cdot \overset{\frown}{KA} = \frac{1}{2} \cdot x = \frac{x}{2}$$

$$S_{\triangle OLA} = \frac{1}{2} \cdot OA \cdot LA = \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot \operatorname{tg} x = \frac{\operatorname{tg} x}{2}$$

$$\frac{\sin x}{2} < \frac{x}{2} < \frac{\operatorname{tg} x}{2} \quad \Big| \cdot 2$$

$$\left.\begin{array}{l} \sin x < x < \operatorname{tg} x \\ x \to 0+ \ \Rightarrow \begin{cases} \sin x > 0 \\ \operatorname{tg} x > 0 \end{cases} \end{array}\right\} \Rightarrow \ \sin x < x < \operatorname{tg} x \quad \Big| : \sin x$$

$$1 < \frac{x}{\sin x} < \frac{1}{\cos x} \ \Rightarrow\ \cos x < \frac{\sin x}{x} < 1$$

По теореме *о предельном переходе в неравенстве* (**Т.5**):

$$\lim_{x\to 0+} \cos x \le \lim_{x\to 0+} \frac{\sin x}{x} \le 1$$

По теореме *о промежуточной функции* (**Т.6**):

$$\lim_{x\to 0+} \cos x = 1 \ \Rightarrow\ \lim_{x\to 0+} \frac{\sin x}{x} = 1$$

Аналогично для $\lim\limits_{x\to 0-}\dfrac{\sin x}{x}=1$.
По теореме *о существовании предела функции в точке* (**Т.47**):

$$\lim_{x\to 0+}\frac{\sin x}{x}=\lim_{x\to 0-}\frac{\sin x}{x}=1\ \Rightarrow\ \lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$$

■

10 Сформулируйте и докажите теорему о связи функции, ее предела и бесконечно малой.

Теорема 10 *(О связи функции, её предела и бесконечно малой)***.**
Функция $y=f(x)$ имеет конечный предел в точке x_0 тогда и только тогда, когда её можно представить в виде суммы предела и некоторой бесконечно малой функции.

$$\lim_{x\to x_0}f(x)=a\iff f(x)=a+\alpha(x),\text{где }\alpha(x)-\text{б.м.ф при }x\to x_0$$

Доказательство (Необходимость)**.**
Дано: $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=a$
Доказать: $f(x)=a+\alpha(x),\text{где }\alpha(x)$ — б.м.ф. при $x\to x_0$

По условию:

$$\lim_{x\to x_0}f(x)=a\iff\big(\forall\varepsilon>0\big)\big(\exists\delta>0\big):\big(\forall x\in\mathring{S}(x_0;\delta)\ \Rightarrow\ |f(x)-a|<\varepsilon\big)$$

Обозначим $f(x)-a=\alpha(x)$, тогда:

$$\lim_{x\to x_0}f(x)=a\iff\big(\forall\varepsilon>0\big)\big(\exists\delta>0\big):\big(\forall x\in\mathring{S}(x_0;\delta)\ \Rightarrow\ |\alpha(x)|<\varepsilon\big)$$

По определению бесконечно малой функции (**опр.29**) $\alpha(x)$ — б.м.ф.
Из обозначения следует, что $f(x)=a+\alpha(x)$, где $\alpha(x)$ — б.м.ф при $x\to x_0$. ■

Доказательство (Достаточность)**.**
Дано: $f(x)=a+\alpha(x),\text{где }\alpha(x)$ — б.м.ф. при $x\to x_0$
Доказать: $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=a$

По определению б.м.ф.:

$$\lim_{x\to x_0}\alpha(x)=0\iff\big(\forall\varepsilon>0\big)\big(\exists\delta>0\big):\big(\mathring{S}(x_0;\delta)\ \Rightarrow\ |\alpha(x)|<\varepsilon\big)$$

С учётом введённого обозначения:

$$\big(\forall\varepsilon>0\big)\big(\exists\delta>0\big):\big(\mathring{S}(x_0;\delta)\ \Rightarrow\ |f(x)-a|<\varepsilon\big)\iff\lim_{x\to x_0}f(x)=a$$

■

Следствие 10.1. Так как любая бесконечно малая функция локально ограничена, то произведение двух бесконечно малых функций есть бесконечно малая функция.

Следствие 10.2. Произведение бесконечно малой функции на константу есть величина бесконечно малая.

11 Сформулируйте и докажите теорему о произведении бесконечно малой функции на ограниченную.

Теорема 11 *(О произведении бесконечно малой функций на локально ограниченную)***.** Произведение бесконечно малой функции на локальной ограниченную есть величина бесконечно малая.

Доказательство.
Пусть $\alpha(x)$ — б.м.ф. при $x \to x_0$, а функция $f(x)$ при $x \to x_0$ является локально ограниченной.
Доказываем, что: $\alpha(x) \cdot f(x) = 0$
По определению б.м.ф. (**опр.29**):

$$\lim_{x \to x_0} \alpha(x) = 0 \iff \left(\forall \varepsilon_1 = \frac{\varepsilon}{M} > 0\right)(\exists \delta_1 > 0) : \left(\forall x \in \mathring{S}(x_0; \delta_1) \Rightarrow \ |\alpha(x)| < \varepsilon_1 = \frac{\varepsilon}{M}\right) \\ M \in \mathbb{R}, \ M > 0 \tag{1}$$

По определению локально ограниченной функции (**опр.28**):

$$\exists M \in \mathbb{R}, M > 0, \quad \forall x \in \mathring{S}(x_0; \delta_2) \ \Rightarrow \ |f(x)| < M \tag{2}$$

Выберем $\delta = \min\{\delta_1; \delta_2\}$, тогда (1) и (2) верны одновременно. В итоге получаем:

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0) : \left(\forall x \in \mathring{S}(x_0; \delta) \ \Rightarrow \ |\alpha(x) \cdot f(x)| = |\alpha(x)| \cdot |f(x)| < \frac{\varepsilon}{M} \cdot M = \varepsilon\right)$$

Тогда по определению бесконечно малой функции:

$$\lim_{x \to x_0} \big(\alpha(x) \cdot f(x)\big) = 0$$

■

12 Сформулируйте и докажите теорему о связи между бесконечно большой и бесконечно малой.

Теорема 12 *(О связи бесконечно малой и бесконечно большой функции)***.**
Если $\alpha(x)$ — бесконечно большая функция при $x \to x_0$, то $\dfrac{1}{\alpha(x)}$ — бесконечно малая функция при $x \to x_0$.

Доказательство.
По условию $\alpha(x)$ — б.б.ф. при $x \to x_0$. По определению б.б.ф. (**опр.30**):

$$\lim_{x\to x_0} \alpha(x) = \infty \iff \big(\forall M > 0\big)\big(\exists \delta(M) > 0\big) : \big(\forall x \in \mathring{S}(x_0;\delta) \;\Rightarrow\; |\alpha(x)| > M\big)$$

Рассмотрим неравенство:

$$|\alpha(x)| > M,\ \forall x \in \mathring{S}(x_0;\delta)$$

Обозначим $\varepsilon = \dfrac{1}{M}$.

$$|\alpha(x)| > M \;\Rightarrow\; \frac{1}{|\alpha(x)|} < \frac{1}{M} \;\Rightarrow\; \left|\frac{1}{\alpha(x)}\right| < \varepsilon$$

По определению б.м.ф. (**опр.29**):

$$\lim_{x\to x_0} \frac{1}{\alpha(x)} = 0 \;\Rightarrow\; \frac{1}{\alpha(x)} \text{ — б.м.ф при } x \to x_0$$

■

13 Сформулируйте и докажите теорему о замене бесконечно малой на эквивалентную под знаком предела.

Теорема 13 *(О замене функции на эквивалентную под знаком предела)***.**
Предел отношения двух б.м.ф. (б.б.ф.) не изменится, если заменить эти функции на эквивалентные. Кратко:

$$\left.\begin{array}{l} \alpha(x) \text{ и } \beta(x) \text{ — б.м.ф. при } x \to x_0 \\ \alpha(x) \sim \alpha_0(x) \\ \beta(x) \sim \beta_0(x) \end{array}\right\} \Rightarrow \lim_{x\to x_0} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = \lim_{x\to x_0} \frac{\alpha_0(x)}{\beta_0(x)}$$

Доказательство.
Рассмотрим предел:

$$\lim_{x\to x_0} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = \lim_{x\to x_0} \frac{\alpha(x)\cdot\alpha_0(x)\cdot\beta_0(x)}{\beta(x)\cdot\alpha_0(x)\cdot\beta_0(x)} = \lim_{x\to x_0} \frac{\alpha(x)}{\alpha_0(x)} \cdot \lim_{x\to x_0} \frac{\beta_0(x)}{\beta(x)} \cdot \lim_{x\to x_0} \frac{\alpha_0(x)}{\beta_0(x)} =$$

$$= 1 \cdot 1 \cdot \lim_{x\to x_0} \frac{\alpha_0(x)}{\beta_0(x)}$$

■

14 Сформулируйте и докажите теорему о необходимом и достаточном условии эквивалентности бесконечно малых.

Теорема 14 *(Необходимое и достаточное условие эквивалентности бесконечно малых функций)*.
Две бесконечно малые функции $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ эквивалентны тогда и только тогда, когда их разность имеет более высокий порядок малости по сравнению с каждой из них.

$$\alpha(x) \text{ и } \beta(x) \text{ — б.м.ф при } x \to x_0$$

$$\alpha(x) \sim \beta(x) \text{ при } x \to x_0 \iff \begin{matrix} \alpha(x) - \beta(x) = o\big(\alpha(x)\big) \\ \alpha(x) - \beta(x) = o\big(\beta(x)\big) \end{matrix} \quad \text{при } x \to x_0$$

Доказательство (Необходимость).
Дано: $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ — б.м.ф при $x \to x_0$, $\quad \alpha(x) \sim \beta(x)$ при $x \to x_0$
Доказать: $\alpha(x) - \beta(x) = o\big(\alpha(x)\big)$, при $x \to x_0$
Рассмотрим:

$$\lim_{x \to x_0} \frac{\alpha(x) - \beta(x)}{\alpha(x)} = \lim_{x \to x_0} \left(1 - \frac{\beta(x)}{\alpha(x)}\right) = 1 - \lim_{x \to x_0} \frac{\beta(x)}{\alpha(x)} = 1 - 1 = 0$$

Аналогично доказывается, что $\alpha(x) - \beta(x) = o\big(\beta(x)\big)$ при $x \to x_0$. ■

Доказательство (Достаточность).
Дано: $\alpha(x) - \beta(x) = o\big(\beta(x)\big)$ при $x \to x_0$
Доказать: $\alpha(x) \sim \beta(x)$ при $x \to x_0$
Рассмотрим:

$$\lim_{x \to x_0} \frac{\alpha(x) - \beta(x)}{\beta(x)} = \lim_{x \to x_0} \left(\frac{\alpha(x)}{\beta(x)} - 1\right) = \lim_{x \to x_0} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} - 1 = 0 \ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \ \lim_{x \to x_0} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = 1 \ \Rightarrow \ \alpha(x) \sim \beta(x) \text{ при } x \to x_0$$

■

15 Сформулируйте и докажите теорему о сумме конечного числа бесконечно малых разных порядков.

Теорема 15 *(О сумме бесконечно малых разного порядка)***.**
Сумма бесконечно малых функций разных порядков малости эквивалентна слагаемому низшего порядка малости.

$$\left.\begin{aligned} &\alpha(x), \beta(x) \text{ — б.м.ф при } x \to x_0 \\ &\alpha(x) = o\big(\beta(x)\big) \text{ при } x \to x_0 \end{aligned}\right\} \implies \alpha(x) + \beta(x) \sim \beta(x), \text{ при } x \to x_0$$

Доказательство.
Рассмотрим предел:

$$\lim_{x \to x_0} \frac{\alpha(x) + \beta(x)}{\beta(x)} = \lim_{x \to x_0} \left(\frac{\alpha(x)}{\beta(x)} + 1\right) = \lim_{x \to x_0} \left(\frac{\alpha(x)}{\beta(x)}\right) + 1 = 0 + 1 = 1$$

■

Следствие 15.1. Сумма б.б.ф. разного порядка роста эквивалентна слагаемому высшего порядка роста.

16 Сформулируйте и докажите теорему о непрерывности суммы, произведения и частного непрерывных функций.

Теорема 16.
Пусть функции:

$$\left.\begin{aligned} y &= f(x) \\ y &= g(x) \end{aligned}\right\} \in C(x_0)$$

Тогда:

1. $f(x) + g(x) \in C(x_0)$
2. $f(x) \cdot g(x) \in C(x_0)$
3. $\dfrac{f(x)}{g(x)} \in C(x_0), \;\; g(x) \neq 0$

Доказательство.
По определению непрерывной функции (**опр.37**):

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$$
$$\lim_{x \to x_0} g(x) = g(x_0)$$

Рассмотрим:

$$\lim_{x\to x_0}\big(f(x)+g(x)\big)=\lim_{x\to x_0}f(x)+\lim_{x\to x_0}g(x)=f(x_0)+g(x_0) \tag{1}$$

$$\Updownarrow$$

$$f(x)+g(x)\in C(x_0)$$

$$\lim_{x\to x_0}\big(f(x)\cdot g(x)\big)=\lim_{x\to x_0}f(x)\cdot\lim_{x\to x_0}g(x)=f(x_0)\cdot g(x_0) \tag{2}$$

$$\Updownarrow$$

$$f(x)\cdot g(x)\in C(x_0)$$

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{\lim\limits_{x\to x_0}f(x)}{\lim\limits_{x\to x_0}g(x)}=\frac{f(x_0)}{g(x_0)} \tag{3}$$

$$\Updownarrow$$

$$\frac{f(x)}{g(x)}\in C(x_0),\ \ g(x)\neq 0$$

■

17 Сформулируйте и докажите теорему о непрерывности сложной функции.

Теорема 17 *(О непрерывности сложной функции)***.**
Пусть функция $f(x)$ непрерывна в точке x_0, а $g(y)$ в точке y_0, причём $y_0=f(x_0)$.
Тогда сложная функция $F(x)=g\big(f(x)\big)$ непрерывна в точке x_0

Доказательство.
Так как $y=f(x)\in C(x_0)\ \Rightarrow\ \lim\limits_{x\to x_0}f(x)=f(x_0)$

Так как $g(y)\in C(x_0)\ \Rightarrow\ \lim\limits_{y\to y_0}g(y)=g(y_0),\ y_0=f(x_0)$

Рассмотрим $\lim\limits_{x\to x_0}F(x)=\lim\limits_{x\to x_0}g\big(f(x)\big)\xlongequal{\text{Т.49}}g\left(\lim\limits_{x\to x_0}f(x)\right)\xlongequal{\text{непр. }f}g\big(f(x_0)\big)=F(x_0)\ \Rightarrow$
$\Rightarrow\ g\big(f(x)\big)\in C(x_0)$ ■

18 Сформулируйте и докажите теорему о сохранении знака непрерывной функции в окрестности точки.

Теорема 18 *(О сохранении знака непрерывной функции в окрестности точки)*.
Если функция $y = f(x)$ непрерывна в точке x_0 и $f(x_0) \neq 0$, то $\exists\ S(x_0)$, в которой знак значений функции совпадает со знаком $f(x_0)$.

Доказательство.
Так как $y = f(x)$ непрерывна в точке x_0, то $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$.
По теореме *о сохранении функцией знака своего предела* (**Т.4**) $\Rightarrow\ \exists\ S(x_0)$, в которой знак значений функции совпадает со знаком $f(x_0)$. ■

Примечание. На экзамене требуется доказать также и теорему о сохранении функцией знака своего предела!

19 Дайте определение функции, непрерывной в точке. Сформулируйте теорему о непрерывности элементарных функций. Докажите непрерывность функций $y = \sin x$, $y = \cos x$.

Определение 1. Функция $f(x)$, определённая в некоторой окрестности точки x_0, называется **непрерывной в** этой **точке** если:

$$\exists \lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$$

Примечание. Множество непрерывных функций в точке x_0 обозначается $C(x_0)$.

$$f(x) \in C(x_0) \iff \text{функция непрерывна в точке } x_0$$

Теорема 19.
Основные элементарные функции непрерывны в области определения.

Доказательство.
• Докажем её для функций $y = \sin x$ и $y = \cos x$.
1. Возьмём $y = \sin x,\ \ D_f \in \mathbb{R}$.

$$x_0 = 0 \quad \lim_{x \to 0} \sin x = \sin 0 = 0 \ \Rightarrow\ y = \sin x \in C(0)$$

2. Возьмём $\forall x_0 \in D_f \in \mathbb{R}$, Δx — приращение аргумента.

$$x = x_0 + \Delta x,\ \ x \in D_f = \mathbb{R}$$

3. Соответствующее приращение функции:

$$\Delta y = f(x) - f(x_0) = y(x_0 + \Delta x) - y(x_0) = \sin(x_0 + \Delta x) - \sin(x_0) =$$
$$= 2 \cdot \sin \frac{x_0 + \Delta x - x_0}{2} \cdot \cos \frac{x_0 + \Delta x + x_0}{2} = 2 \cdot \sin \frac{\Delta x}{2} \cdot \cos\left(x_0 + \frac{\Delta x}{2}\right)$$

4. По теореме *о произведении б.м.ф. на ограниченную* (**Т.11**):

$$\lim_{\Delta x \to 0} \Delta y = \lim_{\Delta x \to 0} \left(2 \cdot \sin \frac{\Delta x}{2} \cdot \cos\left(x_0 + \frac{\Delta x}{2}\right)\right) = 0$$

5. $\sin \dfrac{\Delta x}{2}$ — б.м.ф. при $\Delta x \to 0$?

$$\lim_{\Delta x \to 0} \sin \frac{\Delta x}{2} = \sin 0 = 0 \;\Rightarrow\; \sin \frac{\Delta x}{2} \text{ — б.м.ф при } \Delta x \to 0$$

6. $\cos\left(x_0 + \dfrac{\Delta x}{2}\right)$ — огр. функция?

$$\frac{\Delta x}{2} \to 0,\; \cos(x_0) \text{ — огр. } \Rightarrow \left|\cos\left(x_0 + \frac{\Delta x}{2}\right)\right| \le 1 \text{ — огр. функция}$$

7. Так как $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \Delta y = 0$ по определению непрерывной функции (**опр.37**) $\Rightarrow$ $y = \sin x$ непрерывна в точке x_0.
8. Так как x_0 — произвольная точка из области определения, то $y = \sin x$ непрерывна на всей области определения.

- $\cos x$: $\Delta y = \cos(x_0 + \Delta x) - \cos(x_0)$. ■

Замечание. Эта теорема доказывается для каждой из элементарных функций отдельно.

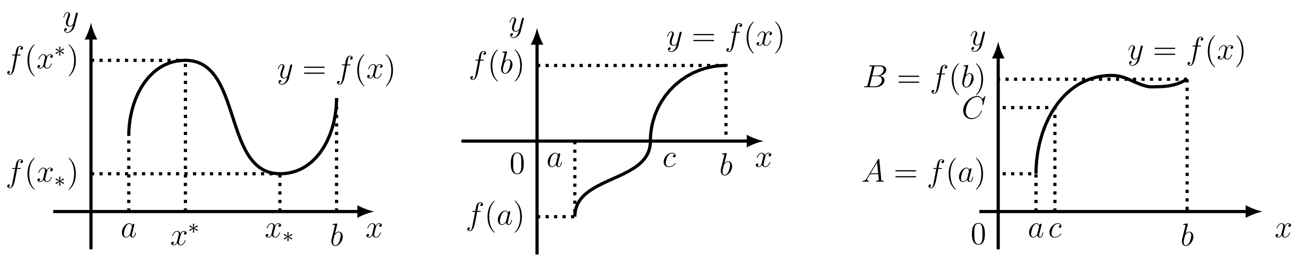
20 Сформулируйте свойства функций, непрерывных на отрезке.

Теорема 20 *(об ограниченности непрерывной функции (**Первая теорема Вейерштрасса**))*.
Если функция $y = f(x)$ непрерывна на $[a, b]$, то она на этом отрезке ограничена.
Кратко:

$$\big(f(x) \in C[a,b]\big) \;\Rightarrow\; \big(\exists\, M \in \mathbb{R}, M > 0\big)\big(\forall x \in [a,b]\colon |f(x)| \le M\big)$$

Теорема 21 *(о достижении непрерывной функции наибольшего и наименьшего значений (**Вторая теорема Вейерштрасса**))*.
Если функция $y = f(x)$ непрерывна на $[a, b]$, то она достигает на этом отрезке своего наибольшего и наименьшего значений.
Кратко:

$$\big(f(x) \in C[a,b]\big) \;\Rightarrow\; \big(\exists\, x_*,\ x^* \in [a,b]\colon (\forall x \in [a,b] \;\Rightarrow\; m = f(x_*) \le f(x) \le f(x^*) = M\big)$$



(a) Теорема №21 (b) Теорема №22 (c) Теорема №23

Теорема 22 *(о существовании нуля непрерывной функции (**Первая теорема Больцана-Коши**))*.
Если функция $y = f(x)$ непрерывна на отрезке $[a, b]$ и на концах отрезка принимает значения разных знаков, то $\exists\, c \in (a, b)\colon f(x) = 0$
Кратко:

$$\big(f(x) \in C[a,b]\big) \wedge \big(f(x) \cdot f(b) < 0\big) \;\Rightarrow\; \big(\exists\, c \in (a,b)\big)\colon f(x) = 0$$

Теорема 23 *(о промежуточном значении непрерывной функции (**Вторая теорема Больцана-Коши**))*.
Если функция $y = f(x)$ непрерывна на $[a, b]$ и принимает на границах отрезка различные значения $(f(a) = A \ne f(b) = B)$, то $\forall C$, лежащего между A и B, $\exists\, c \in (a, b)$, $f(c) = C$
Кратко:

$$\big(f(x) \in c[a,b]\big) \wedge \big(f(a) = A \ne f(b) = B\big) \;\Rightarrow\; \big(\forall\, C \in (A,B)\ \exists\, c \in (a,b)\ f(x) = C\big)$$

Теорема 24 *(о существовании обратной к непрерывной функции)*.
Пусть $y = f(x)$ непрерывна на интервале (a, b) и строго монотонна (возрастает/убывает) на этом интервале. Тогда в соответствующем (a, b) интервале значений функции существует обратная функция $\big($обозначается $x = f^{-1}(y)\big)$, которая также строго монотонна и непрерывна.

21 Сформулируйте определение точки разрыва функции и дайте классификацию точек разрыва. На каждый случай приведите примеры.

Определение 2. Пусть функция $y = f(x)$ определена в некоторой проколотой окрестности точки x_0, непрерывна в любой точке этой окрестности за исключением самой точки x_0. Тогда точка x_0 называется **точкой разрыва функции** $y = f(x)$.

x_0 – точка разрыва

I-го рода

$\exists$ конечные $\lim\limits_{x\to x_0\pm} f(x)$

II-го рода

$\nexists \lim\limits_{x\to x_0\pm} f(x)$ или ∞

точка конечного разрыва / точка скачка

$\lim\limits_{x\to x_o+} f(x) \neq \lim\limits_{x\to x_0-} f(x)$

$\Delta f = \left|\lim\limits_{x\to x_o+} f(x) - \lim\limits_{x\to x_0-} f(x)\right|$

точка устранимого разрыва

$\lim\limits_{x\to x_0+} f(x) = \lim\limits_{x\to x_0-} f(x) \neq f(x_0)$ или $\nexists f(x_0)$

Определение 3. Если точка x_0 — точка разрыва функции $y = f(x)$ и существуют конечные пределы $\lim\limits_{x\to x_0+} f(x)$ и $\lim\limits_{x\to x_0-} f(x)$, то x_0 называют **точкой I-го рода**.

Определение 4. Если точка x_0 — точка разрыва функции $y = f(x)$ и не существуют конечные пределы $\lim\limits_{x\to x_0+} f(x)$ и $\lim\limits_{x\to x_0-} f(x)$ или $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = \infty$, то x_0 называется **точкой разрыва II-го рода**.

Определение 5. Если точка x_0 — точка разрыва первого рода функции $y = f(x)$ и предел $\lim\limits_{x\to x_0+} f(x) \neq \lim\limits_{x\to x_0-} f(x)$, то x_0 называется **точкой конечного разрыва** или точкой *скачка*.

Определение 6. Если точка x_0 — точка разрыва первого рода функции $y = f(x)$ и предел $\lim\limits_{x\to x_0+} f(x) = \lim\limits_{x\to x_0-} f(x)$, но $\nexists f(x_0)$, то точка x_0 называется **точкой устранимого разрыва**.

Примеры

Пример. $y = \dfrac{|x-1|}{x-1}$ $\qquad D_f = \mathbb{R} \setminus \{1\}$ $\qquad x = 1$ — точка разрыва

$$\left.\begin{aligned} \lim_{x\to 1+} f(x) = \lim_{x\to 1+} \frac{|x-1|}{x-1} = \frac{x-1}{x-1} = 1 \\ \lim_{x\to 1-} f(x) = \lim_{x\to 1-} \frac{|x-1|}{x-1} = \frac{1-x}{x-1} = -1 \end{aligned}\right. \Rightarrow \lim_{x\to 1+} f(x) \neq \lim_{x\to 1-} f(x) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x = 1 \text{ — т.р. I рода, точка скачка}$$

$$\Delta f = \left| \lim_{x\to 1+} f(x) - \lim_{x\to 1-} f(x) \right| = \left| 1 - (-1) \right| = 2$$

Пример. $y = \dfrac{\sin x}{x}$ $\qquad D_f = \mathbb{R} \setminus \{0\}$ $\qquad x = 0$ — точка разрыва

$$\left.\begin{aligned} \lim_{x\to 0+} f(x) = \lim_{x\to 0+} \frac{\sin x}{x} = 1 \\ \lim_{x\to 0-} f(x) = \lim_{x\to 0-} \frac{\sin x}{x} = 1 \end{aligned}\right. \Rightarrow \lim_{x\to 0+} f(x) = \lim_{x\to 0-} f(x) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x = 0 \text{ — т.р. I рода, устранимая точка разрыва}$$

$$g(x) = \begin{cases} \dfrac{\sin x}{x}, x \neq 0 \\ 1, x = 0 \end{cases}$$

$$f(x) \notin C(0)$$
$$g(x) \in C(0)$$

Пример. $y = e^{\frac{1}{x}}$ $\qquad D_f = \mathbb{R} \setminus \{0\}$ $\qquad x = 0$ — точка разрыва

$$\left.\begin{aligned} \lim_{x\to 0+} f(x) = \lim_{x\to 0+} e^{\frac{1}{x}} = e^{+\infty} = \infty \\ \lim_{x\to 0-} f(x) = \lim_{x\to 0-} e^{\frac{1}{x}} = e^{-\infty} = 0 \end{aligned}\right. \Rightarrow \lim_{x\to 0+} f(x) = \infty \Rightarrow x = 0 \text{ — т.р. II рода}$$

22 Сформулируйте и докажите необходимое и достаточное условие существования наклонной асимптоты.

Теорема 25 *(Необходимое и достаточное условие существования наклонных асимптот)***.**
График функции $y = f(x)$ имеет при $x \to \pm\infty$ наклонную асимптоту тогда и только тогда, когда существуют два конечных передела:

$$\begin{cases} \lim\limits_{x\to\pm\infty} \dfrac{f(x)}{x} = k \\ \lim\limits_{x\to\pm\infty} \big(f(x) - k\cdot x\big) = b \end{cases} \tag{$*$}$$

Доказательство (Необходимость).
Дано: $y = kx + b$ — наклонная асимптота
Доказать: $\exists$ конечные пределы $(*)$
По условию $kx + b$ наклонная асимптота $\Rightarrow$ по определению наклонной асимптоты (**опр.50**): $f(x) = kx + b + \alpha(x)$, где $\alpha(x)$ – б.м.ф. при $x \to \pm\infty$.
Рассмотрим:

$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{kx + b + \alpha(x)}{x} = \lim_{x\to\pm\infty} \left(k + b\cdot\frac{1}{x} + \frac{1}{x}\cdot\alpha(x)\right) =$$
$$= k + b\cdot \lim_{x\to\pm\infty}\frac{1}{x} + \lim_{x\to\pm\infty}\frac{1}{x}\cdot\alpha(x) = k + b\cdot 0 + 0 = k$$

Рассмотрим выражение:

$$f(x) - k\cdot x = \cancel{kx} + b + \alpha(x) - \cancel{kx} = b + \alpha(x)$$

Вычислим:

$$\lim_{x\to\pm\infty} \big(f(x) - k\cdot x\big) = \lim_{x\to\pm\infty} \big(b + \alpha(x)\big) = b + \lim_{x\to\pm\infty} \alpha(x) = b + 0 = b$$

■

Доказательство (Достаточность).
Дано: $\exists$ конечные пределы $(*)$
Доказать: $y = kx + b$ — наклонная асимптота
$\exists$ конечный предел: $\lim\limits_{x\to\pm\infty} (f(x) - kx) = b$
По теореме *о связи функции, её предела и б.м.ф.* (**Т.10**) $\Rightarrow$
$\Rightarrow$ $f(x) - kx = b + \alpha(x)$, где $\alpha(x)$ – б.м.ф. при $x \to \pm\infty$.
Выразим $f(x) = kx + b + \alpha(x)$, где $\alpha(x)$ – б.м.ф. при $x \to \pm\infty$.
По определению наклонной асимптоты $\Rightarrow$ $y = kx+b$ — наклонная асимптота графика функции $y = f(x)$. ■

23 Сформулируйте и докажите необходимое и достаточное условие дифференцируемости функции в точке.

Теорема 26 *(Необходимое и достаточное условие дифференцируемости функции).* Функция $y = f(x)$ дифференцируема в точке x_0 тогда и только тогда, когда она имеет в этой точке конечную производную.

Доказательство (Необходимость).
Дано: $y = f(x)$ дифференцируема в точке x_0
Доказать: $\exists\ y'(x_0)$ – конечное число
Т.к. $y = f(x)$ дифференцируема в точке x_0, то $\Delta y = A \cdot \Delta x + \alpha(\Delta x) \cdot \Delta x$,
где $\alpha(\Delta x)$ – б.м.ф. при $\Delta x \to 0$
Вычислим предел:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{A \cdot \Delta x + \alpha(\Delta x) \cdot \Delta x}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} (A + \alpha(\Delta x)) = A + \lim_{\Delta x \to 0} \alpha(\Delta x) =$$
$$= A + 0 = A$$

$\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta x}{\Delta y} = y'(x_0)$ – по определению производной в точке (**опр.52**)

$y'(x_0) = A = const \ \Rightarrow\ \exists\ y'(x_0)$ – конечное число

■

Доказательство (Достаточность).
Дано: $\exists\ y'(x_0)$ – конечное число
Доказать: $y = f(x)$ дифференцируема в точке x_0
Т.к. $\exists\ y'(x_0)$, то по определению производной: $y'(x_0) = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta y}{\Delta x}$

По теореме *о связи функции, её предела и б.м.ф.* (**с.11, Т.10**) $\Rightarrow\ \dfrac{\Delta y}{\Delta x} = y'(x_0) + \alpha(\Delta x)$,

где $\alpha(\Delta x)$ – б.м.ф. при $\Delta x \to 0$
$\Delta y = y'(x_0) \cdot \Delta x + \alpha(\Delta x) \cdot \Delta x$, где $\underbrace{y'(x_0)}_{A}$ – $const\ \Rightarrow$

$\Rightarrow\ y = f(x)$ дифференцируема в точке x_0 ■

Следствие 26.1. Функция, выражающая дифференцируемость функции $y = f(x)$ в точке x_0 примет вид:

$$\boxed{\Delta y = y'(x_0) \cdot \Delta x + \alpha(\Delta x) \cdot \Delta x}$$

где $\alpha(\Delta x)$ – б.м.ф. при $\Delta x \to 0$

24 Сформулируйте и докажите теорему о связи дифференцируемости и непрерывности функции.

Теорема 27 *(Связь дифференцируемости и непрерывности функции)***.**
Если функция дифференцируема в точке x_0, то она в этой точке непрерывна.

Доказательство.
Т.к. $y = f(x)$ дифференцируема в точке x_0, то $\Delta y = y'(x_0) \cdot \Delta x + \alpha(\Delta x) \cdot \Delta x$, где $y'(x_0) = const, \quad \alpha(\Delta x)$ – б.м.ф. при $\Delta x \to 0$
Вычислим:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \Delta y = \lim_{\Delta x \to 0} \big(y'(x_0) \cdot \Delta x + \alpha(\Delta x) \cdot \Delta x\big) =$$
$$= y'(x_0) \cdot \lim_{\Delta x \to 0} \Delta x + \lim_{\Delta x \to 0} \alpha(\Delta x) \cdot \lim_{\Delta x \to 0} \Delta x = y'(x_0) \cdot 0 + 0 \cdot 0 = 0$$

По определению непрерывной функции (**опр.37**) $y = f(x)$ непрерывна в точке x_0. ■

$$\boxed{\text{дифференцируемость}} \;\; \begin{matrix} \Longrightarrow \\ \not\Longleftarrow \end{matrix} \;\; \boxed{\text{непрерывность}}$$

Пример. $y = |x|, \;\; x_0 = 0$ является непрерывной, но не является дифференцируемой

25 Сформулируйте и докажите теорему о производной произведения двух дифференцируемых функций.

Теорема 28 *(Производная произдведения)***.**
Пусть функции $u = u(x), \;\; v = v(x)$ дифференцируемы в точке x.
Тогда в этой точке дифференцируемо их произведение и справедливо равенство:

$$(u \cdot v)' = u' \cdot v + v' \cdot u$$

Распишем приращения каждой из функций:

$$\begin{cases} \Delta u = u(x + \Delta x) - u(x) \\ \Delta v = v(x + \Delta x) - v(x) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u(x + \Delta x) = \Delta u + u(x) \\ v(x + \Delta x) = \Delta v + v(x) \end{cases}$$

Доказательство (Производная произведения)**.**
Пусть $y = u \cdot v$, тогда:
$\Delta y = y(x + \Delta x) - y(x) = u(x + \Delta x) \cdot v(x + \Delta x) - u(x) \cdot v(x) =$
$= \big(\Delta u + u(x)\big) \cdot \big(\Delta v + v(x)\big) - u(x) \cdot v(x) =$
$= \Delta u \cdot \Delta v + \Delta u \cdot v(x) + \Delta v \cdot u(x) + \cancel{u(x) \cdot v(x)} - \cancel{u(x) \cdot v(x)} =$
$= \Delta u \cdot \Delta v + \Delta u \cdot v(x) + \Delta v \cdot u(x)$

Вычислим:

$$y'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta u \cdot \Delta v + \Delta u \cdot v(x) + \Delta v \cdot u(x)}{\Delta x} =$$
$$= \lim_{\Delta x \to 0} \left(\Delta u \frac{\Delta v}{\Delta x} + v(x) \frac{\Delta u}{\Delta x} + u(x) \frac{\Delta v}{\Delta x} \right) =$$
$$= \lim_{\Delta x \to 0} \Delta u \cdot \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta v}{\Delta x} + v(x) \cdot \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta u}{\Delta x} + u(x) \cdot \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta v}{\Delta x} =$$
$$= 0 \cdot v'(x) + v(x) \cdot u'(x) + u(x) \cdot v'(x) = \boxed{v(x) \cdot u'(x) + u(x) \cdot v'(x)}$$

Т.к. функции $u = u(x)$, $v = v(x)$ дифференцируемы в точке x, то по теореме *о связи дифференцируемости и непрерывности функции* (**Т.27**) $\Rightarrow$ $u = u(x)$ и $v = v(x)$ непрерывны в точке x $\Rightarrow$ по определению непрерывной функции (**опр.37**): $\begin{cases} \lim\limits_{\Delta x \to 0} \Delta u = 0 \\ \lim\limits_{\Delta x \to 0} \Delta v = 0 \end{cases}$ ■

26 Сформулируйте и докажите теорему о производной частного двух дифференцируемых функций.

Теорема 29 *(Производная частного)***.**
Пусть функции $u = u(x)$, $v = v(x)$ дифференцируемы в точке x.
Тогда в этой точке дифференцируемо их частное (при условии $v \neq 0$) и справедливо равенство:

$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u' \cdot v - v' \cdot u}{v^2}$$

Распишем приращения каждой из функций:

$$\begin{cases} \Delta u = u(x + \Delta x) - u(x) \\ \Delta v = v(x + \Delta x) - v(x) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u(x + \Delta x) = \Delta u + u(x) \\ v(x + \Delta x) = \Delta v + v(x) \end{cases}$$

Доказательство (Производная частного)**.**
Пусть $y = \dfrac{u}{v}$, тогда:

$$\Delta y = y(x + \Delta x) - y(x) = \frac{u(x + \Delta x)}{v(x + \Delta x)} - \frac{u(x)}{v(x)} = \frac{u(x + \Delta x) \cdot v(x) - u(x) \cdot v(x + \Delta x)}{v(x + \Delta x) \cdot v(x)} =$$
$$= \begin{vmatrix} u(x + \Delta x) = u(x) + \Delta u \\ v(x + \Delta x) = v(x) + \Delta v \end{vmatrix} = \frac{(u(x) + \Delta u) \cdot v(x) - u(x) \cdot (v(x) + \Delta v)}{(\Delta v + v(x)) \cdot v(x)} =$$
$$= \frac{\cancel{u(x) \cdot v(x)} + \Delta u \cdot v(x) - \cancel{u(x) \cdot v(x)} - u(x) \cdot \Delta v}{v^2(x) + v(x) \cdot \Delta v} = \frac{\Delta u \cdot v(x) - \Delta v \cdot u(x)}{v^2(x) + v(x) \cdot \Delta v}$$

Вычислим предел:

$$y'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\dfrac{\Delta u \cdot \upsilon(x) - \Delta \upsilon \cdot u(x)}{\upsilon^2(x) + \upsilon(x) \cdot \Delta \upsilon}}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\upsilon(x)\dfrac{\Delta u}{\Delta x} - u(x)\dfrac{\Delta \upsilon}{\Delta x}}{\upsilon^2(x) + \upsilon(x) \cdot \Delta \upsilon} =$$

$$= \frac{\upsilon(x) \cdot \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta u}{\Delta x} - u(x) \cdot \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta \upsilon}{\Delta x}}{\upsilon^2(x) - \upsilon(x) \lim\limits_{\Delta x \to 0} \Delta \upsilon} = \frac{\upsilon(x) \cdot u'(x) - u(x) \cdot \upsilon'(x)}{\upsilon^2(x) + \upsilon(x) \cdot 0} =$$

$$= \boxed{\frac{\upsilon(x) \cdot u'(x) - u(x) \cdot \upsilon'(x)}{\upsilon^2(x)}}$$

Использовали: $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta u}{\Delta x} = u'(x) \qquad \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta \upsilon}{\Delta x} = \upsilon'(x)$

Так как $\upsilon(x)$ – дифференцируема, то по теореме *о связи дифференцируемости и непрерывности функции* (**Т.27**) $\upsilon(x)$ – непрерывна $\Rightarrow$ по определению непрерывности (**опр.37**) $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \Delta \upsilon = 0$.

$$\left(\frac{u}{\upsilon}\right)' = \frac{u' \cdot \upsilon - \upsilon' \cdot u}{\upsilon^2}$$

■

27 Сформулируйте и докажите теорему о производной сложной функции.

Теорема 30 *(Производная сложной функции)*.
Пусть функция $u = g(x)$ дифференцируема в точке $x = a$, а функция $y = f(u)$ дифференцируема в соответствующей точке $b = g(a)$.
Тогда сложная функция $F(x) = f(g(x))$ дифференцируема в точке $x = a$ и

$$F'(x)\Big|_{x=a} = \Big(f\big(g(x)\big)\Big)'\Big|_{x=a} = f'_u(b) \cdot g'_x(a)$$

Доказательство.
Так как функция $u = g(x)$ дифференцируема в точке $x = a$, то по определению дифференцируемости (**опр.55**):

$$\boxed{\Delta u = g'(a) \cdot \Delta x + \alpha(\Delta x) \cdot \Delta x} \tag{1}$$

где $\alpha(\Delta x)$ – б.м.ф. при $\Delta x \to 0$
Так как функция $y = f(u)$ дифференцируема в точке b, то по определению дифференцируемости:

$$\boxed{\Delta y = f'(b) \cdot \Delta u + \beta(\Delta u) \cdot \Delta u} \tag{2}$$

где $\beta(\Delta u)$ – б.м.ф. при $\Delta u \to 0$
Подставим (1) в (2):

$$\Delta y = f'(b) \cdot \Big(g'(a) \cdot \Delta x + \alpha(\Delta x) \cdot \Delta x\Big) + \beta(\Delta u) \cdot \Big(g'(a) \cdot \Delta x + \alpha(\Delta x) \cdot \Delta x\Big) =$$

$$= f'(b) \cdot g'(a) \cdot \Delta x + \Delta x \cdot \Big(f'(b) \cdot \alpha(\Delta x) + g'(a) \cdot \beta(\Delta u) + \beta(\Delta u) \cdot \alpha(\Delta x)\Big)' = \Delta F$$

Обозначим:

$$\gamma(\Delta x) = f'(b) \cdot \alpha(\Delta x) + g'(a) \cdot \beta(\Delta u) + \beta(\Delta u) \cdot \alpha(\Delta x)$$

В итоге получаем:

$$\Delta F = f'(b) \cdot g'(a) \cdot \Delta x + \gamma(\Delta x) \cdot \Delta x$$

$f'(b) \cdot \alpha(\Delta x)$ – б.м.ф. при $\Delta x \to 0$ (как произведение постоянной на б.м.ф)
Так как $u = g(x)$ дифференцируема в точке $x = a$, то по теореме *о связи дифференцируемости и непрерывности функции* (**Т.27**) $\Rightarrow$ $u = g(x)$ непрерывна в точке $x = a$ $\Rightarrow$
$\Rightarrow$ по определению непрерывности (**опр.40**) $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \Delta u = 0$ или при $\Delta x \to 0$, $\Delta u \to 0$

$$\left.\begin{array}{r} g'(a) \cdot \beta(\Delta u) \text{ – б.м.ф. при } \Delta x \to 0 \text{ (как произведение постоянной на б.м.ф.)} \\ \beta(\Delta u) \cdot \alpha(\Delta x) \text{ – б.м.ф. при } \Delta x \to 0 \text{ (как произведение двух б.м.ф.)} \end{array}\right| \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \ \gamma(\Delta x) \text{ – б.м.ф. при } \Delta x \to 0 \text{ (как сумма конечного числа б.м.ф.)}$$

Вычислим предел:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta F}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \Big(f'(b) \cdot g'(a) + \gamma(\Delta x) \Big) = f'(b) \cdot g'(a) + 0 = f'(b) \cdot g'(a)$$

■

28 Сформулируйте и докажите теорему о производной обратной функции.

Теорема 31 *(Производная обратной функции)*.
Пусть функция $y = f(x)$ в точке $x = a$ имеет конечную и отличную от нуля производную $f'(a)$ и пусть для неё существует однозначная обратная функция $x = g(y)$, непрерывная в соответствующей точке $b = f(a)$. Тогда существует производная обратной функции и она равна

$$g'(b) = \frac{1}{f'(a)}$$

Доказательство.
Так как функция $x = g(y)$ однозначно определена $\Rightarrow$ при $\Delta y \neq 0$, $\Delta x \neq 0$
Так как функция $x = g(y)$ непрерывна в точке $b \Rightarrow \lim\limits_{\Delta y \to 0} \Delta x = 0$ или $\Delta x \to 0$ при $\Delta y \to 0$

$$g'(b) = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta y} = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{1}{\frac{\Delta y}{\Delta x}} = \frac{1}{\lim\limits_{\Delta y \to 0} \dfrac{\Delta y}{\Delta x}} = \frac{1}{\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta y}{\Delta x}} = \frac{1}{f'(a)}$$

■

29 Сформулируйте и докажите свойство инвариантности формы записи дифференциала первого порядка.

Формула первого дифференциала:

$$\boxed{dy = f'(x)dx} \tag{1}$$

x – неизвестная переменная
Докажем, что формула (1) верна и в том случае, когда x – функция другой переменной.

Теорема 32 *(Инвариантность формы первого дифференциала)***.**
Форма записи первого дифференциала не зависит от того, является ли x независимой переменной или функцией другого аргумента.

Доказательство.
Пусть $\begin{matrix} y = f(x) \\ x = \varphi(t) \end{matrix}$, тогда можно задать сложную функцию $F(t) = y = f(\varphi(t))$
По определению дифференциала функции (**опр.56**):

$$dy = F'(t)dt \tag{1}$$

По теореме *о производной сложной функции* (**Т.30**):

$$F'(t) = f'(x) \cdot \varphi'(t) \tag{2}$$

Подставим (2) в (1):

$$dy = f'(x) \cdot \varphi'(t)dt \tag{3}$$

По определению дифференцируемой функции (**опр.55**):

$$dx = \varphi'(t)dt \tag{4}$$

Подставим (4) в (3):

$$\boxed{dy = f'(x)dx}$$

■

Следствие 32.1. Свойством инвариантности обладает только первый дифференциал.

30 Сформулируйте и докажите теорему Ферма.

Теорема 33 *(**Теорема Ферма** (о нулях производной))***.**
Пусть функция $y = f(x)$ определена на промежутке X и во внутренней точке $\boldsymbol{c}$ этого промежутка достигает наибольшего или наименьшего значения. Если в этой точке существует производная $f'(c)$, то $f'(c) = 0$.

Доказательство.
Пусть функция $y = f(x)$ в точке $x = c$ принимает наибольшее значение на промежутке $X \Rightarrow\ \forall x \in X \ \Rightarrow\ f(x) \leq f(c)$
Дадим приращение Δx в точке $x = c$, тогда $f(c + \Delta x) \leq f(c)$.

Пусть $\exists\ f'(c) = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{y(c+\Delta x) - y(c)}{\Delta x}$

Рассмотрим два случая:

1. $\Delta x > 0,\ \Delta x \to 0+,\ x \to c+$

   $$f'_+(c) = \lim_{\Delta x \to 0+} \frac{y(c+\Delta x) - y(c)}{\Delta x} = \left(\frac{-}{+}\right) \leq 0$$

2. $\Delta x < 0,\ \Delta x \to 0-,\ x \to c-$

   $$f'_-(c) = \lim_{\Delta x \to 0-} \frac{y(c+\Delta x) - y(c)}{\Delta x} = \left(\frac{-}{-}\right) \geq 0$$

По теореме *о существовании производной функции в точке* (**T.50**):

$$f'(c) = f'_+(c) = f'_-(c) = 0$$

■

31 Сформулируйте и докажите теорему Ролля.

Теорема 34 *(Теорема Ролля)*.
Пусть $y = f(x)$

1. непрерывна на $[a; b]$
2. дифференцируема на $(a; b)$
3. $f(a) = f(b)$

Тогда $\exists\ c \in (a; b)\colon\ f'(c) = 0$

Доказательство.
Так как функция $y = f(x)$ непрерывна на $[a; b]$, то по теореме *Вейерштрасса* (**T.21**) она достигает на этом отрезке своего наибольшего и наименьшего значений.
Возможны два случая:

1. Наибольшее и наименьшее значения достигаются на границе, то есть в точке a и в точке b

   $M = m$, где $\begin{array}{l} m \text{ – наименьшее} \\ M \text{ – наибольшее} \end{array} \ \Rightarrow\ y = f(x) = const$ на $[a; b]\ \Rightarrow$

   $\Rightarrow\ \forall x \in (a; b)\colon\ f'(x) = 0$

2. Наибольшее или наименьшее значение достигается во внутренней точке $(a; b)$.
   Тогда для функции $y = f(x)$ справедлива теорема *Ферма* (**T.33**) $\Rightarrow$
   $\Rightarrow\ \exists\ c \in (a; b)\colon\ f'(c) = 0$

■

32 Сформулируйте и докажите теорему Лагранжа.

Теорема 35 *(Теорема Лагранжа).*
Пусть функция $y = f(x)$

1. непрерывна на $[a; b]$
2. дифференцируема на $(a; b)$

Тогда $\exists\, c \in (a; b)$: $\boxed{f(b) - f(a) = f'(c) \cdot (b - a)}$

Доказательство.

Рассмотрим вспомогательную функцию: $F(x) = f(x) - f(a) - \dfrac{f(b) - f(a)}{b - a} \cdot (x - a)$
$F(x)$ непрерывна на $[a; b]$ как сумма непрерывных функций.
Существует конечная производная функции $F(x)$.

$$F'(x) = f'(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \Rightarrow \begin{matrix} \textit{необходимому и достаточному} \\ \textit{условию дифференцируемости} \end{matrix} (\mathbf{T.26}) \Rightarrow$$

$\Rightarrow$ $F(x)$ — дифференцируема на $(a; b)$

Покажем, что $F(a) = F(b)$:

$$F(a) = f(a) - f(a) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \cdot (a - a) = 0$$
$$F(b) = f(b) - f(a) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \cdot (b - a) = f(b) - f(a) - f(b) + f(a) = 0$$

$\Rightarrow$ $F(x)$ удовлетворяет условиям теоремы *Ролля* (**T.34**)
По теореме *Ролля* $\Rightarrow$ $\exists\, c \in (a; b)$ $\quad F'(c) = 0$

$$F'(x) = f'(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$
$$F'(c) = f'(c) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a} = 0$$
$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$
$$f(b) - f(a) = f'(c) \cdot (b - a)$$

■

33 Сформулируйте и докажите теорему Коши.

Теорема 36 ***(Теорема Коши).***
Пусть функции $f(x)$ и $\varphi(x)$

1. непрерывны на $[a;b]$
2. дифференцируемы на $(a;b)$
3. $\forall x \in (a;b): \varphi'(x) \neq 0$

Тогда $\exists\, c \in (a;b):$

$$\boxed{\frac{f(b)-f(a)}{\varphi(b)-\varphi(a)} = \frac{f'(c)}{\varphi'(c)}}$$

Доказательство.
Рассмотрим вспомогательную функцию:

$$F(x) = f(x) - f(a) - \frac{f(b)-f(a)}{\varphi(b)-\varphi(a)} \cdot \Big(\varphi(x) - \varphi(a)\Big)$$

1. $F(x)$ непрерывна на $[a;b]$ как линейная комбинация непрерывных функций
2. $F(x)$ дифференцируема на $(a;b)$ как линейная комбинация дифференцируемых функций
3. $F(a) = F(b)$

$$F(a) = \cancel{f(a)} - \cancel{f(a)} - \frac{f(b)-f(a)}{\varphi(b)-\varphi(a)} \cdot (\underbrace{\varphi(a) - \varphi(a)}_{0}) = 0$$

$$F(b) = f(b) - f(a) - \frac{f(b)-f(a)}{\cancel{\varphi(b)-\varphi(a)}} \cdot \Big(\cancel{\varphi(b)-\varphi(a)}\Big) = \cancel{f(b)} - \cancel{f(a)} - \cancel{f(b)} + \cancel{f(a)} = 0$$

Функция $F(x)$ удовлетворяет условию теоремы *Ролля* (**Т.34**).
По теореме *Ролля* $\Rightarrow \exists\, c \in (a;b): F'(c) = 0$

Вычислим $F'(x) = f'(x) - \dfrac{f(b)-f(a)}{\varphi(b)-\varphi(a)} \cdot \varphi'(x)$

$$F'(c) = f'(c) - \frac{f(b)-f(a)}{\varphi(b)-\varphi(a)} \cdot \varphi'(c) = 0$$

$$\frac{f(b)-f(a)}{\varphi(b)-\varphi(a)} \cdot \varphi'(c) = f'(c)$$

$$\frac{f(b)-f(a)}{\varphi(b)-\varphi(a)} = \frac{f'(c)}{\varphi'(c)}$$

■

34 Сформулируйте и докажите теорему Лопиталя – Бернулли для предела отношения двух бесконечно малых функций.

Теорема 37.
Пусть $f(x)$ и $\varphi(x)$:

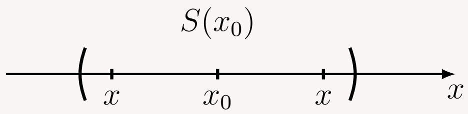
1. определены и дифференцируемы в $\mathring{S}(x_0)$
2. $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = 0; \quad \lim\limits_{x\to x_0} \varphi(x) = 0$
3. $\forall x \in \mathring{S}(x_0)\colon \varphi'(x) \neq 0$
4. $\exists \lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{f'(x)}{\varphi'(x)} = A, \quad A$ — конечное или ∞

Тогда $\exists \lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{f(x)}{\varphi(x)} = \lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{f'(x)}{\varphi'(x)} = A$

Доказательство.
Доопределим функции $f(x)$ и $\varphi(x)$ в точке x_0 нулём.
Пусть $\begin{cases} f(x_0) = 0 \\ \varphi(x_0) = 0 \end{cases}$

По условию 2) $\Rightarrow \left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to x_0} f(x) = 0 = f(x_0) \\ \lim\limits_{x\to x_0} \varphi(x) = 0 = \varphi(x_0) \end{array}\right\} \Rightarrow$ по определению непрерывной функции в точке (**опр.37**) $f(x)$ и $\varphi(x)$ непрерывны в точке x_0.

По условию 1) функции $f(x)$ и $\varphi(x)$ дифференцируемы в $\mathring{S}(x_0) \Rightarrow$ по теореме *о связи дифференцируемости и непрерывности* (**Т.27**) $\Rightarrow f(x)$ и $\varphi(x)$ непрерывны в $\mathring{S}(x_0)$.
Таким образом, $f(x)$ и $\varphi(x)$ непрерывны в $S(x_0)$.



$\forall x \in S(x_0) \qquad [x_0; x]$ или $[x; x_0]$

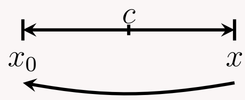
Функции $f(x)$ или $\varphi(x)$ удовлетворяют условию теоремы *Коши* (**Т.36**) на $[x_0; x]$.
По теореме *Коши* $\exists\, c \in (x_0; x)\colon$

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{\varphi(x) - \varphi(x_0)} = \frac{f'(c)}{\varphi'(c)} \qquad (*)$$

Так как $f(x_0) = 0,\ f(x_0) = 0 \ \Rightarrow \boxed{\dfrac{f(x)}{\varphi(x)} = \dfrac{f'(c)}{\varphi'(c)}} \qquad (*)$

Так как $\exists \lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{f'(x)}{\varphi'(x)} = A$:

Правая часть $(*)$: $\lim\limits_{c\to x_0}\dfrac{f'(c)}{\varphi'(c)} \overset{4)}{=\!=} A$



$x\to x_0$
$c\to x_0$

Левая часть $(*)$: $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)}{\varphi(x)} = \lim\limits_{c\to x_0}\dfrac{f'(c)}{\varphi'(c)} = A$

Получаем, что $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)}{\varphi(x)} = \lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f'(x)}{\varphi'(x)} = A$ ■

35 Сравните рост показательной, степенной и логарифмической функций на бесконечности.

$$\text{Пусть}\quad \begin{array}{l} f(x)=x^n,\ n\in\mathbb{N} \\ g(x)=a^x,\ a>1 \qquad x\to+\infty \\ h(x)=\ln x \end{array}$$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to+\infty}\frac{x^n}{a^x} = \left(\frac{\infty}{\infty}\right) \overset{\text{Л-Б}}{=\!=} \lim_{x\to+\infty}\frac{n\cdot x^{n-1}}{a^x\cdot\ln a} = \left(\frac{\infty}{\infty}\right) \overset{\text{Л-Б}}{=\!=}$$

$$\overset{\text{Л-Б}}{=\!=} \underset{n\text{ раз}}{\dots} \overset{\text{Л-Б}}{=\!=} \lim_{x\to+\infty}\frac{n\cdot(n-1)\cdot(n-2)\cdot\ldots\cdot 1}{a^x(\ln a)^n} = \frac{n!}{\ln^n a}\cdot\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{a^x} = \frac{n!}{\ln^n a}\cdot 0 = 0$$

a^x растёт быстрее, чем x^n при $x\to+\infty$ или $x^n = o(a^x)$ при $x\to+\infty$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{h(x)}{f(x)} = \lim_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x^n} = \left(\frac{\infty}{\infty}\right) = \lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{1}{x}}{n\cdot x^{n-1}} = \frac{1}{n}\cdot\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x^n} = \frac{1}{n}\cdot 0 = 0$$

x^n растёт быстрее, чем $\ln x$ при $x\to+\infty$ или $\ln x = o(x^n)$ при $x\to+\infty$

Вывод:
1. $g(x)=a^x$, $a>1$
2. $f(x)=x^n$, $n\in\mathbb{N}$ $\qquad x\to+\infty$
3. $h(x)=\ln x$

36 Выведите формулу Тейлора с остаточным членом в форме Лагранжа.

Теорема 38.
Пусть функция $y=f(x)$ $(n+1)$ раз дифференцируема в $S(x_0)$, $\forall x\in S(x_0)$: $f^{(n+1)}(x)\neq 0$. Тогда:

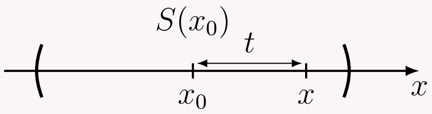
$$\underbrace{\boxed{R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}\cdot(x-x_0)^{n+1}}}_{\text{форма Лагранжа}},\ \text{где } c\in S(x_0)$$

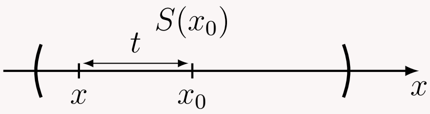
Доказательство.
Формула Тейлора (**Т.51**):
$f(x)=P_n(x)+R_n(x)$
Будем искать:

$$R_n(x) = \frac{\varphi(x)}{(n+1)!}\cdot(x-x_0)^{n+1},\ \text{где } \varphi(x) \text{ – неизвестная функция}$$

Вспомогательная функция:

$$F(t) = P_n(t) + R_n(t) - f(x) =$$
$$= f(t) + \frac{f'(t)}{1!}\cdot(x-t) + \frac{f''(t)}{2!}\cdot(x-t)^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(t)}{n!}\cdot(x-t)^n +$$
$$+ \frac{\varphi(x)}{(n+1)!}\cdot(x-t)^{n+1} - f(x), \quad t \text{ – переменная}$$





Функция $F(t)$ удовлетворяет условию теоремы *Ролля* (**Т.34**) на $[x_0; x] \mid [x; x_0]$

1. $F(t)$ — непрерывна на $[x_0; x] \mid [x; x_0]$.
   По условию функция $f(x)$ $(n+1)$ раз дифференцируема в $S(x_0)$ $\Rightarrow$ по теореме *о связи дифференцируемости и непрерывности* (**Т.27**):
   $f(t), f'(t), \ldots, f^{(n)}(t)$ — непрерывны на $[x_0; x] \mid [x; x_0]$.
   $F(t)$ — непрерывна на $[x_0; x] \mid [x; x_0]$ как сумма непрерывных функций.

2. $F(t)$ – дифференцируема на $(x_0; x) \mid (x; x_0)$
   По условию $y = f(x)$ $(n+1)$ раз дифференцируема в $S(x_0)$ $\Rightarrow$
   $f(t), f'(t), \ldots, f^{(n)}(t)$ — дифференцируемы на $(x_0; x) \mid (x; x_0)$.
   $F(t)$ — дифференцируема как сумма дифференцируемых функций.

3. $F(x) = f(x) - f(x) = 0$

   $$F(x_0) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}\cdot(x-x_0) + \ldots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}\cdot(x-x_0)^n +$$
   $$+ \frac{\varphi(x)}{(n+1)!}\cdot(x-x_0)^{n+1} - f(x) = f(x) - f(x) = 0$$

   По теореме *Ролля*: $\exists\, c \in (x; x_0) \mid c \in (x_0; x)$: $F'(c) = 0$
   Вычислим $F'(t)$:

   $$F'(t) = f'(t) + \left(\frac{f''(t)}{1!}\cdot(x-t) + \frac{f'(t)}{1!}\cdot(-1)\right) +$$
   $$+ \left(\frac{f'''(t)}{2!}\cdot(x-t)^2 + \frac{f''(t)}{2!}\cdot 2\cdot(x-t)\cdot(-1)\right) + \ldots +$$
   $$+ \left(\frac{f^{(n+1)}(t)}{n!}\cdot(x-t)^n + \frac{f^{(n)}(t)}{n!}\cdot n\cdot(x-t)^{n-1}\cdot(-1)\right) +$$
   $$+ \frac{\varphi(x)}{(n+1)!}\cdot(n+1)\cdot(x-t)^n\cdot(-1)$$

   $$F'(c) = \frac{f^{(n+1)}(c)}{n!}\cdot(x-c)^n - \frac{\varphi(x)}{n!\cdot\cancel{(n+1)}}\cdot\cancel{(n+1)}\cdot(x-c)^n = 0$$
   $$\frac{f^{(n+1)}(c)}{n!}\cdot(x-c)^n = \frac{\varphi(x)}{n!}\cdot(x-c)^n$$
   $$\varphi(x) = f^{(n+1)}(c), \quad c \in (x_0; x) \mid c \in (x; x_0)$$

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!} \cdot (x-x_0)^{n+1}, \quad \forall\, c \in S(x_0)$$

■

Иногда $c = x_0 + \Theta(x - x_0)$ Θ – малый параметр $\Theta \in (0;1)$

37 Выведите формулу Тейлора с остаточным членом в форме Пеано.

Теорема 39.
Пусть функция $y = f(x)$ n раз дифференцируема в точке x_0, тогда

$$x \to x_0 \qquad \boxed{R_n(x) = o\big((x-x_0)^n\big)} \text{ — форма Пеано.}$$

Доказательство.
Формула Тейлора (**Т.51**):
$f(x) = P_n(x) + R_n(x)$
$R_n(x) = f(x) - P_n(x)$

$$\text{Пусть выполнено условие: } \begin{cases} P_n(x_0) = f(x_0) \\ P'_n(x_0) = f'(x_0) \\ P''_n(x_0) = f''(x_0) \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ P_n^{(n)}(x_0) = f^{(n)}(x_0) \end{cases} \qquad (*)$$

В силу условия $(*)$:

$$R_n(x_0) = f(x_0) - P_n(x_0) \overset{(*)}{=\!=} f(x_0) - f(x_0) = 0$$
$$R'_n(x_0) = f'(x_0) - P'_n(x_0) \overset{(*)}{=\!=} f'(x_0) - f'(x_0) = 0$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$
$$R_n^{(n)}(x_0) = f^{(n)}(x_0) - P_n^{(n)}(x_0) \overset{(*)}{=\!=} f^{(n)}(x_0) - f^{(n)}(x_0) = 0$$

Вычислим:

$$\lim_{x\to x_0} \frac{R_n(x)}{(x-x_0)^n} = \left(\frac{0}{0}\right) \overset{\text{Л-Б}}{=\!=} \lim_{x\to x_0} \frac{R'_n(x)}{n\cdot(x-x_0)^{n-1}} = \left(\frac{0}{0}\right) \overset{\text{Л-Б}}{=\!=} \dots =$$
$$= \lim_{x\to x_0} \frac{R_n^{(n)}(x)}{n\cdot(n-1)\cdot\ldots\cdot 1} = \frac{1}{n!} \lim_{x\to x_0} R_n^{(n)}(x) = \frac{1}{n!}\cdot R_n^{(n)}(x_0) = \frac{1}{n!}\cdot 0 = 0$$

Вывод: $R_n(x) = o\big((x-x_0)^n\big)$ при $x \to x_0$ ■

38 Выведите формулу Маклорена для функции $y = e^x$ с остаточным членом в форме Лагранжа.

$y = f(x) = e^x, \quad x_0 = 0, \quad f(0) = e^0 = 1$

$$\begin{cases} f'(x) = e^x \\ f''(x) = e^x \\ f'''(x) = e^x \\ \dots\dots\dots\dots \\ f^{(n)}(x) = e^x \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} f'(0) = 1 \\ f''(0) = 1 \\ f'''(0) = 1 \\ \dots\dots\dots\dots \\ f^{(n)}(0) = 1 \end{cases}$$

$e^x = 1 + \dfrac{1}{1!} \cdot x + \dfrac{1}{2!} \cdot x^2 + \dfrac{1}{3!} \cdot x^3 + \ldots + \dfrac{1}{n!} \cdot x^n + R_n(x) \qquad R_n(x) = o\left(x^n\right)$ – форма Пеано

$R_n(x) = \dfrac{f^{(n+1)}(\Theta x)}{(n+1)!} \cdot x^{n+1} = \dfrac{e^{\Theta x}}{(n+1)!} \cdot x^{n+1}$ – формула Лагранжа

Следствия:

1. $e^{-x} = 1 - \dfrac{1}{1!} \cdot x + \dfrac{1}{2!} \cdot x^2 - \dfrac{1}{3!} \cdot x^3 + \ldots + \dfrac{(-1)^n}{n!} \cdot x^n + R_n(x) \qquad n = 0, 1, 2, \ldots$
2. $\operatorname{sh} x = \dfrac{1}{2}\left(e^x - e^{-x}\right) = \dfrac{1}{1!} \cdot x + \dfrac{1}{3!} \cdot x^3 + \dfrac{1}{5!} \cdot x^5 + \ldots + \dfrac{1}{(2n+1)!} \cdot x^{2n+1} + R_{2n+2} \quad n = 0, 1, 2, \ldots$
3. $\operatorname{ch} x = \dfrac{1}{2}\left(e^x + e^{-x}\right) = 1 + \dfrac{1}{2!} \cdot x^2 + \dfrac{1}{4!} \cdot x^4 + \ldots + \dfrac{1}{(2n)!} \cdot x^{2n} + R_{2n+1} \qquad n = 0, 1, 2, \ldots$
4. $a^x = 1 + \dfrac{\ln a}{1!} \cdot x + \dfrac{\ln^2 a}{2!} \cdot x^2 + \ldots + \dfrac{\ln^n a}{n!} \cdot x^n + R_n(x) \qquad n = 0, 1, 2, \ldots$
5. $\operatorname{sh}^2 x = \left(\dfrac{e^x - e^{-x}}{2}\right)^2 = \dfrac{1}{4} \cdot \left(e^{2x} - 2 + e^{-2x}\right) = \dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{e^{2x} + e^{-2x}}{2} - \dfrac{1}{2} = \dfrac{1}{2} \cdot (\operatorname{ch} 2x - 1)$
6. $\operatorname{ch}^2 x = \left(\dfrac{e^x + e^{-x}}{2}\right)^2 = \dfrac{1}{4} \cdot \left(e^{2x} + 2 + e^{-2x}\right) = \dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{e^{2x} + e^{-2x}}{2} + \dfrac{1}{2} = \dfrac{1}{2} \cdot (\operatorname{ch} 2x + 1)$

39 Выведите формулу Маклорена для функции $y = \sin x$ с остаточным членом в форме Лагранжа.

$y = f(x) = \sin x, \ x_0 = 0$

$f(0) = \sin 0 = 0$

$$\begin{cases} f'(x) = \cos x = \sin\left(x + 1 \cdot \dfrac{\pi}{2}\right) \\ f''(x) = -\sin x = \sin\left(x + 2 \cdot \dfrac{\pi}{2}\right) \\ f'''(x) = -\cos x = \sin\left(x + 3 \cdot \dfrac{\pi}{2}\right) \\ f^{(IV)}(x) = \sin x = \sin\left(x + 4 \cdot \dfrac{\pi}{2}\right) \\ f^{(V)}(x) = \cos x = \sin\left(x + 5 \cdot \dfrac{\pi}{2}\right) \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ f^{(n)}(x) = \sin\left(x + n \cdot \dfrac{\pi}{2}\right) \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} f'(0) = 1 \\ f''(0) = 0 \\ f'''(0) = -1 \\ f^{(IV)}(0) = 0 \\ f^{(V)}(0) = 1 \\ \dots\dots\dots \\ f^{(n)}(0) = \sin\dfrac{\pi n}{2} \end{cases}$$

$$\sin x = 0 + \frac{1}{1!} \cdot x + \frac{0}{2!} \cdot x^2 - \frac{1}{3!} \cdot x^3 + \frac{0}{4!} \cdot x^4 + \frac{1}{5!} \cdot x^5 + \ldots + \frac{\sin\frac{\pi n}{2}}{n!} \cdot x^n + R_n(x) \quad n = 2k, \ k \in \mathbb{N}$$

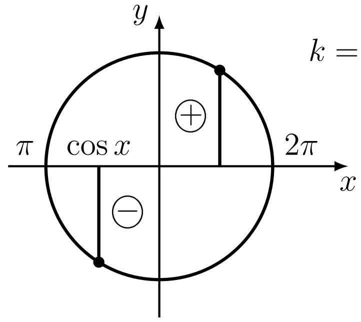
$$\sin\frac{\pi n}{2} = \begin{cases} 0, & n = 2k, \ k \in \mathbb{N} \\ (-1)^{k+1}, & n = 2k-1, \ k \in \mathbb{N} \end{cases}$$

$$\sin x = \frac{1}{1!} \cdot x - \frac{1}{3!} \cdot x^3 + \frac{1}{5!} \cdot x^5 + \ldots + \frac{(-1)^{k+1}}{(2k-1)!} \cdot x^{2k-1} + R_{2k}(x)$$

$R_{2k}(x) = o\left(x^{2k}\right)$

$$R_{2k}(x) = R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\Theta x)}{(n+1)!} \cdot x^{n+1} = \frac{f^{(2k+1)}(\Theta x)}{(2k+1)!} \cdot x^{2k+1} = \frac{\sin\left(\Theta x + (2k+1) \cdot \frac{\pi}{2}\right)}{(2k+1)!} \cdot x^{2k+1} =$$

$$= \frac{\sin\left(\Theta x + \pi k + \frac{\pi}{2}\right)}{(2k+1)!} \cdot x^{2k+1} = \frac{\cos\left(\Theta x + \pi k\right)}{(2k+1)!} \cdot x^{2k+1} = \frac{(-1)^k \cdot \cos \Theta x}{(2k+1)!} \cdot x^{2k+1}$$



$k = 1, 2, \ldots$

40 Выведите формулу Маклорена для функции $y = \cos x$ с остаточным членом в форме Лагранжа.

$y = f(x) = \cos x,\ x_0 = 0,\ f(0) = \cos 0 = 1$

$f(0) = \cos 0 = 1$

$$\begin{cases} f'(x) = -\sin x = \cos\left(x + 1\cdot\dfrac{\pi}{2}\right) \\ f''(x) = -\cos x = \cos\left(x + 2\cdot\dfrac{\pi}{2}\right) \\ f'''(x) = \sin x = \cos\left(x + 3\cdot\dfrac{\pi}{2}\right) \\ f^{(IV)}(x) = \cos x = \cos\left(x + 4\cdot\dfrac{\pi}{2}\right) \\ f^{(V)}(x) = -\sin x = \cos\left(x + 5\cdot\dfrac{\pi}{2}\right) \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ f^{(n)}(x) = \cos\left(x + n\cdot\dfrac{\pi}{2}\right) \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} f'(0) = 0 \\ f''(0) = -1 \\ f'''(0) = 0 \\ f^{(IV)}(0) = 1 \\ f^{(V)}(0) = 0 \\ \dots\dots\dots\dots \\ f^{(n)}(0) = \cos\dfrac{\pi n}{2} \end{cases}$$

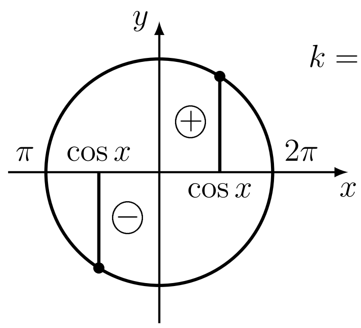
$$\cos x = 1 + \frac{0}{1!}\cdot x - \frac{1}{2!}\cdot x^2 + \frac{0}{3!}\cdot x^3 + \frac{1}{4!}\cdot x^4 + \frac{0}{5!}\cdot x^5 + \ldots + \frac{\cos\frac{\pi n}{2}}{n!}\cdot x^n + R_n(x)$$

$$\cos\frac{\pi n}{2} = \begin{cases} 0, & n = 2k-1,\ k \in \mathbb{N} \\ (-1)^k, & n = 2k,\ k \in \mathbb{N} \end{cases}$$

$$\cos x = 1 - \frac{1}{2!}\cdot x^2 + \frac{1}{4!}\cdot x^4 + \ldots + \frac{(-1)^k}{(2k)!}\cdot x^{2k} + R_{2k+1}(x)$$

$R_{2k+1}(x) = o\left(x^{2k+1}\right)$

$$R_{2k+1}(x) = R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\Theta x)}{(n+1)!}\cdot x^{n+1} = \frac{f^{(2k+2)}(\Theta x)}{(2k+2)!}\cdot x^{2k+2} = \frac{\cos\left(\Theta x + (2k+2)\cdot\frac{\pi}{2}\right)}{(2k+2)!}\cdot x^{2k+2} =$$
$$= \frac{\cos(\Theta x + \pi k + \pi)}{(2k+2)!}\cdot x^{2k+2} = \frac{-\cos(\Theta x + \pi k)}{(2k+2)!}\cdot x^{2k+2} = \frac{(-1)\cdot(-1)\cdot\cos\Theta x}{(2k+2)!}\cdot x^{2k+2} =$$
$$= \frac{(-1)^{k+1}\cdot\cos\Theta x}{(2k+2)!}\cdot x^{2k+2}$$



$k = 1, 2, \ldots$

41 Выведите формулу Маклорена для функции $y = \ln(1+x)$ с остаточным членом в форме Лагранжа.

$y = f(x) = \ln(1+x) \qquad x_0 = 0 \qquad f(0) = \ln 1 = 0$

$$\begin{cases} f'(x) = \dfrac{1}{1+x} = (1+x)^{-1} \\ f''(x) = (-1)\cdot(1+x)^{-2} \\ f'''(x) = (-1)\cdot(-2)\cdot(1+x)^{-3} \\ f^{(IV)}(x) = (-1)\cdot(-2)\cdot(-3)\cdot(1+x)^{-4} \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ f^{(n)}(x) = (-1)^{n+1}\cdot(n-1)!\cdot(1+x)^{-n} \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} f'(0) = 1 = 0! \\ f''(0) = -1 = (-1)\cdot 1! \\ f'''(0) = 2 = 2! \\ f^{(IV)}(0) = (-1)\cdot 3! \\ \dots\dots\dots \\ f^{(n)}(0) = (-1)^{n+1}\cdot(n-1)! \end{cases}$$

$$\ln(1+x) = 0 + \frac{0!}{1!}\cdot x - \frac{1!}{2!}\cdot x^2 + \frac{2!}{3!}\cdot x^3 - \frac{3!}{4!}\cdot x^4 + \ldots + \frac{(-1)^{n+1}\cdot(n-1)!}{n!}\cdot x^n + R_n(x)$$

$n! = (n-1)!\cdot n$

$$\ln(1+x) = \frac{1}{1}\cdot x - \frac{1}{2}\cdot x^2 + \frac{1}{3}\cdot x^3 - \ldots + \frac{(-1)^{n+1}}{n}\cdot x^n + R_n(x)$$

$R_n(x) = o\left(x^n\right)$ – форма Пеано

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\Theta x)}{(n+1)!}\cdot x^{n+1} = \frac{(-1)^{n+2}\cdot n!\cdot(1+\Theta x)^{-(n+1)}}{(n+1)!}\cdot x^{n+1} = \underbrace{\frac{(-1)^{n+2}\cdot(1+\Theta x)^{-(n+1)}}{n+1}}_{\text{форма Лагранжа}}\cdot x^{n+1}$$

42 Выведите формулу Маклорена для функции $y = (1+x)^\alpha$ с остаточным членом в форме Лагранжа.

$f(x) = (1+x)^\alpha, \quad \alpha \in \mathbb{R}$

$x_0 = 0$

$$\begin{cases} f'(x) = \alpha\cdot(1+x)^{\alpha-1} \\ f''(x) = \alpha\cdot(\alpha-1)\cdot(1+x)^{\alpha-2} \\ f'''(x) = \alpha\cdot(\alpha-1)\cdot(\alpha-2)\cdot(1+x)^{\alpha-3} \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ f^{(n)}(x) = \alpha\cdot(\alpha-1)\cdot\ldots\cdot(\alpha-(n-1))\cdot(1+x)^{\alpha-n} \end{cases} \longrightarrow \begin{array}{l} f(0) = 1 \\ \begin{cases} f'(0) = \alpha \\ f''(0) = \alpha\cdot(\alpha-1) \\ f'''(0) = \alpha\cdot(\alpha-1)\cdot(\alpha-2) \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ f^{(n)}(0) = \alpha\cdot(\alpha-1)\cdot\ldots\cdot(\alpha-(n-1)) \end{cases} \end{array}$$

$f^{(n+1)}(x) = \alpha\cdot(\alpha-1)\cdot\ldots\cdot(\alpha-n)\cdot(1+x)^{\alpha-(n+1)}$

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}\cdot x + \frac{f''(0)}{2!}\cdot x^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}\cdot x^n + R_n(x)$$

$$(1+x)^\alpha = 1 + \frac{\alpha}{1!}\cdot x + \frac{\alpha\cdot(\alpha-1)}{2!}\cdot x^2 + \frac{\alpha\cdot(\alpha-1)\cdot(\alpha-2)}{3!}\cdot x^3 + \ldots + \\ + \frac{\alpha\cdot(\alpha-1)\cdot\ldots\cdot\big(\alpha-(n-1)\big)}{n!}\cdot x^n + R_n(x)$$

$R_n(x) = o\left(x^n\right)$ — форма Пеано

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\Theta x)}{(n+1)!}\cdot x^{n+1} = \frac{\alpha\cdot(\alpha-1)\cdot\ldots\cdot(\alpha-n)}{(n+1)!}\cdot(1+\Theta x)^{\alpha-(n+1)}\cdot x^{n+1}$$ — форма Лагранжа

43 Сформулируйте и докажите необходимое и достаточное условие неубывания дифференцируемой функции.

Теорема 40 *(Необходимое и достаточное условие невозрастания / неубывания дифференцируеммой функции)*.
Дифференцируемая на интервале $(a;b)$ функция $y = f(x)$ не возрастает (не убывает) на этом интервале тогда и только тогда, когда $\forall\ x \in (a;b)$:

$$f'(x) \leq 0 \quad \Big(f'(x) \geq 0\Big)$$

Доказательство (Необходимость).
Дано: $y = f(x)$ не $\overset{\text{(убывает)}}{\text{возрастает}}$ на $(a;b)$

Доказать: $\forall x \in (a;b)\colon f'(x) \overset{(\geq)}{\leq} 0$
$\forall x \in (a;b)$
Δx — приращение аргумента
$x \to x + \Delta x$
$\Delta y = y(x+\Delta x) - y(x)$ — приращение функции
Случаи:

1. $\Delta x > 0$
   Так как $y = f(x)$ не $\overset{\text{(убывает)}}{\text{возрастает}}$ на $(a;b)$:

$$y(x+\Delta x) \overset{(\geq)}{\leq} y(x)$$

$$\Delta y = y(x+\Delta x) - y(x) \overset{(\geq)}{\leq} 0$$

   Тогда:

$$\boxed{\frac{\Delta y}{\Delta x} = \left(\frac{-}{+}\right) \overset{(\geq)}{\leq} 0}$$

2. $\Delta x < 0$
   Так как $y = f(x)$ не $\overset{\text{(убывает)}}{\text{возрастает}}$ на $(a;b)$:

$$y(x+\Delta x) \overset{(\leq)}{\geq} y(x)$$

$$\Delta y = y(x+\Delta x) - y(x) \overset{(\leq)}{\geq} 0$$

   Тогда:

$$\boxed{\frac{\Delta y}{\Delta x} = \left(\frac{+}{-}\right) \overset{(\geq)}{\leq} 0}$$

По теореме *о предельном переходе в неравенстве* (**T.5**):

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} \overset{(\geq)}{\leq} 0$$

По определению производной (**опр.52**): $f'(x) \overset{(\geq)}{\leq} 0$ ■

Доказательство (Достаточность).

Дано: $\forall x \in (a;b)\colon f'(x) \overset{(\geq)}{\leq} 0$

Доказать: $y = f(x)$ $\overset{\text{(убывает)}}{\text{не возрастает}}$ на $(a;b)$

$\forall\, x_1, x_2 \in (a;b)\colon x_2 > x_1$

Рассмотрим $[x_1; x_2]$.

Функция $y = f(x)$ на $[x_1, x_2]$ удовлетворяет условиям теоремы *Лагранжа* (**Т.35**):

1. Непрерывность на $[x_1; x_2]$
   По условию $y = f(x)$ дифференцируема на $(a;b)$. По теореме *о связи дифференцируемости и непрерывности функции* (**Т.27**) $\Rightarrow$ $y = f(x)$ непрерывна на $[x_1; x_2]$.

2. Дифференцируемость на $(x_1; x_2)$
   Так как по условию. $y = f(x)$ дифференцируема на $(a;b)$, по теореме *Лагранжа* $\exists\, c \in (x_1; x_2)$:

$$f'(c) = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$$

   Так как $x_2 > x_1$, то $x_2 - x_1 > 0$.

   По условию $f'(x) \overset{(\geq)}{\leq} 0, \forall x \in (a;b) \;\Rightarrow\; f'(c) \overset{(\geq)}{\leq} 0$.
   Тогда:

$$f'(c) = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \overset{(\geq)}{\leq} 0 \;\Rightarrow\; f(x_2) - f(x_1) \overset{(\geq)}{\leq} 0 \text{ при } x_2 > x_1$$

$f(x_2) \overset{(\geq)}{\leq} f(x_1)$ при $x_2 > x_1$ $\Rightarrow$ $\overset{\textbf{(опр.59 (61))}}{\text{по определению}}$ функция $y = f(x)$ $\overset{\text{(убывает)}}{\text{не возрастает}}$ на $(a;b)$. ■

Примечание ***(к доказательству).*** Записи в скобках над словом или символом — это то, что используется в доказательстве для неубывания.

44 Сформулируйте и докажите необходимое и достаточное условие невозрастания дифференцируемой функции.

Теорема 41 *(Необходимое и достаточное условие невозрастания / неубывания дифференцируеммой функции)***.**
Дифференцируемая на интервале $(a;b)$ функция $y = f(x)$ не возрастает (не убывает) на этом интервале тогда и только тогда, когда $\forall\ x \in (a;b)$:

$$f'(x) \leq 0 \quad \Big(f'(x) \geq 0\Big)$$

Доказательство (Необходимость)**.**
Дано: $y = f(x)$ не $\overset{\text{(убывает)}}{\text{возрастает}}$ на $(a;b)$

Доказать: $\forall x \in (a;b)\colon f'(x) \overset{(\geq)}{\leq} 0$
$\forall x \in (a;b)$
Δx — приращение аргумента
$x \to x + \Delta x$
$\Delta y = y(x + \Delta x) - y(x)$ — приращение функции
Случаи:

1. $\Delta x > 0$
   Так как $y = f(x)$ не $\overset{\text{(убывает)}}{\text{возрастает}}$ на $(a;b)$:
   $$y(x + \Delta x) \overset{(\geq)}{\leq} y(x)$$
   $$\Delta y = y(x + \Delta x) - y(x) \overset{(\geq)}{\leq} 0$$
   Тогда:
   $$\boxed{\frac{\Delta y}{\Delta x} = \left(\frac{-}{+}\right) \overset{(\geq)}{\leq} 0}$$

2. $\Delta x < 0$
   Так как $y = f(x)$ не $\overset{\text{(убывает)}}{\text{возрастает}}$ на $(a;b)$:
   $$y(x + \Delta x) \overset{(\leq)}{\geq} y(x)$$
   $$\Delta y = y(x + \Delta x) - y(x) \overset{(\leq)}{\geq} 0$$
   Тогда:
   $$\boxed{\frac{\Delta y}{\Delta x} = \left(\frac{+}{-}\right) \overset{(\geq)}{\leq} 0}$$

По теореме *о предельном переходе в неравенстве* (**Т.5**):

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} \overset{(\geq)}{\leq} 0$$

По определению производной (**опр.52**): $f'(x) \overset{(\geq)}{\leq} 0$ ■

Доказательство (Достаточность).

Дано: $\forall x \in (a;b)\colon f'(x) \overset{(\geq)}{\leq} 0$

Доказать: $y = f(x)$ $\overset{\text{(убывает)}}{\text{не возрастает}}$ на $(a;b)$

$\forall\ x_1, x_2 \in (a;b)\colon x_2 > x_1$

Рассмотрим $[x_1;x_2]$.

Функция $y = f(x)$ на $[x_1, x_2]$ удовлетворяет условиям теоремы *Лагранжа* (**T.35**):

1. Непрерывность на $[x_1;x_2]$
   По условию $y = f(x)$ дифференцируема на $(a;b)$. По теореме *о связи дифференцируемости и непрерывности функции* (**T.27**) $\Rightarrow$ $y = f(x)$ непрерывна на $[x_1;x_2]$.

2. Дифференцируемость на $(x_1;x_2)$
   Так как по условию. $y = f(x)$ дифференцируема на $(a;b)$, по теореме *Лагранжа* $\exists\ c \in (x_1;x_2)$:
   $$f'(c) = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$$
   Так как $x_2 > x_1$, то $x_2 - x_1 > 0$.
   По условию $f'(x) \overset{(\geq)}{\leq} 0,\ \forall x \in (a;b) \ \Rightarrow\ f'(c) \overset{(\geq)}{\leq} 0$.
   Тогда:
   $$f'(c) = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \overset{(\geq)}{\leq} 0 \ \Rightarrow\ f(x_2) - f(x_1) \overset{(\geq)}{\leq} 0 \text{ при } x_2 > x_1$$

$f(x_2) \overset{(\geq)}{\leq} f(x_1)$ при $x_2 > x_1$ $\Rightarrow$ по $\overset{\textbf{(опр.59 (61))}}{\text{определению}}$ функция $y = f(x)$ $\overset{\text{(убывает)}}{\text{не возрастает}}$ на $(a;b)$. ■

Примечание ***(к доказательству).*** Записи в скобках над словом или символом — это то, что используется в доказательстве для неубывания.

45 Сформулируйте и докажите первое достаточное условие экстремума (по первой производной).

Теорема 42 *(Первый достаточный признак локального экстремума)***.**
Пусть $y = f(x)$ непрерывна в $S(x_0)$, где x_0 — критическая точка 1-го порядка; дифференцируема в $\mathring{S}(x_0)$. Тогда если производная функции меняет свой знак при переходе через точку x_0, то x_0 — точка экстремума. Причём:

1. если при $x < x_0$: $f'(x) > 0$, а при $x > x_0$: $f'(x) < 0$, то x_0 — точка максимума;

2. если при $x < x_0$: $f'(x) < 0$, а при $x > x_0$: $f'(x) > 0$, то x_0 — точка минимума.

Доказательство.
$\forall x \in S(x_0)$.
• Пусть $x > x_0$. Рассмотрим $[x_0; x]$.
Тогда функция $y = f(x)$ удовлетворяет условиям теоремы *Лагранжа* (**Т.35**):

1. непрерывна на $[x_0; x]$
   По условию функция непрерывна в $S(x_0) \;\Rightarrow\; y = f(x)$ непрерывна на $[x_0; x]$.

2. дифференцируема на $(x_0; x)$
   По условию $y = f(x)$ дифференцируема в $\mathring{S}(x_0) \;\Rightarrow\; y = f(x)$ дифференцируема на $(x_0; x)$.

По теореме *Лагранжа* $\exists\, c \in (x_0; x)\colon f'(c) = \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$
Так как $x > x_0$, то $x - x_0 > 0$.
По условию 1) при $x > x_0$: $f'(x) \overset{(>)}{<} 0 \;\Rightarrow$

$$\Rightarrow\; f'(c) = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \overset{(>)}{<} 0 \;\Rightarrow\; f(x) - f(x_0) \overset{(>)}{<} 0 \;\Rightarrow\; f(x) \overset{(>)}{<} f(x_0)$$

$\overset{(\textbf{опр.67 (65)})}{\text{По определению}}$ строгого $\overset{(\text{минимума})}{\text{максимума}}$, x_0 — точка $\overset{(\text{минимума})}{\text{максимума}}$.
• Пусть $x < x_0$, тогда рассматриваем $[x; x_0]$.
$y = f(x)$ на $[x; x_0]$ удовлетворяет теореме *Лагранжа*.

По теореме *Лагранжа*: $\exists\, c \in (x; x_0)\colon f'(c) = \dfrac{f(x_0) - f(x)}{x_0 - x}$
Так как $x < x_0$, то $x - x_0 < 0 \;\Rightarrow\; x_0 - x > 0$.
По условию 1) при $x < x_0$: $f'(x) \overset{(<)}{>} 0 \;\Rightarrow$

$$\Rightarrow\; f'(c) = \frac{f(x_0) - f(x)}{x_0 - x} \overset{(<)}{>} 0 \;\Rightarrow\; f(x_0) - f(x) \overset{(<)}{>} 0 \;\Rightarrow\; f(x_0) \overset{(<)}{>} f(x)$$

По определению строго локального $\overset{(\text{минимума})}{\text{максимума}}$, x_0 — точка строгого локального $\overset{(\text{минимума})}{\text{максимума}} \Rightarrow\; \forall x \in S(x_0)\colon x_0$ — точка строгого локального $\overset{(\text{минимума})}{\text{максимума}}$. ■

Примечание ***(к доказательству).*** Записи в скобках над словом или символом — это то, что используется в доказательстве для случая строго локального минимума.

46 Сформулируйте и докажите второе достаточное условие экстремума (по второй производной).

Теорема 43 *(Второй достаточный признак локального экстремума)***.**
Пусть функция $y = f(x)$ дважды дифференцируема в точке x_0 и $f'(x_0) = 0$. Тогда:

1. если $f''(x_0) < 0$, то x_0 — точка строгого максимума;
2. если $f''(x_0) > 0$, то x_0 — точка строгого минимума.

Доказательство.
Представим функцию $y = f(x)$ в $S(x_0)$ по формуле Тейлора:

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!} \cdot (x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!} \cdot (x - x_0)^2 + o\big((x - x_0)^2\big)$$

Так как $f'(x_0) = 0$, то:

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!} \cdot (x - x_0)^2 + o\big((x - x_0)^2\big)$$

$$f(x) - f(x_0) = \frac{f''(x_0)}{2!} \cdot (x - x_0)^2 + o\big((x - x_0)^2\big)$$

Знак $f(x) - f(x_0)$ определяет $f''(x_0)$, так как $o((x - x_0)^2)$ — б.м.ф. при $x \to x_0$.
Тогда:

1. если $f''(x_0) < 0$, то $f(x) - f(x_0) < 0 \;\Rightarrow\; f(x) < f(x_0)$, $\forall x \in S(x_0)$, по определению (**опр.67**) строгого локального максимума x_0 — точка строго локального максимума;
2. если $f''(x_0) > 0$, то $f(x) - f(x_0) > 0 \;\Rightarrow\; f(x) > f(x_0) \quad \forall x \in S(x_0)$, по определению (**опр.65**) строгого локального минимума x_0 — точка строгого локального минимума.

■

47 Сформулируйте и докажите достаточное условие выпуклости функции.

Теорема 44 *(Достаточное условие выпуклости графика функции)*.
Пусть функция $y = f(x)$ дважды дифференцируема на интервале $(a; b)$. Тогда:

1. Если $f''(x) < 0, \ \forall x \in (a; b)$, то график функции выпуклый вверх на этом интервале.
2. Если $f''(x) > 0, \ \forall x \in (a; b)$, то график функции выпуклый вниз на этом интервале.

Доказательство.
$\forall x_0 \in (a; b), \ y_0 = f(x_0) \ \Rightarrow \ M_0\big(x_0, f(x_0)\big)$
В точке M_0 построим касательную к графику функции $y = f(x)$:

$$\underbrace{y - y_0 = y'(x_0)(x - x_0)}_{\text{уравнение касательной}} \ \Rightarrow \ \boxed{y_к = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)}$$

Представим функцию $y = f(x)$ по формуле Тейлора с остаточным членом в форме Лагранжа:

$$\boxed{f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!} \cdot (x - x_0) + \frac{f''(c)}{2!} \cdot (x - x_0)^2} \quad \forall c \in \mathring{S}(x_0)$$

Из представления для функции вычитаем уравнение касательной:

$$f(x) - y_к = \cancel{f(x_0)} + \cancel{\frac{f'(x_0)}{1!} \cdot (x - x_0)} + \frac{f''(c)}{2!} \cdot (x - x_0)^2 - \cancel{f(x_0)} - \cancel{f'(x_0)(x - x_0)}$$
$$f(x) - y_к = \frac{f''(c)}{2!} \cdot (x - x_0)^2$$

1. Так как по условию $f''(x) < 0, \ \forall x \in (a; b)$, то $f''(c) < 0 \ \Rightarrow \ f(x) - y_к < 0 \ \Rightarrow$ $\Rightarrow \ f(x) < y_к \ \Rightarrow$ по определению выпуклой функции график функции $y = f(x)$ выпуклый вверх. **(опр.73)**

2. Так как по условию $f''(x) > 0, \ \forall x \in (a; b)$, то $f''(c) > 0 \ \Rightarrow \ f(x) - y_к > 0 \ \Rightarrow$ $\Rightarrow \ f(x) > y_к \ \Rightarrow$ по определению выпуклой функции график функции $y = f(x)$ выпуклый вниз.

■

48 Сформулируйте и докажите необходимое условие точки перегиба.

Теорема 45 *(Необходимое условие существования точки перегиба)***.**
Пусть функция $y = f(x)$ в точке x_0 имеет непрерывную вторую производную и $M_0\big(x_0, f(x_0)\big)$ — точка перегиба графика функции $y = f(x)$. Тогда $f''(x_0) = 0$

Доказательство.
Доказываем методом от противного.

• Пусть $f''(x_0) > 0$. В силу непрерывности второй производной функции $y = f(x)$ существует $S(x_0)\colon \forall x \in S(x_0)\colon f''(x) > 0$. Тогда по теореме о *достаточном условии выпуклости графика функции* (**Т.44**) следует, что $\forall x \in S(x_0)$ функция выпукла вниз. Это противоречит условию, так как $M_0\big(x_0, f(x_0)\big)$ — точка перегиба.

• Пусть $f''(x_0) < 0$. В силу непрерывности второй производной функции $y = f(x)$ существует $S(x_0)\colon \forall x \in S(x_0)\colon f''(x) < 0$. Тогда по теореме о *достаточном условии выпуклости графика функции* (**Т.44**) следует, что $\forall x \in S(x_0)$ функция выпукла вверх. Это противоречит условию, так как $M_0\big(x_0, f(x_0)\big)$ — точка перегиба.

$$\Downarrow$$
$$f''(x_0) = 0$$

■

49 Сформулируйте и докажите достаточное условие точки перегиба.

Теорема 46 *(Достаточное условие существования точки перегиба)***.**
Если функция $y = f(x)$ непрерывна в точке x_0, дважды дифференцируема в $\mathring{S}(x_0)$ и вторая производная меняет знак при переходе аргумента x через точку x_0, то точка $M_0\big(x_0, f(x_0)\big)$ является точкой перегиба графика функции $y = f(x)$.

Доказательство.
По условию существует $\mathring{S}(x_0)$, в которой вторая производная функции $y = f(x)$ меняет свой знак при переходе аргумента x через точку x_0. Это означает (*по достаточному условию выпуклости графика функции* (**Т.44**)), что график функции $y = f(x)$ имеет разные направления выпуклости по разные стороны от точки x_0. По определению точки перегиба (**опр.74**) $M_0\big(x_0, f(x_0)\big)$ является точкой перегиба графика функции $y = f(x)$. ■

50 Используемые определения

50.1 Предел последовательности

Определение 7. Число a называется **пределом последовательности** $\{x_n\}$, если для любого положительного числа ε найдется натуральное число $N(\varepsilon)$ такое, что если порядковый номер n члена последовательности станет больше $N(\varepsilon)$, то имеет место неравенство $|x_n - a| < \varepsilon$.

$$\lim_{x\to\infty} x_n = a \iff \big(\forall\varepsilon > 0\big)\big(\exists N(\varepsilon) \in \mathbb{N}\big) : \big(\forall n > N(\varepsilon) \;\Rightarrow\; |x_n - a| < \varepsilon\big)$$

Примечание. То есть начиная с номера $N(\varepsilon) + 1$ все элементы последовательности $\{x_n\}$ попадают в ε-окрестность точки a.

50.2 Предел функции

50.2.1 По Коши

Определение 8 *(Определение функции по Коши или на языке ε и δ)*.
Число a называется **пределом функции** $y = f(x)$ в точке x_0, если $\forall\varepsilon > 0$ найдется δ, зависящее от ε, такое что $\forall x \in \mathring{S}(x_0;\delta)$ будет верно неравенство $|f(x) - a| < \varepsilon$.

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = a \iff \big(\forall\varepsilon > 0\big)\big(\exists\delta(\varepsilon) > 0\big) : \big(\forall x \in \mathring{S}(x_0;\delta) \;\Rightarrow\; |f(x) - a| < \varepsilon\big)$$

Эквивалентные записи определения

$$\begin{gathered} \ldots \forall x \in \mathring{S}(x_0;\delta) \;\Rightarrow\; \ldots \\ \ldots \forall x \neq x_0, |x - x_0| < \delta \;\Rightarrow\; \ldots \\ \ldots \forall x, 0 < |x - x_0| < \delta \;\Rightarrow\; \ldots \end{gathered}$$

$$\begin{gathered} \ldots \;\Rightarrow\; |f(x) - a| < \varepsilon \\ \ldots \;\Rightarrow\; f(x) \in S(a;\varepsilon) \end{gathered}$$

50.2.2 По Гейне

Определение 9 *(Определение предела функции по Гейне или на языке последовательностей)*.
Число a называется **пределом функции** $y = f(x)$ в точке x_0, если эта функция определена в окрестности точки a и $\forall$ последовательности x_n из области определения этой функции, сходящейся к x_0, соответствующая последовательность функций $\{f(x_n)\}$ сходится к a.

$$\lim_{x\to x_0} = a \iff \big(\forall x_n \in D_f\big)\left(\lim_{n\to\infty} x_n = x_0 \;\Rightarrow\; \lim_{n\to\infty} f(x_n) = a\right)$$

50.3 Окрестности

Определение 10. **Окрестностью** точки x_0 называется любой интервал, содержащий эту точку.

Определение 11. **ε-окрестностью** $S(x_0, \varepsilon)$ точки x_0 называется интервал с центром в точке x_0 и длиной 2ε.

$$S(x_0; \varepsilon) = (x_0 - \varepsilon;\ x_0 + \varepsilon)$$

Определение 12. **Окрестностью $+\infty$** называется любой интервал вида:

$$S(+\infty) = (a; +\infty),\ a \in \mathbb{R},\ a > 0.$$

Определение 13. **Окрестностью $-\infty$** называется любой интеграл вида:

$$S(-\infty) = (-\infty; -a),\ a \in \mathbb{R},\ a > 0.$$

Определение 14. **Окрестностью ∞** называется любой интервал вида

$$S(\infty) = (-\infty; -a) \cup (a; +\infty),\ a \in \mathbb{R},\ a > 0.$$

50.4 Последовательности

Определение 15. **Числовая последовательность** — это бесконечное множество числовых значений, которое можно упорядочить (перенумеровать).

Примечание. Множество значений последовательности может быть конечным или бесконечным, но число число элементов последовательности всегда бесконечно.

Определение 16. Последовательность чисел $\{x_n\}$ называется **неубывающей**, если каждый последующий член $x_{n+1} \geq x_n, \forall n \in \mathbb{N}$.

Определение 17. Последовательность чисел $\{x_n\}$ называется **возрастающей**, если каждый последующий член $x_{n+1} > x_n,\ \forall n \in \mathbb{N}$.

Определение 18. Последовательность чисел $\{x_n\}$ называется **невозрастающей**, если каждый последующий член $x_{n+1} \leq x_n,\ \forall n \in \mathbb{N}$.

Определение 19. Последовательность чисел $\{x_n\}$ называется **убывающей**, если каждый последующий член $x_{n+1} < x_n,\ \forall n \in \mathbb{N}$.

Определение 20. Возрастающие и убывающие последовательности называются **строго монотонными**.

Определение 21. Неубывающие, возрастающие, невозрастающие и убывающие последовательности называются **монотонными**.

Определение 22. Последовательность, имеющая предел, называется **сходящейся**.

Определение 23. Последовательность $\{x_n\}$ называется **ограниченной снизу (сверху)**, если $\exists\ m \in \mathbb{R}$ $(M \in \mathbb{R})$, что $\forall n \in \mathbb{N}$ выполнено неравенство $x_n \geq m$ $(x_n \leq M)$.

Определение 24. Последовательность x_n называется **ограниченной**, если она ограничена и сверху, и снизу, т.е. $\forall n \in \mathbb{N}, m \leq x_n \leq M$ или $|x_n| \leq M$.

Определение 25. Последовательность $\{x_n\}$ называется **фундаментальной**, если $\forall \varepsilon > 0$ существует свой порядковый номер $N(\varepsilon)$ такой, что при всех $n \geq N(\varepsilon)$ и $m \geq N(\varepsilon)$ выполнено неравенство $|x_n - x_m| < \varepsilon$.

$$\big(\forall \varepsilon > 0\big)\big(\exists N(\varepsilon) \in \mathbb{N}\big)\colon \big(\forall n \geq N(\varepsilon),\ \forall m \geq N(\varepsilon)\ \Rightarrow\ |x_n - x_m| < \varepsilon\big)$$

50.5 Ограниченные функции

Определение 26. Функция называется **ограниченной** в данной области изменения аргумента x, если $\exists M \in \mathbb{R},\ M > 0,\ |f(x)| \leq M$.

Определение 27. Если $\nexists M \in \mathbb{R}, M > 0$, то функция $f(x)$ называется **неограниченной**.

Определение 28. Функция называется **локально ограниченной** при $x \to x_0$, если существует проколотая окрестность с центром в точке x_0, в которой данная функция ограничена.

50.6 Бесконечно малая и бесконечно большая функции

Определение 29. Функция называется **бесконечно малой** при $x \to x_0$, если предел функции в этой точке равен 0. Кратко — **б.м.ф.** или **б.м.в.**

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = 0 \iff \big(\forall \varepsilon > 0\big)\big(\exists\ \delta(\varepsilon) > 0\big)\colon \big(\forall x \in \mathring{S}(x_0; \delta)\ \Rightarrow\ |f(x)| < \varepsilon\big)$$

Примечание.
- Стремление аргумента может быть *любое*, главное, чтобы предел был равен нулю.
- Бесконечно малые функции обозначаются $\alpha(x), \beta(x), \gamma(x), \ldots$

Определение 30. Функция $y = f(x)$ называется **бесконечно большой функцией** (кратко — **б.б.ф.**) если:

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \infty$$

50.7 Бесконечно малые одного порядка, несравнимые, эквивалентные

Определение 31. Две б.м.ф. $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ называются функциями **одного порядка малости**, если:

$$\lim_{x\to x_0}\frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = const \neq 0 \qquad \begin{matrix}\alpha(x) = O\big(\beta(x)\big)\\ \beta(x) = O\big(\alpha(x)\big)\end{matrix} \quad x \to x_0$$

Определение 32. Две б.м.ф. $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ называются **несравнимыми**, если:

$$\nexists \lim_{x\to x_0}\frac{\alpha(x)}{\beta(x)}$$

Определение 33. Две б.м.ф. $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ называются **эквивалентными**, если:

$$\lim_{x\to x_0}\frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = 1 \qquad \alpha(x) \sim \beta(x) \quad x \to x_0$$

Определение 34. Функция $\alpha(x)$ имеет **более высокий порядок малости**, чем $\beta(x)$, если:

$$\lim_{x\to x_0}\frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = 0$$

где $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ — б.м.ф. при $x \to x_0$

50.7.1 Порядок малости

Определение 35. Б.м.ф. $\alpha(x)$ имеет **порядок малости** k относительно функции б.м.ф. $\beta(x)$, если:

$$\lim_{x\to x_0}\frac{\alpha(x)}{[\beta(x)]^k} = const \neq 0$$

где k — порядок малости.

50.8 Приращение функции

Определение 36. Пусть $y = f(x)$ определена в некоторой окрестности точки x_0. Выберем произвольный x из этой окрестности. Тогда:

$\boxed{\Delta x = x - x_0}$ — **приращение аргумента**

$\boxed{\Delta y = f(x) - f(x_0)}$ — соответствующее **приращение функции**

50.9 Непрерывные функции

50.9.1 В точке

Определение 37. Функция $f(x)$, определённая в некоторой окрестности точки x_0, называется **непрерывной в** этой **точке** если:

$$\exists \lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$$

Определение 38. Функция $y = f(x)$, определённая в некоторой окрестности точки x_0, называется **непрерывной в** этой **точке**, если в достаточно малой окрестности точки x_0 значения функции близки к $f(x_0)$.

$$y = f(x) \in C(x_0)$$
$$\Updownarrow$$
$$\big(\forall \varepsilon > 0\big)\big(\exists \delta(\varepsilon) > 0\big) : \big(\forall x \in \mathring{S}(x_0; \delta) \;\Rightarrow\; |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon\big)$$

Определение 39. Функция $y = f(x)$, определённая в некоторой окрестности точки x_0, называется **непрерывной в** этой **точке**, если выполняются условия:

1. $\exists \lim\limits_{x \to x_0+} f(x)$
2. $\exists \lim\limits_{x \to x_0-} f(x)$
3. $\lim\limits_{x \to x_0+} f(x) = \lim\limits_{x \to x_0-} f(x) = f(x_0)$

Определение 40. Функция $y = f(x)$ называется **непрерывной в точке** x_0, если бесконечно малому приращению аргумента соответствует бесконечно малое приращение функции.

$$\lim_{\Delta x \to 0} \Delta y = 0$$

50.9.2 На интервале

Определение 41. Функция $y = f(x)$ называется **непрерывной на интервале $(a; b)$**, если она непрерывна в каждой точке этого интервала.

50.9.3 На отрезке

Определение 42. Функция $y = f(x)$ называется **непрерывной на отрезке $[a; b]$**, если она:

1. Непрерывна на интервале $(a; b)$
2. Непрерывна в точке a справа
3. Непрерывна в точке b слева

Примечание.

- $\boldsymbol{C(a;b)}$ — множество функций, непрерывных на интервале.
- $\boldsymbol{C[a;b]}$ — множество функций, непрерывных на отрезке.
- $\boldsymbol{C(X)}$ — множество функций, непрерывных на промежутке X.

50.10 Точки разрыва

Определение 43. Пусть функция $y = f(x)$ определена в некоторой проколотой окрестности точки x_0, непрерывна в любой точке этой окрестности за исключением самой точки x_0. Тогда точка x_0 называется **точкой разрыва функции** $y = f(x)$.

x_0 – точка разрыва

I-го рода

$\exists$ конечные $\lim\limits_{x\to x_0\pm} f(x)$

II-го рода

$\nexists \lim\limits_{x\to x_0\pm} f(x)$ или ∞

точка конечного разрыва / точка скачка

$$\lim_{x\to x_o+} f(x) \neq \lim_{x\to x_0-} f(x)$$

$$\Delta f = \left|\lim_{x\to x_o+} f(x) - \lim_{x\to x_0-} f(x)\right|$$

точка устранимого разрыва

$$\lim_{x\to x_0+} f(x) = \lim_{x\to x_0-} f(x) \neq f(x_0) \text{ или } \nexists f(x_0)$$

Определение 44. Если точка x_0 — точка разрыва функции $y = f(x)$ и существуют конечные пределы $\lim\limits_{x\to x_0+} f(x)$ и $\lim\limits_{x\to x_0-} f(x)$, то x_0 называют **точкой I-го рода**.

Определение 45. Если точка x_0 — точка разрыва функции $y = f(x)$ и не существуют конечные пределы $\lim\limits_{x\to x_0+} f(x)$ и $\lim\limits_{x\to x_0-} f(x)$ или $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = \infty$, то x_0 называется **точкой разрыва II-го рода**.

Определение 46. Если точка x_0 — точка разрыва первого рода функции $y = f(x)$ и предел $\lim\limits_{x\to x_0+} f(x) \neq \lim\limits_{x\to x_0-} f(x)$, то x_0 называется **точкой конечного разрыва** или точкой *скачка*.

Определение 47. Если точка x_0 — точка разрыва первого рода функции $y = f(x)$ и предел $\lim\limits_{x\to x_0+} f(x) = \lim\limits_{x\to x_0-} f(x)$, но $\nexists f(x_0)$, то точка x_0 называется **точкой устранимого разрыва**.

50.11 Асимптоты

Определение 48. **Асимптотой** графика функции $y = f(x)$ называется прямая, расстояние до которой от точки, лежащей на графике, стремится к нулю при удалении от начала координат.

$$\begin{array}{ccc} & \text{Асимптоты} & \\ \swarrow & \downarrow & \searrow \\ \text{вертикальные} & \text{наклонные} & \text{горизонтальные} \end{array}$$

50.11.1 Вертикальные асимптоты

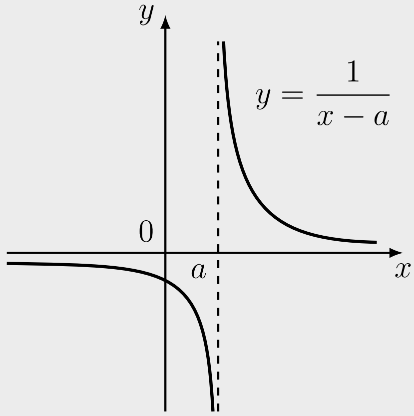
Определение 49. Прямая $x = a$ называется **вертикальной асимптотой** графика функции $y = f(x)$, если хотя бы один из пределов $\lim\limits_{x\to a+} f(x)$, $\lim\limits_{x\to a-} f(x)$ равен ∞.

Примеры

Пример.

$$y = \frac{1}{x-a}$$

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to a+} \dfrac{1}{x-a} = \dfrac{1}{0+} = +\infty \\ \lim\limits_{x\to a-} \dfrac{1}{x-a} = \dfrac{1}{0-} = -\infty \end{array}\right. \Rightarrow x = a \text{ — вертикальная асимптота}$$

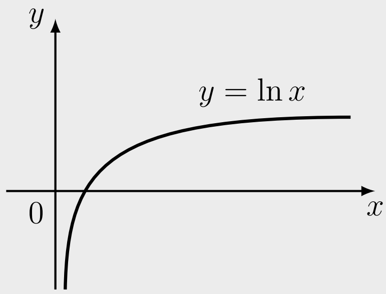


Пример.

$y = \ln x$

$D_y\colon (0; +\infty)$

$\lim\limits_{x\to 0+} \ln x = (-\infty)$



Вывод: Вертикальные асимптоты ищем среди точек разрыва функции и граничных точек.

50.11.2 Наклонные асимптоты

Определение 50. Прямая $y = kx + b$ называется **наклонной асимптотой** графика функции $y = f(x)$ при $x \to \pm\infty$, если функция $f(x) = kx + b + \alpha(x)$, где $\alpha(x)$ — б.м.ф. при $x \to \pm\infty$.

50.11.3 Горизонтальные асимптоты

Определение 51. Прямая $y = b$ называется **горизонтальной асимптотой** функции $y = f(x)$, если $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x) = b$.

Следствие. Горизонтальные асимптоты являются частным случаем наклонных асимптот при $k = 0$.

50.12 Производная функции

Определение 52. **Производной функции** $y = f(x)$ в точке x_0 называется предел отношения приращения функции к приращению аргумента при стремлении последнего к нулю.

$$\boxed{y'(x_0) = \lim_{\Delta x\to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}}$$

Определение 53. Производной функции $y = f(x)$ в точке x_0 справа(слева) или **правосторонней (левосторонней) производной** называется предел отношения приращения функции к приращению аргумента при стремлении к нулю справа(слева).

$$\boxed{y'_+(x_0) = \lim_{\Delta x\to 0+} \frac{\Delta y}{\Delta x}} \qquad \boxed{y'_-(x_0) = \lim_{\Delta x\to 0-} \frac{\Delta y}{\Delta x}}$$

Определение 54. **Производной n-го порядка** или **n-ой производной** функции $y = f(x)$ называется производная от $(n-1)$-ой производной функции $y = f(x)$

$$\boxed{y^{(n)} = \left(y^{(n-1)}\right)'}$$

50.13 Дифференцируемая функция

Определение 55. Функция $y = f(x)$ называется **дифференцируемой в точке x_0**, если существует константа A такая, что приращение функции в этой точке представимо в виде:

$$\boxed{\Delta y = A \cdot \Delta x + \alpha(\Delta x) \cdot \Delta x}$$

где $\alpha(\Delta x)$ – б.м.ф. при $\Delta x \to 0$

50.14 Дифференциал первого порядка

Пусть функция $y = f(x)$ определена в окрестности точки x_0 и дифференцируема в точке x_0.
Тогда по определению дифференцируемой функции:

$$\Delta y = f'(x_0) \cdot \Delta x + \alpha(\Delta x) \cdot \Delta x \tag{1}$$

где $\alpha(\Delta x)$ – б.м.ф. при $\Delta x \to 0$

Определение 56. **Дифференциалом** функции $y = f(x)$ в точке x_0 называется главная часть приращения функции Δy или первое слагаемое в равенстве (1).

$$\boxed{dy = f'(x_0) \cdot \Delta x} \tag{2}$$

Примечание.

1. Если $f'(x_0) = 0$, то $dy = 0$, но $f'(x_0) \cdot \Delta x$ уже не является главной частью приращения функции Δy.
   Пусть $y = x$, тогда по определению дифференциала $\Rightarrow\ dy = (x)' \cdot \Delta x = 1 \cdot \Delta x$.
   С другой стороны: $y = x \ \Rightarrow\ \boxed{dx = \Delta x}$
   Вывод: дифференциал независимой переменной равен её приращению.

2. Подставим $\Delta x = dx$ в (2):

   $$\boxed{dy = f'(x_0)dx} \tag{3}$$

   Если $y = f(x)$ дифференцируема на интервале $(a; b)$, тогда $\forall x \in (a; b)$:

   $$\boxed{dy = f'(x)dx} \tag{4}$$

   $$\boxed{f'(x) = \frac{dy}{dx}} \tag{5}$$

   Вывод: производная функции представима в виде отношения дифференциалов функции и независимой переменной.

Определение 57. n-ым дифференциалом или **дифференциалом n-го порядка** называется дифференциал от дифференциала $(n-1)$-го порядка.

$$d^n y = d(d^{n-1}y), \quad n = 2, 3, \ldots$$

50.15 Монотонные функции

Определение 58. Функция $y = f(x)$, определённая на $(a; b)$, **возрастает** на этом интервале, если:

$$\forall\ x_1, x_2 \in (a; b) \colon x_2 > x_1 \ \Rightarrow\ f(x_2) > f(x_1)$$

Определение 59. Функция $y = f(x)$, определённая на $(a;b)$, **не возрастает** на этом интервале, если:

$$\forall\ x_1, x_2 \in (a;b)\colon x_2 > x_1 \ \Rightarrow\ f(x_2) \le f(x_1)$$

Определение 60. Функция $y = f(x)$, определённая на $(a;b)$, **убывает** на этом интервале, если:

$$\forall\ x_1, x_2 \in (a;b)\colon x_2 > x_1 \ \Rightarrow\ f(x_2) < f(x_1)$$

Определение 61. Функция $y = f(x)$, определённая на $(a;b)$, **не убывает** на этом интервале, если:

$$\forall\ x_1, x_2 \in (a;b)\colon x_2 > x_1 \ \Rightarrow\ f(x_2) \ge f(x_1)$$

Определение 62. Возрастающая, убывающая, невозрастающая и неубывающая функции называются **монотонными**.

Определение 63. Возрастающая и убывающая функции называются **строго монотонными**.

50.16 Минимумы, максимумы, экстремумы

Определение 64. Пусть $y = f(x)$ определена на $(a;b)$, $x_0 \in (a;b)$. Тогда:

Если $\exists\ \mathring{S}(x_0),\ \forall x \in \mathring{S}(x_0)\colon f(x) \ge f(x_0)$, то x_0 — точка локального минимума, $y_0 = y(x_0)$ — **локальный минимум**.

Определение 65. Пусть $y = f(x)$ определена на $(a;b)$, $x_0 \in (a;b)$. Тогда:

Если $\exists\ \mathring{S}(x_0),\ \forall x \in \mathring{S}(x_0)\colon f(x) > f(x_0)$, то x_0 – точка строгого локального минимума, $y_0 = y(x_0)$ – **строгий локальный минимум**.

Определение 66. Пусть $y = f(x)$ определена на $(a;b)$, $x_0 \in (a;b)$. Тогда:

Если $\exists\ \mathring{S}(x_0),\ \forall x \in \mathring{S}(x_0)\colon f(x) \le f(x_0)$, то x_0 — точка локального максимума, $y_0 = y(x_0)$ — **локальный максимум**.

Определение 67. Пусть $y = f(x)$ определена на $(a;b)$, $x_0 \in (a;b)$. Тогда:

Если $\exists\ \mathring{S}(x_0),\ \forall x \in \mathring{S}(x_0)\colon f(x) < f(x_0)$, то x_0 – точка строгого локального максимума, $y_0 = y(x_0)$ – **строгий локальный максимум**.

Определение 68. Минимум, максимум, строгий минимум, строгий максимум функции $f(x)$ называются **экстремумами** этой функции.

Определение 69. Строгий минимум и строгий максимум функции $f(x)$ называются **строгими экстремумами** этой функции.

50.17 Стационарные и критические точки

Определение 70. Точки, в которых производная функции обращается в нуль, называются **стационарными**.

$$f'(x_0) = 0 \qquad x_0 \text{ — стационарная точка}$$

Определение 71. Точки, в которых производная функции обращается в нуль или не существует, называются **критическими точками 1-го порядка**.

Определение 72. Точки из области определения функции, в которых вторая производная функции равна нулю или не существует, называются **критическими точками 2-го порядка**.

50.18 Выпуклость (вверх или вниз) графика функции на промежутке

Определение 73. Пусть функция $f(x)$ определена на интервале $(a; b)$. Функция $f(x)$ называется **выпуклой вверх (вниз)** на этом интервале, если любая точка касательной, проведённой к графику функции $f(x)$ (кроме точки касания) лежит выше (ниже) точки графика функции $f(x)$ с такой же абсциссой.

50.19 Точка перегиба графика функции

Определение 74. Пусть функция $f(x)$ определена на интервале $(a; b)$.
Точка $x_0 \in (a; b)$ называется **точкой перегиба <u>функции</u>** $f(x)$, если эта функция непрерывна в точке x_0 и если существует число $\delta > 0$ такое, что направление выпуклости функции $f(x)$ на интервалах $(x_0 - \delta; x_0)$ и $(x_0; x_0 + \delta)$ различны.
При этом точка $\big(x_0, f(x_0)\big)$ называется **точкой перегиба <u>графика функции</u>** $f(x)$.

51 Используемые теоремы

Теорема 47 *(О существовании предела функции в точке)*.
Функция $y = f(x)$ в точке x_0 имеет конечный предел тогда и только тогда, когда существуют пределы справа и слева и они равны между собой.

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = \lim_{x\to x_0+} f(x) = \lim_{x\to x_0-} f(x)$$

Теорема 48 *(О сумме конечного числа бесконечно малых функций)*.
Конечная сумма бесконечно малых функции есть бесконечно малая функция.

Теорема 49.
Пусть функция $g(y)$ непрерывна в точке y_0, $y_0 = \lim\limits_{x\to x_0} f(x)$.

Тогда $\lim\limits_{x\to x_0} g(f(x)) = g\left(\lim\limits_{x\to x_0} f(x)\right)$

Теорема 50 *(О существовании производной функции в точке)*.
Функция $y = f(x)$ в точке x_0 имеет производную тогда и только тогда, когда она имеет производные и справа, и слева, и они равны между собой.

$$y'(x_0) = y'_+(x_0) = y'_-(x_0)$$

Теорема 51.
Пусть функция $y = f(x)$ n раз дифференцируема в точке x_0 и определена в некоторой окрестности этой точки. Тогда $\forall x \in S(x_0)$ имеет место формула Тейлора:

$$\begin{aligned} f(x) =& f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}\cdot(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}\cdot(x-x_0)^2 + \frac{f'''(x_0)}{3!}\cdot(x-x_0)^3 + \\ &+ \ldots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}\cdot(x-x_0)^n + R_n(x) \end{aligned} \tag{1}$$

Кратко: $f(x) = P_n(x) + R_n(x)$, где

$$\begin{aligned} P_n(x) =& f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}\cdot(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}\cdot(x-x_0)^2 + \frac{f'''(x_0)}{3!}\cdot(x-x_0)^3 + \\ &+ \ldots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}\cdot(x-x_0)^n \qquad \text{— многочлен Тейлора} \qquad x \to x_0 \end{aligned}$$

$R_n(x)$ — остаточный член формулы Тейлора

52 Дополнительно

Таблица 1: Таблица эквивалентных б.м.ф.

1. $\sin x \sim x$ при $x \to 0$;	6. $e^x - 1 \sim x$ $(x \to 0)$;
2. $\operatorname{tg} x \sim x$ $(x \to 0)$;	7. $a^x - 1 \sim x \cdot \ln a$ $(x \to 0)$;
3. $\arcsin x \sim x$ $(x \to 0)$;	8. $\ln(1+x) \sim x$ $(x \to 0)$;
4. $\operatorname{arctg} x \sim x$ $(x \to 0)$;	9. $\log_a(1+x) \sim x \cdot \log_a e$ $(x \to 0)$;
5. $1 - \cos x \sim \dfrac{x^2}{2}$ $(x \to 0)$;	10. $(1+x)^k - 1 \sim k \cdot x,\ k > 0$ $(x \to 0)$;
11. $a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^2 \sim a_n x^2$ $(x \to \infty)$	
12. $a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n \sim a_1 x$ $(x \to 0)$	

Таблица 2: Формулы дифференцирования

1. $(c)' = 0$;
2. $(u^a)' = a \cdot u^{a-1} \cdot u'$, в частности, $(\sqrt{u})' = \dfrac{1}{2\sqrt{u}} \cdot u'$;
3. $(a^u)' = a^u \cdot \ln a \cdot u'$, в частности, $(e^u)' = e^u \cdot u'$;
4. $(\log_a u)' = \dfrac{1}{u \cdot \ln a} \cdot u'$, в частности, $(\ln u)' = \dfrac{1}{u} \cdot u'$;

5. $(\sin u)' = \cos u \cdot u'$;	6. $(\cos u)' = -\sin u \cdot u'$;
7. $(\operatorname{tg} u)' = \dfrac{1}{\cos^2 u} \cdot u'$;	8. $(\operatorname{ctg} u)' = -\dfrac{1}{\sin^2 u} \cdot u'$;
9. $(\arcsin u)' = \dfrac{1}{\sqrt{1-u^2}} \cdot u'$;	10. $(\arccos u)' = -\dfrac{1}{\sqrt{1-u^2}} \cdot u'$;
11. $(\operatorname{arctg} u)' = \dfrac{1}{1+u^2} \cdot u'$;	12. $(\operatorname{arcctg} u)' = -\dfrac{1}{1+u^2} \cdot u'$;
13. $(\operatorname{sh} u)' = \operatorname{ch} u \cdot u'$;	14. $(\operatorname{ch} u)' = \operatorname{sh} u \cdot u'$;
15. $(\operatorname{th} u)' = \dfrac{1}{\operatorname{ch}^2 u} \cdot u'$;	16. $(\operatorname{cth} u)' = -\dfrac{1}{\operatorname{sh}^2 u} \cdot u'$.