

# Интегралы и дифференциальные уравнения

Экзамен  
2 семестр

GitHub: malyinik

2024 г.

# Содержание

<b>1</b>	<b>Сформулировать определение первообразной. Сформулировать свойства первообразной и неопределённого интеграла. Сформулировать и доказать теорему об интегрировании по частям для неопределённого интеграла</b>	<b>4</b>
<b>2</b>	<b>Разложение правильной рациональной дроби на простейшие. Интегрирование простейших дробей</b>	<b>7</b>
2.1	Интегрирование простейших рациональных дробей . . . . .	7
2.1.1	$\frac{A}{x-a}$ . . . . .	7
2.1.2	$\frac{A}{(x-a)^k}$ . . . . .	7
2.1.3	$\frac{Mx+N}{x^k+px+q}$ . . . . .	8
<b>3</b>	<b>Сформулировать свойства определенного интеграла</b>	<b>8</b>
3.1	Свойства определённого интеграла . . . . .	8
3.2	Доказать теорему о сохранении определённым интегралом знака подынтегральной функции . . . . .	10
3.3	Доказать теорему об оценке определенного интеграла . . . . .	11
3.4	Доказать теорему об оценке модуля определенного интеграла . . . . .	11
3.5	Доказать теорему о среднем для определенного интеграла . . . . .	12
3.6	Вывести формулу Ньютона-Лейбница . . . . .	13
3.7	Интегрирование периодических функций. Интегрирование четных и нечетных функций на отрезке, симметричном относительно начала координат . .	14
3.8	Сформулировать и доказать теорему об интегрировании по частям для определённого интеграла . . . . .	15
<b>4</b>	<b>Дать определение интеграла с переменным верхним пределом. Сформулировать и доказать теорему о производной от интеграла с переменным верхним пределом</b>	<b>16</b>
<b>5</b>	<b>Дать геометрическую интерпретацию определенного интеграла. Сформулировать и доказать теорему об интегрировании подстановкой для определенного интеграла</b>	<b>17</b>
<b>6</b>	<b>Сформулировать определение несобственного интеграла 1-го рода</b>	<b>18</b>
6.1	Сформулировать и доказать признак сходимости по неравенству для несобственных интегралов 1-го рода . . . . .	19
6.2	Сформулировать и доказать предельный признак сравнения для несобственных интегралов 1-го рода . . . . .	20
6.3	Сформулировать и доказать признак абсолютной сходимости для несобственных интегралов 1-го рода . . . . .	21
<b>7</b>	<b>Сформулировать определение несобственного интеграла 2-го рода и признаки сходимости таких интегралов</b>	<b>22</b>
<b>8</b>	<b>Фигура ограничена кривой <math>y = f(x) \geq 0</math>, прямыми <math>x = a</math>, <math>x = b</math> и <math>y = 0</math> (<math>a &lt; b</math>). Вывести формулу для вычисления с помощью определенного интеграла площади этой фигуры</b>	<b>23</b>

9	Фигура ограничена лучами $\varphi = \alpha$ , $\varphi = \beta$ и кривой $r = f(\varphi)$ . Здесь $r$ и $\varphi$ — полярные координаты точки, $0 \leq \alpha < \beta \leq 2\pi$ , где $r$ и $\varphi$ — полярные координаты точки. Вывести формулу для вычисления с помощью определенного интеграла площади этой фигуры	24
10	Тело образовано вращением вокруг оси $Ox$ криволинейной трапеции, ограниченной кривой $y = f(x) \geq 0$ , прямыми $x = a$ , $x = b$ и $y = 0$ ( $a < b$ ). Вывести формулу для вычисления с помощью определенного интеграла объема тела вращения	25
11	Кривая задана в декартовых координатах уравнением $y = f(x)$ , где $x$ и $y$ — декартовы координаты точки, $a \leq x \leq b$ . Вывести формулу для вычисления длины дуги этой кривой	26
12	Кривая задана в полярных координатах уравнением $r = f(\varphi) \geq 0$ , где $r$ и $\varphi$ — полярные координаты точки, $\alpha \leq \varphi \leq \beta$ . Вывести формулу для вычисления длины дуги этой кривой	27
13	Линейные дифференциальные уравнения первого порядка. Интегрирование линейных неоднородных дифференциальных уравнений первого порядка методом Бернулли (метод « $u \cdot v$ ») и методом Лагранжа (вариации произвольной постоянной)	28
14	Сформулировать теорему Коши о существовании и единственности решения дифференциального уравнения $n$ -го порядка. Интегрирование дифференциальных уравнений $n$ -го порядка, допускающих понижение порядка	31
15	Сформулировать теорему Коши о существовании и единственности решения линейного дифференциального уравнения $n$ -го порядка. Доказать свойства частных решений линейного однородного дифференциального уравнения $n$ -го порядка	34
16	Сформулировать определения линейно зависимой и линейно независимой систем функций	37
16.1	Сформулировать и доказать теорему о вронскиане линейно зависимых функций . . . . .	37
16.2	Сформулировать и доказать теорему о вронскиане системы линейно независимых частных решений линейного однородного дифференциального уравнения $n$ -го порядка . . . . .	38
17	Сформулировать и доказать теорему о существовании фундаментальной системы решений линейного однородного дифференциального уравнения $n$ -го порядка	39
18	Сформулировать и доказать теорему о структуре общего решения линейного однородного дифференциального уравнения $n$ -го порядка	41
19	Вывести формулу Остроградского-Лиувилля для линейного дифференциального уравнения 2-го порядка	43

20 Вывести формулу для общего решения линейного однородного дифференциального уравнения второго порядка при одном известном частном решении	44
21 Сформулировать и доказать теорему о структуре общего решения линейного неоднородного дифференциального уравнения $n$ -го порядка	45
22 Вывести формулу для общего решения линейного однородного дифференциального уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами в случае кратных корней характеристического уравнения	47
23 Вывести формулу для общего решения линейного однородного дифференциального уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами в случае комплексных корней характеристического уравнения	48
24 Частное решение линейного неоднородного дифференциального уравнения с постоянными коэффициентами и правой частью специального вида (являющейся квазимногочленом). Сформулировать и доказать теорему о наложении частных решений	49
25 Метод Лагранжа вариации произвольных постоянных для нахождения решения линейного неоднородного дифференциального уравнения 2-го порядка и вывод системы соотношений для варьируемых переменных	51
26 Дополнительные определения	53
26.1 Неопределённый интеграл . . . . .	53
26.2 Правильные и неправильные рациональные дроби . . . . .	53
26.2.1 Простейшие рациональные дроби . . . . .	53
26.3 Определённый интеграл . . . . .	54
26.4 Криволинейная трапеция . . . . .	54
26.5 Абсолютная и условная сходимость . . . . .	55
26.6 Уравнение Бернулли . . . . .	55
26.7 Общее и частное решения ДУ . . . . .	55
26.8 Определитель Вронского (вронскиан) . . . . .	56
26.9 Характеристическое уравнение . . . . .	56
27 Дополнительные теоремы	56
28 Дополнительные материалы	57
28.1 Таблица основных интегралов . . . . .	57
28.2 Интегралы для сравнения. Эталоны, интегралы Дирихле . . . . .	57

# 1 Сформулировать определение первообразной. Сформулировать свойства первообразной и неопределённого интеграла. Сформулировать и доказать теорему об интегрировании по частям для неопределённого интеграла

## Первообразная

**Определение 1.** Функция  $F(x)$  называется **первообразной** функции  $f(x)$  на интервале  $(a; b)$ , если  $F(x)$  дифференцируема на  $(a; b)$  и  $\forall x \in (a; b)$ :

$$F'(x) = f(x) \quad (1)$$

## Свойства первообразной

### Свойство 1.

Если  $F(x)$  — первообразная функции  $f(x)$  на  $(a; b)$ , то  $F(x) + C$  — первообразная функции  $f(x)$  на  $(a; b)$ , где  $\forall C — const$ .

### Свойство 2.

Если  $\Phi(x)$  дифференцируема на  $(a; b)$  и  $\forall x \in (a; b): \Phi'(x) = 0$ , то  $\Phi(x) = const$ ,  $\forall x \in (a; b)$ .

### Свойство 3 (Существование первообразной).

Любая непрерывная функция на  $(a; b)$  имеет множество первообразных на этом интервале, причём любые две из них отличаются друг от друга на константу.

$$\begin{aligned} \Phi(x), F(x) & \text{ — первообразные функции } f(x) \text{ на } (a; b) \\ \Phi(x) - F(x) & = const \end{aligned}$$

## Свойства неопределённого интеграла

### Свойство 1.

Производная от неопределённого интеграла равна подынтегральной функции.

$$\left( \int f(x) dx \right)' = f(x)$$

### Свойство 2.

Дифференциал от неопределённого интеграла равен подынтегральному выражению.

$$d \left( \int f(x) dx \right) = f(x) dx$$

**Свойство 3.**

Неопределённый интеграл от дифференциала от некоторой функции равен сумме этой функции и константы.

$$\int d(F(x)) = F(x) + C, \quad \forall C - const$$

**Свойство 4.**

Константу можно выносить за знак неопределённого интеграла.

$$\int \lambda \cdot f(x) dx = \lambda \int f(x) dx, \quad \lambda \neq 0$$

**Свойство 5.**

Если функции  $f_1(x)$  и  $f_2(x)$  на  $(a; b)$  имеют первообразные  $F_1(x)$  и  $F_2(x)$  соответственно, то функция  $\lambda_1 f_1(x) + \lambda_2 f_2(x)$ , где  $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ , имеет первообразную на  $(a; b)$ , причём  $\lambda_1^2 + \lambda_2^2 > 0$ :

$$\int (\lambda_1 f_1(x) + \lambda_2 f_2(x)) dx = \lambda_1 \int f_1(x) dx + \lambda_2 \int f_2(x) dx$$

**Свойство 6 (Инвариантность формы интегрирования).**

Если  $\int f(x) dx = F(x) + C$ , где  $C - const$ , то  $\int f(u) du = F(u) + C$ , где  $C - const$ ,  $u = \varphi(x)$  — непрерывно-дифференцируемая функция.

## Теорема об интегрировании по частям

### Теорема 1.

Пусть функции  $u = u(x)$  и  $v = v(x)$  непрерывно-дифференцируемые, тогда справедлива формула интегрирования по частям:

$$\int u \, dv = u \cdot v - \int v \, du$$

**Доказательство.**

Рассмотрим произведение  $u \cdot v = u(x) \cdot v(x)$

Дифференциал:

$$d(u \cdot v) = u \cdot dv + v \cdot du$$

Выразим  $u \cdot dv$ :

$$u \cdot dv = d(u \cdot v) - v \cdot du$$

Интегрируем:

$$\int u \, dv = \int (d(uv) - v \, du)$$

По свойству неопределённого интеграла (5):

$$\int u \, dv = \int d(uv) - \int v \, du$$

По свойству неопределённого интеграла (3):

$$\int u \, dv = u \cdot v - \int v \, du$$



## 2 Разложение правильной рациональной дроби на простейшие. Интегрирование простейших дробей

**Теорема 2** (О разложении правильной рациональной дроби на простейшие).

Любая правильная рациональная дробь  $\frac{P(x)}{Q(x)}$ , знаменатель которой можно разложить на множители:

$$Q(x) = (x - x_1)^{k_1} \cdot (x - x_2)^{k_2} \cdot \dots \cdot (x - x_n)^{k_n} \cdot (x^2 + p_1x + q_1)^{s_1} \cdot \dots \cdot (x^2 + p_mx + q_m)^{s_m},$$

может быть представлена и при том единственным образом в виде суммы простейших рациональных дробей:

$$\begin{aligned} \frac{P(x)}{Q(x)} = & \frac{A_1}{x - x_1} + \frac{B_1}{(x - x_1)^2} + \dots + \frac{C_1}{(x - x_1)^{k_1}} + \dots + \frac{A_n}{(x - x_n)} + \frac{B_n}{(x - x_n)^2} + \dots + \\ & + \frac{C_n}{(x - x_n)^{k_n}} + \frac{M_1x + N_1}{x^2 + p_1x + q_1} + \dots + \frac{M_{s_1}x + N_{s_1}}{(x^2 + p_1x + q_1)^{s_1}} + \dots + \\ & + \frac{E_1x + F_1}{x^2 + p_mx + q_m} + \dots + \frac{E_{s_m}x + F_{s_m}}{(x^2 + p_mx + q_m)^{s_m}} \end{aligned}$$

$$\left. \begin{array}{l} A_1, B_1, \dots, C_1 \\ A_n, B_n, \dots, C_n \\ M_1, N_1, \dots, M_{s_1}, N_{s_1} \\ E_1, F_1, \dots, E_{s_m}, F_{s_m} \end{array} \right\} \in \mathbb{R} \quad \begin{array}{ll} x^2 + p_1x + q_1 & \text{не имеют} \\ \dots\dots\dots & \text{действительных корней} \\ x^2 + p_mx + q_m & \end{array}$$

$$k_1, k_2, \dots, k_n, s_1, \dots, s_m \in \mathbb{N}$$

### 2.1 Интегрирование простейших рациональных дробей

#### 2.1.1 $\frac{A}{x-a}$

$$\int \frac{A}{x-a} dx = A \int \frac{dx}{x-a} = A \int \frac{d(x-a)}{x-a} = A \cdot \ln|x-a| + C, \quad \forall C - const$$

#### 2.1.2 $\frac{A}{(x-a)^k}$

$$\int \frac{A}{(x-a)^k} dx = A \int \frac{dx}{(x-a)^k} = A \int \frac{d(x-a)}{(x-a)^k} = A \int (x-a)^{-k} d(x-a) = A \cdot \frac{(x-a)^{-k+1}}{-k+1} + C,$$

$\forall C - const$



### 2.1.3 $\frac{Mx+N}{x^2+px+q}$

$$\begin{aligned}
 \int \frac{Mx+N}{x^2+px+q} dx &= \left| \begin{aligned} x^2+px+q &= x^2+2 \cdot \frac{p}{2}x + \frac{p^2}{4} - \frac{p^2}{4} + q = \\ &= \left(x + \frac{p}{2}\right)^2 + \left(q - \frac{p^2}{4}\right) \stackrel{(*)}{=} \left(x + \frac{p}{2}\right)^2 + b^2 \end{aligned} \right| = \int \frac{Mx+N}{\left(x + \frac{p}{2}\right)^2 + b^2} dx = \\
 &= \left| x + \frac{p}{2} = t \quad x = t - \frac{p}{2} \quad dx = dt \right| = \int \frac{M\left(t - \frac{p}{2}\right) + N}{t^2 + b^2} dt = \\
 &= M \int \frac{t}{t^2 + b^2} dt + \left(N - \frac{p}{2}M\right) \int \frac{dt}{t^2 + b^2} = \\
 &= \frac{M}{2} \int \frac{d(t^2 + b^2)}{t^2 + b^2} + \left(N - \frac{p}{2}M\right) \frac{1}{b} \operatorname{arctg} \frac{t}{b} = \\
 &= \frac{M}{2} \ln |t^2 + b^2| + \frac{\left(N - \frac{p}{2}M\right)}{b} \operatorname{arctg} \frac{t}{b} + C = \\
 &= \frac{M}{2} \ln |x^2 + px + q| + \frac{\left(N - \frac{p}{2}M\right)}{\sqrt{q - \frac{p^2}{4}}} \operatorname{arctg} \frac{x + \frac{p}{2}}{\sqrt{q - \frac{p^2}{4}}} + C, \quad \forall C - \text{const}
 \end{aligned}$$

## 3 Сформулировать свойства определенного интеграла

### 3.1 Свойства определённого интеграла

#### Теорема 3.

Если функция  $y = f(x)$  интегрируема на отрезке  $[a; b]$ , то имеет место равенство

$$\int_a^b f(x) dx = - \int_b^a f(x) dx$$

#### Теорема 4 (Аддитивность определённого интеграла).

Если функция  $y = f(x)$  интегрируема на каждом из отрезков  $[a; c]$ ,  $[c; b]$  ( $a < c < b$ ), то она интегрируема на  $[a; b]$  и верно равенство

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx$$

#### Теорема 5.

Если  $C - \text{const}$ , то

$$\int_a^b C dx = C \cdot (b - a)$$

**Теорема 6.**

Если функции  $f_1(x)$ ,  $f_2(x)$  интегрируемы на  $[a; b]$ , то их линейная комбинация

$$\lambda_1 f_1(x) + \lambda_2 f_2(x), \text{ где } \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$$

интегрируема на  $[a; b]$  и верно равенство:

$$\int_a^b (\lambda_1 f_1(x) + \lambda_2 f_2(x)) dx = \lambda_1 \int_a^b f_1(x) dx + \lambda_2 \int_a^b f_2(x) dx$$

**Следствие 6.1.**

$$\int_a^a f(x) dx = 0$$

**Теорема 7** (О сохранении определённым интегралом знака подынтегральной функции).

Если  $f(x)$  интегрируема и неотрицательна на  $[a; b]$ , то

$$\int_a^b f(x) dx \geq 0$$

**Теорема 8** (Об интегрировании неравенства).

Пусть функции  $f(x)$  и  $g(x)$  интегрируемы на  $[a; b]$  и  $\forall x \in [a; b]: f(x) \geq g(x)$ , то

$$\int_a^b f(x) dx \geq \int_a^b g(x) dx$$

**Теорема 9** (Об оценке модуля определённого интеграла).

Если функция  $f(x)$  и  $|f(x)|$  интегрируемы на  $[a; b]$ , то справедливо неравенство

$$\left| \int_a^b f(x) dx \right| \leq \int_a^b |f(x)| dx$$

**Теорема 10** (О среднем значении для определённого интеграла).

Если  $f(x)$  непрерывна на  $[a; b]$ , то

$$\exists c \in [a; b]: f(c) = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx$$

**Теорема 11** (Об оценке определённого интеграла).

Пусть функции  $f(x)$  и  $g(x)$  интегрируемы на  $[a; b]$  и  $\forall x \in [a; b]: m \leq f(x) \leq M, g(x) \geq 0$ . Тогда

$$m \int_a^b g(x) dx \leq \int_a^b f(x) g(x) dx \leq M \int_a^b g(x) dx$$

**Следствие 11.1.**  $g(x) \equiv 1, \forall x \in [a; b]$

$$m(b-a) \leq \int_a^b f(x) dx \leq M(b-a)$$

### 3.2 Доказать теорему о сохранении определенным интегралом знака подынтегральной функции

**Теорема 7** (О сохранении определённым интегралом знака подынтегральной функции).

Если  $f(x)$  интегрируема и неотрицательна на  $[a; b]$ , то

$$\int_a^b f(x) dx \geq 0$$

**Доказательство.**

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(\xi_i) \cdot \Delta x_i$$

$\Delta x_i$  — длины отрезков разбиения  $\Delta x_i > 0$   
 $f(\xi_i) \geq 0$  по условию

$$f(\xi_i) \cdot \Delta x_i \geq 0, i = \overline{1, n}$$

$$\sum_{i=1}^n f(\xi_i) \cdot \Delta x_i \geq 0 \quad \text{как сумма неотрицательных чисел}$$

$$\lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(\xi_i) \cdot \Delta x_i \geq 0 \quad \text{по следствию из теоремы о сохранении функции знака своего предела}$$

$\Downarrow$

$$\int_a^b f(x) dx \geq 0$$

■

### 3.3 Доказать теорему об оценке определенного интеграла

**Теорема 11** (Об оценке определённого интеграла).

Пусть функции  $f(x)$  и  $g(x)$  интегрируемы на  $[a; b]$  и  $\forall x \in [a; b]: m \leq f(x) \leq M, g(x) \geq 0$ . Тогда

$$m \int_a^b g(x) dx \leq \int_a^b f(x) g(x) dx \leq M \int_a^b g(x) dx$$

**Доказательство.**

Так как  $\forall x \in [a; b]$  верны неравенства

$$\begin{aligned} m &\leq f(x) \leq M & | \cdot g(x) \\ g(x) &\geq 0 & m, M \in \mathbb{R} \\ m \cdot g(x) &\leq f(x) \cdot g(x) \leq M \cdot g(x) \end{aligned}$$

По теореме 8 и 6:

$$m \int_a^b g(x) dx \leq \int_a^b f(x) g(x) dx \leq M \int_a^b g(x) dx$$

■

### 3.4 Доказать теорему об оценке модуля определенного интеграла

**Теорема 9** (Об оценке модуля определённого интеграла).

Если функция  $f(x)$  и  $|f(x)|$  интегрируемы на  $[a; b]$ , то справедливо неравенство

$$\left| \int_a^b f(x) dx \right| \leq \int_a^b |f(x)| dx$$

**Доказательство.**

$\forall x \in [a; b]$  справедливо неравенство

$$-|f(x)| \leq f(x) \leq |f(x)|$$

По теореме 6 и 8:

$$-\int_a^b |f(x)| dx \leq \int_a^b f(x) dx \leq \int_a^b |f(x)| dx$$

Сворачиваем двойное неравенство:

$$\left| \int_a^b f(x) dx \right| \leq \int_a^b |f(x)| dx$$

■

### 3.5 Доказать теорему о среднем для определенного интеграла

**Теорема 10** (О среднем значении для определённого интеграла).

Если  $f(x)$  непрерывна на  $[a; b]$ , то

$$\exists c \in [a; b]: f(c) = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx$$

**Доказательство.**

Так как функция  $y = f(x)$  непрерывна на  $[a; b]$ , то по теореме Вейерштрасса она достигает своего наибольшего и наименьшего значения.

То есть  $\exists m, M \in \mathbb{R}, \forall x \in [a; b]: m \leq f(x) \leq M$

По теореме 8:

$$\int_a^b m dx \leq \int_a^b f(x) dx \leq \int_a^b M dx$$

По теореме 6:

$$m \int_a^b dx \leq \int_a^b f(x) dx \leq M \int_a^b dx$$

По теореме 5:

$$m(b-a) \leq \int_a^b f(x) dx \leq M(b-a) \quad | : (b-a)$$

Так как функция  $y = f(x)$  непрерывна на  $[a; b]$ , то по теореме Больцано-Коши она принимает все свои значения между наибольшим и наименьшим значением.

$$m \leq \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx \leq M$$

По теореме Больцано-Коши  $\exists c \in [a; b]:$

$$f(c) = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx$$



### 3.6 Вывести формулу Ньютона-Лейбница

#### Теорема 12.

Пусть функция  $f(x)$  — непрерывна на  $[a; b]$ . Тогда

$$\int_a^b f(x) dx = F(x) \Big|_a^b = F(b) - F(a)$$

где  $F(x)$  — первообразная  $f(x)$ .

#### Доказательство.

Пусть  $F(x)$  первообразная  $f(x)$  на  $[a; b]$ . По следствию из теоремы 16  $I(x)$  — первообразная  $f(x)$  на  $[a; b]$ .

По свойству первообразной (св.3):

$$I(x) - F(x) = C$$

$$I(x) = F(x) + C, \text{ где } C - const$$

$$\int_a^x f(t) dt = F(x) + C, \text{ где } C - const \quad (\vee)$$

•  $x = a$ :

$$\int_a^a f(t) dt = F(a) + C$$

$$0 = F(a) + C$$

$$C = -F(a)$$

$C = -F(a)$  подставим в  $(\vee)$ :

$$\int_a^x f(t) dt = F(x) - F(a)$$

•  $x = b$ :

$$\int_a^b f(t) dt = F(b) - F(a)$$

■

### 3.7 Интегрирование периодических функций. Интегрирование четных и нечетных функций на отрезке, симметричном относительно начала координат

#### Теорема 13.

Пусть  $f(x)$  непрерывная периодическая функция с периодом  $T$ . Тогда

$$\int_a^{a+T} f(x) dx = \int_0^T f(x) dx, \quad \forall a \in \mathbb{R}$$

**Доказательство.**

$$\begin{aligned} \int_a^{a+T} f(x) dx &= \int_a^0 f(x) dx + \int_0^T f(x) dx + \int_T^{T+a} f(x) dx \\ \int_T^{T+a} f(x) dx &= \left| \begin{array}{l} t = x - T, \quad x = t + T, \quad dx = dt \\ x_{\text{н}} = T, \quad t_{\text{н}} = 0 \\ x_{\text{в}} = T + a, \quad t_{\text{в}} = a \end{array} \right| = \int_0^a f(t + T) dt \stackrel{\text{период.}}{=} \int_0^a f(t) dt \\ \int_a^{a+T} f(x) dx &= \int_a^0 f(x) dx + \int_0^T f(x) dx + \int_0^a f(x) dx \\ \int_a^{a+T} f(x) dx &= -\int_0^a f(x) dx + \int_0^T f(x) dx + \int_0^a f(x) dx \\ \int_a^{a+T} f(x) dx &= \int_0^T f(x) dx, \quad \forall x \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

■

#### Теорема 14.

Пусть функция  $y = f(x)$  непрерывна на  $[-a; a]$ , где  $a \in \mathbb{R}$ ,  $a > 0$ . Тогда

$$\int_{-a}^a f(x) dx = \begin{cases} 2 \int_0^a f(x) dx, & f - \text{чѐтная} \\ 0, & f - \text{нечѐтная} \end{cases}$$

**Доказательство.**

$$\begin{aligned} \int_{-a}^a f(x) dx &= \int_{-a}^0 f(x) dx + \int_0^a f(x) dx \ominus \\ \int_{-a}^0 f(x) dx &= \left| \begin{array}{l} x = -t, \quad dx = -dt \\ x_{\text{н}} = -a, \quad t_{\text{н}} = a \\ x_{\text{в}} = 0, \quad t_{\text{в}} = 0 \end{array} \right| = \int_a^0 f(-t) (-dt) = \int_0^a f(-t) dt = \\ &= \begin{cases} \int_0^a f(t) dt, & f - \text{чѐтная} \\ -\int_0^a f(t) dt, & f - \text{нечѐтная} \end{cases} \\ \ominus \int_0^a f(x) dx + \begin{cases} \int_0^a f(x) dx, & f - \text{чѐтная} \\ -\int_0^a f(x) dx, & f - \text{нечѐтная} \end{cases} &= \begin{cases} 2 \int_0^a f(x) dx, & f - \text{чѐтная} \\ 0, & f - \text{нечѐтная} \end{cases} \end{aligned}$$

■

### 3.8 Сформулировать и доказать теорему об интегрировании по частям для определённого интеграла

#### Теорема 15.

Пусть функции  $u = u(x)$  и  $v = v(x)$  непрерывно дифференцируемы на  $[a; b]$ . Тогда имеет место равенство

$$\int_a^b u \, dv = uv \Big|_a^b - \int_a^b v \, du$$

#### Доказательство.

Рассмотрим произведение функций  $u \cdot v$ .

Дифференцируем:

$$\begin{aligned} d(u \cdot v) &= v \, du + u \, dv \\ u \, dv &= d(uv) - v \, du \end{aligned}$$

Интегрируем:

$$\int_a^b u \, dv = \int_a^b (d(uv) - v \, du) = \int_a^b d(uv) - \int_a^b v \, du = uv \Big|_a^b - \int_a^b v \, du$$





#### 4 Дать определение интеграла с переменным верхним пределом. Сформулировать и доказать теорему о производной от интеграла с переменным верхним пределом

**Определение 2.** Определённым интегралом с переменным верхним пределом интегрирования от непрерывной функции  $f(x)$  на  $[a; b]$  называется интеграл вида

$$I(x) = \int_a^x f(t) dt, \text{ где } x \in [a; b]$$

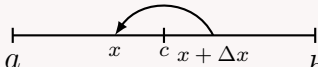
**Теорема 16** (О производной  $I(x)$ ).

Если функция  $y = f(x)$  непрерывна на  $[a; b]$ , то  $\forall x \in [a; b]$  верно равенство

$$(I(x))' = \left( \int_a^x f(t) dt \right)' = f(x)$$

**Доказательство.**

$$(I(x))' = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta I(x)}{\Delta x} \stackrel{\text{ТЗ4}}{=} \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(c) \cdot \Delta x}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} f(c) \stackrel{*}{=} f(x)$$

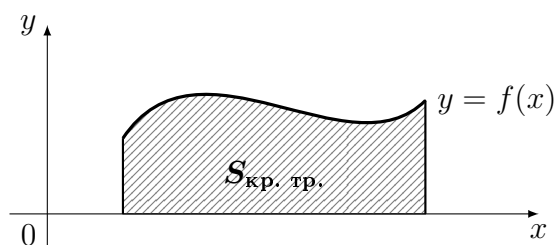
\*:  при  $\Delta x \rightarrow 0 \quad x + \Delta x \rightarrow x \quad c \rightarrow x$

■

**Следствие 16.1.** Функция  $I(x)$  — первообразная функции  $f(x)$  на  $[a; b]$ , так как по теореме 16  $(I(x))' = f(x)$ .

## 5 Дать геометрическую интерпретацию определенного интеграла. Сформулировать и доказать теорему об интегрировании подстановкой для определенного интеграла

### Геометрический смысл



Определённый интеграл численно равен площади криволинейной трапеции.

$$S_{\text{кр. тр.}} = \int_a^b f(x) dx$$

### Теорема об интегрировании подстановкой

#### Теорема 17.

Пусть

1.  $y = f(x)$  непрерывна на  $[a; b]$
2.  $x = \varphi(t)$  непрерывно дифференцируема при  $t \in [t_1; t_2]$
3. при  $t \in [t_1; t_2]$  значения функции  $\varphi(t)$  не выходят за пределы  $[a; b]$
4.  $\varphi(t_1) = a, \varphi(t_2) = b$

$$\text{Тогда } \int_a^b f(x) dx = \left| \begin{array}{lll} x = \varphi(t), & x_{\text{н}} = a, & t_{\text{н}} = t_1 \\ dx = \varphi'(t) dt, & x_{\text{к}} = b, & t_{\text{к}} = t_2 \end{array} \right| = \int_{t_1}^{t_2} f(\varphi(t)) \varphi'(t) dt$$

#### Доказательство.

Так как

1.  $y = f(x)$  непрерывна на  $[a; b]$ , а
2.  $x = \varphi(t)$  непрерывна на  $[t_1; t_2]$ ,

то сложная  $y = f(\varphi(t))$  непрерывна на  $[t_1; t_2]$  по теореме о непрерывности сложной функции.

Так как  $y = f(x)$  непрерывна на  $[a; b]$ , а функция  $f(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t)$  — непрерывна на  $[t_1; t_2]$ , то существует определённый и неопределённый интеграл от этих функций.

Пусть  $F(x)$  — первообразная функции  $f(x)$  на  $[a; b]$ . В силу инвариантности неопределённого интеграла  $F(\varphi(t))$  — первообразная функции  $f(\varphi(t))$  на  $[t_1; t_2]$ .

Тогда

$$\int_a^b f(x) dx = F(x) \Big|_a^b \stackrel{\text{Н-Л}}{=} \boxed{F(b) - F(a)}$$
$$\int_{t_1}^{t_2} f(\varphi(t)) \varphi'(t) dt = F(\varphi(t)) \Big|_{t_1}^{t_2} \stackrel{\text{Н-Л}}{=} F(\varphi(t_2)) - F(\varphi(t_1)) = \boxed{F(b) - F(a)}$$

■

**Замечание.**

- ⊕ При замене переменной в определённом интеграле обратную замену не делают.
- ⊖ Нужно не забыть изменить пределы интегрирования.

## 6 Сформулировать определение несобственного интеграла 1-го рода

Пусть  $y = f(x)$  определена на  $[a; +\infty)$ , интегрируема на  $[a; b] \subset [a; +\infty)$ . Тогда определена функция

$$\boxed{\Phi(b) = \int_a^b f(x) dx} \text{ на } [a; +\infty) \quad (1)$$

как определённый интеграл с переменным верхним пределом интегрирования.

**Определение 3.** Предел функции  $\Phi(b)$  при  $b \rightarrow +\infty$  называется несобственным интегралом от функции  $f(x)$  по бесконечному промежутку  $[a; +\infty)$  или **несобственным интегралом 1-го рода** и обозначается

$$\boxed{\int_a^{+\infty} f(x) dx = \lim_{b \rightarrow +\infty} \Phi(b) = \lim_{b \rightarrow +\infty} \int_a^b f(x) dx} \quad (2)$$

Если предел в правой части равенства (2) существует и конечен, то несобственный интеграл в левой части равенства (2) **сходится**.

Если предел в правой части равенства (2) не существует или равен бесконечности, то несобственный интеграл в левой части равенства (2) **расходится**.

## 6.1 Сформулировать и доказать признак сходимости по неравенству для несобственных интегралов 1-го рода

**Теорема 18** (*Признак сходимости по неравенству*).

Пусть функции  $f(x)$  и  $g(x)$  интегрируемы на  $[a; b] \subset [a; +\infty)$ , причём

$$\forall x \geq a: 0 \leq f(x) \leq g(x)$$

Тогда:

1. Если  $\int_a^{+\infty} g(x) dx$  сходится, то  $\int_a^{+\infty} f(x) dx$  — сходится
2. Если  $\int_a^{+\infty} f(x) dx$  расходится, то  $\int_a^{+\infty} g(x) dx$  — расходится

**Доказательство.**

(опр. 3)  
 $\int_a^{+\infty} g(x) dx$  — сходится  $\Rightarrow$  по определению несобственного интеграла 1-го рода

$$\int_a^{+\infty} g(x) dx = \lim_{b \rightarrow +\infty} \int_a^b g(x) dx = C \quad C — \text{число}$$

Так как  $\forall x \geq a: g(x) \geq 0$

$$\Phi(b) = \int_a^b g(x) dx \leq C, \quad b > a$$

По условию:  $\forall x \geq a: 0 \leq f(x) \leq g(x)$

Интегрируем:

$$\int_a^b f(x) dx \leq \int_a^b g(x) dx \leq C$$

Так как  $f(x) \geq 0$ ,  $\forall x \geq a$  и  $b > a$ , то функция

$$\Psi(b) = \int_a^b f(x) dx \text{ монотонно возрастает и ограничена сверху}$$

**Утверждение:** монотонная и ограниченная сверху функция при  $x \rightarrow +\infty$  имеет конечный предел.

По утверждению функция  $\Psi(b)$  имеет конечный предел при  $x \rightarrow +\infty$ , то есть

$$\int_a^{+\infty} f(x) dx = \lim_{b \rightarrow +\infty} \Psi(b) = \lim_{b \rightarrow +\infty} \int_a^b f(x) dx — \text{конечный предел}$$

■

**Доказательство** (Метод от противного).

**Дано:**  $\int_a^{+\infty} f(x) dx$  — расходится

Предположим, что  $\int_a^{+\infty} g(x) dx$  — сходится

Тогда по первой части теоремы:

$$\int_a^{+\infty} f(x) dx — \text{сходится}$$

А это противоречит условию теоремы  $\Rightarrow \int_a^{+\infty} g(x) dx$  — расходится

■

## 6.2 Сформулировать и доказать предельный признак сравнения для несобственных интегралов 1-го рода

**Теорема 19** (*Предельный признак сходимости*).

Пусть  $f(x)$  и  $g(x)$  интегрируемы на  $[a; b] \subset [a; +\infty)$  и  $\forall x \geq a: f(x) \geq 0, g(x) > 0$ . Если существует конечный предел:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lambda > 0 \quad (3)$$

то  $\int_a^{+\infty} f(x) dx$  и  $\int_a^{+\infty} g(x) dx$  сходятся или расходятся одновременно.

**Доказательство.**

Из (3)  $\Rightarrow$  по определению предела:

$$\forall \varepsilon > 0, \exists M(\varepsilon) > 0: \forall x > M \Rightarrow \left| \frac{f(x)}{g(x)} - \lambda \right| < \varepsilon$$

$$-\varepsilon < \frac{f(x)}{g(x)} - \lambda < \varepsilon$$

$$\lambda - \varepsilon < \frac{f(x)}{g(x)} < \lambda + \varepsilon$$

$$(\lambda - \varepsilon) \cdot g(x) < f(x) < (\lambda + \varepsilon) \cdot g(x) \quad \forall x > M \quad (*)$$

1 шаг Рассмотрим  $f(x) < (\lambda + \varepsilon)g(x)$

Интегрируем:

$$\int_a^{+\infty} f(x) dx < (\lambda + \varepsilon) \int_a^{+\infty} g(x) dx$$

Число  $(\lambda + \varepsilon)$  не влияет на сходимость/расходимость несобственного интеграла.

Пусть  $\int_a^{+\infty} g(x) dx$  — сходится, тогда:

$$(\lambda + \varepsilon) \int_a^{+\infty} g(x) dx \text{ — сходится}$$

По теореме 18  $\int_a^{+\infty} f(x) dx$  — сходится.

Пусть  $\int_a^{+\infty} f(x) dx$  расходится, тогда по теореме 18

$$(\lambda + \varepsilon) \int_a^{+\infty} g(x) dx \text{ — расходится} \Rightarrow \int_a^{+\infty} g(x) dx \text{ — расходится}$$

2 шаг Рассмотрим  $(\lambda - \varepsilon) \cdot g(x) < f(x)$

Интегрируем:

$$(\lambda - \varepsilon) \int_a^{+\infty} g(x) dx < \int_a^{+\infty} f(x) dx$$

$(\lambda - \varepsilon)$  не влияет на сходимость/расходимость несобственного интеграла

Пусть  $\int_a^{+\infty} f(x) dx$  — сходится, тогда по теореме 18

$$(\lambda - \varepsilon) \int_a^{+\infty} g(x) dx \text{ — сходится} \Rightarrow \int_a^{+\infty} g(x) dx \text{ — сходится}$$

Пусть  $(\lambda - \varepsilon) \int_a^{+\infty} g(x) dx$  — расходится, тогда  $\int_a^{+\infty} g(x) dx$  — расходится

По теореме 18  $\int_a^{+\infty} f(x) dx$  расходится, тогда

$$\int_a^{+\infty} f(x) dx \text{ и } \int_a^{+\infty} g(x) dx \text{ сходятся и расходятся одновременно}$$

■

### 6.3 Сформулировать и доказать признак абсолютной сходимости для несобственных интегралов 1-го рода

**Теорема 20** (*Признак абсолютной сходимости*).

Пусть функция  $f(x)$  знакопеременна на  $[a; +\infty)$ . Если функции  $f(x)$  и  $|f(x)|$  интегрируемы на любом отрезке  $[a; b] \subset [a; +\infty)$  и несобственный интеграл от функции  $|f(x)|$  по бесконечному промежутку  $[a; +\infty)$  сходится, то сходится и несобственный интеграл от функции  $f(x)$  по  $[a; +\infty)$ , причём абсолютно.

**Доказательство.**

Так как  $\forall x \in [a; +\infty)$  верно неравенство

$$\begin{aligned} -|f(x)| &\leq f(x) \leq |f(x)| \quad \Big| + |f(x)| \\ 0 &\leq f(x) + |f(x)| \leq 2|f(x)| \end{aligned}$$

По условию  $\int_a^{+\infty} |f(x)| dx$  сходится  $\Rightarrow 2 \int_a^{+\infty} |f(x)| dx$  сходится.

По теореме 18 (*признак сходимости по неравенству*):

$$\int_a^{+\infty} (f(x) + |f(x)|) dx \text{ — сходится}$$

Рассмотрим

$$\int_a^{+\infty} f(x) dx = \underbrace{\int_a^{+\infty} (f(x) + |f(x)|) dx}_{\text{сх-ся по Т18}} - \underbrace{\int_a^{+\infty} |f(x)| dx}_{\text{сх-ся по условию}}$$

По определению сходящегося несобственного интеграла  $\Rightarrow \int_a^{+\infty} f(x) dx$  сходится

По определению абсолютной сходимости  $\Rightarrow \int_a^{+\infty} f(x) dx$  сходится абсолютно  
(опр.25)

■

## 7 Сформулировать определение несобственного интеграла 2-го рода и признаки сходимости таких интегралов

Пусть функция  $f(x)$  определена на полуинтервале  $[a; b)$ , а в точке  $x = b$  терпит разрыв 2-го рода. Предположим, что функция  $f(x)$  интегрируема на  $[a; \eta] \subset [a; b)$ . Тогда на  $[a; b)$  определена функция

$$\Phi(\eta) = \int_a^{\eta} f(x) dx \quad (1)$$

как интеграл с переменным верхним пределом.

**Определение 4.** Предел функции  $\Phi(\eta)$  при  $\eta \rightarrow b-$  называется несобственным интегралом от неограниченной функции  $f(x)$  на  $[a; b)$  или **несобственным интегралом 2-го рода** и обозначается

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{\eta \rightarrow b-} \Phi(\eta) = \lim_{\eta \rightarrow b-} \int_a^{\eta} f(x) dx \quad (2)$$

Если предел в правой части равенства (2) существует и конечен, то несобственный интеграл от неограниченной функции  $f(x)$  по  $[a; b)$  **сходится**.

Если предел в правой части равенства (2) не существует или равен  $\infty$ , то несобственный интеграл от неограниченной функции  $f(x)$  по  $[a; b)$  **расходится**.

**Теорема 21** (*Признак сходимости по неравенству*).

Пусть функции  $f(x)$  и  $g(x)$  интегрируемы на  $\forall$  отрезке  $[a; \eta] \subset [a; b)$ , являются неотрицательными  $\forall x \in [a; b)$  и в точке  $x = b$  терпят разрыв 2-го рода, причём выполнено неравенство  $0 \leq f(x) \leq g(x)$ . Тогда

1. Если несобственный интеграл  $\int_a^b g(x) dx$  сходится, то несобственный интеграл  $\int_a^b f(x) dx$  сходится.
2. Если собственный интеграл  $\int_a^b f(x) dx$  расходится, то несобственный интеграл  $\int_a^b g(x) dx$  расходится.

**Теорема 22** (*Предельный признак сходимости*).

Пусть функции  $f(x)$  и  $g(x)$  интегрируемы на  $\forall$  отрезке  $[a; \eta] \subset [a; b)$ , являются неотрицательными  $\forall x \in [a; b)$  и в точке  $x = b$  терпят разрыв 2-го рода. Если существует конечный положительный предел

$$\lim_{x \rightarrow b-} \frac{f(x)}{g(x)} = \lambda > 0$$

то  $\int_a^b f(x) dx$  и  $\int_a^b g(x) dx$  сходятся или расходятся одновременно.

**Теорема 23** (*Признак абсолютной сходимости*).

Пусть функция  $f(x)$  знакопеременна на  $[a; b)$ . Если  $f(x)$  и  $|f(x)|$  интегрируемы на  $\forall [a; \eta] \subset [a; b)$  и несобственный интеграл от функции  $|f(x)|$  сходится по этому промежутку, то несобственный интеграл от функции  $f(x)$  сходится, причём абсолютно.

## 8 Фигура ограничена кривой $y = f(x) \geq 0$ , прямыми $x = a$ , $x = b$ и $y = 0$ ( $a < b$ ). Вывести формулу для вычисления с помощью определенного интеграла площади этой фигуры

Пусть функция  $y = f(x)$  непрерывна на  $[a; b]$  и  $\forall x \in [a; b]: f(x) \geq 0$ . Из геометрического смысла определённого интеграла:

$$\boxed{S = \int_a^b f(x) dx} \quad (1)$$

**Этапы вывода формулы:**

1. Разбиваем  $[a; b]$  точками  $a = x_0 < x_1 < \dots < x_i < \dots < x_n = b$
2.  $[x_{i-1}; x_i]$ ,  $i = \overline{1, n}$  — отрезки разбиения  
 $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$  — длины отрезков разбиения
3.  $\forall \xi_i \in [x_{i-1}; x_i]$ ,  $i = \overline{1, n}$   $f(\xi_i)$   
Криволинейную трапецию с основанием  $\Delta x_i$  заменяем прямоугольником длины  $f(\xi_i)$ .  
Криволинейная трапеция с основанием  $[a; b]$  заменяется на ступенчатую фигуру.
4.  $\lambda = \max_i \Delta x_i$   
 $\sum_{i=1}^n f(\xi_i) \cdot \Delta x_i$  — интегральная сумма
5.  $\lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(\xi_i) \cdot \Delta x_i = \boxed{\int_a^b f(x) dx = S}$



**9 Фигура ограничена лучами  $\varphi = \alpha$ ,  $\varphi = \beta$  и кривой  $r = f(\varphi)$ . Здесь  $r$  и  $\varphi$  — полярные координаты точки,  $0 \leq \alpha < \beta \leq 2\pi$ , где  $r$  и  $\varphi$  — полярные координаты точки. Вывести формулу для вычисления с помощью определенного интеграла площади этой фигуры**

**Определение 5.** Криволинейный сектор — это фигура, ограниченная лучами  $\varphi = \alpha$ ,  $\varphi = \beta$  и графиком непрерывной кривой  $r = r(\varphi)$ ,  $\varphi \in [\alpha; \beta]$

**Этапы вывода формулы:**

1. Разбиваем сектор  $A_0OA_n$  лучами  $\alpha = \varphi_0 < \varphi_1 < \dots < \varphi_n = \beta$  на углы  $\angle A_0OA_1, \angle A_1OA_2, \dots, \angle A_{n-1}OA_n$   
 $\Delta\varphi_i = \varphi_i - \varphi_{i-1}$  — величина  $\angle A_{i-1}OA_i$  в радианах  
 $\lambda = \max_i \Delta\varphi_i, i = \overline{1, n}$
2.  $\forall$  выберем и проведём  $\Psi_i, \Psi_i \in \angle A_{i-1}OA_i$   
Находим  $r = r(\Psi_i)$   
 $M_i(\Psi_i, r(\Psi_i)), M_i \in \angle A_{i-1}OA_i, M_i \in r = r(\varphi)$
3. Заменяем каждый  $i$ -ый криволинейный сектор на круговой сектор  $R = r(\Psi_i), i = \overline{1, n}$   
 $S_i = \frac{1}{2}R^2 \cdot \Delta\varphi_i$  — площадь  $i$ -го кругового сектора  
 $R = r(\Psi_i)$   

$$\sum_{i=1}^n S_i = \sum_{i=1}^n \frac{1}{2}r^2(\Psi_i) \cdot \Delta\varphi_i = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n r^2(\Psi_i) \cdot \Delta\varphi_i$$
4. Вычисляем предел

$$\lim_{\lambda \rightarrow 0} \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n r^2(\Psi_i) \cdot \Delta\varphi_i = \boxed{\frac{1}{2} \int_{\alpha}^{\beta} r^2 d\varphi = S} \quad (2)$$

# **10 Тело образовано вращением вокруг оси $Ox$ криволинейной трапеции, ограниченной кривой $y = f(x) \geq 0$ , прямыми $x = a$ , $x = b$ и $y = 0$ ( $a < b$ ). Вывести формулу для вычисления с помощью определенного интеграла объема тела вращения**

Пусть  $T$  — тело,  $S$  — площадь сечения тела плоскостью перпендикулярной  $Ox$  или площадь поперечного сечения.

$S = S(x)$  — непрерывная функция на  $[a; b]$

1. Разбиваем отрезок  $[a; b]$  точками  $a = x_0 < x_1 < \dots < x_{i-1} < x_i < \dots < x_n = b$

Отрезки разбиения  $[x_{i-1}; x_i]$

$\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$  — длина отрезка разбиения

$a = \max_i \Delta x_i, \quad i = \overline{1, n}$

2. Проводим плоскости

$$\left\{ \begin{array}{l} x = x_0 = a \\ \dots\dots\dots \\ x = x_{i-1} \\ x = x_i \\ \dots\dots\dots \\ x = x_n = b \end{array} \right. \quad \text{— эти плоскости разбивают тело } T \text{ на слои}$$

3.  $\forall \xi_i \in [x_{i-1}; x_i], \quad i = \overline{1, n}$

Проводим плоскость  $x = \xi_i$ . Находим  $S(\xi_i)$ .

Каждый слой заменяем цилиндром с основанием  $S(\xi_i)$  и высотой  $\Delta x_i, \quad i = \overline{1, n}$

4.  $V_{\Pi} = S(\xi_i) \cdot \Delta x_i$  — объём  $i$ -го цилиндра

$\sum_{i=1}^n S(\xi_i) \cdot \Delta x_i$  — интегральная сумма

5. Вычисляем предел

$$\lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n S(\xi_i) \cdot \Delta x_i = \boxed{\int_a^b S(x) dx = V_T} \quad (3)$$

Рассмотрим криволинейную трапецию, ограниченную графиком непрерывной функции  $y = f(x)$ ,  $x = a$ ,  $x = b$  и осью  $Ox$ . Пусть  $\forall x \in [a; b]: f(x) \geq 0$

Поперечное сечение — круг

$S_{\text{круга}} = \pi R^2 = (\pi y^2)$

$$\boxed{V_{Ox} = \pi \int_a^b y^2 dx} \quad (4)$$

Пусть криволинейная трапеция ограничена графиками непрерывных функций  $y_1 = f_1(x)$  и  $y_2 = f_2(x)$ , прямыми  $x = a$ ,  $x = b$

$$V_{Ox} = V_{Ox}^1 - V_{Ox}^2 = \pi \int_a^b y_1^2 dx - \pi \int_a^b y_2^2 dx = \boxed{\pi \int_a^b (y_1^2 - y_2^2) dx = V_{Ox}} \quad (5)$$

# 11 Кривая задана в декартовых координатах уравнением $y = f(x)$ , где $x$ и $y$ — декартовы координаты точки, $a \leq x \leq b$ . Вывести формулу для вычисления длины дуги этой кривой

Пусть  $y = f(x)$  непрерывна на  $[a; b]$ .

$M_0(x_0, y_0)$  —  $M(x, y)$

$\Delta x$  — приращение  $x$      $\Delta y$  — приращение  $y$

$x \rightarrow x + \Delta x$      $M(x, y) \rightarrow M_1(x + \Delta x, y + \Delta y)$   
 $y \rightarrow y + \Delta y$

$l_0$  —  $\widehat{M_0 M}$  — дуга кривой     $\Delta l$  — приращение дуги кривой     $\Delta l = \widehat{M M_1}$

Найдём  $l'_x$  — ?

$$l'_x = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta l}{\Delta x}$$

$\triangle M M_1 A$      $MA = \Delta x$      $AM_1 = \Delta y$

$$\begin{aligned} M M_1^2 &= \Delta x^2 + \Delta y^2 \quad | \cdot \Delta l^2 | : \Delta l^2 \\ \left( \frac{M M_1}{\Delta l} \right)^2 \cdot (\Delta l)^2 &= \Delta x^2 + \Delta y^2 \quad | : \Delta x^2 \\ \left( \frac{M M_1}{\Delta l} \right)^2 \cdot \left( \frac{\Delta l}{\Delta x} \right)^2 &= 1 + \left( \frac{\Delta y}{\Delta x} \right)^2 \end{aligned}$$

Вычислим предел при  $\Delta x \rightarrow 0$ .

Левая часть:

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left( \frac{M M_1}{\Delta l} \right)^2 \cdot \left( \frac{\Delta l}{\Delta x} \right)^2 = \left| \begin{array}{l} \text{при } \Delta x \rightarrow 0 \quad M \rightarrow M_1 \\ \Delta l \rightarrow M M_1 \quad \text{дуга} \rightarrow \text{хорда} \end{array} \right| = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} 1^2 \cdot \left( \frac{\Delta l}{\Delta x} \right)^2 = (l'_x)^2$$

Правая часть:

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left( 1 + \left( \frac{\Delta y}{\Delta x} \right)^2 \right) = 1 + \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left( \frac{\Delta y}{\Delta x} \right)^2 = 1 + (y'_x)^2$$

Получаем:

$$\begin{aligned} (l'_x)^2 &= 1 + (y'_x)^2 \\ l'_x &= \sqrt{1 + (y'_x)^2} \quad | \cdot dx \\ l'_x dx &= \sqrt{1 + (y'_x)^2} dx \\ dl &= \sqrt{1 + (y'_x)^2} dx \end{aligned} \tag{v}$$

$$\boxed{l = \int_a^b \sqrt{1 + (y'_x)^2} dx} \tag{6}$$

**12 Кривая задана в полярных координатах уравнением  $r = f(\varphi) \geq 0$ , где  $r$  и  $\varphi$  — полярные координаты точки,  $\alpha \leq \varphi \leq \beta$ . Вывести формулу для вычисления длины дуги этой кривой**

$$(\vee) = dl = \sqrt{1 + (y'_x)^2} dx = \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} dx = \sqrt{\frac{(dx)^2 + (dy)^2}{(dx)^2}} dx = \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2} = dl$$

(VV)

Пусть  $r = r(\varphi)$  — непрерывная на  $[\alpha; \beta]$  функция.

$$\begin{aligned} (VV) = dl &= \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2} \Leftrightarrow \\ x &= r \cos \varphi \quad y = r \sin \varphi \\ dx &= (r \cos \varphi)'_{\varphi} d\varphi = (r' \cos \varphi - r \sin \varphi) d\varphi \\ dy &= (r \sin \varphi)'_{\varphi} d\varphi = (r' \sin \varphi + r \cos \varphi) d\varphi \\ (dx)^2 + (dy)^2 &= [(r' \cos \varphi - r \sin \varphi)^2 + (r' \sin \varphi + r \cos \varphi)^2] (d\varphi)^2 = \\ &= \left[ (r')^2 \cos^2 \varphi - \cancel{2r'r \cos \varphi \sin \varphi} + r^2 \sin^2 \varphi + \right. \\ &\quad \left. + (r')^2 \sin^2 \varphi + \cancel{2r'r \cos \varphi \sin \varphi} + r^2 \cos^2 \varphi \right] (d\varphi)^2 = \\ &= [(r')^2 (\cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi) + r^2 (\cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi)] (d\varphi)^2 = [(r')^2 + r^2] (d\varphi)^2 \\ &\Leftrightarrow \sqrt{(r')^2 + r^2} d\varphi = dl \end{aligned}$$

$$\boxed{l = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{(r')^2 + r^2} d\varphi} \quad (7)$$

## 13 Линейные дифференциальные уравнения первого порядка. Интегрирование линейных неоднородных дифференциальных уравнений первого порядка методом Бернулли (метод « $u \cdot v$ ») и методом Лагранжа (вариации произвольной постоянной)

### Линейные ДУ 1-го порядка

**Определение 6.** Дифференциальным уравнением 1-го порядка называется уравнение, которое зависит от одной независимой переменной  $x$ , неизвестной функции  $y(x)$  и её производной:

$$F(x, y(x), y'(x))$$

$F$  — известная функция 3-х переменных

**Определение 7.** ДУ 1-го порядка называется **линейным**, если неизвестная функция  $y(x)$  и её производная  $y'$  входят в уравнение в первой степени, не перемножаясь между собой.

$$y' + p(x) \cdot y = f(x)$$

$p(x), f(x)$  — непрерывны на  $I \subset \mathbb{R}$

### Метод Бернулли (метод подстановки)

Рассмотрим ЛНДУ:

$$y' + p(x) \cdot y = f(x)$$

$p(x), f(x)$  — непрерывные функции  $I \subset \mathbb{R}$ .

Метод подстановки:  $y(x) = u(x) \cdot v(x)$

Подставим  $y(x) = u(x) \cdot v(x)$  в ЛНДУ:

$$u'(x) \cdot v(x) + u(x) \cdot v'(x) + p(x) \cdot u(x) \cdot v(x) = f(x)$$

$$v(x) \left( u'(x) + p(x) \cdot u(x) \right) + u(x) \cdot v'(x) = f(x)$$

$$v(x) \underbrace{\left( u'(x) + p(x) \cdot u(x) \right)}_0 = f(x) - u(x) \cdot v'(x)$$

Так как одну неизвестную переменную  $y(x)$  заменили на две функции  $u(x)$  и  $v(x)$ , то одну из этих двух функций можно выбрать так, как удобно. Произвольная постоянная будет учтена при нахождении второй неизвестной функции.

$u'(x) + p(x) \cdot u(x) = 0$  — ДУ с разделяющимися переменными

$$u' = -p(x) \cdot u$$

$$\frac{du}{dx} = -p(x) \cdot u \quad \Bigg| \cdot dx \Bigg| : u \neq 0$$

$$\frac{du}{u} = -p(x) dx$$

Интегрируем:

$$\begin{aligned}\int \frac{du}{u} &= - \int p(x) dx \\ \ln |u| &= - \int p(x) dx + C, \quad \forall C - const \\ e^{\ln |u|} &= e^{-\int p(x) dx + C}, \quad \forall C - const \\ |u| &= C_1 \cdot e^{-\int p(x) dx}, \quad \forall C_1 = e^C > 0 \\ u &= C_2 \cdot e^{-\int p(x) dx}, \quad C_2 \neq \pm C_1 \quad C_2 \neq 0\end{aligned}$$

$C_2 = 1$  для удобства вычислений

$$u = e^{-\int p(x) dx}$$

$C_2 \neq 0$ , так как  $u(x) = 0$ ,  $y(x) = 0$ , а  $y(x) = 0$  не является решением ЛНДУ.

Конкретизировать данное решение можно, так имеется произвольный выбор по одной из переменных. Произвольная постоянная будет учтена при нахождении второй неизвестной функции.

$$v(x) \left( \underbrace{u'(x) + p(x) \cdot u(x)}_0 \right) = f(x) - u(x) \cdot v'(x)$$

$$\boxed{f(x) - u(x)v'(x) = 0} \quad u(x) = e^{-\int p(x) dx}$$

$f(x) - v' \cdot e^{-\int p(x) dx} = 0$  — ДУ с разделяющимися переменными

$$\begin{aligned}v' \cdot e^{-\int p(x) dx} &= f(x) \\ v' &= f(x) \cdot e^{\int p(x) dx} \\ \frac{dv}{dx} &= f(x) \cdot e^{\int p(x) dx} \\ dv &= f(x) \cdot e^{\int p(x) dx} dx\end{aligned}$$

Интегрируем:

$$\begin{aligned}\int dv &= \int f(x) \cdot e^{\int p(x) dx} dx \\ v &= \int f(x) \cdot e^{\int p(x) dx} dx + k, \quad \forall k - const\end{aligned}$$

Подставим  $u(x)$  и  $v(x)$  в подстановку  $y(x) = u(x) \cdot v(x)$ :

$$y(x) = e^{-\int p(x) dx} \left( \int f(x) \cdot e^{\int p(x) dx} dx + k \right), \quad \forall k - const$$

Общее решение ЛНДУ:

$$y_{\text{он}}(x) = e^{-\int p(x) dx} \left( \int f(x) \cdot e^{\int p(x) dx} dx + k \right), \quad \forall k - const$$

## Метод Лагранжа (метод вариации произвольной постоянной)

Рассмотрим ЛНДУ 1-го порядка:

$$y' + p(x) \cdot y = f(x) \text{ — ЛНДУ}$$

$p(x), f(x)$  — непрерывны на  $I \subset \mathbb{R}$

1 этап Решение соответствующего ЛОДУ

$$y' + p(x) \cdot y = 0 \text{ — ЛОДУ}$$

$$y' = -p(x) \cdot y \text{ — ДУ с разделяющимися переменными}$$

$$\frac{dy}{dx} = -p(x) \cdot y \quad \left| \cdot dx \right| \quad : y \neq 0$$

$$\frac{dy}{y} = -p(x) dx$$

Интегрируем:

$$\int \frac{dy}{y} = - \int p(x) dx$$

$$\ln |y| = - \int p(x) dx + C, \quad \forall C \text{ — const}$$

$$e^{\ln |y|} = e^{- \int p(x) dx + C}, \quad \forall C \text{ — const}$$

$$e^{\ln |y|} = e^{- \int p(x) dx} \cdot e^C, \quad \forall C \text{ — const}$$

$$|y| = C_1 \cdot e^{- \int p(x) dx}, \quad \forall C_1 = e^C > 0$$

$$y = C_2 \cdot e^{- \int p(x) dx}, \quad C_2 = \pm C_1, \quad C_2 \neq 0$$

Особые решения:  $y = 0$

$$(0)' + p(x) \cdot 0 = 0$$

$$0 = 0$$

$y = 0$  — особое решение

$$\begin{cases} y = C_2 \cdot e^{- \int p(x) dx} \\ y = 0 \end{cases} \quad C_2 \neq 0$$

$$y = k \cdot e^{- \int p(x) dx}, \quad \forall k \text{ — const}$$

Общее решение ЛОДУ:

$$y_{\text{оо}} = k \cdot e^{- \int p(x) dx}, \quad \forall k \text{ — const}$$

2 этап Предполагаемый вид решения ЛНДУ

$$y_{\text{оН}} = k(x) \cdot e^{- \int p(x) dx}$$

Представим предполагаемый вид решения ЛНДУ  $y_{\text{оН}}$  в ЛНДУ:

$$\left( k(x) \cdot e^{- \int p(x) dx} \right)' + p(x) \cdot k(x) \cdot e^{- \int p(x) dx} = f(x)$$

$$k'(x) \cdot e^{- \int p(x) dx} + \cancel{k(x) \cdot e^{- \int p(x) dx} \cdot (-p(x))} + \cancel{p(x) \cdot k(x) \cdot e^{- \int p(x) dx}} = f(x)$$

$$k'(x) \cdot e^{- \int p(x) dx} = f(x) \text{ — ДУ с разд. перем.}$$

$$k'(x) = f(x) \cdot e^{\int p(x) dx}$$

$$\frac{dk}{dx} = f(x) \cdot e^{\int p(x) dx}$$

$$dk = f(x) \cdot e^{\int p(x) dx} dx$$

Интегрируем:

$$k(x) = \int f(x) \cdot e^{\int p(x) dx} dx + k, \quad k - const$$

Подставляем  $k(x)$  в предполагаемое решение ЛНДУ:

$$y_{\text{он}} = k(x) \cdot e^{-\int p(x) dx} = e^{-\int p(x) dx} \left( \int f(x) e^{\int p(x) dx} dx + k \right), \quad \forall k - const$$

## 14 Сформулировать теорему Коши о существовании и единственности решения дифференциального уравнения $n$ -го порядка. Интегрирование дифференциальных уравнений $n$ -го порядка, допускающих понижение порядка

**Определение 8.** ДУ  $n$ -го порядка называется уравнение вида:

$$F(x, y, y', \dots, y^{(n)}) = 0 \quad (1)$$

$F$  — известная функция от  $n + 2$  переменных

**Определение 9.** ДУ  $n$ -го порядка, разрешённым относительно старшей производной, называется уравнение вида:

$$y^{(n)} = f(x, y, y', \dots, y^{(n-1)}) \quad (2)$$

**Определение 10.** Задача Коши для ДУ  $n$ -го порядка заключается в отыскании решения ДУ (2), удовлетворяющего начальному условию:

$$\begin{cases} y(x_0) = y_0 \\ y'(x_0) = y_{10} \\ y''(x_0) = y_{20} \\ \dots\dots\dots \\ y^{(n-1)}(x_0) = y_{n-10} \end{cases} \quad (3)$$

Задача Коши = ДУ (2) + начальное условие (3)

**Теорема 24** (О существовании и единственности решения ЗК для ДУ  $n$ -го порядка). Если функция  $f(x, y, y', \dots, y^{(n-1)})$  и её частные производные по переменным  $y, y', \dots, y^{(n-1)}$ , то есть функции  $f'_y(x, y, y', \dots, y^{(n-1)})$ ,  $f'_{y'}(x, y, y', \dots, y^{(n-1)})$ ,  $\dots$ ,  $f'_{y^{(n-1)}}(x, y, y', \dots, y^{(n-1)})$ , непрерывны в некоторой области  $D \subset \mathbb{R}^{n+1}$ , содержащей точку  $M_0(x_0, y_0, y_{10}, y_{20}, \dots, y_{n-10})$ , то существует и при том единственное решение ЗК (2), (3).



## ДУ, допускающие понижение порядка

### 1 тип

Уравнения вида

$$y^{(n)} = f(x)$$

Метод решения: n-кратное интегрирование

**Пример.**

$$y'' = \sin x$$

$$y' = \int \sin dx = -\cos x + C_1, \quad \forall C_1 - const$$

$$y = -\int \cos dx + C_1 \int dx + C_2, \quad \forall C_2 - const$$

$$y = -\sin x + C_1 x + C_2, \quad \forall C_1, C_2 - const$$

### 2 тип

Уравнения, которые не содержат переменную  $x$ , то есть

$$F(y, y', \dots, y^{(n)}) = 0$$

Замена:

$$y' = p(y)$$

$$y'' = p' \cdot y' = p' \cdot p$$

.....

Для ДУ 2-го порядка:  $F(y, p, p' \cdot p) = 0$

Замена:

$$\begin{cases} y' = p(y) \\ y'' = p' \cdot p \end{cases} \quad (*)$$

$\Downarrow$

$$F(y, p, p' \cdot p) = 0$$

Замена (\*) позволяет понизить порядок ДУ на единицу.

**1 шаг** Решаем ДУ  $F(y, p, p' \cdot p) = 0$ . Интегрируем. Находим функцию  $P = \Psi(y, C_1)$ ,  $C_1 - const$ .

**2 шаг** Обратная замена  $p = y'$

**3 шаг**  $y' = \Psi(y, C_1), \forall C_1 - const$

Решаем ДУ 1-го порядка. Интегрируем:

$$y = \varphi(x, C_1, C_2)$$

### 3 тип

Уравнения, в которых в явном виде отсутствует  $y$ , то есть

$$\boxed{F(x, y', y'', \dots, y^{(n)}) = 0}$$

Замена:

$$\begin{cases} y' = p(x) \\ y'' = p' \end{cases} \quad (*)$$

С помощью  $(*)$  понижаем порядок ДУ на единицу.

Для ДУ 2-го порядка:

$$F(x, y', y'') = 0$$

Замена:

$$\begin{cases} y' = p(x) \\ y'' = p' \end{cases} \quad (*)$$
$$F(x, p, p') = 0$$

1 шаг Решаем ДУ 1-го порядка  $F(x, p, p') = 0$ . Интегрируем. Находим функцию  $P = \Psi(x, C_1)$ ,  $\forall C_1 - const$

2 шаг Обратная замена  $p = y'$

3 шаг  $y' = \Psi(x, C_1)$  — ДУ 1-го порядка. Решаем ДУ 1-го порядка. Интегрируем. Находим  $y = \varphi(x, C_1, C_2)$ ,  $\forall C_1, C_2 - const$

# 15 Сформулировать теорему Коши о существовании и единственности решения линейного дифференциального уравнения n-го порядка. Доказать свойства частных решений линейного однородного дифференциального уравнения n-го порядка

## Линейные ДУ высшего порядка

**Определение 11.** ДУ n-го порядка называется **линейным**, если неизвестная функция  $y(x)$  и её производные до n-го порядка включительно входят в уравнение в первой степени, не перемножаясь между собой.

$$y^{(n)} + p_1(x)y^{(n-1)} + p_2(x)y^{(n-2)} + \dots + p_{n-1}(x)y' + p_n(x)y = f(x) \quad (1)$$

$p_1(x), \dots, p_n(x)$  — функции, заданные на некотором промежутке  $I$ .

$p_1(x), \dots, p_n(x)$  — коэффициенты

$f(x)$  — функция, определена на промежутке  $I$

$f(x)$  — свободный член

### Определение 12.

Если  $f(x) = 0, \forall x \in I$ , то ДУ (1) называется **линейным однородным ДУ** (ЛОДУ).

$$y^{(n)} + p_1(x)y^{(n-1)} + p_2(x)y^{(n-2)} + \dots + p_{n-1}(x)y' + p_n(x)y = f(x) \quad (1)$$

(1) ЛНДУ n-го порядка

Если  $f(x) \neq 0$  хотя бы для одного  $x \in I$ , то ДУ (1) называется **линейным неоднородным ДУ** n-го порядка (ЛНДУ).

$$y^{(n)} + p_1(x)y^{(n-1)} + p_2(x)y^{(n-2)} + \dots + p_{n-1}(x)y' + p_n(x)y = 0 \quad (2)$$

(2) ЛОДУ n-го порядка

**Определение 13. Задача Коши** для линейного дифференциального уравнения n-го порядка заключается в отыскании решения ДУ (1), удовлетворяющего начальному условию:

$$\begin{cases} y(x_0) = y_0 \\ y'(x_0) = y_{10} \\ y''(x_0) = y_{20} \\ \dots\dots\dots \\ y^{(n-1)}(x_0) = y_{n-10} \end{cases} \quad (3)$$

$$\text{Задача Коши} = \text{ДУ (1)} + \text{начальное условие (3)} \quad (4)$$

**Теорема 25** (О существовании и единственности решения ЗК (1), (3)).

Если в ЛНДУ (1) функции  $p_1(x), \dots, p_n(x), f(x)$  непрерывны на некотором промежутке  $I$ , то задача Коши для ЛНДУ (1) имеет единственное решение удовлетворяющее начальному условию (3).

## Свойства частных решений ЛОДУ n-го порядка

**Теорема 26.**

Множество частных решений ЛОДУ n-го порядка (2) с непрерывными функциями  $p_1(x), \dots, p_n(x)$  на промежутке  $I$  образует линейное пространство.

**Доказательство.**

Пусть  $y_1$  и  $y_2$  — частные решения ЛОДУ n-го порядка (2). Тогда:

$$\begin{aligned} & y_1^{(n)} + p_1(x)y_1^{(n-1)} + \dots + p_{n-1}(x)y_1' + p_n(x)y_1 = 0 \\ + & y_2^{(n)} + p_1(x)y_2^{(n-1)} + \dots + p_{n-1}(x)y_2' + p_n(x)y_2 = 0 \end{aligned}$$

Складываем уравнения:

$$(y_1^{(n)} + y_2^{(n)}) + p_1(x)(y_1^{(n-1)} + y_2^{(n-1)}) + \dots + p_{n-1}(x)(y_1' + y_2') + p_n(x)(y_1 + y_2) = 0$$

По свойству производной:

$$(y_1 + y_2)^{(n)} + p_1(x)(y_1 + y_2)^{(n-1)} + \dots + p_{n-1}(x)(y_1 + y_2)' + p_n(x)(y_1 + y_2) = 0$$

Обозначим  $y = y_1 + y_2$ :

$$y^{(n)} + p_1(x)y^{(n-1)} + p_2(x)y^{(n-2)} + \dots + p_{n-1}(x)y' + p_n(x)y = 0$$

$y = y_1 + y_2$  — частное решение ЛОДУ (2).

Пусть  $y_1$  — частное решение ЛОДУ n-го порядка (2) Тогда:

$$y_1^{(n)} + p_1(x)y_1^{(n-1)} + p_2(x)y_1^{(n-2)} + \dots + p_{n-1}(x)y_1' + p_n(x)y_1 = 0 \quad \Big| \cdot C = const, C \neq 0$$

$$C \cdot y_1^{(n)} + C \cdot p_1(x)y_1^{(n-1)} + \dots + C \cdot p_{n-1}(x)y_1' + C \cdot p_n(x)y_1 = 0$$

$$(Cy_1)^{(n)} + p_1(x)(Cy_1)^{(n-1)} + \dots + p_{n-1}(x)(Cy_1)' + p_n(x)(Cy_1) = 0$$

Обозначим  $y = Cy_1$ ,  $C = const, C \neq 0$ :

$$y^{(n)} + p_1(x)y^{(n-1)} + \dots + p_{n-1}(x)y' + p_n(x)y = 0$$

$\Downarrow$

$$y = C \cdot y_1, \text{ где } C = const, C \neq 0 \quad \text{— решение ЛОДУ (2)}$$

По определению линейного пространства  $\Rightarrow$  частные решения ЛОДУ n-го порядка образуют линейное пространство. ■



16 Сформулировать определения линейно зависимой и линейно независимой систем функций

**Определение 14.** Система функций  $y_1(x), \dots, y_n(x)$  называется **линейно зависимой** на некотором промежутке  $I$ , если их линейная комбинация равна нулю, то есть

$$C_1 y_1(x) + \dots + C_n y_n(x) = 0$$

при этом существует хотя бы один  $C_i \neq 0$ ,  $i = \overline{1, n}$ ,  $C_1, \dots, C_n - const$

**Определение 15.** Система функций  $y_1(x), \dots, y_n(x)$  называется **линейно независимой** на некотором промежутке  $I$ , если их линейная комбинация равна нулю, то есть

$$C_1 y_1(x) + \dots + C_n y_n(x) = 0$$

где все  $C_i = 0$ ,  $i = \overline{1, n}$

### 16.1 Сформулировать и доказать теорему о вронскиане линейно зависимых функций

**Теорема 28** (*О вронскиане линейно зависимых функций*).

Если  $(n - 1)$  раз дифференцируемые функции  $y_1(x), \dots, y_n(x)$  линейно зависимы на некотором промежутке  $I$ , то

$$W(x) = 0, \quad \forall x \in I$$

**Доказательство.**

Так как  $y_1(x), \dots, y_n(x)$  линейно зависимы на  $I$ , то

$$\boxed{C_1 y_1(x), \dots, C_n y_n(x) = 0} \quad \exists C_i \neq 0, \quad i = \overline{1, n} \quad (*)$$

Продифференцируем (\*)  $(n - 1)$  раз:

$$\boxed{C_1 y_1'(x), \dots, C_n y_n'(x) = 0} \quad \exists C_i \neq 0, \quad i = \overline{1, n} \quad (**)$$

По определению линейной зависимости (**опр.14**)  $\Rightarrow y_1'(x), \dots, y_n'(x)$  — линейно зависимы

$$\boxed{C_1 y_1^{(n-1)}(x), \dots, C_n y_n^{(n-1)}(x) = 0} \quad \exists C_i \neq 0, \quad i = \overline{1, n} \quad (**)$$

По определению линейной зависимости  $\Rightarrow y_1^{(n-1)}(x), \dots, y_n^{(n-1)}(x)$  — линейно независимы. Составим систему из (\*), (\*\*) и (\*\*\*):

$$\left\{ \begin{array}{l} C_1 y_1(x), \dots, C_n y_n(x) = 0 \\ C_1 y'_1(x), \dots, C_n y'_n(x) = 0 \\ \dots\dots\dots \\ C_1 y_1^{(n-1)}(x), \dots, C_n y_n^{(n-1)}(x) = 0 \end{array} \right.$$

Определитель этой СЛАУ:

$$\begin{vmatrix} y_1(x) & \cdots & y_n(x) \\ y_1'(x) & \cdots & y_n'(x) \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ y_1^{(n-1)}(x) & \cdots & y_n^{(n-1)}(x) \end{vmatrix} = W(x) \text{ — это определитель Вронского}$$



Если существует хотя бы одна точка  $x_0 \in I$ ,  $W(x_0) \neq 0$ , то система функций  $y_1(x), \dots, y_n(x)$  линейно независима.

**16.2** Сформулировать и доказать теорему о вронскиане системы линейно независимых частных решений линейного однородного дифференциального уравнения  $n$ -го порядка

Если функции  $y_1(x), \dots, y_n(x)$  линейно независимы на некотором промежутке  $I$  и являются частными решениями ЛОДУ  $n$ -го порядка

$$y^{(n)} + p_1(x)y^{(n-1)} + \dots + p_{n-1}(x)y' + p_n(x)y = 0$$

с непрерывными на промежутке  $I$  коэффициентами  $p_1(x), \dots, p_n(x)$ , то  $W(x) \neq 0$ ,  $\forall x \in I$

Предположим, что  $\exists x_0 \in I: W(x_0) \neq 0$

$$W(x_0) = \begin{vmatrix} y_1(x_0) & y_2(x_0) & \cdots & y_n(x_0) \\ y_1'(x_0) & y_2'(x_0) & \cdots & y_n'(x_0) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ y_1^{(n-1)}(x_0) & y_2^{(n-1)}(x_0) & \cdots & y_n^{(n-1)}(x_0) \end{vmatrix} = 0$$

Построим СЛАУ по определителю

[illegible]

Рассмотрим функцию

$$y = C_1 y_1 + \dots + C_n y_n$$

Так как  $y_1, \dots, y_n$  — частные решения ЛОДУ  $n$ -го порядка, то по **T.27**:

$y = C_1 y_1 + \dots + C_n y_n$  – решение ЛОДУ  $n$ -го порядка

Найдём  $y(x_0)$ :

$$y(x_0) = C_1 y_1(x_0) + \dots + C_n y_n(x_0) = 0$$

Дифференцируем  $(n-1)$  раз функцию  $y = C_1 y_1 + \dots + C_n y_n$ :

$$y'(x_0) = C_1 y_1'(x_0) + \dots + C_n y_n'(x_0) = 0$$

$$y''(x_0) = C_1 y_1''(x_0) + \dots + C_n y_n''(x_0) = 0$$

.....

$$y^{(n-1)}(x_0) = C_1 y_1^{(n-1)}(x_0) + \dots + C_n y_n^{(n-1)}(x_0) = 0$$

Получили, что  $y = C_1 y_1 + \dots + C_n y_n$  — решение ЛОДУ  $n$ -го порядка (2), удовлетворяющее начальному условию:

$$\begin{cases} y(x_0) = 0 \\ y'(x_0) = 0 \\ \dots\dots\dots \\ y^{(n-1)}(x_0) = 0 \end{cases}$$

Но  $y = 0$  — решение ЛОДУ (2), удовлетворяющее начальному условию (3)

По теореме  $\exists!$  решения задачи Коши для линейного дифференциального уравнения  $n$ -го порядка (Т.35)  $\Rightarrow$

$$y = C_1 y_1 + \dots + C_n y_n = 0$$

при этом  $C_1, \dots, C_n$  — ненулевые константы  $\Rightarrow y_1, \dots, y_n$  — линейно зависимы по определению линейной зависимости (опр.14). Это противоречит условию  $\Rightarrow$  предположение не является верным  $\forall x \in I: W(x) \neq 0$  ■

## 17 Сформулировать и доказать теорему о существовании фундаментальной системы решений линейного однородного дифференциального уравнения $n$ -го порядка

Пусть дано ЛОДУ  $n$ -го порядка

$$y^{(n)} + p_1(x)y^{(n-1)} + \dots + p_{n-1}(x)y' + p_n(x)y = 0 \quad (1)$$

**Определение 16.** Фундаментальной системой решений ЛОДУ  $n$ -го порядка (1) называется любая система линейно независимых частных решений ЛОДУ  $n$ -го порядка.

### Утверждение 2.

Если имеем ФСР на промежутке, то  $W(x) \neq 0$  на этом промежутке.

$$\text{ФСР} \rightarrow \text{лин. нез.} \rightarrow W(x) \neq 0$$



**Теорема 30** (О существовании ФСР ЛОДУ  $n$ -го порядка).

Любое ЛОДУ  $n$ -го порядка (1) с непрерывными на промежутке  $I$  коэффициентами  $p_1(x), \dots, p_n(x)$  имеет ФСР, то есть системы из  $n$  линейно независимых функций.

**Доказательство.**

Рассмотрим ЛОДУ  $n$ -го порядка

$$y^{(n)} + p_1(x)y^{(n-1)} + \dots + p_{n-1}(x)y' + p_n(x)y = 0$$

$p_1(x), \dots, p_n(x)$  — непрерывны на  $I$ .

Рассмотрим произвольный числовой определитель, отличный от нуля:

$$\begin{vmatrix} \gamma_{11} & \gamma_{12} & \cdots & \gamma_{1n} \\ \gamma_{21} & \gamma_{22} & \cdots & \gamma_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \gamma_{n1} & \gamma_{n2} & \cdots & \gamma_{nn} \end{vmatrix} \neq 0 \quad \gamma_{ij} \in \mathbb{R}, \quad (ij) = \overline{1, n}$$

Возьмём  $\forall x_0 \in I$  и сформулируем для ЛОДУ  $n$ -го порядка задачи Коши, причём начальное условие в точке  $x_0$  для  $i$ -ой ЗК возьмём из  $i$ -го столбца определителя.

**1 ЗК:**

$$\begin{cases} y^{(n)} + p_1(x)y^{(n-1)} + \dots + p_{n-1}(x)y' + p_n(x)y = 0 - \text{ДУ} \\ \begin{cases} y(x_0) = \gamma_{11} \\ y'(x_0) = \gamma_{21} \\ \dots \\ y^{(n-1)}(x_0) = \gamma_{n1} \end{cases} - \text{начальное условие} \end{cases}$$

По теореме о существовании и единственности решения (Т.24) 1-ая задача Коши имеет единственное решение  $y_1(x)$ .

.....

**n ЗК:**

$$\begin{cases} y^{(n)} + p_1(x)y^{(n-1)} + \dots + p_{n-1}(x)y' + p_n(x)y = 0 - \text{ДУ} \\ \begin{cases} y(x_0) = \gamma_{1n} \\ y'(x_0) = \gamma_{2n} \\ \dots \\ y^{(n-1)}(x_0) = \gamma_{nn} \end{cases} - \text{начальное условие} \end{cases}$$

По теореме о существовании и единственности решения  $n$ -ая задача Коши имеет единственное решение  $y_n(x)$ .

Рассмотрим функции:

$y_1$  — решение 1-ой ЗК  
 $y_2$  — решение 2-ой ЗК  
 .....  
 $y_n$  — решение  $n$ -ой ЗК

Определитель Вронского функций  $y_1, \dots, y_n$ :

$$\begin{vmatrix} \gamma_1(x_0) & \gamma_2(x_0) & \cdots & \gamma_n(x_0) \\ \gamma'_1(x_0) & \gamma'_2(x_0) & \cdots & \gamma'_n(x_0) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \gamma_1^{(n-1)}(x_0) & \gamma_2^{(n-1)}(x_0) & \cdots & \gamma_n^{(n-1)}(x_0) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \gamma_{11} & \gamma_{12} & \cdots & \gamma_{1n} \\ \gamma_{21} & \gamma_{22} & \cdots & \gamma_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \gamma_{n1} & \gamma_{n2} & \cdots & \gamma_{nn} \end{vmatrix} \neq 0$$

По утверждению 1 (с.38):  $\exists x_0 \in I: W(x_0) \neq 0 \Rightarrow y_1, \dots, y_n$  — линейно независимы  $\Rightarrow y_1, \dots, y_n$  образуют ФСР. ■

## 18 Сформулировать и доказать теорему о структуре общего решения линейного однородного дифференциального уравнения $n$ -го порядка

**Теорема 31** (О структуре общего решения ЛОДУ  $n$ -го порядка).

Общим решением ЛОДУ  $n$ -го порядка

$$y^{(n)} + p_1(x)y^{(n-1)} + \dots + p_{n-1}(x)y' + p_n(x)y = 0 \quad (1)$$

с непрерывными коэффициентами  $p_1(x), \dots, p_n(x)$  на промежутке  $I$  является линейной комбинацией частных решений, входящих в ФСР.

$$y_{\text{оо}} = C_1 y_1 + \dots + C_n y_n \quad (2)$$

«оо» — общее решение однородного уравнения

$$y_1, \dots, y_n \text{ — ФСР ЛОДУ (1), } C_1, \dots, C_n \text{ — const}$$

**Доказательство.**

1) Покажем, что (2) решение ЛОДУ (1), но не общее. Для этого подставим (2) в (1):

$$\begin{aligned} (C_1 y_1 + \dots + C_n y_n)^{(n)} + p_1(x) (C_1 y_1 + \dots + C_n y_n)^{(n-1)} + \\ + \dots + \\ + p_{n-1}(x) (C_1 y_1 + \dots + C_n y_n)' + \\ + p_n(x) (C_1 y_1 + \dots + C_n y_n) = 0 \end{aligned}$$

Вычислим производные:

$$\begin{aligned} C_1 y_1^{(n)} + \dots + C_n y_n^{(n)} + p_1(x) C_1 y_1^{(n-1)} + \dots + p_1(x) C_n y_n^{(n-1)} + \\ + \dots + \\ + p_{n-1}(x) C_1 y_1' + \dots + p_{n-1}(x) C_n y_n' + \\ + p_n(x) C_1 y_1 + \dots + p_n(x) C_n y_n = 0 \end{aligned}$$

Группируем:

$$\begin{aligned}
& \overbrace{C_1 \left( y_1^{(n)} + p_1(x)y_1^{(n-1)} + \dots + p_{n-1}(x)y_1' + p_n(x)y_1 \right)}^0 + \\
& + \dots + \\
& + \overbrace{C_n \left( y_n^{(n)} + p_1(x)y_n^{(n-1)} + \dots + p_{n-1}(x)y_n' + p_n(x)y_n \right)}^0 = 0
\end{aligned}$$

Так как  $y_1, \dots, y_n$  — частные решения ЛОДУ (1), то:

$$\begin{aligned}
C_1 \cdot 0 + \dots + C_n \cdot 0 &= 0 \\
0 &= 0 \Rightarrow (2) \text{ — решение (1)}
\end{aligned}$$

2) Покажем, что (2) — это общее решение (1), то есть из него можно выделить единственное частное решение, удовлетворяющее начальному условию:

$$\begin{cases} y(x_0) = y_0 \\ y'(x_0) = y_{10} \\ y''(x_0) = y_{20} \\ \dots\dots\dots \\ y^{(n-1)}(x_0) = y_{n-10} \end{cases} \quad x_0 \in I \quad (3)$$

Подставим (2) в (3):

$$\begin{cases} y(x_0) = C_1 y_1(x_0) + \dots + C_n y_n(x_0) = y_0 \\ y'(x_0) = C_1 y_1'(x_0) + \dots + C_n y_n'(x_0) = y_{10} \\ y''(x_0) = C_1 y_1''(x_0) + \dots + C_n y_n''(x_0) = y_{20} \\ \dots\dots\dots \\ y^{(n-1)}(x_0) = C_1 y_1^{(n-1)}(x_0) + \dots + C_n y_n^{(n-1)}(x_0) = y_{n-10} \end{cases} \quad \text{— СЛАУ}$$

СЛАУ относительно  $C_1, \dots, C_n$ . Определитель этой системы — это определитель Вронского.

$$W(x_0) = \begin{vmatrix} y_1(x_0) & y_2(x_0) & \dots & y_n(x_0) \\ y_1'(x_0) & y_2'(x_0) & \dots & y_n'(x_0) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ y_1^{(n-1)}(x_0) & y_2^{(n-1)}(x_0) & \dots & y_n^{(n-1)}(x_0) \end{vmatrix}$$

так как  $y_1, \dots, y_n$  ФСР  $\Rightarrow y_1, \dots, y_n$  линейно независимы  $\Rightarrow W(x_0) \neq 0 \Rightarrow$  ранг расширенной матрицы СЛАУ совпадает с рангом основной матрицы  $\Rightarrow$  число неизвестных совпадает с числом уравнений  $\Rightarrow$  СЛАУ имеет единственное решение:

$$C_1^0, \dots, C_n^0$$

В силу теоремы о существовании и единственности решения задачи Коши (с.31, Т.24):

$$y = C_1^0 y_1 + \dots + C_n^0 y_n \text{ — единственное решение ЗК (1), (3)}$$

То есть получилось из (2) выделить частное решение, удовлетворяющее начальному условию (3)  $\Rightarrow$  по определению общего решения (опр.30) (2) — общее решение ЛОДУ (2). ■

## 19 Вывести формулу Остроградского-Лиувилля для линейного дифференциального уравнения 2-го порядка

Рассмотрим ЛОДУ 2-го порядка

$$y'' + p_1(x)y' + p_2(x)y = 0 \quad (1)$$

Пусть  $y_1$  и  $y_2$  — два частных решения ЛОДУ (1). Для  $y_1$  и  $y_2$  верны равенства:

$$\begin{cases} y_1'' + p_1(x)y_1' + p_2(x)y_1 = 0 \\ y_2'' + p_1(x)y_2' + p_2(x)y_2 = 0 \end{cases} \begin{array}{l} \cdot (-y_2) \\ \cdot y_1 \end{array} \quad \ll + \gg$$

$$y_1 y_2'' - y_2 y_1'' + p_1(x)(y_1 y_2' - y_2 y_1') + p_2(x)(y_1 y_2 - y_2 y_1) = 0 \quad (2)$$

Введём обозначение:

$$W(x) = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix} = y_1 y_2' - y_1' y_2$$

$$(W(x))' = (y_1 y_2' - y_2 y_1')' = y_1' y_2' + y_1 y_2'' - y_1'' y_2 - y_1' y_2' = y_1 y_2'' - y_1'' y_2$$

(2) примет вид:

$$W' + p_1(x) \cdot W = 0 \text{ ДУ с разделяющимися переменными}$$

$$W' = -p_1(x) \cdot W$$

$$\frac{dW}{dx} = -p_1(x) \cdot W \quad \left| : W \neq 0 \right| \cdot dx$$

$$\frac{dW}{W} = -p_1(x) dx$$

$$\ln |W| = - \int p_1(x) dx + C, \quad \forall C = \text{const}$$

$$e^{\ln |W|} = e^{- \int p_1(x) dx} \cdot e^C$$

$$|W| = e^{- \int p_1(x) dx} \cdot C_1, \quad \forall C_1 = e^C > 0$$

$$W = C_2 \cdot e^{- \int p_1(x) dx}, \quad \forall C_2 = \pm C_1 \neq 0$$

$W = 0$  — особое решение

$$W = C_3 \cdot e^{- \int p_1(x) dx}, \quad \forall C_3 = \text{const}$$

Формула Остроградского-Лиувилля

**Замечание.** Формула Остроградского-Лиувилля для ЛОДУ  $n$ -го порядка имеет тот же вид, что и для ЛОДУ 2-го порядка, где  $p_1(x)$  — коэффициент при  $(n-1)$ -ой производной при условии, что коэффициент при  $n$ -ой производной равен 1.

## 20 Вывести формулу для общего решения линейного однородного дифференциального уравнения второго порядка при одном известном частном решении

Пусть дано ЛОДУ 2-го порядка

$$y'' + p_1(x)y' + p_2(x)y = 0 \quad (1)$$

$y_1$  — частное решение ЛОДУ (1) дано по условию.

$y_2$  — ? — второе частное решение ЛОДУ (1) линейно независимо с  $y_1$

$$W(x) = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix} = y_1 y_2' - y_2 y_1' \neq 0$$

Рассмотрим:

$$\begin{aligned} \left(\frac{y_2}{y_1}\right)' &= \frac{y_1 y_2' - y_2 y_1'}{y_1^2} = \frac{W(x)}{y_1^2} \stackrel{\text{ф. О-Л}}{=} \frac{1}{y_1^2} \cdot C_3 \cdot e^{-\int p_1(x) dx} \\ \left(\frac{y_2}{y_1}\right)' &= \frac{1}{y_1^2} \cdot C_3 \cdot e^{-\int p_1(x) dx} \end{aligned}$$

Интегрируем:

$$\begin{aligned} \frac{y_2}{y_1} &= C_3 \int \frac{1}{y_1^2} \cdot e^{-\int p_1(x) dx} dx + C_4 \\ y_2 &= y_1 \cdot \left( C_3 \int \frac{1}{y_1^2} \cdot e^{-\int p_1(x) dx} dx + C_4 \right) \end{aligned}$$

$y_2$  — частное решение  $C_4 = 0$   $C_3 = 1$

Главное  $C_3 \neq 0$ , так как иначе  $y_1$  и  $y_2$  линейно зависимы.

$$y_2 = y_1 \int \frac{1}{y_1^2} \cdot e^{-\int p_1(x) dx} dx$$

По теореме о структуре общего решения ЛОДУ (Т.31):

$$\begin{aligned} y_{\text{оо}} &= C_1 y_1 + C_2 y_2 \\ y_{\text{оо}} &= C_1 y_1 + C_2 y_1 \int \frac{1}{y_1^2} \cdot e^{-\int p_1(x) dx} dx \end{aligned}$$

## 21 Сформулировать и доказать теорему о структуре общего решения линейного неоднородного дифференциального уравнения $n$ -го порядка

$$y^{(n)} + p_1(x)y^{(n-1)} + \dots + p_{n-1}(x)y' + p_n(x)y = f(x) \quad \text{ЛНДУ} \quad (1)$$

$p_1(x), \dots, p_n(x), f(x)$  — функции на  $I$

$$y^{(n)} + p_1(x)y^{(n-1)} + \dots + p_{n-1}(x)y' + p_n(x)y = 0 \quad \text{ЛОДУ} \quad (2)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} y(x_0) = y_0 \\ y'(x_0) = y_{10} \\ \dots\dots\dots \\ y^{(n-1)}(x_0) = y_{n-10} \end{array} \right. \quad \text{начальное условие} \quad (3)$$

**Теорема 32** (О структуре общего решения ЛНДУ).

Общее решение ЛНДУ (1) с непрерывными на промежутке  $I$  функциями  $p_1(x), \dots, p_n(x), f(x)$  равно сумме общего решения соответствующего ЛОДУ (2) и некоторого частного решения ЛНДУ (1).

$$y_{\text{он}} = y_{\text{оо}} + y_{\text{чн}} \quad (4)$$

- «оо» — общее решение однородного уравнения
- «чн» — частное решение неоднородного уравнения

**Доказательство.**

Сначала покажем, что (4) решение ЛНДУ (1), но не общее. Подставим (4) в (1):

$$(y_{\text{оо}} + y_{\text{чн}})^{(n)} + p_1(x)(y_{\text{оо}} + y_{\text{чн}})^{(n-1)} + \dots + p_{n-1}(x)(y_{\text{оо}} + y_{\text{чн}})' + p_n(x)(y_{\text{оо}} + y_{\text{чн}}) = f$$

Вычислим производные:

$$y_{\text{оо}}^{(n)} + y_{\text{чн}}^{(n)} + p_1(x)y_{\text{оо}}^{(n-1)} + p_1(x)y_{\text{чн}}^{(n-1)} + \dots + p_{n-1}(x)y_{\text{оо}}' + p_{n-1}(x)y_{\text{чн}}' + p_n(x)y_{\text{оо}} + p_n(x)y_{\text{чн}} = f$$

Группируем  $y_{\text{оо}}, y_{\text{чн}}$ :

$$\overbrace{y_{\text{оо}}^{(n)} + p_1(x)y_{\text{оо}}^{(n-1)} + \dots + p_{n-1}(x)y_{\text{оо}}' + p_n(x)y_{\text{оо}}}^0 + \underbrace{y_{\text{чн}}^{(n)} + p_1(x)y_{\text{чн}}^{(n-1)} + \dots + p_{n-1}(x)y_{\text{чн}}' + p_n(x)y_{\text{чн}}}_f = f$$

Так как  $y_{\text{оо}}$  — общее решение ЛОДУ (2),  $y_{\text{чн}}$  — частное решение ЛНДУ (1):

$$0 + f = f \Rightarrow f = f \Rightarrow (4) \text{ — решение ЛНДУ (1)}$$

По теореме о существовании и единственности решения задачи Коши (Т.24) следует, что ЗК (1), (3) имеет единственное решение.



## 22 Вывести формулу для общего решения линейного однородного дифференциального уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами в случае кратных корней характеристического уравнения

$$\boxed{y'' + a_1 y' + a_2 y = 0} \quad a_1, a_2 = \text{const} \quad \text{ЛОДУ} \quad (1)$$

$$\boxed{k^2 + a_1 k + a_2 = 0} \quad \text{характеристическое уравнение}$$

$$D = a_1^2 - 4a_2$$

$D = 0 \Rightarrow$  характеристическое уравнение имеет два действительных равных между собой корня / один корень кратности два.

$$k_1 = k_2 = k \in \mathbb{R} \quad k = -\frac{a_1}{2}$$

$$y_1 = e^{kx}$$

Найдём  $y_2$  — частное решение ЛОДУ (1) по известному частному решению  $y_1$ , причём  $y_1$  и  $y_2$  линейно независимы:

$$y_2 = y_1 \int \frac{1}{y_1^2} e^{-\int p_1(x) dx} dx = \left| \begin{array}{l} p_1(x) = a_1 = \text{const} \\ y_1 = e^{kx}, k \in \mathbb{R} \end{array} \right| e^{kx} \int \frac{1}{e^{2kx}} \cdot e^{-\int a_1 dx} =$$

$$= e^{-\frac{a_1}{2}x} \int \frac{1}{e^{-a_1 x}} \cdot e^{-a_1 x} dx = e^{-\frac{a_1}{2}x} \int dx = e^{-\frac{a_1}{2}x} x$$

$$\left. \begin{array}{l} y_1 = e^{-\frac{a_1}{2}x} \\ y_2 = x e^{-\frac{a_1}{2}x} \end{array} \right\} \text{два частных решения ЛОДУ (1)}$$

Покажем, что  $y_1$  и  $y_2$  линейно независимы:

$$W(x) = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} e^{-\frac{a_1}{2}x} & x e^{-\frac{a_1}{2}x} \\ -\frac{a_1}{2} e^{-\frac{a_1}{2}x} & e^{-\frac{a_1}{2}x} - \frac{a_1}{2} x e^{-\frac{a_1}{2}x} \end{vmatrix} = e^{-a_1 x} - \frac{a_1}{2} x e^{-a_1 x} + \frac{a_1}{2} x e^{-a_1 x} =$$

$$= e^{-a_1 x} \neq 0, \forall x \in I \Rightarrow y_1, y_2 \text{ лн. з.} \Rightarrow \text{образуют ФСР}$$

ФСР ЛОДУ (1):

$$\begin{cases} y_1 = e^{-\frac{a_1}{2}x} \\ y_2 = x e^{-\frac{a_1}{2}x} \end{cases}$$

По теореме о структуре общего решения ЛОДУ (Т.31):

$$y_{\text{оо}} = C_1 y_1 + C_2 y_2 = C_1 e^{-\frac{a_1}{2}x} + C_2 x e^{-\frac{a_1}{2}x}$$



## 23 Вывести формулу для общего решения линейного однородного дифференциального уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами в случае комплексных корней характеристического уравнения

$$\begin{array}{ll} \boxed{y'' + a_1 y' + a_2 y = 0} & a_1, a_2 = \text{const} \quad \text{ЛОДУ} \\ \boxed{k^2 + a_1 k + a_2 = 0} & \text{характеристическое уравнение} \\ D = a_1^2 - 4a_2 & \end{array} \quad (1)$$

$D < 0 \Rightarrow$  характеристическое уравнение имеет комплексные корни.

$$k_{1,2} = \alpha \pm \beta \cdot i \quad i — \text{мнимая единица}, \sqrt{-1} = i$$

$\alpha$  — действительная часть       $\beta$  — мнимая часть

Формула Эйлера:

$$\begin{cases} e^{i\varphi} = \cos \varphi + i \sin \varphi \\ e^{-i\varphi} = \cos \varphi - i \sin \varphi \end{cases}$$

По корням характеристического уравнения находим частные решения ЛОДУ (1).

$k_1 = \alpha + \beta i$ :

$$y_1 = e^{k_1 x} = e^{(\alpha + \beta i)x} = e^{\alpha x} \cdot e^{\beta i x} = \boxed{e^{\alpha x} (\cos \beta x + i \cdot \sin \beta x)}$$

$k_2 = \alpha - \beta i$ :

$$y_2 = e^{k_2 x} = e^{(\alpha - \beta i)x} = e^{\alpha x} \cdot e^{-\beta i x} = \boxed{e^{\alpha x} (\cos \beta x - i \cdot \sin \beta x)}$$

Найдём действительные решения ЛОДУ (1). Составим линейные комбинации:

$$\begin{aligned} \widetilde{y}_1 &= \frac{y_1 + y_2}{2} = e^{\alpha x} \cos \beta x \\ \widetilde{y}_2 &= \frac{y_1 - y_2}{2i} = e^{\alpha x} \sin \beta x \end{aligned}$$

Из свойств частных решений ЛОДУ следует (с.35), что  $\widetilde{y}_1$  и  $\widetilde{y}_2$  — тоже решения ЛОДУ (как линейная комбинация).

Покажем, что  $\widetilde{y}_1$  и  $\widetilde{y}_2$  линейно независимы:

$$\begin{aligned} W(x) &= \begin{vmatrix} \widetilde{y}_1 & \widetilde{y}_2 \\ \widetilde{y}_1' & \widetilde{y}_2' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} e^{\alpha x} \cos \beta x & e^{\alpha x} \sin \beta x \\ \alpha e^{\alpha x} \cos \beta x - \beta e^{\alpha x} \sin \beta x & \alpha e^{\alpha x} \sin \beta x + \beta e^{\alpha x} \cos \beta x \end{vmatrix} = \\ &= \cancel{\alpha e^{2\alpha x} \cos \beta x \sin \beta x} + \beta e^{2\alpha x} \cos^2 \beta x - \cancel{\alpha e^{2\alpha x} \cos \beta x \sin \beta x} + \beta e^{2\alpha x} \sin^2 \beta x = \\ &= e^{2\alpha x} \beta \cdot 1 \neq 0 \quad \text{т.к. } e^{2\alpha x} \neq 0 \quad \forall x \in I \end{aligned}$$

$\beta \neq 0$ , так как если  $\beta = 0$ , то  $k_1 = k_2 = \alpha$  — действительные корни

$$\Rightarrow \left. \begin{aligned} \widetilde{y}_1 &= e^{\alpha x} \cos \beta x \\ \widetilde{y}_2 &= e^{\alpha x} \sin \beta x \end{aligned} \right\} \text{линейно независимы} \Rightarrow \text{ФСР}$$

По теореме о структуре решений ЛОДУ (Т.31):

$$y_{\text{оо}} = C_1 y_1 + C_2 y_2 = e^{\alpha x} (C_1 \cos \beta x + C_2 \sin \beta x)$$

## 24 Частное решение линейного неоднородного дифференциального уравнения с постоянными коэффициентами и правой частью специального вида (являющейся квазимногочленом). Сформулировать и доказать теорему о наложении частных решений

$$y^{(n)} + p_1(x)y^{(n-1)} + \dots + p_{n-1}(x)y' + p_n(x)y = f(x) \quad \text{ЛНДУ} \quad (1)$$

$p_1(x), \dots, p_n(x), f(x)$  — функции на  $I$

**Теорема 33** (О суперпозиции (наложении) решений ЛНДУ  $n$ -го порядка).  
Если

$$\begin{aligned} y_1 & \text{ — решение ЛНДУ (1) с правой частью } f_1, \\ & \dots\dots\dots \\ y_n & \text{ — решение ЛНДУ (1) с правой частью } f_n \end{aligned}$$

то линейная комбинация

$$y = C_1y_1 + \dots + C_ny_n$$

является решением ЛНДУ (1) с правой частью

$$f = C_1f_1 + \dots + C_nf_n$$

**Доказательство.**

Так как

$$\begin{aligned} y_1 & \text{ — решение ЛНДУ (1) с правой частью } f_1, \\ & \dots\dots\dots \\ y_n & \text{ — решение ЛНДУ (1) с правой частью } f_n \end{aligned}$$

то верны равенства

$$\begin{cases} y_1^{(n)} + p_1(x)y_1^{(n-1)} + \dots + p_{n-1}(x)y_1' + p_n(x)y_1 = f_1 \\ \dots\dots\dots \\ y_n^{(n)} + p_1(x)y_n^{(n-1)} + \dots + p_{n-1}(x)y_n' + p_n(x)y_n = f_n \end{cases} \quad (*)$$

Рассмотрим

$$y = C_1y_1 + \dots + C_ny_n \quad (V)$$

Подставим (V) в левую часть (1):

$$\begin{aligned} (C_1y_1 + \dots + C_ny_n)^{(n)} + p_1(x)(C_1y_1 + \dots + C_ny_n)^{(n-1)} + \dots + \\ + p_{n-1}(x)(C_1y_1 + \dots + C_ny_n)' + p_n(x)(C_1y_1 + \dots + C_ny_n) \end{aligned}$$

Вычислим производные:

$$\begin{aligned} C_1y_1^{(n)} + \dots + C_ny_n^{(n)} + p_1(x)C_1y_1^{(n-1)} + \dots + p_1(x)C_ny_n^{(n-1)} + \dots + \\ + p_{n-1}(x)C_1y_1' + \dots + p_{n-1}(x)C_ny_n' + p_n(x)C_1y_1 + \dots + p_n(x)C_ny_n \end{aligned}$$

Группируем  $y_1/y_n$ :

$$C_1 \overbrace{(y_1^{(n)} + p_1(x)y_1^{(n-1)} + \dots + p_{n-1}(x)y_1' + p_n(x)y_1)}^{f_1} + \dots + \\ + C_n \underbrace{(y_n^{(n)} + p_1(x)y_n^{(n-1)} + \dots + p_{n-1}(x)y_n' + p_n(x)y_n)}_{f_n} \stackrel{(*)}{=} C_1 f_1 + \dots + C_n f_n$$

■

## Частное решение ЛНДУ

Рассмотрим ЛНДУ  $n$ -го порядка с постоянными коэффициентами

$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \dots + a_{n-1} y' + a_n y = f \quad \text{ЛНДУ} \quad (1)$$

$a_1 \dots, a_n — const$

Соответствующее ЛОДУ:

$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \dots + a_{n-1} y' + a_n y = 0 \quad \text{ЛОДУ}$$

$a_1 \dots, a_n — const$

Характеристическое уравнение:

$$k^n + a_1 k^{n-1} + \dots + a_{n-1} k + a_n = 0$$

$k_1 \dots, k_n —$  корни характеристического уравнения

ФСР ЛОДУ:  $\{e^{k_1 x}, \dots, e^{k_n x}\}$

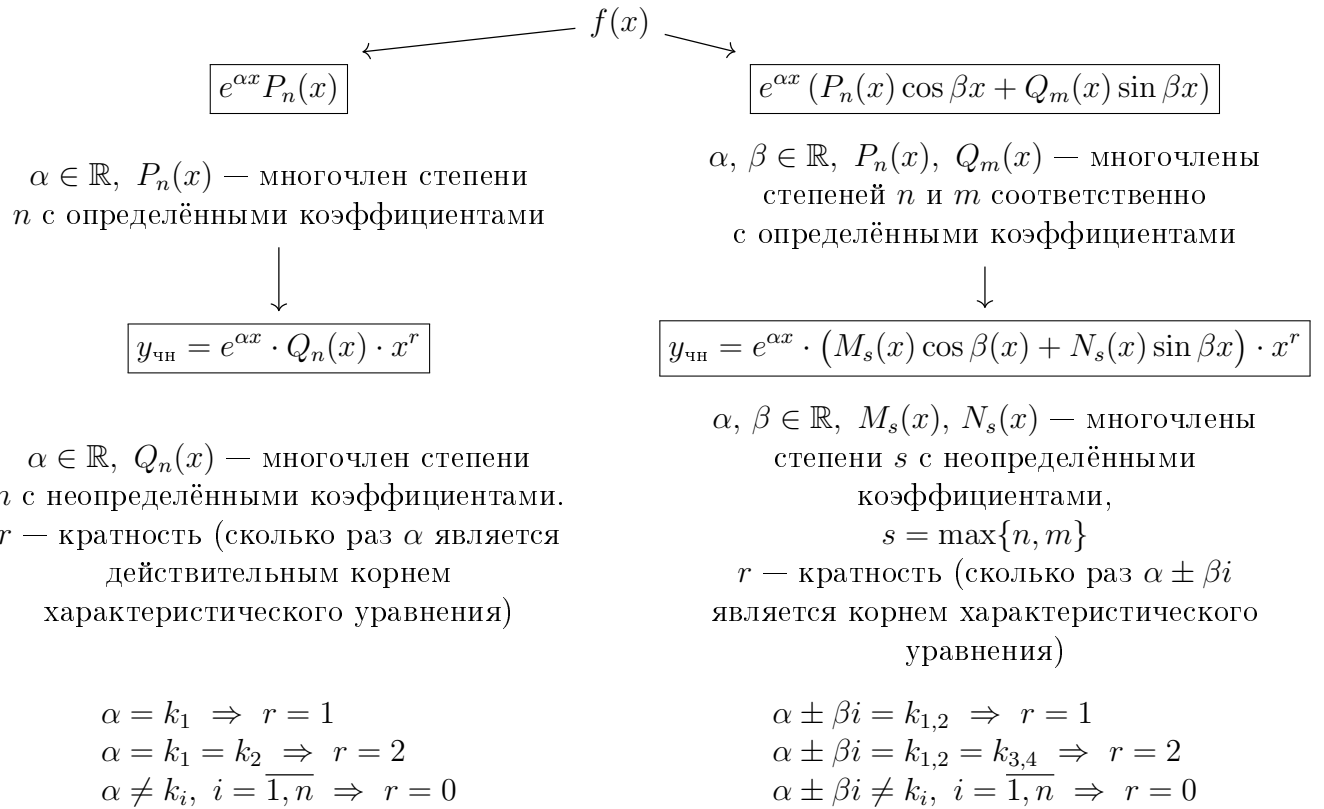
$$y_{\text{оо}} = C_1 e^{k_1 x} + \dots + C_n e^{k_n x}$$

где  $C_1 \dots, C_n — const$

Если правая часть ЛНДУ (1) представима специальным видом, то есть *квазиполиномом*, то по её виду можно найти некоторое частное решение ЛНДУ (1).

Суть метода: по виду функции  $f$  записывается предполагаемый вид частного решения ЛНДУ с неопределёнными коэффициентами. Затем это предполагаемое решение подставляем в ЛНДУ (1) и из полученного равенства находим неопределённые коэффициенты.

Продолжение на следующей странице



## 25 Метод Лагранжа вариации произвольных постоянных для нахождения решения линейного неоднородного дифференциального уравнения 2-го порядка и вывод системы соотношений для варьируемых переменных

Рассмотрим ЛНДУ 2-го порядка

$$y'' + p_1(x)y' + p_2(x)y = f(x) \quad (1)$$

$$y_1'' + p_1(x)y_1' + p_2(x)y_1 = 0 \quad \text{ЛОДУ} \quad (2)$$

$p_1(x), \dots, p_n(x)$  — функции.

Пусть  $y_1$  и  $y_2$  — это ФСР ЛОДУ (2). Тогда по теореме о структуре общего решения ЛОДУ (Т.31):

$$y_{\text{оо}} = \underbrace{C_1 y_1 + C_2 y_2}_{\text{ФСР ЛОДУ}} \quad C_1, C_2 = \forall \text{const}$$

Метод Лагранжа: предполагаемый вид решения ЛНДУ (1):

$$y_{\text{ош}} = C_1(x)y_1 + C_2(x)y_2 \quad (3)$$

$C_1(x), C_2(x)$  — некоторые функции.

Вычислим:

$$y'_{\text{ош}} = C'_1 y_1 + C_1 y'_1 + C'_2 y_2 + C_2 y'_2 = \underbrace{C'_1 y_1 + C'_2 y_2}_0 + C_1 y'_1 + C_2 y'_2$$

**Первое дополнительное условие Лагранжа:**

$$\boxed{C'_1 y_1 + C'_2 y_2 = 0}$$

$$\begin{aligned} y'_{\text{он}} &= C_1 y'_1 + C_2 y'_2 \\ y''_{\text{он}} &= C'_1 y'_1 + C_1 y''_1 + C'_2 y'_2 + C_2 y''_2 \end{aligned}$$

$y_{\text{он}}, y'_{\text{он}}, y''_{\text{он}}$  в (1):

$$C'_1 y'_1 + C_1 y''_1 + C'_2 y'_2 + C_2 y''_2 + p_1(x) \cdot (C_1 y'_1 + C_2 y'_2) + p_2(x) (C_1 y_1 + C_2 y_2) = f$$

Группируем:

$$C'_1 y'_1 + C'_2 y'_2 + C_1 \underbrace{\left( y''_1 + p_1(x) y'_1 + p_2(x) y_1 \right)}_0 + C_2 \underbrace{\left( y''_2 + p_1(x) y'_2 + p_2(x) y_2 \right)}_0 = f$$

Так как  $y_1, y_2$  — решения ЛОДУ (2), то

**Второе условие Лагранжа:**

$$\boxed{C'_1 y'_1 + C'_2 y'_2 = f}$$

Предполагаемое решение (3) будет являться решением ЛНДУ (1), если функции  $C_1(x)$  и  $C_2(x)$  удовлетворяют условиям:

$$\begin{cases} C'_1 y_1 + C_2 y_2 = 0 \\ C'_1 y'_1 + C'_2 y'_2 = f \end{cases} \text{ — система варьируемых переменных}$$

Определяем из системы варьируемых переменных  $C'_1(x)$  и  $C'_2(x)$ .

$$C'_1(x) = \varphi(x) \quad C'_2(x) = \Psi(x)$$

Интегрируем:

$$\begin{aligned} C_1(x) &= \int \varphi(x) dx + k_1, \quad \forall k_1 = \text{const} \\ C_2(x) &= \int \Psi(x) dx + k_2, \quad \forall k_2 = \text{const} \end{aligned}$$

Подставляем  $C_1(x), C_2(x)$  в (3):

$$\begin{aligned} y_{\text{он}} &= C_1(x) y_1 + C_2(x) y_2 = \left( \int \varphi(x) dx + k_1 \right) y_1 + \left( \int \Psi(x) dx + k_2 \right) y_2 = \\ &= \underbrace{k_1 y_1 + k_2 y_2}_{y_{\text{оо}}} + \underbrace{y_1 \int \varphi(x) dx + y_2 \int \Psi(x) dx}_{y_{\text{чн}}} \end{aligned}$$

Система варьируемых переменных имеет единственное решение, так как определитель — это определитель Вронского.

$$W(x) = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y'_1 & y'_2 \end{vmatrix} \neq 0 \quad \text{т.к. } y_1 \text{ и } y_2 \text{ ФСР ЛОДУ}$$

## 26 Дополнительные определения

### 26.1 Неопределённый интеграл

**Определение 17.** Множество первообразных функции  $f(x)$  на  $(a; b)$  называется **неопределённым интегралом**.

$$\int f(x) dx = F(x) + C \quad (4)$$

$\int$  — знак интеграла

$f(x)$  — подынтегральная функция

$f(x) dx$  — подынтегральное выражение

$x$  — переменная

$F(x) + C$  — множество первообразных

$C$  — произвольная константа

**Определение 18. Интегрирование** — нахождение неопределённого интеграла.

### 26.2 Правильные и неправильные рациональные дроби

**Определение 19. Дробно-рациональной функцией** или рациональной дробью называется функция, равная частному от деления двух многочленов.

$$\frac{P_m(x)}{Q_n(x)} = \frac{a_m x^m + a_{m-1} x^{m-1} + \dots + a_1 x + a_0}{b_n x^n + b_{n-1} x^{n-1} + \dots + b_1 x + b_0},$$
$$a_m, a_{m-1}, \dots, a_1, a_0, b_n, b_{n-1}, \dots, b_1, b_0 — const$$

где  $P_m(x)$ ,  $Q_n(x)$  — многочлены степени  $m$  и  $n$  соответственно.

**Определение 20.** Рациональная дробь называется **правильной**, если степень числителя меньше степени знаменателя, то есть  $m < n$ .

**Определение 21.** Рациональная дробь называется **неправильной**, если степень числителя не меньше степени знаменателя, то есть  $m \geq n$ .

#### 26.2.1 Простейшие рациональные дроби

$$1. \frac{A}{x-a} \quad 2. \frac{A}{(x-a)^k} \quad 3. \frac{Mx+N}{x^2+px+q} \quad 4. \frac{Mx+N}{(x^2+px+q)^k}$$

где  $A, a, M, N, p, q — const, K \in \mathbb{N}, k \geq 2$   
 $x^2 + px + q$  не имеет действительных корней.

$$D = p^2 - 4q < 0, \quad 4q - p^2 > 0, \quad \boxed{q - \frac{p^2}{4} > 0} \quad (*)$$

## 26.3 Определённый интеграл

Пусть функция  $y = f(x)$  определена на  $[a; b]$ .

**Определение 22.** Множество точек  $a = x_0 < x_1 < \dots < x_i < \dots < x_n = b$  называется **разбиением отрезка  $[a; b]$** , при этом отрезки  $[x_{i-1}; x_i]$  называются **отрезками разбиения**.

$$i = 1, \dots, n \quad i = \overline{1, n}$$

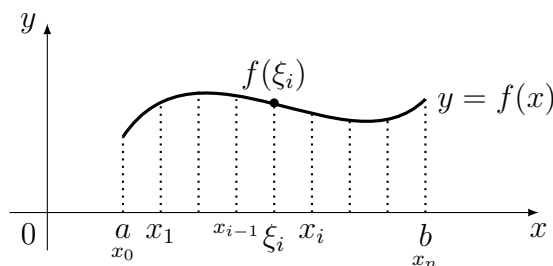
$$\Delta x_i = x_i - x_{i-1} \text{ — длина } i\text{-го отрезка разбиения} \quad i = \overline{1, n}$$

$$\lambda = \max_i \Delta x_i \text{ — диаметр разбиения}$$

Рассмотрим произвольное разбиение  $[a; b]$ . В каждом из отрезков разбиения  $[x_{i-1}; x_i]$  выберем точку  $\xi_i$ ,  $i = \overline{1, n}$ . Составим сумму

$$S_n = \sum_{i=1}^n f(\xi_i) \cdot \Delta x_i \quad (5)$$

(5) — интегральная сумма для функции  $y = f(x)$  на  $[a; b]$ .



**Определение 23.** **Определённым интегралом** от функции  $y = f(x)$  на  $[a; b]$  называется **конечный** предел интегральной суммы (5), когда число отрезков разбиения растёт, а их длины стремятся к нулю.

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(\xi_i) \cdot \Delta x_i \quad (6)$$

Предел (6) не зависит от способа разбиения отрезка  $[a; b]$  и выбора точек  $\xi_i$ ,  $\overline{1, n}$ .

$f(x)$  — подынтегральная функция

$f(x) dx$  — подынтегральное выражение

$\int_a^b$  — знак определённого интеграла

$a$  — нижний предел интегрирования

$b$  — верхний предел интегрирования

## 26.4 Криволинейная трапеция

**Определение 24.** **Криволинейной трапецией** называется фигура, ограниченная графиком функции  $y = f(x)$ , отрезком  $[a; b]$  на  $Ox$ , прямыми  $x = a$  и  $x = b$  параллельными оси  $Oy$ .

## 26.5 Абсолютная и условная сходимость

**Определение 25.** Если наряду с несобственным интегралом от функции  $f(x)$  по бесконечному промежутку  $[a; +\infty)$  сходится и несобственный интеграл от функции  $|f(x)|$  по этому же промежутку, то первый несобственный интеграл называется **сходящимся абсолютно**.

$$\boxed{\begin{array}{l} \text{несобственный интеграл} \\ \text{от } f(x) \text{ сходится абсолютно} \end{array}} = \boxed{\begin{array}{l} \text{несобственный интеграл} \\ \text{от } f(x) \text{ сходится} \end{array}} + \boxed{\begin{array}{l} \text{несобственный интеграл} \\ \text{от } |f(x)| \text{ сходится} \end{array}}$$

**Определение 26.** Если несобственный интеграл от функции  $f(x)$  по бесконечному промежутку  $[a; +\infty)$  сходится, а несобственный интеграл от функции  $|f(x)|$  по этому же промежутку расходится, то первый несобственный интеграл называется **сходящимся условно**.

$$\boxed{\begin{array}{l} \text{несобственный интеграл} \\ \text{от } f(x) \text{ сходится условно} \end{array}} = \boxed{\begin{array}{l} \text{несобственный интеграл} \\ \text{от } f(x) \text{ сходится} \end{array}} + \boxed{\begin{array}{l} \text{несобственный интеграл} \\ \text{от } |f(x)| \text{ расходится} \end{array}}$$

## 26.6 Уравнение Бернулли

**Определение 27.** ДУ 1-го порядка называется **уравнением Бернулли**, если оно имеет вид:

$$\boxed{y' + p(x) \cdot y = y^m \cdot f(x)} \quad m \neq 0, m \neq 1$$

$$m = 0 \Rightarrow \text{уравнение Бернулли} \rightarrow \text{ЛНДУ}$$

$$m = 1 \Rightarrow \text{уравнение Бернулли} \rightarrow \text{ЛОДУ}$$

$p(x), f(x)$  — непрерывны на  $I \subset \mathbb{R}$

## 26.7 Общее и частное решения ДУ

**Определение 28.** **Общим решением** ДУ 2-го порядка называется функция  $y = \varphi(x, C_1, C_2)$ , удовлетворяющая условиям:

1.  $y = \varphi(x, C_1, C_2)$  — решение ДУ (2) при любых  $C_1, C_2 — const$ .
2. Какого бы ни было начальное условие (3), можно найти такие  $C_1^0, C_2^0$ , что функция  $y = \varphi(x, C_1^0, C_2^0)$  будет удовлетворять начальному условию (3).

**Определение 29.** **Частным решением** ДУ 2-го порядка называется любая функция  $y = \varphi(x, C_1^0, C_2^0)$ , полученная из общего решения при конкретных значениях  $C_1^0$  и  $C_2^0$ .



**Определение 30.** Общим решением ДУ  $n$ -го порядка называется функция  $y = \varphi(x, C_1, C_2, \dots, C_n)$  удовлетворяющая условиям:

1.  $y = \varphi(x, C_1, C_2, \dots, C_n)$  — решение ДУ  $n$ -го порядка при любых  $C_1, C_2, \dots, C_n$  —  $const$ .
2. Какого бы ни было начальное условие (3), можно найти такие  $C_1^0, C_2^0, \dots, C_n^0$ , что функция  $y = \varphi(x, C_1^0, C_2^0, \dots, C_n^0)$  будет удовлетворять начальным условиям (3).

**Определение 31.** Частным решением ДУ  $n$ -го порядка называется функция  $y = \varphi(x, C_1^0, C_2^0, \dots, C_n^0)$ , полученная из общего решения  $y = \varphi(x, C_1, C_2, \dots, C_n)$  при конкретных значениях  $C_1^0, C_2^0, \dots, C_n^0$ .

## 26.8 Определитель Вронского (вронскиан)

**Определение 32.** Определителем Вронского (вронскианом) системы  $(n - 1)$  раз дифференцируемых функций  $y_1(x), \dots, y_n(x)$  называется определитель вида:

$$W(x) = \begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) & \dots & y_n(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) & \dots & y_n'(x) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ y_1^{(n-1)}(x) & y_2^{(n-1)}(x) & \dots & y_n^{(n-1)}(x) \end{vmatrix}$$

## 26.9 Характеристическое уравнение

$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \dots + a_{n-1} y' + a_n y = 0 \quad (1)$$

$$\boxed{k^n + a_1 k^{n-1} + \dots + a_{n-1} k + a_n = 0} \quad (2)$$

**Определение 33.** Уравнение (2) называется характеристическим уравнением. **Характеристическое уравнение** — это алгебраическое уравнение/полином/многочлен, полученный из ДУ (1) путём замены  $n$ -ой производной неизвестной функции  $y$  на  $n$ -ую степень величины  $k$ , а сама функция  $y$  заменена на единицу.

## 27 Дополнительные теоремы

**Теорема 34** (Непрерывность  $I(x)$ ).

Если функция  $f(x)$  на  $[a; b]$  непрерывна, то  $I(x) = \int_a^x f(t) dt$  — непрерывна на  $[a; b]$ .

**Теорема 35** (О существовании и единственности решения ЗК (1), (3)).

Если в ЛНДУ (1) функции  $p_1(x), \dots, p_n(x), f(x)$  непрерывны на некотором промежутке  $I$ , то задача Коши для ЛНДУ (1) имеет единственное решение удовлетворяющее начальному условию (3).

## 28 Дополнительные материалы

### 28.1 Таблица основных интегралов

Таблица 1: Таблица основных интегралов

1. $\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C, \forall C - const$	11. $\int \frac{dx}{a^2 - x^2} = \frac{1}{2a} \ln \left  \frac{a+x}{a-x} \right  + C$
2. $\int dx = x + C$	12. $\int \frac{dx}{x^2 - a^2} = \frac{1}{2a} \ln \left  \frac{a-x}{a+x} \right  + C$
3. $\int \frac{dx}{x} = \ln  x  + C$	13. $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \arcsin \frac{x}{a} + C$
4. $\int e^x dx = e^x + C$	14. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} = \ln \left  x + \sqrt{x^2 \pm a^2} \right  + C$
5. $\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$	15. $\int \operatorname{sh} x dx = \operatorname{ch} x + C$
6. $\int \sin x dx = -\cos x + C$	16. $\int \operatorname{ch} x dx = \operatorname{sh} x + C$
7. $\int \cos x dx = \sin x + C$	17. $\int \frac{dx}{\operatorname{ch}^2 x} = \operatorname{th} x + C$
8. $\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x + C$	18. $\int \frac{dx}{\operatorname{sh}^2 x} = -\operatorname{cth} x + C$
9. $\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\operatorname{ctg} x + C$	19. $\int \frac{dx}{\sin x} = \ln \left  \operatorname{tg} \frac{x}{2} \right  + C$
10. $\int \frac{dx}{a^2 + x^2} = \frac{1}{a} \operatorname{arctg} \frac{x}{a} + C$	20. $\int \frac{dx}{\cos x} = \ln \left  \operatorname{tg} \left( \frac{x}{2} + \frac{\pi}{4} \right) \right  + C$

### 28.2 Интегралы для сравнения. Эталоны, интегралы Дирихле

$$\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha} = \begin{cases} \text{сходится при } \alpha > 1 \\ \text{расходится при } \alpha \leq 1 \end{cases}$$

$$\int_0^b \frac{dx}{x^\alpha} = \begin{cases} \text{сходится } \alpha < 1 \\ \text{расходится } \alpha \geq 1 \end{cases}$$

$$\int_a^b \frac{dx}{(x-a)^\alpha} = \begin{cases} \text{сходится } \alpha < 1 \\ \text{расходится } \alpha \geq 1 \end{cases}$$

$$\int_a^b \frac{dx}{(b-x)^\alpha} = \begin{cases} \text{сходится } \alpha < 1 \\ \text{расходится } \alpha \geq 1 \end{cases}$$