Интегралы и дифференциальные уравнения

Лекции

2 семестр

GitHub: malyinik

2024 г.

Содержание

1 Первообразная и неопределённый интеграл

1.1 Первообразная

Определение 1. Функция $F(x)$ называется **первообразной** функции $f(x)$ на интервале $(a;b)$, если $F(x)$ дифференцируема на $(a;b)$ и $\forall x \in (a;b)$:

$$\boxed{F'(x) = f(x)} \tag{1}$$

Пример.

$f(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}},\ D_f = (0;+\infty)$

$F(x) = \sqrt{x}$ — первообразная $f(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$

$F'(x) = (\sqrt{x})' = \dfrac{1}{2\sqrt{x}} = f(x)$

$F(x) = \sqrt{x} + 3$ — первообразная $f(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$

1.1.1 Свойства первообразной

Свойство 1.
Если $F(x)$ — первообразная функции $f(x)$ на $(a;b)$, то $F(x) + C$ — первообразная функции $f(x)$ на $(a;b)$, где $\forall C$ — $const$.

Свойство 2.
Если $\Phi(x)$ дифференцируема на $(a;b)$ и $\forall x \in (a;b)$: $\Phi'(x) = 0$, то $\Phi(x) = const$, $\forall x \in (a;b)$.

Свойство 3 *(Существование первообразной)*.
Любая непрерывная функция на $(a;b)$ имеет множество первообразных на этом интервале, причём любые две из них отличаются друг от друга на константу.

$$\Phi(x),\ F(x) \text{ — первообразные функции } f(x) \text{ на } (a;b)$$
$$\Phi(x) - F(x) = const$$

1.2 Неопределённый интеграл

Определение 2. Множество первообразных функции $f(x)$ на $(a;b)$ называется **неопределённым интегралом**.

$$\boxed{\int f(x)\,dx = F(x) + C} \tag{2}$$

$\int$ — знак интеграла
$f(x)$ — подынтегральная функция
$f(x)\,dx$ — подынтегральное выражение
x — переменная
$F(x) + C$ — множество первообразных
C — произвольная константа

Определение 3. **Интегрирование** — нахождение неопределённого интеграла.

1.2.1 Свойства неопределённого интеграла

Свойство 1.
Производная от неопределённого интеграла равна подынтегральной функции.

$$\boxed{\left(\int f(x)\,dx\right)' = f(x)}$$

Доказательство.

$$\left(\int f(x)\,dx\right)' \overset{(2)}{=\!=} \big(F(x) + C\big)' = F'(x) + C' = F'(x) \overset{(1)}{=\!=} f(x)$$

■

Свойство 2.
Дифференциал от неопределённого интеграла равен подынтегральному выражению.

$$\boxed{d\left(\int f(x)\,dx\right) = f(x)\,dx}$$

Доказательство.

$$d\left(\int f(x)\,dx\right) \overset{(2)}{=\!=} d\big(F(x) + C\big) = \big(F(x) + C\big)'\,dx =$$

$$= \big(F'(x) + C'\big)\,dx = F'(x)\,dx \overset{(1)}{=\!=} f(x)\,dx$$

■

Свойство 3.
Неопределённый интеграл от дифференциала от некоторой функции равен сумме этой функции и константы.

$$\boxed{\int d\big(F(x)\big) = F(x) + C}, \quad \forall C - const$$

Доказательство.

$$\int d\big(F(x)\big) = \int F'(x)\,dx \overset{(1)}{=\!=} \int f(x)\,dx \overset{(2)}{=\!=} F(x) + C, \quad \forall C - const$$

■

Свойство 4.
Константу можно выносить за знак неопределённого интеграла.

$$\boxed{\int \lambda \cdot f(x)\,dx = \lambda \int f(x)\,dx}, \quad \lambda \neq 0$$

Доказательство.
Пусть $F(x)$ — первообразная $f(x)$

$$\lambda \int f(x)\,dx \overset{(2)}{=\!=} \lambda \cdot \big(F(x) + C\big), \quad \forall C - const$$

Функция $\lambda \cdot F(x)$ — первообразная $\lambda \cdot f(x)$:

$$\big(\lambda \cdot F(x)\big)' = \lambda \cdot F'(x) \overset{(1)}{=\!=} \lambda \cdot f(x)$$

$$\int \lambda \cdot f(x)\,dx \overset{(2)}{=\!=} \lambda \cdot F(x) + C_1, \quad \forall C_1 - const$$

Так как константы C_1, C — произвольные, $\lambda \neq 0$, то их всегда можно выбрать так, чтобы $C_1 = \lambda C$. Тогда множества $\lambda \cdot \big(F(x) + C\big)$ и $\lambda \cdot F(x) + C_1$ совпадают. ■

Свойство 5.
Если функции $f_1(x)$ и $f_2(x)$ на $(a; b)$ имеют первообразные $F_1(x)$ и $F_2(x)$ соответственно, то функция $\lambda_1 f_1(x) + \lambda_2 f_2(x)$, где $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$, имеет первообразную на $(a; b)$, причём $\lambda_1^2 + \lambda_2^2 > 0$:

$$\int \Big(\lambda_1 f_1(x) + \lambda_2 f_2(x)\Big)\,dx = \lambda_1 \int f_1(x)\,dx + \lambda_2 \int f_2(x)\,dx$$

Доказательство.
$F_1(x)$ — первообразная $f_1(x)$
$F_2(x)$ — первообразная $f_2(x)$

$$\lambda_1 \int f_1(x)\,dx + \lambda_2 \int f_2(x)\,dx \overset{(2)}{=\!=} \lambda_1(F_1(x) + C_1) + \lambda_2\big(F_2(x) + C_2\big) =$$
$$= \lambda_1 F_1(x) + \lambda_2 F_2(x) + \lambda_1 C_1 + \lambda_2 C_2, \quad \forall C_1, C_2 - const$$

Функция $F(x) = \lambda_1 F_1(x) + \lambda_2 F_2(x)$ — первообразная функции $\lambda_1 f_1(x) + \lambda_2 f_2(x)$.

$$F'(x) = \big(\lambda_1 F_1(x) + \lambda_2 F_2(x)\big)' = \lambda_1 F_1'(x) + \lambda_2 F_2'(x) \overset{(1)}{=\!=} \lambda_1 f_1(x) + \lambda_2 f_2(x)$$
$$\int \Big(\lambda_1 f_1(x) + \lambda_2 f_2(x)\Big)\, dx \overset{(2)}{=\!=} \lambda_1 f_1(x) + \lambda_2 f_2(x) + C, \quad \forall C - const$$

Так как константы $C_1,\ C_2,\ C$ — произвольные, то всегда можно добиться выполнения равенства $C = \lambda_1 C_1 + \lambda_2 C_2$.
Тогда множества $\lambda_1 F_1(x) + \lambda_2 F_2(x) + \lambda_1 C_1 + \lambda_2 C_2$ и $\lambda_1 F_1(x) + \lambda_2 F_2(x) + C$ совпадают. ■

Свойство 6 *(Инвариантность формы интегрирования)***.**
Если $\int f(x)\, dx = F(x) + C$, где $C - const$, то $\int f(u)\, du = F(u) + C$, где $C - const$, $u = \varphi(x)$ — непрерывно-дифференцируемая функция.

Доказательство.
x — независимая переменная
$f(x)$ — непрерывная функция
$F(x)$ — первообразная $f(x)$
$\int f(x)\, dx = F(x) + C,\ \forall C - const$

Рассмотрим сложную функцию $F(u) = F\big(\varphi(x)\big)$. Найдём дифференциал $F(u)$:

$$d\big(F(u)\big) = F'(u) \cdot \underbrace{\varphi'(x)\, dx}_{du} = \left| \begin{matrix} u = \varphi(x) \\ du = \varphi'(x)\, dx \end{matrix} \right| = F'(u)\, du \overset{(1)}{=\!=} f(u)\, du$$

Неопределённый интеграл:

$$\int f(u)\, du = \int d\big(F(u)\big) \overset{\textbf{(св. 3)}}{=\!=\!=} F(u) + C, \quad \forall C - const$$

■

Пример.

$$\int \sin x\, dx = -\cos x + C \qquad \sin(2x)\, d(2x) = -\cos(2x) + C$$

1.2.2 Геометрический смысл

Неопределённый интеграл геометрически представляет собой семейство интегральных кривых (графиков функций) вида $y = F(x) + C,\ \forall C - const$.

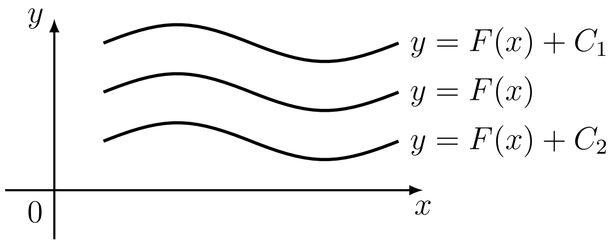


Рис. 1: Геометрический смысл неопределённого интеграла

1.2.3 Таблица основных интегралов

Таблица 1: Таблица основных интегралов

1. $\displaystyle\int x^n\,dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C,\ \forall C - const$	11. $\displaystyle\int \frac{dx}{a^2-x^2} = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{a+x}{a-x}\right| + C$
2. $\displaystyle\int dx = x + C$	12. $\displaystyle\int \frac{dx}{x^2-a^2} = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{a-x}{a+x}\right| + C$
3. $\displaystyle\int \frac{dx}{x} = \ln\|x\| + C$	13. $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \arcsin\frac{x}{a} + C$
4. $\displaystyle\int e^x\,dx = e^x + C$	14. $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{x^2\pm a^2}} = \ln\left\|x+\sqrt{x^2\pm a^2}\right\| + C$
5. $\displaystyle\int a^x\,dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$	15. $\displaystyle\int \operatorname{sh} x\,dx = \operatorname{ch} x + C$
6. $\displaystyle\int \sin x\,dx = -\cos x + C$	16. $\displaystyle\int \operatorname{ch} x\,dx = \operatorname{sh} x + C$
7. $\displaystyle\int \cos x\,dx = \sin x + C$	17. $\displaystyle\int \frac{dx}{\operatorname{ch}^2 x} = \operatorname{th} x + C$
8. $\displaystyle\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x + C$	18. $\displaystyle\int \frac{dx}{\operatorname{sh}^2 x} = -\operatorname{cth} x + C$
9. $\displaystyle\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\operatorname{ctg} x + C$	19. $\displaystyle\int \frac{dx}{\sin x} = \ln\left\|\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right\| + C$
10. $\displaystyle\int \frac{dx}{a^2+x^2} = \frac{1}{a}\operatorname{arctg}\frac{x}{a} + C$	20. $\displaystyle\int \frac{dx}{\cos x} = \ln\left\|\operatorname{tg}\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\right\| + C$

Доказательство (19).

$$\int \frac{dx}{\sin x} = \int \frac{dx}{2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}} = \frac{1}{2}\int \frac{\frac{1}{\cos^2\frac{x}{2}}}{\frac{\sin\frac{x}{2}\cancel{\cos\frac{x}{2}}}{\cos^{\cancel{2}}\frac{x}{2}}}dx = \int \frac{\frac{1}{2\cos^2\frac{x}{2}}}{\operatorname{tg}\frac{x}{2}}dx = \int \frac{d\left(\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right)}{\operatorname{tg}\frac{x}{2}} =$$

$$= \left|\operatorname{tg}\frac{x}{2} t\right| = \int \frac{dt}{t} = \ln|t| + C = \ln\left|\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right| + C$$

$\blacksquare$

1.3 Основные методы интегрирования

1. **Непосредственное интегрирование** (свойства + таблица)

> **Пример.**
>
> $$\int\left(3e^x+\sin x-\frac{1}{1+x^2}\right)dx=3\int e^x\,dx+\int\sin x\,dx-\int\frac{dx}{1+x^2}=$$
> $$=3e^x-\cos x-\operatorname{arctg}x+C,\ \forall C - const$$

2. **Метод подстановки**

(2.1) Занесение под знак дифференциала

> **Пример.**
>
> $$\int\frac{e^{\arcsin x}\cdot 1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx=\int e^{\arcsin x}\,d(\arcsin x)=e^{\arcsin x}+C,\ \forall C - const$$

(2.2) Замена переменной

Пусть функция $x=\varphi(t)$ определена и дифференцируема на T, а множество X — множество значений этой функции, на котором определена $f(x)$. Тогда, если существует первообразная функции $f(x)$ на X, то на множестве T верно равенство:

$$\boxed{\int f(x)\,dx=\begin{vmatrix} x=\varphi(t)\\ dx=\varphi'(t)\end{vmatrix}=\int f\big(\varphi(t)\big)\varphi'(t)dt}$$

> **Пример.**
>
> $$\int x(3x-1)^{2024}dx=\begin{vmatrix} 3x-1=t\quad 3x=t+1\\ x=\dfrac{1}{3}(t+1)\\ dx=\left(\dfrac{1}{3}t+\dfrac{1}{3}\right)'dt=\dfrac{1}{3}dt\end{vmatrix}=\int\frac{1}{3}(t+1)\cdot t^{2024}\frac{1}{3}dt$$

3. **Интегрирование по частям**

Пусть функции $u=u(x)$ и $v=v(x)$ непрерывно-дифференцируемые, тогда справедлива формула интегрирования по частям:

$$\boxed{\int u\,dv=u\cdot v-\int v\,du}$$

> **Доказательство.**
> Рассмотрим произведение $u\cdot v=u(x)\cdot v(x)$
> Дифференциал:
>
> $$d(u\cdot v)=u\cdot dv+v\cdot du$$
>
> Выразим $u\cdot dv$:
>
> $$u\cdot dv=d(u\cdot v)-v\cdot du$$

Интегрируем:

$$\int u\,dv = \int \Big(d(uv) - v\,du\Big)$$

По свойству неопределённого интеграла (5):

$$\int u\,dv = \int d(uv) - \int v\,du$$

По свойству неопределённого интеграла (3):

$$\int u\,dv = u \cdot v - \int v\,du$$

$\blacksquare$

Пример.

1. $$\int xe^x\,dx = \int \underset{u}{x} d(\underset{v}{e^x}) = xe^x - \int e^x\,dx = xe^x - e^x + C, \quad \forall C - const$$

2. $$\int \underbrace{\arccos x}_{u}\, x\, \underbrace{dx}_{dv} = \begin{vmatrix} u = \arccos x,\ du = -\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx \\ dv = dx,\ v = \displaystyle\int dv = \int dx = x \end{vmatrix} =$$
$$= x \cdot \arccos x - \int \frac{-x\,dx}{\sqrt{1-x^2}} = x \cdot \arccos x - \frac{1}{2}\int \frac{d(1-x^2)}{\sqrt{1-x^2}} =$$
$$= x \cdot \arccos x - \frac{1}{2} \cdot \frac{(1-x^2)^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} + C =$$
$$= x \cdot \arccos x - \sqrt{1-x^2} + C, \quad \forall C - const$$

2 Правильные и неправильные рациональные дроби

Определение 1. **Дробно-рациональной функцией** или рациональной дробью называется функция, равная частному от деления двух многочленов.

$$\frac{P_m(x)}{Q_n(x)} = \frac{a_m x^m + a_{m-1}x^{m-1} + \ldots + a_1 x + a_0}{b_n x^n + b_{n-1}x^{n-1} + \ldots + b_1 x + b_0},$$
$$a_m, a_{m-1}, \ldots, a_1, a_0, b_n, b_{n-1}, \ldots, b_1, b_0 - const$$

где $P_m(x),\ Q_n(x)$ — многочлены степени m и n соответственно.

Определение 2. Рациональная дробь называется **правильной**, если степень числителя меньше степени знаменателя, то есть $m < n$.

Определение 3. Рациональная дробь называется **неправильной**, если степень числителя не меньше степени знаменателя, то есть $m \geqslant n$.

Простейшие рациональные дроби

$$1.\ \frac{A}{x-a} \qquad 2.\ \frac{A}{(x-a)^k} \qquad 3.\ \frac{Mx+N}{x^2+px+q} \qquad 4.\ \frac{Mx+N}{(x^2+px+q)^k}$$

где $A,\ a,\ M,\ N,\ p,\ q - const,\ K \in \mathbb{N},\ k \geqslant 2$
$x^2 + px + q$ не имеет действительных корней.

$$D = p^2 - 4q < 0, \quad 4q - p^2 > 0, \quad \boxed{q - \frac{p^2}{4} > 0} \tag{$*$}$$

2.1 Интегрирование простейших рациональных дробей

2.1.1 $\frac{A}{x-a}$

$$\int \frac{A}{x-a}\,dx = A\int \frac{dx}{x-1} = A\int \frac{d(x-a)}{x-1} = A \cdot \ln|x-a| + C, \quad \forall C - const$$

2.1.2 $\frac{A}{(x-a)^k}$

$$\int \frac{A}{(x-a)^k}\,dx = A\int \frac{dx}{(x-a)^k} = A\int \frac{d(x-a)}{(x-a)^k} = A\int (x-a)^{-k}\,d(x-a) = A \cdot \frac{(x-a)^{-k+1}}{-k+1} + C,$$
$$\forall C - const$$

2.1.3 $\frac{Mx+N}{x^k+px+q}$

$$\int \frac{Mx+N}{x^2+px+q}\,dx = \left| \begin{array}{l} x^2+px+q = x^2 + 2\cdot\frac{p}{2}x + \frac{p^2}{4} - \frac{p^2}{4} + q = \\ = \left(x+\frac{p}{2}\right)^2 + \left(q - \frac{p^2}{4}\right) \overset{(*)}{=\!=} \left(x+\frac{p}{2}\right)^2 + b^2 \end{array} \right| = \int \frac{Mx+N}{\left(x+\frac{p}{2}\right)^2+b^2}\,dx =$$

$$= \left| x+\frac{p}{2} = t \quad x = t-\frac{p}{2} \quad dx = dt \right| = \int \frac{M\left(t-\frac{p}{2}\right)+N}{t^2+b^2}\,dt =$$

$$= M\int\frac{t}{t^2+b^2}\,dt + \left(N-\frac{p}{2}M\right)\int\frac{dt}{t^2+b^2} =$$

$$= \frac{M}{2}\int\frac{d(t^2+b^2)}{t^2+b^2} + \left(N-\frac{p}{2}M\right)\frac{1}{b}\operatorname{arctg}\frac{t}{b} =$$

$$= \frac{M}{2}\ln|t^2+b^2| + \frac{\left(N-\frac{p}{2}M\right)}{b}\operatorname{arctg}\frac{t}{b} + C =$$

$$= \frac{M}{2}\ln|x^2+px+q| + \frac{\left(N-\frac{p}{2}M\right)}{\sqrt{q-\frac{p^2}{4}}}\operatorname{arctg}\frac{x+\frac{p}{2}}{\sqrt{q-\frac{p^2}{4}}} + C, \quad \forall C - const$$

> **Пример.**
>
> $$\int\frac{3x-5}{x^2+2x+10}\,dx = \int\frac{3x-5}{(x+1)^2+3^2} = \left|\begin{array}{l} x+1=t \\ x=t-1 \\ dx=dt \end{array}\right| = \int\frac{3(t-1)-5}{t^2+3^2}\,dt =$$
>
> $$= 3\int\frac{t\,dt}{t^2+3^2} - 8\int\frac{dt}{t^2+3^2} = 3\cdot\frac{1}{2}\int\frac{d(t^2+3^2)}{t^2+3^2} - 8\cdot\frac{1}{3}\operatorname{arctg}\frac{t}{3} =$$
>
> $$= \frac{3}{2}\ln|t^2+9| - \frac{8}{3}\operatorname{arctg}\frac{t}{3} + C = \frac{3}{2}\ln|x^2+2x+10| - \frac{8}{3}\operatorname{arctg}\frac{x+1}{3} + C, \quad \forall C - const$$

2.2 Неправильные рациональные дроби

Любая неправильная рациональная дробь может быть представлена в виде суммы многочлена и правильной рациональной дроби.

$$\boxed{\frac{P(x)}{Q(x)} = L(x) + \frac{r(x)}{Q(x)}} \qquad (\vee)$$

$\dfrac{P(x)}{Q(x)}$ — неправильная рациональная дробь

$L(x)$ — многочлен/частное от деления $P(x)$ на $Q(x)$

$r(x)$ — остаток от деления $P(x)$ на $Q(x)$

$\dfrac{r(x)}{Q(x)}$ — правильная рациональная дробь.

Интегрируя (V) получаем:

$$\boxed{\int \frac{P(x)}{Q(x)}\,dx = \int L(x)\,dx + \int \frac{r(x)}{Q(x)}\,dx}$$

Вывод: Интегрирование неправильной рациональной дроби сводится к интегрированию многочлена и правильной рациональной дроби.

Теорема 1 *(О разложении правильной рациональной дроби на простейшие)***.**
Любая правильная рациональная дробь $\dfrac{P(x)}{Q(x)}$, знаменатель которой можно разложить на множители:

$$Q(x) = (x-x_1)^{k_1}\cdot(x-x_2)^{k_2}\cdot\ldots\cdot(x-x_n)^{k_n}\cdot(x^2+p_1x+q_1)^{s_1}\cdot\ldots\cdot(x^2+p_m+q_m)^{s_m},$$

может быть представлена и при том единственным образом в виде суммы простейших рациональных дробей:

$$\begin{aligned}\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{A_1}{x-x_1} + \frac{B_1}{(x-x_1)^2} + \ldots + \frac{C_1}{(x-x_1)^{k_1}} + \ldots + \frac{A_n}{(x-x_n)} + \frac{B_n}{(x-x_n)^2} + \ldots +\\ + \frac{C_n}{(x-x_n)^{k_n}} + \frac{M_1x+N_1}{x^2+p_1x+q_1} + \ldots + \frac{M_{s_1}x+N_{s_1}}{(x^2+p_1x+q_1)^{s_1}} + \ldots +\\ + \frac{E_1x+F_1}{x^2+p_mx+q_m} + \ldots + \frac{E_{s_m}x+F_{s_m}}{(x^2+p_mx+q_m)^{s_m}}\end{aligned}$$

$$\left.\begin{matrix} A_1,\ B_1,\ \ldots,\ C_1 \\ A_n,\ B_n,\ \ldots,\ C_n \\ M_1,\ N_1,\ \ldots,\ M_{s_1},\ N_{s_1} \\ E_1,\ F_1,\ .,\ E_{s_m},\ F_{s_m}\end{matrix}\right\} \in \mathbb{R} \qquad \begin{matrix} x^2+p_1x+q_1 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ x^2+p_mx+q_m\end{matrix} \quad \text{не имеют действительных корней}$$

$$k_1,\ k_2,\ \ldots,\ k_n,\ s_1,\ \ldots,\ s_m \in \mathbb{N}$$

Пример.

1) $\dfrac{x^2+4}{(x-2)(x-3)^3} = \dfrac{A}{x-2} + \dfrac{B}{x-3} + \dfrac{C}{(x-3)^2} + \dfrac{D}{(x-3)^3}$

2) $\dfrac{x^3+1}{x^2(x^2+1)} = \dfrac{A}{x} + \dfrac{B}{x^2} + \dfrac{Cx+D}{x^2+1}$

3) $\dfrac{x^2+x+13}{(x-1)^2(x^2-4)(x^2+4)^2} = \dfrac{A}{x-1} + \dfrac{B}{(x-1)^2} + \underbrace{\dfrac{Cx+D}{x^2-4}}_{\frac{C}{x-2}+\frac{D}{x+2}} + \dfrac{Ex+F}{x^2+4} + \dfrac{Gx+H}{(x^2+4)^2}$

2.3 Метод неопределённых коэффициентов

Равенство в теореме *о разложении правильной рациональной дроби на простейшие* (**Т. 1**) представляет собой тождество. Поэтому, приводя дроби к общему знаменателю, получим тождество числителей слева и справа. Приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях x получаем СЛАУ для определения неизвестных коэффициентов.

Пример.

$$\int \frac{3x-4}{x(x-2)(x+1)}\,dx \ominus$$

$$\frac{3x-4}{x(x-2)(x+1)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x-2} + \frac{C}{x+1} = \frac{A(x-2)(x+1) + Bx(x+1) + Cx(x-2)}{x(x-2)(x+1)}$$

$$\begin{aligned} 0\cdot x^2 + 3x - 4 &= A(x-2)(x+1) + Bx(x+1) + Cx(x-2) = \\ &= x^2(A+B+C) + (B-A-2C)x - 2A \end{aligned} \tag{$**$}$$

$$\left.\begin{array}{l|r} x^2 & 0 = A+B+C \\ x^1 & 3 = B-A-2C \\ x^0 & -4 = -2A \end{array}\right\} \text{СЛАУ} \qquad A = 2 \quad B = \frac{1}{3} \quad C = -\frac{7}{3}$$

$$\ominus \int \left(\frac{2}{x} + \frac{\frac{1}{3}}{x-2} + \frac{-\frac{7}{3}}{x+1}\right) dx = 2\int \frac{dx}{x} + \frac{1}{3}\int \frac{dx}{x-2} - \frac{7}{3}\int \frac{dx}{x+1} =$$

$$= 2\ln|x| + \frac{1}{3}\ln|x-2| - \frac{7}{3}\ln|x+1| + C, \quad \forall C - const$$

2.4 Метод конкретных значений

После получения тождества числителей $(**)$ подставляем конкретные значения переменной x, так как оно верно для любого x.
Обычно вместо x подставляют действительные корни знаменателя.

Пример.

$$\begin{array}{lrcll} x = 0: & -4 & = & -2A & \Rightarrow \; A = 2 \\ x = 2: & 3\cdot 2 - 4 & = & B\cdot 2\cdot 3 & \Rightarrow \; B = \frac{1}{3} \\ x = -1: & -3-4 & = & -C\cdot(-3) & \Rightarrow \; C = -\frac{7}{3} \end{array}$$

2.5 Выводы

1. **Метод конкретных значений** лучше использовать, когда в знаменателе правильной рациональной дроби нет кратных корней.

2. **Метод неопределённых коэффициентов** лучше использовать, когда в знаменателе правильной рациональной дроби кратные или комплексные (не действительные) корни.

3. Лучше комбинировать два метода.

2.6 Неберущиеся интегралы

1. $\int e^{-x^2}\,dx$ — интеграл Пуассона (теория вероятности)

2. $\int \frac{dx}{\ln x}$ — логарифмический интеграл (теория чисел)

3. $\int \cos x^2\,dx,\ \int \sin x^2\,dx$ — интегралы Френеля (физика)

3 Определённый интеграл. Криволинейная трапеция

3.1 Определённый интеграл

Пусть функция $y = f(x)$ определена на $[a; b]$.

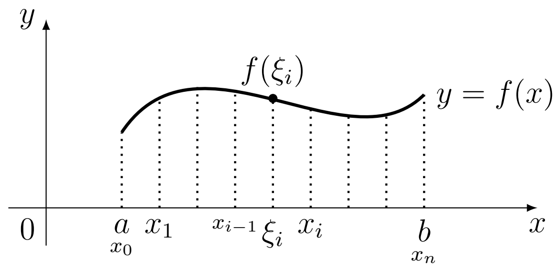
Определение 1. Множество точек $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_i < \ldots < x_n = b$ называется **разбиением отрезка $[a; b]$**, при этом отрезки $[x_{i-1}; x_i]$ называются **отрезками разбиения**.

$i = 1, \ldots, n \quad i = \overline{1, n}$
$\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$ — длина i-го отрезка разбиения $\quad i = \overline{1, n}$
$\lambda = \max\limits_i \Delta x_i$ — диаметр разбиения

Рассмотрим произвольное разбиение $[a; b]$. В каждом из отрезков разбиения $[x_{i-1}; x_i]$ выберем точку $\xi_i,\ i = \overline{1, n}$. Составим сумму

$$\boxed{S_n = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i) \cdot \Delta x_i} \tag{1}$$

(1) — интегральная сумма для функции $y = f(x)$ на $[a; b]$.



Определение 2. **Определённым интегралом** от функции $y = f(x)$ на $[a; b]$ называется <u>конечный</u> предел интегральной суммы (1), когда число отрезков разбиения растёт, а их длины стремятся к нулю.

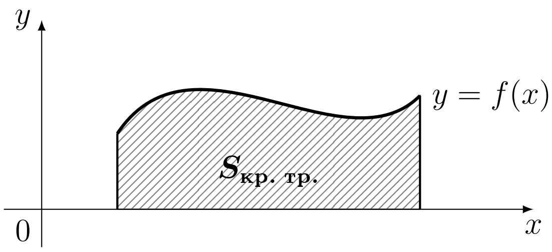
$$\boxed{\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{\lambda \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i) \cdot \Delta x} \tag{2}$$

Предел (2) не зависит от способа разбиения отрезка $[a; b]$ и выбора точек $\xi_i,\ \overline{1, n}$.
$f(x)$ — подынтегральная функция
$f(x)\,dx$ — подынтегральное выражение
$\displaystyle\int_a^b$ — знак определённого интеграла
a — нижний предел интегрирования
b — верхний предел интегрирования

3.2 Криволинейная трапеция

Определение 3. **Криволинейной трапецией** называется фигура, ограниченная графиком функции $y = f(x)$, отрезком $[a; b]$ на Ox, прямыми $x = a$ и $x = b$ параллельными оси Oy.

3.2.1 Геометрический смысл



Определённый интеграл численно равен площади криволинейной трапеции.

$$S_{\text{кр. тр.}} = \int_a^b f(x)\,dx$$

Определение 4. Функция $y = f(x)$ называется **интегрируемой** на $[a; b]$, если существует конечный предел интегральной суммы (1) на $[a; b]$.

Теорема 1 *(Существование определённого интеграла)***.**
Если функция $y = f(x)$ непрерывна на $[a; b]$, то она на этом отрезке интегрируема.

3.3 Свойства определённого интеграла

Теорема 2.
Если функция $y = f(x)$ интегрируема на отрезке $[a; b]$, то имеет место равенство

$$\boxed{\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx}$$

Доказательство.
По определению определённого интеграла (**опр. 2**)

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\cdot\Delta x = \lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)(x_i - x_{i-1}) = -\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)(x_{i-1} - x_i) = -\int_b^a f(x)\,dx$$

■

Теорема 3 *(Аддитивность определённого интеграла)***.**
Если функция $y = f(x)$ интегрируема на каждом из отрезков $[a; c]$, $[c; b]$ $(a < c < b)$, то она интегрируема на $[a; b]$ и верно равенство

$$\boxed{\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx}$$

Доказательство.
Рассмотрим произвольное разбиение $[a; b]$ такое, что одна из точек разбиения совпадает с точкой c:

$$a = x_0 < x_1 < \ldots < x_m = c < x_{m+1} < \ldots < x_n = b$$

Данное разбиение определяет ещё два разбиения:

$$\begin{array}{rl} a = x_0 < x_1 < \ldots < x_{m-1} < x_m = c & \quad \lambda_1 = \max\limits_i \Delta x_i,\ i = \overline{1, m} \\ c = x_m < x_{m+1} < \ldots < x_{n-1} < x_n = b & \quad \lambda_2 = \max\limits_i \Delta x_i,\ i = \overline{m+1, n} \end{array}$$

Так как функция $y = f(x)$ интегрируема на $[a; c]$ и на $[c; b]$, то

$$\int_a^c f(x)\,dx = \lim_{\lambda_1 \to 0} \sum_{i=1}^{m} f(\xi_i) \cdot \Delta x_i$$
$$\int_c^b f(x)\,dx = \lim_{\lambda_2 \to 0} \sum_{i=m+1}^{n} f(\xi_i) \cdot \Delta x_i$$

$\lambda = \max\{\lambda_1; \lambda_2\} \quad \lambda \to 0$
Суммируем интегральные суммы:

$$\sum_{i=1}^{m} f(\xi_i) \cdot \Delta x_i + \sum_{i=m+1}^{n} f(\xi_i) \cdot \Delta x_i = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i) \cdot \Delta x_i$$

Вычислим предел:

$$\lim_{\lambda \to 0} \left(\sum_{i=1}^{m} f(\xi_i) \cdot \Delta x_i + \sum_{i=m+1}^{n} f(\xi_i) \cdot \Delta x_i \right) = \lim_{\lambda \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i) \cdot \Delta x_i$$
$$\lim_{\lambda \to 0} \sum_{i=1}^{m} f(\xi_i) \cdot \Delta x_i + \lim_{\lambda \to 0} \sum_{i=m+1}^{n} f(\xi_i) \cdot \Delta x_i = \lim_{\lambda \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i) \cdot \Delta x_i$$
$$\lim_{\lambda_1 \to 0} \sum_{i=1}^{m} f(\xi_i) \cdot \Delta x_i + \lim_{\lambda_2 \to 0} \sum_{i=m+1}^{n} f(\xi_i) \cdot \Delta x_i = \lim_{\lambda \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i) \cdot \Delta x_i$$

Из последнего равенства следует, что $f(x)$ — интегрируема на $[a; b]$ и верно равенство

$$\int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx$$

■

Теорема 4.
Если C — $const$, то

$$\boxed{\int_a^b c\,dx = c \cdot (b-a)}$$

Доказательство.

$$\int_a^b c\,dx = \lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n} c\cdot \Delta x_i = c\cdot \lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n} x_i - x_{i-1} = c\cdot (b-a)$$

■

Теорема 5.
Если функции $f_1(x),\ f_2(x)$ интегрируемы на $[a;b]$, то их линейная комбинация

$$\lambda_1 f_1(x) + \lambda_2 f_2(x),\ \text{где } \lambda_1,\ \lambda_2 \in \mathbb{R}$$

интегрируема на $[a;b]$ и верно равенство:

$$\int_a^b \Big(\lambda_1 f_1(x) + \lambda_2 f_2(x)\Big)\,dx = \lambda_1 \int_a^b f_1(x)\,dx + \lambda_2 \cdot \int_a^b f_2(x)\,dx$$

Доказательство.

$$\begin{aligned}
\int_a^b \Big(\lambda_1 f_1(x) + \lambda_2 f_2(x)\Big)\,dx &= \lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n}\Big(\lambda_1 f_1(\xi_i) + \lambda_2 f_2(\xi_i)\Big)\cdot \Delta x_i = \\
&= \lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n}\Big(\lambda_1 f_1(\xi_i)\cdot \Delta x_i + \lambda_2 f_2(\xi_i)\cdot \Delta x_i\Big) = \\
&= \lim_{\lambda\to 0}\left(\sum_{i=1}^{n}\lambda_1 f_1(\xi_i)\cdot \Delta x_i + \sum_{i=1}^{n}\lambda_2 f_2(\xi_i)\cdot \Delta x_i\right) = \\
&= \lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n}\lambda_1 f_1(\xi_i)\cdot \Delta x_i + \lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n}\lambda_2 f_2(\xi_i)\cdot \Delta x_i = \\
&= \lambda_1 \lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n} f_1(\xi_i)\cdot \Delta x_i + \lambda_2 \lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n} f_2(\xi_i)\cdot \Delta x_i = \\
&= \lambda_1 \int_a^b f_1(x)\,dx + \lambda_2 \int_a^b f_2(x)\,dx = \\
&= \int_a^b \Big(\lambda_1 f_1(x) + \lambda_2 f_2(x)\Big)\,dx
\end{aligned}$$

■

Следствие 5.1.

$$\int_a^a f(x)\,dx = 0$$

Теорема 6 *(О сохранении определённым интегралом знака подынтегральной функции).*
Если $f(x)$ интегрируема и неотрицательна на $[a;b]$, то

$$\boxed{\int_a^b f(x)\,dx \geqslant 0}$$

Доказательство.

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\cdot\Delta x_i$$

Δx_i — длины отрезков разбиения $\quad \Delta x_i > 0$
$f(\xi_i) \geqslant 0$ по условию

$$f(\xi_i)\cdot\Delta x_i \geqslant 0,\ i = \overline{i,n}$$

$$\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\cdot\Delta x_i \geqslant 0 \quad \text{как сумма неотрицательных чисел}$$

$$\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\cdot\Delta x_i \geqslant 0 \quad \text{по следствию из теоремы } \textit{о сохранении функцией знака своего предела}$$

$$\Downarrow$$

$$\int_a^b f(x)\,dx \geqslant 0$$

■

Теорема 7 *(Об интегрировании неравенства).*
Пусть функции $f(x)$ и $g(x)$ интегрируемы на $[a;b]$ и $\forall x \in [a;b]\colon f(x) \geqslant g(x)$, то

$$\boxed{\int_a^b f(x)\,dx \geqslant \int_a^b g(x)\,dx}$$

Доказательство.
По условию $f(x) \geqslant g(x),\ \forall x \in [a;b]$. Обозначим $h(x) = f(x) - g(x) \geqslant 0$.
По теореме 6

$$\int_a^b \big(f(x) - g(x)\big)\,dx \geqslant 0$$

По теореме 5:

$$\int_a^b f(x)\,dx - \int_a^b g(x)\,dx \geqslant 0$$
$$\Downarrow$$
$$\int_a^b f(x)\,dx \geqslant \int_a^b g(x)\,dx$$

■

Теорема 8 *(Об оценке модуля определённого интеграла)***.**
Если функция $f(x)$ и $|f(x)|$ интегрируемы на $[a;b]$, то справедливо неравенство

$$\boxed{\left|\int_a^b f(x)\,dx\right| \leqslant \int_a^b \big|f(x)\big| dx}$$

Доказательство.
$\forall x \in [a;b]$ справедливо неравенство

$$-\big|f(x)\big| \leqslant f(x) \leqslant \big|f(x)\big|$$

По теореме 5 и 7:

$$-\int_a^b \big|f(x)\big|\,dx \leqslant \int_a^b f(x)\,dx \leqslant \int_a^b \big|f(x)\big|\,dx$$

Сворачиваем двойное неравенство:

$$\left|\int_a^b f(x)\,dx\right| \leqslant \int_a^b \big|f(x)\big| dx$$

■

Теорема 9 *(О среднем значении для определённого интеграла)***.**
Если $f(x)$ непрерывна на $[a;b]$, то

$$\exists\, c \in [a;b]\colon\ f(c) = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx$$

Доказательство.
Так как функция $y = f(x)$ непрерывна на $[a;b]$, то по теореме *Вейерштрасса* она достигает своего наибольшего и наименьшего значения.
То есть $\exists\, m, M \in \mathbb{R},\ \forall x \in [a;b]\colon m \leqslant f(x) \leqslant M$
По теореме 7:

$$\int_a^b m\,dx \leqslant \int_a^b f(x)\,dx \leqslant \int_a^b M\,dx$$

По теореме 5:

$$m\int_a^b dx \leqslant \int_a^b f(x)\,dx \leqslant M\int_a^b dx$$

По теореме 4:

$$m(b-a) \leqslant \int_a^b f(x)\,dx \leqslant M(b-a) \quad | : (b-a)$$

Так как функция $y = f(x)$ непрерывна на $[a;b]$, то по теореме *Больцано-Коши* она принимает все свои значения между наибольшим и наименьшим значением.

$$m \leqslant \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx \leqslant M$$

По теореме *Больцано-Коши* $\exists\, c \in [a;b]$:

$$f(c) = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx$$

■

Теорема 10 *(Об оценке определённого интеграла)***.**
Пусть функции $f(x)$ и $g(x)$ интегрируемы на $[a;b]$ и $\forall x \in [a;b]$: $m \leqslant f(x) \leqslant N,\ g(x) \geqslant 0$. Тогда

$$\boxed{m\int_a^b g(x)\,dx \leqslant \int_a^b f(x)\,g(x)\,dx \leqslant M\int_a^b g(x)\,dx}$$

Доказательство.
Так как $\forall x \in [a;b]$ верны неравенства

$$\begin{aligned} m \leqslant f(x) \leqslant M &\quad | \cdot g(x) \\ g(x) \geqslant 0 &\quad\quad m, M \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

$$m \cdot g(x) \leqslant f(x) \cdot g(x) \leqslant M \cdot g(x)$$

По теореме 7 и 5:

$$m\int_a^b g(x) \leqslant \int_a^b f(x)\,g(x)\,dx \leqslant M\int_a^b g(x)\,dx$$

■

Следствие 10.1. $g(x) \equiv 1,\ \forall x \in [a;b]$

$$m(b-a) \leqslant \int_a^b f(x)\,dx \leqslant M(b-a)$$

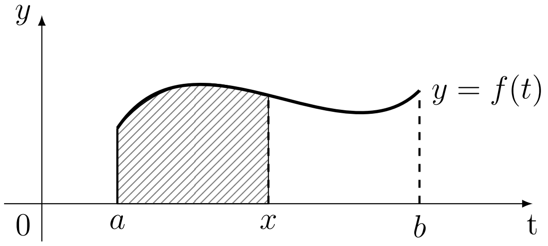
3.4 Определённый интеграл с переменным верхним пределом интегрирования

Пусть $f(x)$ непрерывна на $[a;b]$. Рассмотрим $\int_a^b f(x)\,dx$. Закрепим нижний предел интегрирования a. Изменяем верхний предел интегрирования b, чтобы подчеркнуть изменение верхнего предела интегрирования.

$b \longrightarrow x \quad x \in [a;b] \quad [a;x] \subset [a;b] \quad I(x) = \displaystyle\int_a^x f(x)\,dt.$

Определение 1. **Определённым интегралом с переменным верхним пределом интегрирования** от непрерывной функции $f(x)$ на $[a;b]$ называется интеграл вида

$$\boxed{I(x) = \int_a^x f(t)\,dt}, \text{ где } x \in [a;b]$$



$I(x)$ — переменная площадь криволинейной трапеции с основанием $[a;x] \subset [a;b]$.

3.4.1 Свойства

Теорема 1 *(Непрерывность $I(x)$)*.
Если функция $f(x)$ на $[a;b]$ непрерывна, то $I(x) = \int_a^x f(x)\,dt$ — непрерывна на $[a;b]$.

Доказательство.
Рассмотрим $I(x) = \int_a^x f(t)\,dt$

$$I(x+\Delta x) = \int_a^{x+\Delta x} f(t)\,dt$$

$$\Delta I(x) = I(x+\Delta x) - I(x) = \int_a^{x+\Delta x} f(t)\,dt - \int_a^x f(t)\,dt \overset{*,\text{ Т3}}{=\!=}$$
$$= \cancel{\int_a^x f(t)\,dt} + \int_x^{x+\Delta x} f(t)\,dt - \cancel{\int_a^x f(t)\,dt} = \int_a^{x+\Delta x} f(t)\,dt \overset{\text{Т9}}{=\!=}$$
$$= f(c)\cdot(x+\Delta x - x) = f(c)\cdot\Delta x, \text{ где } c \in [x; x+\Delta x]$$

$*$ — Так как функция $f(x)$ непрерывна на $[a;b]$, то $f(x)$ интегрируема на $[a;b]$ $\Rightarrow$ применяем свойство аддитивности определённого интеграла.

$$\lim_{\Delta x \to 0} \Delta I(x) = \lim_{\Delta x \to 0} f(c)\cdot\Delta x = 0$$

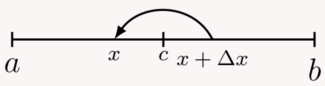
По определению непрерывной функций $\Rightarrow$ $I(x) = \int_a^x f(t)\,dt$ непрерывна на $[a;b]$. ■

Теорема 2 *(О производной $I(x)$)*.
Если функция $y = f(x)$ непрерывна на $[a;b]$, то $\forall x \in [a;b]$ верно равенство

$$\boxed{\big(I(x)\big)' = \left(\int_a^x f(t)\,dt\right)' = f(x)}$$

Доказательство.

$$\big(I(x)\big)' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta I(x)}{\Delta x} \overset{\text{T1}}{=\!=} \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(c)\cdot \Delta x}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} f(c) \overset{*}{=\!=} f(x)$$

$*$: 

при $\Delta x \to 0$ $\quad x + \Delta x \to x \quad c \to x$

■

Следствие 2.1. Функция $I(x)$ — первообразная функции $f(x)$ на $[a;b]$, так как по теореме 2 $\big(I(x)\big)' = f(x)$.

3.4.2 Формула Ньютона-Лейбница

Теорема 3.
Пусть функция $f(x)$ — непрерывна на $[a;b]$. Тогда

$$\boxed{\int_a^b f(x)\,dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a)}$$

где $F(x)$ — первообразная $f(x)$.

Доказательство.
Пусть $F(x)$ первообразная $f(x)$ на $[a;b]$. По следствию из теоремы 2 $I(x)$ — первообразная $f(x)$ на $[a;b]$.
По свойству первообразной:

$$I(x) - F(x) = C$$
$$I(x) = F(x) + C, \text{ где } C \text{ — } const$$

$$\int_a^x f(t)\,dt = F(x) + C, \text{ где } C \text{ — } const \tag{$\vee$}$$

• $x = a$:

$$\int_a^a f(t)\,dt = F(a) + C$$
$$0 = F(a) + C$$
$$C = -F(a)$$

$C = -F(a)$ подставим в $(\vee)$:

$$\int_a^x f(t)\,dt = F(x) - F(a)$$

- $x = b$:

$$\boxed{\int_a^b f(t)\,dt = F(b) - F(a)}$$

■

3.5 Методы вычисления определённого интеграла

3.5.1 Метод интегрирования по частям

Теорема 1.
Пусть функции $u = u(x)$ и $v = v(x)$ непрерывно дифференцируемы на $[a; b]$. Тогда имеет место равенство

$$\boxed{\int_a^b u\,dv = u\,v\Big|_a^b - \int_a^b v\,du}$$

Доказательство.
Рассмотрим произведение функций $u \cdot v$.
Дифференцируем:

$$\begin{aligned} d(u \cdot v) &= v\,du + u\,dv \\ u\,dv &= d(uv) - v\,du \end{aligned}$$

Интегрируем:

$$\int_a^b u\,dv = \int_a^b \big(d(uv) - v\,du\big) = \int_a^b d(uv) - \int_a^b v\,du - u\,v\Big|_a^b - \int_a^b v\,du$$

■

Пример.

$$\int_1^e \ln x\,dx = \begin{vmatrix} u = \ln x & du = \dfrac{1}{x}\,dx \\ dv = dx & v = x \end{vmatrix} = x\,\ln x\Big|_1^e - \int_1^e x \cdot \frac{1}{x}\,dx = (e\ln e - 1 \cdot \ln 1) - x\Big|_1^e =$$
$$= e - (e - 1) = \cancel{e} - \cancel{e} + 1 = 1$$

3.5.2 Метод подстановки (замена переменной)

Теорема 2.
Пусть

1. $y = f(x)$ непрерывна на $[a; b]$
2. $x = \varphi(t)$ непрерывно дифференцируема при $t \in [t_1; t_2]$
3. при $t \in [t_1; t_2]$ значения функции $\varphi(t)$ не выходят за пределы $[a; b]$
4. $\varphi(t_1) = a,\ \varphi(t_2) = b$

Тогда $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx = \begin{vmatrix} x = \varphi(t), & x_н = a, & t_н = t_1 \\ dx = \varphi'(t)\,dt, & x_в = b, & t_в = t_2 \end{vmatrix} = \int_{t_1}^{t_2} f\big(\varphi(t)\big)\varphi'(t)\,dt$

Доказательство.
Так как

1. $y = f(x)$ непрерывна на $[a; b]$, а
2. $x = \varphi(t)$ непрерывна на $[t_1; t_2]$, то

сложная $y = f\big(\varphi(t)\big)$ непрерывна на $[t_1; t_2]$ по теореме *о непрерывности сложной функции.*

Так как $y = f(x)$ непрерывна на $[a; b]$, а функция $f\big(\varphi(t)\big)\cdot\varphi'(t)$ — непрерывна на $[t_1; t_2]$, то существует определённый и неопределённый интеграл от этих функций.

Пусть $F(x)$ — первообразная функции $f(x)$ на $[a; b]$. В силу инвариантности неопределённого интеграла $F\big(\varphi(t)\big)$ — первообразная функции $f\big(\varphi(t)\big)$ на $[t_1; t_2]$.
Тогда

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(x)\Big|_a^b \overset{\text{Н-Л}}{=\!=} \boxed{F(b) - F(a)}$$

$$\int_{t_1}^{t_2} f\big(\varphi(t)\big)\varphi'(t)\,dt = F\big(\varphi(t)\big)\Big|_{t_1}^{t_2} \overset{\text{Н-Л}}{=\!=} F\big(\varphi(t_2)\big) - F\big(\varphi(t_1)\big) = \boxed{F(b) - F(a)}$$

■

Замечание.
⊕ При замене переменной в определённом интеграле обратную замену не делают.
⊖ Нужно не забыть изменить пределы интегрирования.

Пример.

$$\int_1^e \frac{\ln x}{x}\,dx = \int_1^e \ln x\,d(\ln x) \ominus \frac{\ln^2 x}{2}\Big|_1^e = \frac{\ln^2 e}{2} - \frac{\ln^2 1}{2} = \frac{1}{2}$$

$$\ominus \begin{vmatrix} \ln x = t \\ x_н = 1,\ t_н = 0 \\ x_в = e,\ t_в = 1 \end{vmatrix} = \int_0^1 t\,dt = \frac{t^2}{2}\Big|_0^1 = \frac{1}{2}$$

3.6 Интегрирование чётных и нечётных функций по симметричному относительно начала координат промежутку

Теорема 1.
Пусть функция $y = f(x)$ непрерывна на $[-a; a]$, где $a \in \mathbb{R},\ a > 0$. Тогда

$$\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = \begin{cases} 2\displaystyle\int_0^a f(x)\,dx, & f \text{ — чётная} \\ 0, & f \text{ — нечётная} \end{cases}$$

Доказательство.

$$\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = \int_{-a}^{0} f(x)\,dx + \int_0^a f(x)\,dx \ominus$$

$$\int_{-a}^{0} f(x)\,dx = \begin{vmatrix} x = -t, & dx = -dt \\ x_{\text{н}} = -a, & t_{\text{н}} = a \\ x_{\text{в}} = 0, & t_{\text{в}} = 0 \end{vmatrix} = \int_a^0 f(-t)\,(-dt) = \int_0^a f(-t)\,dt =$$

$$= \begin{cases} \displaystyle\int_0^a f(t)\,dt, & f \text{ — чётная} \\ -\displaystyle\int_0^a f(t)\,dt, & f \text{ — нечётная} \end{cases}$$

$$\ominus \int_0^a f(x)\,dx + \begin{cases} \displaystyle\int_0^a f(x)\,dx, & f \text{ — чётная} \\ -\displaystyle\int_0^a f(x)\,dx, & f \text{ — нечётная} \end{cases} = \begin{cases} 2\displaystyle\int_0^a f(x)\,dx, & f \text{ — чётная} \\ 0, & f \text{ — нечётная} \end{cases}$$

■

Пример.

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos x\,dx \ominus \sin x\Big|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} = \sin\frac{\pi}{2} - \sin\left(-\frac{\pi}{2}\right) = 1 - (-1) = 2$$

$$\ominus\ 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos\,dx = 2$$

Пример.

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sin x\,dx \ominus -\cos x\Big|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} = -\left(\cos\frac{\pi}{2} - \cos\left(-\frac{\pi}{2}\right)\right) = 0$$

Пример.

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos^2 x\,\sin^3 x\,dx = 0 \qquad \text{т.к. } \cos^2 x\,\sin^3 x = y \text{ нечётная функция на } [-\pi; \pi]$$

3.7 Интегрирование периодических функций

Теорема 2.
Пусть $f(x)$ непрерывная периодическая функция с периодом T. Тогда

$$\int_a^{a+T} f(x)\,dx = \int_0^T f(x)\,dx, \quad \forall a \in \mathbb{R}$$

Доказательство.

$$\int_a^{a+T} f(x)\,dx = \int_a^0 f(x)\,dx + \int_0^T f(x)\,dx + \int_T^{T+a} f(x)\,dx$$

$$\int_T^{T+a} f(x)\,dx = \left| \begin{array}{ll} t = x - T, & x = t + T,\ dx = dt \\ x_{\text{н}} = T, & t_{\text{н}} = 0 \\ x_{\text{в}} = T + a, & t_{\text{в}} = a \end{array} \right| = \int_0^a f(t+T)\,dt \overset{\text{период.}}{=\!=\!=} \int_0^a f(t)\,dt$$

$$\int_a^{a+T} f(x)\,dx = \int_a^0 f(x)\,dx + \int_0^T f(x)\,dx + \int_0^a f(x)\,dx$$

$$\int_a^{a+T} f(x)\,dx = \cancel{-\int_0^a f(x)\,dx} + \int_0^T f(x)\,dx + \cancel{\int_0^a f(x)\,dx}$$

$$\int_a^{a+T} f(x)\,dx = \int_0^T f(x)\,dx, \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

■

Пример.

$$\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{5\pi}{2}} \sin x\,dx = \int_{\frac{\pi}{2}}^{2\pi+\frac{\pi}{2}} \sin x\,dx = \int_0^{2\pi} \sin x\,dx = 0$$

4 Приложения определённого интеграла

4.1 Площадь плоской фигуры

4.1.1 Прямоугольная декартовая система координат

Пусть функция $y = f(x)$ непрерывна на $[a; b]$ и $\forall x \in [a; b]$: $f(x) \geqslant 0$. Из геометрического смысла определённого интеграла:

$$\boxed{S = \int_a^b f(x)\,dx} \tag{1}$$

Этапы вывода формулы:

1. Разбиваем $[a; b]$ точками $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_i < \ldots < x_n = b$
2. $[x_{i-1}; x_i]$, $i = \overline{1, n}$ — отрезки разбиения
   $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$ — длины отрезков разбиения
3. $\forall \xi_i \in [x_{i-1}; x_i]$, $i = \overline{1, n}$ $\qquad f(\xi_i)$
   Криволинейную трапецию с основанием Δx_i заменяем прямоугольником длины $f(\xi_i)$.
   Криволинейная трапеция с основанием $[a; b]$ заменяется на ступенчатую фигуру.
4. $\lambda = \max\limits_i \Delta x_i$
   $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i) \cdot \Delta x_i$ — интегральная сумма
5. $\displaystyle\lim_{\lambda \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\xi) \cdot \Delta x_i = \boxed{\int_a^b f(x)\,dx = S}$

Следствие 1.1. Если функция $y = f(x)$ непрерывна на $[a; b]$ и $f(x) < 0$ $\forall x \in [a; b]$, то

$$\boxed{S = -\int_a^b f(x)\,dx} \tag{2}$$

Следствие 1.2. Пусть функция ограничена графиками функции $\begin{cases} y_1 = f_1(x) \\ y_2 = f_2(x) \end{cases}$, непрерывных и неотрицательных на $[a; b]$. Тогда

$$\boxed{S = \int_a^b \Big(f_1(x) - f_2(x)\Big)\,dx} \tag{3}$$

Следствие 1.3. Если фигура симметрична относительно хотя бы одной из координатных осей, то

$$S_{\text{ф}} = 2S_{\text{пол}}$$

Следствие 1.4. Если функция $y = f(x)$ конечное число раз меняет знак на $[a;b]$, то определённый интеграл от этой функции на $[a;b]$ равен алгебраической сумме площадей соответствующих криволинейных трапеций.

$$S = \int_a^b f(x)\,dx = -S_1 + S_2 - S_3$$

Пример. $S_ф$ — ? $\quad x = y^2,\ x = a$

$S_а = 2 \cdot S_{пол}$

$S_{пол} = \displaystyle\int_0^a \sqrt{x}\,dx = \left.\frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}\right|_0^a = \frac{2}{3}a\sqrt{a}$

$S_ф = \dfrac{4}{3}a\sqrt{a}$

4.1.2 Параметрически заданная функция

$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t),\ t \in [t_1;t_2] \end{cases}$

$x(t),\ y(t)$ — непрерывно дифференцируемы при $t \in [t_1;t_2]$
$x(t_1) = a, \quad x(t_2) = b, \quad x(t) \geqslant 0,\ \forall t \in [t_1;t_2]$

Тогда:

$$S_ф = \int_a^b y(x)\,dx = \begin{vmatrix} y = y(t), & a = x(t_1) \\ x = x(t), & b = x(t_2) \\ dx = x'(t)\,dt & \end{vmatrix} = \boxed{\int_{t_1}^{t_2} y(t)x'(t)\,dt = S} \tag{4}$$

Замечание. Изменение параметра $t \in [t_1;t_2]$ способствует росту переменной x. (обход параметра $t \in [t_1;t_2]$ происходит по часовой стрелке)

Пример.

$\begin{cases} x = a\cos^3 t \\ y = a\sin^3 t \end{cases}$

t	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
x	a	0	$-a$	0	a
y	0	a	0	$-a$	0

$S_ф = 4S^*$

$S^* = \displaystyle\int_{\frac{\pi}{2}}^0 \underbrace{a\sin^3 t}_{y(t)} \cdot \underbrace{3a\cdot\cos^3 t\cdot(-\sin t)}_{x'(t)}\,dt = 3a^2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^4 t\cos^3 t\,dt = \ldots = \frac{3\pi a^2}{32}$

$S_ф = \dfrac{3\pi a^2}{8}$

4.1.3 Полярная система координат

Определение 1. **Криволинейный сектор** — это фигура, ортогональная лучами $\varphi = \alpha,\ \varphi = \beta$ и графиком непрерывной кривой $r = r(\varphi),\ \varphi \in [\alpha; \beta]$

Этапы вывода формулы:

1. Разбиваем сектор A_0OA_n лучами $\alpha = \varphi_0 < \varphi_1 < \ldots < \varphi_n = \beta$ на углы $\angle A_0OA_1$, $\angle A_1OA_2$, …, $\angle A_{n-1}OA_n$
   $\Delta\varphi_i = \varphi_i - \varphi_{i-1}$ — величина $\angle A_{i-1}OA_1$ в радианах
   $\lambda = \max\limits_i \Delta\varphi_i,\ i = \overline{1, n}$

2. $\forall$ выберем и проведём $\Psi_i,\ \Psi_i \in \angle A_{i-1}OA_i$
   Находим $r = r(\Psi_i)$
   $M_i\big(\Psi_i,\ r(\Psi_i)\big),\quad M_i \in \angle A_{i-1}OA_i,\quad M_i \in r = r(\varphi)$

3. Заменяем каждый i-ый криволинейный сектор на круговой сектор $R = r(\Psi_i),\ i = \overline{1, n}$
   $S_i = \dfrac{1}{2}R^2 \cdot \Delta\varphi_i$ — площадь i-го кругового сектора
   $R = r(\Psi_i)$
   $$\sum_{i=1}^{n} S_i = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{2} r^2(\Psi_i) \cdot \Delta\varphi_i = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} r^2(\Psi_i) \cdot \Delta\varphi_i$$

4. Вычисляем предел
   $$\lim_{\lambda \to 0} \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} r^2(\Psi_i) \cdot \Delta\varphi_i = \boxed{\frac{1}{2} \int_{\alpha}^{\beta} r^2\, d\varphi = S} \tag{5}$$

Пример. $S_ф$ — ?
Вне окружности $r = 1$ Внутри окружности $r = 1 + \cos\varphi$

$$\begin{cases} r = 1 \\ r = 1 + \cos\varphi \end{cases} \qquad \cos\varphi = 0,\ \varphi = \pm\frac{\pi}{2}$$

φ	0	$\frac{\pi}{2}$	π
r	2	1	0

$$S_ф = 2\,(S_{кар} - S_{окр}) = 2\left(\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \big(1 + \cos\varphi\big)^2 d\varphi - \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} 1^2\, d\varphi\right) = \ldots = 2\left(1 + \frac{\pi}{8}\right) = 2 + \frac{\pi}{4}$$

4.2 Объём тела

Пусть T — тело, S — площадь сечения тела плоскостью перпендикулярной Ox или площадь поперечного сечения.
$S = S(x)$ — непрерывная функция на $[a; b]$

1. Разбиваем отрезок $[a; b]$ точками $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_{i-1} < x_i < \ldots < x_n = b$
   Отрезки разбиения $[x_{i-1}; x_i]$
   $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$ — длина отрезка разбиения
   $a = \max\limits_i \Delta x_i, \; i = \overline{1, n}$

2. Проводим плоскости

$$\begin{cases} x = x_0 = a \\ \cdots\cdots\cdots \\ x = x_{i-1} \\ x = x_i \\ \cdots\cdots\cdots \\ x = x_n = b \end{cases} \text{— эти плоскости разбивают тело } T \text{ на слои}$$

3. $\forall \xi_i \in [x_{i-1}; x_i], \; i = \overline{1, n}$
   Проводим плоскость $x = \xi_i$. Находим $S(\xi_i)$.
   Каждый слой заменяем цилиндром с основанием $S(\xi_i)$ и высотой $\Delta x_i, \; i = \overline{1, n}$

4. $V_{\text{ц}} = S(\xi_i) \cdot \Delta x_i$ — объём i-го цилиндра
   $\sum\limits_{i=1}^{n} S(\xi_i) \cdot \Delta x_i$ — интегральная сумма

5. Вычисляем предел

$$\lim_{\lambda \to 0} \sum_{i=1}^{n} S(\xi_i) \cdot \Delta x_i = \boxed{\int_a^b S(x)\, dx = V_T} \tag{6}$$

4.3 Тела вращения

4.3.1 Прямоугольная декартовая система координат

Вокруг оси Ox

Рассмотрим криволинейную трапецию, ограниченную графиком непрерывной функции $y = f(x)$, $x = a$, $x = b$ и осью Ox. Пусть $\forall x \in [a; b]\colon f(x) \geqslant 0$
Поперечное сечение — круг
$S_{\text{круга}} = \pi R^2 = (R = y) = \pi y^2$

$$\boxed{V_{Ox} = \pi \int_a^b y^2\, dx} \tag{7}$$

Пусть криволинейная трапеция ограничена графиками непрерывных функций $y_1 = f_1(x)$ и $y_2 = f_2(x)$, прямыми $x = a$, $x = b$

$$V_{Ox} = V_{Ox}^1 - V_{Ox}^2 = \pi \int_a^b y_1^2\, dx - \pi \int_a^b y_2^2\, dx = \boxed{\pi \int_a^b \left(y_1^2 - y_2^2\right) dx = V_{Ox}} \tag{8}$$

Вокруг Oy

Пусть непрерывная функция $x = f(y),\ y \in [c; d]$

$$\boxed{V_{Oy} = \pi \int_c^d x^2\, dy} \tag{9}$$

Пусть $y = f(x)$ — непрерывная на $[a; b]$ функция, $\forall x \in [a; b]\colon f(x) \geqslant 0$.
Криволинейная трапеция ограничена графиком функции $y = f(x)$, $x = a$, $x = b$ и осью Ox.
Аналогично формула (6) и (8):

$$\boxed{V_{Oy} = 2\pi \int_a^b x|y|\, dx} \qquad \begin{matrix} a \geqslant 0 \\ y \geqslant 0 \end{matrix} \tag{10}$$

Следствие 1.1. Если функция $y = f(x)$ задана параметрически:

$$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases} \text{— непрерывно дифференцируемы на } [t_1; t_2]$$

$$\begin{matrix} x(t_1) = a & y(t_1) = c \\ x(t_2) = b & y(t_2) = d \end{matrix} \tag{$*$}$$

Тогда:

$$\begin{cases} V_{Ox} \overset{(7)}{=\!=} \pi \int_a^b y^2\,dx \overset{(*)}{=\!=} \pi \int_{t_1}^{t_2} y^2(t)\,x'(t)\,dt \\ V_{Oy} \overset{(9)}{=\!=} \pi \int_c^d x^2\,dy \overset{(*)}{=\!=} \pi \int_{t_1}^{t_2} x^2(t) y'(t)\,dt \\ V_{Oy} \overset{(10)}{=\!=} \pi \int_a^b x(t) y(t) x'(t)\,dt \end{cases} \tag{11}$$

4.3.2 Полярная система координат

Пусть $r = r(\varphi)$ — непрерывная на $[\alpha; \beta]$.
Криволинейный сектор ограничен графиком непрерывной функции $r = r(\varphi)$ и $\varphi = \alpha$, $\varphi = \beta$.

$$\boxed{V_{Or} = \frac{2}{3}\pi \int_\alpha^\beta r^3 \sin\varphi\,d\varphi} \tag{12}$$

Пример.

$$\begin{array}{l|} y = e^{-2x} - 1 \\ y = e^{-x} + 1 \\ x = 0 \\ \hline V_{Ox} \text{ — ?} \\ V_{Oy} \text{ — ?} \end{array}$$

$$\begin{array}{lll} e^{-2x} - 1 = e^{-x} + 1 & t^2 - t - 2 = 0 & \\ e^{-2x} - e^{-x} - 2 = 0 & t_1 = 2 & e^{-x} = 2 \\ e^{-x} = t & t_2 = -1\ \varnothing & \quad x = -\ln 2 \end{array}$$

$$V_{Ox} = V_1 - V_2 = \pi \int_{-\ln 2}^{0} \Big((e^{-x} + 1)^2 - (e^{-2x} - 1)^2 \Big)\,dx = \ldots = \frac{11}{4}\pi$$

$$V_{Oy} = V_1 - V_2 = 2\pi \int_0^{\ln 2} x\Big(e^x + 1 - (e^{2x} - 1)\Big)\,dx = \ldots = \ln^2 2 \cdot \frac{1}{4}$$

Пример.

$$\left.\begin{array}{l}\begin{cases}x = a\cos^3 t\\ y = a\sin^3 t\end{cases}\\ \hline V_{Ox} - ?\end{array}\right|$$

$$V_{Ox}^* = \pi\int_{\frac{\pi}{2}}^{0}\left(a\sin^3 t\right)^2\cdot\underbrace{3a\cos^2 t(-\sin t)}_{x'}dt = 3\pi a^3\int_{\frac{\pi}{2}}^{0}\sin^6 t\cos^2 t\,d(\cos t) =$$

$$= 3\pi a^3\sin^3\int_{\frac{\pi}{2}}^{0}\left(1-\cos^2 t\right)^3\cos^2 t\,d(\cos t) = \ldots = \frac{128}{105}\pi$$

$$V_{Ox} = 2V_{Ox}^* = \frac{256}{105}\pi$$

Пример.

$$\left.\begin{array}{l} r = a\sin^2\varphi\\ \hline V_{Or} - ?\end{array}\right|$$

φ	0	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{3\pi}{4}$	π
r	0	a	$\frac{a}{2}$	$\frac{a}{2}$	0

$\forall\varphi\in[0;2\pi]$

$$V_{Or} = \frac{2}{3}\pi\int_0^{\pi}\left(a\sin^2\varphi\right)^3\sin\varphi\,d\varphi = -\frac{2}{3}\pi a^3\int_0^{\pi}\sin^6\varphi\,d\cos\varphi =$$

$$= -\frac{2}{3}\pi a^3\int_0^{\pi}\left(1-\cos^2\varphi\right)^3 d\cos\varphi = \ldots = \frac{64}{105}\pi a^3$$

4.4 Длина дуги

4.4.1 Прямоугольная декартовая система координат

Пусть $y = f(x)$ непрерывна на $[a; b]$.
$M_0(x_0, y_0) \quad M(x, y)$
Δx — приращение $x \quad \Delta y$ — приращение y

$$\begin{aligned} x &\to x + \Delta x \\ y &\to x + \Delta y \end{aligned} \quad M(x, y) \to M_1(x + \Delta x, y + \Delta y)$$

l_0 — $\overset{\frown}{M_0 M}$ — дуга кривой $\quad \Delta l$ — приращение дуги кривой $\quad \Delta l = \overset{\frown}{M M_1}$
Найдём l'_x — ?
$l'_x = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta l}{\Delta x}$
$\triangle M M_1 A \quad MA = \Delta x \quad AM_1 = \Delta y$

$MM_1^2 = \Delta x^2 + \Delta y^2 \quad | \cdot \Delta l^2 \mid : \Delta l^2$
$\left(\dfrac{MM_1}{\Delta l}\right)^2 \cdot (\Delta l)^2 = \Delta x^2 + \Delta y^2 \quad | : \Delta x^2$
$\left(\dfrac{MM_1}{\Delta l}\right)^2 \cdot \left(\dfrac{\Delta l}{\Delta x}\right)^2 = 1 + \left(\dfrac{\Delta y}{\Delta x}\right)^2$

Вычислим предел при $\Delta x \to 0$.
Левая часть:

$$\lim_{\Delta \to 0} \left(\frac{MM_1}{\Delta l}\right)^2 \cdot \left(\frac{\Delta l}{\Delta x}\right)^2 = \left| \begin{array}{l} \text{при } \Delta x \to 0 \quad M \to M_1 \\ \Delta l \to MM_1 \quad \text{дуга } \to \text{ хорде} \end{array} \right| = \lim_{\Delta x \to 0} 1^2 \cdot \left(\frac{\Delta l}{\Delta x}\right)^2 = (l'_x)^2$$

Правая часть:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \left(1 + \left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right)^2\right) = 1 + \lim_{\Delta x \to 0} \left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right)^2 = 1 + (y'_x)^2$$

Получаем:

$$\begin{aligned} (l'_x)^2 &= 1 + (y'_x)^2 \\ l'_x &= \sqrt{1 + (y'_x)^2} \quad | \cdot dx \\ l'_x \, dx &= \sqrt{1 + (y'_x)^2} \, dx \\ dl &= \sqrt{1 + (y'_x)^2} \, dx \end{aligned} \tag{$\vee$}$$

$$\boxed{l = \int_a^b \sqrt{1 + (y'_x)^2} \, dx} \tag{13}$$

4.4.2 Параметрически заданная функция

$$(\vee) = dl = \sqrt{1+(y'_x)^2}\,dx = \sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\,dx = \sqrt{\frac{(dx)^2+(dy)^2}{(dx)^2}}\,dx = \sqrt{(dx)^2+(dy)^2} = dl \tag{$\vee\vee$}$$

Пусть кривая задана параметрически:

$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}$ — непрерывно дифференцируемые функции на $[t_1; t_2]$.

$x(t_1) = a, \quad x(t_2) = b$

$$\begin{aligned}(\vee\vee) = dl = \sqrt{(dx)^2+(dy)^2} = \sqrt{(x'(t)\,dt)^2+(y'(t)\,dt)^2} = \sqrt{\big[(x'(t))^2+(y'(t))^2\big](dt)^2} = \\ = \sqrt{(x'_t)^2+(y'_t)^2}\,dt = \sqrt{(x'_t)^2+(y'_t)^2}\,dt\end{aligned}$$

$$\boxed{l = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{(x'_t)^2+(y'_t)^2}\,dt} \tag{14}$$

4.4.3 Полярная система координат

Пусть $r = r(\varphi)$ — непрерывная на $[\alpha; \beta]$ функция.

$(\vee\vee) = dl = \sqrt{(dx)^2+(dy)^2} \ominus$

$x = r\cos\varphi \quad y = r\sin\varphi$

$dx = (r\cos\varphi)'_\varphi\,d\varphi = (r'\cos\varphi - r\sin\varphi)\,d\varphi$

$dy = (r\sin\varphi)'_\varphi\,d\varphi = (r'\sin\varphi + r\cos\varphi)\,d\varphi$

$$\begin{aligned}(dx)^2+(dy)^2 &= \big[(r'\cos\varphi - r\sin\varphi)^2 + (r'\sin\varphi + r\cos\varphi)^2\big]\,(d\varphi)^2 = \\ &= \begin{bmatrix} (r')^2\cos^2\varphi - \cancel{2r'r\cos\varphi\sin\varphi} + r^2\sin^2\varphi + \\ + (r')^2\sin^2\varphi + \cancel{2r'r\cos\varphi\sin\varphi} + r^2\cos^2\varphi \end{bmatrix}(d\varphi)^2 = \\ &= \big[(r')^2(\cos^2\varphi+\sin^2\varphi) + r^2(\cos^2\varphi+\sin^2\varphi)\big]\,(d\varphi)^2 = \big[(r')^2+r^2\big]\,(d\varphi)^2\end{aligned}$$

$\ominus \sqrt{(r')^2+r^2}\,d\varphi = dl$

$$\boxed{l = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{(r')^2+r^2}\,d\varphi} \tag{15}$$

Пример. $y = x^2$, от $x = 0$ до $x = 1$

$$l = \int_0^1 \sqrt{1+(2x)^2}\,dx = \int_0^1 \sqrt{1+4x^2}\,dx = \ldots = \frac{1}{2}\sqrt{5} + \frac{1}{4}\ln\Big(2+\sqrt{5}\Big)$$

Пример. $x = e^t \cos t \quad y = e^t \sin t \quad t = 0,\ t = 1 \qquad l - ?$

$$l = \int_0^1 \sqrt{(x_t')^2 + (y_t')^2}\, dt = \left| \begin{array}{l} x_t' = e^t \cos t - e^t \sin t \\ y_t' = e^t \sin t + e^t \cos t \\ (x_t')^2 + (y_t')^2 = \ldots = 2e^{2t} \end{array} \right| = \int_0^1 \sqrt{2e^{2t}}\, dt = \ldots = \sqrt{2}(e-1)$$

Пример.

$$\begin{array}{l|} r = 2(1-\cos\varphi) \\ r = 1 \\ \text{внутри окружности} \\ \text{вне кардиоиды} \\ \hline l - ? \end{array}$$

φ	0	$\frac{\pi}{2}$	π
r	0	2	4

$2(1-\cos\varphi) = 1$

$$1 - \cos\varphi = \frac{1}{2}$$

$$\cos\varphi = \frac{1}{2} \;\Rightarrow\; \varphi = \frac{\pi}{3}$$

$$l^* = \int_\alpha^\beta \sqrt{(r')^2 + r^2}\, d\varphi = \left| r' = 2\sin\varphi \quad (r')^2 = 4\sin^2\varphi \quad r^2 = 4(1-\cos\varphi)^2 \right| =$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{3}} \sqrt{4\sin^2\varphi + 4 - 8\cos\varphi + 4\cos^2\varphi}\, d\varphi = \int_0^{\frac{\pi}{3}} \sqrt{8 - 8\cos\varphi}\, d\varphi =$$

$$= 2\sqrt{2}\int_0^{\frac{\pi}{3}} \sqrt{1-\cos\varphi}\, d\varphi = \left| \begin{array}{c} \sin^2\dfrac{\varphi}{2} = \dfrac{1-\cos\varphi}{2} \\ 1 - \cos\varphi = 2\sin^2\dfrac{\varphi}{2} \end{array} \right| = 4\int_0^{\frac{\pi}{3}} \sqrt{\sin^2\frac{\varphi}{2}}\, d\varphi =$$

$$= 4\int_0^{\frac{\pi}{3}} \left|\sin\frac{\varphi}{2}\right| d\varphi = 4\int_0^{\frac{\pi}{3}} \sin\frac{\varphi}{2}\, d\varphi = \ldots = 4\left(2 - \sqrt{3}\right)$$

$l = 2l^* = 8\left(2 - \sqrt{3}\right)$

4.5 Площадь поверхности вращения (внешняя оболочка)

Пусть $y = f(x)$ — непрерывно дифференцируема на $[a; b]$. Будем искать площадь поверхности, образованной вращением дуги $\overset{\frown}{AB}$ графика функции $y = f(x)$ вокруг оси Ox.

Этапы вывода формулы:

1. Разбиваем отрезок $[a; b]$ точками: $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_{i-1} < x_i < \ldots < x_n < b$
   $[x_{i-1}; x_i]$ — отрезок разбиения
   $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$ — длина отрезка разбиения
   $y_i = f(x_i),\ i = \overline{1, n}$
   $M_i\big(x_i, f(x_i)\big)$ — $i = \overline{1, n}$

   Хорды: $AM_1,\ M_1M_2,\ \ldots,\ M_{i-1}M_i,\ \ldots,\ M_{n-1}B$

2. Хорда при вращении опишет усечённый конус
   $Q_i = 2\pi R_i \Delta S_i \qquad \pi l(1 + R)$
   R_i — средний радиус
   $R_i = \dfrac{f(x_{i-1}) + f(x)}{2}$
   ΔS_i — хорда $M_{i-1}M_i$
   По теореме *Больцано-Коши* функция $y = f(x)$ принимает все свои значения между $f(a)$ и $f(b)$:

$$R_i = \frac{f(x_{i-1}) + f(x_i)}{2} = f(\xi_i) \quad \exists \xi_i \in [x_{i-1}; x_i],\ i = \overline{1, n}$$

$$\Delta S_i^2 = \Delta x_i^2 + \Delta y_i^2$$
$$\Delta S_i = \sqrt{\Delta x_i^2 + \Delta y_i^2} \quad \Big| \cdot \frac{\Delta x_i}{\Delta x_i}$$
$$\Delta S_i = \sqrt{\Delta x_i^2 + \Delta y_i^2} \cdot \frac{\Delta x_i}{\Delta x_i}$$
$$\Delta S_i = \sqrt{\frac{\Delta x_i^2 + \Delta y_i^2}{\Delta x_i^2}} \cdot \Delta x_i$$
$$\Delta S_i = \sqrt{1 + \left(\frac{\Delta y_i}{\Delta x_i}\right)^2} \cdot \Delta x_i$$

   По теореме *Лагранжа*:

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(c) \quad \exists c \in (a; b)$$
$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_i) - f(x_{i-1})}{x_i - x_{i-1}} = f'(\xi_i) \quad \exists \xi_i \in (x_{i-1}; x_i)$$
$$\Delta S_i = \sqrt{1 + \big(f'(\xi_i)\big)^2} \cdot \Delta x_i$$
$$Q_i = 2\pi f(\xi_i) \cdot \sqrt{1 + \big(f'(\xi_i)\big)^2} \cdot \Delta x_i$$

3. Суммируем

$$Q = \sum_{i=1}^{n} Q_i = 2\pi \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i) \cdot \sqrt{1 + \big(f'(\xi_i)\big)^2} \cdot \Delta x_i$$

4. Вычислим предел:

$$\lim_{\lambda\to 0} 2\pi \overbrace{\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\cdot\sqrt{1+\left(f'(\xi_i)\right)^2}\cdot\Delta x_i}^{\text{интегральная сумма}} = 2\pi\int_a^b f(x)\sqrt{1+(f)^2}\,dx = \tag{16}$$

$$\lambda = \max_i \Delta x_i \qquad = \boxed{2\pi\int_a^b y\,\underbrace{\sqrt{1+(y'_x)^2}\,dx}_{dl} = Q_{Ox}}$$

Если $x = f(y) \in C\,[c;d]$, тогда:

$$\boxed{Q_{Oy} = 2\pi\int_c^d x\,\underbrace{\sqrt{1+(x'_y)^2}\,dy}_{dl}} \tag{17}$$

4.5.1 Следствия

Следствие 1.2. Параметрически заданная функция $\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}$ — непрерывно дифференцируема на $[t_1;t_2]$

$$y'_x = \frac{y'_t}{x'_t} \qquad \begin{matrix} x(t_1) = a \\ x(t_2) = b \end{matrix} \qquad \begin{cases} y(t_1) = c \\ y(t_2) = d \end{cases}$$

$$Q_{Ox} \overset{(16)}{=\!=} 2\pi\int_a^b y\sqrt{1+(y'_x)^2}\,dx = 2\pi\int_{t_1}^{t_2} y(t)\sqrt{1+\left(\frac{y'_t}{x'_t}\right)^2}\,x'_t\,dt = \tag{18}$$

$$= 2\pi\int_{t_1}^{t_2} y(t)\cdot\frac{\sqrt{(x'_t)^2+(y'_t)^2}}{x'_t}\cdot x'_t\,dt = \boxed{2\pi\int_{t_1}^{t_2} y(t)\,\underbrace{\sqrt{(x'_t)^2+(y'_t)^2}\,dt}_{dl} = Q_{Ox}}$$

Аналогично:

$$\boxed{Q_{Oy} \overset{(17)}{=\!=} 2\pi\int_{t_1}^{t_2} x(t)\sqrt{(x'_t)^2+(y'_t)^2}\,dt} \tag{19}$$

Следствие 1.3. Полярная система координат:

$r = r(\varphi)$ — непрерывно дифференцируема на $[\alpha;\beta]$ $\begin{cases} x = r\cos\varphi \\ y = r\sin\varphi \end{cases}$

$$Q_{Or} \overset{(16)}{=\!=} 2\pi\int_\alpha^\beta r\sin\varphi\,dl = \boxed{2\pi\int_\alpha^\beta r\sin\varphi\sqrt{(r')^2+r^2}\,d\varphi = Q_{Or}} \tag{20}$$

Пример.

$$\begin{array}{l|}
y = \operatorname{ch} x \\
x = -\ln 3 \\
x = \ln 2 \\
\hline
Q_{Ox} - ?
\end{array}$$

$y = \operatorname{ch} x = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}$

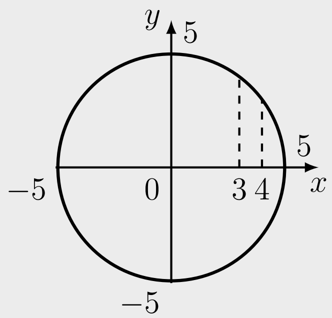
x	0	$\ln 2$	$-\ln 2$	$\ln 3$	$-\ln 3$
y	1	$\frac{5}{4}$	$\frac{5}{4}$	$\frac{5}{3}$	$\frac{5}{3}$

$$Q_{Ox} = 2\pi \int_{-\ln 3}^{\ln 2} \operatorname{ch} x \cdot \sqrt{1 + \operatorname{sh}^2 x}\, dx = \begin{vmatrix} \operatorname{ch}^2 x - \operatorname{sh}^2 x = 1 \\ 1 + \operatorname{sh}^2 x = \operatorname{ch}^2 x \end{vmatrix} = 2\pi \int_{-\ln 3}^{\ln 2} \operatorname{ch} x \cdot \operatorname{ch} x\, dx =$$

$$= 2\pi \int_{-\ln 3}^{\ln 2} \operatorname{ch}^2 x\, dx = \ldots = \frac{\pi}{2}\left(2 \ln 6 \cdot \frac{455}{72}\right)$$

Пример.

$$\begin{array}{l|}
\begin{cases} x = 5 \sin t \\ y = 5 \cos t \end{cases} \\
\text{от } (3; 4) \\
\text{до } (4; 3) \\
\hline
Q_{Ox} - ?
\end{array}$$



$\sin t = \dfrac{x}{5} \quad \cos t = \dfrac{y}{5} \quad \sin^2 t + \cos^2 t = 1 \;\Rightarrow\; \boxed{\dfrac{x^2}{5^2} + \dfrac{y^2}{5^2} = 1}$

$y^2 = 25 - x^2 \;\Rightarrow\; y = \pm\sqrt{25 - x^2} \qquad y'_x = \dfrac{-\cancel{2}x}{\cancel{2}\sqrt{25 - x^2}}$

$$Q_{Ox} \overset{(16)}{=\!=} 2\pi \int_3^4 \underbrace{\sqrt{25 - x^2}}_{y} \cdot \underbrace{\sqrt{1 + \frac{x^2}{25 - x^2}}}_{1 + {y'_x}^2} dx = 2\pi \int_3^4 \sqrt{25 - x^2} \cdot \frac{5}{\sqrt{25 - x^2}}\, dx =$$

$$= 5 \cdot 2\pi \int_3^4 dx = 10\pi$$

Пример.

$$\begin{array}{l|}
r = \cos\varphi \\
\varphi = \dfrac{\pi}{4} \;\; \varphi = \dfrac{\pi}{3} \\
\hline
Q_{Or} - ?
\end{array} \; r \geqslant 0 \quad \cos\varphi \geqslant 0$$

$$Q_{Or} = 2\pi \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} -\cos\varphi \cdot \sin\varphi \cdot \sqrt{\cos^2\varphi + \sin^2\varphi}\, d\varphi = 2\pi \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \cos\varphi \sin\varphi\, d\varphi = \ldots = \frac{\pi}{4}$$

5 Несобственные интегралы

5.1 Интегралы по бесконечному промежутку

Пусть $y = f(x)$ определена на $[a; +\infty]$, интегрируема на $[a; b] \subset [a; +\infty)$. Тогда определена функция

$$\boxed{\Phi(b) = \int_a^b f(x)\,dx} \text{ на } [a; +\infty) \tag{1}$$

как определённый интеграл с переменным верхним пределом интегрирования.

Определение 1. Предел функции $\Phi(b)$ при $b \to +\infty$ называется **несобственным интегралом** от функции $f(x)$ по бесконечному промежутку $[a; +\infty)$ или **несобственным интегралом первого рода** и обозначается

$$\boxed{\int_a^{+\infty} f(x)\,dx = \lim_{b\to+\infty} \Phi(b) = \lim_{b\to+\infty} \int_a^b f(x)\,dx} \tag{2}$$

Если предел в правой части равенства (2) существует и конечен, то несобственный интеграл в левой части равенства (2) **сходится**.
Если предел в правой части равенства (2) не существует или равен бесконечности, то несобственный интеграл в левой части равенства (2) **расходится**.

Аналогично:

$$\int_{-\infty}^b f(x)\,dx = \lim_{a\to-\infty} \int_a^b f(x)\,dx \tag{3}$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = \int_{-\infty}^c f(x)\,dx + \int_c^{+\infty} f(x)\,dx \quad c \text{ — число} \tag{4}$$

Несобственный интеграл левой части (4) **сходится**, если оба несобственных интеграла в правой части (4) сходятся. Если хотя бы один несобственный интеграл в правой части (4) расходится, то несобственный интеграл в левой части (4) **расходится**.

Геометрический смысл: если $f(x) \geqslant 0,\ \forall x > 0$, то значение сходящегося несобственного интеграла от функции $f(x)$ по промежутку $[a; +\infty)$ соответствует площади бесконечно длинной криволинейной трапеции.

Пример.
$\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2}$ — ? $\qquad y = \dfrac{1}{1+x^2}$

$$\int_0^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2} = \lim_{b\to+\infty} \int_0^b \frac{dx}{1+x^2} = \lim_{b\to+\infty} \left(\operatorname{arctg} x\Big|_0^b\right) = \lim_{b\to+\infty} (\operatorname{arctg} b - \operatorname{arctg} 0) =$$
$$= \lim_{b\to+\infty} \operatorname{arctg} b - 0 = \frac{\pi}{2} - 0 = \frac{\pi}{2}$$

$\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2}$ — сходится

5.1.1 Признаки сходимости и расходимости несобственных интегралов 1-го рода

Теорема 1 *(Признак сходимости по неравенству)*.
Пусть функции $f(x)$ и $g(x)$ интегрируемы на $[a; b] \subset [a; +\infty)$, причём

$$\forall x \geqslant a\colon 0 \leqslant f(x) \leqslant g(x)$$

Тогда:

1. Если $\int_a^{+\infty} g(x)\,dx$ сходится, то $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ — сходится
2. Если $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ расходится, то $\int_a^{+\infty} g(x)\,dx$ — расходится

Доказательство.
$\int_a^{+\infty} g(x)\,dx$ — сходится $\overset{\textbf{(опр. 1)}}{\Rightarrow}$ по определению несобственного интеграла 1-го рода

$$\int_a^{+\infty} g(x)\,dx = \lim_{b\to+\infty} \int_a^b g(x)\,dx = C \quad C \text{ — число}$$

Так как $\forall x \geqslant a\colon g(x) \geqslant 0$

$$\Phi(b) = \int_a^b g(x)\,dx \leqslant C, \quad b > a$$

По условию: $\forall x \geqslant a\colon 0 \leqslant f(x) \leqslant g(x)$
Интегрируем:

$$\int_a^b f(x)\,dx \leqslant \int_a^b g(x)\,dx \leqslant C$$

Так как $f(x) \geqslant 0,\ \forall x \geqslant a$ и $b > a$, то функция

$$\Psi(b) = \int_a^b f(x)\,dx \text{ монотонно возрастает и ограничена сверху}$$

Утверждение: монотонная и ограниченная сверху функция при $x \to +\infty$ имеет конечный предел.
По утверждению функция $\Psi(b)$ имеет конечный предел при $x \to +\infty$, то есть

$$\int_a^{+\infty} f(x)\,dx = \lim_{b\to+\infty} \Psi(b) = \lim_{b\to+\infty} \int_a^b f(x)\,dx \text{ — конечный предел}$$

■

Доказательство (Метод от противного).
Дано: $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ — расходится
Предположим, что $\int_a^{+\infty} g(x)\,dx$ — сходится
Тогда по первой части теоремы:

$$\int_a^{+\infty} f(x)\,dx \text{ — сходится}$$

А это противоречит условию теоремы $\Rightarrow \int_a^{+\infty} g(x)\,dx$ — расходится ■

Пример.

$\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2(1+3^x)}\,dx$ — ? несобственный интеграл 1-го рода $x \in [1;+\infty)$

$$\left.\begin{aligned} f(x) &= \frac{1}{x^2(1+3^x)} \\ g(x) &= \frac{1}{4x^2} \end{aligned}\right\} \quad \frac{1}{x^2(1+3^x)} \leqslant \frac{1}{4x^2}$$

$$\begin{aligned}\int_1^{+\infty} g(x)\,dx = \frac{1}{4}\int_1^{+\infty}\frac{dx}{x^2} = \frac{1}{4}\cdot\lim_{b\to+\infty}\int_1^b \frac{dx}{x^2} = \frac{1}{4}\cdot\lim_{b\to+\infty}\left(\left.\frac{x^{-1}}{-1}\right|_1^b\right) = \\ = -\frac{1}{4}\lim_{b\to+\infty}\left(\frac{1}{b}-1\right) = \frac{1}{4}\end{aligned}$$

$$\Downarrow$$

$$\int_1^{+\infty} g(x)\,dx = \frac{1}{4}\int_1^{+\infty}\frac{dx}{x^2} \text{ — сходится}$$

По признаку сходимости по неравенству:

$$\int_1^{+\infty}\frac{1}{x^2(1+3^x)}\,dx \text{ сходится}$$

Пример.

$\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{x}+\cos^2 x}$ — ? несобственный интеграл 1-го рода $x \in [1;+\infty)$

$f(x) = \dfrac{dx}{\sqrt{x}+\cos^2 x}$

$$\begin{gathered} 0 \leqslant \cos^2 x \leqslant 1 \\ \sqrt{x} \leqslant \sqrt{x}+\cos^2 x \leqslant \sqrt{x}+1 \end{gathered} \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{x}+1} \leqslant \frac{1}{\sqrt{x}+\cos^2 x} \leqslant \frac{1}{\sqrt{x}}$$

$g(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x}+1}$

$$\begin{aligned}\int_1^{+\infty}\frac{dx}{\sqrt{x}+1} = \lim_{b\to+\infty}\int_1^b\frac{dx}{\sqrt{x}+1} = \left|\begin{matrix} x=t^2 & dx = 2t\,dt \\ x_{\text{н}}=1, & t_{\text{н}}=1 \end{matrix}\right| = \lim_{b\to+\infty}\int_1^b \frac{2t\,dt}{t+1} = \\ = 2\lim_{b\to+\infty}\int_1^b\frac{t+1-1}{t+1}\,dt = 2\lim_{b\to+\infty}\left(\int_1^b dt - \int_1^b\frac{dt}{t+1}\right) = \\ = 2\lim_{b\to+\infty}(b-1-\ln|b+1|+\ln 2) = \infty\end{aligned}$$

$\displaystyle\int_1^{+\infty} g(x)\,dx = \int_1^{+\infty}\frac{dx}{\sqrt{x}+1}$ — расходится

$\displaystyle\int_1^{+\infty}\frac{dx}{\sqrt{x}+\cos^2 x}$ — расходится по неравенству

Теорема 2 *(Предельный признак сходимости)*.
Пусть $f(x)$ и $g(x)$ интегрируемы на $[a;b] \subset [a;+\infty)$ и $\forall x \geqslant a\colon\ f(x) \geqslant 0,\ \ g(x) > 0$. Если существует конечный предел:

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lambda > 0 \tag{5}$$

то $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ и $\displaystyle\int_a^{+\infty} g(x)\,dx$ сходятся или расходятся одновременно.

Доказательство.
Из (5) $\Rightarrow$ по определению предела:

$$\forall\varepsilon > 0,\ \exists\, M(\varepsilon) > 0\colon \forall x > M\ \ \Rightarrow \left|\frac{f(x)}{g(x)} - \lambda\right| < \varepsilon$$

$$-\varepsilon < \frac{f(x)}{g(x)} - \lambda < \varepsilon$$
$$\lambda - \varepsilon < \frac{f(x)}{g(x)} < \lambda + \varepsilon$$
$$(\lambda - \varepsilon)\cdot g(x) < f(x) < (\lambda + \varepsilon)\cdot g(x) \quad \forall x > M \tag{$*$}$$

$\boxed{\text{1 шаг}}$ Рассмотрим $f(x) < (\lambda + \varepsilon) g(x)$
Интегрируем:

$$\int_a^{+\infty} f(x)\,dx < (\lambda+\varepsilon)\int_a^{+\infty} g(x)\,dx$$

Число $(\lambda+\varepsilon)$ не влияет на сходимость/расходимость несобственного интеграла.
Пусть $\int_a^{+\infty} g(x)\,dx$ — сходится, тогда:

$$(\lambda+\varepsilon)\int_a^{+\infty} g(x)\,dx \ \text{— сходится}$$

По теореме 1 $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ — сходится.
Пусть $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ расходится, тогда по теореме 1

$$(\lambda+\varepsilon)\int_a^{+\infty} g(x)\,dx \ \text{— расходится} \ \Rightarrow \ \int_a^{+\infty} g(x)\,dx \ \text{— расходится}$$

$\boxed{\text{2 шаг}}$ Рассмотрим $(\lambda - \varepsilon)\cdot g(x) < f(x)$
Интегрируем:

$$(\lambda-\varepsilon)\int_a^{+\infty} g(x)\,dx < \int_a^{+\infty} f(x)\,dx$$

$(\lambda-\varepsilon)$ не влияет на сходимость/расходимость несобственного интеграла
Пусть $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ — сходится, тогда по теореме 1

$$(\lambda-\varepsilon)\int_a^{+\infty} g(x)\,dx \ \text{— сходится} \ \Rightarrow \ \int_a^{+\infty} g(x)\,dx \ \text{— сходится}$$

Пусть $(\lambda-\varepsilon)\int_a^{+\infty} g(x)\,dx$ — расходится, тогда $\int_a^{+\infty} g(x)\,dx$ — расходится

По теореме 1 $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ расходится, тогда

$$\int_a^{+\infty} f(x)\,dx \text{ и } \int_a^{+\infty} g(x)\,dx \text{ сходятся и расходятся одновременно}$$

■

Пример.

$\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\sqrt{x^3}+\sqrt{x^2+1}}{x^3+3x+1}\,dx$

$\displaystyle f(x)=\frac{\sqrt{x^3}+\sqrt{x^2+1}}{x^3+3x+1} \qquad g(x)=\frac{1}{x^{3/2}}$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\left(x^{\frac{3}{2}}+\sqrt{x^2+1}\right)\cdot x^{\frac{3}{2}}}{(x^3+3x+1)\cdot 1}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^3\left(1+\sqrt{\frac{1}{x}+\frac{1}{x^3}}\right)}{x^3\left(1+\frac{3}{x^2}+\frac{1}{x^3}\right)}=\frac{1}{1}=1=\lambda>0$$

$$\int_1^{+\infty} g(x)\,dx=\int_1^{+\infty}\frac{dx}{x^{\frac{3}{2}}}=\lim_{b\to+\infty}\int_1^b x^{-\frac{3}{2}}\,dx=\lim_{b\to+\infty}\left.\frac{x^{-\frac{1}{2}}}{-\frac{1}{2}}\right|_1^b=-2\lim_{b\to+\infty}\left.\frac{1}{\sqrt{x}}\right|_1^b=2$$

5.1.2 Интегралы для сравнения. Эталоны

$$\int_1^{+\infty}\frac{dx}{x^\alpha}=\lim_{b\to+\infty}\int_1^b x^{-\alpha}\,dx=\lim_{b\to+\infty}\left(\left.\frac{x^{-\alpha+1}}{-\alpha+1}\right|_1^b\right)=\frac{1}{1-\alpha}\cdot\lim_{b\to+\infty}\left.x^{-\alpha+1}\right|_1^b=$$

$$=\frac{1}{1-\alpha}\left(\lim_{b\to+\infty}b^{-\alpha+1}-1\right)=\begin{cases}\dfrac{1}{\alpha-1} & \alpha>1\\ \infty & \alpha<1\end{cases}$$

$$\int_1^{+\infty}\frac{dx}{x}=\lim_{b\to+\infty}\int_1^b\frac{dx}{x}=\lim_{b\to+\infty}\big(\ln|b|-\ln|1|\big)=\lim_{b\to+\infty}\ln|b|=\infty$$

Вывод:

$$\boxed{\int_1^{+\infty}\frac{dx}{x^\alpha}=\begin{cases}\text{сходится при } \alpha>1\\ \text{расходится при } \alpha\leqslant 1\end{cases}}$$

интеграл Дирихле

5.2 Абсолютная и условная сходимость

Определение 2. Если наряду с несобственным интегралом от функции $f(x)$ по бесконечному промежутку $[a;+\infty)$ сходится и несобственный интеграл от функции $|f(x)|$ по этому же промежутку, то первый несобственный интеграл называется **сходящимся абсолютно**.

$$\boxed{\begin{array}{l}\text{несобственный интеграл}\\ \text{от } f(x) \text{ сходится абсолютно}\end{array}} = \boxed{\begin{array}{l}\text{несобственный интеграл}\\ \text{от } f(x) \text{ сходится}\end{array}} + \boxed{\begin{array}{l}\text{несобственный интеграл}\\ \text{от } |f(x)| \text{ сходится}\end{array}}$$

Определение 3. Если несобственный интеграл от функции $f(x)$ по бесконечному промежутку $[a;+\infty)$ сходится, а несобственный интеграл от функции $|f(x)|$ по этому же промежутку расходится, то первый несобственный интеграл называется **сходящимся условно**.

$$\boxed{\begin{array}{l}\text{несобственный интеграл}\\ \text{от } f(x) \text{ сходится условно}\end{array}} = \boxed{\begin{array}{l}\text{несобственный интеграл}\\ \text{от } f(x) \text{ сходится}\end{array}} + \boxed{\begin{array}{l}\text{несобственный интеграл}\\ \text{от } |f(x)| \text{ расходится}\end{array}}$$

Теорема 3 *(Признак абсолютной сходимости)*.
Пусть функция $f(x)$ знакопеременна на $[a;+\infty)$. Если функции $f(x)$ и $|f(x)|$ интегрируемы на любом отрезке $[a;b] \subset [a;+\infty)$ и несобственный интеграл от функции $|f(x)|$ по бесконечному промежутку $[a;+\infty)$ сходится, то сходится и несобственный интеграл от функции $f(x)$ по $[a;+\infty)$, причём абсолютно.

Доказательство.
Так как $\forall x \in [a;+\infty)$ верно неравенство

$$-|f(x)| \leqslant f(x) \leqslant |f(x)| \quad \Big| + |f(x)|$$
$$0 \leqslant f(x) + |f(x)| \leqslant 2|f(x)|$$

По условию $\int_a^{+\infty} |f(x)|\,dx$ сходится $\Rightarrow$ $2\int_a^{+\infty} |f(x)|\,dx$ сходится.
По теореме 1 (*признак сходимости по неравенству*):

$$\int_a^{+\infty} \big(f(x) + |f(x)|\big)\,dx \quad \text{— сходится}$$

Рассмотрим

$$\int_a^{+\infty} f(x)\,dx = \underbrace{\int_a^{+\infty} \big(f(x) + |f(x)|\big)\,dx}_{\text{сх-ся по Т1}} - \underbrace{\int_a^{+\infty} |f(x)|\,dx}_{\text{сх-ся по условию}}$$

По определению сходящегося несобственного интеграла $\Rightarrow$ $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ сходится
По определению абсолютной сходимости $\Rightarrow$ $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ сходится абсолютно ■

Пример.

$\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\sin x}{x^3}\,dx$ — несобственный интеграл 1-го рода $x \in [1; +\infty)$

$f(x) = \dfrac{\sin x}{x^3}$ — знакопеременна на $[1; +\infty)$

$|f(x)| = \left|\dfrac{\sin x}{x^3}\right| = \boxed{\dfrac{|\sin x|}{x^3} \leqslant \dfrac{1}{x^3}}$

$g(x) = \dfrac{1}{x^3}$

$$\int_1^{+\infty} g(x)\,dx = \int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^3} \qquad \alpha = 3 > 1 \ \Rightarrow \int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^3} \text{ сходится}$$

$\displaystyle\int_1^{+\infty} |f(x)|\,dx = \int_1^{+\infty} \frac{|\sin x|}{x^3}\,dx$ — сходится по неравенству

$\displaystyle\int_1^{+\infty} f(x)\,dx = \int_1^{+\infty} \frac{\sin x}{x^3}\,dx$ — сходится абсолютно

5.3 Несобственные интегралы 2-го рода

Пусть функция $f(x)$ определена на полуинтервале $[a; b)$, а в точке $x = b$ терпит разрыв 2-го рода. Предположим, что функция $f(x)$ интегрируема на $[a; \eta] \subset [a; b)$. Тогда на $[a; b)$ определена функция

$$\Phi(\eta) = \int_a^{\eta} f(x)\,dx \tag{1}$$

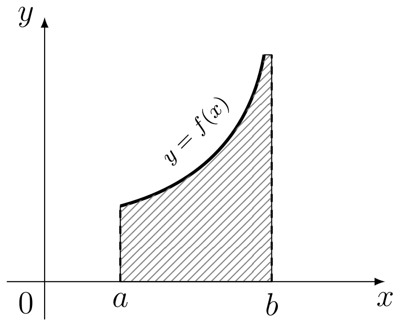
как интеграл с переменным верхним пределом.

Определение 1. Предел функции $\Phi(\eta)$ при $\eta \to b-$ называется несобственным интегралом от неограниченной функции $f(x)$ на $[a; b)$ или **несобственным интегралом 2-го рода** и обозначается

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{\eta \to b-} \Phi(\eta) = \lim_{\eta \to b-} \int_a^{\eta} f(x)\,dx \tag{2}$$

Если предел в правой части равенства (2) существует и конечен, то несобственный интеграл от неограниченной функции $f(x)$ по $[a; b)$ **сходится**.
Если предел в правой части равенства (2) не существует или равен ∞, то несобственный интеграл от неограниченной функции $f(x)$ по $[a; b)$ **расходится**.

Геометрический смысл: Если $\forall x \in [a;b)\colon f(x) \geqslant 0$, то сходящийся несобственный интеграл от функции $f(x)$ на промежутке $[a;b)$ соответствует площади бесконечно высокой криволинейной трапеции, ограниченной графиком функции $y = f(x)$, $x = a$, осью Ox и $x = b$ — асимптота.



Аналогично:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{\eta\to a+}\int_\eta^b f(x)\,dx \tag{3}$$

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx = \lim_{\eta\to c-}\int_a^\eta f(x)\,dx + \lim_{\xi\to c+}\int_\xi^b f(x)\,dx \tag{4}$$

Несобственный интеграл в левой части равенства (4) сходится, когда оба несобственных интеграла в правой части равенства (4) сходятся. Если хотя бы один несобственный интеграл в правой части равенства (4) расходится, то несобственный интеграл в левой части расходится.

Пример.

$$\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{dx}{x\ln x} = \left|\begin{matrix}\text{нес. инт. 2-го рода}\\ x = 0\end{matrix}\right| = \lim_{\eta\to 0+}\int_\eta^{\frac{1}{2}} \frac{dx}{x\ln x} = \lim_{\eta\to 0+}\int_\eta^{\frac{1}{2}} \frac{d(\ln x)}{\ln x} =$$

$$= \lim_{\eta\to 0+}\left(\ln|\ln x|\Big|_\eta^{\frac{1}{2}}\right) = \lim_{\eta\to 0+}\left(\ln\left|\ln\frac{1}{2}\right| - \ln|\ln\eta|\right) =$$

$$= \ln\left|\ln\frac{1}{2}\right| - \lim_{\eta\to 0+}\ln|\ln\eta| = \infty$$

$\displaystyle\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{dx}{x\ln x}$ — расходится

Пример.

$$\int_0^2 \frac{dx}{\sqrt{4-x^2}} = \left|\begin{matrix}\text{нес. инт. 2-го рода}\\ x = 2\end{matrix}\right| = \lim_{\eta\to 2-}\int_0^\eta \frac{dx}{\sqrt{4-x^2}} = \lim_{\eta\to 2-}\left(\arcsin\frac{1}{2}\Big|_0^\eta\right) =$$

$$= \lim_{\eta\to 2-}\arcsin\frac{\eta}{2} - \arcsin 0 = \frac{\pi}{2} - 0 = \frac{\pi}{2}$$

$\displaystyle\int_0^2 \frac{dx}{\sqrt{4-x^2}}$ — сходится

5.3.1 Интегралы для сравнения. Эталоны

$$\int_0^b \frac{dx}{x^\alpha} = \left| \begin{matrix} \text{нес. инт. 2-го рода} \\ x=0 \end{matrix} \right| = \lim_{\eta\to 0+} \int_\eta^b x^{-\alpha}\,dx = \lim_{\eta\to 0+} \left.\frac{x^{-\alpha+1}}{-\alpha+1}\right|_\eta^b =$$

$$= \frac{1}{-\alpha+1}\left(b^{-\alpha+1} - \lim_{\eta\to 0+}\eta^{-\alpha+1}\right) = \begin{cases} \dfrac{b^{-\alpha+1}}{-\alpha+1} & \alpha<1 \\ \infty & \alpha>1 \end{cases}$$

$\boxed{\alpha=1}$: $\displaystyle\int_0^b \frac{dx}{x} = \lim_{\eta\to 0+}\left(\ln x\Big|_\eta^b\right) = \ln b - \lim_{\eta\to 0+}\ln\eta = \infty$

$$\boxed{\int_0^b \frac{dx}{x^\alpha} = \begin{cases} \text{сходится} & \alpha<1 \\ \text{расходится} & \alpha\geqslant 1 \end{cases}}$$

$$\boxed{\int_a^b \frac{dx}{(x-\alpha)^\alpha} = \begin{cases} \text{сходится} & \alpha<1 \\ \text{расходится} & \alpha\geqslant 1 \end{cases}}$$

интеграл Дирихле

$$\boxed{\int_a^b \frac{dx}{(b-x)^\alpha} = \begin{cases} \text{сходится} & \alpha<1 \\ \text{расходится} & \alpha\geqslant 1 \end{cases}}$$

5.3.2 Признаки сходимости несобственного интеграла 2-го рода

Теорема 1 *(Признак сходимости по неравенству)***.**
Пусть функции $f(x)$ и $g(x)$ интегрируемы на $\forall$ отрезке $[a;\eta]\subset[a;b)$, являются неотрицательными $\forall x\in[a;b)$ и в точке $x=b$ терпят разрыв 2-го рода, причём выполнено неравенство $0\leqslant f(x)\leqslant g(x)$. Тогда

1. Если несобственный интеграл $\int_a^b g(x)\,dx$ сходится, то несобственный интеграл $\int_a^b f(x)\,dx$ сходится.
2. Если собственный интеграл $\int_a^b f(x)\,dx$ расходится, то несобственный интеграл $\int_a^b g(x)\,dx$ расходится.

Теорема 2 *(Предельный признак сходимости)***.**
Пусть функции $f(x)$ и $g(x)$ интегрируемы на $\forall$ отрезке $[a;\eta]\subset[a;b)$, являются неотрицательными $\forall x\in[a;b)$ и в точке $x=b$ терпят разрыв 2-го рода. Если существует конечный положительный предел

$$\lim_{x\to b-}\frac{f(x)}{g(x)} = \lambda > 0 \tag{5}$$

то $\int_a^b f(x)\,dx$ и $\int_a^b g(x)\,dx$ сходятся или расходятся одновременно.

Пример.

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1-\cos x}{x^3} = \left|\begin{array}{l}\text{нес. инт. 2-го рода}\\ x=0\end{array}\right|$$

$$f(x) = \frac{1-\cos x}{x^3} \qquad g(x) = \frac{1}{x^\alpha}$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to 0}\frac{(1-\cos x)\cdot x^\alpha}{x^3\cdot 1} = \lim_{x\to 0}\frac{x^2\cdot x^\alpha}{2\cdot x^3} = \frac{1}{2}, \quad \alpha = 1$$

$$g(x) = \frac{1}{2x}$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{2x} \text{ — расходится } \alpha = 1$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1-\cos x}{x^3}\,dx \text{ — расходится по предельному признаку}$$

Определение 2. Если несобственный интеграл от неограниченной функции $f(x)$ при $x \to b-$ по промежутку $[a;b)$ сходится и несобственный интеграл функции $|f(x)|$ по этому же промежутку сходится, то первый из несобственных интегралов **сходится абсолютно**.

Определение 3. Если несобственный интеграл от неограниченной функции $f(x)$ при $x \to b-$ по промежутку $[a;b)$, сходится, а несобственный интеграл от функции $|f(x)|$ по этому же промежутку расходится, то первый из несобственных интегралов **сходится условно**.

Теорема 3 *(Признак абсолютной сходимости)***.**
Пусть функция $f(x)$ знакопеременна на $[a;b)$. Если $f(x)$ и $|f(x)|$ интегрируемы на $\forall[a;\eta] \subset [a;b)$ и несобственный интеграл от функции $|f(x)|$ сходится по этому промежутку, то несобственный интеграл от функции $f(x)$ сходится, причём абсолютно.

Пример.

$$\int_0^1 \frac{\cos\frac{1}{x}}{\sqrt[3]{x}}\,dx \text{ — несобственный интеграл 2-го рода} \quad x = 0$$

$$f(x) = \frac{\cos\frac{1}{x}}{\sqrt[3]{x}} \text{ — знакопеременна при } x \in [0;1]$$

$$|f(x)| = \left|\frac{\cos\frac{1}{x}}{\sqrt[3]{x}}\right| = \boxed{\frac{\left|\cos\frac{1}{x}\right|}{\sqrt[3]{x}} \leqslant \frac{1}{\sqrt[3]{x}}}$$

$$g(x) = \frac{1}{\sqrt[3]{x}}$$

$$\int_0^1 g(x)\,dx = \int_0^1 \frac{dx}{x^{1/3}} \quad \alpha = 1/3 < 1 \text{ — сходится}$$
$$\int_0^1 |f(x)|\,dx = \int_0^1 \frac{\left|\cos\frac{1}{x}\right|}{\sqrt[3]{x}}\,dx \text{ — сходится по неравенству}$$
$$\int_0^1 f(x)\,dx = \int_0^1 \frac{\cos\frac{1}{x}}{\sqrt[3]{x}}\,dx \text{ — сходится абсолютно (по признаку абсолютной сходимости)}$$