Интегралы и дифференциальные уравнения

Лекции

2 семестр

GitHub: malyinik

2024 г.

Содержание

1 Первообразная и неопределённый интеграл

1.1 Первообразная

Определение 1. Функция $F(x)$ называется **первообразной** функции $f(x)$ на интервале $(a;b)$, если $F(x)$ дифференцируема на $(a;b)$ и $\forall x \in (a;b)$:

$$\boxed{F'(x) = f(x)} \tag{1}$$

Пример.

$f(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}},\ D_f = (0;+\infty)$

$F(x) = \sqrt{x}$ — первообразная $f(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$

$F'(x) = (\sqrt{x})' = \dfrac{1}{2\sqrt{x}} = f(x)$

$F(x) = \sqrt{x} + 3$ — первообразная $f(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$

1.1.1 Свойства первообразной

Свойство 1.
Если $F(x)$ — первообразная функции $f(x)$ на $(a;b)$, то $F(x) + C$ — первообразная функции $f(x)$ на $(a;b)$, где $\forall C$ — $const$.

Свойство 2.
Если $\varPhi(x)$ дифференцируема на $(a;b)$ и $\forall x \in (a;b)$: $\varPhi'(x) = 0$, то $\varPhi(x) = const$, $\forall x \in (a;b)$.

Свойство 3 *(Существование первообразной)***.**
Любая непрерывная функция на $(a;b)$ имеет множество первообразных на этом интервале, причём любые две из них отличаются друг от друга на константу.

$$\varPhi(x),\ F(x) \text{ — первообразные функции } f(x) \text{ на } (a;b)$$
$$\varPhi(x) - F(x) = const$$

1.2 Неопределённый интеграл

Определение 2. Множество первообразных функции $f(x)$ на $(a;b)$ называется **неопределённым интегралом**.

$$\boxed{\int f(x)\,dx = F(x) + C} \tag{2}$$

$\int$ — знак интеграла
$f(x)$ — подынтегральная функция
$f(x)\,dx$ — подынтегральное выражение
x — переменная
$F(x)+C$ — множество первообразных
C — произвольная константа

Определение 3. **Интегрирование** — нахождение неопределённого интеграла.

1.2.1 Свойства неопределённого интеграла

Свойство 1.
Производная от неопределённого интеграла равна подынтегральной функции.

$$\boxed{\left(\int f(x)\,dx\right)' = f(x)}$$

Доказательство.

$$\left(\int f(x)\,dx\right)' \overset{(2)}{=\!=} \big(F(x)+C\big)' = F'(x) + C' = F'(x) \overset{(1)}{=\!=} f(x)$$

■

Свойство 2.
Дифференциал от неопределённого интеграла равен подынтегральному выражению.

$$\boxed{d\left(\int f(x)\,dx\right) = f(x)\,dx}$$

Доказательство.

$$d\left(\int f(x)\,dx\right) \overset{(2)}{=\!=} d\big(F(x)+C\big) = \big(F(x)+C\big)'\,dx =$$
$$= \big(F'(x)+C'\big)\,dx = F'(x)\,dx \overset{(1)}{=\!=} f(x)\,dx$$

■

Свойство 3.
Неопределённый интеграл от дифференциала от некоторой функции равен сумме этой функции и константы.

$$\boxed{\int d\big(F(x)\big) = F(x) + C}, \quad \forall C - const$$

Доказательство.

$$\int d\big(F(x)\big) = \int F'(x)\,dx \overset{(1)}{=\!=} \int f(x)\,dx \overset{(2)}{=\!=} F(x) + C, \quad \forall C - const$$

■

Свойство 4.
Константу можно выносить за знак неопределённого интеграла.

$$\boxed{\int \lambda \cdot f(x)\,dx = \lambda \int f(x)\,dx}, \quad \lambda \neq 0$$

Доказательство.
Пусть $F(x)$ — первообразная $f(x)$

$$\lambda \int f(x)\,dx \overset{(2)}{=\!=} \lambda \cdot \big(F(x) + C\big), \quad \forall C - const$$

Функция $\lambda \cdot F(x)$ — первообразная $\lambda \cdot f(x)$:

$$\big(\lambda \cdot F(x)\big)' = \lambda \cdot F'(x) \overset{(1)}{=\!=} \lambda \cdot f(x)$$
$$\int \lambda \cdot f(x)\,dx \overset{(2)}{=\!=} \lambda \cdot F(x) + C_1, \quad \forall C_1 - const$$

Так как константы C_1, C — произвольные, $\lambda \neq 0$, то их всегда можно выбрать так, чтобы $C_1 = \lambda C$. Тогда множества $\lambda \cdot \big(F(x) + C\big)$ и $\lambda \cdot F(x) + C_1$ совпадают. ■

Свойство 5.
Если функции $f_1(x)$ и $f_2(x)$ на $(a;b)$ имеют первообразные $F_1(x)$ и $F_2(x)$ соответственно, то функция $\lambda_1 f_1(x) + \lambda_2 f_2(x)$, где $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$, имеет первообразную на $(a;b)$, причём $\lambda_1^2 + \lambda_2^2 > 0$:

$$\int \Big(\lambda_1 f_1(x) + \lambda_2 f_2(x)\Big)\,dx = \lambda_1 \int f_1(x)\,dx + \lambda_2 \int f_2(x)\,dx$$

Доказательство.
$F_1(x)$ — первообразная $f_1(x)$
$F_2(x)$ — первообразная $f_2(x)$

$$\lambda_1 \int f_1(x)\,dx + \lambda_2 \int f_2(x)\,dx \overset{(2)}{=\!=} \lambda_1(F_1(x) + C_1) + \lambda_2\big(F_2(x) + C_2\big) =$$
$$= \lambda_1 F_1(x) + \lambda_2 F_2(x) + \lambda_1 C_1 + \lambda_2 C_2, \quad \forall C_1, C_2 - const$$

Функция $F(x)=\lambda_1F_1(x)+\lambda_2F_2(x)$ — первообразная функции $\lambda_1f_1(x)+\lambda_2f_2(x)$.

$$F'(x)=\big(\lambda_1F_1(x)+\lambda_2F_2(x)\big)'=\lambda_1F_1'(x)+\lambda_2F_2'(x)\overset{(1)}{=\!=}\lambda_1f_1(x)+\lambda_2f_2(x)$$
$$\int\Big(\lambda_1f_1(x)+\lambda_2f_2(x)\Big)\,dx\overset{(2)}{=\!=}\lambda_1f_1(x)+\lambda_2f_2(x)+C,\quad\forall C - const$$

Так как константы $C_1,\ C_2,\ C$ — произвольные, то всегда можно добиться выполнения равенства $C=\lambda_1C_1+\lambda_2C_2$.
Тогда множества $\lambda_1F_1(x)+\lambda_2F_2(x)+\lambda_1C_1+\lambda_2C_2$ и $\lambda_1F_1(x)+\lambda_2F_2(x)+C$ совпадают. ■

Свойство 6 *(Инвариантность формы интегрирования)*.
Если $\int f(x)\,dx=F(x)+C$, где C — $const$, то $\int f(u)\,du=F(u)+C$, где C — $const$, $u=\varphi(x)$ — непрерывно-дифференцируемая функция.

Доказательство.
x — независимая переменная
$f(x)$ — непрерывная функция
$F(x)$ — первообразная $f(x)$
$\int f(x)\,dx=F(x)+C,\ \forall C - const$

Рассмотрим сложную функцию $F(u)=F\big(\varphi(x)\big)$. Найдём дифференциал $F(u)$:

$$d\big(F(u)\big)=F'(u)\cdot\underbrace{\varphi'(x)\,dx}_{du}=\left|\begin{matrix}u=\varphi(x)\\ du=\varphi'(x)\,dx\end{matrix}\right|=F'(u)\,du\overset{(1)}{=\!=}f(u)\,du$$

Неопределённый интеграл:

$$\int f(u)\,du=\int d\big(F(u)\big)\overset{\textbf{(св. 3)}}{=\!=\!=}F(u)+C,\quad\forall C - const$$

■

Пример.

$$\int\sin x\,dx=-\cos x+C\qquad\sin(2x)\,d(2x)=-\cos(2x)+C$$

1.2.2 Геометрический смысл

Неопределённый интеграл геометрически представляет собой семейство интегральных кривых (графиков функций) вида $y=F(x)+C,\ \forall C - const$.

1.2.3 Таблица основных интегралов

Доказательство (19).

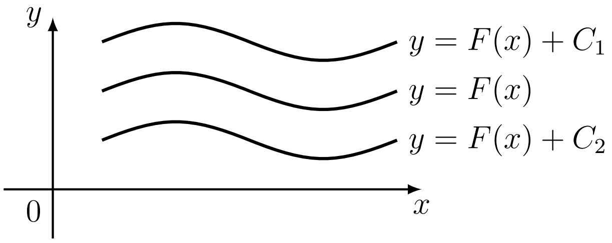


Рис. 1: Геометрический смысл неопределённого интеграла

Таблица 1: Таблица основных интегралов

1. $\int x^n\,dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C,\ \forall C - const$	11. $\int \frac{dx}{a^2 - x^2} = \frac{1}{2a} \ln \left\| \frac{a+x}{a-x} \right\| + C$
2. $\int dx = x + C$	12. $\int \frac{dx}{x^2 - a^2} = \frac{1}{2a} \ln \left\| \frac{a-x}{a+x} \right\| + C$
3. $\int \frac{dx}{x} = \ln \|x\| + C$	13. $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \arcsin \frac{x}{a} + C$
4. $\int e^x\,dx = e^x + C$	14. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} = \ln \left\| x + \sqrt{x^2 \pm a^2} \right\| + C$
5. $\int a^x\,dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$	15. $\int \operatorname{sh} x\,dx = \operatorname{ch} x + C$
6. $\int \sin x\,dx = -\cos x + C$	16. $\int \operatorname{ch} x\,dx = \operatorname{sh} x + C$
7. $\int \cos x\,dx = \sin x + C$	17. $\int \frac{dx}{\operatorname{ch}^2 x} = \operatorname{th} x + C$
8. $\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x + C$	18. $\int \frac{dx}{\operatorname{sh}^2 x} = -\operatorname{cth} x + C$
9. $\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\operatorname{ctg} x + C$	19. $\int \frac{dx}{\sin x} = \ln \left\| \operatorname{tg} \frac{x}{2} \right\| + C$
10. $\int \frac{dx}{a^2 + x^2} = \frac{1}{a} \operatorname{arctg} \frac{x}{a} + C$	20. $\int \frac{dx}{\cos x} = \ln \left\| \operatorname{tg} \left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4} \right) \right\| + C$

$$\int \frac{dx}{\sin x} = \int \frac{dx}{2 \sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2}} = \frac{1}{2} \int \frac{\frac{1}{\cos^2 \frac{x}{2}}}{\frac{\sin \frac{x}{2} \cancel{\cos \frac{x}{2}}}{\cos^{\cancel{2}} \frac{x}{2}}} dx = \int \frac{\frac{1}{2 \cos^2 \frac{x}{2}}}{\operatorname{tg} \frac{x}{2}} dx = \int \frac{d\left(\operatorname{tg} \frac{x}{2}\right)}{\operatorname{tg} \frac{x}{2}} =$$

$$= \left| \operatorname{tg} \frac{x}{2} t \right| = \int \frac{dt}{t} = \ln |t| + C = \ln \left| \operatorname{tg} \frac{x}{2} \right| + C$$

■

1.3 Основные методы интегрирования

1. **Непосредственное интегрирование** (свойства + таблица)

> **Пример.**
>
> $$\int\left(3e^x+\sin x-\frac{1}{1+x^2}\right)dx=3\int e^x\,dx+\int\sin x\,dx-\int\frac{dx}{1+x^2}=$$
> $$=3e^x-\cos x-\operatorname{arctg}x+C,\ \forall C-const$$

2. **Метод подстановки**

   (2.1) Занесение под знак дифференциала

> **Пример.**
>
> $$\int\frac{e^{\arcsin x}\cdot 1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx=\int e^{\arcsin x}\,d(\arcsin x)=e^{\arcsin x}+C,\ \forall C-const$$

   (2.2) Замена переменной

   Пусть функция $x=\varphi(t)$ определена и дифференцируема на T, а множество X — множество значений этой функции, на котором определена $f(x)$. Тогда, если существует первообразная функции $f(x)$ на X, то на множестве T верно равенство:

$$\boxed{\int f(x)\,dx=\begin{vmatrix}x=\varphi(t)\\ dx=\varphi'(t)\end{vmatrix}=\int f\big(\varphi(t)\big)\varphi'(t)dt}$$

> **Пример.**
>
> $$\int x(3x-1)^{2024}dx=\begin{vmatrix}3x-1=t\quad 3x=t+1\\ x=\dfrac{1}{3}(t+1)\\ dx=\left(\dfrac{1}{3}t+\dfrac{1}{3}\right)'dt=\dfrac{1}{3}dt\end{vmatrix}=\int\frac{1}{3}(t+1)\cdot t^{2024}\frac{1}{3}dt$$

3. **Интегрирование по частям**

   Пусть функции $u=u(x)$ и $v=v(x)$ непрерывно-дифференцируемые, тогда справедлива формула интегрирования по частям:

$$\boxed{\int u\,dv=u\cdot v-\int v\,du}$$

> **Доказательство.**
>
> Рассмотрим произведение $u\cdot v=u(x)\cdot v(x)$
>
> Дифференциал:
>
> $$d(u\cdot v)=u\cdot dv+v\cdot du$$
>
> Выразим $u\cdot dv$:
>
> $$u\cdot dv=d(u\cdot v)-v\cdot du$$

Интегрируем:

$$\int u\,dv = \int \Big(d(uv) - v\,du\Big)$$

По свойству неопределённого интеграла (5):

$$\int u\,dv = \int d(uv) - \int v\,du$$

По свойству неопределённого интеграла (3):

$$\int u\,dv = u \cdot v - \int v\,du$$

■

Пример.

1. $\displaystyle \int xe^x\,dx = \int \underset{u}{x} d(\underset{v}{e^x}) = xe^x - \int e^x\,dx = xe^x - e^x + C, \quad \forall C - const$

2. $$\int \underbrace{\arccos x}_{u}\, x \underbrace{dx}_{dv} = \left| \begin{array}{l} u = \arccos x,\ du = -\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx \\ dv = dx,\ v = \displaystyle\int dv = \int dx = x \end{array} \right| =$$
$$= x \cdot \arccos x - \int \frac{-x\,dx}{\sqrt{1-x^2}} = x \cdot \arccos x - \frac{1}{2}\int \frac{d(1-x^2)}{\sqrt{1-x^2}} =$$
$$= x \cdot \arccos x - \frac{1}{2} \cdot \frac{(1-x^2)^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} + C =$$
$$= x \cdot \arccos x - \sqrt{1-x^2} + C, \quad \forall C - const$$

2 Правильные и неправильные рациональные дроби

Определение 1. **Дробно-рациональной функцией** или рациональной дробью называется функция, равная частному от деления двух многочленов.

$$\frac{P_m(x)}{Q_n(x)} = \frac{a_m x^m + a_{m-1}x^{m-1} + \ldots + a_1 x + a_0}{b_n x^n + b_{n-1}x^{n-1} + \ldots + b_1 x + b_0},$$
$$a_m, a_{m-1}, \ldots, a_1, a_0, b_n, b_{n-1}, \ldots, b_1, b_0 \text{ — } const$$

где $P_m(x),\ Q_n(x)$ — многочлены степени m и n соответственно.

Определение 2. Рациональная дробь называется **правильной**, если степень числителя меньше степени знаменателя, то есть $m < n$.

Определение 3. Рациональная дробь называется **неправильной**, если степень числителя не меньше степени знаменателя, то есть $m \geqslant n$.

Простейшие рациональные дроби

$$1.\ \frac{A}{x-a} \qquad 2.\ \frac{A}{(x-a)^k} \qquad 3.\ \frac{Mx+N}{x^2+px+q} \qquad 4.\ \frac{Mx+N}{(x^2+px+q)^k}$$

где $A,\ a,\ M,\ N,\ p,\ q$ — $const$, $K \in \mathbb{N},\ k \geqslant 2$
$x^2 + px + q$ не имеет действительных корней.

$$D = p^2 - 4q < 0, \quad 4q - p^2 > 0, \quad \boxed{q - \frac{p^2}{4} > 0} \tag{$*$}$$

2.1 Интегрирование простейших рациональных дробей

2.1.1 $\frac{A}{x-a}$

$$\int \frac{A}{x-a}\,dx = A\int \frac{dx}{x-1} = A\int \frac{d(x-a)}{x-1} = A \cdot \ln|x-a| + C, \quad \forall C \text{ — } const$$

2.1.2 $\frac{A}{(x-a)^k}$

$$\int \frac{A}{(x-a)^k}\,dx = A\int \frac{dx}{(x-a)^k} = A\int \frac{d(x-a)}{(x-a)^k} = A\int (x-a)^{-k}\,d(x-a) = A \cdot \frac{(x-a)^{-k+1}}{-k+1} + C,$$
$$\forall C \text{ — } const$$

2.1.3 $\frac{Mx+N}{x^k+px+q}$

$$\int \frac{Mx+N}{x^2+px+q}\,dx = \left| \begin{array}{l} x^2+px+q = x^2+2\cdot\frac{p}{2}x+\frac{p^2}{4}-\frac{p^2}{4}+q = \\ = \left(x+\frac{p}{2}\right)^2+\left(q-\frac{p^2}{4}\right) \overset{(*)}{=\!=} \left(x+\frac{p}{2}\right)^2+b^2 \end{array} \right| = \int \frac{Mx+N}{\left(x+\frac{p}{2}\right)^2+b^2}\,dx =$$

$$= \left| x+\frac{p}{2}=t \quad x=t-\frac{p}{2} \quad dx=dt \right| = \int \frac{M\left(t-\frac{p}{2}\right)+N}{t^2+b^2}\,dt =$$

$$= M\int\frac{t}{t^2+b^2}\,dt+\left(N-\frac{p}{2}M\right)\int\frac{dt}{t^2+b^2} =$$

$$= \frac{M}{2}\int\frac{d(t^2+b^2)}{t^2+b^2}+\left(N-\frac{p}{2}M\right)\frac{1}{b}\operatorname{arctg}\frac{t}{b} =$$

$$= \frac{M}{2}\ln|t^2+b^2|+\frac{\left(N-\frac{p}{2}M\right)}{b}\operatorname{arctg}\frac{t}{b}+C =$$

$$= \frac{M}{2}\ln|x^2+px+q|+\frac{\left(N-\frac{p}{2}M\right)}{\sqrt{q-\frac{p^2}{4}}}\operatorname{arctg}\frac{x+\frac{p}{2}}{\sqrt{q-\frac{p^2}{4}}}+C, \quad \forall C - const$$

Пример.

$$\int\frac{3x-5}{x^2+2x+10}\,dx = \int\frac{3x-5}{(x+1)^2+3^2} = \left| \begin{array}{l} x+1=t \\ x=t-1 \\ dx=dt \end{array} \right| = \int\frac{3(t-1)-5}{t^2+3^2}\,dt =$$

$$= 3\int\frac{t\,dt}{t^2+3^2}-8\int\frac{dt}{t^2+3^2} = 3\cdot\frac{1}{2}\int\frac{d(t^2+3^2)}{t^2+3^2}-8\cdot\frac{1}{3}\operatorname{arctg}\frac{t}{3} =$$

$$= \frac{3}{2}\ln|t^2+9|-\frac{8}{3}\operatorname{arctg}\frac{t}{3}+C = \frac{3}{2}\ln|x^2+2x+10|-\frac{8}{3}\operatorname{arctg}\frac{x+1}{3}+C, \quad \forall C - const$$

2.2 Неправильные рациональные дроби

Любая неправильная рациональная дробь может быть представлена в виде суммы многочлена и правильной рациональной дроби.

$$\boxed{\frac{P(x)}{Q(x)} = L(x)+\frac{r(x)}{Q(x)}} \tag{$\vee$}$$

$\frac{P(x)}{Q(x)}$ — неправильная рациональная дробь

$L(x)$ — многочлен/частное от деления $P(x)$ на $Q(x)$

$r(x)$ — остаток от деления $P(x)$ на $Q(x)$

$\frac{r(x)}{Q(x)}$ — правильная рациональная дробь.

Интегрируя ($\vee$) получаем:

$$\boxed{\int \frac{P(x)}{Q(x)}\,dx = \int L(x)\,dx + \int \frac{r(x)}{Q(x)}\,dx}$$

Вывод: Интегрирование неправильной рациональной дроби сводится к интегрированию многочлена и правильной рациональной дроби.

Теорема 1 *(О разложении правильной рациональной дроби на простейшие)*.
Любая правильная рациональная дробь $\dfrac{P(x)}{Q(x)}$, знаменатель которой можно разложить на множители:

$$Q(x) = (x - x_1)^{k_1} \cdot (x - x_2)^{k_2} \cdot \ldots \cdot (x - x_n)^{k_n} \cdot (x^2 + p_1 x + q_1)^{s_1} \cdot \ldots \cdot (x^2 + p_m + q_m)^{s_m},$$

может быть представлена и при том единственным образом в виде суммы простейших рациональных дробей:

$$\begin{aligned}\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{A_1}{x - x_1} + \frac{B_1}{(x - x_1)^2} + \ldots + \frac{C_1}{(x - x_1)^{k_1}} + \ldots + \frac{A_n}{(x - x_n)} + \frac{B_n}{(x - x_n)^2} + \ldots +\\ + \frac{C_n}{(x - x_n)^{k_n}} + \frac{M_1 x + N_1}{x^2 + p_1 x + q_1} + \ldots + \frac{M_{s_1} x + N_{s_1}}{(x^2 + p_1 x + q_1)^{s_1}} + \ldots +\\ + \frac{E_1 x + F_1}{x^2 + p_m x + q_m} + \ldots + \frac{E_{s_m} x + F_{s_m}}{(x^2 + p_m x + q_m)^{s_m}}\end{aligned}$$

$$\left.\begin{aligned} &A_1,\ B_1,\ \ldots,\ C_1\\ &A_n,\ B_n,\ \ldots,\ C_n\\ &M_1,\ N_1,\ \ldots,\ M_{s_1},\ N_{s_1}\\ &E_1,\ F_1,\ .,\ E_{s_m},\ F_{s_m}\end{aligned}\right\} \in \mathbb{R} \qquad \begin{aligned} &x^2 + p_1 x + q_1\\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\\ &x^2 + p_m x + q_m\end{aligned} \quad \text{не имеют действительных корней}$$

$$k_1,\ k_2,\ \ldots,\ k_n,\ s_1,\ \ldots,\ s_m \in \mathbb{N}$$

Пример.

1) $$\frac{x^2 + 4}{(x - 2)(x - 3)^3} = \frac{A}{x - 2} + \frac{B}{x - 3} + \frac{C}{(x - 3)^2} + \frac{D}{(x - 3)^3}$$

2) $$\frac{x^3 + 1}{x^2(x^2 + 1)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x^2} + \frac{Cx + D}{x^2 + 1}$$

3) $$\frac{x^2 + x + 13}{(x - 1)^2(x^2 - 4)(x^2 + 4)^2} = \frac{A}{x - 1} + \frac{B}{(x - 1)^2} + \underbrace{\frac{Cx + D}{x^2 - 4}}_{\frac{C}{x-2} + \frac{D}{x+2}} + \frac{Ex + F}{x^2 + 4} + \frac{Gx + H}{(x^2 + 4)^2}$$

2.3 Метод неопределённых коэффициентов

Равенство в теореме *о разложении правильной рациональной дроби на простейшие* (**Т. 1**) представляет собой тождество. Поэтому, приводя дроби к общему знаменателю, получим тождество числителей слева и справа. Приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях x получаем СЛАУ для определения неизвестных коэффициентов.

> **Пример.**
>
> $$\int \frac{3x-4}{x(x-2)(x+1)}\,dx \ominus$$
>
> $$\frac{3x-4}{x(x-2)(x+1)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x-2} + \frac{C}{x+1} = \frac{A(x-2)(x+1) + Bx(x+1) + Cx(x-2)}{x(x-2)(x+1)}$$
>
> $$\begin{aligned} 0\cdot x^2 + 3x - 4 &= A(x-2)(x+1) + Bx(x+1) + Cx(x-2) = \\ &= x^2(A+B+C) + (B-A-2C)x - 2A \end{aligned} \tag{$**$}$$
>
> $$\left.\begin{array}{c|r} x^2 & 0 = A+B+C \\ x^1 & 3 = B-A-2C \\ x^0 & -4 = -2A \end{array}\right\} \text{СЛАУ} \qquad A = 2 \quad B = \frac{1}{3} \quad C = -\frac{7}{3}$$
>
> $$\ominus \int \left(\frac{2}{x} + \frac{\frac{1}{3}}{x-2} + \frac{-\frac{7}{3}}{x+1} \right) dx = 2\int \frac{dx}{x} + \frac{1}{3}\int \frac{dx}{x-2} - \frac{7}{3}\int \frac{dx}{x+1} =$$
>
> $$= 2\ln|x| + \frac{1}{3}\ln|x-2| - \frac{7}{3}\ln|x+1| + C, \quad \forall C - const$$

2.4 Метод конкретных значений

После получения тождества числителей $(**)$ подставляем конкретные значения переменной x, так как оно верно для любого x.

Обычно вместо x подставляют действительные корни знаменателя.

> **Пример.**
>
> $$\begin{array}{lrcrcl} x = 0: & -4 & = & -2A & \Rightarrow & A = 2 \\ x = 2: & 3\cdot 2 - 4 & = & B\cdot 2\cdot 3 & \Rightarrow & B = \frac{1}{3} \\ x = -1: & -3-4 & = & -C\cdot(-3) & \Rightarrow & C = -\frac{7}{3} \end{array}$$

2.5 Выводы

1. **Метод конкретных значений** лучше использовать, когда в знаменателе правильной рациональной дроби нет кратных корней.
2. **Метод неопределённых коэффициентов** лучше использовать, когда в знаменателе правильной рациональной дроби кратные или комплексные (не действительные) корни.
3. Лучше комбинировать два метода.

2.6 Неберущиеся интегралы

1. $\int e^{-x^2}\,dx$ — интеграл Пуассона (теория вероятности)
2. $\int \frac{dx}{\ln x}$ — логарифмический интеграл (теория чисел)
3. $\int \cos x^2\,dx$, $\int \sin x^2\,dx$ — интегралы Френеля (физика)

3 Определённый интеграл. Криволинейная трапеция

3.1 Определённый интеграл

Пусть функция $y = f(x)$ определена на $[a; b]$.

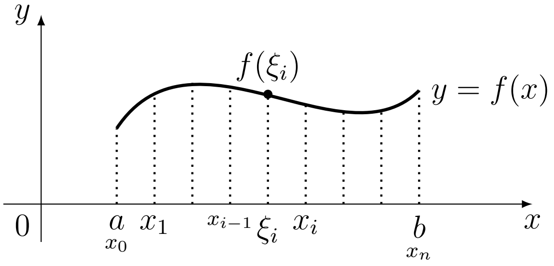
Определение 1. Множество точек $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_i < \ldots < x_n = b$ называется **разбиением отрезка $[a; b]$**, при этом отрезки $[x_{i-1}; x_i]$ называются **отрезками разбиения**.

$i = 1, \ldots, n \quad i = \overline{1, n}$
$\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$ — длина i-го отрезка разбиения $\quad i = \overline{1, n}$
$\lambda = \max\limits_i \Delta x_i$ — диаметр разбиения

Рассмотрим произвольное разбиение $[a; b]$. В каждом из отрезков разбиения $[x_{i-1}; x_i]$ выберем точку ξ_i, $i = \overline{1, n}$. Составим сумму

$$\boxed{S_n = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i) \cdot \Delta x_i} \tag{1}$$

(1) — интегральная сумма для функции $y = f(x)$ на $[a; b]$.



Определение 2. **Определённым интегралом** от функции $y = f(x)$ на $[a; b]$ называется <u>конечный</u> предел интегральной суммы (1), когда число отрезков разбиения растёт, а их длины стремятся к нулю.

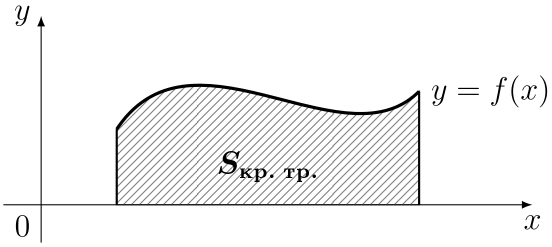
$$\boxed{\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{\lambda \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i) \cdot \Delta x} \tag{2}$$

Предел (2) не зависит от способа разбиения отрезка $[a; b]$ и выбора точек ξ_i, $\overline{1, n}$.
$f(x)$ — подынтегральная функция
$f(x)\,dx$ — подынтегральное выражение
$\int_a^b$ — знак определённого интеграла
a — нижний предел интегрирования
b — верхний предел интегрирования

3.2 Криволинейная трапеция

Определение 3. **Криволинейной трапецией** называется фигура, ограниченная графиком функции $y = f(x)$, отрезком $[a;b]$ на Ox, прямыми $x = a$ и $x = b$ параллельными оси Oy.

3.2.1 Геометрический смысл



Определённый интеграл численно равен площади криволинейной трапеции.

$$S_{\text{кр. тр.}} = \int_a^b f(x)\,dx$$

Определение 4. Функция $y = f(x)$ называется **интегрируемой** на $[a;b]$, если существует конечный предел интегральной суммы (1) на $[a;b]$.

Теорема 1 *(Существование определённого интеграла)***.**
Если функция $y = f(x)$ непрерывна на $[a;b]$, то она на этом отрезке интегрируема.

3.3 Свойства определённого интеграла

Теорема 2.
Если функция $y = f(x)$ интегрируема на отрезке $[a;b]$, то имеет место равенство

$$\boxed{\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx}$$

Доказательство.
По определению определённого интеграла (**опр. 2**)

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^n f(\xi_i)\cdot\Delta x = \lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^n f(\xi_i)(x_i - x_{i-1}) = -\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^n f(\xi_i)(x_{i-1} - x_i)$$
$$= -\int_b^a f(x)\,dx$$

■

Теорема 3 *(Аддитивность определённого интеграла)*.
Если функция $y = f(x)$ интегрируема на каждом из отрезков $[a;c]$, $[c;b]$ $(a < c < b)$, то она интегрируема на $[a;b]$ и верно равенство

$$\boxed{\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx}$$

Доказательство.
Рассмотрим произвольное разбиение $[a;b]$ такое, что одна из точек разбиения совпадает с точкой c:

$$a = x_0 < x_1 < \ldots < x_m = c < x_{m+1} < \ldots < x_n = b$$

Данное разбиение определяет ещё два разбиения:

$$\begin{array}{ll} a = x_0 < x_1 < \ldots < x_{m-1} < x_m = c & \lambda_1 = \max\limits_i \Delta x_i,\ i = \overline{1, m} \\ c = x_m < x_{m+1} < \ldots < x_{n-1} < x_n = b & \lambda_2 = \max\limits_i \Delta x_i,\ i = \overline{m+1, n} \end{array}$$

Так как функция $y = f(x)$ интегрируема на $[a;c]$ и на $[c;b]$, то

$$\int_a^c f(x)\,dx = \lim_{\lambda_1 \to 0} \sum_{i=1}^{m} f(\xi_i) \cdot \Delta x_i$$

$$\int_c^b f(x)\,dx = \lim_{\lambda_2 \to 0} \sum_{i=m+1}^{n} f(\xi_i) \cdot \Delta x_i$$

$\lambda = \max\{\lambda_1; \lambda_2\} \quad \lambda \to 0$
Суммируем интегральные суммы:

$$\sum_{i=1}^{m} f(\xi_i) \cdot \Delta x_i + \sum_{i=m+1}^{n} f(\xi_i) \cdot \Delta x_i = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i) \cdot \Delta x_i$$

Вычислим предел:

$$\lim_{\lambda \to 0} \left(\sum_{i=1}^{m} f(\xi_i) \cdot \Delta x_i + \sum_{i=m+1}^{n} f(\xi_i) \cdot \Delta x_i \right) = \lim_{\lambda \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i) \cdot \Delta x_i$$

$$\lim_{\lambda \to 0} \sum_{i=1}^{m} f(\xi_i) \cdot \Delta x_i + \lim_{\lambda \to 0} \sum_{i=m+1}^{n} f(\xi_i) \cdot \Delta x_i = \lim_{\lambda \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i) \cdot \Delta x_i$$

$$\lim_{\lambda_1 \to 0} \sum_{i=1}^{m} f(\xi_i) \cdot \Delta x_i + \lim_{\lambda_2 \to 0} \sum_{i=m+1}^{n} f(\xi_i) \cdot \Delta x_i = \lim_{\lambda \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i) \cdot \Delta x_i$$

Из последнего равенства следует, что $f(x)$ — интегрируема на $[a;b]$ и верно равенство

$$\int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx$$

■

Теорема 4.
Если C — $const$, то

$$\boxed{\int_a^b c\,dx = c\cdot(b-a)}$$

Доказательство.

$$\int_a^b c\,dx = \lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n} c\cdot \Delta x_i = c\cdot \lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n} x_i - x_{i-1} = c\cdot(b-a)$$

■

Теорема 5.
Если функции $f_1(x),\ f_2(x)$ интегрируемы на $[a;b]$, то их линейная комбинация

$$\lambda_1 f_1(x) + \lambda_2 f_2(x),\ \text{где } \lambda_1,\ \lambda_2 \in \mathbb{R}$$

интегрируема на $[a;b]$ и верно равенство:

$$\int_a^b \Big(\lambda_1 f_1(x) + \lambda_2 f_2(x)\Big)\,dx = \lambda_1 \int_a^b f_1(x)\,dx + \lambda_2\cdot \int_a^b f_2(x)\,dx$$

Доказательство.

$$\begin{aligned}
\int_a^b \Big(\lambda_1 f_1(x) + \lambda_2 f_2(x)\Big)\,dx &= \lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n}\Big(\lambda_1 f_1(\xi_i) + \lambda_2 f_2(\xi_i)\Big)\cdot \Delta x_i = \\
&= \lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n}\Big(\lambda_1 f_1(\xi_i)\cdot \Delta x_i + \lambda_2 f_2(\xi_i)\cdot \Delta x_i\Big) = \\
&= \lim_{\lambda\to 0}\left(\sum_{i=1}^{n}\lambda_1 f_1(\xi_i)\cdot \Delta x_i + \sum_{i=1}^{n}\lambda_2 f_2(\xi_i)\cdot \Delta x_i\right) = \\
&= \lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n}\lambda_1 f_1(\xi_i)\cdot \Delta x_i + \lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n}\lambda_2 f_2(\xi_i)\cdot \Delta x_i = \\
&= \lambda_1 \lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n} f_1(\xi_i)\cdot \Delta x_i + \lambda_2 \lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n} f_2(\xi_i)\cdot \Delta x_i = \\
&= \lambda_1 \int_a^b f_1(x)\,dx + \lambda_2 \int_a^b f_2(x)\,dx = \\
&= \int_a^b \Big(\lambda_1 f_1(x) + \lambda_2 f_2(x)\Big)\,dx
\end{aligned}$$

■

Следствие 5.1.

$$\int_a^a f(x)\,dx = 0$$

Теорема 6 *(О сохранении определённым интегралом знака подынтегральной функции)***.**
Если $f(x)$ интегрируема и неотрицательна на $[a;b]$, то

$$\boxed{\int_a^b f(x)\,dx \geqslant 0}$$

Доказательство.

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\cdot\Delta x_i$$

Δx_i — длины отрезков разбиения $\quad \Delta x_i > 0$
$f(\xi_i) \geqslant 0$ по условию

$$f(\xi_i)\cdot\Delta x_i \geqslant 0,\ i = \overline{i,n}$$

$$\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\cdot\Delta x_i \geqslant 0 \quad \text{как сумма неотрицательных чисел}$$

$$\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\cdot\Delta x_i \geqslant 0$$

по следствию из теоремы *о сохранении функцией знака своего предела*

$$\Downarrow$$

$$\int_a^b f(x)\,dx \geqslant 0$$

■

Теорема 7 *(Об интегрировании неравенства)***.**
Пусть функции $f(x)$ и $g(x)$ интегрируемы на $[a;b]$ и $\forall x \in [a;b]\colon f(x) \geqslant g(x)$, то

$$\boxed{\int_a^b f(x)\,dx \geqslant \int_a^b g(x)\,dx}$$

Доказательство.
По условию $f(x) \geqslant g(x)$, $\forall x \in [a;b]$. Обозначим $h(x) = f(x) - g(x) \geqslant 0$.
По теореме 6

$$\int_a^b \big(f(x) - g(x)\big)\,dx \geqslant 0$$

По теореме 5:

$$\int_a^b f(x)\,dx - \int_a^b g(x)\,dx \geqslant 0$$
$$\Downarrow$$
$$\int_a^b f(x)\,dx \geqslant \int_a^b g(x)\,dx$$

■

Теорема 8 *(Об оценке модуля определённого интеграла)***.**
Если функция $f(x)$ и $|f(x)|$ интегрируемы на $[a;b]$, то справедливо неравенство

$$\boxed{\left|\int_a^b f(x)\,dx\right| \leqslant \int_a^b |f(x)| dx}$$

Доказательство.
$\forall x \in [a;b]$ справедливо неравенство

$$-\big|f(x)\big| \leqslant f(x) \leqslant \big|f(x)\big|$$

По теореме 5 и 7:

$$-\int_a^b \big|f(x)\big|\,dx \leqslant \int_a^b f(x)\,dx \leqslant \int_a^b \big|f(x)\big|\,dx$$

Сворачиваем двойное неравенство:

$$\left|\int_a^b f(x)\,dx\right| \leqslant \int_a^b |f(x)| dx$$

■

Теорема 9 *(О среднем значении для определённого интеграла)***.**
Если $f(x)$ непрерывна на $[a;b]$, то

$$\exists\, c \in [a;b]\colon\, f(c) = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx$$

Доказательство.
Так как функция $y = f(x)$ непрерывна на $[a;b]$, то по теореме *Вейерштрасса* она достигает своего наибольшего и наименьшего значения.
То есть $\exists\, m, M \in \mathbb{R},\ \forall x \in [a;b]\colon m \leqslant f(x) \leqslant M$
По теореме 7:

$$\int_a^b m\,dx \leqslant \int_a^b f(x)\,dx \leqslant \int_a^b M\,dx$$

По теореме 5:

$$m\int_a^b dx \leqslant \int_a^b f(x)\,dx \leqslant M\int_a^b dx$$

По теореме 4:

$$m(b-a) \leqslant \int_a^b f(x)\,dx \leqslant M(b-a) \quad \mid : (b-a)$$

Так как функция $y = f(x)$ непрерывна на $[a;b]$, то по теореме *Больцано-Коши* она принимает все свои значения между наибольшим и наименьшим значением.

$$m \leqslant \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx \leqslant M$$

По теореме *Больцано-Коши* $\exists\, c \in [a;b]:$

$$f(c) = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx$$

■

Теорема 10 *(Об оценке определённого интеграла)***.**
Пусть функции $f(x)$ и $g(x)$ интегрируемы на $[a;b]$ и $\forall x \in [a;b]:\, m \leqslant f(x) \leqslant M,\ g(x) \geqslant 0$. Тогда

$$\boxed{m\int_a^b g(x)\,dx \leqslant \int_a^b f(x)\,g(x)\,dx \leqslant M\int_a^b g(x)\,dx}$$

Доказательство.
Так как $\forall x \in [a;b]$ верны неравенства

$$\begin{aligned} m \leqslant f(x) \leqslant M \quad &\mid \cdot\, g(x) \\ g(x) \geqslant 0 \qquad &m, M \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

$$m \cdot g(x) \leqslant f(x) \cdot g(x) \leqslant M \cdot g(x)$$

По теореме 7 и 5:

$$m\int_a^b g(x) \leqslant \int_a^b f(x)\,g(x)\,dx \leqslant M\int_a^b g(x)\,dx$$

■

Следствие 10.1. $g(x) \equiv 1,\ \forall x \in [a;b]$

$$m(b-a) \leqslant \int_a^b f(x)\,dx \leqslant M(b-a)$$

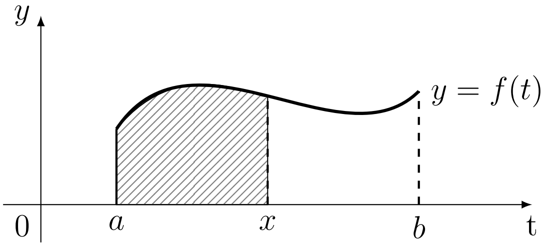
3.4 Определённый интеграл с переменным верхним пределом интегрирования

Пусть $f(x)$ непрерывна на $[a;b]$. Рассмотрим $\int_a^b f(x)\,dx$. Закрепим нижний предел интегрирования a. Изменяем верхний предел интегрирования b, чтобы подчеркнуть изменение верхнего предела интегрирования.

$b \longrightarrow x \quad x \in [a;b] \quad [a;x] \subset [a;b] \quad I(x) = \displaystyle\int_a^x f(t)\,dt.$

Определение 1. **Определённым интегралом с переменным верхним пределом интегрирования** от непрерывной функции $f(x)$ на $[a;b]$ называется интеграл вида

$$\boxed{I(x) = \int_a^x f(t)\,dt}, \text{ где } x \in [a;b]$$



$I(x)$ — переменная площадь криволинейной трапеции с основанием $[a;x] \subset [a;b]$.

3.4.1 Свойства

Теорема 1 *(Непрерывность $I(x)$).*
Если функция $f(x)$ на $[a;b]$ непрерывна, то $I(x) = \int_a^x f(t)\,dt$ — непрерывна на $[a;b]$.

Доказательство.
Рассмотрим $I(x) = \int_a^x f(t)\,dt$

$$I(x+\Delta x) = \int_a^{x+\Delta x} f(t)\,dt$$

$$\begin{aligned}\Delta I(x) = I(x+\Delta x) - I(x) = \int_a^{x+\Delta x} f(t)\,dt - \int_a^x f(t)\,dt \overset{*,\text{ T3}}{=\!=}\\ = \cancel{\int_a^x f(t)\,dt} + \int_x^{x+\Delta x} f(t)\,dt - \cancel{\int_a^x f(t)\,dt} = \int_a^{x+\Delta x} f(t)\,dt \overset{\text{T9}}{=\!=}\\ = f(c)\cdot(x+\Delta x - x) = f(c)\cdot\Delta x, \text{ где } c \in [x;x+\Delta x]\end{aligned}$$

$*$ — Так как функция $f(x)$ непрерывна на $[a;b]$, то $f(x)$ интегрируема на $[a;b]$ $\Rightarrow$ применяем свойство аддитивности определённого интеграла.

$$\lim_{\Delta x\to 0} \Delta I(x) = \lim_{\Delta x \to 0} f(c)\cdot \Delta x = 0$$

По определению непрерывной функций $\Rightarrow$ $I(x) = \int_a^x f(t)\,dt$ непрерывна на $[a;b]$. ■

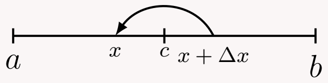
Теорема 2 *(О производной $I(x)$).*
Если функция $y = f(x)$ непрерывна на $[a;b]$, то $\forall x \in [a;b]$ верно равенство

$$\boxed{\big(I(x)\big)' = \left(\int_a^x f(t)\,dt\right)' = f(x)}$$

Доказательство.

$$\big(I(x)\big)' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta I(x)}{\Delta x} \overset{\text{T1}}{=\!=} \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(c)\cdot \Delta x}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} f(c) \overset{*}{=} f(x)$$

$*$:



при $\Delta x \to 0 \quad x + \Delta x \to x \quad c \to x$

∎

Следствие 2.1. Функция $I(x)$ — первообразная функции $f(x)$ на $[a;b]$, так как по теореме 2 $\big(I(x)\big)' = f(x)$.

3.4.2 Формула Ньютона-Лейбница

Теорема 3.
Пусть функция $f(x)$ — непрерывна на $[a;b]$. Тогда

$$\boxed{\int_a^b f(x)\,dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a)}$$

где $F(x)$ — первообразная $f(x)$.

Доказательство.
Пусть $F(x)$ первообразная $f(x)$ на $[a;b]$. По следствию из теоремы 2 $I(x)$ — первообразная $f(x)$ на $[a;b]$.
По свойству первообразной:

$$I(x) - F(x) = C$$
$$I(x) = F(x) + C, \text{ где } C \text{ — } const$$

$$\int_a^x f(t)\,dt = F(x) + C, \text{ где } C \text{ — } const \qquad (\vee)$$

- $x = a$:

$$\int_a^a f(t)\,dt = F(a) + C$$
$$0 = F(a) + C$$
$$C = -F(a)$$

$C = -F(a)$ подставим в $(\vee)$:

$$\int_a^x f(t)\,dt = F(x) - F(a)$$

- $x = b$:

$$\boxed{\int_a^b f(t)\,dt = F(b) - F(a)}$$

■

3.5 Методы вычисления определённого интеграла

3.5.1 Метод интегрирования по частям

Теорема 1.
Пусть функции $u = u(x)$ и $v = v(x)$ непрерывно дифференцируемы на $[a; b]$. Тогда имеет место равенство

$$\boxed{\int_a^b u\,dv = u\,v\Big|_a^b - \int_a^b v\,du}$$

Доказательство.
Рассмотрим произведение функций $u \cdot v$.
Дифференцируем:

$$\begin{aligned} d(u \cdot v) &= v\,du + u\,dv \\ u\,dv &= d(uv) - v\,du \end{aligned}$$

Интегрируем:

$$\int_a^b u\,dv = \int_a^b \big(d(uv) - v\,du\big) = \int_a^b d(uv) - \int_a^b v\,du - u\,v\Big|_a^b - \int_a^b v\,du$$

■

Пример.

$$\int_1^e \ln x\,dx = \begin{vmatrix} u = \ln x & du = \dfrac{1}{x}\,dx \\ dv = dx & v = x \end{vmatrix} = x\,\ln x\Big|_1^e - \int_1^e x \cdot \frac{1}{x}\,dx = (e\ln e - 1 \cdot \ln 1) - x\Big|_1^e =$$
$$= e - (e - 1) = \cancel{e} - \cancel{e} + 1 = 1$$

3.5.2 Метод подстановки (замена переменной)

Теорема 2.
Пусть

1. $y = f(x)$ непрерывна на $[a; b]$
2. $x = \varphi(t)$ непрерывно дифференцируема при $t \in [t_1; t_2]$
3. при $t \in [t_1; t_2]$ значения функции $\varphi(t)$ не выходят за пределы $[a; b]$
4. $\varphi(t_1) = a,\ \varphi(t_2) = b$

Тогда $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx = \begin{vmatrix} x = \varphi(t), & x_{\text{н}} = a, & t_{\text{н}} = t_1 \\ dx = \varphi'(t)\,dt, & x_{\text{в}} = b, & t_{\text{в}} = t_2 \end{vmatrix} = \int_{t_1}^{t_2} f\big(\varphi(t)\big)\varphi'(t)\,dt$

Доказательство.
Так как

1. $y = f(x)$ непрерывна на $[a; b]$, а
2. $x = \varphi(t)$ непрерывна на $[t_1; t_2]$, то

сложная $y = f\big(\varphi(t)\big)$ непрерывна на $[t_1; t_2]$ по теореме *о непрерывности сложной функции.*

Так как $y = f(x)$ непрерывна на $[a; b]$, а функция $f\big(\varphi(t)\big) \cdot \varphi'(t)$ — непрерывна на $[t_1; t_2]$, то существует определённый и неопределённый интеграл от этих функций.

Пусть $F(x)$ — первообразная функции $f(x)$ на $[a; b]$. В силу инвариантности неопределённого интеграла $F\big(\varphi(t)\big)$ — первообразная функции $f\big(\varphi(t)\big)$ на $[t_1; t_2]$.
Тогда

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(x)\Big|_a^b \xlongequal{\text{Н-Л}} \boxed{F(b) - F(a)}$$

$$\int_{t_1}^{t_2} f\big(\varphi(t)\big)\varphi'(t)\,dt = F\big(\varphi(t)\big)\Big|_{t_1}^{t_2} \xlongequal{\text{Н-Л}} F\big(\varphi(t_2)\big) - F\big(\varphi(t_1)\big) = \boxed{F(b) - F(a)}$$

■

Замечание.
⊕ При замене переменной в определённом интеграле обратную замену не делают.
⊖ Нужно не забыть изменить пределы интегрирования.

Пример.

$$\int_1^e \frac{\ln x}{x}\,dx = \int_1^e \ln x\, d(\ln x) \mathbin{⊜} \left.\frac{\ln^2 x}{2}\right|_1^e = \frac{\ln^2 e}{2} - \frac{\ln^2 1}{2} = \frac{1}{2}$$

$$⊜ \begin{vmatrix} \ln x = t \\ x_{\text{н}} = 1,\ t_{\text{н}} = 0 \\ x_{\text{в}} = e,\ t_{\text{в}} = 1 \end{vmatrix} = \int_0^1 t\,dt = \left.\frac{t^2}{2}\right|_0^1 = \frac{1}{2}$$

3.6 Интегрирование чётных и нечётных функций по симметричному относительно начала координат промежутку

Теорема 1.
Пусть функция $y = f(x)$ непрерывна на $[-a; a]$, где $a \in \mathbb{R},\ a > 0$. Тогда

$$\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = \begin{cases} 2\displaystyle\int_0^a f(x)\,dx, & f \text{ — чётная} \\ \hfill 0, & f \text{ — нечётная} \end{cases}$$

Доказательство.

$$\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = \int_{-a}^{0} f(x)\,dx + \int_0^a f(x)\,dx \circledequal$$

$$\int_{-a}^{0} f(x)\,dx = \left| \begin{array}{ll} x = -t, & dx = -dt \\ x_{\text{н}} = -a, & t_{\text{н}} = a \\ x_{\text{в}} = 0, & t_{\text{в}} = 0 \end{array} \right| = \int_a^0 f(-t)\,(-dt) = \int_0^a f(-t)\,dt =$$

$$= \begin{cases} \displaystyle\int_0^a f(t)\,dt, \ f \text{ — чётная} \\ -\displaystyle\int_0^a f(t)\,dt, \ f \text{ — нечётная} \end{cases}$$

$$\circledequal \int_0^a f(x)\,dx + \begin{cases} \displaystyle\int_0^a f(x)\,dx, & f \text{ — чётная} \\ -\displaystyle\int_0^a f(x)\,dx, & f \text{ — нечётная} \end{cases} = \begin{cases} 2\displaystyle\int_0^a f(x)\,dx, & f \text{ — чётная} \\ \hfill 0, & f \text{ — нечётная} \end{cases}$$

■

Пример.

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos x\,dx \circledequal \sin x\Big|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} = \sin\frac{\pi}{2} - \sin\Big(-\frac{\pi}{2}\Big) = 1 - (-1) = 2$$

$$\circledequal 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos\ dx = 2$$

Пример.

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sin x\,dx \circledequal -\cos x\Big|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} = -\left(\cos\frac{\pi}{2} - \cos\left(-\frac{\pi}{2}\right)\right) = 0$$

Пример.

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos^2 x \sin^3 x\,dx = 0 \qquad \text{т.к. } \cos^2 x \sin^3 x = y \text{ нечётная функция на } [-\pi; \pi]$$

3.7 Интегрирование периодических функций

Теорема 2.
Пусть $f(x)$ непрерывная периодическая функция с периодом T. Тогда

$$\int_a^{a+T} f(x)\,dx = \int_0^T f(x)\,dx, \quad \forall a \in \mathbb{R}$$

Доказательство.

$$\int_a^{a+T} f(x)\,dx = \int_a^0 f(x)\,dx + \int_0^T f(x)\,dx + \int_T^{T+a} f(x)\,dx$$

$$\int_T^{T+a} f(x)\,dx = \left| \begin{array}{ll} \;t = x - T, & x = t + T,\ dx = dt \\ x_{\text{н}} = T, & t_{\text{н}} = 0 \\ x_{\text{в}} = T + a, & t_{\text{в}} = a \end{array} \right| = \int_0^a f(t+T)\,dt \overset{\text{период.}}{=\!=\!=} \int_0^a f(t)\,dt$$

$$\int_a^{a+T} f(x)\,dx = \int_a^0 f(x)\,dx + \int_0^T f(x)\,dx + \int_0^a f(x)\,dx$$

$$\int_a^{a+T} f(x)\,dx = \cancel{-\int_0^a f(x)\,dx} + \int_0^T f(x)\,dx + \cancel{\int_0^a f(x)\,dx}$$

$$\int_a^{a+T} f(x)\,dx = \int_0^T f(x)\,dx, \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

■

Пример.

$$\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{5\pi}{2}} \sin x\,dx = \int_{\frac{\pi}{2}}^{2\pi+\frac{\pi}{2}} \sin x\,dx = \int_0^{2\pi} \sin x\,dx = 0$$

4 Приложения определённого интеграла

4.1 Площадь плоской фигуры

4.1.1 Прямоугольная декартовая система координат

Пусть функция $y = f(x)$ непрерывна на $[a;b]$ и $\forall x \in [a;b]\colon f(x) \geqslant 0$. Из геометрического смысла определённого интеграла:

$$\boxed{S = \int_a^b f(x)\,dx} \tag{1}$$

Этапы вывода формулы:

1. Разбиваем $[a;b]$ точками $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_i < \ldots < x_n = b$
2. $[x_{i-1}; x_i],\ i = \overline{1,n}$ — отрезки разбиения
   $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$ — длины отрезков разбиения
3. $\forall \xi_i \in [x_{i-1}; x_i],\ i = \overline{1,n} \qquad f(\xi_i)$
   Криволинейную трапецию с основанием Δx_i заменяем прямоугольником длины $f(\xi_i)$.
   Криволинейная трапеция с основанием $[a;b]$ заменяется на ступенчатую фигуру.
4. $\lambda = \max\limits_i \Delta x_i$
   $\sum\limits_{i=1}^{n} f(\xi_i) \cdot \Delta x_i$ — интегральная сумма
5. $\lim\limits_{\lambda \to 0} \sum\limits_{i=1}^{n} f(\xi) \cdot \Delta x_i = \boxed{\int_a^b f(x)\,dx = S}$

Следствие 1.1. Если функция $y = f(x)$ непрерывна на $[a;b]$ и $f(x) < 0\ \forall x \in [a;b]$, то

$$\boxed{S = -\int_a^b f(x)\,dx} \tag{2}$$

Следствие 1.2. Пусть функция ограничена графиками функции $\begin{cases} y_1 = f_1(x) \\ y_2 = f_2(x) \end{cases}$, непрерывных и неотрицательных на $[a;b]$. Тогда

$$\boxed{S = \int_a^b \Big(f_1(x) - f_2(x)\Big)\,dx} \tag{3}$$

Следствие 1.3. Если фигура симметрична относительно хотя бы одной из координатных осей, то

$$S_{\text{ф}} = 2S_{\text{пол}}$$

Следствие 1.4. Если функция $y = f(x)$ конечное число раз меняет знак на $[a; b]$, то определённый интеграл от этой функции на $[a; b]$ равен алгебраической сумме площадей соответствующих криволинейных трапеций.

$$S = \int_a^b f(x)\,dx = -S_1 + S_2 - S_3$$

Пример. $S_{\text{ф}}$ — ? $\quad x = y^2,\ x = a$

$S_{\text{a}} = 2 \cdot S_{\text{пол}}$

$$S_{\text{пол}} = \int_0^a \sqrt{x}\,dx = \left.\frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}\right|_0^a = \frac{2}{3}a\sqrt{a}$$

$$S_{\text{ф}} = \frac{4}{3}a\sqrt{a}$$

4.1.2 Параметрически заданная функция

$$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t),\ t \in [t_1; t_2] \end{cases}$$

$x(t),\ y(t)$ — непрерывно дифференцируемы при $t \in [t_1; t_2]$
$x(t_1) = a, \quad x(t_2) = b, \quad x(t) \geqslant 0,\ \forall t \in [t_1; t_2]$

Тогда:

$$S_{\text{ф}} = \int_a^b y(x)\,dx = \left| \begin{array}{ll} y = y(t), & a = x(t_1) \\ x = x(t), & b = x(t_2) \\ dx = x'(t)\,dt & \end{array} \right| = \boxed{\int_{t_1}^{t_2} y(t)x'(t)\,dt = S} \tag{4}$$

Замечание. Изменение параметра $t \in [t_1; t_2]$ способствует росту переменной x. (обход параметра $t \in [t_1; t_2]$ происходит по часовой стрелке)

Пример.

$$\begin{cases} x = a\cos^3 t \\ y = a\sin^3 t \end{cases}$$

t	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
x	a	0	$-a$	0	a
y	0	a	0	$-a$	0

$S_{\text{ф}} = 4S^*$

$$S^* = \int_{\frac{\pi}{2}}^0 \underbrace{a\sin^3 t}_{y(t)} \cdot \underbrace{3a \cdot \cos^3 t \cdot (-\sin t)}_{x'(t)}\,dt = 3a^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^4 t \cos^3 t\,dt = \ldots = \frac{3\pi a^2}{32}$$

$$S_{\text{ф}} = \frac{3\pi a^2}{8}$$

4.1.3 Полярная система координат

Определение 1. Криволинейный сектор — это фигура, ортогональная лучами $\varphi = \alpha,\ \varphi = \beta$ и графиком непрерывной кривой $r = r(\varphi),\ \varphi \in [\alpha; \beta]$

Этапы вывода формулы:

1. Разбиваем сектор A_0OA_n лучами $\alpha = \varphi_0 < \varphi_1 < \ldots < \varphi_n = \beta$ на углы $\angle A_0OA_1$, $\angle A_1OA_2, \ldots, \angle A_{n-1}OA_n$
   $\Delta\varphi_i = \varphi_i - \varphi_{i-1}$ — величина $\angle A_{i-1}OA_1$ в радианах
   $\lambda = \max\limits_i \Delta\varphi_i,\ i = \overline{1,n}$

2. $\forall$ выберем и проведём $\Psi_i,\ \Psi_i \in \angle A_{i-1}OA_i$
   Находим $r = r(\Psi_i)$
   $M_i\big(\Psi_i,\ r(\Psi_i)\big),\quad M_i \in \angle A_{i-1}OA_i,\quad M_i \in r = r(\varphi)$

3. Заменяем каждый i-ый криволинейный сектор на круговой сектор $R = r(\Psi_i),\ i = \overline{1,n}$
   $S_i = \dfrac{1}{2}R^2 \cdot \Delta\varphi_i$ — площадь i-го кругового сектора
   $R = r(\Psi_i)$
   $$\sum_{i=1}^{n} S_i = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{2} r^2(\Psi_i) \cdot \Delta\varphi_i = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} r^2(\Psi_i) \cdot \Delta\varphi_i$$

4. Вычисляем предел
   $$\lim_{\lambda \to 0} \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} r^2(\Psi_i) \cdot \Delta\varphi_i = \boxed{\frac{1}{2}\int_{\alpha}^{\beta} r^2\, d\varphi = S} \qquad (5)$$

Пример. $S_ф$ — ?
Вне окружности $r = 1$ Внутри окружности $r = 1 + \cos\varphi$

$$\begin{cases} r = 1 \\ r = 1 + \cos\varphi \end{cases} \qquad \cos\varphi = 0,\ \varphi = \pm\frac{\pi}{2}$$

φ	0	$\frac{\pi}{2}$	π
r	2	1	0

$$S_ф = 2\left(S_{кар} - S_{окр}\right) = 2\left(\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(1 + \cos\varphi\right)^2 d\varphi - \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} 1^2\, d\varphi\right) = \ldots = 2\left(1 + \frac{\pi}{8}\right) = 2 + \frac{\pi}{4}$$

4.2 Объём тела

Пусть T — тело, S — площадь сечения тела плоскостью перпендикулярной Ox или площадь поперечного сечения.
$S = S(x)$ — непрерывная функция на $[a; b]$

1. Разбиваем отрезок $[a; b]$ точками $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_{i-1} < x_i < \ldots < x_n = b$
   Отрезки разбиения $[x_{i-1}; x_i]$
   $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$ — длина отрезка разбиения
   $a = \max\limits_i \Delta x_i, \; i = \overline{1, n}$

2. Проводим плоскости

$$\begin{cases} x = x_0 = a \\ \ldots\ldots\ldots \\ x = x_{i-1} \\ x = x_i \\ \ldots\ldots\ldots \\ x = x_n = b \end{cases} \text{— эти плоскости разбивают тело } T \text{ на слои}$$

3. $\forall \xi_i \in [x_{i-1}; x_i], \; i = \overline{1, n}$
   Проводим плоскость $x = \xi_i$. Находим $S(\xi_i)$.
   Каждый слой заменяем цилиндром с основанием $S(\xi_i)$ и высотой $\Delta x_i, \; i = \overline{1, n}$

4. $V_{\text{ц}} = S(\xi_i) \cdot \Delta x_i$ — объём i-го цилиндра
   $\sum\limits_{i=1}^{n} S(\xi_i) \cdot \Delta x_i$ — интегральная сумма

5. Вычисляем предел

$$\lim_{\lambda \to 0} \sum_{i=1}^{n} S(\xi_i) \cdot \Delta x_i = \boxed{\int_a^b S(x)\, dx = V_T} \tag{6}$$

4.3 Тела вращения

4.3.1 Прямоугольная декартовая система координат

Вокруг оси Ox

Рассмотрим криволинейную трапецию, ограниченную графиком непрерывной функции $y = f(x)$, $x = a$, $x = b$ и осью Ox. Пусть $\forall x \in [a; b]\colon f(x) \geqslant 0$
Поперечное сечение — круг
$S_{\text{круга}} = \pi R^2 = (R = y) = \pi y^2$

$$\boxed{V_{Ox} = \pi \int_a^b y^2 \, dx} \tag{7}$$

Пусть криволинейная трапеция ограничена графиками непрерывных функций $y_1 = f_1(x)$ и $y_2 = f_2(x)$, прямыми $x = a$, $x = b$

$$V_{Ox} = V_{Ox}^1 - V_{Ox}^2 = \pi \int_a^b y_1^2 \, dx - \pi \int_a^b y_2^2 \, dx = \boxed{\pi \int_a^b \left(y_1^2 - y_2^2\right) dx = V_{Ox}} \tag{8}$$

Вокруг Oy

Пусть непрерывная функция $x = f(y),\ y \in [c; d]$

$$\boxed{V_{Oy} = \pi \int_c^d x^2 \, dy} \tag{9}$$

Пусть $y = f(x)$ — непрерывная на $[a; b]$ функция, $\forall x \in [a; b]\colon f(x) \geqslant 0$.
Криволинейная трапеция ограничена графиком функции $y = f(x)$, $x = a$, $x = b$ и осью Ox.
Аналогично формула (6) и (8):

$$\boxed{V_{Oy} = 2\pi \int_a^b x|y| \, dx} \qquad \begin{matrix} a \geqslant 0 \\ y \geqslant 0 \end{matrix} \tag{10}$$

Следствие 1.1. Если функция $y = f(x)$ задана параметрически:

$$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases} \text{— непрерывно дифференцируемы на } [t_1; t_2]$$

$$\begin{matrix} x(t_1) = a & y(t_1) = c \\ x(t_2) = b & y(t_2) = d \end{matrix} \tag{$*$}$$

Тогда:

$$\begin{cases} V_{Ox} \overset{(7)}{=\!=} \pi \displaystyle\int_a^b y^2\,dx \overset{(*)}{=\!=} \pi \int_{t_1}^{t_2} y^2(t)\,x'(t)\,dt \\ V_{Oy} \overset{(9)}{=\!=} \pi \displaystyle\int_c^d x^2\,dy \overset{(*)}{=\!=} \pi \int_{t_1}^{t_2} x^2(t) y'(t)\,dt \\ V_{Oy} \overset{(10)}{=\!=} \pi \displaystyle\int_a^b x(t)y(t)x'(t)\,dt \end{cases} \tag{11}$$

4.3.2 Полярная система координат

Пусть $r = r(\varphi)$ — непрерывная на $[\alpha; \beta]$.
Криволинейный сектор ограничен графиком непрерывной функции $r = r(\varphi)$ и $\varphi = \alpha$, $\varphi = \beta$.

$$\boxed{V_{Or} = \frac{2}{3}\pi \int_\alpha^\beta r^3 \sin\varphi\,d\varphi} \tag{12}$$

Пример.

$$\begin{array}{l|} y = e^{-2x} - 1 \\ y = e^{-x} + 1 \\ x = 0 \\ \hline V_{Ox} \text{ — } ? \\ V_{Oy} \text{ — } ? \end{array}$$

$$\begin{array}{lll} e^{-2x} - 1 = e^{-x} + 1 & t^2 - t - 2 = 0 & \\ e^{-2x} - e^{-x} - 2 = 0 & t_1 = 2 & e^{-x} = 2 \\ e^{-x} = t & t_2 = -1\ \varnothing & x = -\ln 2 \end{array}$$

$$V_{Ox} = V_1 - V_2 = \pi \int_{-\ln 2}^{0} \Big((e^{-x} + 1)^2 - (e^{-2x} - 1)^2 \Big)\,dx = \ldots = \frac{11}{4}\pi$$

$$V_{Oy} = V_1 - V_2 = 2\pi \int_0^{\ln 2} x\Big(e^x + 1 - (e^{2x} - 1)\Big)\,dx = \ldots = \ln^2 2 \cdot \frac{1}{4}$$

Пример.

$$\begin{array}{l|}\begin{cases} x = a\cos^3 t \\ y = a\sin^3 t \end{cases} \\ \hline V_{Ox} - ? \end{array}$$

$$V_{Ox}^{*} = \pi \int_{\frac{\pi}{2}}^{0} \left(a\sin^3 t\right)^2 \cdot \underbrace{3a\cos^2 t(-\sin t)}_{x'} dt = 3\pi a^3 \int_{\frac{\pi}{2}}^{0} \sin^6 t \cos^2 t \, d(\cos t) =$$

$$= 3\pi a^3 \sin^3 \int_{\frac{\pi}{2}}^{0} \left(1 - \cos^2 t\right)^3 \cos^2 t \, d(\cos t) = \ldots = \frac{128}{105}\pi$$

$$V_{Ox} = 2V_{Ox}^{*} = \frac{256}{105}\pi$$

Пример.

$$\begin{array}{l|} r = a\sin^2\varphi \\ \hline V_{Or} - ? \end{array}$$

φ	0	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{3\pi}{4}$	π
r	0	a	$\frac{a}{2}$	$\frac{a}{2}$	0

$\forall\varphi \in [0; 2\pi]$

$$V_{Or} = \frac{2}{3}\pi \int_0^{\pi} \left(a\sin^2\varphi\right)^3 \sin\varphi \, d\varphi = -\frac{2}{3}\pi a^3 \int_0^{\pi} \sin^6\varphi \, d\cos\varphi =$$

$$= -\frac{2}{3}\pi a^3 \int_0^{\pi} \left(1 - \cos^2\varphi\right)^3 d\cos\varphi = \ldots = \frac{64}{105}\pi a^3$$

4.4 Длина дуги

4.4.1 Прямоугольная декартовая система координат

Пусть $y = f(x)$ непрерывна на $[a;b]$.
$M_0(x_0, y_0) \quad M(x,y)$
Δx — приращение $x \quad \Delta y$ — приращение y

$$\begin{matrix} x \to x + \Delta x \\ y \to y + \Delta y \end{matrix} \quad M(x,y) \to M_1(x+\Delta x, y+\Delta y)$$

l_0 — $\overset{\frown}{M_0M}$ — дуга кривой $\quad \Delta l$ — приращение дуги кривой $\quad \Delta l = \overset{\frown}{MM_1}$
Найдём l'_x — ?
$l'_x = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta l}{\Delta x}$
$\triangle MM_1A \quad MA = \Delta x \quad AM_1 = \Delta y$

$$MM_1^2 = \Delta x^2 + \Delta y^2 \quad | \cdot \Delta l^2 \mid : \Delta l^2$$
$$\left(\frac{MM_1}{\Delta l}\right)^2 \cdot (\Delta l)^2 = \Delta x^2 + \Delta y^2 \quad | : \Delta x^2$$
$$\left(\frac{MM_1}{\Delta l}\right)^2 \cdot \left(\frac{\Delta l}{\Delta x}\right)^2 = 1 + \left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right)^2$$

Вычислим предел при $\Delta x \to 0$.
Левая часть:

$$\lim_{\Delta \to 0} \left(\frac{MM_1}{\Delta l}\right)^2 \cdot \left(\frac{\Delta l}{\Delta x}\right)^2 = \begin{vmatrix} \text{при } \Delta x \to 0 \quad M \to M_1 \\ \Delta l \to MM_1 \quad \text{дуга} \ \to \ \text{хорде} \end{vmatrix} = \lim_{\Delta x \to 0} 1^2 \cdot \left(\frac{\Delta l}{\Delta x}\right)^2 = (l'_x)^2$$

Правая часть:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \left(1 + \left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right)^2\right) = 1 + \lim_{\Delta x \to 0} \left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right)^2 = 1 + (y'_x)^2$$

Получаем:

$$\begin{aligned} (l'_x)^2 &= 1 + (y'_x)^2 \\ l'_x &= \sqrt{1 + (y'_x)^2} \quad | \cdot dx \\ l'_x\, dx &= \sqrt{1 + (y'_x)^2}\, dx \\ dl &= \sqrt{1 + (y'_x)^2}\, dx \end{aligned} \tag{$\vee$}$$

$$\boxed{l = \int_a^b \sqrt{1 + (y'_x)^2}\, dx} \tag{13}$$

4.4.2 Параметрически заданная функция

$$(\vee) = dl = \sqrt{1+(y'_x)^2}\,dx = \sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\,dx = \sqrt{\frac{(dx)^2+(dy)^2}{(dx)^2}}\,dx = \sqrt{(dx)^2+(dy)^2} = dl \tag{$\vee\vee$}$$

Пусть кривая задана параметрически:

$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}$ — непрерывно дифференцируемые функции на $[t_1; t_2]$.

$x(t_1) = a, \quad x(t_2) = b$

$$\begin{aligned}(\vee\vee) = dl = \sqrt{(dx)^2+(dy)^2} = \sqrt{(x'(t)\,dt)^2+(y'(t)\,dt)^2} = \sqrt{\big[(x'(t))^2+(y'(t))^2\big](dt)^2} = \\ = \sqrt{(x'_t)^2+(y'_t)^2}\,dt = \sqrt{(x'_t)^2+(y'_t)^2}\,dt\end{aligned}$$

$$\boxed{l = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{(x'_t)^2+(y'_t)^2}\,dt} \tag{14}$$

4.4.3 Полярная система координат

Пусть $r = r(\varphi)$ — непрерывная на $[\alpha; \beta]$ функция.

$(\vee\vee) = dl = \sqrt{(dx)^2+(dy)^2} \circleddash$

$x = r\cos\varphi \quad y = r\sin\varphi$

$dx = (r\cos\varphi)'_\varphi\,d\varphi = (r'\cos\varphi - r\sin\varphi)\,d\varphi$

$dy = (r\sin\varphi)'_\varphi\,d\varphi = (r'\sin\varphi + r\cos\varphi)\,d\varphi$

$$\begin{aligned}(dx)^2+(dy)^2 &= \big[(r'\cos\varphi - r\sin\varphi)^2 + (r'\sin\varphi + r\cos\varphi)^2\big]\,(d\varphi)^2 = \\ &= \begin{bmatrix} (r')^2\cos^2\varphi - \cancel{2r'r\cos\varphi\sin\varphi} + r^2\sin^2\varphi + \\ + (r')^2\sin^2\varphi + \cancel{2r'r\cos\varphi\sin\varphi} + r^2\cos^2\varphi \end{bmatrix}(d\varphi)^2 = \\ &= \big[(r')^2(\cos^2\varphi+\sin^2\varphi) + r^2(\cos^2\varphi+\sin^2\varphi)\big]\,(d\varphi)^2 = \big[(r')^2+r^2\big]\,(d\varphi)^2\end{aligned}$$

$\circleddash \sqrt{(r')^2+r^2}\,d\varphi = dl$

$$\boxed{l = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{(r')^2+r^2}\,d\varphi} \tag{15}$$

> **Пример.** $y = x^2$, от $x = 0$ до $x = 1$
>
> $$l = \int_0^1 \sqrt{1+(2x)^2}\,dx = \int_0^1 \sqrt{1+4x^2}\,dx = \ldots = \frac{1}{2}\sqrt{5} + \frac{1}{4}\ln\!\Big(2+\sqrt{5}\Big)$$

Пример. $x = e^t \cos t \quad y = e^t \sin t \quad t = 0,\ t = 1 \qquad l - ?$

$$l = \int_0^1 \sqrt{(x_t')^2 + (y_t')^2}\,dt = \left| \begin{array}{l} x_t' = e^t \cos t - e^t \sin t \\ y_t' = e^t \sin t + e^t \cos t \\ (x_t')^2 + (y_t')^2 = \ldots = 2e^{2t} \end{array} \right| = \int_0^1 \sqrt{2e^{2t}}\,dt = \ldots = \sqrt{2}(e-1)$$

Пример.

$$\begin{array}{l|} r = 2(1-\cos\varphi) \\ r = 1 \\ \text{внутри окружности} \\ \text{вне кардиоиды} \\ \hline l - ? \end{array}$$

φ	0	$\frac{\pi}{2}$	π
r	0	2	4

$$2(1-\cos\varphi) = 1$$

$$1 - \cos\varphi = \frac{1}{2}$$

$$\cos\varphi = \frac{1}{2} \ \Rightarrow\ \varphi = \frac{\pi}{3}$$

$$l^* = \int_\alpha^\beta \sqrt{(r')^2 + r^2}\,d\varphi = \left| r' = 2\sin\varphi \quad (r')^2 = 4\sin^2\varphi \quad r^2 = 4(1-\cos\varphi)^2 \right| =$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{3}} \sqrt{4\sin^2\varphi + 4 - 8\cos\varphi + 4\cos^2\varphi}\,d\varphi = \int_0^{\frac{\pi}{3}} \sqrt{8 - 8\cos\varphi}\,d\varphi =$$

$$= 2\sqrt{2}\int_0^{\frac{\pi}{3}} \sqrt{1-\cos\varphi}\,d\varphi = \left| \begin{array}{c} \sin^2\frac{\varphi}{2} = \frac{1-\cos\varphi}{2} \\ 1 - \cos\varphi = 2\sin^2\frac{\varphi}{2} \end{array} \right| = 4\int_0^{\frac{\pi}{3}} \sqrt{\sin^2\frac{\varphi}{2}}\,d\varphi =$$

$$= 4\int_0^{\frac{\pi}{3}} \left|\sin\frac{\varphi}{2}\right| d\varphi = 4\int_0^{\frac{\pi}{3}} \sin\frac{\varphi}{2}\,d\varphi = \ldots = 4\left(2 - \sqrt{3}\right)$$

$$l = 2l^* = 8\left(2 - \sqrt{3}\right)$$

4.5 Площадь поверхности вращения (внешняя оболочка)

Пусть $y = f(x)$ — непрерывно дифференцируема на $[a;b]$. Будем искать площадь поверхности, образованной вращением дуги $\overset{\frown}{AB}$ графика функции $y = f(x)$ вокруг оси Ox.

Этапы вывода формулы:

1. Разбиваем отрезок $[a;b]$ точками: $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_{i-1} < x_i < \ldots < x_n < b$
   $[x_{i-1}; x_i]$ — отрезок разбиения
   $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$ — длина отрезка разбиения
   $y_i = f(x_i),\ i = \overline{1,n}$
   $M_i\big(x_i, f(x_i)\big)$ — $i = \overline{1,n}$

   Хорды: $AM_1,\ M_1M_2,\ \ldots,\ M_{i-1}M_i,\ \ldots,\ M_{n-1}B$

2. Хорда при вращении опишет усечённый конус
   $Q_i = 2\pi R_i \Delta S_i \qquad \pi l(1+R)$
   R_i — средний радиус
   $R_i = \dfrac{f(x_{i-1}) + f(x)}{2}$
   ΔS_i — хорда $M_{i-1}M_i$
   По теореме *Больцано-Коши* функция $y = f(x)$ принимает все свои значения между $f(a)$ и $f(b)$:

$$R_i = \frac{f(x_{i-1}) + f(x_i)}{2} = f(\xi_i) \quad \exists \xi_i \in [x_{i-1}; x_i],\ i = \overline{1,n}$$

$$\Delta S_i^2 = \Delta x_i^2 + \Delta y_i^2$$

$$\Delta S_i = \sqrt{\Delta x_i^2 + \Delta y_i^2} \quad \Big| \cdot \frac{\Delta x_i}{\Delta x_i}$$

$$\Delta S_i = \sqrt{\Delta x_i^2 + \Delta y_i^2} \cdot \frac{\Delta x_i}{\Delta x_i}$$

$$\Delta S_i = \sqrt{\frac{\Delta x_i^2 + \Delta y_i^2}{\Delta x_i^2}} \cdot \Delta x_i$$

$$\Delta S_i = \sqrt{1 + \left(\frac{\Delta y_i}{\Delta x_i}\right)^2} \cdot \Delta x_i$$

   По теореме *Лагранжа*:

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(c) \quad \exists c \in (a;b)$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_i) - f(x_{i-1})}{x_i - x_{i-1}} = f'(\xi_i) \quad \exists \xi_i \in (x_{i-1}; x_i)$$

$$\Delta S_i = \sqrt{1 + \big(f'(\xi_i)\big)^2} \cdot \Delta x_i$$

$$Q_i = 2\pi f(\xi_i) \cdot \sqrt{1 + \big(f'(\xi_i)\big)^2} \cdot \Delta x_i$$

3. Суммируем

$$Q = \sum_{i=1}^{n} Q_i = 2\pi \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i) \cdot \sqrt{1 + \big(f'(\xi_i)\big)^2} \cdot \Delta x_i$$

4. Вычислим предел:

$$\begin{aligned} \lim_{\lambda\to0} 2\pi \overbrace{\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\cdot\sqrt{1+\left(f'(\xi_i)\right)^2}\cdot\Delta x_i}^{\text{интегральная сумма}} &= 2\pi\int_a^b f(x)\sqrt{1+(f)^2}\,dx = \\ \lambda = \max_i \Delta x_i \qquad &= \boxed{2\pi\int_a^b y\underbrace{\sqrt{1+(y'_x)^2}\,dx}_{dl} = Q_{Ox}} \end{aligned} \tag{16}$$

Если $x = f(y) \in C\,[c;d]$, тогда:

$$\boxed{Q_{Oy} = 2\pi\int_c^d x\underbrace{\sqrt{1+(x'_y)^2}\,dy}_{dl}} \tag{17}$$

4.5.1 Следствия

Следствие 1.2. Параметрически заданная функция $\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}$ — непрерывно дифференцируема на $[t_1;t_2]$

$$y'_x = \frac{y'_t}{x'_t} \qquad \begin{aligned} x(t_1) = a \\ x(t_2) = b \end{aligned} \qquad \begin{cases} y(t_1) = c \\ y(t_2) = d \end{cases}$$

$$\begin{aligned} Q_{Ox} &\overset{(16)}{=\!=} 2\pi\int_a^b y\sqrt{1+(y'_x)^2}\,dx = 2\pi\int_{t_1}^{t_2} y(t)\sqrt{1+\left(\frac{y'_t}{x'_t}\right)^2}\,x'_t\,dt = \\ &= 2\pi\int_{t_1}^{t_2} y(t)\cdot\frac{\sqrt{(x'_t)^2+(y'_t)^2}}{x'_t}\cdot x'_t\,dt = \boxed{2\pi\int_{t_1}^{t_2} y(t)\underbrace{\sqrt{(x'_t)^2+(y'_t)^2}\,dt}_{dl} = Q_{Ox}} \end{aligned} \tag{18}$$

Аналогично:

$$\boxed{Q_{Oy} \overset{(17)}{=\!=} 2\pi\int_{t_1}^{t_2} x(t)\sqrt{(x'_t)^2+(y'_t)^2}\,dt} \tag{19}$$

Следствие 1.3. Полярная система координат:

$r = r(\varphi)$ — непрерывно дифференцируема на $[\alpha;\beta]$ $\begin{cases} x = r\cos\varphi \\ y = r\sin\varphi \end{cases}$

$$Q_{Or} \overset{(16)}{=\!=} 2\pi\int_\alpha^\beta r\sin\varphi\,dl = \boxed{2\pi\int_\alpha^\beta r\sin\varphi\sqrt{(r')^2+r^2}\,d\varphi = Q_{Or}} \tag{20}$$

Пример.

$y = \operatorname{ch} x$

$x = -\ln 3$

$x = \ln 2$

Q_{Ox} — ?

$$y = \operatorname{ch} x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

x	0	$\ln 2$	$-\ln 2$	$\ln 3$	$-\ln 3$
y	1	$\frac{5}{4}$	$\frac{5}{4}$	$\frac{5}{3}$	$\frac{5}{3}$

$$Q_{Ox} = 2\pi \int_{-\ln 3}^{\ln 2} \operatorname{ch} x \cdot \sqrt{1 + \operatorname{sh}^2 x}\, dx = \left| \begin{matrix} \operatorname{ch}^2 x - \operatorname{sh}^2 x = 1 \\ 1 + \operatorname{sh}^2 x = \operatorname{ch}^2 x \end{matrix} \right| = 2\pi \int_{-\ln 3}^{\ln 2} \operatorname{ch} x \cdot \operatorname{ch} x\, dx =$$

$$= 2\pi \int_{-\ln 3}^{\ln 2} \operatorname{ch}^2 x\, dx = \ldots = \frac{\pi}{2}\left(2\ln 6 \cdot \frac{455}{72}\right)$$

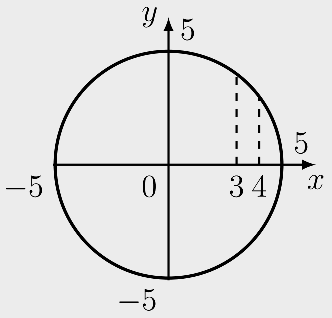
Пример.

$\begin{cases} x = 5\sin t \\ y = 5\cos t \end{cases}$

от $(3;4)$

до $(4;3)$

Q_{Ox} — ?



$$\sin t = \frac{x}{5} \quad \cos t = \frac{y}{5} \quad \sin^2 t + \cos^2 t = 1 \;\Rightarrow\; \boxed{\frac{x^2}{5^2} + \frac{y^2}{5^2} = 1}$$

$$y^2 = 25 - x^2 \;\Rightarrow\; y = \pm\sqrt{25 - x^2} \qquad y'_x = \frac{-\cancel{2}x}{\cancel{2}\sqrt{25 - x^2}}$$

$$Q_{Ox} \overset{(16)}{=\!=} 2\pi \int_3^4 \underbrace{\sqrt{25 - x^2}}_{y} \cdot \underbrace{\sqrt{1 + \frac{x^2}{25 - x^2}}}_{1 + {y'_x}^2}\, dx = 2\pi \int_3^4 \sqrt{25 - x^2} \cdot \frac{5}{\sqrt{25 - x^2}}\, dx =$$

$$= 5 \cdot 2\pi \int_3^4 dx = 10\pi$$

Пример.

$r = \cos\varphi$

$\varphi = \dfrac{\pi}{4}$ $\varphi = \dfrac{\pi}{3}$

Q_{Or} — ?

$r \geqslant 0 \quad \cos\varphi \geqslant 0$

$$Q_{Or} = 2\pi \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} -\cos\varphi \cdot \sin\varphi \cdot \sqrt{\cos^2\varphi + \sin^2\varphi}\, d\varphi = 2\pi \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \cos\varphi \sin\varphi\, d\varphi = \ldots = \frac{\pi}{4}$$

5 Несобственные интегралы

5.1 Интегралы по бесконечному промежутку

Пусть $y = f(x)$ определена на $[a; +\infty)$, интегрируема на $[a; b] \subset [a; +\infty)$. Тогда определена функция

$$\boxed{\Phi(b) = \int_a^b f(x)\,dx} \text{ на } [a; +\infty) \tag{1}$$

как определённый интеграл с переменным верхним пределом интегрирования.

Определение 1. Предел функции $\Phi(b)$ при $b \to +\infty$ называется несобственным интегралом от функции $f(x)$ по бесконечному промежутку $[a; +\infty)$ или **несобственным интегралом 1-го рода** и обозначается

$$\boxed{\int_a^{+\infty} f(x)\,dx = \lim_{b \to +\infty} \Phi(b) = \lim_{b \to +\infty} \int_a^b f(x)\,dx} \tag{2}$$

Если предел в правой части равенства (2) существует и конечен, то несобственный интеграл в левой части равенства (2) **сходится**.
Если предел в правой части равенства (2) не существует или равен бесконечности, то несобственный интеграл в левой части равенства (2) **расходится**.

Аналогично:

$$\int_{-\infty}^b f(x)\,dx = \lim_{a \to -\infty} \int_a^b f(x)\,dx \tag{3}$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = \int_{-\infty}^c f(x)\,dx + \int_c^{+\infty} f(x)\,dx \qquad c \text{ — число} \tag{4}$$

Несобственный интеграл левой части (4) **сходится**, если оба несобственных интеграла в правой части (4) сходятся. Если хотя бы один несобственный интеграл в правой части (4) расходится, то несобственный интеграл в левой части (4) **расходится**.

Геометрический смысл: если $f(x) \geqslant 0$, $\forall x > 0$, то значение сходящегося несобственного интеграла от функции $f(x)$ по промежутку $[a; +\infty)$ соответствует площади бесконечно длинной криволинейной трапеции.

Пример.
$\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2}$ — ? $\qquad y = \dfrac{1}{1+x^2}$

$$\int_0^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2} = \lim_{b \to +\infty} \int_0^b \frac{dx}{1+x^2} = \lim_{b \to +\infty} \left(\operatorname{arctg} x \Big|_0^b \right) = \lim_{b \to +\infty} (\operatorname{arctg} b - \operatorname{arctg} 0) =$$
$$= \lim_{b \to +\infty} \operatorname{arctg} b - 0 = \frac{\pi}{2} - 0 = \frac{\pi}{2}$$

$\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2}$ — сходится

5.1.1 Признаки сходимости и расходимости несобственных интегралов 1-го рода

Теорема 1 *(Признак сходимости по неравенству)*.
Пусть функции $f(x)$ и $g(x)$ интегрируемы на $[a;b] \subset [a;+\infty)$, причём

$$\forall x \geqslant a\colon 0 \leqslant f(x) \leqslant g(x)$$

Тогда:

1. Если $\int_a^{+\infty} g(x)\,dx$ сходится, то $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ — сходится
2. Если $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ расходится, то $\int_a^{+\infty} g(x)\,dx$ — расходится

Доказательство.
$\int_a^{+\infty} g(x)\,dx$ — сходится $\Rightarrow$ $\overset{\textbf{(опр. 1)}}{\text{по определению}}$ несобственного интеграла 1-го рода

$$\int_a^{+\infty} g(x)\,dx = \lim_{b\to+\infty}\int_a^b g(x)\,dx = C \quad C \text{ — число}$$

Так как $\forall x \geqslant a\colon g(x) \geqslant 0$

$$\Phi(b) = \int_a^b g(x)\,dx \leqslant C, \quad b > a$$

По условию: $\forall x \geqslant a\colon 0 \leqslant f(x) \leqslant g(x)$
Интегрируем:

$$\int_a^b f(x)\,dx \leqslant \int_a^b g(x)\,dx \leqslant C$$

Так как $f(x) \geqslant 0,\ \forall x \geqslant a$ и $b > a$, то функция

$$\Psi(b) = \int_a^b f(x)\,dx \text{ монотонно возрастает и ограничена сверху}$$

Утверждение: монотонная и ограниченная сверху функция при $x \to +\infty$ имеет конечный предел.
По утверждению функция $\Psi(b)$ имеет конечный предел при $x \to +\infty$, то есть

$$\int_a^{+\infty} f(x)\,dx = \lim_{b\to+\infty}\Psi(b) = \lim_{b\to+\infty}\int_a^b f(x)\,dx \text{ — конечный предел}$$

■

Доказательство (Метод от противного).
Дано: $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ — расходится
Предположим, что $\int_a^{+\infty} g(x)\,dx$ — сходится
Тогда по первой части теоремы:

$$\int_a^{+\infty} f(x)\,dx \text{ — сходится}$$

А это противоречит условию теоремы $\Rightarrow$ $\int_a^{+\infty} g(x)\,dx$ — расходится ■

Пример.

$\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2(1+3^x)}\,dx$ — ? несобственный интеграл 1-го рода $x \in [1;+\infty)$

$$\left.\begin{aligned} f(x) &= \frac{1}{x^2(1+3^x)} \\ g(x) &= \frac{1}{4x^2} \end{aligned}\right\} \quad \frac{1}{x^2(1+3^x)} \leqslant \frac{1}{4x^2}$$

$$\int_1^{+\infty} g(x)\,dx = \frac{1}{4}\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^2} = \frac{1}{4}\cdot \lim_{b\to+\infty} \int_1^b \frac{dx}{x^2} = \frac{1}{4}\cdot \lim_{b\to+\infty}\left(\frac{x^{-1}}{-1}\bigg|_1^b \right) =$$
$$= -\frac{1}{4}\lim_{b\to+\infty}\left(\frac{1}{b}-1\right) = \frac{1}{4}$$
$$\Downarrow$$
$$\int_1^{+\infty} g(x)\,dx = \frac{1}{4}\int_1^{+\infty}\frac{dx}{x^2} \text{ — сходится}$$

По признаку сходимости по неравенству:

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2(1+3^x)}\,dx \text{ сходится}$$

Пример.

$\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{x}+\cos^2 x}$ — ? несобственный интеграл 1-го рода $x \in [1;+\infty)$

$$f(x) = \frac{dx}{\sqrt{x}+\cos^2 x}$$

$$\begin{aligned} 0 \leqslant \cos^2 x \leqslant 1 \\ \sqrt{x} \leqslant \sqrt{x}+\cos^2 x \leqslant \sqrt{x}+1 \end{aligned} \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{x}+1} \leqslant \frac{1}{\sqrt{x}+\cos^2 x} \leqslant \frac{1}{\sqrt{x}}$$

$$g(x) = \frac{1}{\sqrt{x}+1}$$

$$\int_1^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{x}+1} = \lim_{b\to+\infty}\int_1^b \frac{dx}{\sqrt{x}+1} = \left| \begin{matrix} x = t^2 & dx = 2t\,dt \\ x_{\text{н}} = 1, & t_{\text{н}} = 1 \end{matrix} \right| = \lim_{b\to+\infty}\int_1^b \frac{2t\,dt}{t+1} =$$
$$= 2\lim_{b\to+\infty}\int_1^b \frac{t+1-1}{t+1}\,dt = 2\lim_{b\to+\infty}\left(\int_1^b dt - \int_1^b \frac{dt}{t+1}\right) =$$
$$= 2\lim_{b\to+\infty}(b-1-\ln|b+1|+\ln 2) = \infty$$

$$\int_1^{+\infty} g(x)\,dx = \int_1^{+\infty}\frac{dx}{\sqrt{x}+1} \text{ — расходится}$$

$$\int_1^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{x}+\cos^2 x} \text{ — расходится по неравенству}$$

Теорема 2 *(Предельный признак сходимости).*
Пусть $f(x)$ и $g(x)$ интегрируемы на $[a;b] \subset [a;+\infty)$ и $\forall x \geqslant a\colon\ f(x) \geqslant 0,\ \ g(x) > 0$. Если существует конечный предел:

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lambda > 0 \tag{5}$$

то $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ и $\displaystyle\int_a^{+\infty} g(x)\,dx$ сходятся или расходятся одновременно.

Доказательство.
Из (5) $\Rightarrow$ по определению предела:

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists\, M(\varepsilon) > 0\colon \forall x > M\ \ \Rightarrow \left|\frac{f(x)}{g(x)} - \lambda\right| < \varepsilon$$

$$-\varepsilon < \frac{f(x)}{g(x)} - \lambda < \varepsilon$$

$$\lambda - \varepsilon < \frac{f(x)}{g(x)} < \lambda + \varepsilon$$

$$(\lambda-\varepsilon)\cdot g(x) < f(x) < (\lambda+\varepsilon)\cdot g(x) \quad \forall x > M \tag{$*$}$$

$\boxed{\text{1 шаг}}$ Рассмотрим $f(x) < (\lambda+\varepsilon)g(x)$
Интегрируем:

$$\int_a^{+\infty} f(x)\,dx < (\lambda+\varepsilon)\int_a^{+\infty} g(x)\,dx$$

Число $(\lambda+\varepsilon)$ не влияет на сходимость/расходимость несобственного интеграла.

Пусть $\int_a^{+\infty} g(x)\,dx$ — сходится, тогда:

$$(\lambda+\varepsilon)\int_a^{+\infty} g(x)\,dx \text{ — сходится}$$

По теореме 1 $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ — сходится.

Пусть $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ расходится, тогда по теореме 1

$$(\lambda+\varepsilon)\int_a^{+\infty} g(x)\,dx \text{ — расходится } \Rightarrow \int_a^{+\infty} g(x)\,dx \text{ — расходится}$$

$\boxed{\text{2 шаг}}$ Рассмотрим $(\lambda-\varepsilon)\cdot g(x) < f(x)$
Интегрируем:

$$(\lambda-\varepsilon)\int_a^{+\infty} g(x)\,dx < \int_a^{+\infty} f(x)\,dx$$

$(\lambda-\varepsilon)$ не влияет на сходимость/расходимость несобственного интеграла

Пусть $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ — сходится, тогда по теореме 1

$$(\lambda-\varepsilon)\int_a^{+\infty} g(x)\,dx \text{ — сходится } \Rightarrow \int_a^{+\infty} g(x)\,dx \text{ — сходится}$$

Пусть $(\lambda - \varepsilon) \int_a^{+\infty} g(x)\,dx$ — расходится, тогда $\int_a^{+\infty} g(x)\,dx$ — расходится

По теореме 1 $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ расходится, тогда

$$\int_a^{+\infty} f(x)\,dx \text{ и } \int_a^{+\infty} g(x)\,dx \text{ сходятся и расходятся одновременно}$$

■

Пример.

$$\int_1^{+\infty} \frac{\sqrt{x^3} + \sqrt{x^2+1}}{x^3+3x+1}\,dx$$

$$f(x) = \frac{\sqrt{x^3} + \sqrt{x^2+1}}{x^3+3x+1} \qquad g(x) = \frac{1}{x^{3/2}}$$

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\left(x^{\frac{3}{2}} + \sqrt{x^2+1}\right)\cdot x^{\frac{3}{2}}}{(x^3+3x+1)\cdot 1} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^3\left(1+\sqrt{\frac{1}{x}+\frac{1}{x^3}}\right)}{x^3\left(1+\frac{3}{x^2}+\frac{1}{x^3}\right)} = \frac{1}{1} = 1 = \lambda > 0$$

$$\int_1^{+\infty} g(x)\,dx = \int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^{\frac{3}{2}}} = \lim_{b\to+\infty} \int_1^b x^{-\frac{3}{2}}\,dx = \lim_{b\to+\infty} \left.\frac{x^{-\frac{1}{2}}}{-\frac{1}{2}}\right|_1^b = -2\lim_{b\to+\infty} \left.\frac{1}{\sqrt{x}}\right|_1^b = 2$$

5.1.2 Интегралы для сравнения. Эталоны

$$\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha} = \lim_{b\to+\infty} \int_1^b x^{-\alpha}\,dx = \lim_{b\to+\infty} \left(\left.\frac{x^{-\alpha+1}}{-\alpha+1}\right|_1^b\right) = \frac{1}{1-\alpha}\cdot \lim_{b\to+\infty} \left. x^{-\alpha+1}\right|_1^b =$$

$$= \frac{1}{1-\alpha}\left(\lim_{b\to+\infty} b^{-\alpha+1} - 1\right) = \begin{cases} \dfrac{1}{\alpha-1} & \alpha > 1 \\ \infty & \alpha < 1 \end{cases}$$

$$\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x} = \lim_{b\to+\infty} \int_1^b \frac{dx}{x} = \lim_{b\to+\infty} \big(\ln|b| - \ln|1|\big) = \lim_{b\to+\infty} \ln|b| = \infty$$

Вывод:

$$\boxed{\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha} = \begin{cases} \text{сходится при } \alpha > 1 \\ \text{расходится при } \alpha \leqslant 1 \end{cases}}$$

интеграл Дирихле

5.2 Абсолютная и условная сходимость

Определение 2. Если наряду с несобственным интегралом от функции $f(x)$ по бесконечному промежутку $[a; +\infty)$ сходится и несобственный интеграл от функции $|f(x)|$ по этому же промежутку, то первый несобственный интеграл называется **сходящимся абсолютно**.

$$\boxed{\begin{array}{l}\text{несобственный интеграл}\\ \text{от } f(x) \text{ сходится абсолютно}\end{array}} = \boxed{\begin{array}{l}\text{несобственный интеграл}\\ \text{от } f(x) \text{ сходится}\end{array}} + \boxed{\begin{array}{l}\text{несобственный интеграл}\\ \text{от } |f(x)| \text{ сходится}\end{array}}$$

Определение 3. Если несобственный интеграл от функции $f(x)$ по бесконечному промежутку $[a; +\infty)$ сходится, а несобственный интеграл от функции $|f(x)|$ по этому же промежутку расходится, то первый несобственный интеграл называется **сходящимся условно**.

$$\boxed{\begin{array}{l}\text{несобственный интеграл}\\ \text{от } f(x) \text{ сходится условно}\end{array}} = \boxed{\begin{array}{l}\text{несобственный интеграл}\\ \text{от } f(x) \text{ сходится}\end{array}} + \boxed{\begin{array}{l}\text{несобственный интеграл}\\ \text{от } |f(x)| \text{ расходится}\end{array}}$$

Теорема 3 *(Признак абсолютной сходимости)***.**
Пусть функция $f(x)$ знакопеременна на $[a; +\infty)$. Если функции $f(x)$ и $|f(x)|$ интегрируемы на любом отрезке $[a; b] \subset [a; +\infty)$ и несобственный интеграл от функции $|f(x)|$ по бесконечному промежутку $[a; +\infty)$ сходится, то сходится и несобственный интеграл от функции $f(x)$ по $[a; +\infty)$, причём абсолютно.

Доказательство.
Так как $\forall x \in [a; +\infty)$ верно неравенство

$$\begin{aligned} -|f(x)| \leqslant f(x) \leqslant |f(x)| \quad &\Big| + |f(x)| \\ 0 \leqslant f(x) + |f(x)| \leqslant 2|f(x)| \end{aligned}$$

По условию $\int_a^{+\infty} |f(x)|\, dx$ сходится $\Rightarrow$ $2\int_a^{+\infty} |f(x)|\, dx$ сходится.

По теореме 1 (*признак сходимости по неравенству*):

$$\int_a^{+\infty} \big(f(x) + |f(x)|\big)\, dx \;\text{ — сходится}$$

Рассмотрим

$$\int_a^{+\infty} f(x)\, dx = \underbrace{\int_a^{+\infty} \big(f(x) + |f(x)|\big)\, dx}_{\text{сх-ся по Т1}} - \underbrace{\int_a^{+\infty} |f(x)|\, dx}_{\text{сх-ся по условию}}$$

По определению сходящегося несобственного интеграла $\Rightarrow$ $\int_a^{+\infty} f(x)\, dx$ сходится
По определению абсолютной сходимости $\Rightarrow$ $\int_a^{+\infty} f(x)\, dx$ сходится абсолютно ■

Пример.

$\int_1^{+\infty} \frac{\sin x}{x^3}\,dx$ — несобственный интеграл 1-го рода $x \in [1; +\infty)$

$f(x) = \frac{\sin x}{x^3}$ — знакопеременна на $[1; +\infty)$

$|f(x)| = \left|\frac{\sin x}{x^3}\right| = \boxed{\frac{|\sin x|}{x^3} \leqslant \frac{1}{x^3}}$

$g(x) = \frac{1}{x^3}$

$\int_1^{+\infty} g(x)\,dx = \int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^3} \qquad \alpha = 3 > 1 \ \Rightarrow \int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^3}$ сходится

$\int_1^{+\infty} |f(x)|\,dx = \int_1^{+\infty} \frac{|\sin x|}{x^3}\,dx$ — сходится по неравенству

$\int_1^{+\infty} f(x)\,dx = \int_1^{+\infty} \frac{\sin x}{x^3}\,dx$ — сходится абсолютно

5.3 Несобственные интегралы 2-го рода

Пусть функция $f(x)$ определена на полуинтервале $[a; b)$, а в точке $x = b$ терпит разрыв 2-го рода. Предположим, что функция $f(x)$ интегрируема на $[a; \eta] \subset [a; b)$. Тогда на $[a; b)$ определена функция

$$\Phi(\eta) = \int_a^{\eta} f(x)\,dx \tag{1}$$

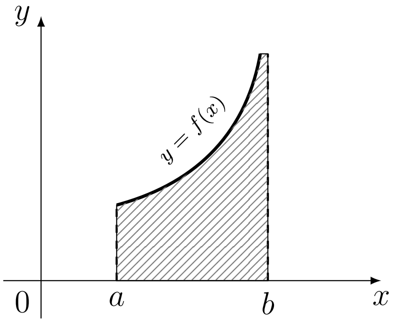
как интеграл с переменным верхним пределом.

Определение 1. Предел функции $\Phi(\eta)$ при $\eta \to b-$ называется несобственным интегралом от неограниченной функции $f(x)$ на $[a; b)$ или **несобственным интегралом 2-го рода** и обозначается

$$\boxed{\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{\eta \to b-} \Phi(\eta) = \lim_{\eta \to b-} \int_a^{\eta} f(x)\,dx} \tag{2}$$

Если предел в правой части равенства (2) существует и конечен, то несобственный интеграл от неограниченной функции $f(x)$ по $[a; b)$ **сходится**.
Если предел в правой части равенства (2) не существует или равен ∞, то несобственный интеграл от неограниченной функции $f(x)$ по $[a; b)$ **расходится**.

Геометрический смысл: Если $\forall x \in [a; b)\colon f(x) \geqslant 0$, то сходящийся несобственный интеграл от функции $f(x)$ на промежутке $[a; b)$ соответствует площади бесконечно высокой криволинейной трапеции, ограниченной графиком функции $y = f(x)$, $x = a$, осью Ox и $x = b$ — асимптота.



Аналогично:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{\eta \to a+} \int_\eta^b f(x)\,dx \tag{3}$$

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx = \lim_{\eta \to c-} \int_a^\eta f(x)\,dx + \lim_{\xi \to c+} \int_\xi^b f(x)\,dx \tag{4}$$

Несобственный интеграл в левой части равенства (4) сходится, когда оба несобственных интеграла в правой части равенства (4) сходятся. Если хотя бы один несобственный интеграл в правой части равенства (4) расходится, то несобственный интеграл в левой части расходится.

Пример.

$$\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{dx}{x\ln x} = \begin{vmatrix} \text{нес. инт. 2-го рода} \\ x = 0 \end{vmatrix} = \lim_{\eta \to 0+} \int_\eta^{\frac{1}{2}} \frac{dx}{x \ln x} = \lim_{\eta \to 0+} \int_\eta^{\frac{1}{2}} \frac{d(\ln x)}{\ln x} =$$

$$= \lim_{\eta \to 0+} \left(\ln|\ln x| \Big|_\eta^{\frac{1}{2}} \right) = \lim_{\eta \to 0+} \left(\ln\left|\ln\frac{1}{2}\right| - \ln|\ln\eta| \right) =$$

$$= \ln\left|\ln\frac{1}{2}\right| - \lim_{\eta \to 0+} \ln|\ln\eta| = \infty$$

$\displaystyle\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{dx}{x\ln x}$ — расходится

Пример.

$$\int_0^2 \frac{dx}{\sqrt{4-x^2}} = \begin{vmatrix} \text{нес. инт. 2-го рода} \\ x = 2 \end{vmatrix} = \lim_{\eta \to 2-} \int_0^\eta \frac{dx}{\sqrt{4-x^2}} = \lim_{\eta \to 2-} \left(\arcsin\frac{1}{2}\Big|_0^\eta \right) =$$

$$= \lim_{\eta \to 2-} \arcsin\frac{\eta}{2} - \arcsin 0 = \frac{\pi}{2} - 0 = \frac{\pi}{2}$$

$\displaystyle\int_0^2 \frac{dx}{\sqrt{4-x^2}}$ — сходится

5.3.1 Интегралы для сравнения. Эталоны

$$\int_0^b \frac{dx}{x^\alpha} = \left|\begin{matrix}\text{нес. инт. 2-го рода}\\ x=0\end{matrix}\right| = \lim_{\eta\to 0+}\int_\eta^b x^{-\alpha}\,dx = \lim_{\eta\to 0+}\left.\frac{x^{-\alpha+1}}{-\alpha+1}\right|_\eta^b =$$

$$= \frac{1}{-\alpha+1}\left(b^{-\alpha+1} - \lim_{\eta\to 0+}\eta^{-\alpha+1}\right) = \begin{cases}\dfrac{b^{-\alpha+1}}{-\alpha+1} & \alpha<1\\ \infty & \alpha>1\end{cases}$$

$\boxed{\alpha=1}$: $\displaystyle\int_0^b \frac{dx}{x} = \lim_{\eta\to 0+}\left(\ln x\Big|_\eta^b\right) = \ln b - \lim_{\eta\to 0+}\ln\eta = \infty$

$$\boxed{\int_0^b \frac{dx}{x^\alpha} = \begin{cases}\text{сходится} & \alpha<1\\ \text{расходится} & \alpha\geqslant 1\end{cases}}$$

$$\boxed{\int_a^b \frac{dx}{(x-a)^\alpha} = \begin{cases}\text{сходится} & \alpha<1\\ \text{расходится} & \alpha\geqslant 1\end{cases}}$$

интеграл Дирихле

$$\boxed{\int_a^b \frac{dx}{(b-x)^\alpha} = \begin{cases}\text{сходится} & \alpha<1\\ \text{расходится} & \alpha\geqslant 1\end{cases}}$$

5.3.2 Признаки сходимости несобственного интеграла 2-го рода

Теорема 1 *(Признак сходимости по неравенству)*. Пусть функции $f(x)$ и $g(x)$ интегрируемы на $\forall$ отрезке $[a;\eta]\subset[a;b)$, являются неотрицательными $\forall x\in[a;b)$ и в точке $x=b$ терпят разрыв 2-го рода, причём выполнено неравенство $0\leqslant f(x)\leqslant g(x)$. Тогда

1. Если несобственный интеграл $\int_a^b g(x)\,dx$ сходится, то несобственный интеграл $\int_a^b f(x)\,dx$ сходится.
2. Если собственный интеграл $\int_a^b f(x)\,dx$ расходится, то несобственный интеграл $\int_a^b g(x)\,dx$ расходится.

Теорема 2 *(Предельный признак сходимости)*. Пусть функции $f(x)$ и $g(x)$ интегрируемы на $\forall$ отрезке $[a;\eta]\subset[a;b)$, являются неотрицательными $\forall x\in[a;b)$ и в точке $x=b$ терпят разрыв 2-го рода. Если существует конечный положительный предел

$$\lim_{x\to b-}\frac{f(x)}{g(x)} = \lambda > 0 \tag{5}$$

то $\int_a^b f(x)\,dx$ и $\int_a^b g(x)\,dx$ сходятся или расходятся одновременно.

Пример.

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1-\cos x}{x^3} = \left|\begin{matrix}\text{нес. инт. 2-го рода}\\ x=0\end{matrix}\right|$$

$$f(x) = \frac{1-\cos x}{x^3} \qquad g(x) = \frac{1}{x^\alpha}$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to 0}\frac{(1-\cos x)\cdot x^\alpha}{x^3\cdot 1} = \lim_{x\to 0}\frac{x^2\cdot x^\alpha}{2\cdot x^3} = \frac{1}{2}, \quad \alpha = 1$$

$$g(x) = \frac{1}{2x}$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{2x} \text{ — расходится } \alpha = 1$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1-\cos x}{x^3}\,dx \text{ — расходится по предельному признаку}$$

Определение 2. Если несобственный интеграл от неограниченной функции $f(x)$ при $x \to b-$ по промежутку $[a;b)$ сходится и несобственный интеграл функции $|f(x)|$ по этому же промежутку сходится, то первый из несобственных интегралов **сходится абсолютно**.

Определение 3. Если несобственный интеграл от неограниченной функции $f(x)$ при $x \to b-$ по промежутку $[a;b)$, сходится, а несобственный интеграл от функции $|f(x)|$ по этому же промежутку расходится, то первый из несобственных интегралов **сходится условно**.

Теорема 3 *(Признак абсолютной сходимости)*.
Пусть функция $f(x)$ знакопеременна на $[a;b)$. Если $f(x)$ и $|f(x)|$ интегрируемы на $\forall[a;\eta] \subset [a;b)$ и несобственный интеграл от функции $|f(x)|$ сходится по этому промежутку, то несобственный интеграл от функции $f(x)$ сходится, причём абсолютно.

Пример.

$$\int_0^1 \frac{\cos\frac{1}{x}}{\sqrt[3]{x}}\,dx \text{ — несобственный интеграл 2-го рода} \quad x = 0$$

$$f(x) = \frac{\cos\frac{1}{x}}{\sqrt[3]{x}} \text{ — знакопеременна при } x \in [0;1]$$

$$|f(x)| = \left|\frac{\cos\frac{1}{x}}{\sqrt[3]{x}}\right| = \boxed{\frac{\left|\cos\frac{1}{x}\right|}{\sqrt[3]{x}} \leqslant \frac{1}{\sqrt[3]{x}}}$$

$$g(x) = \frac{1}{\sqrt[3]{x}}$$

> $$\int_0^1 g(x)\,dx = \int_0^1 \frac{dx}{x^{1/3}} \quad \alpha = 1/3 < 1 \text{ — сходится}$$
>
> $$\int_0^1 |f(x)|\,dx = \int_0^1 \frac{\left|\cos\frac{1}{x}\right|}{\sqrt[3]{x}}\,dx \text{ — сходится по неравенству}$$
>
> $$\int_0^1 f(x)\,dx = \int_0^1 \frac{\cos\frac{1}{x}}{\sqrt[3]{x}}\,dx \text{ — сходится абсолютно (по признаку абсолютной сходимости)}$$

6 Дифференциальные уравнения

Определение 1. **Дифференциальным уравнением n-го порядка** называется уравнение, которое зависит от одной независимой переменной x, неизвестной функции $y(x)$ и её производных до n-го порядка включительно.

$$F\left(x,\, y(x),\, y'(x),\, \dots,\, y^{(n)}(x)\right) = 0 \tag{1}$$

F — известная функция от $n+2$ переменных

Определение 2. Если из ДУ (1) можно выразить старшую производную как функцию остальных переменных:

$$y^{(n)}(x) = f\left(x,\, y(x),\, y'(x),\, \dots,\, y^{(n-1)}(x)\right) \tag{2}$$

то уравнение (2) называется **ДУ n-го порядка, разрешённым относительно старшей производной**.

Определение 3. Если неизвестная искомая функция $y(x)$ зависит от одной переменной x, то ДУ называется **обыкновенным** (ОДУ).

Определение 4. Если неизвестная искомая функция $y(x)$ зависит от нескольких переменных, то ДУ называется **ДУ в частных производных** (ДУЧП).

Далее рассматриваем ОДУ.

Определение 5. Максимальный порядок производной неизвестной функции $y(x)$ называется **порядком ДУ**.

Определение 6. Процесс решения ДУ называется **интегрированием**.

Определение 7. **Решением дифференциального уравнения** (1) или (2) называется n раз непрерывно дифференцируемая функция $y = \varphi(x)$ на промежутке $I \subseteq \mathbb{R}$ такая, что после подстановки её и её производных в (1) или (2) получаем верное тождество.

7 Дифференциальные уравнения 1-го порядка

Определение 1. **Дифференциальным уравнением 1-го порядка** называется уравнение, которое зависит от одной независимой переменной x, неизвестной функции $y(x)$ и её производной:

$$F\left(x,\, y(x),\, y'(x)\right) \tag{1}$$

F — известная функция 3-х переменных

Определение 2. Если в ДУ (1) можно выразить старшую производную как функцию остальных переменных:

$$y' = f(x, y) \tag{2}$$

то уравнение (2) называется **ДУ 1-го порядка, разрешённым относительно старшей производной**.

Интегрирование ДУ в общем случае приводит к бесконечному множеству решений, отличающихся друг от друга константой. Чтобы выделить из множества решений одно, нужно подчинить его некоторому дополнительному условию.

Определение 3. Условие такое, что при $x = x_0$ функция y принимает значение y_0 называется **начальным условием**.

$$\begin{aligned} x_0,\ y_0 &\text{ — начальные значения} \\ y(x_0) = y_0 &\text{ — начальное условие} \end{aligned} \tag{3}$$

Определение 4. Задача нахождения решения ДУ (1) или (2), удовлетворяющего начальному условию называется **задачей Коши**.

$$\text{Задача Коши} = \text{ДУ} + \text{начальное условие}$$

$$\begin{cases} y' = f(x, y) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases} \quad \text{— Задача Коши}$$

Теорема 1 *(О существовании и единственности решения ЗК для ДУ 1-го порядка)***.** Если в ДУ (2) функция $f(x, y)$ и её частная производная по y, то есть функция $f'_y(x, y)$, непрерывны в некоторой области D плоскости xOy, содержащей точку $M_0(x_0, y_0)$, то существует и при том единственное решение ДУ (2), удовлетворяет начальному условию (3).

Определение 5. **Общим решением** ДУ 1-го порядка называется функция $y = \varphi(x, C)$, удовлетворяющая условиям:

1. $y = \varphi(x, C)$ — решение ДУ при $\forall C - const$
2. Какого бы ни было начальное условие (3), можно найти константу $C = C_0$ такую, что $\varphi(x, C_0) = y$ будет удовлетворять начальному условию (3).

Определение 6. **Частным решением** ДУ (1) или (2) называется любая функция $\varphi(x, C_0) = y$, полученная из общего решения при конкретном значении $C = C_0$.

Общее решение ДУ — множество всех частных решений.

Определение 7. Если общее решение ДУ найдено в неявном виде

$$\Phi(x, y, C) = 0$$

то такое решение называется **общим интегралом ДУ**.

Определение 8. Равенство

$$\Phi(x, y, C_0) = 0$$

полученное из общего интеграла при конкретном значении $C = C_0$ называется **частным интегралом ДУ**.

ДУ 1-го порядка:

1. ДУ с разделяющимися переменными
2. Однородные ДУ
3. Линейные ДУ
   (3.1) ЛОДУ
   (3.2) ЛНДУ
4. Бернулли

7.1 ДУ с разделяющимися переменными

Определение 1. **ДУ 1-го порядка с разделяющимися переменными** называется ДУ вида:

$$\boxed{y' = f(x)\,g(y)} \tag{1}$$

f — функция зависящая только от x
g — функция зависящая только от y

Этапы решения:

1. Умножим на dx и разделим на $g(y) \neq 0$

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= f(x)\,g(y) \\ dy &= f(x)\,g(y)\,dx \\ \frac{dy}{g(y)} &= f(x)\,dx \end{aligned}$$

2. Интегрируем

$$\int \frac{dy}{g(y)} = \int f(x)\,dx$$

Находим общее решение или общий интеграл ДУ.

Замечание. При разделяющихся переменных проведено деление на $g(y) \neq 0$, однако $g(y) = 0$ может быть решением ДУ. Поэтому следует отдельно проверить, является ли функция $g(y) = 0$ решением ДУ. Для этого $g(y) = 0$ нужно подставить в само дифференциальное уравнение.

$$f_1(x)\,g_1(y)\,dx + f_2(x)\,g_2(y)\,dy = 0$$

$f_1,\ f_2$ — функции зависящие только от x
$g_1,\ g_2$ — функции зависящие только от y

Этапы решения:

1. Перенесём второе слагаемое вправо:

$$f_1(x)\,g_1(y)\,dx = -f_2(x)\,g_2(y)\,dy$$

2. Разделим на произведение функций $g_1(y) \cdot f_2(x) \neq 0$

$$\frac{f_1(x)}{f_2(x)}\,dx = -\frac{g_2(y)}{g_1(y)}\,dy$$

3. Интегрируем:

$$\int \frac{f_1(x)}{f_2(x)}\,dx = -\int \frac{g_2(y)}{g_1(y)}\,dy$$

Находим общее решение или общий интеграл ДУ.

Замечание. Отдельно проверить, являются ли решениями функции $g_1(y) = 0$ и $f_2(x) = 0$.

Определение 2. Решения, потерянные в процессе разделения переменных, называются **особыми**.

Определение 3. График решения ДУ — **интегральная кривая**.

Пример.

$$(xy + y)\,dx + (x - xy)\,dy = 0$$

$$y(x+1)\,dx + x(1-y)\,dy = 0$$

$$y(x+1)\,dx = x(y-1)\,dy \quad \Big| : xy \quad \begin{matrix} x \neq 0 \\ y \neq 0 \end{matrix}$$

$$\Downarrow$$

$$\frac{x+1}{x}\,dx = \frac{y-1}{y}\,dy$$

$$\int \frac{x+1}{x}\,dx = \int \frac{y-1}{y}\,dy$$

$$\int dx + \int \frac{dx}{x} = \int dy - \int \frac{dy}{y}$$

$$x + \ln|x| = y - \ln|y| + C, \quad \forall C - const$$

$$x - y + \ln|x| + \ln|y| = C$$

$$x - y + \ln|xy| = C, \quad \forall C - const$$

Особые решения:

$\boxed{x = 0}$:

$$y \cdot (0+1)\,d(0) = 0 \cdot (y-1)\,dy$$

$$y \cdot 1 \cdot 0 = 0 \cdot (y-1)\,dy$$

$$0 = 0$$

$x = 0$ является особым решением ДУ

$\boxed{y = 0}$:

$$0(x+1)\,dx = x \cdot (0-1)\,d(0)$$

$$0 = 0$$

$y = 0$ является особом решением ДУ

Ответ: $x - y + \ln|xy| = C, \quad \forall C - const$

$x = 0$

$y = 0$

7.2 Однородные ДУ 1-го порядка

Определение 1. Функция $P(x,y)$ называется **однородной порядка k**, если

$$P(\lambda x, \lambda y) = \lambda^k P(x,y), \quad \forall \lambda > 0$$

Определение 2. ДУ вида:

$$\boxed{P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy = 0} \tag{1}$$

называются **однородными ДУ 1-го порядка**, если функции $P(x,y)$ и $Q(x,y)$ являются однородными функциями одного порядка.

Уравнение (1) можно представить в виде:

$$y' = f\left(\frac{y}{x}\right) \text{ или } \frac{dy}{dx} = f\left(\frac{y}{x}\right)$$

где f — однородная функция относительно $\dfrac{y}{x}$

Метод решения: замена $\dfrac{y}{x} = u(x) \;\Rightarrow\; \boxed{\begin{array}{c} y = u(x)\cdot x \\ y' = u'x + u \end{array}}$

Пример.

$y' = \dfrac{x}{y} + \dfrac{y}{x}$

Замена: $\dfrac{y}{x} = u \;\Rightarrow\; \dfrac{x}{y} = \dfrac{1}{1} \qquad y = u\cdot x \qquad y' = u'x + u$

$$\begin{aligned}
u'x + u &= \frac{1}{u} + u \\
u'x &= \frac{1}{u} \\
x\frac{du}{dx} &= \frac{1}{u} \quad \Big| \cdot dx \\
x\,du &= \frac{dx}{u} \quad \Big| \cdot u \\
ux\,du &= dx \quad \Big| : x \neq 0 \\
u\,du &= \frac{dx}{x} \\
\int u\,du &= \int \frac{dx}{x} \\
\frac{u^2}{2} &= \ln|x| + C,\ \forall C - cosnt
\end{aligned}$$

Обратная замена: $u = \dfrac{y}{x}$

$$\frac{y^2}{2x^2} = \ln|x| + C$$
$$y^2 = 2x^2\left(\ln|x| + C\right), \ \forall C - cosnt$$

$\boxed{\text{x} = 0?}$ $\quad x = 0$ не является решением ДУ

Ответ: $y^2 = 2x^2\left(\ln|x| + C\right), \ \forall C - cosnt$

7.3 Линейные ДУ 1-го порядка

Определение 1. ДУ 1-го порядка называется **линейным**, если неизвестная функция $y(x)$ и её производная y' входят в уравнение в первой степени, не перемножаясь между собой.

$$\boxed{y' + p(x) \cdot y = f(x)} \tag{1}$$

$p(x),\ f(x)$ — непрерывны на $I \subset \mathbb{R}$

Определение 2. Если $f(x) = 0\, \forall x \in I$, то линейное ДУ (1) называется **однородным**. Если же $f(x) \neq 0$, то линейное ДУ (1) называется **неоднородным**.

$\boxed{y' + p(x) \cdot y = 0}$ — линейное однородное ДУ 1-го порядка (ЛОДУ)

$\boxed{y' + p(x) \cdot y = f(x)}$ — линейное неоднородное ДУ 1-го порядка (ЛНДУ)

$p(x),\ f(x)$ — непрерывны на $I \subset \mathbb{R}$

Определение 3. ДУ 1-го порядка называется **уравнением Бернулли**, если оно имеет вид:

$$\boxed{y' + p(x) \cdot y = y^m \cdot f(x)} \qquad m \neq 0,\ m \neq 1$$

$$m = 0 \ \Rightarrow \ \text{уравнение Бернулли} \ \longrightarrow \text{ЛНДУ}$$
$$m = 1 \ \Rightarrow \ \text{уравнение Бернулли} \ \longrightarrow \text{ЛОДУ}$$

$p(x),\ f(x)$ — непрерывны на $I \subset \mathbb{R}$

ЛОДУ сводится к ДУ с разделяющимися переменными. Метод решения — это разделение переменных.

7.3.1 Метод Лагранжа (метод вариации произвольной постоянной)

Рассмотрим ЛНДУ 1-го порядка:

$$y' + p(x) \cdot y = f(x) - \text{ЛНДУ}$$

$p(x),\ f(x)$ — непрерывны на $I \subset \mathbb{R}$

$\boxed{\text{1 этап}}$ Решение соответствующего ЛОДУ

$$y' + p(x)\cdot y = 0 \quad \text{ЛОДУ}$$

$$y' = -p(x)\cdot y \quad \text{ДУ с разделяющимися переменными}$$

$$\frac{dy}{dx} = -p(x)\cdot y \quad \Big| \cdot dx \Big| \; : y \neq 0$$

$$\frac{dy}{y} = -p(x)\,dx$$

Интегрируем:

$$\int \frac{dy}{y} = -\int p(x)\,dx$$

$$\ln|y| = -\int p(x)\,dx + C,\ \forall C - const$$

$$e^{\ln|y|} = e^{-\int p(x)dx + C},\ \forall C - const$$

$$e^{\ln|y|} = e^{-\int p(x)dx}\cdot e^{C},\ \forall C - const$$

$$|y| = C_1\cdot e^{-\int p(x)dx},\ \forall C_1 = e^{C} > 0$$

$$y = C_2\cdot e^{-\int p(x)dx},\ C_2 = \pm C_1,\ C_2 \neq 0$$

Особые решения: $y = 0$

$$(0)' + p(x)\cdot 0 = 0$$

$$0 = 0$$

$y = 0$ — особое решение

$$\begin{cases} y = C_2\cdot e^{-\int p(x)dx} \\ y = 0 \end{cases} \qquad C_2 \neq 0$$

$$y = k\cdot e^{-\int p(x)dx}, \quad \forall k - const$$

Общее решение ЛОДУ:

$$y_{\text{оо}} = k\cdot e^{-\int p(x)dx}, \quad \forall k - const$$

$\boxed{\text{2 этап}}$ Предполагаемый вид решения ЛНДУ

$$y_{\text{он}} = k(x)\cdot e^{-\int p(x)dx}$$

Представим предполагаемый вид решения ЛНДУ $y_{\text{он}}$ в ЛНДУ:

$$\Big(k(x)\cdot e^{-\int p(x)dx}\Big)' + p(x)\cdot k(x)\cdot e^{-\int p(x)dx} = f(x)$$

$$k'(x)\cdot e^{-\int p(x)dx} + \cancel{k(x)\cdot e^{-\int p(x)dx}\cdot\big(-p(x)\big)} + \cancel{p(x)\cdot k(x)\cdot e^{-\int p(x)dx}} = f(x)$$

$$k'(x)\cdot e^{-\int p(x)dx} = f(x) \text{ — ДУ с разд. перем.}$$

$$k'(x) = f(x)\cdot e^{\int p(x)dx}$$

$$\frac{dk}{dx} = f(x)\cdot e^{\int p(x)dx}$$

$$dk = f(x)\cdot e^{\int p(x)dx}\,dx$$

Интегрируем:

$$k(x) = \int f(x)\cdot e^{\int p(x)dx}\,dx + k, \quad k - const$$

Подставляем $k(x)$ в предполагаемое решение ЛНДУ:

$$y_{\text{он}} = k(x)\cdot e^{-\int p(x)dx} = e^{-\int p(x)dx}\left(\int f(x)e^{\int p(x)dx}dx + k\right),\ \forall k - const$$

7.3.2 Метод Бернулли (метод подстановки)

Рассмотрим ЛНДУ:

$$y' + p(x) \cdot y = f(x)$$

$p(x),\ f(x)$ — непрерывные функции $I \subset \mathbb{R}$.

Метод подстановки: $\boxed{y(x) = u(x) \cdot v(x)}$

Подставим $y(x) = u(x) \cdot v(x)$ в ЛНДУ:

$$\begin{aligned}
u'(x) \cdot v(x) + u(x) \cdot v'(x) + p(x) \cdot u(x) \cdot v(x) &= f(x) \\
v(x)\Big(u'(x) + p(x) \cdot u(x)\Big) + u(x) \cdot v'(x) &= f(x) \\
v(x)\Big(\underbrace{u'(x) + p(x) \cdot u(x)}_{0}\Big) &= f(x) - u(x) \cdot v'(x)
\end{aligned}$$

Так как одну неизвестную переменную $y(x)$ заменили на две функции $u(x)$ и $v(x)$, то одну из этих двух функций можно выбрать так, как удобно. Произвольная постоянная будет учтена при нахождении второй неизвестной функции.

$$\begin{aligned}
u'(x) + p(x) \cdot u(x) = 0 \ &\text{— ДУ с разделяющимися переменными} \\
u' &= -p(x) \cdot u \\
\frac{du}{dx} &= -p(x) \cdot u \quad \Big| \cdot dx \Big| \ : u \neq 0 \\
\frac{du}{u} &= -p(x)\, dx
\end{aligned}$$

Интегрируем:

$$\begin{aligned}
\int \frac{du}{u} &= -\int p(x)\, dx \\
\ln|u| &= -\int p(x)\, dx + C, \quad \forall C - const \\
e^{\ln|u|} &= e^{-\int p(x) dx + C}, \quad \forall C - const \\
|u| &= C_1 \cdot e^{-\int p(x) dx}, \quad \forall C_1 = e^C > 0 \\
u &= C_2 \cdot e^{-\int p(x) dx}, \quad C_2 \neq \pm C_1 \quad C_2 \neq 0
\end{aligned}$$

$C_2 = 1$ для удобства вычислений

$$u = e^{-\int p(x) dx}$$

$C_2 \neq 0$, так как $u(x) = 0,\ y(x) = 0$, а $y(x) = 0$ не является решением ЛНДУ.
Конкретизировать данное решение можно, так имеется произвольный выбор по одной из переменных. Произвольная постоянная будет учтена при нахождении второй неизвестной функции.

$$v(x)\Big(\underbrace{u'(x) + p(x) \cdot u(x)}_{0}\Big) = f(x) - u(x) \cdot v'(x)$$

$$\boxed{f(x) - u(x)v'(x) = 0} \qquad u(x) = e^{-\int p(x) dx}$$

$$\begin{aligned} f(x) - v' \cdot e^{-\int p(x)dx} &= 0 \text{ — ДУ с разделяющимися переменными} \\ v' \cdot e^{-\int p(x)dx} &= f(x) \\ v' &= f(x) \cdot e^{\int p(x)dx} \\ \frac{dv}{dx} &= f(x) \cdot e^{\int p(x)dx} \\ dv &= f(x) \cdot e^{\int p(x)dx}\, dx \end{aligned}$$

Интегрируем:

$$\begin{aligned} \int dv &= \int f(x) \cdot e^{-\int p(x)dx}\, dx \\ v &= \int f(x) \cdot e^{-\int p(x)dx}\, dx + k, \quad \forall k \text{ — } const \end{aligned}$$

Подставим $u(x)$ и $v(x)$ в подстановку $y(x) = u(x) \cdot v(x)$:

$$y(x) = e^{-\int p(x)dx} \left(\int f(x) \cdot e^{\int p(x)dx}\, dx + k \right), \quad \forall k \text{ — } const$$

Общее решение ЛНДУ:

$$y_{\text{он}}(x) = e^{-\int p(x)dx} \left(\int f(x) \cdot e^{\int p(x)dx}\, dx + k \right), \quad \forall k \text{ — } const$$

Пример. $y' + \underbrace{2x}_{p(x)} \cdot y = \underbrace{xe^{-x^2}}_{f(x)}$ — ЛНДУ

Метод Лагранжа:

$\boxed{\text{1 этап}}$

$$\begin{aligned} y' + 2xy &= 0 \quad \text{ЛОДУ} \\ y' &= -2xy \quad \text{с разд. переменными} \\ \frac{dy}{dx} &= -2xy \quad \Big| \cdot dx \Big| \quad : y \neq 0 \\ \frac{dy}{y} &= -2x\, dx \end{aligned}$$

Интегрируем:

$$\begin{aligned} \int \frac{dy}{y} &= -2 \int x\, dx \\ \ln|y| &= 2 \cdot \frac{x^2}{2} + C, \quad \forall C \text{ — } const \\ \ln|y| &= -x^2 + C, \quad \forall C \text{ — } const \\ e^{\ln|y|} &= e^{-x^2+C} \\ e^{\ln|y|} &= e^{-x^2} \cdot e^C \\ |y| &= C_1 \cdot e^{-x^2},\ C_1 = e^C > 0 \\ y &= C_2 \cdot e^{-x^2},\ C_2 = \pm C_1 \quad C_2 \neq 0 \end{aligned}$$

$y = 0$?

$$\begin{aligned}(0)' &= -2x \cdot 0\\ 0 &= 0\end{aligned}$$

$y = 0$ — особое решение

$$\begin{cases} y = C_2 \cdot e^{-x^2},\ C_2 \neq 0 \\ y = 0 \end{cases} \Rightarrow\ y = k \cdot e^{-x^2},\ \forall k - const$$

$$\boxed{y_{\text{oo}} = k \cdot e^{-x^2}},\ \forall k - const$$

$\boxed{\text{2 этап}}$ $y_{\text{он}} = k(x) \cdot e^{-x^2}$ подставим в ЛНДУ

$$\begin{aligned}\left(k(x) \cdot e^{-x^2}\right)' + 2x \cdot k(x) \cdot e^{-x^2} &= xe^{-x^2}\\ k'(x) \cdot e^{-x^2} + \cancel{k(x) \cdot e^{-x^2} \cdot (-2x)} + \cancel{2x \cdot k(x) \cdot e^{-x^2}} &= xe^{-x^2}\\ k'(x) \cdot \cancel{e^{-x^2}} &= x \cdot \cancel{e^{-x^2}}\\ k'(x) &= x\\ \frac{dk}{dx} &= x \quad \Big| \cdot dx\\ dk &= x\,dx\\ k &= \frac{x^2}{2} + k, \quad \forall k - const\end{aligned}$$

Подставим $k(x)$ в $y_{\text{он}}$

$$y_{\text{он}} = e^{-x^2} \cdot \left(\frac{x^2}{2} + k\right), \quad \forall k - const$$

Пример.

$$\begin{aligned}xy' + y &= 2x^2 y \cdot \ln y \cdot y'\\ y'\left(x - 2x^2 y \ln y\right) &= -y\\ y'x\,(1 - 2xy\ln y) &= -y\\ y' &= -\frac{y}{x\,(1 - 2xy\ln y)}\\ x' &= -\frac{x\,(1 - 2xy\ln y)}{y}\\ x' + \underset{p(y)}{\frac{1}{y}} \cdot x &= \underset{f(y)}{2x^2 \ln y} \text{ — уравнение Бернулли}\end{aligned}$$

Замена $x(y) = u(y) \cdot v(y)$

$$\begin{aligned}
u'(y) \cdot v(y) + u \cdot v' + \frac{u \cdot v}{y} &= 2 \ln y u^2 \cdot v^2 \\
u'v + \frac{u \cdot v}{y^2} &= 2 \ln y \cdot v^2 \cdot u^2 - uv' \\
v\left(u' + \frac{u}{y}\right) &= 2u^2v^2 \ln y - uv' \\
u' + \frac{u}{y} &= 0 \ \Rightarrow \ \frac{du}{dy} + \frac{u}{y} = 0 \\
\frac{du}{u} &= -\frac{dy}{y} \\
\ln|u| &= -\ln|y| + C, \ \forall C - const \\
e^{\ln|u|} &= e^{\ln|y|^{-1}} \\
|u| &= \frac{1}{|y|} \cdot C_1, \ C_1 = e^C > 0 \\
u &= \frac{C_2}{y}, \ C_2 = \pm C_1, \ C_2 \neq 0
\end{aligned}$$

$C_2 = 1 \qquad u = \dfrac{1}{y}$

$$\begin{aligned}
0 &= 2u^2v^2 \ln y - uv' \\
\frac{2v^2}{y^2} \cdot \ln y &= \frac{v'}{y} \\
v' &= \frac{2v^2}{y} \ln y \\
\frac{dv}{dy} &= \frac{2v^2}{y} \cdot \ln y \quad \Big| \cdot dy \Big| : v^2 \neq 0 \\
\frac{dv}{v^2} &= \frac{2}{y} \cdot \ln y \, dy \\
-\frac{1}{v} &= 2 \int \ln y \, d \ln y + k, \ \forall k - const \\
-\frac{1}{v} &= 2 \cdot \frac{\ln^2 y}{2} + k, \ \forall k - const \\
-\frac{1}{v} &= \ln^2 y + k, \ \forall k - const \\
v &= -\frac{1}{\ln^2 y + k}, \ \forall k - const
\end{aligned}$$

Обратная замена:

$$x(y) = u(y) \cdot v(y) = -\frac{1}{y} \cdot \frac{1}{\ln^2 y + k} = x$$

$$\left[\begin{aligned} & xy\left(\ln^2 y + k\right) = -1 \\ & x = 0 \end{aligned}\right. \qquad \forall k = const$$

8 Дифференциальные уравнения высшего порядка

Определение 1. Дифференциальное уравнение порядка выше первого называется **дифференциальными уравнениями высшего порядка**.

Определение 2. **ДУ 2-го порядка** называется уравнение вида:

$$\boxed{F(x,\, y,\, y',\, y'') = 0} \tag{1}$$

Определение 3. ДУ 2-го порядка, **разрешённым относительно старшей производной**, называется уравнение вида:

$$\boxed{y'' = f(x,\, y,\, y')} \tag{2}$$

Определение 4. **Задача Коши** для ДУ 2-го порядка заключается в отыскании решения ДУ 2-го порядка (2), удовлетворяющего начальному условию:

$$\begin{cases} y(x_0) = y_0 \\ y'(x_0) = y_{10} \end{cases} \tag{3}$$

Задача Коши для ДУ 2-го порядка:

$$y'' = f(x, y, y') \text{ — ДУ} \tag{2}$$

$$+$$

$$\begin{cases} y(x_0) = y_0 \\ y'(x_0) = y_{10} \end{cases} \text{ — начальное условие} \tag{3}$$

Теорема 1 *(О существовании и единственности решения ЗК для ДУ 2-го порядка)***.** Если в ДУ 2-го порядка (2) функция $f(x, y, y')$ и её частные производные по переменным y и y', то есть функции $f'_y(x, y, y')$ и $f'_{y'}(x, y, y')$, непрерывны в некоторой области $D \subset \mathbb{R}^3$, содержащей точку $M_0(x_0, y_0, y_{10})$, то существует и при том единственное решение ДУ (2), удовлетворяющее начальному условию (3).

Определение 5. **Общим решением** ДУ 2-го порядка называется функция $y = \varphi(x, C_1, C_2)$, удовлетворяющая условиям:

1. $y = \varphi(x, C_1, C_2)$ — решение ДУ (2) при любых $C_1,\ C_2$ — *const*.
2. Какого бы ни было начальное условие (3), можно найти такие $C_1^0,\ C_2^0$, что функция $y = \varphi(x, C_1^0, C_2^0)$ будет удовлетворять начальному условию (3).

Определение 6. **Частным решением** ДУ 2-го порядка называется любая функция $y = \varphi(x, C_1^0, C_2^0)$, полученная из общего решения при конкретных значениях C_1^0 и C_2^0.

Аналогично:

Определение 1. ДУ n-го порядка называется уравнение вида:

$$\boxed{F\left(x,\, y,\, y',\, \ldots,\, y^{(n)}\right) = 0} \tag{1}$$

F — известная функция от $n+2$ переменных

Определение 2. ДУ n-го порядка, **разрешённым относительно старшей производной**, называется уравнение вида:

$$y^{(n)} = f\left(x,\, y,\, y',\, \ldots,\, y^{(n-1)}\right) \tag{2}$$

Определение 3. Задача Коши для ДУ n-го порядка заключается в отыскании решения ДУ (2), удовлетворяющего начальному условию:

$$\begin{cases} y(x_0) = y_0 \\ y'(x_0) = y_{10} \\ y''(x_0) = y_{20} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ y^{(n-1)}(x_0) = y_{n\cdot 10} \end{cases} \tag{3}$$

Задача Коши = ДУ (2) + начальное условие (3)

Теорема 1 *(О существовании и единственности решения ЗК для ДУ n-го порядка)***.** Если функция $f\left(x,\, y,\, y',\, \ldots,\, y^{(n-1)}\right)$ и её частные производные по переменным $y,\ y',\ \ldots,\ y^{(n-1)}$, то есть функции $f'_y\left(x,\, y,\, y',\, \ldots,\, y^{(n-1)}\right)$, $f'_{y'}\left(x,\, y,\, y',\, \ldots,\, y^{(n-1)}\right)$, ..., $f'_{y^{(n-1)}}\left(x,\, y,\, y',\, \ldots,\, y^{(n-1)}\right)$, непрерывны в некоторой области $D \subset \mathbb{R}^{n+1}$, содержщаей точку $M_0(x_0, y_0, y_{10}, y_{20}, \ldots, y_{n\cdot 10})$, то существует и при том единственное решение ЗК (2), (3).

Определение 4. Общим решением ДУ n-го порядка называется функция $y = \varphi(x,\, C_1,\, C_2,\, \ldots,\, C_n)$ удовлетворяющая условиям:

1. $y = \varphi(x, C_1, C_2, \ldots, C_n)$ — решение ДУ n-го порядка при любых $C_1, C_2, \ldots, C_n$ — $const$.
2. Какого бы ни было начальное условие (3), можно найти такие $C_1^0,\, C_2^0,\, \ldots,\, C_n^0$, что функция $y = \varphi(x,\, C_1^0,\, C_2^0,\, \ldots,\, C_n^0)$ будет удовлетворять начальным условиям (3).

Определение 5. Частным решением ДУ n-го порядка называется функция $y = \varphi(x,\, C_1^0,\, C_2^0,\, \ldots,\, C_n^0)$, полученная из общего решения $y = \varphi(x,\, C_1,\, C_2,\, \ldots,\, C_n)$ при конкретных значениях $C_1^0,\, C_2^0,\, \ldots,\, C_n^0$.

8.1 ДУ, допускающие понижение порядка

8.1.1 1 тип

Уравнения вида

$$\boxed{y^{(n)} = f(x)}$$

Метод решения: n-кратное интегрирование

> **Пример.**
>
> $$\begin{aligned} &y'' = \sin x \\ &y' = \int \sin dx = -\cos x + C_1, \quad \forall C_1 - const \\ &y = -\int \cos dx + C_1 \int dx + C_2, \quad \forall C_2 - const \\ &y = -\sin x + C_1 x + C_2, \quad \forall C_1, C_2 - const \end{aligned}$$

8.1.2 2 тип

Уравнения, которые не содержат переменную x, то есть

$$\boxed{F\left(y,\, y',\, \ldots,\, y^{(n)}\right) = 0}$$

Замена:

$$\begin{aligned} &y' = p(y) \\ &y'' = p' \cdot y' = p' \cdot p \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}$$

Для ДУ 2-го порядка: $\boxed{F(y,\, p,\, p' \cdot p) = 0}$

Замена:

$$\begin{cases} y' = p(y) \\ y'' = p' \cdot p \end{cases} \tag{$*$}$$

$$\Downarrow$$

$$\boxed{F(y,\, p,\, p' \cdot p) = 0}$$

Замена $(*)$ позволяет понизить порядок ДУ на единицу.

$\boxed{\text{1 шаг}}$ Решаем ДУ $F(y,\, p,\, p' \cdot p) = 0$. Интегрируем. Находим функцию $P = \Psi(y,\, C_1)$, $C_1 - const$.

$\boxed{\text{2 шаг}}$ Обратная замена $p = y'$

$\boxed{\text{3 шаг}}$ $y' = \Psi(y, C_1), \forall C_1 - const$

Решаем ДУ 1-го порядка. Интегрируем:

$$y = \varphi(x,\, C_1,\, C_2)$$

Пример. $yy'' + (y')^2 = 3(y')^3$ ДУ 2-го порядка
Замена:

$$\begin{cases} y' = p(y) \\ y'' = p' \cdot p \end{cases} \qquad (*)$$

$$yp'p + p^2 = 3p^3 \quad \Big| : yp$$

$$\boxed{p' + p \cdot \frac{1}{y} = 3p^3 \cdot \frac{1}{y}} \text{ — уравнение Бернулли } m = 2$$

$P(y) = u(y) \cdot v(y)$ — подстановка | метод Бернулли

$$u'v + uv' + uv \cdot \frac{1}{y} = 3u^2v^2 \cdot \frac{1}{y}$$

$$\underset{\overset{\|}{0}}{v\left(u' + \frac{u}{y}\right)} = 3u^2v^2 \cdot \frac{1}{y} - uv'$$

$u' + \dfrac{u}{y} = 0$ — с разделяющимися переменными

$$u' = -\frac{u}{y}$$

$$\frac{du}{dy} = -\frac{u}{y} \quad \Big| : u \Big| \cdot dy$$

$$\frac{du}{u} = -\frac{dy}{y}$$

$$\ln|u| = -\ln|y| + C, \ \forall C - const$$

$$e^{\ln|u|} = e^{\ln|y|^{-1} + C}$$

$$|u| = \frac{1}{|y|} \cdot C_1, \ \forall C_1 = e^C > 0$$

$$u = \frac{C_2}{y}, \ \forall C_2 = \pm C_1$$

$$C_2 = 1 \qquad u = \frac{1}{y}$$

$$\begin{aligned}
3u^2v^2 \cdot \frac{1}{y} - uv' &= 0 \\
3 \cdot \frac{1}{y^2} \cdot v^2 \cdot \cancel{\frac{1}{y}} &= \cancel{\frac{1}{y}} \cdot v' \\
\frac{dv}{dy} &= \frac{3v^2}{y^2} \quad \Big| : v^2 \Big| \cdot dy \\
\frac{dv}{v^2} &= \frac{3}{y^2}\,dy \\
-\frac{1}{v} &= -\frac{3}{y} + C_2, \quad \forall C_2 - const \\
-\frac{1}{v} &= \frac{-3 + C_2y}{y} \\
v &= -\frac{y}{-3 + C_2y} \\
v &= \frac{7}{3 - C_2y} \\
p(y) &= u(y) \cdot v(y) \\
p(y) &= \frac{1}{3 - C_2y}
\end{aligned}$$

Обратная замена:

$$\begin{aligned}
y' &= p \\
y' &= \frac{1}{3 - C_2y} \\
\frac{dy}{dx} &= \frac{1}{3 - C_2y} \\
(3 - C_2y)\,dy &= dx \\
3y - \frac{C_2y^2}{2} &= x + C_3 \\
3y + C_4y^2 &= x + C_3 \qquad \forall C_3,\, C_4 - const
\end{aligned}$$

8.1.3 3 тип

Уравнения, в которых в явном виде отсутствует y, то есть

$$\boxed{F\left(x,\, y',\, y'',\, \ldots,\, y^{(n)}\right) = 0}$$

Замена:

$$\begin{cases} y' = p(x) \\ y'' = p' \end{cases} \tag{$*$}$$

С помощью $(*)$ понижаем порядок ДУ на единицу.
Для ДУ 2-го порядка:

$$F(x,\, y',\, y'') = 0$$

Замена:

$$\begin{cases} y' = p(x) \\ y'' = p' \end{cases} \tag{$*$}$$

$$F(x,\, p,\, p') = 0$$

$\boxed{\text{1 шаг}}$ Решаем ДУ 1-го порядка $F(x,\,p,\,p')=0$. Интегрируем. Находим функцию $P=\Psi(x,C_1),\ \forall C_1$ — *const*

$\boxed{\text{2 шаг}}$ Обратная замена $p=y'$

$\boxed{\text{3 шаг}}$ $y'=\Psi(x,C_1)$ — ДУ 1-го порядка. Решаем ДУ 1-го порядка. Интегрируем. Находим $y=\varphi(x,\,C_1,\,C_2),\ \forall C_1,C_2$ — *const*

8.2 Линейные ДУ высшего порядка

Определение 1. ДУ n-го порядка называется **линейным**, если неизвестная функция $y(x)$ и её производные до n-го порядка включительно входят в уравнение в первой степени, не перемножаясь между собой.

$$\boxed{y^{(n)}+p_1(x)y^{(n-1)}+p_2(x)y^{(n-2)}+\ldots+p_{n-1}(x)y'+p_n(x)y=f(x)} \qquad (1)$$

$p_1(x),\ \ldots,\ p_n(x)$ — функции, заданные на некотором промежутке I.
$p_1(x),\ \ldots,\ p_n(x)$ — коэффициенты
$f(x)$ — функция, определена на промежутке I
$f(x)$ — свободный член

Определение 2.
Если $f(x)=0,\ \forall x\in I$, то ДУ (1) называется **линейным однородным ДУ** (ЛОДУ).

$$\boxed{y^{(n)}+p_1(x)y^{(n-1)}+p_2(x)y^{(n-2)}+\ldots+p_{n-1}(x)y'+p_n(x)y=f(x)} \qquad (1)$$

(1) ЛНДУ n-го порядка

Если $f(x)\neq 0$ хотя бы для одного $x\in I$, то ДУ (1) называется **линейным неоднородным ДУ** n-го порядка (ЛНДУ).

$$\boxed{y^{(n)}+p_1(x)y^{(n-1)}+p_2(x)y^{(n-2)}+\ldots+p_{n-1}(x)y'+p_n(x)y=0} \qquad (2)$$

(2) ЛОДУ n-го порядка

Определение 3. Задача Коши для линейного дифференциального уравнения n-го порядка заключается в отыскании решения ДУ (1), удовлетворяющего начальному условию:

$$\begin{cases} y(x_0)=y_0 \\ y'(x_0)=y_{10} \\ y''(x_0)=y_{20} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ y^{(n-1)}(x_0)=y_{n\cdot 10} \end{cases} \qquad (3)$$

$$\text{Задача Коши} = \text{ДУ (1)} + \text{начальное условие (3)} \qquad (4)$$

Теорема 1 *(О существовании и единственности решения ЗК (1), (3)).*
Если в ЛНДУ (1) функции $p_1(x),\ \dots,\ p_n(x),\ f(x)$ непрерывны на некотором промежутке I, то задача Коши для ЛНДУ (1) имеет единственное решение удовлетворяющее начальному условию (3).

8.2.1 Свойства частных решений ЛОДУ n-го порядка

Теорема 1.
Множество частных решений ЛОДУ n-го порядка (2) с непрерывными функциями $p_1(x),\ \dots,\ p_n(x)$ на промежутке I образует линейное пространство.

Доказательство.
Пусть y_1 и y_2 — частные решения ЛОДУ n-го порядка (2). Тогда:

$$+\begin{array}{l} y_1^{(n)}+p_1(x)y_1^{(n-1)}+\ldots+p_{n-1}(x)y_1'+p_n(x)y_1=0 \\ y_2^{(n)}+p_1(x)y_2^{(n-1)}+\ldots+p_{n-1}(x)y_2'+p_n(x)y_2=0 \end{array}$$

Складываем уравнения:

$$\left(y_1^{(n)}+y_2^{(n)}\right)+p_1(x)\left(y_1^{(n-1)}+y_2^{(n-1)}\right)+\ldots+p_{n-1}(x)\left(y_1'+y_2'\right)+p_n(x)\left(y_1+y_2\right)=0$$

По свойству производной:

$$(y_1+y_2)^{(n)}+p_1(x)(y_1+y_2)^{(n-1)}+\ldots+p_{n-1}(x)(y_1+y_2)'+p_n(x)(y_1+y_2)=0$$

Обозначим $y=y_1+y_2$:

$$y^{(n)}+p_1(x)y^{(n-1)}+p_2(x)y^{(n-2)}+\ldots+p_{n-1}(x)y'+p_n(x)y=0$$

$y=y_1+y_2$ — частное решение ЛОДУ (2).
Пусть y_1 — частное решение ЛОДУ n-го порядка (2) Тогда:

$$y_1^{(n)}+p_1(x)y_1^{(n-1)}+p_2(x)y_1^{(n-2)}+\ldots+p_{n-1}(x)y_1'+p_n(x)y_1=0 \quad \Big|\cdot C=const,\ C\neq 0$$
$$C\cdot y_1^{(n)}+C\cdot p_1(x)y_1^{(n-1)}+\ldots+C\cdot p_{n-1}(x)y_1'+C\cdot p_n(x)y_1=0$$
$$(Cy_1)^{(n)}+p_1(x)(Cy_1)^{(n-1)}+\ldots+p_{n-1}(x)(Cy_1)'+p_n(x)(Cy_1)=0$$

Обозначим $y=Cy_1,\quad C - const,\ C\neq 0$:

$$y^{(n)}+p_1(x)y^{(n-1)}+\ldots+p_{n-1}(x)y'+p_n(x)y=0$$
$$\Downarrow$$
$$y=C\cdot y_1,\ \text{где } C - const,\ C\neq 0 \quad \text{— решение ЛОДУ (2)}$$

По определению линейного пространства $\Rightarrow$ частные решения ЛОДУ n-го порядка образуют линейное пространство. ■

Теорема 2.
Если $y_1,\ \dots,\ y_n$ — частные решения ЛОДУ (2), то их линейная комбинация, то есть $y = C_1y_1 + \ldots + C_ny_n$, где $C_1,\ \dots,\ C_n$ — *const* являются решением ЛОДУ (2).

Доказательство.
Пусть $y_1,\ \dots,\ y_n$ — частные решения ЛОДУ (2).

$$+\left|\begin{array}{ll} y_1^{(n)} + p_1(x)y_1^{(n-1)} + \ldots + p_{n-1}(x)y_1' + p_n(x)y_1 = 0 & \Big| \cdot C_1 \\ y_2^{(n)} + p_1(x)y_2^{(n-1)} + \ldots + p_{n-1}(x)y_2' + p_n(x)y_2 = 0 & \Big| \cdot C_2 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots & \\ y_n^{(n)} + p_1(x)y_n^{(n-1)} + \ldots + p_{n-1}(x)y_n' + p_n(x)y_n = 0 & \Big| \cdot C_n \end{array}\right.$$

Умножим каждое уравнение на константу $C_1,\ C_2,\ \dots,\ C_n$, где $C_i \neq 0,\ i = \overline{1,n}$.

$$\begin{aligned}\left(C_1y_1^{(n)} + C_2y_2^{(n)} + \ldots + C_ny_n^{(n)}\right) &+ p_1(x)\left(C_1y_1^{(n-1)} + C_2y_2^{(n-1)} + \ldots + C_ny_n^{(n-1)}\right) + \\ &+ \ldots + \\ &+ p_{n-1}(x)\left(C_1y_1' + C_2y_2' + \ldots + C_ny_n'\right) + \\ &+ p_n(x)\left(C_1y_1 + C_2y_2 + \ldots + C_ny_n\right) = 0\end{aligned}$$

По свойству производной:

$$\begin{aligned}\left(C_1y_1 + C_2y_2 + \ldots + C_ny_n\right)^{(n)} &+ p_1(x)\left(C_1y_1 + C_2y_2 + \ldots + C_ny_n\right)^{(n-1)} + \\ &+ \ldots + \\ &+ p_{n-1}(x)\left(C_1y_1 + C_2y_2 + \ldots + C_ny_n\right)' + \\ &+ p_n(x)\left(C_1y_1 + C_2y_2 + \ldots + C_ny_n\right) = 0\end{aligned}$$

Обозначим $y' = C_1y_1 + C_2y_2 + \ldots + C_ny_n$:

$$y^{(n)} + p_1(x)y^{(n-1)} + \ldots + p_{n-1}(x)y' + p_n(x)y = 0$$
$$\Downarrow$$
$$y = C_1y_1 + C_2y_2 + \ldots + C_ny_n \text{ — решение ЛОДУ n-го порядка}$$

■

Определение 1. Система функций $y_1(x),\ \dots,\ y_n(x)$ называется **линейно зависимой** на некотором промежутке I, если их линейная комбинация равна нулю, то есть

$$C_1y_1(x) + \ldots + C_ny_n = 0$$

при этом существует хотя бы один $C_i \neq 0,\ i = \overline{1,n},\ C_1,\ \dots,\ C_n$ — *const*

Определение 2. Система функций $y_1(x),\ \dots,\ y_n(x)$ называется **линейно независимой** на некотором промежутке I, если их линейная комбинация равна нулю, то есть

$$C_1y_1(x) + \ldots + C_ny_n = 0$$

где все $C_i = 0,\ i = \overline{1,n}$

9 Определитель Вронского (вронскиан)

Определение 1. **Определителем Вронского** (вронскианом) системы $(n-1)$ раз дифференцируемых функций $y_1(x),\ \ldots,\ y_n(x)$ называется определитель вида:

$$W(x) = \begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) & \cdots & y_n(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) & \cdots & y_n'(x) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ y_1^{(n-1)}(x) & y_2^{(n-1)}(x) & \cdots & y_n^{(n-1)}(x) \end{vmatrix}$$

Теорема 1 *(О вронскиане линейно зависимых функций).*
Если $(n-1)$ раз дифференцируемые функции $y_1(x),\ \ldots,\ y_n(x)$ линейно зависимы на некотором промежутке I, то

$$W(x) = 0,\ \forall x \in I$$

Доказательство.
Так как $y_1(x),\ \ldots,\ y_n(x)$ линейно зависимы на I, то

$$\boxed{C_1 y_1(x),\ \ldots,\ C_n y_n(x) = 0} \qquad \exists C_i \neq 0,\ i = \overline{1,n} \qquad (*)$$

Продифференцируем $(*)$ $(n-1)$ раз:

$$\boxed{C_1 y_1'(x),\ \ldots,\ C_n y_n'(x) = 0} \qquad \exists C_i \neq 0,\ i = \overline{1,n} \qquad (**)$$

По определению линейной зависимости (**с.71, опр.1**) $\Rightarrow y_1'(x),\ \ldots,\ y_n'(x)$ — линейно зависимы

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\boxed{C_1 y_1^{(n-1)}(x),\ \ldots,\ C_n y_n^{(n-1)}(x) = 0} \qquad \exists C_i \neq 0,\ i = \overline{1,n} \qquad (***)$$

По определению линейной зависимости $\Rightarrow y_1^{(n-1)}(x),\ \ldots,\ y_n^{(n-1)}(x)$ — линейно зависимы
Составим систему из $(*)$, $(**)$ и $(***)$:

$$\begin{cases} C_1 y_1(x), \ldots, C_n y_n(x) = 0 \\ C_1 y_1'(x), \ldots, C_n y_n'(x) = 0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ C_1 y_1^{(n-1)}(x), \ldots, C_n y_n^{(n-1)}(x) = 0 \end{cases}$$

Это однородная СЛАУ относительно $C_1, \ldots, C_n$.
Определитель этой СЛАУ:

$$\begin{vmatrix} y_1(x) & \cdots & y_n(x) \\ y_1'(x) & \cdots & y_n'(x) \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ y_1^{(n-1)}(x) & \cdots & y_n^{(n-1)}(x) \end{vmatrix} = W(x) \text{ — это определитель Вронского}$$

$W(x) = 0$, так как все строки определителя линейно зависимы. ■

Утверждение 1.
Если существует хотя бы одна точка $x_0 \in I$, $W(x_0) \neq 0$, то система функций $y_1(x), \ldots,\ y_n(x)$ линейно независима.

Теорема 2 *(О вронскиане линейно независимых частных решений ЛОДУ n-го порядка)***.**
Если функции $y_1(x)$, …, $y_n(x)$ линейно независимы на некотором промежутке I и являются частными решениями ЛОДУ n-го порядка

$$y^{(n)} + p_1(x)y^{(n-1)} + \ldots + p_{n-1}(x)y' + p_n(x)y = 0$$

с непрерывными на промежутке I коэффициентами $p_1(x)$, …, $p_n(x)$, то $W(x) \neq 0$, $\forall x \in I$

Доказательство (Метод от противного)**.**
Предположим, что $\exists\, x_0 \in I\colon W(x_0) \neq 0$

$$W(x_0) = \begin{vmatrix} y_1(x_0) & y_2(x_0) & \cdots & y_n(x_0) \\ y_1'(x_0) & y_2'(x_0) & \cdots & y_n'(x_0) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ y_1^{(n-1)}(x_0) & y_2^{(n-1)}(x_0) & \cdots & y_n^{(n-1)}(x_0) \end{vmatrix} = 0$$

Построим СЛАУ по определителю

$$\begin{cases} C_1y_1(x_0) + C_2y_2(x_0) + \ldots + C_ny_n(x_0) = 0 \\ C_1y_1'(x_0) + C_2y_2'(x_0) + \ldots + C_ny_n'(x_0) = 0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ C_1y_1^{(n-1)}(x_0) + C_2y_2^{(n-1)}(x_0) + \ldots + C_ny_n^{(n-1)}(x_0) = 0 \end{cases}$$

Данная СЛАУ имеет ненулевое решение, так как $W(x_0) = 0$
Рассмотрим функцию

$$y = C_1y_1 + \ldots + C_ny_n$$

Так как y_1, …, y_n — частные решения ЛОДУ n-го порядка, то по **Т.2** (**с.71**):

$$y = C_1y_1 + \ldots + C_ny_n \text{ — решение ЛОДУ n-го порядка}$$

Найдём $y(x_0)$:

$$y(x_0) = C_1y_1(x_0) + \ldots + C_ny_n(x_0) = 0$$

Дифференцируем $(n-1)$ раз функцию $y = C_1y_1 + \ldots + C_ny_n$:

$$\begin{gathered} y'(x_0) = C_1y_1'(x_0) + \ldots + C_ny_n'(x_0) = 0 \\ y''(x_0) = C_1y_1''(x_0) + \ldots + C_ny_n''(x_0) = 0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ y^{(n-1)}(x_0) = C_1y_1^{(n-1)}(x_0) + \ldots + C_ny_n^{(n-1)}(x_0) = 0 \end{gathered}$$

Получили, что $y = C_1y_1 + \ldots + C_ny_n$ — решение ЛОДУ n-го порядка (2), удовлетворяющее начальному условию:

$$\begin{cases} y(x_0) = 0 \\ y'(x_0) = 0 \\ \ldots\ldots\ldots \\ y^{(n-1)}(x_0) = 0 \end{cases}$$

Но $y = 0$ – решение ЛОДУ (2), удовлетворяющее начальному условию (3)
По теореме $\exists!$ *решения задачи Коши для линейного дифференциального уравнения n-го порядка* (**с.70, Т.1**) $\Rightarrow$

$$y = C_1y_1 + \ldots + C_ny_n = 0$$

при этом $C_1, \ldots, C_n$ – ненулевые константы $\Rightarrow$ $y_1, \ldots, y_n$ — линейно зависимы по определению линейной зависимости (**с.71, опр.1**). Это противоречит условию $\Rightarrow$ предположение не является верным $\forall x \in I\colon W(x) \neq 0$ ■

10 Фундаментальная система решений ЛОДУ n-го порядка

Пусть дано ЛОДУ n-го порядка

$$y^{(n)} + p_1(x)y^{(n-1)} + \ldots + p_{n-1}(x)y' + p_n(x)y = 0 \tag{2}$$

Определение 1. Фундаментальной системой решений ЛОДУ n-го порядка (2) называется любая система линейно независимых частных решений ЛОДУ n-го порядка.

Утверждение 2.
Если имеем ФСР на промежутке, то $W(x) \neq 0$ на этом промежутке.

$$\text{ФСР} \to \text{лин. нез.} \to W(x) \neq 0$$

Теорема 1 *(О структуре общего решения ЛОДУ n-го порядка).*
Общим решением ЛОДУ n-го порядка

$$y^{(n)} + p_1(x)y^{(n-1)} + \ldots + p_{n-1}(x)y' + p_n(x)y = 0 \tag{2}$$

с непрерывными коэффициентами $p_1(x), \ldots, p_n(x)$ на промежутке I является линейной комбинацией частных решений, входящих в ФСР.

$$y_{\text{oo}} = C_1 y_1 + \ldots + C_n y_n \tag{5}$$

«оо» — общее решение однородного уравнения

$$y_1, \ldots, y_n \text{ — ФСР ЛОДУ (2)}, \quad C_1, \ldots, C_n \text{ — } const$$

Доказательство.
1) Покажем, что (5) решение ЛОДУ (2), но не общее. Для этого подставим (5) в (2):

$$\begin{aligned}(C_1y_1 + \ldots + C_ny_n)^{(n)} &+ p_1(x)\left(C_1y_1 + \ldots + C_ny_n\right)^{(n-1)} + \\ &+ \ldots + \\ &+ p_{n-1}(x)\left(C_1y_1 + \ldots + C_ny_n\right)' + \\ &+ p_n(x)\left(C_1y_1 + \ldots + C_ny_n\right) = 0\end{aligned}$$

Вычислим производные:

$$\begin{aligned}C_1y_1^{(n)} + \ldots + C_ny_n^{(n)} &+ p_1(x)C_1y_1^{(n-1)} + \ldots + p_1(x)C_ny_n^{(n-1)} + \\ &+ \ldots + \\ &+ p_{n-1}(x)C_1y_1' + \ldots + p_{n-1}(x)C_ny_n' + \\ &+ p_n(x)C_1y_1 + \ldots + p_n(x)C_ny_n = 0\end{aligned}$$

Группируем:

$$\begin{aligned}&C_1\overbrace{\left(y_1^{(n)}+p_1(x)y_1^{(n-1)}+\ldots+p_{n-1}(x)y_1'+p_n(x)y_1\right)}^{0}+\\ &+\ldots+\\ &+C_n\underbrace{\left(y_n^{(n)}+p_1(x)y_n^{(n-1)}+\ldots+p_{n-1}(x)y_n'+p_n(x)y_n\right)}_{0}=0\end{aligned}$$

Так как $y_1, \ldots, y_n$ — частные решения ЛОДУ (2), то:

$$\begin{aligned}&C_1\cdot 0+\ldots+C_n\cdot 0=0\\ &\qquad\qquad 0=0 \;\Rightarrow\; (5)\text{ — решение (2)}\end{aligned}$$

2) Покажем, что (5) — это общее решение (2), то есть из него можно выделить единственное частное решение, удовлетворяющее начальному условию:

$$\begin{cases}y(x_0)=y_0\\ y'(x_0)=y_{10}\\ y''(x_0)=y_{20} \qquad x_0\in I\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\\ y^{(n-1)}(x_0)=y_{n\cdot 10}\end{cases} \tag{6}$$

Подставим (5) в (6):

$$\begin{cases}y(x_0)=C_1y_1(x_0)+\ldots+C_ny_n(x_0)=y_0\\ y'(x_0)=C_1y_1'(x_0)+\ldots+C_ny_n'(x_0)=y_{10}\\ y''(x_0)=C_1y_1''(x_0)+\ldots+C_ny_n''(x_0)=y_{20}\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ y^{(n-1)}(x_0)=C_1y_1^{(n-1)}(x_0)+\ldots+C_ny_n^{(n-1)}(x_0)=y_{n\cdot 10}\end{cases} \qquad \text{— СЛАУ}$$

СЛАУ относительно $C_1, \ldots, C_n$. Определитель этой системы — это определитель Вронского.

$$W(x_0)=\begin{vmatrix}y_1(x_0) & y_2(x_0) & \cdots & y_n(x_0)\\ y_1'(x_0) & y_2'(x_0) & \cdots & y_n'(x_0)\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ y_1^{(n-1)}(x_0) & y_2^{(n-1)}(x) & \cdots & y_n^{(n-1)}(x_0)\end{vmatrix}$$

так как $y_1, \ldots, y_n$ ФСР $\Rightarrow$ $y_1, \ldots, y_n$ линейно независимы $\Rightarrow$ $W(x_0)\neq 0$ $\Rightarrow$ ранг расширенной матрицы СЛАУ совпадает с рангом основной матрицы $\Rightarrow$ число неизвестных совпадает с числом уравнений $\Rightarrow$ СЛАУ имеет единственное решение:

$$C_1^0, \ldots, C_n^0$$

В силу теоремы *о существовании и единственности решения задачи Коши* (**с.65, Т.1**):

$$y=C_1^0y_1+\ldots+C_n^0y_n \text{ — единственное решение ЗК (2), (6)}$$

То есть получилось из (5) выделить частное решение, удовлетворяющее начальному условию (6) $\Rightarrow$ по определению общего решения (**с.65, опр.4**) (5) — общее решение ЛОДУ (2). ■

Теорема 2 *(О размерности пространства решений ЛОДУ n-го порядка)*.
Максимальное число линейно независимых решений ЛОДУ n-го порядка (2) с непрерывными коэффициентами $p_1(x), \ldots, p_n(x)$ на промежутке I равно n.

Теорема 3 *(О существовании ФСР ЛОДУ n-го порядка)*.
Любое ЛОДУ n-го порядка (2) с непрерывными на промежутке I коэффициентами $p_1(x), \ldots, p_n(x)$ имеет ФСР, то есть системы из n линейно независимых функций.

Доказательство.
Рассмотрим ЛОДУ n-го порядка

$$y^{(n)} + p_1(x)y^{(n-1)} + \ldots + p_{n-1}(x)y' + p_n(x)y = 0$$

$p_1(x), \ldots, p_n(x)$ — непрерывны на I.
Рассмотрим произвольный числовой определитель, отличный от нуля:

$$\begin{vmatrix} \gamma_{11} & \gamma_{12} & \cdots & \gamma_{1n} \\ \gamma_{21} & \gamma_{22} & \cdots & \gamma_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \gamma_{n1} & \gamma_{n2} & \cdots & \gamma_{nn} \end{vmatrix} \neq 0 \qquad \gamma_{ij} \in \mathbb{R},\ (ij) = \overline{1,n}$$

Возьмём $\forall x_0 \in I$ и сформулируем для ЛОДУ n-го порядка задачи Коши, причём начальное условие в точке x_0 для i-ой ЗК возьмём из i-го столбца определителя.

$\boxed{\text{1 ЗК}}$:

$$y^{(n)} + p_1(x)y^{(n-1)} + \ldots + p_{n-1}(x)y' + p_n(x)y = 0 \text{ — ДУ}$$

$$\begin{cases} y(x_0) = \gamma_{11} \\ y'(x_0) = \gamma_{21} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ y^{(n-1)}(x_0) = \gamma_{n1} \end{cases} \text{— начальное условие}$$

По теореме *о существовании и единственности решения* (**с.65, Т.1**) 1-ая задача Коши имеет единственное решение $y_1(x)$.

……………………………………………

$\boxed{\text{n ЗК}}$:

$$y^{(n)} + p_1(x)y^{(n-1)} + \ldots + p_{n-1}(x)y' + p_n(x)y = 0 \text{ — ДУ}$$

$$\begin{cases} y(x_0) = \gamma_{1n} \\ y'(x_0) = \gamma_{2n} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ y^{(n-1)}(x_0) = \gamma_{nn} \end{cases} \text{— начальное условие}$$

По теореме *о существовании и единственности решения* n-ая задача Коши имеет единственное решение $y_n(x)$.

Рассмотрим функции:

$$\begin{aligned} &y_1 \text{ — решение 1-ой ЗК} \\ &y_2 \text{ — решение 2-ой ЗК} \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ &y_n \text{ — решение n-ой ЗК} \end{aligned}$$

Определитель Вронского функций $y_1, \ \ldots, \ y_n$:

$$\begin{vmatrix} \gamma_1(x_0) & \gamma_2(x_0) & \cdots & \gamma_n(x_0) \\ \gamma_2'(x_0) & \gamma_2'(x_0) & \cdots & \gamma_n'(x_0) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \gamma_1^{(n-1)}(x_0) & \gamma_2^{(n-1)}(x_0) & \cdots & \gamma_n^{(n-1)}(x_0) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \gamma_{11} & \gamma_{12} & \cdots & \gamma_{1n} \\ \gamma_{21} & \gamma_{22} & \cdots & \gamma_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \gamma_{n1} & \gamma_{n2} & \cdots & \gamma_{nn} \end{vmatrix} \neq 0$$

По утверждению 1 (**с.73**): $\exists\, x_0 \in I \colon W(x_0) \neq 0 \ \Rightarrow \ y_1, \ldots, y_n$ — линейно независимы $\Rightarrow y_1, \ldots, y_n$ образуют ФСР. ■

10.1 Формула Остроградского-Лиувилля для ЛОДУ 2-го порядка

Рассмотрим ЛОДУ 2-го порядка

$$y'' + p_1(x)y' + p_2(x)y = 0 \tag{1}$$

Пусть y_1 и y_2 — два частных решения ЛОДУ (1). Для y_1 и y_2 верны равенства:

$$\begin{cases} y_1'' + p_1(x)y_1' + p_2(x)y_1 = 0 \\ y_2'' + p_1(x)y_2' + p_2(x)y_2 = 0 \end{cases} \left|\begin{array}{l} \cdot\,(-y_2) \\ \cdot\, y_1 \end{array}\right. \text{«+»}$$

$$y_1y_2'' - y_2y_1'' + p_1(x)\left(y_1y_2' - y_2y_1'\right) + p_2(x)(\cancel{y_1y_2 - y_1y_2}) = 0 \tag{2}$$

Введём обозначение:

$$W(x) = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix} = y_1y_2' - y_1'y_2$$

$$\Big(W(x)\Big)' = \Big(y_1y_2' - y_2y_1'\Big)' = \cancel{y_1'y_2'} + y_1y_2'' - y_1''y_2 - \cancel{y_1'y_2'} = y_1y_2'' - y_1''y_2$$

(2) примет вид:

$$\begin{aligned} W' + p_1(x)\cdot W &= 0 \text{ ДУ с разделяющимися переменными} \\ W' &= -p_1(x)\cdot W \\ \frac{dW}{dx} &= -p_1(x)\cdot W \quad \Big| \; : W \neq 0 \quad \Big| \cdot dx \\ \frac{dW}{W} &= -p_1(x)\,dx \\ \ln|W| &= -\int p_1(x)\,dx + C, \ \forall C \text{ — } const \\ e^{\ln|W|} &= e^{-\int p_1(x)dx} \cdot e^C \\ |W| &= e^{-\int p_1(x)dx} \cdot C_1, \ \forall C_1 = e^C > 0 \\ W &= C_2 \cdot e^{-\int p_1(x)dx}, \ \forall C_2 = \pm C_1 \neq 0 \end{aligned}$$

$W = 0$ — особое решение

$$\boxed{W = C_3 \cdot e^{-\int p_1(x)dx},\ \forall C_3 - const}$$

Формула Остроградского-Лиувилля

> **Замечание.** Формула Остроградского-Лиувилля для ЛОДУ n-го порядка имеет тот же вид, что и для ЛОДУ 2-го порядка, где $p_1(x)$ — коэффициент при $(n-1)$-ой производной при условии, что коэффициент при n-ой производной равен 1.

10.1.1 Нахождение общего решения ЛОДУ 2-го порядка по одному известному частному решению

Пусть дано ЛОДУ 2-го порядка

$$y'' + p_1(x)y' + p_2(x)y = 0 \tag{1}$$

y_1 — частное решение ЛОДУ (1) дано по условию.
y_2 — ? — второе частное решение ЛОДУ (1) линейно независимо с y_1

$$W(x) = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix} = y_1y_2' - y_2y_1' \neq 0$$

Рассмотрим:

$$\left(\frac{y_2}{y_1}\right)' = \frac{y_1y_2' - y_2y_1'}{y_1^2} = \frac{W(x)}{y_1^2} \overset{\text{ф. О-Л}}{=\!=\!=} \frac{1}{y_1^2} \cdot C_3 \cdot e^{-\int p_1(x)dx}$$
$$\left(\frac{y_2}{y_1}\right)' = \frac{1}{y_1^2} \cdot C_3 \cdot e^{-\int p_1(x)dx}$$

Интегрируем:

$$\frac{y_2}{y_1} = C_3 \int \frac{1}{y_1^2} \cdot e^{-\int p_1(x)dx}\, dx + C_4$$
$$y_2 = y_1 \cdot \left(C_3 \int \frac{1}{y_1^2} \cdot e^{-\int p_1(x)dx}\, dx + C_4\right)$$

y_2 — частное решение $\qquad C_4 = 0 \qquad C_3 = 1$
Главное $C_3 \neq 0$, так как иначе y_1 и y_2 линейно зависимы.

$$y_2 = y_1 \int \frac{1}{y_1^2} \cdot e^{-\int p_1(x)dx}\, dx$$

По теореме *о структуре общего решения ЛОДУ* (**с.75, Т.1**):

$$y_{\text{оо}} = C_1y_1 + C_2y_2$$
$$y_{\text{оо}} = C_1y_1 + C_2y_1 \int \frac{1}{y_1^2} \cdot e^{-\int p_1(x)dx}\, dx$$

> **Пример.** $xy'' + y' - \frac{1}{x} \cdot y = 0 \qquad y_1 = \frac{1}{x}$

> $y'' + \frac{1}{x} \cdot y' - \frac{1}{x^2} \cdot y = 0 \qquad p_1(x) = \frac{1}{x}$
>
> $$y_2 = \frac{1}{x} \cdot \int x^2 e^{-\int \frac{dx}{x}}\, dx = \frac{1}{x} \int x^2 e^{-\ln|x|}\, dx = \frac{1}{x} \int x^2 \cdot \frac{1}{|x|}\, dx = \frac{1}{x} \int |x|^{\cancel{2}} \cdot \frac{1}{\cancel{|x|}}\, dx =$$
> $$= \frac{1}{x} \int |x|\, dx = \frac{1}{x} \int x\, dx = \frac{1}{x} \cdot \frac{x^2}{2} = \frac{x}{2}$$
> $$y_{oo} = C_1 y_1 + C_2 y_2 = C_1 \cdot \frac{1}{x} + C_2 \cdot \frac{x}{2} = C_1 \cdot \frac{1}{x} + C_3 \cdot x \qquad \forall C_1,\, C_3 - const$$

10.2 ЛОДУ с постоянными коэффициентами

Ранее рассматривали ЛОДУ n-го порядка с переменными коэффициентами

$$y^{(n)} + p_1(x) y^{(n-1)} + \ldots + p_{n-1}(x) y' + p_n(x) y = 0$$

$p_1(x), \ldots, p_n(x)$ — функции, определённые на I
Далее будем рассматривать уравнения вида:

$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \ldots + a_{n-1} y' + a_n y = 0 \tag{2.1}$$

где $C_1, \ldots, C_n$ – постоянные числа.
Решение ЛОДУ с постоянными коэффициентами будем искать в виде $\boxed{y = e^{kx}}$ где $k \in \mathbb{R}$. Почему?

1. Функция $y = e^{kx}$ практически не меняет свой вид после дифференцирования.
2. $y = e^{kx} \neq 0, \ \forall x \in I$.
3. Не происходит потери решений, либо нахождения лишних решений.

Подставим $y = e^{kx}$ в (2.1):

$$\begin{aligned} y' &= k e^{kx} \\ y'' &= k^2 e^{kx} \\ &\cdots\cdots\cdots \\ y^{(n)} &= k^n e^{kx} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} k^n e^{kx} + a_1 k^{n-1} e^{kx} + \ldots + a_{n-1} k e^{kx} + a_n e^{kx} &= 0 \\ e^{kx} \cdot \left(k^n + a_1 k^{n-1} + \ldots + a_{n-1} k + a_n\right) &= 0 \end{aligned} \qquad e^{kx} \neq 0, \ \forall x \in I$$

$$\boxed{k^n + a_1 k^{n-1} + \ldots + a_{n-1} k + a_n = 0} \tag{2.2}$$

> **Определение 1.** Уравнение (2.2) называется характеристическим уравнением. **Характеристическое уравнение** — это алгебраическое уравнение/полином/многочлен, полученный из ДУ (2.1) путём замены n-ой производной неизвестной функции y на n-ую степень величины k, а сама функция y заменена на единицу.

Уравнение (2.2) имеет n корней $k_1, \ldots, k_n$.
ФСР ЛОДУ (2.1):

$$\begin{cases} y_1 = e^{k_1 x} \\ y_2 = e^{k_2 x} \\ \cdots\cdots\cdots \\ y_n = e^{k_n x} \end{cases}$$

$$y_{\text{оо}} = C_1 y_1 + \ldots + C_n y_n = C_1 e^{k_1 x} + \ldots + C_n e^{k_n x}$$

10.3 Методы построения общего решения ЛОДУ 2-го порядка по корням характеристического уравнения

$$\boxed{y'' + a_1 y' + a_2 y = 0} \quad a_1, a_2 - const \qquad \text{ЛОДУ} \tag{1}$$

$$\boxed{k^2 + a_1 k + a_2 = 0} \quad \text{характеристическое уравнение}$$

$$D = a_1^2 - 4a_2$$

$\boxed{\text{1 случай}}$ $D > 0 \Rightarrow$ характеристическое уравнение имеет два действительных различных корня.

$$k_1 \neq k_2 \in \mathbb{R}$$

ФСР ЛОДУ (1):

$$\begin{cases} y_1 = e^{k_1 x} \\ y_2 = e^{k_2 x} \end{cases}$$

Покажем, что y_1 и y_2 линейно независимы, то есть образуют ФСР ЛОДУ (1):

$$W(X) = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} e^{k_1 x} & e^{k_2 x} \\ k_1 e^{k_1 x} & k_2 e^{k_2 x} \end{vmatrix} = e^{(k_1 + k_2)x}(k_2 - k_1)$$

$$\left.\begin{array}{r} e^{(k_1+k_2)x} \neq 0, \ \forall x \in I \\ k_2 - k_1 \neq 0, \ \text{т.к. } k_2 \neq k_1 \end{array}\right\} \Rightarrow W(x) \neq 0 \ \Rightarrow \ \text{функции } y_1 = e^{k_1 x}, \ y_2 = e^{k_2 x} \text{ лин. зависимы } \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \ \text{ФСР ЛОДУ (1)}$$

По теореме *о структуре общего решения ЛОДУ* (**с.75, Т.1**):

$$y_{\text{оо}} = C_1 y_1 + C_2 y_2 = C_1 e^{k_1 x} + C_2 e^{k_2 x}$$

$\boxed{\text{2 случай}}$ $D = 0 \;\Rightarrow$ характеристическое уравнение имеет два действительных равных между собой корня / один корень кратности два.

$$\begin{aligned} k_1 = k_2 = k \in \mathbb{R} \\ y_1 = e^{kx} \end{aligned} \quad k = -\frac{a_1}{2}$$

Найдём y_2 — частное решение ЛОДУ (1) по известному частному решению y_1, причём y_1 и y_2 линейно независимы:

$$y_2 = y_1 \int \frac{1}{y_1^2} e^{-\int p_1(x_0 dx)}\, dx = \left| \begin{aligned} p_1(x) = a_1 - const \\ y_1 = e^{kx},\ k \in \mathbb{R} \end{aligned} \right| e^{kx} \int \frac{1}{e^{2kx}} \cdot e^{-\int a_1 dx} =$$
$$= e^{-\frac{a_1}{2}x} \int \frac{1}{\cancel{e^{-a_1 x}}} \cdot \cancel{e^{-a_1 x}} dx = e^{-\frac{a_1}{2}x} \int dx = e^{-\frac{a_1}{2}x} x$$

$$\left. \begin{aligned} y_1 = e^{-\frac{a_1}{2}x} \\ y_2 = xe^{-\frac{a_1}{2}x} \end{aligned} \right\} \text{два частных решения ЛОДУ (1)}$$

Покажем, что y_1 и y_2 линейно независимы:

$$W(x) = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} e^{-\frac{a_1}{2}x} & xe^{-\frac{a}{2}x} \\ -\frac{a_1}{2} e^{-\frac{a_1}{2}x} & e^{-\frac{a_1}{2}x} - \frac{a_1}{2} xe^{-\frac{a_1}{2}x} \end{vmatrix} = e^{-a_1 x} - \cancel{\frac{a_1}{2} xe^{-a_1 x}} + \cancel{\frac{a_1}{2} xe^{-a_1 x}} =$$
$$= e^{-a_1 x} \neq 0,\ \forall x \in I \;\Rightarrow\; y_1, y_2 \text{ лн. з. } \Rightarrow \text{ образуют ФСР}$$

ФСР ЛОДУ (1):

$$\begin{cases} y_1 = e^{-\frac{a_1}{2}x} \\ y_2 = xe^{-\frac{a_1}{2}x} \end{cases}$$

По теореме *о структуре общего решения ЛОДУ* (**с.75, Т.1**):

$$y_{\text{оо}} = C_1 y_1 + C_2 y_2 = C_1 e^{-\frac{a_1}{2}x} + C_2 x e^{-\frac{a_1}{2}x}$$

$\boxed{\text{3 случай}}$ $D < 0 \;\Rightarrow$ характеристическое уравнение имеет комплексные корни.

$$k_{1,2} = \alpha \pm \beta \cdot i \qquad i \text{ — мнимая единица, } \sqrt{-1} = i$$

α — действительная часть $\qquad \beta$ — мнимая часть
Формула Эйлера:

$$\begin{cases} e^{i\varphi} = \cos\varphi + i \sin\varphi \\ e^{-i\varphi} = \cos\varphi - i \sin\varphi \end{cases}$$

По корням характеристического уравнения находим частные решения ЛОДУ (1).
$k_1 = \alpha + \beta i$:

$$y_1 = e^{k_1 x} = e^{(\alpha + \beta i)x} = e^{\alpha x} \cdot e^{\beta i x} = \boxed{e^{\alpha x} (\cos\beta x + i \cdot \sin\beta x)}$$

$k_2 = \alpha - \beta i$:

$$y_2 = e^{k_2 x} = e^{(\alpha - \beta i)x} = e^{\alpha x} \cdot e^{-\beta i x} = \boxed{e^{\alpha x} (\cos\beta x - i \cdot \sin\beta x)}$$

Найдём действительные решения ЛОДУ (1). Составим линейные комбинации:

$$\widetilde{y_1} = \frac{y_1 + y_2}{2} = e^{\alpha x}\cos\beta x$$
$$\widetilde{y_2} = \frac{y_1 - y_2}{2i} = e^{\alpha x}\sin\beta x$$

Из свойств частных решений ЛОДУ следует, что $\widetilde{y_1}$ и $\widetilde{y_2}$ — тоже решения ЛОДУ (как линейная комбинация).
Покажем, что $\widetilde{y_1}$ и $\widetilde{y_2}$ линейно независимы:

$$W(x) = \begin{vmatrix} \widetilde{y_1} & \widetilde{y_2} \\ \widetilde{y_1}' & \widetilde{y_2}' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} e^{\alpha x}\cos\beta x & e^{\alpha x}\sin\beta x \\ \alpha e^{\alpha x}\cos\beta x - \beta e^{\alpha x}\sin\beta x & \alpha e^{\alpha x}\sin\beta x + \beta e^{\alpha x}\cos\beta x \end{vmatrix} =$$
$$= \cancel{\alpha e^{2\alpha x}\cos\beta x\sin\beta x} + \beta e^{2\alpha x}\cos^2\beta x - \cancel{\alpha e^{2\alpha x}\cos\beta x\sin\beta x} + \beta e^{2\alpha x}\sin^2\beta x =$$
$$= e^{2\alpha x}\beta\cdot 1 \neq 0 \qquad \text{т.к } e^{2\alpha x}\neq 0\ \forall x\in I$$

$\beta \neq 0$, так как если $\beta = 0$, то $k_1 = k_2 = \alpha$ — действительные корни

$$\Rightarrow \left.\begin{aligned} \widetilde{y_1} &= e^{\alpha x}\cos\beta x \\ \widetilde{y_2} &= e^{\alpha x}\sin\beta x \end{aligned}\right\} \text{ линейно независимы } \Rightarrow \text{ ФСР}$$

По теореме *о структуре решений ЛОДУ* (**с.75, Т.1**):

$$y_{\text{оо}} = C_1 y_1 + C_2 y_2 = e^{\alpha x}\left(C_1\cos\beta x + C_2\sin\beta x\right)$$

10.4 Построение общего решения ЛОДУ n-го порядка по корням характеристического уравнения

$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \ldots + a_{n-1}y' + a_n y = 0 \quad \text{ЛОДУ}$$
$$k^n + a_1 k^{n-1} + \ldots + a_{n-1}k + a_n = 0 \quad \text{характеристическое уравнение}$$
$$a_1,\ \ldots,\ a_n \text{ — } const$$

Характеристическое уравнение имеет n корней.

1. Все n корней действительные и они различны.

$$k_1 \neq k_2 \neq \ldots \neq k_n$$
$$\text{ФСР: } \left\{e^{k_1 x},\ e^{k_2 x},\ \ldots,\ e^{k_n x}\right\}$$
$$y_{\text{оо}} = C_1 e^{k_1 x} + \ldots + C_n e^{k_n x}, \quad C_1,\ldots,C_n \text{ — } const$$

2. Характеристическое уравнение имеет один корень кратности n.

$$k_1 = k_2 = \ldots = k_n = k$$
$$\text{ФСР: } \left\{\begin{array}{l} y_1 = e^{kx} \\ y_2 = xe^{kx} \\ y_3 = x^2 e^{kx} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ y_n = x^{n-1}e^{kx} \end{array}\right\}$$
$$y_{\text{оо}} = e^{kx}\left(C_1 + C_2 x + \ldots + C_n x^{n-1}\right)$$

3. Характеристическое уравнение имеет все комплексные корни.

$$n = 2m,\ m \in \mathbb{N}$$

В этом случае ФСР ЛОДУ (1) состоит из $2m$ линейно зависимых решений или m пар решений.

$$\begin{tikzcd}
 & n = 2m \arrow[dl] \arrow[dr] & \\
k_1 = \alpha + \beta i \arrow[d] & & k_2 = \alpha - \beta i \arrow[d] \\
e^{\alpha x}\cos\beta x & & e^{\alpha x}\sin\beta x \\
x e^{\alpha x}\cos\beta x & & x e^{\alpha x}\sin\beta x \\
x^2 e^{\alpha x}\cos\beta x & & x^2 e^{\alpha x}\sin\beta x \\
\ldots\ldots\ldots\ldots & & \ldots\ldots\ldots\ldots \\
x^{m-1} e^{\alpha x}\cos\beta x & & x^{m-1} e^{\alpha x}\sin\beta x
\end{tikzcd}$$

$$y_{\text{оо}} = e^{\alpha x}\cos\beta x\left(C_1 + C_2 x + \ldots + C_m x^{m-1}\right) + e^{\alpha x}\sin\beta x\left(k_1 + k_2 x + \ldots + k_m x^{m-1}\right)$$

$$\forall \left.\begin{matrix} C_1,\ \ldots,\ C_m \\ k_1,\ \ldots,\ k_m \end{matrix}\right\} - const$$

11 Линейные неоднородные дифференциальные уравнения

$$y^{(n)} + p_1(x)y^{(n-1)} + \ldots + p_{n-1}(x)y' + p_n(x)y = f(x) \quad \text{ЛНДУ} \tag{1}$$

$p_1(x),\ \ldots,\ p_n(x),\ f(x)$ — функции на I

$$y^{(n)} + p_1(x)y^{(n-1)} + \ldots + p_{n-1}(x)y' + p_n(x)y = 0 \qquad \text{ЛОДУ} \tag{2}$$

$$\begin{cases} y(x_0) = y_0 \\ y'(x_0) = y_{10} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ y^{(n-1)}(x_0) = y_{n\cdot 10} \end{cases} \quad \text{начальное условие} \tag{3}$$

Теорема 1 *(О структуре общего решения ЛНДУ).*
Общее решение ЛНДУ (1) с непрерывными на промежутке I функциями $p_1(x),\ \ldots,\ p_n(x),\ f(x)$ равно сумме общего решения соответствующего ЛОДУ (2) и некоторого частного решения ЛНДУ (1).

$$\boxed{y_{\text{он}} = y_{\text{оо}} + y_{\text{чн}}} \tag{4}$$

- «оо» — общее решение однородного уравнения
- «чн» — частное решение неоднородного уравнения

Доказательство.
Сначала покажем, что (4) решение ЛНДУ (1), но не общее. Подставим (4) в (1):

$$\big(y_{\text{оо}} + y_{\text{чн}}\big)^{(n)} + p_1(x)\big(y_{\text{оо}} + y_{\text{чн}}\big)^{(n-1)} + \ldots + p_{n-1}(x)\big(y_{\text{оо}} + y_{\text{чн}}\big)' + p_n(x)\big(y_{\text{оо}} + y_{\text{чн}}\big) = f$$

Вычислим производные:

$$\begin{aligned} y_{\text{оо}}^{(n)} + y_{\text{чн}}^{(n)} + p_1(x)y_{\text{оо}}^{(n-1)} + p_1(x)y_{\text{чн}}^{(n-1)} + \ldots + p_{n-1}(x)y'_{\text{оо}} + p_{n-1}(x)y'_{\text{чн}} + \\ + p_n(x)y_{\text{оо}} + p_n(x)y_{\text{чн}} = f \end{aligned}$$

Группируем $y_{\text{оо}},\ y_{\text{чн}}$:

$$\begin{aligned} &\overbrace{y_{\text{оо}}^{(n)} + p_1(x)y_{\text{оо}}^{(n-1)} + \ldots + p_{n-1}(x)y'_{\text{оо}} + p_n(x)y_{\text{оо}}}^{0} + \\ + &\underbrace{y_{\text{чн}}^{(n)} + p_1(x)y_{\text{чн}}^{(n-1)} + \ldots + p_{n-1}(x)y'_{\text{чн}} + p_n(x)y_{\text{чн}}}_{f} = f \end{aligned}$$

Так как $y_{\text{оо}}$ — общее решение ЛОДУ (2), $y_{\text{чн}}$ — частное решение ЛНДУ (1):

$$0 + f = f \ \Rightarrow\ f = f \ \Rightarrow\ (4) \text{ — решение ЛНДУ (1)}$$

По теореме *о существовании и единственности решения задачи Коши* (**с.65, Т.1**) следует, что ЗК (1), (3) имеет единственное решение.

Покажем, что (4) — общее решение. (4) перепишется в виде:

$$y_{\text{он}} = C_1 y_1 + \dots + C_n y_n + y_{\text{чн}} \tag{4.1}$$

$y_1, \dots, y_n$ — ФСР ЛОДУ (2) $\qquad C_1, \dots, C_n$ — *const*

Так как функции $p_1(x), \dots, p_n(x), f(x)$ непрерывны на I, то по теореме *о существовании и единственности решения задачи Коши* $\Rightarrow$ $\exists$ единственное решение задачи Коши (1), (3).

Остаётся показать, что (4.1) и его производная удовлетворяют начальному условию (3), то есть из начального условия (3) единственным образом можно выделить константы $C_1^0, \dots C_n^0$, то есть можно выделить частное решение.
Для этого (4.1) дифференцируем $(n-1)$ раз и подставляем в (3):

$$\begin{cases} y_{\text{он}}(x_0) = C_1 y_1(x_0) + \dots + C_n y_n(x_0) + y_{\text{чн}}(x_0) = y_0 \\ y'_{\text{он}}(x_0) = C_1 y'_1(x_0) + \dots + C_n y'_n(x_0) + y'_{\text{чн}}(x_0) = y_{10} \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ y_{\text{он}}^{(n-1)}(x_0) = C_1 y_1^{(n-1)}(x_0) + \dots + C_n y_n^{(n-1)}(x_0) + y_{\text{чн}}^{(n-1)}(x_0) = y_{n\cdot 10} \end{cases}$$

$$\begin{cases} C_1 y_1(x_0) + \dots + C_n y_n(x_0) = y_0 - y_{\text{чн}}(x_0) \\ C_1 y'_1(x_0) + \dots + C_n y'_n(x_0) = y_{10} - y'_{\text{чн}}(x_0) \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ C_1 y_1^{(n-1)}(x_0) + \dots + C_n y_n^{(n-1)}(x_0) = y_{n\cdot 10} - y_{\text{чн}}^{(n-1)}(x_0) \end{cases} \tag{5}$$

(5) — это СЛАУ относительно $C_1, \dots, C_n$.

Определитель СЛАУ (5) — это определитель Вронского:

$$W(x_0) = \begin{vmatrix} y_1(x_0) & y_2(x_0) & \cdots & y_n(x_0) \\ y'_1(x_0) & y'_2(x_0) & \cdots & y'_n(x_0) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ y_1^{(n-1)}(x_0) & y_2^{(n-1)}(x_0) & \cdots & y_n^{(n-1)}(x_0) \end{vmatrix} \neq 0 \text{ т.к. } y_1, \dots, y_n \text{ ФСР ЛОДУ (2)}$$

Так как $W(x_0) \neq 0$, то ранг расширенной матрицы равен рангу основной матрицы (число уравнений совпадает с числом неизвестных) $\Rightarrow$ СЛАУ (5) имеет единственное решение $C_1^0, \dots, C_n^0$.

Тогда функция $y = C_1^0 y_1 + \ldots + C_n^0 y_n + y_{\text{чн}}$ — является частным решением ЗК (1), (3), удовлетворяющим начальному условию (3) $\Rightarrow$ из решения (4.1) выделим частное решение $y = C_1^0 y_1 + \ldots + C_n^0 y_n + y_{\text{чн}}$ $\Rightarrow$ по определению общего решения (**с.65, Т.4**) (4.1) или (4) — общее решение ЛНДУ (1). ■

Теорема 2 *(О суперпозиции (наложении) решений ЛНДУ n-го порядка)***.**
Если

$$\begin{gathered} y_1 \text{ — решение ЛНДУ (1) с правой частью } f_1, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ y_n \text{ — решение ЛНДУ (1) с правой частью } f_n \end{gathered}$$

то линейная комбинация

$$y = C_1 y_1 + \ldots + C_n y_n$$

является решением ЛНДУ (1) с правой частью

$$f = C_1 f_1 + \ldots + C_n f_n$$

Доказательство.
Так как

$$\begin{gathered} y_1 \text{ — решение ЛНДУ (1) с правой частью } f_1, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ y_n \text{ — решение ЛНДУ (1) с правой частью } f_n \end{gathered}$$

то верны равенства

$$\begin{cases} y_1^{(n)} + p_1(x) y_1^{(n-1)} + \ldots + p_{n-1}(x) y_1' + p_n(x) y_1 = f_1 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ y_n^{(n)} + p_1(x) y_n^{(n-1)} + \ldots + p_{n-1}(x) y_n' + p_n(x) y_n = f_n \end{cases} \tag{$*$}$$

Рассмотрим

$$y = C_1 y_1 + \ldots + C_n y_n \tag{$\vee$}$$

Подставим ($\vee$) в левую часть (1):

$$\begin{aligned} \big(C_1 y_1 + \ldots + C_n y_n\big)^{(n)} + p_1(x)\big(C_1 y_1 + \ldots + C_n y_n\big)^{(n-1)} + \ldots + \\ + p_{n-1}(x)\big(C_1 y_1 + \ldots + C_n y_n\big)' + p_n(x)\big(C_1 y_1 + \ldots + C_n y_n\big) \end{aligned}$$

Вычислим производные:

$$\begin{aligned} C_1 y_1^{(n)} + \ldots + C_n y_n^{(n)} + p_1(x) C_1 y_1^{(n-1)} + \ldots + p_1(x) C_n y_n^{(n-1)} + \ldots + \\ + p_{n-1}(x) C_1 y_1' + \ldots + p_{n-1}(x) C_n y_n' + p_n(x) C_1 y_1 + \ldots + p_n(x) C_n y_n \end{aligned}$$

Группируем y_1/y_n:

$$\begin{aligned} C_1 \overbrace{\big(y_1^{(n)} + p_1(x) y_1^{(n-1)} + \ldots + p_{n-1}(x) y_1' + p_n(x) y_1\big)}^{f_1} + \ldots + \\ + C_n \underbrace{\big(y_n^{(n)} + p_1(x) y_n^{(n-1)} + \ldots + p_{n-1}(x) y_n' + p_n(x) y_n\big)}_{f_n} \overset{(*)}{=\!=} C_1 f_1 + \ldots + C_n f_n \end{aligned}$$

■

11.1 Метод Лагранжа или метод вариации произвольных постоянных для нахождения общего решения ЛНДУ 2-го порядка. Система варьируемых переменных

Рассмотрим ЛНДУ 2-го порядка

$$y'' + p_1(x)y' + p_2(x)y = f(x) \tag{1}$$

$$y_1'' + p_1(x)y' + p_2(x)y = 0 \qquad \text{ЛОДУ} \tag{2}$$

$p_1(x)$, …, $p_n(x)$ — функции.
Пусть y_1 и y_2 — это ФСР ЛОДУ (2). Тогда по теореме *о структуре общего решения ЛОДУ* (**с.75, Т.1**):

$$y_{\text{оо}} = \underbrace{C_1y_1 + C_2y_2}_{\text{ФСР ЛОДУ}} \qquad C_1,\, C_2 - \forall const$$

<u>Метод Лагранжа</u>: предполагаемый вид решения ЛНДУ (1):

$$y_{\text{он}} = C_1(x)y_1 + C_2(x)y_2 \tag{3}$$

$C_1(x)$, $C_2(x)$ — некоторые функции.
Вычислим:

$$y'_{\text{он}} = C_1'y_1 + C_1y_1' + C_2'y_2 + C_2y_2' = \underbrace{C_1'y_1 + C_2'y_2}_{0} + C_1y_1' + C_2y_2'$$

Первое дополнительное условие Лагранжа:

$$\boxed{C_1'y_1 + C_2'y_2 = 0}$$

$$\begin{aligned} y'_{\text{он}} &= C_1y_1' + C_2y_2' \\ y''_{\text{он}} &= C_1'y_1' + C_1y_1'' + C_2'y_2' + C_2y_2'' \end{aligned}$$

$y_{\text{он}}$, $y'_{\text{он}}$, $y''_{\text{он}}$ в (1):

$$C_1'y_1' + C_1y_1'' + C_2'y_2' + C_2y_2'' + p_1(x)\cdot\big(C_1y_1' + C_2y_2'\big) + p_2(x)\big(C_1y_1 + C_2y_2\big) = f$$

Группируем:

$$C_1'y_1' + C_2'y_2' + C_1\underbrace{\Big(y_1'' + p_1(x)y_1' + p_2(x)y_1\Big)}_{0} + C_2\underbrace{\Big(y_2'' + p_1(x)y_2' + p_2(x)y_2\Big)}_{0} = f$$

Так как y_1, y_2 — решения ЛОДУ (2), то
Второе условие Лагранжа:

$$\boxed{C_1'y_1' + C_2'y_2' = f}$$

Предполагаемое решение (3) будет являться решением ЛНДУ (1), если функции $C_1(x)$ и $C_2(x)$ удовлетворяют условиям:

$$\begin{cases} C_1'y_1 + C_2y_2 = 0 \\ C_1'y_1' + C_2'y_2' = f \end{cases} \text{— система варьируемых переменных}$$

Определяем из системы варьируемых переменных $C_1'(x)$ и $C_2'(x)$.

$$C_1'(x) = \varphi(x) \qquad C_2'(x) = \Psi(x)$$

Интегрируем:

$$C_1(x) = \int \varphi(x)\,dx + k_1, \quad \forall k_1 - const$$
$$C_2(x) = \int \Psi(x)\,dx + k_2, \quad \forall k_2 - const$$

Подставляем $C_1(x),\ C_2(x)$ в (3):

$$y_{\text{он}} = C_1(x)y_1 + C_2(x)y_2 = \left(\int \varphi(x)\,dx + k_1\right)y_1 + \left(\int \Psi(x)\,dx + k_2\right)y_2 =$$
$$= \underbrace{k_1y_1 + k_2y_2}_{y_{\text{оо}}} + \underbrace{y_1\int \varphi(x)\,dx + y_2\int \Psi(x)\,dx}_{y_{\text{чн}}}$$

Система варьируемых переменных имеет единственное решение, так как определитель — это определитель Вронского.

$$W(x) = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix} \neq 0 \quad \text{т.к. } y_1 \text{ и } y_2 \text{ ФСР ЛОДУ}$$

Пример. $y'' + y = \dfrac{1}{\cos x}$ ЛНДУ $\qquad y_{\text{он}}$ — ?

$y'' + y = \boxed{0}$ — ЛОДУ

$k^2 + 1 = 0$ — характеристическое уравнение $\quad k_{1,2} = 0 \pm i$

ФСР ЛОДУ: $\{e^{0x}\cos x,\ e^{0x}\sin x\}$

$$y_{\text{оо}} = C_1\cos x + C_2\sin x, \quad \forall C_1, C_2 - const$$
$$y_{\text{он}} = C_1(x)\cos x + C_2(x)\sin x, \quad \forall C_1(x), C_2(x) - \text{функции}$$

Система варьируемых переменных:

$$\begin{cases} C_1'\cos x + C_2'\sin x = 0 \\ -C_1'\sin x + C_2'\cos x = \dfrac{1}{\cos x} \end{cases}$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} \cos x & \sin x \\ -\sin x & \cos x \end{vmatrix} = 1 \qquad \Delta_1 = \begin{vmatrix} 0 & \sin x \\ \frac{1}{\cos x} & \cos x \end{vmatrix} = -\operatorname{tg} x \qquad \Delta_2 = \begin{vmatrix} \cos x & 0 \\ -\sin x & \frac{1}{\cos x} \end{vmatrix} = 1$$

$$C_1'(x) = \frac{\Delta_1}{\Delta} = -\operatorname{tg} x \qquad C_2'(x) = \frac{\Delta_2}{\Delta} = 1$$

Интегрируем:

$$C_1(x) = -\int \frac{\sin x}{\cos x}\,dx = \int \frac{d(\cos x)}{\cos x} = \ln|\cos x| + k_1, \forall k_1 - const$$
$$C_2(x) = \int dx = x + k_2,\ \forall k_2 - const$$

$C_1(x)$ и $C_2(x)$ подставляем в $y_{\text{он}}$

$$y_{\text{он}} = C_1(x)y_1 + C_2(x)y_2 = \big(\ln|\cos x| + k_1\big)\cos x + (x + k_2)\sin x = \\ = \underbrace{k_1\cos x + k_2\sin x}_{y_{\text{оо}}} + \underbrace{\cos x\cdot\ln|\cos x| + x\sin x}_{y_{\text{чн}}}$$

11.2 Метод построения частных решений ЛНДУ n-го порядка с постоянными коэффициентами и специальной правой частью (квазиполином)

Рассмотрим ЛНДУ n-го порядка с постоянными коэффициентами

$$y^{(n)} + a_1y^{(n-1)} + \ldots + a_{n-1}y' + a_ny = f \quad \text{ЛНДУ} \tag{1}$$

$a_1\ \ldots,\ a_n$ — $const$

Соответствующее ЛОДУ:

$$y^{(n)} + a_1y^{(n-1)} + \ldots + a_{n-1}y' + a_ny = 0 \quad \text{ЛОДУ}$$

$a_1\ \ldots,\ a_n$ — $const$

Характеристическое уравнение:

$$k^n + a_1k^{n-1} + \ldots + a_{n-1}k + a_n = 0$$

$k_1\ \ldots,\ k_n$ — корни характеристического уравнения

ФСР ЛОДУ: $\left\{e^{k_1x},\ \ldots,\ e^{k_nx}\right\}$

$$y_{\text{оо}} = C_1e^{k_1x} + \ldots + C_ne^{k_nx}$$

где $C_1\ \ldots,\ C_n$ — $const$

Если правая часть ЛНДУ (1) представима специальным видом, то есть *квазиполиномом*, то по её виду можно найти некоторое частное решение ЛНДУ (1).

Суть метода: по виду функции f записывается предполагаемый вид частного решения ЛНДУ с неопределёнными коэффициентами. Затем это предполагаемое решение подставляем в ЛНДУ (1) и из полученного равенства находим неопределённые коэффициенты.

$$\begin{tikzcd} & f(x) \arrow[dl] \arrow[dr] & \\ \boxed{e^{\alpha x}P_n(x)} & & \boxed{e^{\alpha x}\left(P_n(x)\cos\beta x+Q_m(x)\sin\beta x\right)} \end{tikzcd}$$

$\alpha \in \mathbb{R},\ P_n(x)$ — многочлен степени n с определёнными коэффициентами

$$\downarrow$$

$$\boxed{y_{\text{чн}} = e^{\alpha x}\cdot Q_n(x)\cdot x^r}$$

$\alpha \in \mathbb{R},\ Q_n(x)$ — многочлен степени n с неопределёнными коэффициентами. r — кратность (сколько раз α является действительным корнем характеристического уравнения)

$$\alpha = k_1 \ \Rightarrow\ r=1$$
$$\alpha = k_1 = k_2 \ \Rightarrow\ r=2$$
$$\alpha \neq k_i,\ i=\overline{1,n} \ \Rightarrow\ r=0$$

$\alpha,\,\beta \in \mathbb{R},\ P_n(x),\ Q_m(x)$ — многочлены степеней n и m соответственно с определёнными коэффициентами

$$\downarrow$$

$$\boxed{y_{\text{чн}} = e^{\alpha x}\cdot\big(M_s(x)\cos\beta(x)+N_s(x)\sin\beta x\big)\cdot x^r}$$

$\alpha,\,\beta \in \mathbb{R},\ M_s(x),\ N_s(x)$ — многочлены степени s с неопределёнными коэффициентами, $s=\max\{n,m\}$ r — кратность (сколько раз $\alpha \pm \beta i$ является корнем характеристического уравнения)

$$\alpha \pm \beta i = k_{1,2} \ \Rightarrow\ r=1$$
$$\alpha \pm \beta i = k_{1,2} = k_{3,4} \ \Rightarrow\ r=2$$
$$\alpha \pm \beta i \neq k_i,\ i=\overline{1,n} \ \Rightarrow\ r=0$$

Пример.

$y''+2y'+y=e^{2k}$ ЛНДУ

$y''+2y'+y=0$ ЛОДУ

$k^2+2k+1=0$ характеристическое уравнение

$(k+1)^2=0 \ \Rightarrow\ k_1=k_2=-1 \Rightarrow$ ФСР: $\{e^{-x},\, e^{-x}x\} \ \Rightarrow\ y_{\text{оо}} = C_1e^{-x}+C_2e^{-x}x$

$f=e^{2x} \ \Rightarrow\ \alpha=2$

$\alpha=2\neq k_1\neq k_2 \ \Rightarrow r=0$

$f=1\cdot x^0\cdot e^{2x}$

1 — это *const* — это многочлен нулевой степени $n=0$

$$\left.\begin{aligned} y_{\text{чн}} &= e^{2x}\cdot x^0\cdot A = Ae^{2x} \\ y'_{\text{чн}} &= 2Ae^{2x} \\ y''_{\text{чн}} &= 4Ae^{2x} \end{aligned}\right\} \to \text{ в ЛНДУ}$$

$$\begin{aligned} 4Ae^{2x}+2\cdot 2Ae^{2x}+Ae^{2x} &= e^{2x} \\ 9Ae^{2x} &= e^{2x} \\ 9A &= 1 \\ A &= \frac{1}{9} \end{aligned}$$

$$\Downarrow$$

$$\begin{aligned} y_{\text{чн}} &= \frac{1}{9}e^{2x} \\ y_{\text{он}} &= y_{\text{оо}}+y_{\text{чн}} \\ y_{\text{он}} &= C_1e^{-x}+C_2xe^{-x}+\frac{1}{9}e^{2x} \end{aligned}$$