Аналитическая геометрия

Содержание

1 Векторная алгебра

Определение 1. Вектором называется отрезок, с выбранном на нём направлением.

Определение 2. Два вектора называется **коллинеарными**, если они лежат на одной прямой или на параллельных прямых.

Определение 3. Три вектора называются **компланарными**, если они лежат на прямых, параллельных некоторой плоскости.

Примечание. Вектор определяется точкой начала и точкой конца. ($\overrightarrow{AB}$)

Определение 4. Вектор, у которого точка начала фиксирована, называется **связанным**.

Определение 5. Вектор, у которого точка начала не фиксированная, называется **свободным**.

Примечание. Вектор характеризуется *длиной* и *направлением*.

Определение 6. Два вектора называются **сонаправленными**, если они *коллинеарны* и имеют одно и то же направление.

Определение 7. Два вектора называются **противоположно направленными** если они *коллинеарны* и имеют противоположные направления.

Определение 8. Два вектора называются **равными**, если:

1. Они коллинеарны и сонаправлены
2. Их длины равны

Определение 9. Вектор, длина которого равна 1 называется единичным вектором или **ортом**.

$$\vec{e} \quad |\vec{e}| = 1.$$

Определение 10. Вектор, длина которого равна нулю (начало и конец совпадают) называется **нулевым вектором**. Направление нулевого вектора произвольное. Нулевой вектор коллинеарен всем векторам.

$$|\vec{0}| = 0.$$

Определение 11. Суммой векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ называется $\vec{c}$, который получается по правилу треугольника:

1. Конец вектора $\vec{a}$ совмещают с началом вектора $\vec{b}$
2. Тогда вектор, идущий из начала вектора $\vec{a}$ к концу вектора $\vec{b}$ и будет вектором $\vec{c}$.

Определение 12. Суммой векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ называется вектор $\vec{c}$, который получается по правилу параллелограмма следующим образом:

1. Совмещают начала векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$
2. Достраивают фигуры до параллелограмма
3. Тогда вектор, идущий из начала вектором по диагонали параллелограмма и будет исходным вектором $\vec{c}$.

Примечание. Если два вектора коллинеарны, то их можно сложить только правилу треугольника.

Определение 13. Произведение вектора $\vec{a}$ на число λ называется вектор $\vec{c}$, который будет коллинеарен вектору $\vec{a}$, длина которого будет или меньше в $|\lambda|$ раз и будет сонаправлен, если $\lambda > 0$, и противонаправлен, если $\lambda < 0$.

1.1 Свойства векторов

1. $\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$
2. $\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$
3. $(\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c} = \vec{a} + (\vec{b} + \vec{c})$
4. $\forall \vec{a}\ \exists \vec{0} \qquad \vec{a} + \vec{0} = \vec{a}$
5. $\forall \vec{a}\ \exists \vec{b} \qquad \vec{a} + \vec{b} = \vec{0} \implies -\vec{b} = \vec{a}$
6. $\lambda \left(\vec{a} + \vec{b}\right) = \lambda\vec{a} + \lambda\vec{b}$
7. $\lambda(\mu\vec{a}) = (\lambda\mu)\,\vec{a}$
8. $(\lambda + \mu)\,\vec{a} = \lambda\vec{a} + \mu\vec{a}$

Определение 14. Разностью векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ называется вектор $\vec{c}$, который получается следующим образом:

1. Совмещаем начала векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$
2. Вектор, который идёт из конца вектора $\vec{b}$ в начало вектора $\vec{a}$ и есть искомый вектор $\vec{c}$.

1.2 Ортогональная проекция вектора на направление

Определение 1. Основание точки O_a перпендикуляра, опущенного их точки A на прямую L называется **ортогональной проекцией точки** A на прямую L.

Определение 2. Пусть имеем вектор $\overrightarrow{AB}$. Пусть O_a - ортогональная проекция начала вектора $\overrightarrow{AB}$ на прямую L, а O_b - это ортогональная проекция конца вектора $\overrightarrow{AB}$ на прямую L. Тогда вектор $\overrightarrow{O_aO_b}$, соединяющий проекции и лежащий на прямой L, называется **ортогональной проекцией вектора** $\overrightarrow{AB}$ **на прямую** L.

Определение 3. **Осью** называется прямая с выбранным на ней направлением.

Примечание. Если на прямой L выбрано направление, то длину $\overrightarrow{O_aO_b}$ берут со знаком $+$, если направление вектора совпадает с выбранным направлением L, и со знаком $-$, если нет.

Определение 4. Длину вектора $\overrightarrow{O_aO_b}$ со знаком, определяющим направление этого вектора, **называют ортогональной проекцией вектора** $\overrightarrow{AB}$ **на ось** $\vec{l}$.

$$\text{пр}_{\vec{l}}\overrightarrow{AB}.$$

Определение 5. Ортогональную проекцию вектора на ненулевой вектор $\vec{l}$ называют **ортогональной проекцией этого вектора на направление вектора** $\vec{l}$.

Примечание. Важно! *Ортогональная проекция вектора на направление* - это **число**!

Теорема 1.
Ортогональная проекция вектора $\vec{a}$ на направление ненулевого вектора $\vec{l}$ равна произведению длины вектора $\vec{l}$ на $\cos\phi = \cos\left(\widehat{\vec{a},\ \vec{l}}\right)$

Теорема 2.
Ортогональная проекция суммы векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ на направление ненулевого вектора $\vec{l}$ равна сумме ортогональных проекций вектора $\vec{a}$ и $\vec{b}$ на направление ненулевого вектора $\vec{l}$.

$$\text{пр}_{\vec{l}}\left(\vec{a}+\vec{b}\right) = \text{пр}_{\vec{l}}\vec{a} + \text{пр}_{\vec{l}}\vec{b}.$$

Теорема 3.
Ортогональная проекция вектора произведения $\vec{a}$ и числа λ на направление ненулевого вектора $\vec{l}$ равна произведению числа λ на ортогональную проекцию вектора $\vec{a}$.

$$\text{пр}_{\vec{l}}\lambda\vec{a} = \lambda\,\text{пр}_{\vec{l}}\vec{a}.$$

1.3 Линейная зависимость и независимость векторов

Определение 1.

$$\lambda_1\vec{a_1} + \lambda_2\vec{a_2} + \ldots + \lambda_n\vec{a_n}$$
$$\text{где } \lambda_i - \text{произвольные числа}$$

называется **линейной комбинацией** системы векторов $\vec{a}$, а числа λ - коэффициентом линейной комбинации.

Определение 2.
Если $\forall\lambda = 0$, то линейную комбинацию называют **тривиальной**.
Если $\neg\forall\lambda = 0$, то линейную комбинацию называют **нетривиальной**.

Определение 3. Система векторов называется **линейно-зависимой**, если существует нетривиальная равная нулевому вектору линейной комбинация этих векторов:

$$\lambda_1\vec{a_1} + \lambda_2\vec{a_2} + \ldots + \lambda\vec{a_n} = \vec{0}$$
$$\lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \ldots + \lambda_n^2 \neq 0$$

Определение 4. Система векторов называется **линейно-независимой**, если существует только тривиальная равная нулевому вектору линейная комбинация.

$$\lambda_1\vec{a_1} + \lambda_2\vec{a_2} + \ldots + \lambda\vec{a_n} = \vec{0}$$

Теорема 1.
Система векторов линейно-зависима тогда и только тогда, когда один из этих векторов можно представить в виде линейной комбинации других векторов.

Доказательство.
1) Пусть система векторов линейно-зависима.
Тогда по определению существует нетривиальная равная нулевому вектору линейная комбинация этих векторов:

$$\lambda_1 \neq 0$$
$$\lambda_1\vec{a_1} + \lambda_2\vec{a_2} + \ldots + \lambda_n\vec{a_n} = \vec{0}$$
$$\vec{a_1} = -\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\vec{a_2} - \frac{\lambda_3}{\lambda_1}\vec{a_3} - \ldots - \frac{\lambda_n}{\lambda_1}\vec{a_n}$$

Обозначим $\beta_i = -\frac{\lambda_i}{\lambda_1}$, где $i \in N \wedge 2 \leq i \leq n$.
Получаем:

$$\vec{a_1} = \beta_2\vec{a_2} + \beta_3\vec{a_3} + \ldots + \beta_n\vec{a_n}$$

Что и требовалось доказать. ■

Доказательство.
2) Пусть один из векторов можно представить в виде линейной комбинации других векторов системы (возьмем $\vec{a_1}$. Перенесём слагаемые из правой части в левую:

$$\vec{a_1} - \lambda_2\vec{a_2} - \lambda_3\vec{a_3} - \ldots - \lambda_n\vec{a_n} = \vec{0}$$

Получили нетривиальную равную нулевому вектору линейную комбинацию векторов. По определению, данная система векторов является *линейно-зависимой.* ■

1.3.1 Критерии линейной зависимости 2 и 3 векторов

Теорема 2.
Два вектора *линейно-зависимы* тогда и только тогда, когда они *коллинеарны.*

Доказательство.
1) *Необходимость.*
Пусть система векторов $\vec{a_1}, \vec{a_2}$ линейно-зависима. Тогда по определению $\exists$ нетривиальная линейная зависимость $= \vec{0}$ этих векторов. Пусть $\lambda_1 \neq 0$, тогда $\vec{a_1} = -\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\vec{a_2}$. Обозначим $\beta = -\frac{\lambda_2}{\lambda_1}$, тогда $\vec{a_1} = \beta\vec{a_2}$. По определению произведение вектора на число $\vec{a_1}$ и $\vec{a_2}$ коллинеарны.
2) *Достаточность.*
Пусть $\vec{a_1} \parallel \vec{a_2}$. Тогда $\vec{a_1} = \lambda\vec{a_2}$ (по определению произведения вектора на число). Перенесем все налево:

$$\vec{a_1} - \lambda\vec{a_2} = \vec{0}$$

По определению $\vec{a_1}$ и $\vec{a_2}$ являются линейной зависимостью. ■

Теорема 3.
Три вектора линейной зависимы тогда и только тогда, когда они компланарны.

Доказательство.
(1) Пусть $\vec{a_1}$, $\vec{a_2}$, $\vec{a_3}$ - линейная зависимость, тогда по определению существуют:

$$\lambda_1\vec{a_1} + \lambda_2\vec{a_2} + \lambda_3\vec{a_3} = \vec{0}$$

Тогда: $\lambda_1 \neq 0$

$$\vec{a_1} = -\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\vec{a_2} - \frac{\lambda_3}{\lambda_1}\vec{a_3}$$

Обозначим $\beta = -\frac{\lambda_i}{\lambda}$, где $i = 2, 3$.

$$\vec{a_1} = \beta_2\vec{a_2} + \beta_3\vec{a_3}$$

Совместим начала $\vec{a_2}$ и $\vec{a_3}$ и построим $\beta_2\vec{a_2}$ и $\beta_3\vec{a_3}$, где $\beta_2, \beta_3 > 0$.
Т.к. $\vec{a_3}$ лежит на диагонали параллелограмма (из правила сложения векторов параллелограммом), получается, что вектора $\vec{a_1}, \vec{a_2}, \vec{a_3}$ лежат в одной плоскости, что и требовалось доказать. ■

Доказательство.
(2) Пусть $\vec{a_1}, \vec{a_2}, \vec{a_3}$ лежат в одной плоскости (компланарны). Совместим начала векторов, концы векторов обозначим A_i. Проведём через A_1 прямую, параллельную $\vec{a_3}$.

$$\overrightarrow{OA_2'} \parallel \overrightarrow{OA_2} \implies \overrightarrow{OA_2'} = \lambda_2\overrightarrow{OA_2}$$
$$\overrightarrow{OA_3'} \parallel \overrightarrow{OA_3} \implies \overrightarrow{OA_3'} = \lambda_3\overrightarrow{OA_3}$$

Тогда согласно правилу параллелограмма сложения векторов:

$$\overrightarrow{OA_1} = \overrightarrow{OA_2} = \overrightarrow{OA_3}, \text{ то } \vec{a_1} = \lambda_2\vec{a_2} + \lambda_3\vec{a_3}$$

■

Теорема 4.
Любые 4 вектора линейно зависимы.

1.4 Базис

Определение 1. **Базис** - упорядоченный набор векторов.

Введём обозначения:

- V_1 - пространство всех *коллинеарных* векторов
- V_2 - пространство всех *компланарных* векторов
- V_3 - пространство всех *свободных* векторов

1.4.1 Пространство V_1

Определение 2. Пусть $\vec{e} \neq \vec{0} \in V_1$, тогда $\forall \vec{x} \in V_1$ ($\vec{x} = \lambda\vec{e}$, т.к. $\vec{x} \parallel \vec{e}$).
Тогда

$$\vec{x} = \lambda\vec{e}$$

называется **разложением** $\vec{x}$ **по базису** $\vec{e}$ **в** V_1, а λ — координаты $\vec{x}$ в этом базисе.

1.4.2 Пространство V_2

Определение 3. Любая упорядоченная пара неколлинеарных векторов в V_2 является **базисом** V_2.
Пусть в V_2 $\vec{e_1} \nparallel \vec{e_2}$, тогда эти вектора можно рассматривать как базис $V_2, \vec{x} \in V_2 \implies \vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{x}$ — линейная зависимость.

$$\vec{x} = \lambda_1\vec{e_1} + \lambda_2\vec{e_2}$$

— **разложение вектора** $\vec{x}$ **по базису** $\vec{e_1}, \vec{e_2}$. λ_1 и λ_2 называются координатами $\vec{x}$ в этом базисе.

Определение 4. Базис в V_2 называется **ортогональным**, если базисные вектора лежат на перпендикулярных прямых.

1.4.3 Пространство V_3

Определение 5. Любая упорядоченная тройка некомпланарных векторов в V_3 называется **базисом в** V_3.
Пусть $\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3}$ - упорядоченная тройка векторов в V_3, $\vec{x} \in V_3$. Тогда система векторов линейно зависима (по теореме **4**). По теореме **1**

$$\vec{x} = \lambda_1\vec{e_1} + \lambda_2\vec{e_2} + \lambda_3\vec{e_3}$$

Данное выражение называется **разложением** $\vec{x}$ **по базису** $\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3}$ **в** V_3, а $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ называются координатами $\vec{x}$ в базисе.
Базис в V_3, если базисные вектора лежат на взаимно перпендикулярных прямых.

Определение 6. Ортонормированный базис — ортогональный базис из $\vec{e}$ векторов.

Теорема 1 *(О разложении вектора по базису)*.
Любой вектор можно разложить по базису и при этом единственным образом.

Доказательство.
Пусть в пространстве V_3 зафиксирован базис $\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3}$. Возьмём вектор $\vec{x}$. Тогда система векторов $\vec{x}, \vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3}$ - линейно зависима, если вектор $\vec{x}$ можно представить в виде линейной комбинации векторов $\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3}$:

$$\vec{x} = \lambda_1 \vec{e_1} + \lambda_2 \vec{e_2} + \lambda_3 + \vec{e_3} \tag{1}$$

Предположим, что разложение вектора $\vec{x}$ – не единственное.

$$\vec{x} = \rho \vec{e_1} + \rho \vec{e_2} + \rho \vec{e_3} \tag{2}$$

Вычтем из (1) уравнение (2). Тогда:

$$\vec{0} = (\lambda_1 - \rho_1)\, \vec{e_1} + (\lambda_2 - \rho_2)\, \vec{e_2} + (\lambda_3 - \rho_3)\, \vec{e_3} \tag{3}$$

Поскольку базисные вектора $\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3}$ – линейно независимы, то выражение (3) представляет собой тривиальную линейную комбинацию векторов $\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3}$, равную нулю. Тогда получаем:

$$\begin{matrix} \lambda_1 - \delta_1 = 0 & & \lambda_1 = \delta_1 \\ \lambda_2 - \delta_2 = 0 & \Longrightarrow & \lambda_2 = \delta_2 \\ \lambda_3 - \delta_3 = 0 & & \lambda_3 = \delta_3 \end{matrix}$$

Коэффициенты равны, что и требовалось доказать. ■

Пример. Пусть в пространстве V_2 зафиксирован базис $\vec{i}, \vec{j}$.

$$|\vec{i}| = 1, \quad |\vec{j}| = 1$$
$$\vec{a} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}$$
$$\overrightarrow{OA} \parallel \vec{i} \implies \overrightarrow{OA} = x_a \vec{i}$$
$$\overrightarrow{OB} \parallel \vec{j} \implies \overrightarrow{OB} = y_a \vec{j}$$
$$\implies \vec{a} = x_a \vec{i} + y_a \vec{j}$$

Пример. Пусть в пространстве V_3 зафиксирован ортонормированный базис $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$. Тогда:

$$\vec{a} = \{x_a, y_a, z_a\}$$
$$\vec{a} = x_a \vec{i} + y_a \vec{j} + z_a \vec{k}$$

Разложить $\vec{a}$ по векторам $\vec{b}, \vec{c}$.

Дано:

$$\vec{a} = 3\vec{i} - 4\vec{j}$$
$$\vec{b} = 2\vec{i} - \vec{j}$$
$$\vec{c} = -\vec{i} - 5\vec{j}$$

Решение:

$$\vec{a} = \alpha\vec{b} + \beta\vec{c}$$
$$3\vec{i} - 4\vec{j} = \alpha(2\vec{i} + \vec{j}) + \beta(-\vec{i} + 5\vec{j})$$
$$3\vec{i} - 4\vec{j} = (2\alpha - \beta)\vec{i} + (\alpha + 5\beta)\vec{j} \Rightarrow$$
$$\begin{cases} 3 = 2\alpha - \beta \\ -4 = \alpha + 5\beta \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \beta = -1 \\ \alpha = 1 \end{cases}$$

2 Координаты вектора. Действия с векторами

Пусть:

$$\vec{a} = \{x_a, y_a, x_a\}$$
$$\vec{b} = \{x_b, y_b, z_b\}$$

Примечание. Два вектора равны, если равны соответствующие координаты.

Тогда:

$$\vec{c} = \vec{a} + \vec{b} = \{x_a + x_b, y_a + y_b, z_a + z_b\}$$
$$k\vec{a} = \{kx_a, ky_a, kz_a\}$$

Замечание. $k\vec{a} = k \cdot \{\dots\}$ - так записывать нельзя!

Если $\vec{a} \parallel \vec{b}$, то $\vec{b} = \lambda\vec{a}$, где $\lambda = const$

$$\begin{cases} x_b = \lambda x_a \\ y_b = \lambda y_a \\ z_b = \lambda z_b \end{cases} \implies \frac{x_a}{x_b} = \frac{y_a}{y_b} = \frac{z_a}{z_b}$$

Расчёт косинуса угла по разложению в базисе

Пример. В V_2:

$$\vec{a} = \{x_a, y_a, z_a\}$$
$$|\vec{a}| = \sqrt{x_a^2 + y_a^2 + z_a^2}$$
$$\cos\alpha = \frac{x_a}{|\vec{a}|} \quad \cos\beta = \frac{y_a}{|\vec{a}|}$$

Пример. Для V_3:

$$\cos\alpha = \frac{x_a}{|\vec{a}|} \quad x_a = |\vec{a}|\cos\alpha$$
$$\cos\beta = \frac{y_a}{|\vec{a}|} \quad y_a = |\vec{a}|\cos\beta$$
$$\cos\gamma = \frac{z_a}{|\vec{a}|} \quad z_a = |\vec{a}|\cos\gamma$$

Возведём в квадрат:

$$|\vec{a}|^2\cos^2\alpha + |\vec{a}|^2\cos^2\beta + |\vec{a}|^2\cos^2\gamma = x_a^2 + y_a^2 + z_a^2 = |\vec{a}|^2$$
$$\implies \cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$$

В результате получаем орт вектора $\vec{a}$:

$$\vec{e_a} = \{\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma\}$$

2.1 Скалярное произведение векторов

Определение 1. Скалярным произведением векторов $\vec{a}, \vec{b}$ называется *число* равное произведению длин этих векторов на косинус угла между ними.

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos\phi$$

2.1.1 Свойства скалярного произведения

1. Коммутативность
$$\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a}$$

2.
$$\vec{a}^2 \geq 0$$
$$\vec{a}^2 = 0 \iff \vec{a} = \vec{0}$$
$$\vec{a}^2 = |\vec{a}|^2$$

3. Дистрибутивность
$$\left(\vec{a} + \vec{b}\right) \cdot \vec{c} = \vec{a} \cdot \vec{c} + \vec{b} \cdot \vec{c}$$

4. Ассоциативность
$$(\lambda\vec{a}) \cdot \vec{b} = \lambda\left(\vec{a} \cdot \vec{b}\right)$$

2.1.2 Формула для вычисления скалярного произведения двух векторов, заданных ортонормированным базисом

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cos\varphi$$
$$\vec{a} \cdot \vec{b} > 0, \text{ если } \varphi \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$$
$$\vec{a} \cdot \vec{b} < 0, \text{ если } \varphi \in \left(\frac{\pi}{2}; \pi\right)$$
$$\vec{a} \cdot \vec{b} = 0, \text{ если } \varphi = \frac{\pi}{2}$$

Пусть в пространстве V_3 с заданным ортонормированном базисом $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ заданы вектора $\vec{a}, \vec{b}$:

$$\vec{a} = x_a\vec{i} + y_a\vec{j} + z_a\vec{k}$$
$$\vec{b} = x_b\vec{i} + y_b\vec{j} + z_b\vec{k}$$

Тогда:

$$\begin{array}{ll} \vec{i}^2 = \vec{i} \cdot \vec{i} = |\vec{i}|^2 = 1 & \quad \vec{i} \perp \vec{j} \implies \vec{i} \cdot \vec{j} = 0 \\ \vec{j}^2 = \vec{j} \cdot \vec{j} = |\vec{j}|^2 = 1 & \quad \vec{i} \perp \vec{k} \implies \vec{i} \cdot \vec{k} = 0 \\ \vec{k}^2 = \vec{k} \cdot \vec{k} = |\vec{k}|^2 = 1 & \quad \vec{j} \perp \vec{k} \implies \vec{j} \cdot \vec{k} = 0 \end{array}$$

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = \left(x_a\vec{i} + y_a\vec{j} + z_a\vec{k}\right)\left(x_b\vec{i} + y_b\vec{j} + z_b\vec{k}\right) = x_ax_b\vec{i}^2 + x_ay_b(\vec{i} \cdot \vec{j}) + x_az_b(\vec{i} \cdot \vec{k}) +$$
$$+ y_ax_a(\vec{i} \cdot \vec{j}) + y_ay_b\vec{j}^2 + y_az_b(\vec{j} \cdot \vec{k}) + z_ax_b(\vec{i} \cdot \vec{k}) + z_ay_b(\vec{j} \cdot \vec{k}) + z_az_b\vec{k}^2 =$$
$$= x_ax_b + y_ay_b + z_az_b$$

$$\boxed{\vec{a} \cdot \vec{b} = x_ax_b + y_ay_b + z_az_b}$$

2.1.3 Формула косинуса между векторами, заданными ортонормированным базисом

Т.к. $\vec{a}\vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}|\cos\varphi$, то:

$$\begin{aligned}\cos\varphi &= \frac{\vec{a}\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|}\\ &= \frac{x_a x_b + y_a y_b + z_a z_b}{|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|}\\ &= \frac{x_a x_b + y_a y_b + z_a z_b}{\sqrt{x_a^2 + y_a^2 + z_a^2}\cdot\sqrt{x_b^2 + y_b^2 + z_b^2}}\end{aligned}$$

$$\boxed{\cos\varphi = \frac{x_a x_b + y_a y_b + z_a z_b}{\sqrt{x_a^2 + y_a^2 + z_a^2}\cdot\sqrt{x_b^2 + y_b^2 + z_b^2}}}$$

2.2 Векторное произведение векторов

Определение 2. Тройка векторов называется **правой**, если кратчайший поворот от вектора $\vec{a}$ к $\vec{b}$ осуществляется *против часовой стрелки* (смотря из конца вектора $\vec{c}$).

Определение 3. Тройка векторов называется **левой**, если кратчайший поворот от вектора $\vec{a}$ к $\vec{b}$ осуществляется *по часовой стрелки* (смотря из конца вектора $\vec{c}$).

Определение 4. **Векторным произведением** векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ называется вектор $\vec{c}$, который удовлетворяет следующему условию:

1. $\vec{c}$ ортогонален векторам $\vec{a}$ и $\vec{b}$ (перпендикулярен плоскости, в которой лежат вектора $\vec{a}$ и $\vec{b}$);
2. $\vec{c} = |\vec{a}||\vec{b}|\cdot\sin\phi$
3. Вектора $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ образуют *правую* тройку векторов.

Обозначение:

$$\vec{a}\times\vec{b} \text{ или } [\vec{a}, \vec{b}]$$

2.2.1 Свойства векторного произведения векторов

1. Антикоммутативность
$$\vec{a}\times\vec{b} = -\vec{b}\times\vec{a}$$
2. Дистрибутивность
$$(\vec{a_1} + \vec{a_2})\times\vec{b} = \vec{a_1}\times\vec{b} + \vec{a_2}\times\vec{b}$$
3. Ассоциативность
$$(\lambda\vec{a})\times\vec{b} = \lambda\left(\vec{a}\times\vec{b}\right)$$

2.2.2 Геометрическое приложение векторов.

Пусть $\vec{a} = \{x_a, y_a, x_a\}$ и $\vec{b} = \{x_b, y_b, z_b\}$. Совместим начала этих векторов и достроим до параллелограмма. Тогда площадь этого параллелограмма будет равна модулю векторного произведения этих векторов.

Пример.

$$A(1,2,-1), \quad B(-1,1,0), \quad C(0,-1,2)$$
$$\overrightarrow{AB} = \{-2,-1,1\}$$
$$\overrightarrow{AC} = \{-1,-3,3\}$$

$$\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -2 & -1 & 1 \\ -1 & -3 & 3 \end{vmatrix} =$$
$$\vec{i} \cdot (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ -3 & 3 \end{vmatrix} + \vec{j} \cdot (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} -2 & 1 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} + \vec{k} \cdot (-1)^{1+3} \begin{vmatrix} -2 & -1 \\ -1 & -3 \end{vmatrix} =$$
$$0\vec{i} + 5\vec{j} + 5\vec{k}$$

$$\vec{c} = \{0,5,5\} \implies |\vec{c}| = \sqrt{50} = 5\sqrt{2}$$
$$S_{ABC} = \frac{1}{2} S_{ABCD} = \frac{1}{2} \cdot 5\sqrt{2} = \frac{5}{\sqrt{2}}$$

2.3 Смешанное произведение

Определение 5. Смешанное произведение векторов $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ называется скалярное произведения первых двух векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ на третий вектор $\vec{c}$.

$$\vec{a}\vec{b}\vec{c} = (\vec{a} \cdot \vec{b}) \times \vec{c}$$

2.3.1 Свойства смешанных произведений

1. **Свойство перестановки (кососимметричности)**

$$\vec{a}\vec{b}\vec{c} = \vec{c}\vec{a}\vec{b} = \vec{b}\vec{c}\vec{a} = -\vec{b}\vec{a}\vec{c} = -\vec{c}\vec{b}\vec{a} = -\vec{a}\vec{c}\vec{b}$$

2. Три вектора компланарны тогда и только тогда, когда их смешанное произведение равно 0.

$$\vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \text{ - компланарны} \iff \vec{a}\vec{b}\vec{c} = 0$$

Примечание.
$\vec{a}\vec{b}\vec{c} > 0$, если $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ - правая тройка векторов.
$\vec{a}\vec{b}\vec{c} < 0$, если $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ - левая тройка векторов.

3. **Свойство ассоциативности** (*работает для любого положения* λ)

$$(\lambda\vec{a})\vec{b}\vec{c} = \lambda(\vec{a}\vec{b}\vec{c})$$

Доказательство.

$$(\lambda\vec{a})\vec{b}\vec{c} = (\lambda\vec{a})\vec{d} = \lambda(\vec{a}\vec{d}) = \lambda(\vec{a}(\vec{b}\vec{c})) = \lambda(\vec{a}\vec{b}\vec{c})$$

■

4. **Свойство коммутативности** (*работает не только для $\vec{a}$, но и векторов $\vec{b}$ и $\vec{c}$*)

$$(\vec{a_1} + \vec{a_2})\vec{b}\vec{c} = \vec{a_1}\vec{b}\vec{c} + \vec{a_2}\vec{b}\vec{c}$$

Доказательство.

$$(\vec{a_1} + \vec{a_2})\vec{b}\vec{c} = (\vec{a_1} + \vec{a_2})\vec{d} = \vec{a_1}\vec{d} + \vec{a_2}\vec{d} = \vec{a_1}(\vec{b}\vec{c}) + \vec{a_2}(\vec{b}\vec{c}) = \vec{a_1}\vec{b}\vec{c} + \vec{a_2}\vec{b}\vec{c}$$

■

2.3.2 Формула смешанного произведения трёх векторов в правом ортонормированном базисе

Пусть $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ заданы координатами:

$$\vec{a} = \{x_a, y_a, x_a\}$$
$$\vec{b} = \{x_b, y_b, .z_b\}$$
$$\vec{c} = \{x_c, y_c, z_c\}$$

Найдём смешанное произведение:

$$\vec{a}\vec{b}\vec{c} = (\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c} = \left\{ \begin{vmatrix} y_a & z_a \\ y_b & z_b \end{vmatrix}, - \begin{vmatrix} x_a & z_a \\ x_b & z_b \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} x_a & y_a \\ x_b & y_b \end{vmatrix} \right\} \cdot \vec{c} =$$
$$= \begin{vmatrix} y_a & z_a \\ y_b & z_b \end{vmatrix} \cdot x_c - \begin{vmatrix} x_a & z_a \\ x_b & z_b \end{vmatrix} \cdot y_c + \begin{vmatrix} x_a & y_a \\ x_b & y_b \end{vmatrix} \cdot z_c =$$
$$= \begin{vmatrix} x_a & y_a & z_a \\ x_b & y_b & z_b \\ x_c & y_c & z_c \end{vmatrix}$$

Т.е.

$$\boxed{\vec{a}\vec{b}\vec{c} = \begin{vmatrix} x_a & y_a & z_c \\ x_b & y_b & z_b \\ x_c & y_c & z_c \end{vmatrix}}$$

2.3.3 Геометрическое приложение смешанного произведения

Пусть $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$. Совместим начала этих векторов и достроим до параллелепипеда. Тогда $V_{paral} = |\vec{a}\vec{b}\vec{c}|$.

Примечание.

$$V_{pyramid} = \frac{1}{6}V_{paral} = \frac{1}{6} \cdot |\vec{a}\vec{b}\vec{c}|$$

3 Прямая на плоскости

3.1 Способы задания прямой

3.1.1 Каноническое уравнение

Пусть прямая l проходит через точку $M_0(x_0, y_0)$ и задана направляющим вектором $\vec{S} = \{m, n\}$ (т.е. вектор параллелен прямой).
Выберем на прямой l произвольную точку M. Составим $\overrightarrow{M_0M} = \{x - x_0, y - y_0, z - z_0\}$.

$$\overrightarrow{M_0M} \parallel \vec{s} \implies \boxed{\frac{x - x_0}{m} = \frac{y - y_0}{n}}$$

3.1.2 Параметрическое уравнение

Пусть прямая l задана каноническим уравнением:

$$\frac{x - x_0}{m} = \frac{y - y_0}{n}$$

Обозначим коэффициент пропорциональности через t. Тогда:

$$\begin{matrix} \dfrac{x - x_0}{m} = t \\ \dfrac{y - y_0}{n} = t \end{matrix} \implies \boxed{\begin{cases} x = x_0 + mt \\ y = y_0 + nt \end{cases}}$$

3.1.3 Через две точки

Пусть прямая l проходит через точки $M_0(x_0, y_0)$ и $M(x, y)$. Выберем на прямой l произвольную точку $M_1(x_1, y_1)$. Составим два вектора $\overrightarrow{M_0M}$, $\overrightarrow{M_0, M_1}$.

$$\overrightarrow{M_0M} = \{x - x_0, y - y_0\}$$
$$\overrightarrow{M_0M_1} = \{x_1 - x_0, y_1 - y_0\}$$

Т.к. вектора коллинеарны, то и соответствующие координаты пропорциональны:

$$\boxed{\frac{x - x_0}{x_1 - x_0} = \frac{y - y_0}{y_1 - y_0}}$$

3.1.4 В отрезках

Пусть прямая l отсекает от координатного угла отрезки a и b. Тогда прямая l проходит через точки $A(0, a)$ и $B(b, 0)$.

$$\frac{x - a}{0 - a} = \frac{y - 0}{b - 0} \implies \boxed{\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1}$$

3.1.5 С угловым коэффициентом

Пусть прямая l проходит через точку $M_0(x_0, y_0)$. Выберем произвольную точку $M(x, y)$. Тогда из прямоугольного треугольника $\triangle M_0AM$:

$$\triangle M_0AM : \operatorname{tg}\varphi = \frac{y - y_0}{x - x_0}$$
$$\text{Пусть } \operatorname{tg}\varphi = k$$
$$k = \frac{y - y_0}{x - x_0}$$
$$y - yo = kx - x_0$$
$$y = kx - kx_0 + y_0$$
$$-kx_0 + y_0 = const = b$$
$$\boxed{y = kx + b}$$

3.1.6 Общего вида

Пусть прямая l проходит через точку $M_0(x_0, y_0)$, а также дан перпендикулярный ей вектор $\vec{n} = \{A, B\}$. Выберем произвольную точку $M(x, y)$. Тогда:

$$\vec{n} = \{A, B\} \qquad \overrightarrow{M_0M} = \{x - x_0, y - y_0\}$$
$$\vec{n} \perp \overrightarrow{M_0M} \implies \vec{n} \cdot \overrightarrow{M_0M} = 0$$
$$A(x - x_0) + B(y - y_0) = 0$$
$$Ax + By + (-Ax_0 - By_0) = 0$$

Обозначим: $-Ax_0 - By_0 = const = C$. Получаем:

$$\boxed{Ax + By + C = 0}$$

3.2 Угол между прямыми

3.2.1 Прямые, заданные каноническими уравнениями

$$l_1 : \frac{x - 0}{m_1} = \frac{y - y_0}{n_1}$$
$$l_2 : \frac{x - \widetilde{x}_0}{m_2} = \frac{y - \widetilde{y}_0}{n_2}$$

Угол между прямыми l_1, l_2 соответствует углу между направляющими векторами $\vec{S_1}, \vec{S_2}$ для соответствующий прямых.

$$\widehat{(l_1, l_2)} = \widehat{(\vec{S_1}, \vec{S_2})} = \varphi$$
$$\cos\varphi = \frac{|\vec{S_1} \cdot \vec{S_2}|}{|\vec{S_1}| \cdot |\vec{S_2}|}$$
$$\boxed{\cos\varphi = \frac{|m_1 \cdot m_2 + n_1 \cdot n_2|}{\sqrt{m_1^2 + n_1^2} \cdot \sqrt{m_2^2 + n_2^2}}}$$

3.2.2 Прямые, заданные общими уравнениями

$$l_1 : A_1x + B_1y + C_1 = 0$$
$$l_2 : A_2x + B_2y + C_2 = 0$$
$$\vec{n_1} = \{A_1, B_1\}$$
$$\vec{n_2} = \{A_2, B_2\}$$

Угол между прямыми l_1, l_2 соответствует углу между нормалями $\vec{n_1}, \vec{n_2}$ к соответствующим прямым.

$$\widehat{(l_1, l_2)} = \widehat{(\vec{n_1}, \vec{n_2})} = \varphi$$
$$\cos\varphi = \frac{\vec{n_1} \cdot \vec{n_2}}{|\vec{n_1}| \cdot |\vec{n_2}|}$$
$$\boxed{\cos\varphi = \frac{|A_1A_2 + B_1B_2|}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2} \cdot \sqrt{A_2^2 + B_2^2}}}$$

3.2.3 Прямые, заданные угловыми коэффициентами

$$\begin{cases} l_1 : y = k_1x + b_1, & k_1 = \operatorname{tg}\varphi_1 \\ l_2 : y = k_2x + b_2, & k_2 = \operatorname{tg}\varphi_2 \end{cases} \Longrightarrow \varphi = \varphi_2 - \varphi_1$$
$$\operatorname{tg}\varphi = \operatorname{tg}\varphi_2 - \operatorname{tg}\varphi_1 = \frac{\operatorname{tg}\varphi_2 - \operatorname{tg}\varphi_1}{1 + \operatorname{tg}\varphi_1 \operatorname{tg}\varphi 2} = \frac{k_2 - k_1}{1 + k_1k_2} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \boxed{\varphi = arctg\frac{k_2 - k_1}{1 + k_1k_2}}$$

3.3 Условие параллельности прямых

3.3.1 Прямые, заданные каноническими уравнениями

Если $l_1 \parallel l_2$, то $\vec{s_1} \parallel \vec{s_2} \ \Rightarrow \ \boxed{\frac{m_1}{m_2} = \frac{n_1}{n_2}}$

3.3.2 Прямые, заданные общими уравнениями

Если $l_1 \parallel l_2$, то $\vec{n_1} \parallel \vec{n_2} \ \Rightarrow \ \boxed{\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2}}$

3.3.3 Прямые, заданные угловыми коэффициентами

Если $l_1 \parallel l_2$, то $\varphi = 0 \ \Rightarrow \ tg\varphi = 0 \ \Rightarrow k_2 - k_1 = 0 \ \Rightarrow \ \boxed{k_2 = k_1}$

3.4 Условие перпендикулярности прямых

3.4.1 Прямые, заданные каноническими уравнениями

Если $l_1 \perp l_2$, то $\vec{S_1} \perp \vec{S_2} \ \Rightarrow \ \vec{S_1} \cdot \vec{S_2} = 0 \ \Rightarrow \ \boxed{m_1m_2 + n_1n_2 = 0}$

3.4.2 Прямые, заданные общими уравнениями

Если $l_1 \perp l_2$, то $\vec{n_1} \perp \vec{n_2} \;\Rightarrow\; \boxed{\dfrac{A_1}{A_2} + \dfrac{B_1}{B_2} = 0}$

3.4.3 Прямые, заданные угловыми коэффициентами

Если $l_1 \perp l_2$, то:

$$\varphi = \frac{\pi}{2} \quad \Rightarrow \quad \nexists \operatorname{tg}\varphi \quad \Rightarrow \quad 1 + k_1 k_2 = 0 \quad \Rightarrow \quad k_1 k_2 = -1 \Rightarrow \boxed{k_2 = -\frac{1}{k_1}}$$

3.5 Расстояние от точки до прямой

Пусть прямая l задана общим уравнением:

$$l : Ax + By + C = 0 \implies \vec{n} = \{A, B\}$$

Требуется найти расстояние от точки $M_0\,(x_0, y_0)$ до прямой l.

Возьмём на прямой l произвольную точку M. Тогда расстояние от точки M_0 будет равно проекции вектора $\overrightarrow{MM_0}$ на направление вектора нормали прямой l.

$$\rho(M_0, l) = \text{пр}_{\vec{n}}\, \overrightarrow{MM_0}$$
$$\overrightarrow{MM_0} = \{x_0 - x, y_0 - y\}$$

$$\vec{n} \cdot \overrightarrow{MM_0} = |\vec{n}| \cdot |MM_0| \cdot \cos\varphi = |\vec{n}| \cdot \text{пр}_{\vec{n}}\, \overrightarrow{MM_0} \;\Rightarrow$$
$$\Rightarrow\; \text{пр}_{\vec{n}}\, \overrightarrow{MM_0} = \frac{|\vec{n} \cdot \overrightarrow{MM_0}|}{\vec{n}} = \frac{A(x_0 - x) + B(y_0 - y)}{\sqrt{A^2 + B^2}} =$$
$$= \frac{Ax_0 + By_0 + (-Ax - By)}{\sqrt{A^2 + B^2}}$$

Из общего уравнения прямой l:

$$-Ax - By = C$$
$$\boxed{\rho(M_0, l) = \frac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}}$$

Пример. Найти расстояние от точки $M_0(1, -2)$ до прямой $l : y = 3x - 1$.

$$3x - y - 1 = 0 \text{ - общее уравнение прямой}$$
$$Ax + By + C = 0$$

$$\rho(M_0, l) = \frac{|3 \cdot (-1) + (-1) \cdot (-2) - 1|}{\sqrt{3^2 + (-1)^2}} = \frac{4}{\sqrt{10}}$$

4 Уравнение плоскости

4.1 Способы задания плоскости

4.1.1 Через три точки

Пусть заданы точки $M_1(x_1, y_1, z_1), M_2(x_2, y_2, z_2), M_3(x_3, y_3, z_3)$, которые принадлежат плоскости α.

$$M_1(x_1, y_1, z_1) \in \alpha$$
$$M_2(x_2, y_2, z_2) \in \alpha$$
$$M_3(x_3, y_3, z_3) \in \alpha$$

Выберем точку на плоскости α точку $M(x, y, z)$.
Составим вектора:

$$\overrightarrow{M_1M} = \{x - x_1, y - y_1, z - z_1\}$$
$$\overrightarrow{M_1M_2} = \{x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1\}$$
$$\overrightarrow{M_1M_3} = \{x_3 - x_1, y_3 - y_1, z_3 - z_1\}$$

$\overrightarrow{M_1M}, \overrightarrow{M_1M_2}, \overrightarrow{M_1M_3}$ - компланарны, а значит:

$$\overrightarrow{M_1M} \cdot \overrightarrow{M_1M_2} \cdot \overrightarrow{M_1M_3} = 0$$

Следовательно:

$$\boxed{\begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \end{vmatrix} = 0}$$

4.1.2 Через две точки с направляющим вектором

Пусть даны:

$$M_1(x_1, y_1, z_1) \in \alpha$$
$$M_2(x_2, y_2, z_2) \in \alpha$$
$$\vec{S} = \{m, n, p\} \in \beta$$
$$\alpha \parallel \beta$$

Выберем на плоскости α произвольную точку $M(x, y, z) \in \alpha$
Составим вектора:

$$\overrightarrow{M_1M} = \{x - x_1, y - y_1, z - z_1\}$$
$$\overrightarrow{M_1M_2} = \{x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1\}$$

Тогда вектора $\overrightarrow{M_1, M}, \overrightarrow{M_1, M_2}, \vec{S}$ - компланарны, а следовательно:

$$\overrightarrow{M_1M} \cdot \overrightarrow{M_1M_2} \cdot \vec{S} = 0 \implies \boxed{\begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ m & n & p \end{vmatrix} = 0}$$

4.1.3 Проходящей через точку с двумя направляющими векторами

Пусть даны:

$$M_1(x_1, y_1, z_1) \in \alpha$$
$$\vec{S_1} = \{m_1, n_1, p_1\} \in \beta$$
$$\vec{S_2} = \{m_2, n_2, p_2\} \in \beta$$
$$\alpha \parallel \beta$$

Выберем на плоскости α произвольную точку $M(x, y, z) \in \alpha$
Составим вектор $\overrightarrow{M_1M} = \{x - x_1, y - y_1, z - z_1\}$
Тогда вектора $\overrightarrow{M_1, M}, \vec{S_1}, \vec{S_2}$ - компланарны, а следовательно:

$$\overrightarrow{M_1M} \cdot \vec{S_1} \cdot \vec{S_2} = 0 \implies \boxed{\begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ m_1 & n_1 & p_1 \\ m_2 & n_2 & p_2 \end{vmatrix} = 0}$$

4.1.4 Уравнение плоскости в отрезках

Пусть плоскость α отсекает от координатного угла отрезки a, b, c на осях x, y, z соответственно. Обозначим точки пересечения A, B, C. Тогда:

$$A(a, 0, 0) \quad B(0, b, 0) \quad C(0, 0, c)$$

Выберем на плоскости α произвольную точку $M(x, y, z) \in \alpha$
Составим вектора:

$$\overrightarrow{AM} = \{x - a, y, z\}$$
$$\overrightarrow{AB} = \{-a, b, 0\}$$
$$\overrightarrow{AC} = \{-a, 0, c\}$$

Тогда вектора $\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}$ - компланарны, а следовательно:

$$\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 0 \Rightarrow \begin{vmatrix} x - a & y & z \\ -a & b & 0 \\ -a & 0 & c \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (x - a) \cdot (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} b & 0 \\ 0 & c \end{vmatrix} + y \cdot (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} -a & 0 \\ -a & c \end{vmatrix} + z \cdot (-1)^{1+3} \begin{vmatrix} -a & b \\ -a & 0 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow$$
$$(x - a)bc - y(-ac) + zab = 0$$
$$xbc + yac + zab = abc$$
$$\boxed{\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1}$$

4.1.5 Общее уравнение

Пусть даны:

$$M_0(x_0, y_0, z_0) \in \alpha$$
$$\vec{n} = \{A, B, C\} \text{ - вектор нормали}$$

Выберем на плоскости α произвольную точку $M(x, y, z) \in \alpha$
Составим вектор $\overrightarrow{M_0M} = \{x - x_0, y - y_0, z - z_0\}$
Тогда:

$$\vec{n} \perp \overrightarrow{M_0M} \;\Rightarrow\; \vec{n} \cdot \overrightarrow{M_0M} \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow\; A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0 \;\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow\; Ax + By + Cz + (-Ax_0 - By_0 - Cz_0) = D \;\Leftrightarrow$$
$$\boxed{Ax + By + Cz + D = 0}$$

4.2 Угол между плоскостями

Пусть заданы плоскости общими уравнениями:

$$\alpha_1 : A_1x + B_1y + Cz_1 + D_1 = 0 \implies \vec{n_1} = \{A_1, B_1, C_1\}$$
$$\alpha_2 : A_2x + B_2y + Cz_2 + D_2 = 0 \implies \vec{n_2} = \{A_2, B_2, C_2\}$$

Угол между плоскостями α_1, α_2 равен углу между нормалями n_1, n_2 к этим плоскостям.
Тогда можно найти:

$$\cos\varphi = \frac{\vec{n_1} \cdot \vec{n_2}}{|\vec{n_1}| \cdot |\vec{n_2}|} = \boxed{\frac{A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2} + \sqrt{A_2^2 + B_2^2 + C_2^2}}}$$

4.2.1 Условие перпендикулярности

Если $\alpha_1 \perp \alpha_2$, то $\vec{n_1} \perp \vec{n_2} \;\Rightarrow\; \vec{n_1} \cdot \vec{n_2} = 0 \;\Rightarrow\; \boxed{A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2 = 0}$

4.2.2 Условие параллельности

Если $\alpha_1 \parallel \alpha_2$, то $\vec{n_1} \parallel \vec{n_2} \;\Rightarrow\; \boxed{\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2}}$

Примечание. Если $\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2} = \frac{D_1}{D_2}$, то плоскости **совпадают**.

Примечание. Если $\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2} \neq \frac{D_1}{D_2}$, то плоскости **не совпадают**.

4.3 Расстояние от точки до плоскости

Пусть плоскость α задана общим уравнением:

$$\alpha : Ax + By + Cx + D = 0, \text{ где } \vec{n} = \{A, B, C\}$$

Пусть задана некоторая точка $M_0(x_0, y_0, z_0)$. Возьмём некоторую точку $M(x, y, z) \in \alpha$. Составим вектор $\overrightarrow{M_0M} = \{x_0 - x, y_0 - y, z_0 - z\}$. Тогда модуль проекции $\overrightarrow{MM_0}$ на вектор на направление вектора нормали и есть искомое расстояние. Найдем:

$$\overrightarrow{M_0M} \cdot \vec{n} = |\overrightarrow{M_0M}| \underbrace{|\vec{n}| \cdot \cos\varphi}_{\text{пр}_{\vec{n}} \overrightarrow{M_0M}}$$

$$\begin{aligned} \vec{n} \cdot \overrightarrow{M_0M} &= A(x_0 - x) + B(y_0 - y) + C(z_0 - z) \\ &= Ax_0 + By_0 + Cz_0 + (-Ax - By - Cz) \\ &= Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D \end{aligned}$$

$$|\vec{n}| = \sqrt{A^2 + B^2 + C^2}$$

$$\boxed{\rho(M_0, \alpha) = |\,\text{пр}_{\vec{n}} \overrightarrow{M_0M}| = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}}$$

5 Прямая в пространстве

5.1 Способы задания прямой в пространстве

5.1.1 Каноническое уравнение прямой

Пусть прямая l проходит через точку $M_0\,(x_0, y_0, z_0)$ и имеет направляющий вектор $\vec{S} = \{m, n, p\}$. Возьмём на прямой l произвольную точку $M(x, y, z)$. Составим вектор:

$$\overrightarrow{M_0M} = \{x - x_0, y - y_0, z - z_0\}$$

Отсюда:

$$\overrightarrow{M_0M} \parallel \vec{S} \implies \boxed{\frac{x - x_0}{m} = \frac{y - y_0}{n} = \frac{z - z_0}{p}}$$

5.1.2 Параметрическое уравнение

Пусть прямая l задана каноническим уравнением:

$$l : \frac{x - x_0}{m} = \frac{y - y_0}{n} = \frac{z - z_0}{p} = (t)$$

Отсюда:

$$\begin{cases} \dfrac{x - x_0}{m} = t \\ \dfrac{y - y_0}{n} = t \\ \dfrac{z - z_0}{p} = t \end{cases} \implies \boxed{\begin{cases} x = x_0 + mt \\ y = y_0 + nt \\ z = z_0 + pt \end{cases}}$$

5.1.3 Через две точки

Пусть прямая l проходит через точки $M_0(x_0, y_0, z_0)$ и $M_1(x_1, y_1, z_1)$. Возьмём на прямой l точку $M(x, y, z)$. Составим два вектора:

$$\overrightarrow{M_0M} = \{x - x_0, y - y_0, z - z_0\}$$
$$\overrightarrow{M_0M_1} = \{x_1 - x_0, y_1 - y_0, z_1 - z_0\}$$

Отсюда:

$$\overrightarrow{M_0M} \parallel \overrightarrow{M_0M_1} \implies \boxed{\frac{x - x_0}{x_1 - x_0} = \frac{y - y_0}{y_1 - y_0} = \frac{z - z_0}{z_1 - z_0}}$$

5.1.4 Общее уравнение

Пусть плоскости α_1 и α_2 заданы общими уравнениями:

$$\alpha_1 : A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$$
$$\alpha_2 : A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$$

Если $\alpha_1 \nparallel \alpha_2$, то они пересекаются по прямой l. Тогда $\forall M(x, y, z) \in l$ будет выполнятся система:

$$\boxed{\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0 \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0 \end{cases}}$$

Пример. Составить уравнение прямой, являющейся пересечением плоскостей:

$$\alpha_1 : 2x + y - z + 4 = 0$$
$$\alpha_2 : 3x + 2y + z - 6 = 0$$

Для того, чтобы составить уравнение прямой l, нужно знать $M_0(x_0, y_0, z_0)$ направляющий вектор $\vec{S} = \{m, n, p\}$.

$$\text{Из (1)} \implies \vec{n_1} = \{2, 1, -1\}$$
$$\text{Из (2)} \implies \vec{n_2} = \{3, 2, 1\}$$
$$\alpha_1 \neq \alpha_2$$

Найдем точку M_0. Пусть $z_0 = 0$ (прямая обязательно пересечёт плоскость oXY):

$$\begin{cases} 2x_0 + y_0 + 4 = 0 \\ 3x_0 + 2y_0 - 6 = 0 \end{cases} \implies \begin{cases} 4x_0 + 2y_0 + 8 = 0 \\ 3x_0 + 2y_0 + -6 = 0 \end{cases} \implies \begin{cases} x_0 = -14 \\ y_0 = 24 \end{cases} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow M_0(-14, 24, 0)$$

Найдем направляющий вектор $\vec{S}$

$$\vec{S} = \vec{n_2} \cdot \vec{n_1} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 3 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \end{vmatrix} = -3\vec{i} + 5\vec{j} - \vec{k} \Rightarrow \vec{S} = \{-3, 5, 1\}$$

Составим каноническое уравнение прямой:

$$\frac{x+14}{-3} = \frac{y-24}{5} = \frac{z}{-1}$$

5.2 Расстояние от точки до прямой в пространстве

Пусть прямая l задана каноническим уравнением:

$$l : \frac{x - x_0}{m} = \frac{y - y_0}{n} = \frac{z - z_0}{p}$$

$$\vec{S} = \{m, n, p\}$$

Задана точка $M_1(x_1, y_1, z_1) \notin l$. Составим вектор:

$$\overrightarrow{M_0M_1} = \{x_1 - x_0, y_1 - y_0, z_1 - z_0\}$$

Построим на векторах $\vec{S}$ и $\overrightarrow{M_0M}$ параллелограмм. Тогда высота этого параллелограмма из точки M_1 и есть искомое расстояние от точки M_1 до прямой l.

$$S_{par} = h \cdot |\vec{S}|$$
$$h = \frac{S_{par}}{|\vec{S}|}$$
$$S_{par} = |\overrightarrow{M_0M_1} \times \vec{S}|$$

Тогда:

$$\overrightarrow{M_0M_1} \times \vec{S} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x_1 - x_0 & y_1 - y_0 & z_1 - z_0 \\ m & n & p \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} y_1 - y_0 & z_1 - z_0 \\ n & p \end{vmatrix} \cdot \vec{i} - \begin{vmatrix} x_1 - x_0 & z_1 - z_0 \\ m & p \end{vmatrix} \cdot \vec{j} + \begin{vmatrix} x_1 - x_0 & y_1 - y_0 \\ m & n \end{vmatrix} \cdot \vec{k} \implies$$

$$\overrightarrow{M_0M_1 \times \vec{S}} = \left\{ \begin{vmatrix} y_1 - y_0 & z_1 - z_0 \\ n & p \end{vmatrix}, - \begin{vmatrix} x_1 - x_0 & z_1 - z_0 \\ m & p \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} x_1 - x_0 & y_1 - y_0 \\ m & n \end{vmatrix} \right\} \implies$$

$$|\overrightarrow{M_0M_1 \times \vec{S}}| = \sqrt{\begin{vmatrix} y_1 - y_0 & z_1 - z_0 \\ n & p \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} x_1 - x_0 & z_1 - z_0 \\ m & p \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} x_1 - x_0 & y_1 - y_0 \\ m & n \end{vmatrix}^2} \implies$$

$$\rho(M_1, l) = \frac{|\overrightarrow{M_1M_0} \times \vec{S}|}{|\vec{S}|} = \boxed{\frac{\sqrt{\begin{vmatrix} y_1 - y_0 & z_1 - z_0 \\ n & p \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} x_1 - x_0 & z_1 - z_0 \\ m & p \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} x_1 - x_0 & y_1 - y_0 \\ m & n \end{vmatrix}^2}}{\sqrt{m^2 + n^2 + p^2}}}$$

5.2.1 Расстояние между параллельными прямыми

Пусть прямые заданы каноническими уравнениями:

$$l_1 : \frac{x - x_0}{m_1} = \frac{y - y_0}{n_1} = \frac{z - z_0}{p_1} \implies M_0(x_0, y_0, z_0), \vec{S_1} = \{m_1, n_1, p_1\}$$
$$l_2 : \frac{x - x_0}{m_2} = \frac{y - y_0}{n_2} = \frac{z - z_0}{p_2} \implies M_0(x_0, y_0, z_0), \vec{S_2} = \{m_2, n_2, p_2\}$$
$$l_1 \parallel l_2 \implies \frac{m_1}{m_2} = \frac{n_1}{n_2} = \frac{p_1}{p_2}$$

Построим параллелограмм на векторах $\overrightarrow{S_1}$ и $\overrightarrow{M_1M_2}$. Тогда расстояние между прямыми l_1 и l_2 будет высота данного параллелограмма.

$$\rho(l_1, l_2) = \frac{|\overrightarrow{M_1M_0} \times \vec{S}|}{|\vec{S}|} = \boxed{\frac{\sqrt{\begin{vmatrix} y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ n_1 & p_1 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} x_2 - x_1 & z_2 - z_1 \\ m_1 & p_1 \end{vmatrix}^2, + \begin{vmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 \\ m_1 & n_1 \end{vmatrix}^2}}{\sqrt{m_1^2 + n_1^2 + p_1^2}}}$$

5.2.2 Расстояние между скрещивающимися прямыми

Пусть прямые заданы каноническими уравнениями:

$$l_1 : \frac{x - x_1}{m_1} = \frac{y - y_1}{n_1} = \frac{z - z_1}{p_1} \implies M_1(x_1, y_1, z_1), \quad \vec{S_1} = \{m_1, n_1, p_1\}$$
$$l_2 : \frac{x - x_2}{m_2} = \frac{y - y_2}{n_2} = \frac{z - z_2}{p_2} \implies M_2(x_2, y_2, z_2), \quad \vec{S_2} = \{m_2, n_2, p_2\}$$

Составим вектор $\overrightarrow{M_1M_2} = \{x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1\}$
Вектора $\vec{S}$ и $\overrightarrow{M_1M_2}$ не компланарны. Поэтому на этих векторах можно построить парал-

лелепипед. Тогда расстояние между прямыми l_1 и l_2 будет равно высоте этого параллелепипеда.

$$V = |\overrightarrow{M_1M_2} \cdot \vec{s_1} \cdot \vec{s_2}|$$
$$V = h \cdot S$$

$$\overrightarrow{M_1M_2} \cdot \vec{s_1} \cdot \vec{s_2} = \begin{vmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ m_1 & n_1 & p_1 \\ m_2 & n_2 & p_2 \end{vmatrix}$$

$$S = |\vec{s_1} \times \vec{s_2}| = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ m_1 & n_1 & p_1 \\ m_2 & n_2 & p_2 \end{vmatrix} = \vec{i} \cdot \begin{vmatrix} n_1 & p_1 \\ n_2 & p_2 \end{vmatrix} - \vec{j} \cdot \begin{vmatrix} m_1 & p_1 \\ m_2 & p_2 \end{vmatrix} + \vec{k} \cdot \begin{vmatrix} m_1 & n_1 \\ m_2 & n_2 \end{vmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{\rho(l_2, l_1) = \frac{\left|\begin{vmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & x_2 - x_1 \\ m_1 & n_1 & p_1 \\ m_2 & n_2 & p_2 \end{vmatrix}\right|}{\sqrt{\begin{vmatrix} n_1 & p_1 \\ n_2 & p_2 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} m_1 & p_1 \\ m_2 & p_2 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} m_1 & n_1 \\ m_2 & n_2 \end{vmatrix}^2}}}$$

5.3 Взаимное расположение прямых в пространстве

Пусть прямые l_1 и l_2 заданы каноническими уравнениями:

$$l_1 : \frac{x - x_1}{m_1} = \frac{y - y_1}{n_1} = \frac{z - z_1}{p_1} \implies M_1(x_1, y_1, z_1), \vec{S_1} = \{m_1, n_1, p_1\}$$
$$l_2 : \frac{x - x_2}{m_2} = \frac{y - y_2}{n_2} = \frac{z - z_2}{p_2} \implies M_2(x_2, y_2, z_2), \vec{S_2} = \{m_2, n_2, p_2\}$$

Составим вектор $\overrightarrow{M_1M_2}$.

5.3.1 Совпадают

Если прямые l_1 и l_2 **совпадают**, то:

$$\frac{m_1}{m_2} = \frac{n_1}{n_1} = \frac{p_1}{p_1}$$
$$\frac{x_2 - x_1}{m_1} = \frac{y_2 - y_1}{n_1} = \frac{z_2 - z_1}{p_1}$$

5.3.2 Параллельны

Если прямые l_1 и l_2 **параллельны** то:

$$\frac{m_1}{m_2} = \frac{n_1}{n_2} = \frac{p_1}{p_2}$$

И **не** выполняется условие:

$$\frac{x_2 - x_1}{m_1} = \frac{y_2 - y_1}{n_1} = \frac{z_2 - z_1}{p_1}$$

5.3.3 Пересекаются

Если прямые l_1 и l_2 **пересекаются**, они лежат в одной плоскости. В таком случае вектора $\overrightarrow{M_1M_2}, \vec{s_1}, \vec{s_2}$ – компланарны:

$$\overrightarrow{M_1M_2} \cdot \vec{S_1} \cdot \vec{S_2} = 0$$

$$\boxed{\begin{vmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ m_1 & n_1 & p_1 \\ m_2 & n_2 & p_2 \end{vmatrix} = 0}$$

5.3.4 Скрещиваются

Если прямые l_1 и l_2 **скрещиваются**, то они не лежат в одной плоскости. В таком случае вектора $\overrightarrow{M_1M_2}, \vec{s_1}, \vec{s_2}$ – некомпланарны:

$$\overrightarrow{M_1M_2} \cdot \vec{S_1} \cdot \vec{S_2} \neq 0$$

$$\boxed{\begin{vmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ m_1 & n_1 & p_1 \\ m_2 & n_2 & p_2 \end{vmatrix} \neq 0}$$

5.4 Угол между прямой и плоскостью

Пусть плоскость задана общим уравнением:

$$\alpha : Ax + By + Cz + D = 0$$

Пусть прямая l задана каноническим уравнением:

$$l : \frac{x - x_0}{m} = \frac{y - y_0}{n} = \frac{z - z_0}{p} \qquad \vec{s} = \{m, n, p\}$$

Обозначим угол φ - между прямой плоскостью, и β - между прямой и нормалью. Тогда:

$$\cos\beta = \frac{\vec{n} \cdot \vec{s}}{|\vec{n}| \cdot |\vec{s}|}$$

$$\beta = 90 - \varphi$$

$$\cos(90 - \varphi) = \frac{\vec{n} \cdot \vec{s}}{|\vec{n}| \cdot |\vec{s}|} \;\Rightarrow\; \sin(\varphi) = \frac{\vec{n} \cdot \vec{s}}{|\vec{n}| \cdot |\vec{s}|}$$

$$\boxed{\sin\varphi = \frac{|Am + Bn + Cp|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2} \cdot \sqrt{m^2 + n^2 + p^2}}}$$

5.4.1 Условие параллельности прямой и плоскости

Пусть плоскость задана общим уравнением:

$$\alpha : Ax + By + Cz + D = 0 \qquad \vec{n} = \{A, B, C\}$$

Пусть прямая l задана каноническим уравнением:

$$l : \frac{x - x_0}{m} = \frac{y - y_0}{n} = \frac{z - z_0}{p} \qquad \vec{s} = \{m, n, p\}$$

$$l \parallel \alpha \implies \vec{n} \perp \vec{s} \implies \vec{n} \cdot \vec{s} = 0$$

$$\boxed{Am + Bn + Cp = 0}$$

5.4.2 Условие перпендикулярности прямой и плоскости

Пусть плоскость задана общим уравнением:

$$\alpha : Ax + By + Cz + D = 0 \qquad \vec{n} = \{A, B, C\}$$

Пусть прямая l задана каноническим уравнением:

$$l : \frac{x - x_0}{m} = \frac{y - y_0}{n} = \frac{z - z_0}{p} \qquad \vec{s} = \{m, n, p\}$$

$$l \perp \alpha \implies \vec{n} \parallel \vec{s} \implies \boxed{\frac{A}{m} = \frac{B}{n} = \frac{C}{p}}$$

5.4.3 Примеры задач

Пример. Задача: *составить уравнение прямой l_2 симметричной прямой l_1, которая задана каноническим уравнением*:

$$\frac{x-1}{2} = \frac{y}{1} = \frac{z+1}{0} \qquad \vec{s} = \{2, 1, 0\}$$

относительно плоскости α:

$$\alpha : x - y + 2z - 1 = 0 \qquad \vec{n} = \{1, -1, 2\}$$

Решение: (1) Проверим, является ли прямая l_1 параллельной плоскости α:

$$\vec{s} \cdot \vec{n} = 2 \cdot 1 + 1 \cdot (-1) + 0 \cdot 2 = 2 - 1 = 1 \neq 0 \implies l_1 \nparallel \alpha$$

(2) Находим точку пересечения прямой l с плоскостью α - пусть это точка $A(x_2, y_2, z_2)$. Из канонического уравнения прямой l_1 получим параметрическое уравнение:

$$\frac{x-1}{2} = \frac{y}{1} = \frac{z+1}{0} = t$$

$$\begin{cases} \dfrac{x-1}{2} = t \\ \dfrac{y}{1} = t \\ \dfrac{z+1}{0} = t \end{cases} \implies \begin{cases} x = 2t + 1 \\ y = t \\ z = -1 \end{cases}$$

Т.к. точка A принадлежит и прямой, и плоскости, то её координаты удовлетворяют и параметрическому уравнению прямой, и общему уравнению плоскости:

$$2t + 1 - t - 2 - 1 = 0$$

$$t = 2 \implies \begin{cases} x_2 = 5 \\ y_2 = 2 \\ z_2 = -1 \end{cases} \implies A(5, 2, -1)$$

(3) Из канонического уравнения прямой возьмем точку $M_1(1,0,-1) \in l_1$. Найдем ей симметричную относительно плоскости α точку $M_2(x_2, y_2, z_2)$ Составим уравнение прямой l_3, проходящей через точку M_1 и с направляющим вектором $\vec{n}$.

$$\frac{x-1}{1} = \frac{y}{-1} = \frac{z+1}{2}$$

Найдём точку пересечения $O(x_3, y_3, z_3)$ прямой l_3 с плоскостью α. Составим параметрическое уравнение прямой l_3:

$$\frac{x-1}{1} = \frac{y}{-1} = \frac{z+1}{2} = t$$

$$\begin{cases} \dfrac{x-1}{1} = t \\ \dfrac{y}{-1} = t \\ \dfrac{z+1}{2} = t \end{cases} \implies \begin{cases} x = t+1 \\ y = -t \\ z = 2t-1 \end{cases}$$

Т.к. точка O принадлежит и прямой, и плоскости, то её координаты удовлетворяют и параметрическому уравнению прямой, и общему уравнению плоскости:

$$t + 1 + t + 4t - 2 = 0$$

$$t = \frac{1}{3} \implies \begin{cases} x_3 = \dfrac{4}{3} \\ y_3 = -\dfrac{1}{3} \\ z_3 = \dfrac{1}{3} \end{cases}$$

Составляем вектор $\overrightarrow{M_1O}$:

$$\overrightarrow{M_1O} = \left\{\frac{1}{3}, -\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right\}$$

Пусть $M_2(x_2, y_2, z_2)$. Тогда:

$$\overrightarrow{OM_2} = \{x_2, y_2, z_2\}$$

$$\overrightarrow{M_1O} = \overrightarrow{OM_2} \implies \begin{cases} x_2 - \dfrac{4}{3} = \dfrac{1}{3} \\ y_2 + \dfrac{1}{3} = -\dfrac{1}{3} \\ z_2 + \dfrac{1}{3} = \dfrac{2}{3} \end{cases} \iff \begin{cases} x_2 = \dfrac{5}{3} \\ y_2 = \dfrac{2}{3} \\ z_2 = \dfrac{1}{3} \end{cases}$$

4) Составляем уравнение прямой, проходящей через точки $A\,(5,2,-1)$ и $M_2\left(\frac{5}{3},-\frac{2}{3},\frac{1}{3}\right)$:

$$\frac{x-x_a}{x_1-x_a}=\frac{y-y_a}{y_2-y_a}=\frac{z-z_a}{z_2-z_a}$$
$$\frac{x-5}{\frac{5}{3}-5}=\frac{y-2}{-\frac{2}{3}-2}=\frac{z+1}{\frac{1}{3}+1}$$
$$\frac{x-5}{-\frac{10}{3}}=\frac{y-2}{-\frac{8}{3}}=\frac{z+1}{\frac{4}{3}}$$
$$\boxed{\frac{x-5}{-5}=\frac{y-2}{-4}=\frac{z+1}{4}}$$

Пример. Задача: *Составить каноническое уравнение общего перпендикуляра к прямым l_1 и l_2, заданными параметрическими уравнениями*:

$$l_1\colon\begin{cases}x=t+2\\ y=3t+4\\ z=-2t-2\end{cases}\qquad l_2\colon\begin{cases}x=-3t+2\\ y=t\\ z=3t-4\end{cases}$$

Решение:
1) Составим канонические уравнения прямых для l_1 и l_2:

$$l_1\colon\begin{cases}t=\dfrac{x-2}{2}\\ t=\dfrac{y-4}{3}\\ t=\dfrac{z+2}{-2}\end{cases}\implies\frac{x-2}{2}=\frac{y-4}{3}=\frac{z+2}{-2}\implies$$
$$M_1(2,4,-2)\qquad\vec{S_1}=\{2,3,-2\}$$

$$l_2\colon\begin{cases}t=\dfrac{x-1}{-3}\\ t=\dfrac{y}{1}\\ t=\dfrac{z+4}{3}\end{cases}\implies\frac{x-1}{-3}=\frac{y-4}{3}=\frac{z+2}{-2}\implies$$
$$M_2(1,4,-2)\qquad\vec{S_2}=\{-3,1,3\}$$

Найдём вектор $\overrightarrow{M_1M_2}$:

$$\overrightarrow{M_1M_2}=\{0,-4,-2\}$$

Проверим, являются ли прямые l_1 и l_2 скрещивающимися или параллельными. Найдём смешанное произведение $\overrightarrow{M_1M_2}\vec{S_1}\vec{S_2}$:

$$\overrightarrow{M_1M_2}\vec{S_1}\vec{S_2}=\begin{vmatrix}0&-4&-2\\2&3&-2\\-3&1&3\end{vmatrix}=-22\neq0$$

Значит, прямые не лежат в одной плоскости, следовательно, они скрещивающиеся. 2) Найдем направляющий вектор общего перпендикуляра к прямым l_1 и l_2.

$$\left.\begin{matrix}\vec{S}\perp\vec{S_1}\\ \vec{S}\perp\vec{S_2}\end{matrix}\right\}\iff \vec{S}=\vec{S_1}\times\vec{S_2}$$

$$\vec{S_1}\times\vec{S_2}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 2 & 3 & -2\\ -3 & 1 & 3\end{vmatrix}=11\vec{i}+11\vec{k}\implies \vec{S}=\{1,0,1\}$$

3) Составим уравнение плоскости α_1, проходящей через точки M_1 и вектора $\vec{S_1}\vec{S}$. Возьмём произвольную точку $M(x,y,z)\in\alpha_1$. Составим вектор $\overrightarrow{M_1M}$:

$$\overrightarrow{M_1M}=\{x-2,y-4,z+2\}$$

Вектора $\overrightarrow{M_1M},\vec{S_1},\vec{S}$ - компланарные, а следовательно:

$$\overrightarrow{M_1M}\vec{S_1}\vec{S}=0$$

$$\overrightarrow{M_1M}\vec{S_1}\vec{S}=\begin{vmatrix}x-2 & y-4 & z+2\\ 2 & -3 & 2\\ 1 & 0 & 1\end{vmatrix}=-3x+4y+3z-4$$

$$\boxed{\alpha_1\colon\ -3x+4y+3z-4=0}$$

4) Составим плоскость α_2 через точку M_2 и вектора $\vec{S_1}$ и $\vec{S_2}$. Возьмём произвольную точку $M(x,y,z)\in\alpha_2$. Составим вектор $\overrightarrow{M_2M}$:

$$\overrightarrow{M_2M}=\{x-2,y,z+4\}$$

Вектора $\overrightarrow{M_2M},\vec{S_2},\vec{S}$ - компланарные, а следовательно:

$$\overrightarrow{M_2M}\vec{S_2}\vec{S}=0$$

$$\overrightarrow{M_2M}\vec{S_2}\vec{S}=\begin{vmatrix}x-2 & y & z+4\\ -3 & 1 & 3\\ 1 & 0 & 1\end{vmatrix}=x+6y-z-6=0$$

$$\boxed{\alpha_2\colon x+6y-z-6=0}$$

5) Для начала, определим одну из координат точек. Прямая l пересекает плоскость oXY, т.е. можем взять $z=0$. Тогда в системе уравнений:

$$\begin{cases}-3x+4y+3z-4=0\\ x+6y-z-6=0\end{cases}$$

Полагаем, что $z=0$:

$$\begin{cases}-3x+4y-4=0\\ x+6y-6=0\end{cases}\implies\begin{cases}x=0\\ y=1\end{cases}\implies A(0,1,0)$$

где точка $A \in \alpha_1, \alpha_2, l$.
Составляем каноническое уравнение прямой l, проходящей через точку A, и с направляющим вектором $\vec{S}$.

$$\frac{x-0}{1} = \frac{y-1}{0} = \frac{z-0}{1}$$

$$\boxed{\frac{x}{1} = \frac{y-1}{0} = \frac{z}{1}}$$

Модуль 2

6 Кривые и поверхности 2-го порядка

Определение 1. Уравнением второго порядка называется уравнение вида:

$$\boxed{Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0}$$
$$A, B, C, D, E, F = const, \ \ A^2 + B^2 + C^2 > 0$$

6.1 Эллипс

Определение 1. **Эллипс** — геометрическое место точек, сумма расстояний от каждой из которых до двух фиксированных точек, называемых **фокусами**, постоянна и равна $2a$.

F_1, F_2 — **фокусы эллипса**

Определение 2. Расстояние между фокусами называется **фокальным расстоянием**

Определение 3. Расстояние от каждой точки эллипса до фокуса называется **фокальным радиусом**

Определение 4. Прямая (*большая ось*), на которой лежат фокусы, и прямая (*малая ось*), которая проходит на равном расстоянии от фокусов, являются **осями симметрии** эллипса.
1 прямая — **большая ось**
2 прямая — **малая ось**

Определение 5. Точка пересечения осей называется **центром эллипса**

Определение 6. Точки пересечения с осями называются **вершинами эллипса**.

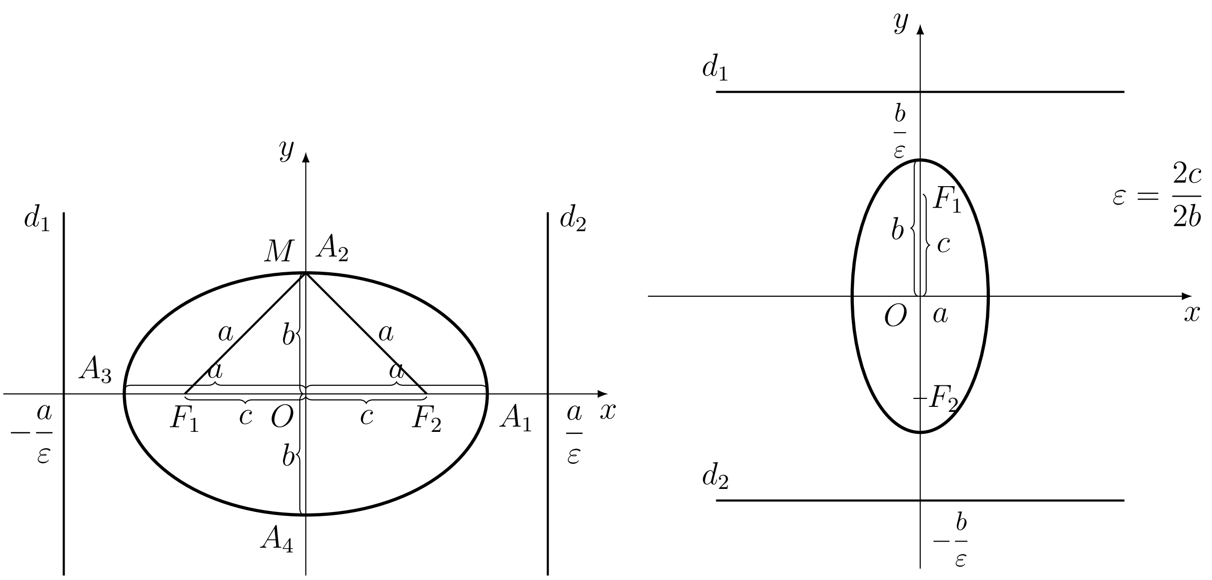
Уравнение эллипса

Расположим декартову систему координат так, чтобы её начало координат совпадало с центром эллипса, а фокусы лежали на оси абсцисс.
O – центр эллипса
F_1, F_2 – фокусы эллипса
$A_1(a, 0),\ A_2(0, b),\ A_3(-a, 0),\ A_4(0, -b)$ – вершины эллипса
$F_1(-c, 0), F_2(c, 0)$
Возьмём точку $M(x, y)$, принадлежащую эллипсу
Составим векторы $\overrightarrow{F_1M} = \{x + c, y\},\ \overrightarrow{F_2M} = \{x - c, y\}$
$a = A_3O = OA_1$

$$\begin{aligned}
|\overrightarrow{F_1M}| + |\overrightarrow{F_2M}| &= 2a \\
\sqrt{(x+c)^2 + y^2} + \sqrt{(x-c)^2 + y^2} &= 2a \\
\sqrt{(x+c)^2 + y^2} &= 2a - \sqrt{(x-c)^2 + y^2} \\
(x+c)^2 + y^2 &= 4a^2 - 4a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} + (x-c)^2 + y^2 \\
x^2 + 2xc + c^2 + y^2 &= 4a^2 - 4a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} + x^2 - 2xc + c^2 + y^2 \\
4a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} &= 4a^2 - 4xc \\
a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} &= a^2 - xc \\
a^2c^2 + x^2a^2 - 2a^2xc + a^2y^2 &= a^4 - 2a^2xc + x^2c^2 \\
x^2a^2 - x^2c^2 + a^2y^2 &= a^4 - a^2c^2 \\
x^2(a^2 - c^2) + a^2y^2 &= a^2(a^2 - c^2) \ \mid\ : a^2(a^2 - c^2) \\
\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2 - c^2} &= 1
\end{aligned}$$

Обозначим $b^2 = a^2 - c^2 \ \Rightarrow\ \boxed{\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1}$ **— каноническое уравнение эллипса**

a — большая полуось эллипса, b — малая полуось эллипса



(a) Эллипс (b) Примечание №6

Замечание. $a = 2,\ b = \sqrt{2}$

Неверная запись уравнения: $\cancel{\dfrac{x^2}{2^2} + \dfrac{y^2}{(\sqrt{2})^2} = 1}$

Верная запись уравнения: $\dfrac{x^2}{4} + \dfrac{y^2}{2} = 1$

Определение 7. Отношение фокального расстояния эллипса к большой оси называется **эксцентриситетом**.
Обозначение – ε

$$\frac{F_1F_2}{A_3A_1} = \frac{2c}{2a} = \varepsilon \ \Rightarrow \ \varepsilon = \frac{c}{a}$$

$$\text{т.к. } c < a \ \Rightarrow \ 0 < \varepsilon < a$$

Теорема 1.
Отношение фокального радиуса точки эллипса к расстоянию от этой точки до некоторой прямой, называемой **директрисой**, постоянно и равно эксцентриситету.
Директриса перпендикулярна прямой, на которой лежат фокусы.
Уравнение директрисы:

$$d_1 \colon x = -\frac{a}{\varepsilon}$$

$$d_2 \colon x = \frac{a}{\varepsilon}$$

Примечание.

1. Уравнение эллипса с центром в точке $O(x_0, y_0)$

$$\boxed{\frac{(x - x_0)^2}{a^2} + \frac{(y - y_0)^2}{b^2} = 1}$$

2. Уравнение мнимого эллипса (с центром в точке $O(0, 0)$)

$$\boxed{\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = -1}$$

3. Уравнение окружности с центром в точке $O(0, 0)$ и радиусом R

$$a = b = R$$

$$\frac{x^2}{R^2} + \frac{y^2}{R^2} = 1$$

$$\Downarrow$$

$$\boxed{x^2 + y^2 = R^2}$$

4. Уравнение окружности с центром в точке $O'(x_0, y_0)$ и радиусом R, $\varepsilon = 0$

$$\boxed{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = R^2}$$

5. Уравнение точки $O'(x_0, y_0)$

$$\boxed{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = 0}$$

6. Если $a < b$, то эллипс будет вытянут вдоль оси y и фокусы будут располагаться на оси Oy. (Рис. 1b)

$$\boxed{\varepsilon = \frac{2c}{2b}}$$

6.2 Гипербола

Определение 1. **Гиперболой** называется геометрическое место точек, разность расстояний от каждой из которых до двух фиксированных точек, называемых фокусами, постоянна и равна $2a$.

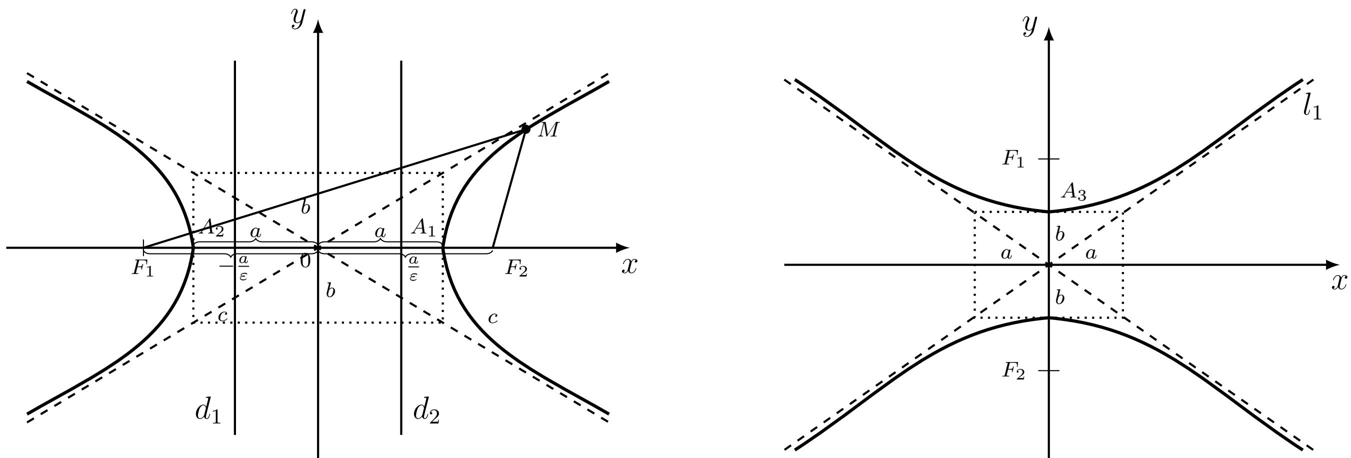
Определение 2. Прямая (*действительная ось*), на которой лежат фокусы, и прямая (*мнимая ось*), которая проходит через середину отрезка между фокусами перпендикулярно первой прямой, называются **осями гиперболы**.
1 ось – **действительная ось**
2 ось – **мнимая ось**

Определение 3. Расстояние между фокусами называется **фокальным расстоянием**.

$$F_1, F_2 \text{ – фокусы гиперболы}$$
$$F_1F_2 = 2c$$

Определение 4. Точка пересечения действительной и мнимой осей называется **центром гиперболы**.

Определение 5. Точки пересечения гиперболы с действительной осью называется **вершиной гиперболы**.



(a) Гипербола (b) Примечание

Рис. 2

Уравнение гиперболы

Расположим декартову прямоугольную систему координат так, чтобы её начало совпадало с центром гиперболы, а фокусы лежали на оси абсцисс (Рис. 2a).
$F_1(-c,0),\ F_2(c,0),\ M(x,y)$
Составим два вектора: $\overrightarrow{F_1M}=\{x+c,y\}$

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{F_2M}&=\{x-c,y\}\\
|\overrightarrow{F_1M}|-|\overrightarrow{F_2M}|&=2a\\
\sqrt{(x+c)^2-y^2}-\sqrt{(x-c)^2+y^2}&=2a\\
\sqrt{(x+c)^2+y^2}&=2a+\sqrt{(x-c)^2+y^2}\\
(x+c)^2+y^2&=4a^2+4a\sqrt{(x-c)^2+y^2}+(x-c)^2+y^2\\
x^2+2xc+c^2+y^2&=4a^2+4a\sqrt{(x-c)^2+y^2}+x^2-2xc+c^2+y^2\\
-4a\sqrt{(x-c)^2+y^2}&=4a^2-4xc\\
-a\sqrt{(x-c)^2+y^2}&=a^2-xc\\
a^2c^2+x^2a^2-2a^2xc+a^2y^2&=a^4-2a^2xc+x^2c^2\\
x^2a^2-x^2c^2+a^2y^2&=a^4-a^2c^2\\
x^2(a^2-c^2)+a^2y^2&=a^2(a^2-c^2)\ \mid\ :a^2(a^2-c^2)\\
\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{a^2-c^2}&=1
\end{aligned}$$

Обозначим $b^2=c^2-a^2\ \Rightarrow\ \boxed{\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1}$ — **каноническое уравнение гиперболы** с центром в точке $O(0,0)$

a – действительная ось гиперболы, b – мнимая ось гиперболы

Определение 6. Отношение фокального расстояния к величине действительной оси гиперболы называется **эксцентриситетом** (ε)

$$\varepsilon=\frac{2c}{2a}\ \text{т.к. } c>a,\text{ то } \varepsilon>1\Rightarrow\ \varepsilon=\frac{c}{a}$$

Эксцентриситет характеризует форму гиперболы. Чем меньше эксцентриситет, тем меньше отношение $\frac{b}{a}$ её полуосей, а значит, тем более вытянут её основной прямоугольник.

Определение 7. Директриса (см. определение эллипса)

$$d_1\colon x=-\frac{a}{\varepsilon}$$
$$d_2\colon x=\frac{a}{\varepsilon}$$

Примечание.

1. Канонические уравнения сопряжённой гиперболы (с центром в точке $O(0,0)$)

$$\boxed{-\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1 \text{ или } \frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=-1}$$

2. Уравнение гиперболы с центром в точке $O(x_0, y_0)$

$$\boxed{\frac{(x-x_0)^2}{a^2}-\frac{(y-y_0)^2}{b^2}=1}$$

3. Если $a=b$, то равносторонняя:

$$\boxed{\frac{(x-x_0)^2}{a^2}-\frac{(y-y_0)^2}{a^2}=1}$$

4. Две прямые

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=0$$
$$b^2x^2-a^2y^2=0$$
$$(bx-ay)(bx+ay)=0 \;\Rightarrow$$
$$\Rightarrow \begin{matrix} bx-ay=0 \;\Rightarrow\; y=\frac{b}{a}x \\ bx+ay=0 \;\Rightarrow\; y=-\frac{b}{a}x \end{matrix}$$

5. Уравнения асимптот

$$\boxed{l_1\colon y=\frac{b}{a}x}$$
$$\boxed{l_2\colon y=-\frac{b}{a}x}$$

Если центр гиперболы $O(x_0, y_0)$, то:

$$l_1\colon y-y_0=\frac{b}{a}(x-x_0) \quad \Rightarrow\; y=y_0+\frac{b}{a}(x-x_0) \;\Rightarrow \boxed{y=\frac{b}{a}x+\left(y_0-\frac{b}{a}x_0\right)}$$
$$l_2\colon y-y_0=-\frac{b}{a}(x-x_0) \quad \Rightarrow\; y=y_0-\frac{b}{a}(x-x_0) \;\Rightarrow \boxed{y=-\frac{b}{a}x+\left(y_0+\frac{b}{a}x_0\right)}$$

6.3 Парабола

Определение 1. Параболой называется геометрическое место точек, расстояния от каждой из которых до некоторой фиксированной точки, называемой *фокусом*, и некоторой фиксированной прямой, называемой *директрисой*, равны.

Уравнение параболы

Обозначим расстояние от директрисы до фокуса буквой p.
Расположим декартову прямоугольную систему координат так, чтобы начало координат совпадало с вершиной параболы, а фокус находился на оси абсцисс. (Рис. 3a)
Возьмём произвольную точку $M(x, y)$.
$A(-\frac{p}{2}, y)$; $F(\frac{p}{2}, 0)$ – фокус параболы
Составим два вектора: $\overrightarrow{AM} = \left\{x + \frac{p}{2}, 0\right\}$ и $\overrightarrow{FM} = \left\{x - \frac{p}{2}, y\right\}$
По определению $|\overrightarrow{AM}| = |\overrightarrow{FM}|$

$$\sqrt{\left(x + \frac{p}{2}\right)^2 + 0^2} = \sqrt{\left(x - \frac{p}{2}\right)^2 + y^2}$$

$$x^2 + xp + \frac{p^2}{4} = x^2 - xp + \frac{p^2}{4} + y^2$$

$\boxed{y^2 = 2px}$ — **каноническое уравнение параболы** с вершиной в точке $O(0, 0)$

- Если $p > 0$, то ветви параболы направлены вправо
- Если $p < 0$, то ветви параболы направлены влево

$y^2 = 3x \Rightarrow p = \dfrac{3}{2}$

Примечание: $\boxed{x^2 = 2py}$ (каноническое уравнение параболы)

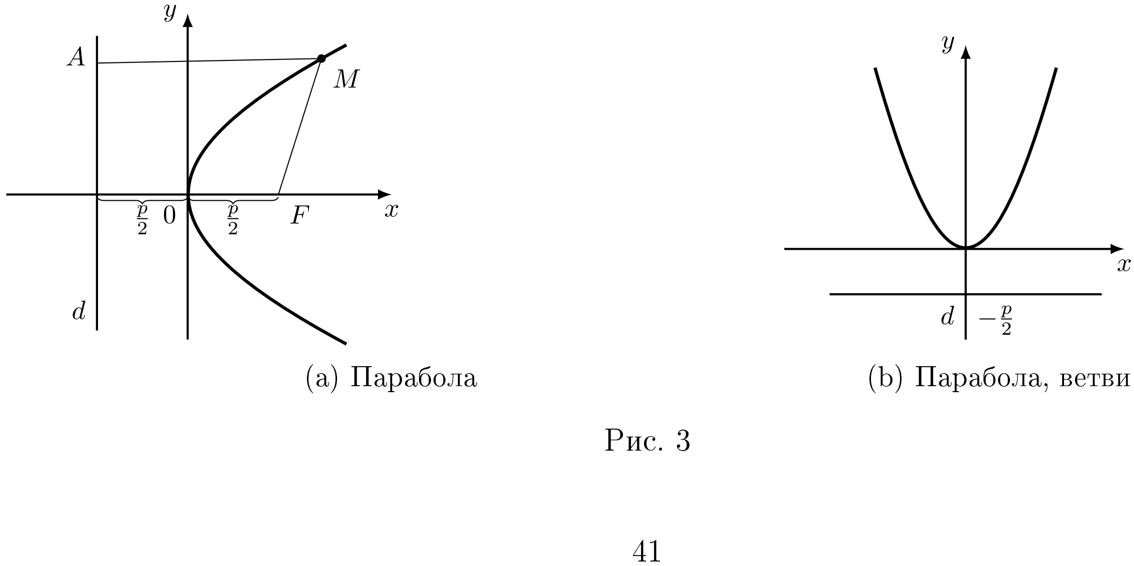
- Если $p > 0$, то ветви параболы направлены вверх (Рис. 3b)
- Если $p < 0$, то ветви параболы направлены вниз

Если вершина параболы находится в $O'(x_0, y_0)$, то:

$$(y - y_0)^2 = 2p(x - x_0) \text{ или } (x - x_0)^2 = 2p(y - y_0)$$

Уравнение директрисы:

- $y^2 = 2px \;\Rightarrow\; \boxed{d\colon x = -\dfrac{p}{2}}$ $\quad\left(\text{Если } O(x_0, y_0)\text{, то } d\colon x - x_0 = -\dfrac{p}{2} \;\Rightarrow\; x = x_0 - \dfrac{p}{2}\right)$
- $x^2 = 2py \;\Rightarrow\; \boxed{d\colon y = -\dfrac{p}{2}}$ $\quad\left(\text{Если } O'(x_0, y_0)\text{, то } d\colon y - y_0 = -\dfrac{p}{2} \Rightarrow y = y_0 - \dfrac{p}{2}\right)$



(a) Парабола

(b) Парабола, ветви вверх

Рис. 3

Пример.

$$2x^2 - 4y^2 - 6x + 8y - 10 = 0$$
$$2(x^2 - 3x) - 4(y^2 - 2y) - 10 = 0$$
$$2\left(x^2 - 3x + \frac{9}{4} - \frac{9}{4}\right) - 4(y^2 - 2y + 1 - 1) - 10 = 0$$
$$2\left(x - \frac{3}{2}\right)^2 - \frac{9}{2} - 4(y-1)^2 + 4 - 10 = 0$$
$$2\left(x - \frac{3}{2}\right)^2 - 4(y+1)^2 = \frac{21}{2}$$

$$\frac{\left(x - \frac{3}{2}\right)^2}{\frac{21}{4}} - \frac{(y-1)^2}{\frac{21}{8}} = 1 \text{ – уравнение}$$

Гипербола с центром в точке $O'\left(\frac{3}{2}, 1\right)$

Действительная полуось: $a = \frac{\sqrt{21}}{2}$

Мнимая полуось: $b = \sqrt{\frac{21}{8}}$

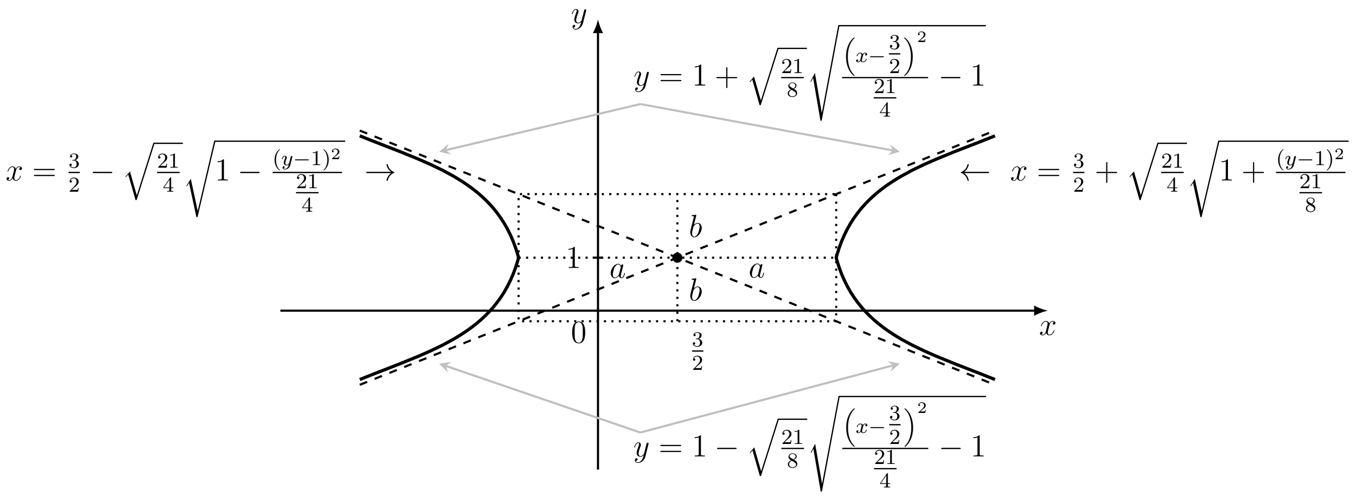


Рис. 4: Пример

7 Матрицы

7.1 Основные понятия

Определение 1. **Матрицей** называется таблица (чисел), в которой элементы расположены по строкам и столбцам.

- Матрицы обозначаются большими латинскими буквами: A, B, C, ...
- **Размерность** определяется количеством строк (m) и количеством столбцов (n) и обозначается $m \times n$
- Элемент a_{ij} – элемент, который находится в i-ой строке и в j-ом столбце.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m} & a_{m+1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Определение 2. Матрицы называются **квадратными**, если количество строк равно количеству столбцов ($m = n$).

Определение 3. Матрицы называются **диагональными**, если все элементы матрицы, кроме элементов на главной диагонали, равны нулю. При этом эта матрица квадратная.

$$D = \begin{pmatrix} d_{11} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & d_{22} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & d_{mn} \end{pmatrix} \qquad d_{ij} \neq 0,\ 1 \leq i \leq n$$

Определение 4.
Главная диагональ — последовательность элементов, которая идёт из левого верхнего угла в правый нижний.
Побочная диагональ — последовательность элементов, которая идёт из правого верхнего угла в левый нижний.

Определение 5. **Единичная матрица** — матрица, у которой все элементы на главной диагонали равны единице, а остальные равны нулю.

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Определение 6. **Нулевой матрицей** называется матрица, элементы которой равны нулю.

Определение 7. **Верхней треугольной матрицей** называется квадратная матрица, у которой под главной диагональю все элементы равны нулю.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 5 & 6 & 11 \\ 0 & 3 & 7 & 10 \\ 0 & 0 & 4 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & 8 \end{pmatrix}$$

Определение 8. **Нижней треугольной матрицей** называется квадратная матрица, у которой над главной диагональю все элементы равны нулю.

Определение 9. Две матрицы **равны**, если они имеют одинаковую размерность и их соответствующие элементы равны.

$$A_{m\times n},\ B_{m\times n}$$
$$A = B \iff a_{ij} = b_{ij}, \text{ где } \begin{matrix} i = 1,\ \ldots,\ m \\ j = 1,\ \ldots,\ n \end{matrix}$$

7.2 Действия с матрицами

7.2.1 Сумма матриц

Определение 1. **Суммой** матриц $A_{m\times n}$ и $B_{m\times n}$ называется матрица C, элементы которой являются суммами соответствующих элементов A и B.

$$A_{m\times n} + B_{m\times n} = C_{m\times n}, \quad \text{где } c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}, \quad \begin{matrix} i = 1 \ldots m \\ j = 1 \ldots n \end{matrix}$$

Замечание. Операция сложения матриц вводится только для матриц одинаковых размеров.

Пример.

$$A_{2\times 2} = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \qquad B_{2\times 2} = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$$
$$C_{2\times 2} = A + B = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3+4 & 2+1 \\ 1+0 & -1+3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

7.2.2 Умножение матрицы на число

Определение 2. **Произведением** матрицы $A_{m\times n}$ на число $k = const$ называется матрица $C_{m\times n}$, элементы которой равны произведению соответствующего элемента матрицы a_{ij} на число k.

$$C = k \cdot A \qquad c_{ij} = k \cdot a_{ij}, \text{ где } \begin{matrix} i = 1,\ \ldots,\ m \\ j = 1,\ \ldots,\ n \end{matrix}$$

7.2.3 Свойства сложения матриц и умножения матрицы на число

1. $A + B = B + A$
2. $(A + B) + C = A + (B + C) = B + (A + C)$
3. Если O — нулевая матрица, то $A + O = A$
4. Найдётся такая матрица B, что $A + B = 0 \quad (B = -A)$
5. $\lambda \cdot (A + B) = \lambda A + \lambda B$
   $\lambda = const$
6. $(\lambda + \mu) \cdot A = \lambda A + \mu A$
7. $\lambda \cdot (\mu A) = (\lambda\mu) \cdot A$

7.2.4 Транспонирование матриц

Определение 3. **Транспонированной матрицей** $(A^T_{m\times n})$ называется матрица $A_{m\times n}$, элементы которой равны $a^T_{ij} = a_{ji}$, $\begin{matrix} i = 1, \ldots, m \\ j = 1, \ldots, n \end{matrix}$

$$A_{2\times 3} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} \longrightarrow A^T_{3\times 2} \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}$$

7.2.5 Свойства транспонирования матриц

1. $(A + B)^T = A^T + B^T$
2. $(\lambda \cdot A)^T = \lambda \cdot A^T$

7.2.6 Произведение матриц

Определение 4. Произведением матриц $A_{m\times k}$ и $B_{k\times n}$ называется матрица $C_{m\times n}$, которая получается следующим образом:

$$c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \ldots + a_{ik}b_{kj} = \sum_{l=1}^{k} a_{il} \cdot b_{lj} \qquad \begin{matrix} i = 1, \ldots, m \\ j = 1, \ldots, n \end{matrix}$$

Замечание. Матрицы можно перемножить, если количество столбцов первой матрицы равно количеству строк второй матрицы. Тогда результирующая матрица будет иметь количество строк первой матрицы и количество столбцов второй матрицы.

$$C_{4\times 5} = A_{4\times \underline{2}} \cdot B_{\underline{2}\times 5}$$

Пример.

$$C_{2\times 2} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & 3 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 & 5 \\ 2 & -1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1\cdot 4 + (-1)\cdot 2 + 2\cdot 3 & 1\cdot 5 + (-1)(-1) + 2(-2) \\ 2\cdot 4 + 3\cdot 2 + 0\cdot 3 & 2\cdot 5 + 3\cdot(-1) + 0\cdot(-2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & 2 \\ 14 & 17 \end{pmatrix}$$

7.2.7 Свойство антикоммутативности матрицы и его исключения

$$\boxed{A\cdot B \neq B\cdot A}$$

Исключения: $A_{m\times n}$ и $B_{m\times n}$

1. $A = B$
   $A\cdot B = A\cdot A = A^2$
2. $B = 0$
   $A\cdot 0 = 0\cdot A = 0$
3. $B = E$
   $A\cdot E = E\cdot A = A$
4. $B = A^{-1}$ – обратная матрица к A
   $A\cdot A^{-1} = A^{-1}\cdot A = E$

Пример.

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 5 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$$

$$\left.\begin{aligned} A\cdot B &= \begin{pmatrix} 4 & 5 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ -1 & 8 \end{pmatrix} \\ B\cdot A &= \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 & 5 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & -3 \\ 0 & 7 \end{pmatrix} \end{aligned}\right\} A\cdot B \neq B\cdot A$$

7.2.8 Свойства произведения матриц

1. $A \cdot B \neq B \cdot A$
2. $1 \cdot A = A$
3. $(A \cdot B) \cdot C = A \cdot (B \cdot C)$ – ассоциативность умножения матриц

Доказательство.
Пусть $A_{m\times n}$, $B_{k\times n}$, $C_{n\times k}$

$$(A \cdot B) \cdot C = \sum_{r=1}^{n} [(A \cdot B)]_{ir} [C]_{rj} = \sum_{r=1}^{k} \left(\sum_{s=1}^{s} [A]_{is} \cdot [B]_{sr} \right) \cdot [C]_{rj} =$$

$$= \sum_{r=1}^{n} \sum_{s=1}^{k} [A]_{is} \cdot [B]_{sr} \cdot [C]_{rj} = \sum_{s=1}^{k} [A]_{is} \cdot \sum_{r=1}^{n} [B]_{sr} \cdot [C]_{rj} = \sum_{s=1}^{k} [A]_{is} \cdot \big[(B \cdot C)\big]_{sj} = A \cdot (B \cdot C)$$

■

4. $(A + B) \cdot C = A \cdot C + B \cdot C$ – дистрибутивность умножения матриц относительно сложения

Доказательство.
$A_{m\times k}$, $B_{m\times n}$, $C_{k\times n}$

$$(A + B) \cdot C = \sum_{r=1}^{k} [(A + B)]_{ir} \cdot [C]_{rj} = \sum_{r=1}^{k} ([A]_{ir} + [B]_{ir}) \cdot [C]_{rj} =$$

$$= \sum_{r=1}^{k} ([A]_{ir} \cdot [C]_{rj} + [B]_{ir} [C]_{rj}) = \sum_{r=1}^{k} [A]_{ir} \cdot [C]_{ri} + \sum_{r=1}^{k} [B]_{ir} \cdot [C]_{ri} = A \cdot C + B \cdot C$$

■

5. $(A \cdot B)^T = B^T \cdot A^T$ – применение транспонирования к произведению матриц

Доказательство.
$A_{m\times n}$ $B_{m\times n}$

$$(A \cdot B)^T = [(A \cdot B)^T]_{ij} = [A \cdot B]_{ji} = \sum_{r=1}^{k} [A]_{jr} \cdot [B]_{ri} =$$

$$= \sum_{r=1}^{k} [A^T]_{ri} \cdot [B^T]_{ir} = \sum_{r=1}^{k} [B^T]_{ir} \cdot [A^T]_{ri} = [B^T \cdot A^T]_{ij} = B^T \cdot A^T$$

■

7.3 Элементарные преобразования матриц

1. Перестановка строк (столбцов) матриц
2. Умножение элементов строки (столбца) матрицы на число
3. Прибавление к элементам одной строки (столбца) соответствующих элементов другой строки (столбца), умноженного на число
4. Используя элементарные преобразования любую матрицу можно привести к ступенчатому виду

Пример. Ступенчатый вид

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 & 4 \\ -1 & 3 & 1 & -2 \\ 5 & 6 & -1 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & 10 & 5 & -2 \\ 0 & 13 & -13 & -20 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & 10 & 5 & -2 \\ 0 & 0 & -195 & -174 \end{pmatrix}$$

7.4 Минор матрицы. Ранг матрицы.

Определение 1. **Минором k-го порядка** матрицы A называется определитель, составленный из пересечения k строк и k столбцов матрицы A с сохранением их порядка.

Определение 2. **Окаймляющим минором** для минора M матрицы A называется минор M', который получается из минора M путём добавления одной строки одного столбца. Порядок окаймляющего минора на единицу больше минора M.

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 5 & 1 & 3 \\ 3 & 2 & 7 & 5 \\ 1 & -1 & 0 & 7 \end{pmatrix} \quad M_2 = \begin{vmatrix} 4 & 5 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} \longrightarrow M_3' \begin{vmatrix} 4 & 5 & 1 \\ 3 & 2 & 7 \\ 1 & -1 & 0 \end{vmatrix} \text{ или } M_3' = \begin{vmatrix} 4 & 5 & 3 \\ 3 & 2 & 5 \\ 1 & -1 & 7 \end{vmatrix}$$

Определение 3. **Базисным минором** матрицы A называется минор, который удовлетворяет следующим условиям:

1. Он не равен нулю
2. Его порядок равен рангу матрицы A

Определение 4. **Рангом матрицы** A называется число, равное наибольшему порядку, отличного от нуля минора матрицы A.
Обозначение: $\operatorname{Rg} A$ или $\operatorname{rg} A$

Определение 5. Строки (столбцы) матрицы A, входящие в базисный минор, называются **базисом**.

Теорема 1 *(О базисном миноре).*
• Базисные строки (столбцы) матрицы A, входящие в базисный минор, линейно независимы.
• Любую строку (столбец), не входящую в базисный минор, можно представить в виде линейной комбинации базисных строк (столбцов).

Доказательство.
• Пусть ранг матрицы $A = r$. Предположим, что строки матрицы A линейно зависимы. Тогда одну из них можно выразить как линейную комбинацию остальных базисных строк. Значит, в базисном миноре одна строка будет линейной комбинацией остальных строк и, по свойству определителей, этот минор будет равен нулю, что противоречит определению базисного минора. Следовательно, наше предположение неверно, и базисные строки, входящие в базисный минор, линейно независимы.
• Пусть базисный минор состоит из первых r строк и r столбцов матрицы A. Добавим к этому минору произвольную i-ую строку и j-й столбец. В результате получаем окаймляющий минор:

$$M = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1r} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2r} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{r1} & a_{r2} & \dots & a_{rr} \end{vmatrix} \longrightarrow M' = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1r} & a_{1j} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2r} & a_{2j} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{r1} & a_{r2} & \dots & a_{rr} & a_{rj} \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{ir} & a_{ij} \end{vmatrix}$$

Если $j \le r$, то в миноре M' будет два одинаковых столбца и этот минор будет равен нулю.
Если $j > r$, то минор M' так же будет равен нулю (*Пояснение: Ранг матрицы A равен r, значит, наибольший порядок отличного от нуля минора равен r. Минор M' имеет ранг $r+1$, значит, он равен нулю*).
Определитель можно вычислить путём разложения по какой-либо строке (столбцу), поэтому найдём определитель M' путём его разложения по j-ому столбцу.

$$\begin{matrix} a_{1j}A_{ij} + a_{2j}A_{2j} + \ldots + a_{rj}A_{rj} + a_{ij}A_{ij} = 0 \\ j = r+1, \; i = r+1 \end{matrix} \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow a_{1,r+1}A_{1,r+1} + a_{2,r+1}A_{2,r+1} + \ldots + a_{r,r+1}A_{r,r+1} + a_{r+1,r+1}A_{r+1,r+1} = 0$$

$A_{ij} = (-1)^{i+j}M_{ij}$ – алгебраическое дополнение элемента a_{ij}
$A_{r+1,r+1} = M$ – базисный минор; т.к. $M \neq 0$, то $A_{r+1,r+1} \neq 0$

$$a_{r+1,r+1} = -\frac{A_{1,r+1}}{A_{r+1,r+1}}a_{1,r+1} - \frac{A_{2,r+1}}{A_{r+1,r+1}}a_{2,r+1} - \ldots - \frac{A_{r,r+1}}{A_{r+1,r+1}}a_{r,r+1}$$

Обозначим: $\lambda_i = -\dfrac{A_{i,r+1}}{A_{r+1,r+1}}, \; i = 1, \ldots, \; r$

$$a_{r+1,r+1} = \lambda_1 a_{1,r+1} + \lambda_2 a_{2,r+1} + \ldots + \lambda_r a_{r,r+1}$$

Получили, что элементы i-й строке можно представить в виде линейной комбинации соответствующих элементов базисных строк, где $j = 1, \ldots, \; r$.
Аналогично доказывается для столбцов. ∎

7.5 Вычисление ранга матрицы

7.5.1 Метод окаймляющих миноров

Сначала берём минор 1-го порядка, то есть любой ненулевой элемент матрицы A. Составляем окаймляющий минор 2-го порядка для этого элемента, вычисляем его.

- Если он не равен нулю, то составляем окаймляющий минор 3-го порядка и так далее.
- Если окаймляющий минор равен нулю, то рассматриваем другой элемент.
- Если миноры $(k+1)$-го порядка равны нулю, а среди миноров k-го порядка есть неравные нулю, значит, ранг матрицы $A = k$

Пример.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 & 7 \\ -1 & 4 & 0 & 5 \\ -3 & 1 & -1 & -2 \end{pmatrix}$$

$$M_1 = |2| = 2 \neq 0$$

$$M_2 = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 4 \end{vmatrix} = 8 + 3 = 11 \neq 0$$

$$M_{3_a} = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 \\ -1 & 4 & 0 \\ -3 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 0$$

$$M_{3_b} = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 7 \\ -1 & 4 & 5 \\ -3 & 1 & -2 \end{vmatrix} = 0$$

$$M_{3_c} = \begin{vmatrix} 3 & 1 & 7 \\ 4 & 0 & 5 \\ 1 & -1 & -2 \end{vmatrix} = 0$$

$$M_{3_d} = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 7 \\ -1 & 0 & 5 \\ -3 & -1 & -2 \end{vmatrix} = 0$$

$$\Downarrow$$

$$\operatorname{Rg} A = 2$$

Все миноры 3-го порядка равны нулю, а среди миноров 2-го порядка есть определитель не равный нулю, значит, ранг матрицы равен 2.

7.5.2 Метод элементарных преобразований

Теорема 2.
Ранг матрицы не меняется при элементарных преобразованиях строк (столбцов) матрицы.

• Ранг матрицы равен количеству ненулевых строк ступенчатой матрицы, полученной из исходной путём элементарных преобразований.

Пример.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 & 7 \\ -1 & 4 & 0 & 5 \\ -3 & 1 & -1 & -2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 & 7 \\ 0 & 11 & 1 & 17 \\ 0 & 11 & 1 & 17 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 & 7 \\ 0 & 11 & 1 & 17 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow Rg\ A = 2$$

2-ю строку умножаем на 2 и прибавляем 1-ю.
3-ю строку умножаем на 2 и прибавляем 1-ю, умноженную на 3.

7.6 Обратные матрицы

Определение 1. **Обратной матрицей** квадратной матрицы $A_{m\times n}$ называется матрица $A^{-1}_{m\times n}$ такая, что

$$A\cdot A^{-1}=A^{-1}\cdot A=E$$

Обратная матрица вычисляется по формуле:

$$A^{-1}=\frac{1}{\det A}\cdot\begin{pmatrix}A_{11}&A_{12}&\dots&A_{1n}\\A_{21}&A_{22}&\dots&A_{2n}\\\dots&\dots&\dots&\dots\\A_{n1}&A_{n2}&\dots&A_{nn}\end{pmatrix}^T$$

$\det A$ – определитель матрицы A

$A_{ij}=(-1)^{i+j}M_{ij}$ – алгебраическое дополнение элемента a_{ij} матрицы A.

Определение 2. Матрица A^*, являющаяся транспонированной матрицей алгебраических дополнений элементов матрицы A, называется **присоединённой матрицей**.

$$A^*=\begin{pmatrix}A_{11}&A_{12}&\dots&A_{1n}\\A_{21}&A_{22}&\dots&A_{2n}\\\dots&\dots&\dots&\dots\\A_{n1}&A_{n2}&\dots&A_{nn}\end{pmatrix}^T=\begin{pmatrix}A_{11}&A_{21}&\dots&A_{n1}\\A_{12}&A_{22}&\dots&A_{n2}\\\dots&\dots&\dots&\dots\\A_{1n}&A_{2n}&\dots&A_{nn}\end{pmatrix}$$

$$A^{-1}=\frac{1}{\det A}\cdot A^*$$

7.6.1 Критерий существования обратной матрицы

Теорема 1.
Для того чтобы матрица A имела обратную матрицу, необходимо и достаточно, чтобы определитель матрицы A был не равен нулю.

Доказательство (Необходимость).
Пусть матрица A имеет обратную матрицу. Тогда по определению $A\cdot A^{-1}=E$.
Значит, $\det(A\cdot A^{-1})=\det E=1$.
По свойству определителей (с учётом предыдущего):

$$\det(A\cdot A^{-1})=\det A\cdot\det A^{-1}=1\ \Rightarrow\ \det A\neq 0$$

■

Доказательство (Достаточность).
Пусть определитель матрицы A не равен нулю. Если определитель матрицы разложить по i-ой строке:

$$\sum_{j=1}^{n}a_{ij}A_{ij}=a_{i1}A_{i1}+a_{i2}A_{i2}+\ldots+a_{in}A_{in}=\det A$$

$$\sum_{j=1}^{n}a_{ij}A_{kj}=a_{i1}A_{k1}+a_{i2}A_{k2}+\ldots+a_{in}A_{kn}=0$$

Рассмотрим матрицу B: $b_{ij}=\dfrac{A_{ji}}{\det A}$
A_{ij} – алгебраическое дополнение элемента a_{ji} матрицы A.

Найдём $C = A \cdot B$:

$$C_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} \cdot b_{kj} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} \cdot \frac{A_{jk}}{\det A} = \frac{1}{\det A} \sum_{k=1}^{n} a_{ik} A_{jk} = \begin{cases} \dfrac{1}{\det A} \cdot \det A = 1 & \text{, если } i = j \\ \dfrac{1}{\det A} \cdot 0 = 0 & \text{, если } i \neq j \end{cases}$$

$$\Rightarrow \; C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix} \qquad \begin{matrix} C_{ij} = 1, \text{ если } i = j \\ C_{ij} = 0, \text{ если } i \neq j \end{matrix}$$

Аналогично $C' = B \cdot A$

$$C'_{ij} = \sum_{k=1}^{n} b_{ik} \cdot a_{kj} = \sum_{k=1}^{n} \frac{A_{ki}}{\det A} \cdot a_{kj} = \frac{1}{\det A} \sum_{k=1}^{n} A_{ki} a_{kj} = \begin{cases} \dfrac{1}{\det A} \cdot \det A = 1 & \text{, если } i = j \\ \dfrac{1}{\det A} \cdot 0 = 0 & \text{, если } i \neq j \end{cases}$$

$$\Rightarrow \; C' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix} \qquad \begin{matrix} C'_{ij} = 1, \text{ если } i = j \\ C'_{ij} = 0, \text{ если } i \neq j \end{matrix}$$

Получим $\left.\begin{matrix} A \cdot B = E \\ B \cdot A = E \end{matrix}\right\} \Rightarrow$ по определению $B = A^{-1}$

Таким образом, доказали, что если определитель матрицы не равен нулю, то эта матрица имеет обратную. ■

Теорема 2.
Пусть матрицы $A_{n\times n}$ и $B_{n\times n}$ имеют обратные матрицы $A^{-1}_{n\times n}$ и $B^{-1}_{n\times n}$. Тогда обратная матрица к их произведению равна произведению обратных матриц:

$$(A \cdot B)^{-1} = B^{-1} \cdot A^{-1}$$

Доказательство.
$C = A \cdot B \qquad C^{-1} = (A \cdot B)^{-1}$

$$\overbrace{(A \cdot B)}^{C} \cdot \overbrace{(A \cdot B)^{-1}}^{C^{-1}} = (A \cdot B) \cdot (B^{-1} \cdot A^{-1}) = A \cdot (\underbrace{B \cdot B^{-1}}_{E}) \cdot A^{-1} = \underbrace{A \cdot E}_{A} \cdot A^{-1} = A \cdot A^{-1} = E$$

$$(AB)^{-1} \cdot (A \cdot B) = (B^{-1} \cdot A^{-1}) \cdot (A \cdot B) = B^{-1} \cdot (\underbrace{A^{-1} \cdot A}_{E}) \cdot B = B^{-1} \cdot \underbrace{E \cdot B}_{B} = B^{-1} \cdot B = E$$

$C \cdot C^{-1} = E \qquad C^{-1} \cdot C = E$ ■

Теорема 3.
Пусть матрица $A_{n\times n}$ имеет обратную матрицу. Тогда:

$$\left(A^T\right)^{-1} = \left(A^{-1}\right)^T$$

Доказательство.
$C = A^T$

$$C \cdot C^{-1} = A^T \cdot \left(A^T\right)^{-1} = A^T \cdot \left(A^{-1}\right)^T = \left(A \cdot A^{-1}\right)^T = E^T = E$$
$$C^{-1} \cdot C = \left(A^T\right)^{-1} \cdot A^T = \left(A^{-1}\right)^T \cdot A^T = \left(A^{-1} \cdot A\right)^T = E^T = E$$

■

Определение 3. Матрица, у которой определитель не равен нулю, называется **невырожденной**. Её также называют **обратимой**.

Определение 4. Матрица, у которой определитель равен нулю, называется **вырожденной**.

7.7 Вычисление обратной матрицы

7.7.1 Метод алгебраических дополнений

$$\boxed{A^{-1} = \frac{1}{\det A} \cdot \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & \dots & A_{1n} \\ A_{21} & A_{22} & \dots & A_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{n1} & A_{n2} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix}^T}$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

1. Находим определитель:

$$\det A = \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 4$$

2. Находим алгебраическое дополнение элементов матрицы A: $A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$

$$A_{11} = (-1)^{1+1} M_{11} = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -3 \qquad A_{21} = (-1)^{2+1} M_{21} = \begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -1$$

$$A_{12} = (-1)^{1+2} M_{12} = \begin{vmatrix} -1 & 3 \\ 3 & 0 \end{vmatrix} = 9 \qquad A_{22} = (-1)^{2+2} M_{22} = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 0 \end{vmatrix} = 3$$

$$A_{13} = (-1)^{1+3} M_{13} = \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = -7 \qquad A_{23} = (-1)^{2+3} M_{23} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = -1$$

$$A_{31} = (-1)^{3+1} M_{31} = \begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = 2$$

$$A_{32} = (-1)^{3+2} M_{32} = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} = -2$$

$$A_{33} = (-1)^{3+3} M_{33} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = 2$$

3. Находим обратную матрицу (A^{-1}):

$$A^{-1} = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} -3 & 9 & -7 \\ -1 & 3 & -1 \\ 2 & -2 & 2 \end{pmatrix} = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} -3 & -1 & 2 \\ 9 & 3 & -2 \\ -7 & -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{3}{4} & -\frac{1}{4} & \frac{2}{4} \\ \frac{9}{4} & \frac{3}{4} & -\frac{2}{4} \\ -\frac{7}{4} & -\frac{1}{4} & \frac{2}{4} \end{pmatrix}$$

Проверка: $A^* = A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = E$

$$A^{-1} \cdot A = \underbrace{\frac{1}{4} \cdot \begin{pmatrix} -3 & -1 & 2 \\ 9 & 3 & -2 \\ -7 & -1 & 2 \end{pmatrix}}_{A^{-1}} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 0 \end{pmatrix}}_{A} = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

7.7.2 Метод Жордана-Гаусса (с помощью элементарных преобразований)

1. Приписываем к матрице A справа единичную матрицу такой же размерности $A|E$
2. С помощью элементарных преобразований строк матрицы приводим матрицу A к треугольному виду
   (2.1) Переписываем первую строку без изменения
   (2.2) С помощью элементарных преобразований получаем нулевые элементы в первом столбце матрицы A под элементом A_{11}
   (2.3) Переписываем первые две строки без изменения
   (2.4) С помощью элементарных преобразований строк получаем нулевые элементы во втором столбце под элементом A_{22}
   (2.5) и так далее ...
3. С помощью элементарных преобразований строк получаем в левой части расширенной матрицы диагональную матрицу
   (3.1) Переписываем первую строку без изменений
   (3.2) Получаем нулевые элементы в последнем столбце над элементом a'_{nn}
   (3.3) Переписываем первые две строки без изменений
   (3.4) Получаем нулевые элементы в предпоследнем столбце над элементом $a'_{n-1,n-1}$
   (3.5) и так далее ...
4. Делим каждую строку матрицы на соответствующий диагональный элемент в левой части полученной матрицы.
5. В результате в левой части получается единичная матрица E, а в правой части обратная матрица A^{-1}

Примечание. Если элемент $a_{11} = 0$, то переставляем две строки матрицы так, чтобы $a_{11} \neq 0$

Пример.

$$A|E = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & -3 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -4 & 7 & 1 & -2 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} -4 & 0 & 0 & 3 & 1 & -2 \\ 0 & 4 & 0 & 9 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & -4 & 7 & 1 & -2 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -\frac{3}{4} & -\frac{1}{4} & \frac{2}{4} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{9}{4} & \frac{3}{4} & -\frac{2}{4} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{7}{4} & -\frac{1}{4} & \frac{2}{4} \end{array}\right)$$

8 Системы линейных алгебраических уравнений (СЛАУ)

8.1 Формы записи СЛАУ

8.1.1 Координатная форма записи

Определение 1. **Системой линейных алгебраических уравнений** называется система уравнений вида:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases} \tag{1}$$

где:

$a_{ij} = const$ — коэффициенты при неизвестных в СЛАУ $\begin{array}{l} i = 1, \ldots, m \\ j = 1, \ldots, n \end{array}$

$b_i = const$ — свободные члены СЛАУ $\quad i = 1, \ldots, m$
x_j — переменные СЛАУ $\quad j = 1, \ldots, n$

Определение 2. Совокупность переменных $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, при которых каждое уравнение системы обращается в верное равенство, называется **решением**.

8.1.2 Матричная форма записи

Обозначим:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{22} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} \quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

Получаем $A \cdot X = B$

8.1.3 Векторная форма записи

Обозначим:

$$\overline{a_1} = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix}, \quad \overline{a_2} = \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{m2} \end{pmatrix}, \ \ldots\ , \quad \overline{a_n} = \begin{pmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{pmatrix} \qquad \overline{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$$

$$\overline{a_1}x_1 + \overline{a_2}x_2 + \ldots + \overline{a_n}x_n = \overline{b}$$

В векторной форме записи вектор $\overline{b}$ можно представить в виде линейной комбинации векторов $\overline{a_1}$, $\overline{a_2}$, $\ldots$, $\overline{a_n}$, координаты которого соответствуют столбцам матрицы A.

Определение 3.
СЛАУ, имеющая решение, называется **совместной**.
СЛАУ, не имеющая решение, называется **не совместной**.

Определение 4.
Совместная СЛАУ, имеющая единственное решение, называется
совместной определённой.
Совместная СЛАУ, имеющая бесконечное множество решений, называется
совместной неопределённой.

Определение 5.
СЛАУ (1), у которой все члены равны нулю, называется **однородной**.
СЛАУ (1), у которой хотя бы один $b_i \neq 0,\ 0 \leq i \leq m$, называется **неоднородной**.

СЛАУ

- **совместная** (имеет решение)
  - **определённая** (имеет единственное решение)
    $\Delta \neq 0$
    Δ_i – любые, $i = 1, \dots, n$
  - **неопределённая** (имеет бесконечное множество решений)
    $\Delta = 0$
    $\Delta_i = 0,\ i = 1, \dots, n$
- **несовместная** (не имеет решений)
  $\Delta = 0$
  хотя бы один из $\Delta_i \neq 0$

8.2 Решение линейных уравнений

1. $A \cdot X = B$
   Умножим обе части уравнения на обратную матрицу <u>слева</u>

$$\underbrace{A^{-1} \cdot A}_{E} \cdot X = A^{-1} \cdot B \ \Rightarrow\ \underbrace{E \cdot X}_{X} = A^{-1} \cdot B \ \Longrightarrow\ \boxed{X = A^{-1} \cdot B}$$

2. $X \cdot A = B$
   Умножим обе части уравнения на обратную матрицу <u>справа</u>

$$X \cdot \underbrace{A^{-1} \cdot A}_{E} = B \cdot A^{-1} \ \Rightarrow\ \underbrace{X \cdot E}_{X} = B \cdot A^{-1} \ \Longrightarrow\ \boxed{X = B \cdot A^{-1}}$$

3. $A \cdot X \cdot C = B$
   Умножим обе части уравнения на обратную матрицу A слева и на обратную матрицу C справа

$$\underbrace{A^{-1} \cdot A}_{E} \cdot X \cdot \underbrace{C \cdot C^{-1}}_{E} = A^{-1} \cdot B \cdot C^{-1} \ \Rightarrow\ \underbrace{E \cdot X \cdot E}_{X} = A^{-1} \cdot B \cdot C^{-1} \ \Longrightarrow\ X = \boxed{A^{-1} \cdot B \cdot C^{-1}}$$

Пример.

$$X \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 5 & 0 \end{pmatrix}}_{A} = \underbrace{\begin{pmatrix} -3 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}}_{B} \qquad X \cdot A = B \qquad X = B \cdot A^{-1}$$

$$A|E = \left(\begin{array}{cc|cc} 2 & -1 & 1 & 0 \\ 5 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|cc} 2 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 5 & -5 & 2 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|cc} 10 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 5 & -5 & 2 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{5} \\ 0 & 1 & -1 & \frac{2}{5} \end{array}\right)$$

$$X = B \cdot A^{-1} = \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{5} \\ -1 & \frac{2}{5} \end{pmatrix} = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -5 & 2 \end{pmatrix} = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} -10 & 1 \\ 5 & -1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} -2 & \frac{1}{5} \\ 1 & -\frac{1}{5} \end{pmatrix}$$

8.3 Формулы Крамера для решения СЛАУ

Пусть задана СЛАУ в координатной форме (1). Запишем эту СЛАУ в матричном виде, где A имеет размерность $n \times n$ (количество уравнений = количество переменных).

$$A \cdot X = B$$

$$A_{n\times n} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}, \quad B_{n\times 1} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$

Пусть матрица A невырожденная, $\det A \neq 0$. Тогда обратная матрица будет иметь вид:

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \cdot \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & \dots & A_{1n} \\ A_{21} & A_{22} & \dots & A_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{n1} & A_{n2} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} \frac{A_{11}}{\det A} & \frac{A_{21}}{\det A} & \dots & \frac{A_{n1}}{\det A} \\ \frac{A_{12}}{\det A} & \frac{A_{22}}{\det A} & \dots & \frac{A_{n2}}{\det A} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{A_{1n}}{\det A} & \frac{A_{2n}}{\det A} & \dots & \frac{A_{nn}}{\det A} \end{pmatrix}$$

Решением уравнения будет $X = A^{-1} \cdot B$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = X = \begin{pmatrix} \frac{A_{11}}{\det A} & \frac{A_{21}}{\det A} & \dots & \frac{A_{n1}}{\det A} \\ \frac{A_{12}}{\det A} & \frac{A_{22}}{\det A} & \dots & \frac{A_{n2}}{\det A} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{A_{1n}}{\det A} & \frac{A_{2n}}{\det A} & \dots & \frac{A_{nn}}{\det A} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$

$$x_1 = \frac{A_{11}}{\det A} \cdot b_1 + \frac{A_{21}}{\det A} \cdot b_2 + \ldots + \frac{A_{n1}}{\det A} \cdot b_n = \frac{A_{11}b_1 + A_{21}b_2 + \ldots + A_{n1}b_n}{\det A}$$

Числитель – разложение определителя A_1 по столбцу:

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ b_2 & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_n & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} \qquad \Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$\det A = \Delta \qquad x_1 = \frac{\Delta 1}{\Delta}$$

Определитель Δ_1 получается из определителя Δ, если заменить первый столбец этого определителя на столбец свободных членов СЛАУ. Определитель Δ_1 называется **главным**.

$$\boxed{x_i = \frac{\Delta_i}{\Delta}},\ i = 1, \ldots, n \text{ — } \textbf{формула Крамера}$$

Определитель Δ_i получается из главного определителя путём замены i-го столбца на столбец свободных членов СЛАУ.

Замечание. Если главный определитель равен нулю, то формулу Крамера использовать нельзя.

Примечание. Однородная СЛАУ всегда совместная.

Примечание.
• Если матрица A квадратная и невырожденная и её определитель не равен нулю, то СЛАУ имеет единственное решение:

$$x_1 = x_2 = \ldots = x_n = 0$$

• Если матрица A квадратная и вырожденная, то СЛАУ имеет бесконечное множество решений.

8.4 Теорема Кронекера-Капелли

Теорема 1.
Для того чтобы СЛАУ была совместной, необходимо и достаточно, чтобы ранг матрицы A был равен рангу расширенной матрицы.

$$A \cdot X = B \qquad A|B \qquad \operatorname{Rg} A = \operatorname{Rg}(A|B)$$

Доказательство (Необходимость).
Пусть СЛАУ $A \cdot X = b$ – совместная и пусть $\operatorname{Rg} A = r$.
Пусть базисный минор состоит из первых r строк и r столбцов матрицы A.

$$M = \begin{vmatrix} a_1 1 & a_1 2 & \ldots & a_1 r \\ a_2 1 & a_2 2 & \ldots & a_2 r \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_r 1 & a_r 2 & \ldots & a_r r \end{vmatrix}$$

Если использовать векторную запись СЛАУ, то если СЛАУ имеет решение $x_1, x_2, \ldots, x_n$, тогда любой столбец матрицы A можно представить в виде:

$$a_1 x_1 + a_2 x_2 + \ldots + a_r x_r + a_{r+1} x_{r+1} + \ldots + a_n x_n = b \qquad (1)$$

Согласно теореме *о базисном миноре* (**С.49, Т.1**), любой столбец матрицы A, который не входит в базисный минор, можно представить в виде линейной комбинации столбцов базисного минора.

Тогда:

$$\begin{cases} a_{r+1} = \lambda_{1,r+1}a_1 + \lambda_{2,r+1}\ a_2 + \ldots + \lambda_{r,r+1}\ a_r \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_n = \lambda_{1n}a_1 + \lambda_{2n}a_2 + \ldots + \lambda_{rn}a_r \end{cases} \tag{2}$$

Подставим (2) в (1):

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots + a_rx_r + (\lambda_{1,r+1}a_1 + \lambda_{2,r+1}a_2 + \ldots + \lambda_{r,r+1}a_r)x_{r+1} + \\ + \ldots + (\lambda_{1n}a_1 + \lambda_{2n}a_2 + \ldots + \lambda_{rn}a_n)x_n = b$$

$$\underbrace{(x_1 + \lambda_{1,r+1}x_{r+1} + \ldots + \lambda_{1n}x_n)}_{\beta_1} a_1 + \underbrace{(x_2 + \lambda_{2,r+1}x_{r+1} + \ldots + \lambda_{2n}x_n)}_{\beta_2} a_2 + \ldots + \\ + \underbrace{(x_r + \lambda_{r,r+1}x_{r+1} + \ldots + \lambda_{rn}x_n)}_{\beta_r} a_r = b$$

$$\Downarrow$$

$$\beta_1a_1 + \beta_2a_2 + \ldots + \beta_ra_r = b$$
$$\beta_i = const,\ i = 1, \ldots, r$$

В результате столбец свободных членов можно представить в виде линейной комбинации столбцов базисного минора. Отсюда следует, что базисный минор M матрицы A будет и базисным минором расширенной матрицы $A|B$, так как минор M не равен нулю и любой окаймляющий минор M' будет равен нулю.

1. Если в качестве окаймляющего минора будет минор, который входит в столбец матрицы A, то этот минор будет равен нулю по определению базисного минора матрицы A.

2. Если в окаймляющем миноре будет столбец свободных членов, то этот минор будет равен нулю по свойству определителей, так как этот столбец b будет линейной комбинацией остальных столбцов определителя.

$$\underbrace{\operatorname{Rg} A}_{r} = \underbrace{\operatorname{Rg}(A|B)}_{r}$$

■

Доказательство (Достаточность).
Пусть $\operatorname{Rg} A = \operatorname{Rg}(A|B)$ и пусть базисный минор состоит из первых r строк и r столбцов матрицы A.

$$M = \begin{vmatrix} a_1 1 & a_1 2 & \ldots & a_1 r \\ a_2 1 & a_2 2 & \ldots & a_2 r \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_r 1 & a_r 2 & \ldots & a_r r \end{vmatrix}$$

Тогда столбец b можно представить в виде линейной комбинации столбцов базисного минора.

$$b = x_1^\circ a_2 + x_2^\circ a_2 + \ldots + x_r^\circ a_r + 0 \cdot a_{r+1} + 0 \cdot a_{r+2} + \ldots + 0 \cdot a_n$$
$x_1^\circ, x_2^\circ, \ldots, x_r^\circ$ – коэффициенты линейной комбинации
$x_i = const, \quad i = 1, \ldots, r$

Добавим к этой линейной комбинации вектора:

$$a_{r+1}, a_{r+2}, \ldots, a_n \qquad x^\circ_{r+1} = 0,\ x^\circ_{r+2} = 0, \ldots, x^\circ_n = 0$$

$$\begin{aligned} x = (x_1,\ x_2, \ldots, x_r,\ x_{r+1},\ x_{r+2}, \ldots, x) = \\ = (x_1,\ x_2, \ldots, x_r,\ 0,\ 0, \ldots, 0) \end{aligned}$$

Этот набор переменных составляет решение СЛАУ, то есть СЛАУ является совместной. ■

8.5 Однородные СЛАУ

$$A \cdot X = \Theta \qquad \Theta_{m\times 1} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} \quad X_{n\times 1} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \qquad A_{m\times n} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{22} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

X – матрица-столбец или столбец неизвестных
A – матрица

Теорема 2 *(О свойствах решений однородных СЛАУ).*
Пусть $X^{(1)}, X^{(2)}, \ldots, X^{(k)}$ – решение СЛАУ. Тогда их линейная комбинация тоже является решением СЛАУ.

Доказательство.

$$A \cdot X = \Theta$$

$$X = \lambda_1 X^{(1)} + \lambda_2 X^{(2)} + \ldots + \lambda_k X^{(k)} = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i \cdot X^{(i)}$$

$$\lambda_i = const, \quad i = 1, \ldots, k$$

$$A \cdot X = A \cdot \sum_{i=1}^{k} \lambda_i \cdot X^{(i)} \xlongequal{\substack{\text{исп. св-ва} \\ \text{действий} \\ \text{с матрицами}}} \sum_{i=1}^{k} A \cdot \lambda_i \cdot X^{(i)} = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i \cdot \underbrace{A \cdot X^{(i)}}_{\Theta} = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i \cdot \Theta = \Theta$$

То есть получили $A \cdot X = \Theta$

$A \cdot X^{(i)} = \Theta$, т.к. $X^{(i)}$ – решение однородной СЛАУ $A \cdot X = \Theta$

В результате получили, что столбец X, который является линейной комбинацией решения однородной СЛАУ, является решением однородной СЛАУ. ■

Определение 6. Набор $k = n - r$ линейно-независимых решений однородной СЛАУ называется **фундаментальной системой решений** однородной СЛАУ, где
n – количество неизвестных, а r – ранг матрицы A

Теорема 3 *(О существовании фундаментальной системы решений однородной СЛАУ)***.** Пусть имеется однородная СЛАУ $A \cdot X = \Theta$ с n неизвестными и $\operatorname{Rg} A = r$. Тогда существует набор $k = n - r$ решений однородной СЛАУ, который образует фундаментальную систему решений.

$$X^{(1)}, X^{(2)}, \ldots, X^{(k)}$$

Доказательство.

Пусть базисный минор матрицы A состоит из первых r строк и r столбцов матрицы A. Тогда любая строка матрицы A с номерами $r+1, \ldots, m$ будет линейной комбинацией строк базисного минора по теореме *о базисном миноре* (**С.49, Т.1**).

Если решение СЛАУ $x_1, x_2, \ldots, x_n$ удовлетворяет уравнениям СЛАУ, соответствующим строкам базисного минора, то это решение будет удовлетворять и остальным уравнениям СЛАУ (с $r+1$ до m). Поэтому исключим из системы уравнения с $r+1$ до m. В результате получим следующую систему уравнений:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1r}x_r + a_{1,r+1}x_{r+1} + \ldots + a_{1n}x_n = 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2r}x_r + a_{2,r+1}x_{r+1} + \ldots + a_{2n}x_n = 0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{r1}x_1 + a_{r2}x_2 + \ldots + a_{rr}x_r + a_{r,r+1}x_{r+1} + \ldots + a_{rn}x_n = 0 \end{cases} \tag{3}$$

Переменные, соответствующие базисным столбцам, называются базисными переменными, а остальные свободными.
В системе (3) базисными переменными являются $x_1, x_2, \ldots, x_r$, а свободными являются $x_{r+1}, \ldots, x_n$
В системе (3) оставим в левой части слагаемые, содержащие базисные переменные, а в правой свободные:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1r}x_r = -a_{1,r+1}x_{r+1} - \ldots - a_{1n}x_n \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2r}x_r = -a_{2,r+1}x_{r+1} - \ldots - a_{2n}x_n \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{r1}x_1 + a_{r2}x_2 + \ldots + a_{rr}x_r = -a_{r,r+1}x_{r+1} - \ldots - a_{rn}x_n \end{cases} \tag{4}$$

Если свободным переменным $x_1, x_2, \ldots, x_r$ придавать различные значения, то в системе (4) главный определитель левой части будет не равен нулю, так как этот определитель равен базисному минору матрицы A и эта система будет иметь единственное решение.
Возьмём k наборов свободных переменных вида:

$$\begin{array}{cccc} x_{r+1}^{(1)} = 1 & x_{r+1}^{(2)} = 0 & \cdots & x_{r+1}^{(k)} = 0 \\ x_{r+2}^{(1)} = 0 & x_{r+2}^{(2)} = 1 & \cdots & x_{r+2}^{(k)} = 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ x_n^{(1)} = 0 & x_n^{(2)} = 0 & \cdots & x_n^{(k)} = 1 \end{array}$$

$$(1) \text{ – номер набора} \qquad \begin{array}{l} x_{r+j}^{(i)} = 1,\ i = j \\ x_{r+j}^{(i)} = 0,\ i \neq j \end{array}$$

При каждом наборе свободных переменных получаем решение однородной СЛАУ.

$$x^{(i)} = \begin{pmatrix} x_1^{(i)} \\ x_2^{(i)} \\ \vdots \\ x_r^{(i)} \\ x_{r+1}^{(i)} \\ \vdots \\ x_n^{(i)} \end{pmatrix} \qquad \text{из СЛАУ (4)} \qquad i = 1, \ldots, k$$

В результате получаем k решений однородной СЛАУ. Покажем, что они являются линейно-независимыми. Пусть линейная комбинация этих решений равна нулю.

$$\lambda_1 \underbrace{\begin{pmatrix} x_1^{(1)} \\ x_2^{(1)} \\ \vdots \\ x_r^{(1)} \\ x_{r+1}^{(1)} \\ x_{r+2}^{(1)} \\ \vdots \\ x_n^{(1)} \end{pmatrix}}_{X^{(1)}} + \lambda_2 \underbrace{\begin{pmatrix} x_1^{(2)} \\ x_2^{(2)} \\ \vdots \\ x_r^{(2)} \\ x_{r+1}^{(2)} \\ x_{r+2}^{(2)} \\ \vdots \\ x_n^{(2)} \end{pmatrix}}_{X^{(2)}} + \ldots + \lambda_k \underbrace{\begin{pmatrix} x_1^{(k)} \\ x_2^{(k)} \\ \vdots \\ x_r^{(k)} \\ x_{r+1}^{(k)} \\ x_{r+2}^{(k)} \\ \vdots \\ x_n^{(k)} \end{pmatrix}}_{X^{(k)}} = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}}_{\Theta}$$

$$\begin{aligned} r+1\colon \quad & 1 \cdot \lambda_1 + 0 \cdot \lambda_2 + \ldots + 0 \cdot \lambda_k = 0 \ \Rightarrow\ \lambda_1 = 0 \\ r+2\colon \quad & 0 \cdot \lambda_1 + 1 \cdot \lambda_2 + \ldots + 0 \cdot \lambda_k = 0 \ \Rightarrow\ \lambda_2 = 0 \\ n\colon \quad & 0 \cdot \lambda_1 + 0 \cdot \lambda_2 + \ldots + 1 \cdot \lambda_k = 0 \ \Rightarrow\ \lambda_k = 0 \end{aligned}$$

В результате получили тривиальную, равную нулю, линейную комбинацию решений однородной СЛАУ.
Тогда по определению эти решения являются линейно-независимыми.
Тогда по определению они образуют фундаментальную систему решений СЛАУ. ■

Определение 7. Если в каждом столбце фундаментальной системе решений все свободные переменные равны нулю, кроме одного, равного единице, то такая ФСР называется **нормальной**.

Теорема 4 *(О структуре общего решения однородной СЛАУ).*
Пусть $X^{(1)}, X^{(2)}, \ldots, X^{(k)}$ — это некоторая ФСР однородной СЛАУ $A \cdot X = \Theta$.
Тогда любое решение однородной СЛАУ:

$$\underset{(\text{оо})}{X_{\text{однор.}}} = c_1X^{(1)} + c_2X^{(2)} + \ldots + c_kX^{(k)} \qquad c_i = const,\ i = 1, \ldots, k$$

Доказательство.
Пусть СЛАУ:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = 0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = 0 \end{cases} \tag{1}$$

Пусть $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ — решение (1) и матрица A имеет ранг r ($\operatorname{Rg} A = r$).

Тогда, если X является решением системы (1), то он является решением первых r уравнений, соответствующих базисным строкам матрицы A.
(Пусть базисный минор состоит из первых r строк и n столбцов матрицы A, тогда столбец X является и решением уравнений с $r + 1$ до m, которые являются линейной комбинацией первых r уравнений этой системы, и поэтому эти уравнения можно исключить.)

Так как базисный минор включается первые r столбцов матрицы A, то базисными переменными будут переменные, соответствующие этим столбцам.
Зависимые переменные: $x_1, x_2, \ldots, x_r$
Свободные переменные: $x_{r+1}, x_{r+2}, \ldots, x_m$
После исключения из системы (1) уравнений с $r+1$ до m получаем следующую систему уравнений:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1r}x_r + a_{1,r+1}x_{r+1} + \ldots + a_{1n}x_n = 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2r}x_r + a_{2,r+1}x_{r+1} + \ldots + a_{2n}x_n = 0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{r1}x_1 + a_{r2}x_2 + \ldots + a_{rr}x_r + a_{r,r+1}x_{r+1} + \ldots + a_{rn}x_n = 0 \end{cases} \tag{2}$$

Преобразуем систему (2) так, чтобы в левой части остались слагаемые, содержащие только базисные переменные, а в правой – свободные.

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1r}x_r = -a_{1,r+1}x_{r+1} - \ldots - a_{1n}x_n \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2r}x_r = -a_{2,r+1}x_{r+1} - \ldots - a_{2n}x_n \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{r1}x_1 + a_{r2}x_2 + \ldots + a_{rr}x_r = -a_{r,r+1}x_{r+1} - \ldots - a_{rn}x_n \end{cases} \tag{3}$$

Задавая различные значения свободных переменных, мы получаем систему (3), которая будет иметь единственное решение, так как главный определитель этой системы будет равен главному минору, который не равен нулю. ($\Delta = M \neq 0$)

Решаем систему и получаем следующее решение:

$$\begin{cases} x_1 = \lambda_{1,r+1}x_{r+1} + \lambda_{1,r+2}x_{r+2} + \ldots + \lambda_{1n}x_n \\ x_2 = \lambda_{2,r+1}x_{r+1} + \lambda_{2,r+2}x_{r+2} + \ldots + \lambda_{2n}x_n \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_r = \lambda_{r,r+1}x_{r+1} + \lambda_{r,r+2}x_{r+2} + \ldots + \lambda_{rn}x_n \end{cases} \tag{4}$$

Если столбцы $X^{(1)}, X^{(2)}, \ldots, X^{(k)}$ образуют ФСР, то они удовлетворяют решению (4).

$$\begin{cases} x_1^{(i)} = \lambda_{1,r+1}x_{r+1}^{(i)} + \lambda_{1,r+2}x_{r+2}^{(i)} + \ldots + \lambda_{1n}x_n^{(i)} \\ x_2^{(i)} = \lambda_{2,r+1}x_{r+1}^{(i)} + \lambda_{2,r+2}x_{r+2}^{(i)} + \ldots + \lambda_{2n}x_n^{(i)} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_r^{(i)} = \lambda_{r,r+1}x_{r+1}^{(i)} + \lambda_{r,r+2}x_{r+2}^{(i)} + \ldots + \lambda_{rn}x_n^{(i)} \end{cases} \qquad i = 1, \ldots, k \tag{5}$$

$$X^{(i)} = \begin{pmatrix} X_1^{(i)} \\ X_2^{(i)} \\ \vdots \\ X_r^{(i)} \\ X_{r+1}^{(i)} \\ \vdots \\ X_n^{(i)} \end{pmatrix} \qquad i \text{ -- номер столбца, входящего в ФСР.}$$

Составим матрицу, в которой первый столбец — это столбец X, являющийся решением СЛАУ:

$$B = \begin{array}{c} \begin{pmatrix} x_1 & x_1^{(1)} & x_1^{(2)} & \ldots & x_1^{(k)} \\ x_2 & x_2^{(1)} & x_2^{(2)} & \ldots & x_2^{(k)} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ x_r & x_r^{(1)} & x_r^{(2)} & \ldots & x_r^{(k)} \\ x_{r+1} & x_{r+1}^{(1)} & x_{r+1}^{(2)} & \ldots & x_{r+1}^{(k)} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ x_n & x_n^{(1)} & x_n^{(2)} & \ldots & x_n^{(k)} \end{pmatrix} \\ \begin{matrix} X & X^{(1)} & X^{(2)} & \ldots & X^{(k)} \end{matrix} \end{array}$$

Вычтем из элементов первой строки линейную комбинацию соответствующих элементов строк с $r+1$ до n с коэффициентами $\lambda_{1,r+1}, \lambda_{1,r+2}, \ldots, \lambda_{1n}$:

$$\begin{array}{ll} x_1^{(1)} - \lambda_{1,r+1}x_{r+1}^{(1)} - \lambda_{1,r+2}x_{r+2}^{(1)} - \ldots - \lambda_{1n}x_n^{(1)} = 0 & \text{(используя 5)} \\ x_2^{(2)} - \lambda_{1,r+1}x_{r+1}^{(2)} - \lambda_{1,r+2}x_{r+2}^{(2)} - \ldots - \lambda_{1n}x_n^{(2)} = 0 & \text{(используя 5)} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \\ x_r^{(k)} - \lambda_{1,r+1}x_{r+1}^{(i)} - \lambda_{1,r+2}x_{r+2}^{(k)} - \ldots - \lambda_{1n}x_n^{(k)} = 0 & \text{(используя 5)} \end{array}$$

$$\Downarrow$$

$$x_1 - \lambda_{1,r+1}x_{r+1} - \lambda_{1,r+2}x_{r+2} - \ldots - \lambda_{1n}x_n = 0$$

Получили, что элементы первой строки равны нулю.
Аналогично вычитаем из элементов второй строки соответствующие элементы строк с $r+1$ до n с коэффициентами $\lambda_{2,r+1}, \lambda_{2,r+2}, \ldots, \lambda_{2n}$.

Используя (5) получаем, что все элементы второй строки тоже равны нулю. Далее продолжаем вычитать из элементов r-ой строки соответствующие элементы строк с $r+1$ до n с коэффициентами $\lambda_{r,r+1}, \lambda_{r,r+2}, \ldots, \lambda_{rn}$.

В результате получаем, что в преобразованной матрице первые r строк будут нулевыми.

$$B \sim \begin{array}{c} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ x_{r+1} & x_{r+1}^{(1)} & x_{r+1}^{(2)} & \ldots & x_{r+1}^{(k)} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ x_n & x_n^{(1)} & x_n^{(2)} & \ldots & x_n^{(k)} \end{pmatrix} \\ \begin{matrix} X & X^{(1)} & X^{(2)} & \ldots & X^{(k)} \end{matrix} \end{array}$$

Поскольку элементарные преобразования не меняют ранг матрицы, то получаем, что $\operatorname{Rg} B = k$, где $k = n - r$. По условию столбцы $X^{(1)}, X^{(2)}, \ldots, X^{(k)}$ образуют ФСР, следовательно, являются линейно независимыми. Значит, первый столбец матрицы B можно представить в виде линейной комбинации столбцов $X^{(1)}, X^{(2)}, \ldots, X^{(k)}$. Получили:

$$X = c_1 X^{(1)} + c_2 X^{(2)} + \ldots + c_k X^{(k)}$$

■

8.6 Неоднородные СЛАУ

Теорема 5 *(О связи решений неоднородной и соответствующей однородной СЛАУ)***.** Пусть $X^{(0)}$ – это некоторое решение неоднородной СЛАУ $A \cdot X = B$. Произвольный столбец X является решением СЛАУ $A \cdot X = B$ тогда и только тогда, когда его можно представить в виде:

$$X = X^{(0)} + Y, \text{ где } Y \text{ – решение соответсвующей однородной СЛАУ } A \cdot Y = \Theta$$

Доказательство (Необходимость)**.**
Пусть X – решение СЛАУ $A \cdot X = B$. Обозначим $Y = X - X^{(0)}$.
Найдём произведение:

$$A \cdot Y = A(X - X^{(0)}) = \underbrace{A \cdot X}_{B} - \underbrace{A \cdot X^{(0)}}_{B} = \Theta \;\Rightarrow\; Y \text{ — } \begin{array}{l}\text{решение соответсвующей} \\ \text{однородной СЛАУ } A \cdot Y = \Theta\end{array}$$

■

Доказательство (Достаточность)**.**
Пусть X можно представить в виде $X = X^{(0)} + Y$, где Y — решение соответствующей однородной СЛАУ $A \cdot Y = \Theta$. Тогда найдём произведение:

$$A \cdot X = A(X^{(0)} + Y) = \underbrace{A \cdot X^{(0)}}_{B} + \underbrace{A \cdot Y}_{\Theta} = B + \Theta = B \Rightarrow X \text{ — } \begin{array}{l}\text{решение неоднородной} \\ \text{СЛАУ } A \cdot X = B\end{array}$$

■

Теорема 6 *(О структуре общего решения неоднородной СЛАУ)*.
Пусть $X^{(0)}$ – частное решение неоднородной СЛАУ $A \cdot X = B$.
Пусть $X^{(1)}, X^{(2)}, \ldots, X^{(k)}$ — некоторая ФСР, соответствующая однородной СЛАУ $A \cdot X = \Theta$. Тогда общее решение неоднородной СЛАУ будет иметь вид:

$$X_{\text{неод.}} = X^{(0)} + c_1 X^{(1)} + c_2 X^{(2)} + \ldots + c_k X^{(k)} \qquad c_i \in \mathbb{R},\ i = 1, \ldots, k$$

Доказательство.
$X^{(i)},\ i = 1, \ldots, k \qquad A \cdot X^{(i)} = \Theta$

$$\begin{aligned} A \cdot X_{\text{неод.}} &= A \cdot \left(X^{(0)} + c_1 X^{(1)} + c_2 X^{(2)} + \ldots + c_k X^{(k)}\right) = \\ &= \underbrace{A \cdot X^{(0)}}_{B} + c_1 \cdot \underbrace{AX^{(1)}}_{\Theta} + c_2 \cdot \underbrace{AX^{(2)}}_{\Theta} + \ldots + c_k \cdot \underbrace{AX^{(k)}}_{\Theta} = \\ &= B + c_1\Theta + c_2\Theta + \ldots + c_k\Theta = B \end{aligned}$$

■

Пример. Найти ФСР однородной СЛАУ:

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 2x_3 - x_4 = 0 \\ -x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = 0 \\ 3x_1 - 2x_2 + 3x_3 - 2x_4 = 0 \end{cases}$$

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 & -1 \\ -1 & 1 & -1 & 1 \\ 3 & -2 & 3 & -2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{array} \qquad \operatorname{Rg} A = 2$$

Базисные переменные: x_1, x_2
Свободные переменные: x_3, x_4

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 2x_3 - x_4 = 0 \\ -x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = 0 \end{cases} \qquad \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{array}$$

$$\text{Пусть } \begin{array}{l} x_3 = t,\ t \in \mathbb{R} \\ x_4 = q,\ q \in \mathbb{R} \end{array} \qquad \begin{array}{l} x_2 = -q \\ x_1 = -\dfrac{1}{2}q - t + \dfrac{1}{2}q = -t \end{array}$$

$$X_{\text{одн.}} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -t \\ -q \\ t \\ q \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -t \\ 0 \\ t \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ -q \\ 0 \\ q \end{pmatrix} = t \underbrace{\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}}_{X^{(1)}} + q \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}}_{X^{(2)}}$$

$$\text{ФСР}: X^{(1)} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix},\ X^{(2)} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Пример.

$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + x_3 = 0 \\ 3x_1 + 7x_2 + 2x_3 = -2 \end{cases}$$

$$A|B = \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 2 & 1 & 0 \\ 3 & 7 & 2 & -2 \end{array}\right) \sim \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} x_1 & x_2 & x_3 \end{array} \\ \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 5 & 1 & -2 \end{array}\right) \end{array} \qquad \operatorname{Rg} A|B = 2$$

Базисные переменные: x_1, x_2
Свободные переменные: x_3

$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + x_3 = 0 \\ + 5x_2 + x_3 = -2 \end{cases} \qquad \text{Обозначим:} \quad \begin{array}{ll} x_3 = t & 3x_1 - \dfrac{2}{5}t - \dfrac{4}{5} + t = 0 \\ x_2 = -\dfrac{1}{5}t - \dfrac{2}{5} & x_1 = -\dfrac{1}{5}t + \dfrac{4}{15} \end{array}$$

$$X_{\text{неод.}} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{5}t + \frac{4}{15} \\ -\frac{1}{5}t - \frac{2}{5} \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{4}{15} \\ -\frac{2}{5} \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -\frac{1}{5} \\ -\frac{1}{5} \\ 1 \end{pmatrix}$$

$X_{\text{неод.}} = X^{(0)} + X_{\text{одн.}}$