Интегралы и дифференциальные уравнения

Лекции

2 семестр

GitHub: malyinik

2024 г.

Содержание

1 Первообразная и неопределённый интеграл

1.1 Первообразная

Определение 1. Функция $F(x)$ называется **первообразной** функции $f(x)$ на интервале $(a;b)$, если $F(x)$ дифференцируема на $(a;b)$ и $\forall x \in (a;b)$:

$$\boxed{F'(x) = f(x)} \tag{1}$$

Пример.

$f(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}},\ D_f = (0;+\infty)$

$F(x) = \sqrt{x}$ — первообразная $f(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$

$F'(x) = (\sqrt{x})' = \dfrac{1}{2\sqrt{x}} = f(x)$

$F(x) = \sqrt{x} + 3$ — первообразная $f(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$

1.1.1 Свойства первообразной

Свойство 1.
Если $F(x)$ — первообразная функции $f(x)$ на $(a;b)$, то $F(x) + C$ — первообразная функции $f(x)$ на $(a;b)$, где $\forall C$ — $const$.

Свойство 2.
Если $\Phi(x)$ дифференцируема на $(a;b)$ и $\forall x \in (a;b)$: $\Phi'(x) = 0$, то $\Phi(x) = const$, $\forall x \in (a;b)$.

Свойство 3 *(Существование первообразной)***.**
Любая непрерывная функция на $(a;b)$ имеет множество первообразных на этом интервале, причём любые две из них отличаются друг от друга на константу.

$$\Phi(x),\ F(x) \text{ — первообразные функции } f(x) \text{ на } (a;b)$$
$$\Phi(x) - F(x) = const$$

1.2 Неопределённый интеграл

Определение 2. Множество первообразных функции $f(x)$ на $(a;b)$ называется **неопределённым интегралом**.

$$\boxed{\int f(x)\,dx = F(x) + C} \tag{2}$$

$\int$ — знак интеграла
$f(x)$ — подынтегральная функция
$f(x)\,dx$ — подынтегральное выражение
x — переменная
$F(x) + C$ — множество первообразных
C — произвольная константа

Определение 3. **Интегрирование** — нахождение неопределённого интеграла.

1.2.1 Свойства неопределённого интеграла

Свойство 1.
Производная от неопределённого интеграла равна подынтегральной функции.

$$\boxed{\left(\int f(x)\,dx\right)' = f(x)}$$

Доказательство.

$$\left(\int f(x)\,dx\right)' \overset{(2)}{=\!=} \big(F(x) + C\big)' = F'(x) + C' = F'(x) \overset{(1)}{=\!=} f(x)$$

■

Свойство 2.
Дифференциал от неопределённого интеграла равен подынтегральному выражению.

$$\boxed{d\left(\int f(x)\,dx\right) = f(x)\,dx}$$

Доказательство.

$$d\left(\int f(x)\,dx\right) \overset{(2)}{=\!=} d\big(F(x) + C\big) = \big(F(x) + C\big)'\,dx =$$
$$= \big(F'(x) + C'\big)\,dx = F'(x)\,dx \overset{(1)}{=\!=} f(x)\,dx$$

■

Свойство 3.
Неопределённый интеграл от дифференциала от некоторой функции равен сумме этой функции и константы.

$$\boxed{\int d\big(F(x)\big) = F(x) + C}, \quad \forall C - const$$

Доказательство.

$$\int d\big(F(x)\big) = \int F'(x)\,dx \overset{(1)}{=\!=} \int f(x)\,dx \overset{(2)}{=\!=} F(x) + C, \quad \forall C - const$$

∎

Свойство 4.
Константу можно выносить за знак неопределённого интеграла.

$$\boxed{\int \lambda \cdot f(x)\,dx = \lambda \int f(x)\,dx}, \quad \lambda \neq 0$$

Доказательство.
Пусть $F(x)$ — первообразная $f(x)$

$$\lambda \int f(x)\,dx \overset{(2)}{=\!=} \lambda \cdot \big(F(x) + C\big), \quad \forall C - const$$

Функция $\lambda \cdot F(x)$ — первообразная $\lambda \cdot f(x)$:

$$\big(\lambda \cdot F(x)\big)' = \lambda \cdot F'(x) \overset{(1)}{=\!=} \lambda \cdot f(x)$$

$$\int \lambda \cdot f(x)\,dx \overset{(2)}{=\!=} \lambda \cdot F(x) + C_1, \quad \forall C_1 - const$$

Так как константы C_1, C — произвольные, $\lambda \neq 0$, то их всегда можно выбрать так, чтобы $C_1 = \lambda C$. Тогда множества $\lambda \cdot \big(F(x) + C\big)$ и $\lambda \cdot F(x) + C_1$ совпадают. ∎

Свойство 5.
Если функции $f_1(x)$ и $f_2(x)$ на $(a;b)$ имеют первообразные $F_1(x)$ и $F_2(x)$ соответственно, то функция $\lambda_1 f_1(x) + \lambda_2 f_2(x)$, где $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$, имеет первообразную на $(a;b)$, причём $\lambda_1^2 + \lambda_2^2 > 0$:

$$\int \Big(\lambda_1 f_1(x) + \lambda_2 f_2(x)\Big)\,dx = \lambda_1 \int f_1(x)\,dx + \lambda_2 \int f_2(x)\,dx$$

Доказательство.
$F_1(x)$ — первообразная $f_1(x)$
$F_2(x)$ — первообразная $f_2(x)$

$$\lambda_1 \int f_1(x)\,dx + \lambda_2 \int f_2(x)\,dx \overset{(2)}{=\!=} \lambda_1(F_1(x) + C_1) + \lambda_2\big(F_2(x) + C_2\big) =$$
$$= \lambda_1 F_1(x) + \lambda_2 F_2(x) + \lambda_1 C_1 + \lambda_2 C_2, \quad \forall C_1, C_2 - const$$

Функция $F(x) = \lambda_1 F_1(x) + \lambda_2 F_2(x)$ — первообразная функции $\lambda_1 f_1(x) + \lambda_2 f_2(x)$.

$$F'(x) = \big(\lambda_1 F_1(x) + \lambda_2 F_2(x)\big)' = \lambda_1 F_1'(x) + \lambda_2 F_2'(x) \overset{(1)}{=\!=} \lambda_1 f_1(x) + \lambda_2 f_2(x)$$
$$\int \Big(\lambda_1 f_1(x) + \lambda_2 f_2(x)\Big)\, dx \overset{(2)}{=\!=} \lambda_1 f_1(x) + \lambda_2 f_2(x) + C, \quad \forall C - const$$

Так как константы $C_1,\ C_2,\ C$ — произвольные, то всегда можно добиться выполнения равенства $C = \lambda_1 C_1 + \lambda_2 C_2$.
Тогда множества $\lambda_1 F_1(x)+\lambda_2 F_2(x)+\lambda_1 C_1+\lambda_2 C_2$ и $\lambda_1 F_1(x)+\lambda_2 F_2(x)+C$ совпадают. ■

Свойство 6 *(Инвариантность формы интегрирования).*
Если $\int f(x)\, dx = F(x) + C$, где $C - const$, то $\int f(u)\, du = F(u) + C$, где $C - const$, $u = \varphi(x)$ — непрерывно-дифференцируемая функция.

Доказательство.
x — независимая переменная
$f(x)$ — непрерывная функция
$F(x)$ — первообразная $f(x)$
$$\int f(x)\, dx = F(x) + C,\ \forall C - const$$
Рассмотрим сложную функцию $F(u) = F\big(\varphi(x)\big)$. Найдём дифференциал $F(u)$:

$$d\big(F(u)\big) = F'(u) \cdot \underbrace{\varphi'(x)\, dx}_{du} = \begin{vmatrix} u = \varphi(x) \\ du = \varphi'(x)\, dx \end{vmatrix} = F'(u)\, du \overset{(1)}{=\!=} f(u)\, du$$

Неопределённый интеграл:

$$\int f(u)\, du = \int d\big(F(u)\big) \overset{\textbf{(св. 3)}}{=\!=\!=} F(u) + C, \quad \forall C - const$$

■

Пример.
$$\int \sin x\, dx = -\cos x + C \qquad \sin(2x)\, d(2x) = -\cos(2x) + C$$

1.2.2 Геометрический смысл

Неопределённый интеграл геометрически представляет собой семейство интегральных кривых (графиков функций) вида $y = F(x) + C,\ \forall C - const$.

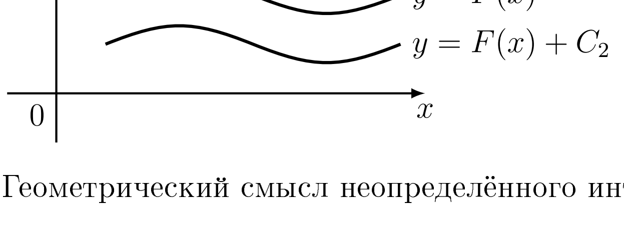


Рис. 1: Геометрический смысл неопределённого интеграла

1.2.3 Таблица основных интегралов

Таблица 1: Таблица основных интегралов

1. $\displaystyle\int x^n\,dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C,\ \forall C - const$	11. $\displaystyle\int \frac{dx}{a^2 - x^2} = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{a+x}{a-x}\right| + C$
2. $\displaystyle\int dx = x + C$	12. $\displaystyle\int \frac{dx}{x^2 - a^2} = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{a-x}{a+x}\right| + C$
3. $\displaystyle\int \frac{dx}{x} = \ln\lvert x\rvert + C$	13. $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \arcsin\frac{x}{a} + C$
4. $\displaystyle\int e^x\,dx = e^x + C$	14. $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} = \ln\left|x + \sqrt{x^2 \pm a^2}\right| + C$
5. $\displaystyle\int a^x\,dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$	15. $\displaystyle\int \operatorname{sh} x\,dx = \operatorname{ch} x + C$
6. $\displaystyle\int \sin x\,dx = -\cos x + C$	16. $\displaystyle\int \operatorname{ch} x\,dx = \operatorname{sh} x + C$
7. $\displaystyle\int \cos x\,dx = \sin x + C$	17. $\displaystyle\int \frac{dx}{\operatorname{ch}^2 x} = \operatorname{th} x + C$
8. $\displaystyle\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x + C$	18. $\displaystyle\int \frac{dx}{\operatorname{sh}^2 x} = -\operatorname{cth} x + C$
9. $\displaystyle\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\operatorname{ctg} x + C$	19. $\displaystyle\int \frac{dx}{\sin x} = \ln\left|\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right| + C$
10. $\displaystyle\int \frac{dx}{a^2 + x^2} = \frac{1}{a}\operatorname{arctg}\frac{x}{a} + C$	20. $\displaystyle\int \frac{dx}{\cos x} = \ln\left|\operatorname{tg}\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4}\right)\right| + C$

Доказательство (19)**.**

$$\int \frac{dx}{\sin x} = \int \frac{dx}{2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}} = \frac{1}{2}\int \frac{\frac{1}{\cos^2\frac{x}{2}}}{\frac{\sin\frac{x}{2}\cancel{\cos\frac{x}{2}}}{\cos^{\cancel{2}}\frac{x}{2}}}dx = \int \frac{\frac{1}{2\cos^2\frac{x}{2}}}{\operatorname{tg}\frac{x}{2}}dx = \int \frac{d\left(\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right)}{\operatorname{tg}\frac{x}{2}} =$$

$$= \left|\operatorname{tg}\frac{x}{2} t\right| = \int \frac{dt}{t} = \ln\lvert t\rvert + C = \ln\left|\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right| + C$$

■

1.3 Основные методы интегрирования

1. **Непосредственное интегрирование** (свойства + таблица)

   Пример.

   $$\int \left(3e^x + \sin x - \frac{1}{1+x^2}\right) dx = 3\int e^x\, dx + \int \sin x\, dx - \int \frac{dx}{1+x^2} =$$
   $$= 3e^x - \cos x - \operatorname{arctg} x + C,\ \forall C - const$$

2. **Метод подстановки**

   (2.1) Занесение под знак дифференциала

   Пример.

   $$\int \frac{e^{\arcsin x}\cdot 1}{\sqrt{1-x^2}}\, dx = \int e^{\arcsin x}\, d(\arcsin x) = e^{\arcsin x} + C,\ \forall C - const$$

   (2.2) Замена переменной
   Пусть функция $x = \varphi(t)$ определена и дифференцируема на T, а множество X — множество значений этой функции, на котором определена $f(x)$. Тогда, если существует первообразная функции $f(x)$ на X, то на множестве T верно равенство:

   $$\boxed{\int f(x)\, dx = \begin{vmatrix} x = \varphi(t) \\ dx = \varphi'(t) \end{vmatrix} = \int f\big(\varphi(t)\big)\varphi'(t)dt}$$

   Пример.

   $$\int x(3x-1)^{2024}dx = \begin{vmatrix} 3x-1 = t \quad 3x = t+1 \\ x = \dfrac{1}{3}(t+1) \\ dx = \left(\dfrac{1}{3}t + \dfrac{1}{3}\right)' dt = \dfrac{1}{3}dt \end{vmatrix} = \int \frac{1}{3}(t+1)\cdot t^{2024}\frac{1}{3}dt$$

3. **Интегрирование по частям**
   Пусть функции $u = u(x)$ и $v = v(x)$ непрерывно-дифференцируемые, тогда справедлива формула интегрирования по частям:

   $$\boxed{\int u\, dv = u\cdot v - \int v\, du}$$

   Доказательство.
   Рассмотрим произведение $u\cdot v = u(x)\cdot v(x)$
   Дифференциал:

   $$d(u\cdot v) = u\cdot dv + v\cdot du$$

   Выразим $u\cdot dv$:

   $$u\cdot dv = d(u\cdot v) - v\cdot du$$

Интегрируем:

$$\int u\,dv = \int \Big(d(uv) - v\,du\Big)$$

По свойству неопределённого интеграла (5):

$$\int u\,dv = \int d(uv) - \int v\,du$$

По свойству неопределённого интеграла (3):

$$\int u\,dv = u \cdot v - \int v\,du$$

■

Пример.

1. $\displaystyle \int xe^x\,dx = \int \underset{u}{x} d(\underset{v}{e^x}) = xe^x - \int e^x\,dx = xe^x - e^x + C, \quad \forall C - const$

2. $$\int \underbrace{\arccos x}_{u}\, x\, \underbrace{dx}_{dv} = \begin{vmatrix} u = \arccos x,\ du = -\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx \\ dv = dx,\ v = \displaystyle\int dv = \int dx = x \end{vmatrix} =$$
$$= x \cdot \arccos x - \int \frac{-x\,dx}{\sqrt{1-x^2}} = x \cdot \arccos x - \frac{1}{2}\int \frac{d(1-x^2)}{\sqrt{1-x^2}} =$$
$$= x \cdot \arccos x - \frac{1}{2} \cdot \frac{(1-x^2)^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} + C =$$
$$= x \cdot \arccos x - \sqrt{1-x^2} + C, \quad \forall C - const$$

2 Правильные и неправильные рациональные дроби

Определение 1. **Дробно-рациональной функцией** или рациональной дробью называется функция, равная частному от деления двух многочленов.

$$\frac{P_m(x)}{Q_n(x)} = \frac{a_m x^m + a_{m-1}x^{m-1} + \ldots + a_1 x + a_0}{b_n x^n + b_{n-1}x^{n-1} + \ldots + b_1 x + b_0},$$
$$a_m, a_{m-1}, \ldots, a_1, a_0, b_n, b_{n-1}, \ldots, b_1, b_0 \text{ — } const$$

где $P_m(x),\ Q_n(x)$ — многочлены степени m и n соответственно.

Определение 2. Рациональная дробь называется **правильной**, если степень числителя меньше степени знаменателя, то есть $m < n$.

Определение 3. Рациональная дробь называется **неправильной**, если степень числителя не меньше степени знаменателя, то есть $m \geqslant n$.

Простейшие рациональные дроби

$$1.\ \frac{A}{x-a} \qquad 2.\ \frac{A}{(x-a)^k} \qquad 3.\ \frac{Mx+N}{x^2+px+q} \qquad 4.\ \frac{Mx+N}{(x^2+px+q)^k}$$

где $A,\ a,\ M,\ N,\ p,\ q$ — $const$, $K \in \mathbb{N},\ k \geqslant 2$
$x^2 + px + q$ не имеет действительных корней.

$$D = p^2 - 4q < 0, \quad 4q - p^2 > 0, \quad \boxed{q - \frac{p^2}{4} > 0} \tag{$*$}$$

2.1 Интегрирование простейших рациональных дробей

2.1.1 $\frac{A}{x-a}$

$$\int \frac{A}{x-a}\,dx = A\int\frac{dx}{x-1} = A\int\frac{d(x-a)}{x-1} = A\cdot\ln|x-a| + C, \quad \forall C \text{ — } const$$

2.1.2 $\frac{A}{(x-a)^k}$

$$\int \frac{A}{(x-a)^k}\,dx = A\int\frac{dx}{(x-a)^k} = A\int\frac{d(x-a)}{(x-a)^k} = A\int(x-a)^{-k}\,d(x-a) = A\cdot\frac{(x-a)^{-k+1}}{-k+1} + C,$$
$$\forall C \text{ — } const$$

2.1.3 $\frac{Mx+N}{x^k+px+q}$

$$\int \frac{Mx+N}{x^2+px+q}\,dx = \left| \begin{aligned} & x^2+px+q = x^2+2\cdot\frac{p}{2}x+\frac{p^2}{4}-\frac{p^2}{4}+q = \\ & = \left(x+\frac{p}{2}\right)^2+\left(q-\frac{p^2}{4}\right) \overset{(*)}{=\!=} \left(x+\frac{p}{2}\right)^2+b^2 \end{aligned} \right| = \int \frac{Mx+N}{\left(x+\frac{p}{2}\right)^2+b^2}\,dx =$$

$$= \left|x+\frac{p}{2}=t \quad x=t-\frac{p}{2} \quad dx=dt\right| = \int \frac{M\left(t-\frac{p}{2}\right)+N}{t^2+b^2}\,dt =$$

$$= M\int \frac{t}{t^2+b^2}\,dt + \left(N-\frac{p}{2}M\right)\int \frac{dt}{t^2+b^2} =$$

$$= \frac{M}{2}\int \frac{d(t^2+b^2)}{t^2+b^2} + \left(N-\frac{p}{2}M\right)\frac{1}{b}\operatorname{arctg}\frac{t}{b} =$$

$$= \frac{M}{2}\ln|t^2+b^2| + \frac{\left(N-\frac{p}{2}M\right)}{b}\operatorname{arctg}\frac{t}{b} + C =$$

$$= \frac{M}{2}\ln|x^2+px+q| + \frac{\left(N-\frac{p}{2}M\right)}{\sqrt{q-\frac{p^2}{4}}}\operatorname{arctg}\frac{x+\frac{p}{2}}{\sqrt{q-\frac{p^2}{4}}} + C, \quad \forall C - const$$

Пример.

$$\int \frac{3x-5}{x^2+2x+10}\,dx = \int \frac{3x-5}{(x+1)^2+3^2} = \left| \begin{aligned} & x+1=t \\ & x=t-1 \\ & dx=dt \end{aligned} \right| = \int \frac{3(t-1)-5}{t^2+3^2}\,dt =$$

$$= 3\int \frac{t\,dt}{t^2+3^2} - 8\int \frac{dt}{t^2+3^2} = 3\cdot\frac{1}{2}\int \frac{d(t^2+3^2)}{t^2+3^2} - 8\cdot\frac{1}{3}\operatorname{arctg}\frac{t}{3} =$$

$$= \frac{3}{2}\ln|t^2+9| - \frac{8}{3}\operatorname{arctg}\frac{t}{3} + C = \frac{3}{2}\ln|x^2+2x+10| - \frac{8}{3}\operatorname{arctg}\frac{x+1}{3} + C, \quad \forall C - const$$

2.2 Неправильные рациональные дроби

Любая неправильная рациональная дробь может быть представлена в виде суммы многочлена и правильной рациональной дроби.

$$\boxed{\frac{P(x)}{Q(x)} = L(x) + \frac{r(x)}{Q(x)}} \tag{$\vee$}$$

$\dfrac{P(x)}{Q(x)}$ — неправильная рациональная дробь

$L(x)$ — многочлен/частное от деления $P(x)$ на $Q(x)$

$r(x)$ — остаток от деления $P(x)$ на $Q(x)$

$\dfrac{r(x)}{Q(x)}$ — правильная рациональная дробь.

Интегрируя ($\vee$) получаем:

$$\boxed{\int \frac{P(x)}{Q(x)}\,dx = \int L(x)\,dx + \int \frac{r(x)}{Q(x)}\,dx}$$

Вывод: Интегрирование неправильной рациональной дроби сводится к интегрированию многочлена и правильной рациональной дроби.

Теорема 1 *(О разложении правильной рациональной дроби на простейшие)*.
Любая правильная рациональная дробь $\dfrac{P(x)}{Q(x)}$, знаменатель которой можно разложить на множители:

$$Q(x) = (x-x_1)^{k_1}\cdot(x-x_2)^{k_2}\cdot\ldots\cdot(x-x_n)^{k_n}\cdot(x^2+p_1x+q_1)^{s_1}\cdot\ldots\cdot(x^2+p_m+q_m)^{s_m},$$

может быть представлена и при том единственным образом в виде суммы простейших рациональных дробей:

$$\begin{aligned}\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{A_1}{x-x_1} + \frac{B_1}{(x-x_1)^2} + \ldots + \frac{C_1}{(x-x_1)^{k_1}} + \ldots + \frac{A_n}{(x-x_n)} + \frac{B_n}{(x-x_n)^2} + \ldots +\\ + \frac{C_n}{(x-x_n)^{k_n}} + \frac{M_1x+N_1}{x^2+p_1x+q_1} + \ldots + \frac{M_{s_1}x+N_{s_1}}{(x^2+p_1x+q_1)^{s_1}} + \ldots +\\ + \frac{E_1x+F_1}{x^2+p_mx+q_m} + \ldots + \frac{E_{s_m}x+F_{s_m}}{(x^2+p_mx+q_m)^{s_m}}\end{aligned}$$

$$\left.\begin{array}{l} A_1,\ B_1,\ \ldots,\ C_1\\ A_n,\ B_n,\ \ldots,\ C_n\\ M_1,\ N_1,\ \ldots,\ M_{s_1},\ N_{s_1}\\ E_1,\ F_1,\ .,\ E_{s_m},\ F_{s_m}\end{array}\right\} \in \mathbb{R} \qquad \begin{array}{l} x^2+p_1x+q_1\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\\ x^2+p_mx+q_m\end{array} \quad \text{не имеют действительных корней}$$

$$k_1,\ k_2,\ \ldots,\ k_n,\ s_1,\ \ldots,\ s_m \in \mathbb{N}$$

Пример.

1) $$\frac{x^2+4}{(x-2)(x-3)^3} = \frac{A}{x-2} + \frac{B}{x-3} + \frac{C}{(x-3)^2} + \frac{D}{(x-3)^3}$$

2) $$\frac{x^3+1}{x^2(x^2+1)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x^2} + \frac{Cx+D}{x^2+1}$$

3) $$\frac{x^2+x+13}{(x-1)^2(x^2-4)(x^2+4)^2} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{(x-1)^2} + \underbrace{\frac{Cx+D}{x^2-4}}_{\frac{C}{x-2}+\frac{D}{x+2}} + \frac{Ex+F}{x^2+4} + \frac{Gx+H}{(x^2+4)^2}$$

2.3 Метод неопределённых коэффициентов

Равенство в теореме *о разложении правильной рациональной дроби на простейшие* (**Т. 1**) представляет собой тождество. Поэтому, приводя дроби к общему знаменателю, получим тождество числителей слева и справа. Приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях x получаем СЛАУ для определения неизвестных коэффициентов.

Пример.

$$\int \frac{3x-4}{x(x-2)(x+1)}\,dx \ominus$$

$$\frac{3x-4}{x(x-2)(x+1)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x-2} + \frac{C}{x+1} = \frac{A(x-2)(x+1)+Bx(x+1)+Cx(x-2)}{x(x-2)(x+1)}$$

$$\begin{aligned} 0\cdot x^2 + 3x - 4 &= A(x-2)(x+1)+Bx(x+1)+Cx(x-2) = \\ &= x^2(A+B+C)+(B-A-2C)x-2A \end{aligned} \qquad (**)$$

$$\left.\begin{array}{l|r} x^2 & 0 = A+B+C \\ x^1 & 3 = B-A-2C \\ x^0 & -4 = -2A \end{array}\right\} \text{СЛАУ} \qquad A=2 \quad B=\frac{1}{3} \quad C=-\frac{7}{3}$$

$$\ominus \int \left(\frac{2}{x} + \frac{\frac{1}{3}}{x-2} + \frac{-\frac{7}{3}}{x+1} \right) dx = 2\int \frac{dx}{x} + \frac{1}{3}\int \frac{dx}{x-2} - \frac{7}{3}\int \frac{dx}{x+1} =$$

$$= 2\ln|x| + \frac{1}{3}\ln|x-2| - \frac{7}{3}\ln|x+1| + C, \quad \forall C - const$$

2.4 Метод конкретных значений

После получения тождества числителей $(**)$ подставляем конкретные значения переменной x, так как оно верно для любого x.

Обычно вместо x подставляют действительные корни знаменателя.

Пример.

$$\begin{array}{lrcll} x=0: & -4 & = & -2A & \Rightarrow\ A=2 \\ x=2: & 3\cdot 2-4 & = & B\cdot 2\cdot 3 & \Rightarrow\ B=\frac{1}{3} \\ x=-1: & -3-4 & = & -C\cdot(-3) & \Rightarrow\ C=-\frac{7}{3} \end{array}$$

2.5 Выводы

1. **Метод конкретных значений** лучше использовать, когда в знаменателе правильной рациональной дроби нет кратных корней.

2. **Метод неопределённых коэффициентов** лучше использовать, когда в знаменателе правильной рациональной дроби кратные или комплексные (не действительные) корни.

3. Лучше комбинировать два метода.

2.6 Неберущиеся интегралы

1. $\displaystyle\int e^{-x^2}\,dx$ — интеграл Пуассона (теория вероятности)
2. $\displaystyle\int \frac{dx}{\ln x}$ — логарифмический интеграл (теория чисел)
3. $\displaystyle\int \cos x^2\,dx,\ \int \sin x^2\,dx$ — интегралы Френеля (физика)

3 Определённый интеграл. Криволинейная трапеция

3.1 Определённый интеграл

Пусть функция $y = f(x)$ определена на $[a;b]$.

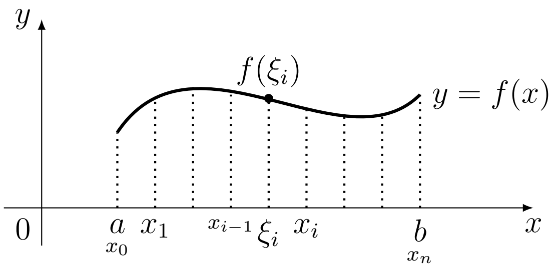
Определение 1. Множество точек $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_i < \ldots < x_n = b$ называется **разбиением отрезка $[a;b]$**, при этом отрезки $[x_{i-1};x_i]$ называются **отрезками разбиения**.

$i = 1, \ldots, n \quad i = \overline{1,n}$
$\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$ — длина i-го отрезка разбиения $\quad i = \overline{1,n}$
$\lambda = \max\limits_i \Delta x_i$ — диаметр разбиения

Рассмотрим произвольное разбиение $[a;b]$. В каждом из отрезков разбиения $[x_{i-1};x_i]$ выберем точку ξ_i, $i = \overline{1,n}$. Составим сумму

$$\boxed{S_n = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i) \cdot \Delta x_i} \tag{1}$$

(1) — интегральная сумма для функции $y = f(x)$ на $[a;b]$.



Определение 2. **Определённым интегралом** от функции $y = f(x)$ на $[a;b]$ называется <u>конечный</u> предел интегральной суммы (1), когда число отрезков разбиения растёт, а их длины стремятся к нулю.

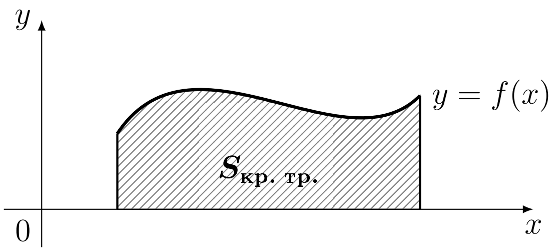
$$\boxed{\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{\lambda \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i) \cdot \Delta x} \tag{2}$$

Предел (2) не зависит от способа разбиения отрезка $[a;b]$ и выбора точек ξ_i, $\overline{1,n}$.
$f(x)$ — подынтегральная функция
$f(x)\,dx$ — подынтегральное выражение
$\displaystyle\int_a^b$ — знак определённого интеграла
a — нижний предел интегрирования
b — верхний предел интегрирования

3.2 Криволинейная трапеция

Определение 3. **Криволинейной трапецией** называется фигура, ограниченная графиком функции $y = f(x)$, отрезком $[a; b]$ на Ox, прямыми $x = a$ и $x = b$ параллельными оси Oy.

3.2.1 Геометрический смысл



Определённый интеграл численно равен площади криволинейной трапеции.

$$S_{\text{кр. тр.}} = \int_a^b f(x)\,dx$$

Определение 4. Функция $y = f(x)$ называется **интегрируемой** на $[a; b]$, если существует конечный предел интегральной суммы (1) на $[a; b]$.

Теорема 1 *(Существование определённого интеграла)*.
Если функция $y = f(x)$ непрерывна на $[a; b]$, то она на этом отрезке интегрируема.

3.3 Свойства определённого интеграла

Теорема 2.
Если функция $y = f(x)$ интегрируема на отрезке $[a; b]$, то имеет место равенство

$$\boxed{\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx}$$

Доказательство.
По определению определённого интеграла (**опр. 2**)

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\cdot\Delta x = \lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)(x_i - x_{i-1}) = -\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)(x_{i-1} - x_i)$$
$$= -\int_b^a f(x)\,dx$$

■

Теорема 3 *(Аддитивность определённого интеграла)***.**
Если функция $y = f(x)$ интегрируема на каждом из отрезков $[a; c]$, $[c; b]$ $(a < c < b)$, то она интегрируема на $[a; b]$ и верно равенство

$$\boxed{\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx}$$

Доказательство.
Рассмотрим произвольное разбиение $[a; b]$ такое, что одна из точек разбиения совпадает с точкой c:

$$a = x_0 < x_1 < \ldots < x_m = c < x_{m+1} < \ldots < x_n = b$$

Данное разбиение определяет ещё два разбиения:

$$\begin{array}{cc} a = x_0 < x_1 < \ldots < x_{m-1} < x_m = c & \lambda_1 = \max\limits_i \Delta x_i,\ i = \overline{1, m} \\ c = x_m < x_{m+1} < \ldots < x_{n-1} < x_n = b & \lambda_2 = \max\limits_i \Delta x_i,\ i = \overline{m+1, n} \end{array}$$

Так как функция $y = f(x)$ интегрируема на $[a; c]$ и на $[c; b]$, то

$$\int_a^c f(x)\,dx = \lim_{\lambda_1 \to 0} \sum_{i=1}^{m} f(\xi_i) \cdot \Delta x_i$$

$$\int_c^b f(x)\,dx = \lim_{\lambda_2 \to 0} \sum_{i=m+1}^{n} f(\xi_i) \cdot \Delta x_i$$

$\lambda = \max\{\lambda_1; \lambda_2\} \quad \lambda \to 0$
Суммируем интегральные суммы:

$$\sum_{i=1}^{m} f(\xi_i) \cdot \Delta x_i + \sum_{i=m+1}^{n} f(\xi_i) \cdot \Delta x_i = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i) \cdot \Delta x_i$$

Вычислим предел:

$$\lim_{\lambda \to 0} \left(\sum_{i=1}^{m} f(\xi_i) \cdot \Delta x_i + \sum_{i=m+1}^{n} f(\xi_i) \cdot \Delta x_i \right) = \lim_{\lambda \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i) \cdot \Delta x_i$$

$$\lim_{\lambda \to 0} \sum_{i=1}^{m} f(\xi_i) \cdot \Delta x_i + \lim_{\lambda \to 0} \sum_{i=m+1}^{n} f(\xi_i) \cdot \Delta x_i = \lim_{\lambda \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i) \cdot \Delta x_i$$

$$\lim_{\lambda_1 \to 0} \sum_{i=1}^{m} f(\xi_i) \cdot \Delta x_i + \lim_{\lambda_2 \to 0} \sum_{i=m+1}^{n} f(\xi_i) \cdot \Delta x_i = \lim_{\lambda \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i) \cdot \Delta x_i$$

Из последнего равенства следует, что $f(x)$ — интегрируема на $[a; b]$ и верно равенство

$$\int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx$$

■

Теорема 4.
Если C — $const$, то

$$\boxed{\int_a^b c\,dx = c\cdot(b-a)}$$

Доказательство.

$$\int_a^b c\,dx = \lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n} c\cdot\Delta x_i = c\cdot\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n} x_i - x_{i-1} = c\cdot(b-a)$$

■

Теорема 5.
Если функции $f_1(x),\ f_2(x)$ интегрируемы на $[a;b]$, то их линейная комбинация

$$\lambda_1 f_1(x) + \lambda_2 f_2(x),\ \text{где}\ \lambda_1,\ \lambda_2 \in \mathbb{R}$$

интегрируема на $[a;b]$ и верно равенство:

$$\int_a^b \Big(\lambda_1 f_1(x) + \lambda_2 f_2(x)\Big)\,dx = \lambda_1\int_a^b f_1(x)\,dx + \lambda_2\cdot\int_a^b f_2(x)\,dx$$

Доказательство.

$$\begin{aligned}
\int_a^b \Big(\lambda_1 f_1(x) + \lambda_2 f_2(x)\Big)\,dx &= \lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n}\Big(\lambda_1 f_1(\xi_i) + \lambda_2 f_2(\xi_i)\Big)\cdot\Delta x_i = \\
&= \lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n}\Big(\lambda_1 f_1(\xi_i)\cdot\Delta x_i + \lambda_2 f_2(\xi_i)\cdot\Delta x_i\Big) = \\
&= \lim_{\lambda\to 0}\left(\sum_{i=1}^{n}\lambda_1 f_1(\xi_i)\cdot\Delta x_i + \sum_{i=1}^{n}\lambda_2 f_2(\xi_i)\cdot\Delta x_i\right) = \\
&= \lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n}\lambda_1 f_1(\xi_i)\cdot\Delta x_i + \lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n}\lambda_2 f_2(\xi_i)\cdot\Delta x_i = \\
&= \lambda_1\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n} f_1(\xi_i)\cdot\Delta x_i + \lambda_2\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n} f_2(\xi_i)\cdot\Delta x_i = \\
&= \lambda_1\int_a^b f_1(x)\,dx + \lambda_2\int_a^b f_2(x)\,dx = \\
&= \int_a^b \Big(\lambda_1 f_1(x) + \lambda_2 f_2(x)\Big)\,dx
\end{aligned}$$

■

Следствие 5.1.

$$\int_a^a f(x)\,dx = 0$$

Теорема 6 *(О сохранении определённым интегралом знака подынтегральной функции)*.
Если $f(x)$ интегрируема и неотрицательна на $[a;b]$, то

$$\boxed{\int_a^b f(x)\,dx \geqslant 0}$$

Доказательство.

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\cdot\Delta x_i$$

Δx_i — длины отрезков разбиения $\quad \Delta x_i > 0$
$f(\xi_i) \geqslant 0$ по условию

$$f(\xi_i)\cdot\Delta x_i \geqslant 0,\ \ i=\overline{i,n}$$

$$\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\cdot\Delta x_i \geqslant 0 \quad \text{как сумма неотрицательных чисел}$$

$$\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\cdot\Delta x_i \geqslant 0$$

по следствию из теоремы *о сохранении функцией знака своего предела*

$$\Downarrow$$

$$\int_a^b f(x)\,dx \geqslant 0$$

■

Теорема 7 *(Об интегрировании неравенства)*.
Пусть функции $f(x)$ и $g(x)$ интегрируемы на $[a;b]$ и $\forall x\in[a;b]\colon f(x)\geqslant g(x)$, то

$$\boxed{\int_a^b f(x)\,dx \geqslant \int_a^b g(x)\,dx}$$

Доказательство.
По условию $f(x)\geqslant g(x),\ \forall x\in[a;b]$. Обозначим $h(x)=f(x)-g(x)\geqslant 0$.
По теореме 6

$$\int_a^b \big(f(x)-g(x)\big)\,dx \geqslant 0$$

По теореме 5:

$$\int_a^b f(x)\,dx - \int_a^b g(x)\,dx \geqslant 0$$
$$\Downarrow$$
$$\int_a^b f(x)\,dx \geqslant \int_a^b g(x)\,dx$$

■

Теорема 8 *(Об оценке модуля определённого интеграла)*.
Если функция $f(x)$ и $|f(x)|$ интегрируемы на $[a;b]$, то справедливо неравенство

$$\boxed{\left|\int_a^b f(x)\,dx\right| \leqslant \int_a^b \big|f(x)\big| dx}$$

Доказательство.
$\forall x \in [a;b]$ справедливо неравенство

$$-\big|f(x)\big| \leqslant f(x) \leqslant \big|f(x)\big|$$

По теореме 5 и 7:

$$-\int_a^b \big|f(x)\big|\,dx \leqslant \int_a^b f(x)\,dx \leqslant \int_a^b \big|f(x)\big|\,dx$$

Сворачиваем двойное неравенство:

$$\left|\int_a^b f(x)\,dx\right| \leqslant \int_a^b \big|f(x)\big| dx$$

■

Теорема 9 *(О среднем значении для определённого интеграла)*.
Если $f(x)$ непрерывна на $[a;b]$, то

$$\exists\, c \in [a;b]\colon\ f(c) = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx$$

Доказательство.
Так как функция $y = f(x)$ непрерывна на $[a;b]$, то по теореме *Вейерштрасса* она достигает своего наибольшего и наименьшего значения.
То есть $\exists\, m, M \in \mathbb{R},\ \forall x \in [a;b]\colon m \leqslant f(x) \leqslant M$
По теореме 7:

$$\int_a^b m\,dx \leqslant \int_a^b f(x)\,dx \leqslant \int_a^b M\,dx$$

По теореме 5:

$$m\int_a^b dx \leqslant \int_a^b f(x)\,dx \leqslant M\int_a^b dx$$

По теореме 4:

$$m(b-a) \leqslant \int_a^b f(x)\,dx \leqslant M(b-a) \quad | : (b-a)$$

Так как функция $y = f(x)$ непрерывна на $[a;b]$, то по теореме *Больцано-Коши* она принимает все свои значения между наибольшим и наименьшим значением.

$$m \leqslant \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx \leqslant M$$

По теореме *Больцано-Коши* $\exists\, c \in [a;b]$:

$$f(c) = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx$$

■

Теорема 10 *(Об оценке определённого интеграла)***.**
Пусть функции $f(x)$ и $g(x)$ интегрируемы на $[a;b]$ и $\forall x \in [a;b]\colon m \leqslant f(x) \leqslant N,\ g(x) \geqslant 0$. Тогда

$$\boxed{m\int_a^b g(x)\,dx \leqslant \int_a^b f(x)\,g(x)\,dx \leqslant M\int_a^b g(x)\,dx}$$

Доказательство.
Так как $\forall x \in [a;b]$ верны неравенства

$$\begin{aligned} m \leqslant f(x) \leqslant M \quad & | \cdot g(x) \\ g(x) \geqslant 0 \qquad & m, M \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

$$m \cdot g(x) \leqslant f(x) \cdot g(x) \leqslant M \cdot g(x)$$

По теореме 7 и 5:

$$m\int_a^b g(x) \leqslant \int_a^b f(x)\,g(x)\,dx \leqslant M\int_a^b g(x)\,dx$$

■

Следствие 10.1. $g(x) \equiv 1,\ \forall x \in [a;b]$

$$m(b-a) \leqslant \int_a^b f(x)\,dx \leqslant M(b-a)$$

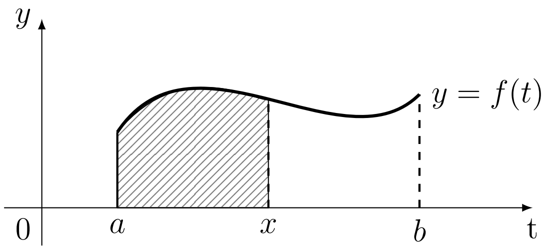
3.4 Определённый интеграл с переменным верхним пределом интегрирования

Пусть $f(x)$ непрерывна на $[a;b]$. Рассмотрим $\int_a^b f(x)\,dx$. Закрепим нижний предел интегрирования a. Изменяем верхний предел интегрирования b, чтобы подчеркнуть изменение верхнего предела интегрирования.

$b \longrightarrow x \quad x \in [a;b] \quad [a;x] \subset [a;b] \quad I(x) = \int_a^x f(x)\,dt.$

Определение 1. **Определённым интегралом с переменным верхним пределом интегрирования** от непрерывной функции $f(x)$ на $[a;b]$ называется интеграл вида

$$\boxed{I(x) = \int_a^x f(t)\,dt}, \text{ где } x \in [a;b]$$



$I(x)$ — переменная площадь криволинейной трапеции с основанием $[a;x] \subset [a;b]$.

3.4.1 Свойства

Теорема 1 *(Непрерывность $I(x)$).*
Если функция $f(x)$ на $[a;b]$ непрерывна, то $I(x) = \int_a^x f(x)\,dt$ — непрерывна на $[a;b]$.

Доказательство.
Рассмотрим $I(x) = \int_a^x f(t)\,dt$

$$I(x+\Delta x) = \int_a^{x+\Delta x} f(t)\,dt$$

$$\begin{aligned}\Delta I(x) = I(x+\Delta x) - I(x) &= \int_a^{x+\Delta x} f(t)\,dt - \int_a^x f(t)\,dt \overset{*,\ \text{Т3}}{=\!=} \\ &= \cancel{\int_a^x f(t)\,dt} + \int_x^{x+\Delta x} f(t)\,dt - \cancel{\int_a^x f(t)\,dt} = \int_a^{x+\Delta x} f(t)\,dt \overset{\text{Т9}}{=\!=} \\ &= f(c)\cdot(x+\Delta x - x) = f(c)\cdot\Delta x, \text{ где } c \in [x; x+\Delta x]\end{aligned}$$

$*$ — Так как функция $f(x)$ непрерывна на $[a;b]$, то $f(x)$ интегрируема на $[a;b]$ $\Rightarrow$ применяем свойство аддитивности определённого интеграла.

$$\lim_{\Delta x\to 0} \Delta I(x) = \lim_{\Delta x \to 0} f(c)\cdot\Delta x = 0$$

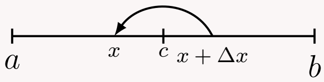
По определению непрерывной функций $\Rightarrow$ $I(x) = \int_a^x f(t)\,dt$ непрерывна на $[a;b]$. ■

Теорема 2 *(О производной $I(x)$).*
Если функция $y = f(x)$ непрерывна на $[a;b]$, то $\forall x \in [a;b]$ верно равенство

$$\boxed{(I(x))' = \left(\int_a^x f(t)\,dt\right)' = f(x)}$$

Доказательство.

$$\big(I(x)\big)' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta I(x)}{\Delta x} \overset{\text{T1}}{=\!=} \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(c) \cdot \Delta x}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} f(c) \overset{*}{=} f(x)$$

$*$: 

при $\Delta x \to 0 \quad x + \Delta x \to x \quad c \to x$

■

Следствие 2.1. Функция $I(x)$ — первообразная функции $f(x)$ на $[a;b]$, так как по теореме 2 $\big(I(x)\big)' = f(x)$.

3.4.2 Формула Ньютона-Лейбница

Теорема 3.
Пусть функция $f(x)$ — непрерывна на $[a;b]$. Тогда

$$\boxed{\int_a^b f(x)\,dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a)}$$

где $F(x)$ — первообразная $f(x)$.

Доказательство.
Пусть $F(x)$ первообразная $f(x)$ на $[a;b]$. По следствию из теоремы 2 $I(x)$ — первообразная $f(x)$ на $[a;b]$.
По свойству первообразной:

$$I(x) - F(x) = C$$
$$I(x) = F(x) + C, \text{ где } C \text{ — } const$$

$$\int_a^x f(t)\,dt = F(x) + C, \text{ где } C \text{ — } const \qquad (\vee)$$

- $x = a$:

$$\int_a^a f(t)\,dt = F(a) + C$$
$$0 = F(a) + C$$
$$C = -F(a)$$

$C = -F(a)$ подставим в $(\vee)$:

$$\int_a^x f(t)\,dt = F(x) - F(a)$$

- $x = b$:

$$\boxed{\int_a^b f(t)\,dt = F(b) - F(a)}$$

■

3.5 Методы вычисления определённого интеграла

3.5.1 Метод интегрирования по частям

Теорема 1.
Пусть функции $u = u(x)$ и $v = v(x)$ непрерывно дифференцируемы на $[a; b]$. Тогда имеет место равенство

$$\boxed{\int_a^b u\,dv = u\,v\Big|_a^b - \int_a^b v\,du}$$

Доказательство.
Рассмотрим произведение функций $u \cdot v$.
Дифференцируем:

$$d(u \cdot v) = v\,du + u\,dv$$
$$u\,dv = d(uv) - v\,du$$

Интегрируем:

$$\int_a^b u\,dv = \int_a^b \big(d(uv) - v\,du\big) = \int_a^b d(uv) - \int_a^b v\,du - u\,v\Big|_a^b - \int_a^b v\,du$$

■

Пример.

$$\int_1^e \ln x\,dx = \begin{vmatrix} u = \ln x & du = \dfrac{1}{x}\,dx \\ dv = dx & v = x \end{vmatrix} = x\,\ln x\Big|_1^e - \int_1^e x \cdot \frac{1}{x}\,dx = (e\ln e - 1 \cdot \ln 1) - x\Big|_1^e =$$
$$= e - (e-1) = \cancel{e} - \cancel{e} + 1 = 1$$