Содержание

1 Теоретические вопросы

1.1 Сформулируйте определение наклонной асимптоты

Определение 1. Прямая $y = kx + b$ называется **наклонной асимптотой** графика функции $y = f(x)$ при $x \to \pm\infty$, если функция $f(x) = kx + b + \alpha(x)$, где $\alpha(x)$ — б.м.ф. при $x \to \pm\infty$.

1.2 Сформулируйте определение производной функции в точке

Определение 2. **Производной функции** $y = f(x)$ в точке x_0 называется предел отношения приращения функции к приращению аргумента при стремлении последнего к нулю.

$$\boxed{y'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}}$$

1.3 Сформулируйте определение односторонней производной функции

Определение 3. Производной функции $y = f(x)$ в точке x_0 справа(слева) или **правосторонней (левосторонней) производной** называется предел отношения приращения функции к приращению аргумента при стремлении к нулю справа(слева).

$$\boxed{y'_+(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0+} \frac{\Delta y}{\Delta x}} \qquad \boxed{y'_-(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0-} \frac{\Delta y}{\Delta x}}$$

1.4 Сформулируйте определение производной n-го порядка

Определение 4. **Производной n-го порядка** или **n-ой производной** функции $y = f(x)$ называется производная от $(n-1)$-ой производной функции $y = f(x)$

$$\boxed{y^{(n)} = \left(y^{(n-1)}\right)'}$$

1.5 Сформулируйте определение дифференцируемой функции в точке

Определение 5. Функция $y = f(x)$ называется **дифференцируемой в точке** x_0, если существует константа A такая, что приращение функции в этой точке представимо в виде:

$$\boxed{\Delta y = A \cdot \Delta x + \alpha(\Delta x) \cdot \Delta x}$$

где $\alpha(\Delta x)$ – б.м.ф. при $\Delta x \to 0$

1.6 Сформулируйте определение дифференциала первого порядка

Пусть функция $y = f(x)$ определена в окрестности точки x_0 и дифференцируема в точке x_0.
Тогда по определению дифференцируемой функции:

$$\Delta y = f'(x_0) \cdot \Delta x + \alpha(\Delta x) \cdot \Delta x \tag{1}$$

где $\alpha(\Delta x)$ – б.м.ф. при $\Delta x \to 0$

Определение 6. **Дифференциалом** функции $y = f(x)$ в точке x_0 называется главная часть приращения функции Δy или первое слагаемое в равенстве (1).

$$\boxed{dy = f'(x_0) \cdot \Delta x} \tag{2}$$

1.7 Сформулируйте определение дифференциала n-го порядка

Определение 7. n-ым дифференциалом или **дифференциалом n-го порядка** называется дифференциал от дифференциала $(n-1)$-го порядка.

$$d^n y = d(d^{n-1}y), \quad n = 2, 3, \ldots$$

1.8 Сформулируйте определение возрастающей функции

Определение 8. Функция $y = f(x)$, определённая на $(a; b)$, **возрастает** на этом интервале, если:

$$\forall\ x_1, x_2 \in (a; b) \colon x_2 > x_1 \ \Rightarrow\ f(x_2) > f(x_1)$$

1.9 Сформулируйте определение невозрастающей функции

Определение 9. Функция $y = f(x)$, определённая на $(a; b)$, **не возрастает** на этом интервале, если:

$$\forall\ x_1, x_2 \in (a; b) \colon x_2 > x_1 \ \Rightarrow\ f(x_2) \leq f(x_1)$$

1.10 Сформулируйте определение убывающей функции

Определение 10. Функция $y = f(x)$, определённая на $(a; b)$, **убывает** на этом интервале, если:

$$\forall\ x_1, x_2 \in (a; b) \colon x_2 > x_1 \ \Rightarrow\ f(x_2) < f(x_1)$$

1.11 Сформулируйте определение неубывающей функции

Определение 11. Функция $y = f(x)$, определённая на $(a; b)$, **не убывает** на этом интервале, если:

$$\forall\ x_1, x_2 \in (a; b) \colon x_2 > x_1 \ \Rightarrow\ f(x_2) \geq f(x_1)$$

1.12 Сформулируйте определение монотонной функции

Определение 12. Возрастающая, убывающая, невозрастающая и неубывающая функции называются **монотонными**.

1.13 Сформулируйте определение строго монотонной функции

Определение 13. Возрастающая и убывающая функции называются **строго монотонными**.

1.14 Сформулируйте определение локального минимума

Определение 14. Пусть $y = f(x)$ определена на $(a;b),\ x_0 \in (a;b)$. Тогда:

Если $\exists\ \mathring{S}(x_0),\ \forall x \in \mathring{S}(x_0)\colon f(x) \geq f(x_0)$, то x_0 — точка локального минимума, $y_0 = y(x_0)$ — **локальный минимум**.

1.15 Сформулируйте определение строгого локального минимума

Определение 15. Пусть $y = f(x)$ определена на $(a;b),\ x_0 \in (a;b)$. Тогда:

Если $\exists\, \mathring{S}(x_0),\ \forall x \in \mathring{S}(x_0)\colon f(x) > f(x_0)$, то x_0 – точка строгого локального минимума, $y_0 = y(x_0)$ – **строгий локальный минимум**.

1.16 Сформулируйте определение локального максимума

Определение 16. Пусть $y = f(x)$ определена на $(a;b),\ x_0 \in (a;b)$. Тогда:

Если $\exists\ \mathring{S}(x_0),\ \forall x \in \mathring{S}(x_0)\colon f(x) \leq f(x_0)$, то x_0 — точка локального максимума, $y_0 = y(x_0)$ — **локальный максимум**.

1.17 Сформулируйте определение строгого локального максимума

Определение 17. Пусть $y = f(x)$ определена на $(a;b),\ x_0 \in (a;b)$. Тогда:

Если $\exists\, \mathring{S}(x_0),\ \forall x \in \mathring{S}(x_0)\colon f(x) < f(x_0)$, то x_0 – точка строгого локального максимума, $y_0 = y(x_0)$ – **строгий локальный максимум**.

1.18 Сформулируйте определение экстремума

Определение 18. Минимум, максимум, строгий минимум, строгий максимум функции $f(x)$ называются **экстремумами** этой функции.

1.19 Сформулируйте определение строгого экстремума

Определение 19. Строгий минимум и строгий максимум функции $f(x)$ называются **строгими экстремумами** этой функции.

1.20 Сформулируйте определение стационарной точки

Определение 20. Точки, в которых производная функции обращается в нуль, называются **стационарными**.

$$f'(x_0) = 0 \qquad x_0 \text{ — стационарная точка}$$

1.21 Сформулируйте определение критической точки

Определение 21. Точки, в которых производная функции обращается в нуль или не существует, называются **критическими точками 1-го порядка**.

1.22 Сформулируйте определение выпуклости функции на промежутке

Определение 22. Пусть функция $f(x)$ определена на интервале $(a;b)$. Функция $f(x)$ называется **выпуклой вверх (вниз)** на этом интервале, если любая точка касательной, проведённой к графику функции $f(x)$ (кроме точки касания) лежит выше (ниже) точки графика функции $f(x)$ с такой же абсциссой.

1.23 Сформулируйте определение точки перегиба графика функции

Определение 23. Пусть функция $f(x)$ определена на интервале $(a;b)$.
Точка $x_0 \in (a;b)$ называется **точкой перегиба функции** $f(x)$, если эта функция непрерывна в точке x_0 и если существует число $\delta > 0$ такое, что направление выпуклости функции $f(x)$ на интервалах $(x_0 - \delta; x_0)$ и $(x_0; x_0 + \delta)$ различны.
При этом точка $\big(x_0, f(x_0)\big)$ называется **точкой перегиба графика функции** $f(x)$.

2 Теоретические вопросы (формулировки теорем)

2.1 Сформулируйте необходимое и достаточное условие наличия наклонной асимптоты

Теорема 1 *(Необходимое и достаточное условие существования наклонных асимптот)*.
График функции $y = f(x)$ имеет при $x \to \pm\infty$ наклонную асимптоту тогда и только тогда, когда существуют два конечных передела:

$$\begin{cases} \lim\limits_{x\to\pm\infty} \dfrac{f(x)}{x} = k \\ \lim\limits_{x\to\pm\infty} \big(f(x) - k \cdot x\big) = b \end{cases}$$

2.2 Сформулируйте необходимое и достаточное условие дифференцируемости функции в точке

Теорема 2 *(Необходимое и достаточное условие дифференцируемости функции)***.**
Функция $y = f(x)$ дифференцируема в точке x_0 тогда и только тогда, когда она имеет в этой точке конечную производную.

2.3 Сформулируйте теорему о связи дифференцируемости и непрерывности функции

Теорема 3 *(Связь дифференцируемости и непрерывности функции)***.**
Если функция дифференцируема в точке x_0, то она в этой точке непрерывна.

2.4 Сформулируйте теорему о производной произведения

Теорема 4 *(Производная произведения)***.**
Пусть функции $u = u(x),\ v = v(x)$ дифференцируемы в точке x.
Тогда в этой точке дифференцируемо их произведение и справедливо равенство:

$$(u \cdot v)' = u' \cdot v + v' \cdot u$$

2.5 Сформулируйте теорему о производной частного

Теорема 5 *(Производная частного)***.**
Пусть функции $u = u(x),\ v = v(x)$ дифференцируемы в точке x.
Тогда в этой точке дифференцируемо их частное и справедливо равенство:

$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u' \cdot v - v' \cdot u}{v^2}$$

2.6 Сформулируйте свойство инвариантности формы записи дифференциала первого порядка

Теорема 6 *(Инвариантность формы первого дифференциала)***.**
Форма записи первого дифференциала не зависит от того, является ли x независимой переменной или функцией другого аргумента.

2.7 Сформулируйте теорему Ферма

Теорема 7 *(**Теорема Ферма** (о нулях производной))***.**
Пусть функция $y = f(x)$ определена на промежутке X и во внутренней точке $\boldsymbol{c}$ этого промежутка достигает наибольшего или наименьшего значения. Если в этой точке существует производная $f'(c)$, то $f'(c) = 0$.

2.8 Сформулируйте теорему Ролля

Теорема 8 ***(Теорема Ролля).***
Пусть $y = f(x)$

1. непрерывна на $[a; b]$
2. дифференцируема на $(a; b)$
3. $f(a) = f(b)$

Тогда $\exists\ c \in (a; b) \colon\ f'(c) = 0$

2.9 Сформулируйте теорему Лагранжа

Теорема 9 ***(Теорема Лагранжа).***
Пусть функция $y = f(x)$

1. непрерывна на $[a; b]$
2. дифференцируема на $(a; b)$

Тогда $\exists\ c \in (a; b) \colon \boxed{f(b) - f(a) = f'(c) \cdot (b - a)}$

2.10 Сформулируйте теорему Коши

Теорема 10 ***(Теорема Коши).***
Пусть функции $f(x)$ и $\varphi(x)$

1. непрерывны на $[a; b]$
2. дифференцируемы на $(a; b)$
3. $\forall x \in (a; b) \colon\ \varphi'(x) \neq 0$

Тогда $\exists\ c \in (a; b) \colon$

$$\boxed{\frac{f(b) - f(a)}{\varphi(b) - \varphi(a)} = \frac{f'(c)}{\varphi'(c)}}$$