Интегралы и дифференциальные уравнения

Лекции

2 семестр

GitHub: malyinik

2024 г.

Содержание

1 Первообразная и неопределённый интеграл

1.1 Первообразная

Определение 1. Функция $F(x)$ называется **первообразной** функции $f(x)$ на интервале $(a;b)$, если $F(x)$ дифференцируема на $(a;b)$ и $\forall x \in (a;b)$:

$$\boxed{F'(x) = f(x)} \tag{1}$$

Пример.

$$f(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}},\; D_f = (0;+\infty)$$

$$F(x) = \sqrt{x} \text{ — первообразная } f(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

$$F'(x) = (\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}} = f(x)$$

$$F(x) = \sqrt{x} + 3 \text{ — первообразная } f(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

1.1.1 Свойства первообразной

Свойство 1.
Если $F(x)$ — первообразная функции $f(x)$ на $(a;b)$, то $F(x)+C$ — первообразная функции $f(x)$ на $(a;b)$, где $\forall C$ — $const$.

Свойство 2.
Если $\Phi(x)$ дифференцируема на $(a;b)$ и $\forall x \in (a;b)$: $\Phi'(x) = 0$, то $\Phi(x) = const$, $\forall x \in (a;b)$.

Свойство 3 *(Существование первообразной)*.
Любая непрерывная функция на $(a;b)$ имеет множество первообразных на этом интервале, причём любые две из них отличаются друг от друга на константу.

$$\Phi(x),\; F(x) \text{ — первообразные функции } f(x) \text{ на } (a;b)$$
$$\Phi(x) - F(x) = const$$

1.2 Неопределённый интеграл

Определение 2. Множество первообразных функции $f(x)$ на $(a;b)$ называется **неопределённым интегралом**.

$$\boxed{\int f(x)dx = F(x) + C} \tag{2}$$

$\int$ — знак интеграла
$f(x)$ — подынтегральная функция
$f(x)dx$ — подынтегральное выражение
x — переменная
$F(x) + C$ — множество первообразных
C — произвольная константа

Определение 3. **Интегрирование** — нахождение неопределённого интеграла.

1.2.1 Свойства неопределённого интеграла

Свойство 1.
Производная от неопределённого интеграла равна подынтегральной функции.

$$\boxed{\left(\int f(x)dx\right)' = f(x)}$$

Доказательство.

$$\left(\int f(x)dx\right)' \overset{(2)}{=\!=} \big(F(x) + C\big)' = F'(x) + C' = F'(x) \overset{(1)}{=\!=} f(x)$$

■

Свойство 2.
Дифференциал от неопределённого интеграла равен подынтегральному выражению.

$$\boxed{d\left(\int f(x)dx\right) = f(x)dx}$$

Доказательство.

$$d\left(\int f(x)dx\right) \overset{(2)}{=\!=} d\big(F(x) + C\big) = \big(F(x) + C\big)'dx = \big(F'(x) + C'\big)dx = F'(x)dx \overset{(1)}{=\!=} f(x)dx$$

■

Свойство 3.
Неопределённый интеграл от дифференциала от некоторой функции равен сумме этой функции и константы.

$$\boxed{\int d\big(F(x)\big) = F(x) + C}, \quad \forall C - const$$

Доказательство.

$$\int d\big(F(x)\big) = \int F'(x)dx \overset{(1)}{=\!=} \int f(x)dx \overset{(2)}{=\!=} F(x) + C, \quad \forall C - const$$

■

Свойство 4.
Константу можно выносить за знак неопределённого интеграла.

$$\boxed{\int \lambda \cdot f(x)dx = \lambda \int f(x)dx}, \quad \lambda \neq 0$$

Доказательство.
Пусть $F(x)$ — первообразная $f(x)$

$$\lambda \int f(x)dx \overset{(2)}{=\!=} \lambda \cdot \big(F(x) + C\big), \quad \forall C - const$$

Функция $\lambda \cdot F(x)$ — первообразная $\lambda \cdot f(x)$:

$$\big(\lambda \cdot F(x)\big)' = \lambda \cdot F'(x) \overset{(1)}{=\!=} \lambda \cdot f(x)$$

$$\int \lambda \cdot f(x)dx \overset{(2)}{=\!=} \lambda \cdot F(x) + C_1, \quad \forall C_1 - const$$

Так как константы C_1, C — произвольные, $\lambda \neq 0$, то их всегда можно выбрать так, чтобы $C_1 = \lambda C$. Тогда множества $\lambda \cdot \big(F(x) + C\big)$ и $\lambda \cdot F(x) + C_1$ совпадают. ■

Свойство 5.
Если функции $f_1(x)$ и $f_2(x)$ на $(a;b)$ имеют первообразные $F_1(x)$ и $F_2(x)$ соответственно, то функция $\lambda_1 f_1(x) + \lambda_2 f_2(x)$, где $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$, имеет первообразную на $(a;b)$, причём $\lambda_1^2 + \lambda_2^2 > 0$:

$$\int \Big(\lambda_1 f_1(x) + \lambda_2 f_2(x)\Big)dx = \lambda_1 \int f_1(x)dx + \lambda_2 \int f_2(x)dx$$

Доказательство.
$F_1(x)$ — первообразная $f_1(x)$
$F_2(x)$ — первообразная $f_2(x)$

$$\lambda_1 \int f_1(x)dx + \lambda_2 \int f_2(x)dx \overset{(2)}{=\!=} \lambda_1(F_1(x) + C_1) + \lambda_2\big(F_2(x) + C_2\big) =$$
$$= \lambda_1 F_1(x) + \lambda_2 F_2(x) + \lambda_1 C_1 + \lambda_2 C_2, \quad \forall C_1, C_2 - const$$

Функция $F(x) = \lambda_1 F_1(x) + \lambda_2 F_2(x)$ — первообразная функции $\lambda_1 f_1(x) + \lambda_2 f_2(x)$.

$$F'(x) = \big(\lambda_1 F_1(x) + \lambda_2 F_2(x)\big)' = \lambda_1 F_1'(x) + \lambda_2 F_2'(x) \overset{(1)}{=\!=} \lambda_1 f_1(x) + \lambda_2 f_2(x)$$
$$\int \Big(\lambda_1 f_1(x) + \lambda_2 f_2(x)\Big)dx \overset{(2)}{=\!=} \lambda_1 f_1(x) + \lambda_2 f_2(x) + C, \quad \forall C - const$$

Так как константы C_1, C_2, C — произвольные, то всегда можно добиться выполнения равенства $C = \lambda_1 C_1 + \lambda_2 C_2$.
Тогда множества $\lambda_1 F_1(x)+\lambda_2 F_2(x)+\lambda_1 C_1+\lambda_2 C_2$ и $\lambda_1 F_1(x)+\lambda_2 F_2(x)+C$ совпадают. ■

Свойство 6 *(Инвариантность формы интегрирования)***.**
Если $\int f(x)dx = F(x) + C$, где $C - const$, то $\int f(u)du = F(u) + C$, где $C - const$, $u = \varphi(x)$ — непрерывно-дифференцируемая функция.

Доказательство.
x — независимая переменная
$f(x)$ — непрерывная функция
$F(x)$ — первообразная $f(x)$

$$\int f(x)dx = F(x) + C, \ \forall C - const$$

Рассмотрим сложную функцию $F(u) = F\big(\varphi(x)\big)$. Найдём дифференциал $F(u)$:

$$d\big(F(u)\big) = F'(u) \cdot \underbrace{\varphi'(x)dx}_{du} = \begin{vmatrix} u = \varphi(x) \\ du = \varphi'(x)dx \end{vmatrix} = F'(u)du \overset{(1)}{=\!=} f(u)du$$

Неопределённый интеграл:

$$\int f(u)du = \int d\big(F(u)\big) \overset{\textbf{(св. 3)}}{=\!=\!=} F(u) + C, \quad \forall C - const$$

■

Пример.

$$\int \sin x dx = -\cos x + C \qquad \sin(2x)d(2x) = -\cos(2x) + C$$

1.2.2 Геометрический смысл

Неопределённый интеграл геометрически представляет собой семейство интегральных кривых (графиков функций) вида $y = F(x) + C$, $\forall C - const$.

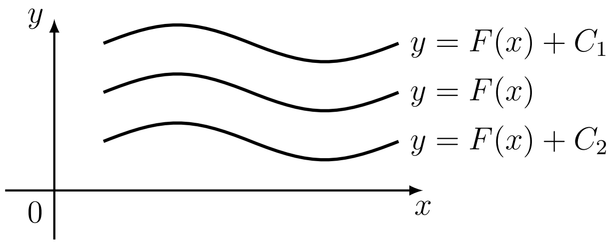

Рис. 1: Геометрический смысл неопределённого интеграла

1.2.3 Таблица основных интегралов

Таблица 1: Таблица основных интегралов

1. $\displaystyle\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C,\ \forall C - const$	11. $\displaystyle\int \frac{dx}{a^2 - x^2} = \frac{1}{2a} \ln \left\| \frac{a+x}{a-x} \right\| + C$
2. $\displaystyle\int dx = x + C$	12. $\displaystyle\int \frac{dx}{x^2 - a^2} = \frac{1}{2a} \ln \left\| \frac{a-x}{a+x} \right\| + C$
3. $\displaystyle\int \frac{dx}{x} = \ln \|x\| + C$	13. $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \arcsin \frac{x}{a} + C$
4. $\displaystyle\int e^x dx = e^x + C$	14. $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} = \ln \left\| x + \sqrt{x^2 \pm a^2} \right\| + C$
5. $\displaystyle\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$	15. $\displaystyle\int \operatorname{sh} x\ dx = \operatorname{ch} x + C$
6. $\displaystyle\int \sin x\ dx = -\cos x + C$	16. $\displaystyle\int \operatorname{ch} x\ dx = \operatorname{sh} x + C$
7. $\displaystyle\int \cos x\ dx = \sin x + C$	17. $\displaystyle\int \frac{dx}{\operatorname{ch}^2 x} = \operatorname{th} x + C$
8. $\displaystyle\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x + C$	18. $\displaystyle\int \frac{dx}{\operatorname{sh}^2 x} = -\operatorname{cth} x + C$
9. $\displaystyle\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\operatorname{ctg} x + C$	19. $\displaystyle\int \frac{dx}{\sin x} = \ln \left\| \operatorname{tg} \frac{x}{2} \right\| + C$
10. $\displaystyle\int \frac{dx}{a^2 + x^2} = \frac{1}{a} \operatorname{arcctg} \frac{x}{a} + C$	20. $\displaystyle\int \frac{dx}{\cos x} = \ln \left\| \operatorname{tg} \left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4} \right) \right\| + C$

Доказательство (19).

$$\int \frac{dx}{\sin x} = \int \frac{dx}{2 \sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2}} = \frac{1}{2} \int \frac{\frac{1}{\cos^2 \frac{x}{2}}}{\frac{\sin \frac{x}{2} \cancel{\cos \frac{x}{2}}}{\cos^{\cancel{2}} \frac{x}{2}}} dx = \int \frac{\frac{1}{2 \cos^2 \frac{x}{2}}}{\operatorname{tg} \frac{x}{2}} dx = \int \frac{d\left(\operatorname{tg} \frac{x}{2}\right)}{\operatorname{tg} \frac{x}{2}} =$$

$$= \left| \operatorname{tg} \frac{x}{2} t \right| = \int \frac{dt}{t} = \ln |t| + C = \ln \left| \operatorname{tg} \frac{x}{2} \right| + C$$

■

1.3 Основные методы интегрирования

1. Непосредственное интегрирование (свойства + таблица)

Пример.

$$\int \left(3e^x + \sin x - \frac{1}{1+x^2}\right) dx = 3\int e^x dx + \int \sin x \, dx - \int \frac{dx}{1+x^2} = \\ = 3e^x - \cos x - \operatorname{arctg} x + C, \ \forall C - const$$

2. Метод подстановки

(2.1) Занесение под знак дифференциала

Пример.

$$\int \frac{e^{\arcsin x} \cdot 1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \int e^{\arcsin x} d(\arcsin x) = e^{\arcsin x} + C, \ \forall C - const$$

(2.2) Замена переменной

Пусть функция $x = \varphi(t)$ определена и дифференцируема на T, а множество X — множество значений этой функции, на котором определена $f(x)$. Тогда, если существует первообразная функции $f(x)$ на X, то на множестве T верно равенство:

$$\boxed{\int f(x)dx = \left| \begin{aligned} x &= \varphi(t) \\ dx &= \varphi'(t) \end{aligned} \right| = \int f\big(\varphi(t)\big)\varphi'(t)dt}$$

Пример.

$$\int x(3x-1)^{2024}dx = \left| \begin{array}{l} 3x - 1 = t \quad 3x = t+1 \\ x = \dfrac{1}{3}\big(t+1\big) \\ dx = \left(\dfrac{1}{3}t + \dfrac{1}{3}\right)' dt = \dfrac{1}{3}dt \end{array} \right| = \int \frac{1}{3}\big(t+1\big) \cdot t^{2024} \frac{1}{3} dt$$