

Интегралы и дифференциальные уравнения

Лекции
2 семестр

GitHub: [malyinik](#)

2024 г.

Содержание

1	Первообразная и неопределённый интеграл	3
1.1	Первообразная	3
1.1.1	Свойства первообразной	3
1.2	Неопределённый интеграл	4
1.2.1	Свойства неопределённого интеграла	4
1.2.2	Геометрический смысл	6
1.2.3	Таблица основных интегралов	7
1.3	Основные методы интегрирования	8
2	Правильные и неправильные рациональные дроби	10
2.1	Интегрирование простейших рациональных дробей	10
2.1.1	$\frac{A}{x-a}$	10
2.1.2	$\frac{A}{(x-a)^k}$	10
2.1.3	$\frac{Mx+N}{x^k+px+q}$	11
2.2	Неправильные рациональные дроби	11
2.3	Метод неопределённых коэффициентов	13
2.4	Метод конкретных значений	13
2.5	Выводы	13
2.6	Неберущиеся интегралы	14
3	Определённый интеграл. Криволинейная трапеция	15
3.1	Определённый интеграл	15
3.2	Криволинейная трапеция	16
3.2.1	Геометрический смысл	16
3.3	Свойства определённого интеграла	16
3.4	Определённый интеграл с переменным верхним пределом интегрирования	22
3.4.1	Свойства	22
3.4.2	Формула Ньютона-Лейбница	23
3.5	Методы вычисления определённого интеграла	24
3.5.1	Метод интегрирования по частям	24
3.5.2	Метод подстановки (замена переменной)	25
3.6	Интегрирование чётных и нечётных функций по симметричному относительно начала координат промежутку	26
3.7	Интегрирование периодических функций	27
4	Приложения определённого интеграла	28
4.1	Площадь плоской фигуры	28
4.1.1	Прямоугольная декартова система координат	28
4.1.2	Параметрически заданная функция	29
4.1.3	Полярная система координат	30
4.2	Объём тела	31
4.3	Тела вращения	32
4.3.1	Прямоугольная декартова система координат	32
4.3.2	Полярная система координат	33
4.4	Длина дуги	35
4.4.1	Прямоугольная декартова система координат	35
4.4.2	Параметрически заданная функция	36
4.4.3	Полярная система координат	36
4.5	Площадь поверхности вращения (внешняя оболочка)	38

4.5.1	Следствия	39
5	Несобственные интегралы	41
5.1	Интегралы по бесконечному промежутку	41
5.2	Признаки сходимости и расходимости несобственных интегралов 1-го рода .	42
5.3	Интегралы для сравнения	46
5.3.1	Эталоны	46

1 Первообразная и неопределённый интеграл

1.1 Первообразная

Определение 1. Функция $F(x)$ называется **первообразной** функции $f(x)$ на интервале $(a; b)$, если $F(x)$ дифференцируема на $(a; b)$ и $\forall x \in (a; b)$:

$$\boxed{F'(x) = f(x)} \quad (1)$$

Пример.

$$f(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}, \quad D_f = (0; +\infty)$$

$$F(x) = \sqrt{x} - \text{первообразная } f(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

$$F'(x) = (\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}} = f(x)$$

$$F(x) = \sqrt{x} + 3 - \text{первообразная } f(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

1.1.1 Свойства первообразной

Свойство 1.

Если $F(x)$ — первообразная функции $f(x)$ на $(a; b)$, то $F(x) + C$ — первообразная функции $f(x)$ на $(a; b)$, где $\forall C — const$.

Свойство 2.

Если $\Phi(x)$ дифференцируема на $(a; b)$ и $\forall x \in (a; b): \Phi'(x) = 0$, то $\Phi(x) = const$, $\forall x \in (a; b)$.

Свойство 3 (*Существование первообразной*).

Любая непрерывная функция на $(a; b)$ имеет множество первообразных на этом интервале, причём любые две из них отличаются друг от друга на константу.

$$\begin{aligned} \Phi(x), F(x) &— \text{первообразные функции } f(x) \text{ на } (a; b) \\ \Phi(x) - F(x) &= const \end{aligned}$$

1.2 Неопределённый интеграл

Определение 2. Множество первообразных функции $f(x)$ на $(a; b)$ называется **неопределённым интегралом**.

$$\int f(x) dx = F(x) + C \quad (2)$$

\int — знак интеграла

$f(x)$ — подынтегральная функция

$f(x) dx$ — подынтегральное выражение

x — переменная

$F(x) + C$ — множество первообразных

C — произвольная константа

Определение 3. Интегрирование — нахождение неопределённого интеграла.

1.2.1 Свойства неопределённого интеграла

Свойство 1.

Производная от неопределённого интеграла равна подынтегральной функции.

$$\left(\int f(x) dx \right)' = f(x)$$

Доказательство.

$$\left(\int f(x) dx \right)' \stackrel{(2)}{=} (F(x) + C)' = F'(x) + C' = F'(x) \stackrel{(1)}{=} f(x)$$

■

Свойство 2.

Дифференциал от неопределённого интеграла равен подынтегральному выражению.

$$d \left(\int f(x) dx \right) = f(x) dx$$

Доказательство.

$$\begin{aligned} d \left(\int f(x) dx \right) &\stackrel{(2)}{=} d(F(x) + C) = (F(x) + C)' dx = \\ &= (F'(x) + C') dx = F'(x) dx \stackrel{(1)}{=} f(x) dx \end{aligned}$$

■

Свойство 3.

Неопределённый интеграл от дифференциала от некоторой функции равен сумме этой функции и константы.

$$\boxed{\int d(F(x)) = F(x) + C, \quad \forall C - const}$$

Доказательство.

$$\int d(F(x)) = \int F'(x) dx \stackrel{(1)}{=} \int f(x) dx \stackrel{(2)}{=} F(x) + C, \quad \forall C - const$$

■

Свойство 4.

Константу можно выносить за знак неопределённого интеграла.

$$\boxed{\int \lambda \cdot f(x) dx = \lambda \int f(x) dx, \quad \lambda \neq 0}$$

Доказательство.

Пусть $F(x)$ — первообразная $f(x)$

$$\lambda \int f(x) dx \stackrel{(2)}{=} \lambda \cdot (F(x) + C), \quad \forall C - const$$

Функция $\lambda \cdot F(x)$ — первообразная $\lambda \cdot f(x)$:

$$\begin{aligned} (\lambda \cdot F(x))' &= \lambda \cdot F'(x) \stackrel{(1)}{=} \lambda \cdot f(x) \\ \int \lambda \cdot f(x) dx &\stackrel{(2)}{=} \lambda \cdot F(x) + C_1, \quad \forall C_1 - const \end{aligned}$$

Так как константы C_1, C — произвольные, $\lambda \neq 0$, то их всегда можно выбрать так, чтобы $C_1 = \lambda C$. Тогда множества $\lambda \cdot (F(x) + C)$ и $\lambda \cdot F(x) + C_1$ совпадают. ■

Свойство 5.

Если функции $f_1(x)$ и $f_2(x)$ на $(a; b)$ имеют первообразные $F_1(x)$ и $F_2(x)$ соответственно, то функция $\lambda_1 f_1(x) + \lambda_2 f_2(x)$, где $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$, имеет первообразную на $(a; b)$, причём $\lambda_1^2 + \lambda_2^2 > 0$:

$$\int (\lambda_1 f_1(x) + \lambda_2 f_2(x)) dx = \lambda_1 \int f_1(x) dx + \lambda_2 \int f_2(x) dx$$

Доказательство.

$F_1(x)$ — первообразная $f_1(x)$

$F_2(x)$ — первообразная $f_2(x)$

$$\begin{aligned} \lambda_1 \int f_1(x) dx + \lambda_2 \int f_2(x) dx &\stackrel{(2)}{=} \lambda_1 (F_1(x) + C_1) + \lambda_2 (F_2(x) + C_2) = \\ &= \lambda_1 F_1(x) + \lambda_2 F_2(x) + \lambda_1 C_1 + \lambda_2 C_2, \quad \forall C_1, C_2 - const \end{aligned}$$

Функция $F(x) = \lambda_1 F_1(x) + \lambda_2 F_2(x)$ — первообразная функции $\lambda_1 f_1(x) + \lambda_2 f_2(x)$.

$$F'(x) = (\lambda_1 F_1(x) + \lambda_2 F_2(x))' = \lambda_1 F_1'(x) + \lambda_2 F_2'(x) \stackrel{(1)}{=} \lambda_1 f_1(x) + \lambda_2 f_2(x) \\ \int (\lambda_1 f_1(x) + \lambda_2 f_2(x)) dx \stackrel{(2)}{=} \lambda_1 f_1(x) + \lambda_2 f_2(x) + C, \quad \forall C - const$$

Так как константы C_1, C_2, C — произвольные, то всегда можно добиться выполнения равенства $C = \lambda_1 C_1 + \lambda_2 C_2$.

Тогда множества $\lambda_1 F_1(x) + \lambda_2 F_2(x) + \lambda_1 C_1 + \lambda_2 C_2$ и $\lambda_1 F_1(x) + \lambda_2 F_2(x) + C$ совпадают. ■

Свойство 6 (Инвариантность формы интегрирования).

Если $\int f(x) dx = F(x) + C$, где $C - const$, то $\int f(u) du = F(u) + C$, где $C - const$, $u = \varphi(x)$ — непрерывно-дифференцируемая функция.

Доказательство.

x — независимая переменная

$f(x)$ — непрерывная функция

$F(x)$ — первообразная $f(x)$

$$\int f(x) dx = F(x) + C, \quad \forall C - const$$

Рассмотрим сложную функцию $F(u) = F(\varphi(x))$. Найдём дифференциал $F(u)$:

$$d(F(u)) = F'(u) \cdot \underbrace{\varphi'(x) dx}_{du} = \left| \begin{array}{l} u = \varphi(x) \\ du = \varphi'(x) dx \end{array} \right| = F'(u) du \stackrel{(1)}{=} f(u) du$$

Неопределённый интеграл:

$$\int f(u) du = \int d(F(u)) \stackrel{(\text{св. 3})}{=} F(u) + C, \quad \forall C - const$$

■

Пример.

$$\int \sin x dx = -\cos x + C \quad \sin(2x) d(2x) = -\cos(2x) + C$$

1.2.2 Геометрический смысл

Неопределённый интеграл геометрически представляет собой семейство интегральных кривых (графиков функций) вида $y = F(x) + C$, $\forall C - const$.

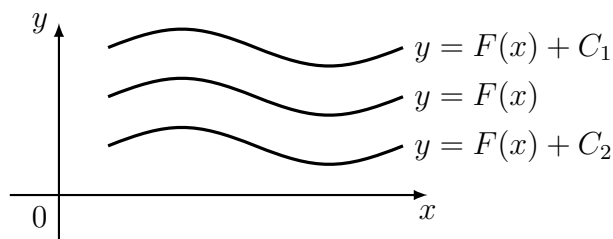


Рис. 1: Геометрический смысл неопределённого интеграла

1.2.3 Таблица основных интегралов

Таблица 1: Таблица основных интегралов

1. $\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C, \forall C - const$	11. $\int \frac{dx}{a^2 - x^2} = \frac{1}{2a} \ln \left \frac{a+x}{a-x} \right + C$
2. $\int dx = x + C$	12. $\int \frac{dx}{x^2 - a^2} = \frac{1}{2a} \ln \left \frac{a-x}{a+x} \right + C$
3. $\int \frac{dx}{x} = \ln x + C$	13. $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \arcsin \frac{x}{a} + C$
4. $\int e^x dx = e^x + C$	14. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} = \ln \left x + \sqrt{x^2 \pm a^2} \right + C$
5. $\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$	15. $\int \operatorname{sh} x dx = \operatorname{ch} x + C$
6. $\int \sin x dx = -\cos x + C$	16. $\int \operatorname{ch} x dx = \operatorname{sh} x + C$
7. $\int \cos x dx = \sin x + C$	17. $\int \frac{dx}{\operatorname{ch}^2 x} = \operatorname{th} x + C$
8. $\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x + C$	18. $\int \frac{dx}{\operatorname{sh}^2 x} = -\operatorname{cth} x + C$
9. $\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\operatorname{ctg} x + C$	19. $\int \frac{dx}{\sin x} = \ln \left \operatorname{tg} \frac{x}{2} \right + C$
10. $\int \frac{dx}{a^2 + x^2} = \frac{1}{a} \operatorname{arctg} \frac{x}{a} + C$	20. $\int \frac{dx}{\cos x} = \ln \left \operatorname{tg} \left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4} \right) \right + C$

Доказательство (19).

$$\begin{aligned}
 \int \frac{dx}{\sin x} &= \int \frac{dx}{2 \sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2}} = \frac{1}{2} \int \frac{\frac{1}{\cos^2 \frac{x}{2}}}{\frac{\sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2}}{\cos^2 \frac{x}{2}}} dx = \int \frac{\frac{1}{2 \cos^2 \frac{x}{2}}}{\operatorname{tg} \frac{x}{2}} dx = \int \frac{d(\operatorname{tg} \frac{x}{2})}{\operatorname{tg} \frac{x}{2}} = \\
 &= \left| \operatorname{tg} \frac{x}{2} \right| = \int \frac{dt}{t} = \ln |t| + C = \ln \left| \operatorname{tg} \frac{x}{2} \right| + C
 \end{aligned}$$

■

1.3 Основные методы интегрирования

1. Непосредственное интегрирование (свойства + таблица)

Пример.

$$\begin{aligned}\int \left(3e^x + \sin x - \frac{1}{1+x^2} \right) dx &= 3 \int e^x dx + \int \sin x dx - \int \frac{dx}{1+x^2} = \\ &= 3e^x - \cos x - \operatorname{arctg} x + C, \quad \forall C = \text{const}\end{aligned}$$

2. Метод подстановки

(2.1) Занесение под знак дифференциала

Пример.

$$\int \frac{e^{\arcsin x} \cdot 1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \int e^{\arcsin x} d(\arcsin x) = e^{\arcsin x} + C, \quad \forall C = \text{const}$$

(2.2) Замена переменной

Пусть функция $x = \varphi(t)$ определена и дифференцируема на T , а множество X — множество значений этой функции, на котором определена $f(x)$. Тогда, если существует первообразная функции $f(x)$ на X , то на множестве T верно равенство:

$$\int f(x) dx = \left| \begin{array}{l} x = \varphi(t) \\ dx = \varphi'(t) dt \end{array} \right| = \int f(\varphi(t)) \varphi'(t) dt$$

Пример.

$$\int x(3x-1)^{2024} dx = \left| \begin{array}{l} 3x-1=t \quad 3x=t+1 \\ x=\frac{1}{3}(t+1) \\ dx=\left(\frac{1}{3}t+\frac{1}{3}\right)' dt = \frac{1}{3}dt \end{array} \right| = \int \frac{1}{3}(t+1) \cdot t^{2024} \frac{1}{3} dt$$

3. Интегрирование по частям

Пусть функции $u = u(x)$ и $v = v(x)$ непрерывно-дифференцируемые, тогда справедлива формула интегрирования по частям:

$$\int u dv = u \cdot v - \int v du$$

Доказательство.

Рассмотрим произведение $u \cdot v = u(x) \cdot v(x)$

Дифференциал:

$$d(u \cdot v) = u \cdot dv + v \cdot du$$

Выразим $u \cdot dv$:

$$u \cdot dv = d(u \cdot v) - v \cdot du$$

Интегрируем:

$$\int u \, dv = \int (d(uv) - v \, du)$$

По свойству неопределённого интеграла (5):

$$\int u \, dv = \int d(uv) - \int v \, du$$

По свойству неопределённого интеграла (3):

$$\int u \, dv = u \cdot v - \int v \, du$$



Пример.

$$1. \quad \int x e^x \, dx = \int \underbrace{x}_u d(\underbrace{e^x}_v) = x e^x - \int e^x \, dx = x e^x - e^x + C, \quad \forall C - const$$

$$\begin{aligned} 2. \quad \int \underbrace{\arccos x}_u x \underbrace{dx}_{dv} &= \left| \begin{array}{l} u = \arccos x, \, du = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx \\ dv = dx, \, v = \int dv = \int dx = x \end{array} \right| = \\ &= x \cdot \arccos x - \int \frac{-x \, dx}{\sqrt{1-x^2}} = x \cdot \arccos x - \frac{1}{2} \int \frac{d(1-x^2)}{\sqrt{1-x^2}} = \\ &= x \cdot \arccos x - \frac{1}{2} \cdot \frac{(1-x^2)^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} + C = \\ &= x \cdot \arccos x - \sqrt{1-x^2} + C, \quad \forall C - const \end{aligned}$$

2 Правильные и неправильные рациональные дроби

Определение 1. Дробно-рациональной функцией или рациональной дробью называется функция, равная частному от деления двух многочленов.

$$\frac{P_m(x)}{Q_n(x)} = \frac{a_mx^m + a_{m-1}x^{m-1} + \dots + a_1x + a_0}{b_nx^n + b_{n-1}x^{n-1} + \dots + b_1x + b_0},$$
$$a_m, a_{m-1}, \dots, a_1, a_0, b_n, b_{n-1}, \dots, b_1, b_0 - \text{const}$$

где $P_m(x)$, $Q_n(x)$ — многочлены степени m и n соответственно.

Определение 2. Рациональная дробь называется **правильной**, если степень числителя меньше степени знаменателя, то есть $m < n$.

Определение 3. Рациональная дробь называется **неправильной**, если степень числителя не меньше степени знаменателя, то есть $m \geq n$.

Простейшие рациональные дроби

$$1. \frac{A}{x-a} \quad 2. \frac{A}{(x-a)^k} \quad 3. \frac{Mx+N}{x^2+px+q} \quad 4. \frac{Mx+N}{(x^2+px+q)^k}$$

где $A, a, M, N, p, q - \text{const}$, $K \in \mathbb{N}$, $k \geq 2$
 $x^2 + px + q$ не имеет действительных корней.

$$D = p^2 - 4q < 0, \quad 4q - p^2 > 0, \quad \boxed{q - \frac{p^2}{4} > 0} \quad (*)$$

2.1 Интегрирование простейших рациональных дробей

2.1.1 $\frac{A}{x-a}$

$$\int \frac{A}{x-a} dx = A \int \frac{dx}{x-a} = A \int \frac{d(x-a)}{x-a} = A \cdot \ln|x-a| + C, \quad \forall C - \text{const}$$

2.1.2 $\frac{A}{(x-a)^k}$

$$\int \frac{A}{(x-a)^k} dx = A \int \frac{dx}{(x-a)^k} = A \int \frac{d(x-a)}{(x-a)^k} = A \int (x-a)^{-k} d(x-a) = A \cdot \frac{(x-a)^{-k+1}}{-k+1} + C,$$
$$\forall C - \text{const}$$

2.1.3 $\frac{Mx+N}{x^2+px+q}$

$$\begin{aligned}
 \int \frac{Mx+N}{x^2+px+q} dx &= \left| \begin{aligned} x^2+px+q &= x^2+2 \cdot \frac{p}{2}x + \frac{p^2}{4} - \frac{p^2}{4} + q = \\ &= \left(x + \frac{p}{2}\right)^2 + \left(q - \frac{p^2}{4}\right) \stackrel{(*)}{=} \left(x + \frac{p}{2}\right)^2 + b^2 \end{aligned} \right| = \int \frac{Mx+N}{\left(x + \frac{p}{2}\right)^2 + b^2} dx = \\
 &= \left| x + \frac{p}{2} = t \quad x = t - \frac{p}{2} \quad dx = dt \right| = \int \frac{M\left(t - \frac{p}{2}\right) + N}{t^2 + b^2} dt = \\
 &= M \int \frac{t}{t^2 + b^2} dt + \left(N - \frac{p}{2}M\right) \int \frac{dt}{t^2 + b^2} = \\
 &= \frac{M}{2} \int \frac{d(t^2 + b^2)}{t^2 + b^2} + \left(N - \frac{p}{2}M\right) \frac{1}{b} \operatorname{arctg} \frac{t}{b} = \\
 &= \frac{M}{2} \ln |t^2 + b^2| + \frac{\left(N - \frac{p}{2}M\right)}{b} \operatorname{arctg} \frac{t}{b} + C = \\
 &= \frac{M}{2} \ln |x^2 + px + q| + \frac{\left(N - \frac{p}{2}M\right)}{\sqrt{q - \frac{p^2}{4}}} \operatorname{arctg} \frac{x + \frac{p}{2}}{\sqrt{q - \frac{p^2}{4}}} + C, \quad \forall C - \text{const}
 \end{aligned}$$

Пример.

$$\begin{aligned}
 \int \frac{3x-5}{x^2+2x+10} dx &= \int \frac{3x-5}{(x+1)^2+3^2} = \left| \begin{aligned} x+1 &= t \\ x &= t-1 \\ dx &= dt \end{aligned} \right| = \int \frac{3(t-1)-5}{t^2+3^2} dt = \\
 &= 3 \int \frac{t}{t^2+3^2} - 8 \int \frac{dt}{t^2+3^2} = 3 \cdot \frac{1}{2} \int \frac{d(t^2+3^2)}{t^2+3^2} - 8 \cdot \frac{1}{3} \operatorname{arctg} \frac{t}{3} = \\
 &= \frac{3}{2} \ln |t^2+9| - \frac{8}{3} \operatorname{arctg} \frac{t}{3} + C = \frac{3}{2} \ln |x^2+2x+10| - \frac{8}{3} \operatorname{arctg} \frac{x+1}{3} + C, \\
 &\quad \forall C - \text{const}
 \end{aligned}$$

2.2 Неправильные рациональные дроби

Любая неправильная рациональная дробь может быть представлена в виде суммы многочлена и правильной рациональной дроби.

$$\boxed{\frac{P(x)}{Q(x)} = L(x) + \frac{r(x)}{Q(x)}} \quad (\vee)$$

$\frac{P(x)}{Q(x)}$ — неправильная рациональная дробь

$L(x)$ — многочлен/частное от деления $P(x)$ на $Q(x)$

$r(x)$ — остаток от деления $P(x)$ на $Q(x)$

$\frac{r(x)}{Q(x)}$ — правильная рациональная дробь.

Интегрируя (V) получаем:

$$\int \frac{P(x)}{Q(x)} dx = \int L(x) dx + \int \frac{r(x)}{Q(x)} dx$$

Вывод: Интегрирование неправильной рациональной дроби сводится к интегрированию многочлена и правильной рациональной дроби.

Теорема 1 (О разложении правильной рациональной дроби на простейшие).

Любая правильная рациональная дробь $\frac{P(x)}{Q(x)}$, знаменатель которой можно разложить на множители:

$$Q(x) = (x - x_1)^{k_1} \cdot (x - x_2)^{k_2} \cdot \dots \cdot (x - x_n)^{k_n} \cdot (x^2 + p_1x + q_1)^{s_1} \cdot \dots \cdot (x^2 + p_mx + q_m)^{s_m},$$

может быть представлена и при том единственным образом в виде суммы простейших рациональных дробей:

$$\begin{aligned} \frac{P(x)}{Q(x)} = & \frac{A_1}{x - x_1} + \frac{B_1}{(x - x_1)^2} + \dots + \frac{C_1}{(x - x_1)^{k_1}} + \dots + \frac{A_n}{(x - x_n)} + \frac{B_n}{(x - x_n)^2} + \dots + \\ & + \frac{C_n}{(x - x_n)^{k_n}} + \frac{M_1x + N_1}{x^2 + p_1x + q_1} + \dots + \frac{M_{s_1}x + N_{s_1}}{(x^2 + p_1x + q_1)^{s_1}} + \dots + \\ & + \frac{E_1x + F_1}{x^2 + p_mx + q_m} + \dots + \frac{E_{s_m}x + F_{s_m}}{(x^2 + p_mx + q_m)^{s_m}} \end{aligned}$$

$$\left. \begin{array}{l} A_1, B_1, \dots, C_1 \\ A_n, B_n, \dots, C_n \\ M_1, N_1, \dots, M_{s_1}, N_{s_1} \\ E_1, F_1, \dots, E_{s_m}, F_{s_m} \end{array} \right\} \in \mathbb{R} \quad \begin{array}{l} x^2 + p_1x + q_1 \\ \dots\dots\dots \\ x^2 + p_mx + q_m \end{array} \quad \begin{array}{l} \text{не имеют} \\ \text{действительных корней} \end{array}$$

$k_1, k_2, \dots, k_n, s_1, \dots, s_m \in \mathbb{N}$

Пример.

$$\begin{aligned} 1) \quad & \frac{x^2 + 4}{(x - 2)(x - 3)^3} = \frac{A}{x - 2} + \frac{B}{x - 3} + \frac{C}{(x - 3)^2} + \frac{D}{(x - 3)^3} \\ 2) \quad & \frac{x^3 + 1}{x^2(x^2 + 1)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x^2} + \frac{Cx + D}{x^2 + 1} \\ 3) \quad & \frac{x^2 + x + 13}{(x - 1)^2(x^2 - 4)(x^2 + 4)^2} = \frac{A}{x - 1} + \frac{B}{(x - 1)^2} + \underbrace{\frac{Cx + D}{x^2 - 4}}_{\frac{C}{x-2} + \frac{D}{x+2}} + \frac{Ex + F}{x^2 + 4} + \frac{Gx + H}{(x^2 + 4)^2} \end{aligned}$$

2.3 Метод неопределённых коэффициентов

Равенство в теореме о разложении правильной рациональной дроби на простейшие (Т. 1) представляет собой тождество. Поэтому, приводя дроби к общему знаменателю, получим тождество числителей слева и справа. Приравнявая коэффициенты при одинаковых степенях x получаем СЛАУ для определения неизвестных коэффициентов.

Пример.

$$\begin{aligned} \int \frac{3x-4}{x(x-2)(x+1)} dx &\ominus \\ \frac{3x-4}{x(x-2)(x+1)} &= \frac{A}{x} + \frac{B}{x-2} + \frac{C}{x+1} = \frac{A(x-2)(x+1) + Bx(x+1) + Cx(x-2)}{x(x-2)(x+1)} \\ 0 \cdot x^2 + 3x - 4 &= A(x-2)(x+1) + Bx(x+1) + Cx(x-2) = \\ &= x^2(A+B+C) + (B-A-2C)x - 2A \end{aligned} \quad (**)$$
$$\left. \begin{array}{l} x^2 \mid 0 = A + B + C \\ x^1 \mid 3 = B - A - 2C \\ x^0 \mid -4 = -2A \end{array} \right\} \text{СЛАУ} \quad A = 2 \quad B = \frac{1}{3} \quad C = -\frac{7}{3}$$
$$\begin{aligned} \ominus \int \left(\frac{2}{x} + \frac{\frac{1}{3}}{x-2} + \frac{-\frac{7}{3}}{x+1} \right) dx &= 2 \int \frac{dx}{x} + \frac{1}{3} \int \frac{dx}{x-2} - \frac{7}{3} \int \frac{dx}{x+1} = \\ &= 2 \ln |x| + \frac{1}{3} \ln |x-2| - \frac{7}{3} \ln |x+1| + C, \quad \forall C - \text{const} \end{aligned}$$

2.4 Метод конкретных значений

После получения тождества числителей (**) подставляем конкретные значения переменной x , так как оно верно для любого x .

Обычно вместо x подставляют действительные корни знаменателя.

Пример.

$$\begin{aligned} x=0: \quad -4 &= -2A \Rightarrow A=2 \\ x=2: \quad 3 \cdot 2 - 4 &= B \cdot 2 \cdot 3 \Rightarrow B=\frac{1}{3} \\ x=-1: \quad -3 - 4 &= -C \cdot (-3) \Rightarrow C=-\frac{7}{3} \end{aligned}$$

2.5 Выводы

1. **Метод конкретных значений** лучше использовать, когда в знаменателе правильной рациональной дроби нет кратных корней.
2. **Метод неопределённых коэффициентов** лучше использовать, когда в знаменателе правильной рациональной дроби кратные или комплексные (не действительные) корни.
3. Лучше комбинировать два метода.

2.6 Неберущиеся интегралы

1. $\int e^{-x^2} dx$ — интеграл Пуассона (теория вероятности)
2. $\int \frac{dx}{\ln x}$ — логарифмический интеграл (теория чисел)
3. $\int \cos x^2 dx, \int \sin x^2 dx$ — интегралы Френеля (физика)

3 Определённый интеграл. Криволинейная трапеция

3.1 Определённый интеграл

Пусть функция $y = f(x)$ определена на $[a; b]$.

Определение 1. Множество точек $a = x_0 < x_1 < \dots < x_i < \dots < x_n = b$ называется **разбиением отрезка $[a; b]$** , при этом отрезки $[x_{i-1}; x_i]$ называются **отрезками разбиения**.

$$i = 1, \dots, n \quad i = \overline{1, n}$$

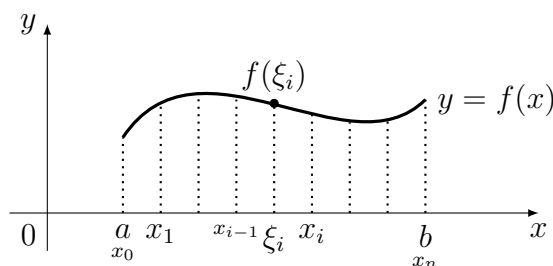
$$\Delta x_i = x_i - x_{i-1} \text{ — длина } i\text{-го отрезка разбиения} \quad i = \overline{1, n}$$

$$\lambda = \max_i \Delta x_i \text{ — диаметр разбиения}$$

Рассмотрим произвольное разбиение $[a; b]$. В каждом из отрезков разбиения $[x_{i-1}; x_i]$ выберем точку ξ_i , $i = \overline{1, n}$. Составим сумму

$$S_n = \sum_{i=1}^n f(\xi_i) \cdot \Delta x_i \quad (1)$$

(1) — интегральная сумма для функции $y = f(x)$ на $[a; b]$.



Определение 2. Определённым интегралом от функции $y = f(x)$ на $[a; b]$ называется конечный предел интегральной суммы (1), когда число отрезков разбиения растёт, а их длины стремятся к нулю.

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(\xi_i) \cdot \Delta x_i \quad (2)$$

Предел (2) не зависит от способа разбиения отрезка $[a; b]$ и выбора точек ξ_i , $i = \overline{1, n}$.

$f(x)$ — подынтегральная функция

$f(x) dx$ — подынтегральное выражение

\int_a^b — знак определённого интеграла

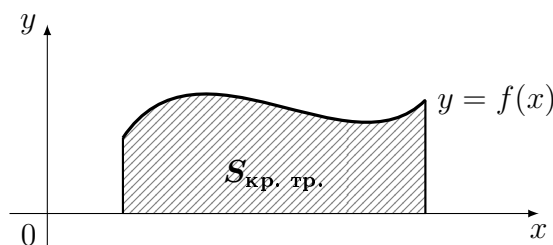
a — нижний предел интегрирования

b — верхний предел интегрирования

3.2 Криволинейная трапеция

Определение 3. Криволинейной трапецией называется фигура, ограниченная графиком функции $y = f(x)$, отрезком $[a; b]$ на Ox , прямыми $x = a$ и $x = b$ параллельными оси Oy .

3.2.1 Геометрический смысл



Определённый интеграл численно равен площади криволинейной трапеции.

$$S_{\text{кр. тр.}} = \int_a^b f(x) dx$$

Определение 4. Функция $y = f(x)$ называется **интегрируемой** на $[a; b]$, если существует конечный предел интегральной суммы (1) на $[a; b]$.

Теорема 1 (*Существование определённого интеграла*).

Если функция $y = f(x)$ непрерывна на $[a; b]$, то она на этом отрезке интегрируема.

3.3 Свойства определённого интеграла

Теорема 2.

Если функция $y = f(x)$ интегрируема на отрезке $[a; b]$, то имеет место равенство

$$\int_a^b f(x) dx = - \int_b^a f(x) dx$$

Доказательство.

По определению определённого интеграла (**опр. 2**)

$$\begin{aligned} \int_a^b f(x) dx &= \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(\xi_i) \cdot \Delta x = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(\xi_i)(x_i - x_{i-1}) = - \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(\xi_i)(x_{i-1} - x_i) \\ &= - \int_b^a f(x) dx \end{aligned}$$

■

Теорема 3 (*Аддитивность определённого интеграла*).

Если функция $y = f(x)$ интегрируема на каждом из отрезков $[a; c]$, $[c; b]$ ($a < c < b$), то она интегрируема на $[a; b]$ и верно равенство

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx$$

Доказательство.

Рассмотрим произвольное разбиение $[a; b]$ такое, что одна из точек разбиения совпадает с точкой c :

$$a = x_0 < x_1 < \dots < x_m = c < x_{m+1} < \dots < x_n = b$$

Данное разбиение определяет ещё два разбиения:

$$\begin{aligned} a = x_0 < x_1 < \dots < x_{m-1} < x_m = c & \quad \lambda_1 = \max_i \Delta x_i, \quad i = \overline{1, m} \\ c = x_m < x_{m+1} < \dots < x_{n-1} < x_n = b & \quad \lambda_2 = \max_i \Delta x_i, \quad i = \overline{m+1, n} \end{aligned}$$

Так как функция $y = f(x)$ интегрируема на $[a; c]$ и на $[c; b]$, то

$$\begin{aligned} \int_a^c f(x) dx &= \lim_{\lambda_1 \rightarrow 0} \sum_{i=1}^m f(\xi_i) \cdot \Delta x_i \\ \int_c^b f(x) dx &= \lim_{\lambda_2 \rightarrow 0} \sum_{i=m+1}^n f(\xi_i) \cdot \Delta x_i \end{aligned}$$

$$\lambda = \max\{\lambda_1; \lambda_2\} \quad \lambda \rightarrow 0$$

Суммируем интегральные суммы:

$$\sum_{i=1}^m f(\xi_i) \cdot \Delta x_i + \sum_{i=m+1}^n f(\xi_i) \cdot \Delta x_i = \sum_{i=1}^n f(\xi_i) \cdot \Delta x_i$$

Вычислим предел:

$$\begin{aligned} \lim_{\lambda \rightarrow 0} \left(\sum_{i=1}^m f(\xi_i) \cdot \Delta x_i + \sum_{i=m+1}^n f(\xi_i) \cdot \Delta x_i \right) &= \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(\xi_i) \cdot \Delta x_i \\ \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^m f(\xi_i) \cdot \Delta x_i + \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=m+1}^n f(\xi_i) \cdot \Delta x_i &= \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(\xi_i) \cdot \Delta x_i \\ \lim_{\lambda_1 \rightarrow 0} \sum_{i=1}^m f(\xi_i) \cdot \Delta x_i + \lim_{\lambda_2 \rightarrow 0} \sum_{i=m+1}^n f(\xi_i) \cdot \Delta x_i &= \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(\xi_i) \cdot \Delta x_i \end{aligned}$$

Из последнего равенства следует, что $f(x)$ — интегрируема на $[a; b]$ и верно равенство

$$\int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx = \int_a^b f(x) dx$$

■

Теорема 4.

Если $C = \text{const}$, то

$$\int_a^b c \, dx = c \cdot (b - a)$$

Доказательство.

$$\int_a^b c \, dx = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n c \cdot \Delta x_i = c \cdot \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n x_i - x_{i-1} = c \cdot (b - a)$$

■

Теорема 5.

Если функции $f_1(x)$, $f_2(x)$ интегрируемы на $[a; b]$, то их линейная комбинация

$$\lambda_1 f_1(x) + \lambda_2 f_2(x), \text{ где } \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$$

интегрируема на $[a; b]$ и верно равенство:

$$\int_a^b (\lambda_1 f_1(x) + \lambda_2 f_2(x)) \, dx = \lambda_1 \int_a^b f_1(x) \, dx + \lambda_2 \cdot \int_a^b f_2(x) \, dx$$

Доказательство.

$$\begin{aligned} \int_a^b (\lambda_1 f_1(x) + \lambda_2 f_2(x)) \, dx &= \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n (\lambda_1 f_1(\xi_i) + \lambda_2 f_2(\xi_i)) \cdot \Delta x_i = \\ &= \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n (\lambda_1 f_1(\xi_i) \cdot \Delta x_i + \lambda_2 f_2(\xi_i) \cdot \Delta x_i) = \\ &= \lim_{\lambda \rightarrow 0} \left(\sum_{i=1}^n \lambda_1 f_1(\xi_i) \cdot \Delta x_i + \sum_{i=1}^n \lambda_2 f_2(\xi_i) \cdot \Delta x_i \right) = \\ &= \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n \lambda_1 f_1(\xi_i) \cdot \Delta x_i + \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n \lambda_2 f_2(\xi_i) \cdot \Delta x_i = \\ &= \lambda_1 \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f_1(\xi_i) \cdot \Delta x_i + \lambda_2 \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f_2(\xi_i) \cdot \Delta x_i = \\ &= \lambda_1 \int_a^b f_1(x) \, dx + \lambda_2 \int_a^b f_2(x) \, dx = \\ &= \int_a^b (\lambda_1 f_1(x) + \lambda_2 f_2(x)) \, dx \end{aligned}$$

■

Следствие 5.1.

$$\int_a^a f(x) dx = 0$$

Теорема 6 (О сохранении определённым интегралом знака подынтегральной функции).

Если $f(x)$ интегрируема и неотрицательна на $[a; b]$, то

$$\int_a^b f(x) dx \geq 0$$

Доказательство.

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(\xi_i) \cdot \Delta x_i$$

Δx_i — длины отрезков разбиения $\Delta x_i > 0$
 $f(\xi_i) \geq 0$ по условию

$$f(\xi_i) \cdot \Delta x_i \geq 0, \quad i = \overline{1, n}$$

$$\sum_{i=1}^n f(\xi_i) \cdot \Delta x_i \geq 0 \quad \text{как сумма неотрицательных чисел}$$

$$\lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(\xi_i) \cdot \Delta x_i \geq 0 \quad \text{по следствию из теоремы о сохранении функции знака своего предела}$$

\Downarrow

$$\int_a^b f(x) dx \geq 0$$

■

Теорема 7 (Об интегрировании неравенства).

Пусть функции $f(x)$ и $g(x)$ интегрируемы на $[a; b]$ и $\forall x \in [a; b]: f(x) \geq g(x)$, то

$$\int_a^b f(x) dx \geq \int_a^b g(x) dx$$

Доказательство.

По условию $f(x) \geq g(x)$, $\forall x \in [a; b]$. Обозначим $h(x) = f(x) - g(x) \geq 0$.

По теореме 6

$$\int_a^b (f(x) - g(x)) dx \geq 0$$

По теореме 5:

$$\begin{aligned}\int_a^b f(x) dx - \int_a^b g(x) dx &\geq 0 \\ \Downarrow \\ \int_a^b f(x) dx &\geq \int_a^b g(x) dx\end{aligned}$$

■

Теорема 8 (Об оценке модуля определённого интеграла).

Если функция $f(x)$ и $|f(x)|$ интегрируемы на $[a; b]$, то справедливо неравенство

$$\left| \int_a^b f(x) dx \right| \leq \int_a^b |f(x)| dx$$

Доказательство.

$\forall x \in [a; b]$ справедливо неравенство

$$-|f(x)| \leq f(x) \leq |f(x)|$$

По теореме 5 и 7:

$$-\int_a^b |f(x)| dx \leq \int_a^b f(x) dx \leq \int_a^b |f(x)| dx$$

Сворачиваем двойное неравенство:

$$\left| \int_a^b f(x) dx \right| \leq \int_a^b |f(x)| dx$$

■

Теорема 9 (О среднем значении для определённого интеграла).

Если $f(x)$ непрерывна на $[a; b]$, то

$$\exists c \in [a; b]: f(c) = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx$$

Доказательство.

Так как функция $y = f(x)$ непрерывна на $[a; b]$, то по теореме Вейерштрасса она достигает своего наибольшего и наименьшего значения.

То есть $\exists m, M \in \mathbb{R}, \forall x \in [a; b]: m \leq f(x) \leq M$

По теореме 7:

$$\int_a^b m dx \leq \int_a^b f(x) dx \leq \int_a^b M dx$$

По теореме 5:

$$m \int_a^b dx \leq \int_a^b f(x) dx \leq M \int_a^b dx$$

По теореме 4:

$$m(b-a) \leq \int_a^b f(x) dx \leq M(b-a) \quad | : (b-a)$$

Так как функция $y = f(x)$ непрерывна на $[a; b]$, то по теореме *Больцано-Коши* она принимает все свои значения между наибольшим и наименьшим значением.

$$m \leq \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx \leq M$$

По теореме *Больцано-Коши* $\exists c \in [a; b]$:

$$f(c) = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx$$

■

Теорема 10 (*Об оценке определённого интеграла*).

Пусть функции $f(x)$ и $g(x)$ интегрируемы на $[a; b]$ и $\forall x \in [a; b]: m \leq f(x) \leq N, g(x) \geq 0$. Тогда

$$m \int_a^b g(x) dx \leq \int_a^b f(x) g(x) dx \leq M \int_a^b g(x) dx$$

Доказательство.

Так как $\forall x \in [a; b]$ верны неравенства

$$\begin{aligned} m &\leq f(x) \leq M & | \cdot g(x) \\ g(x) &\geq 0 & m, M \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

$$m \cdot g(x) \leq f(x) \cdot g(x) \leq M \cdot g(x)$$

По теореме 7 и 5:

$$m \int_a^b g(x) dx \leq \int_a^b f(x) g(x) dx \leq M \int_a^b g(x) dx$$

■

Следствие 10.1. $g(x) \equiv 1, \forall x \in [a; b]$

$$m(b-a) \leq \int_a^b f(x) dx \leq M(b-a)$$

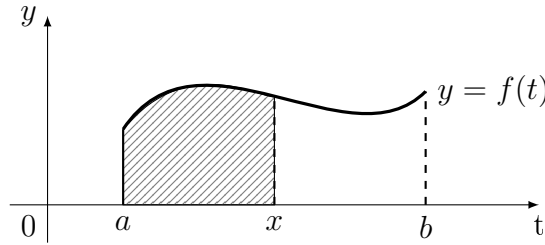
3.4 Определённый интеграл с переменным верхним пределом интегрирования

Пусть $f(x)$ непрерывна на $[a; b]$. Рассмотрим $\int_a^b f(x) dx$. Закрепим нижний предел интегрирования a . Изменяем верхний предел интегрирования b , чтобы подчеркнуть изменение верхнего предела интегрирования.

$$b \longrightarrow x \quad x \in [a; b] \quad [a; x] \subset [a; b] \quad I(x) = \int_a^x f(x) dt.$$

Определение 1. Определённым интегралом с переменным верхним пределом интегрирования от непрерывной функции $f(x)$ на $[a; b]$ называется интеграл вида

$$I(x) = \int_a^x f(t) dt, \text{ где } x \in [a; b]$$



$I(x)$ — переменная площадь криволинейной трапеции с основанием $[a; x] \subset [a; b]$.

3.4.1 Свойства

Теорема 1 (Непрерывность $I(x)$).

Если функция $f(x)$ на $[a; b]$ непрерывна, то $I(x) = \int_a^x f(x) dt$ — непрерывна на $[a; b]$.

Доказательство.

Рассмотрим $I(x) = \int_a^x f(t) dt$

$$\begin{aligned} I(x + \Delta x) &= \int_a^{x+\Delta x} f(t) dt \\ \Delta I(x) &= I(x + \Delta x) - I(x) = \int_a^{x+\Delta x} f(t) dt - \int_a^x f(t) dt \stackrel{*, \text{ T3}}{=} \\ &= \int_a^x \cancel{f(t)} dt + \int_x^{x+\Delta x} f(t) dt - \int_a^x \cancel{f(t)} dt = \int_a^{x+\Delta x} f(t) dt \stackrel{\text{T9}}{=} \\ &= f(c) \cdot (x + \Delta x - x) = f(c) \cdot \Delta x, \text{ где } c \in [x; x + \Delta x] \end{aligned}$$

* — Так как функция $f(x)$ непрерывна на $[a; b]$, то $f(x)$ интегрируема на $[a; b] \Rightarrow$ применяем свойство аддитивности определённого интеграла.

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \Delta I(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} f(c) \cdot \Delta x = 0$$

По определению непрерывной функций $\Rightarrow I(x) = \int_a^x f(t) dt$ непрерывна на $[a; b]$. ■

Теорема 2 (*О производной $I(x)$*).

Если функция $y = f(x)$ непрерывна на $[a; b]$, то $\forall x \in [a; b]$ верно равенство

$$(I(x))' = \left(\int_a^x f(t) dt \right)' = f(x)$$

Доказательство.

$$(I(x))' = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta I(x)}{\Delta x} \stackrel{\text{т1}}{=} \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(c) \cdot \Delta x}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} f(c) \stackrel{*}{=} f(x)$$

*:  при $\Delta x \rightarrow 0$ $x + \Delta x \rightarrow x$ $c \rightarrow x$

■

Следствие 2.1. Функция $I(x)$ — первообразная функции $f(x)$ на $[a; b]$, так как по теореме 2 $(I(x))' = f(x)$.

3.4.2 Формула Ньютона-Лейбница

Теорема 3.

Пусть функция $f(x)$ — непрерывна на $[a; b]$. Тогда

$$\int_a^b f(x) dx = F(x) \Big|_a^b = F(b) - F(a)$$

где $F(x)$ — первообразная $f(x)$.

Доказательство.

Пусть $F(x)$ первообразная $f(x)$ на $[a; b]$. По следствию из теоремы 2 $I(x)$ — первообразная $f(x)$ на $[a; b]$.

По свойству первообразной:

$$I(x) - F(x) = C$$

$$I(x) = F(x) + C, \text{ где } C — const$$

$$\int_a^x f(t) dt = F(x) + C, \text{ где } C — const \quad (\vee)$$

• $x = a$:

$$\int_a^a f(t) dt = F(a) + C$$

$$0 = F(a) + C$$

$$C = -F(a)$$

$C = -F(a)$ подставим в (\vee) :

$$\int_a^x f(t) dt = F(x) - F(a)$$

• $x = b$:

$$\int_a^b f(t) dt = F(b) - F(a)$$

■

3.5 Методы вычисления определённого интеграла

3.5.1 Метод интегрирования по частям

Теорема 1.

Пусть функции $u = u(x)$ и $v = v(x)$ непрерывно дифференцируемы на $[a; b]$. Тогда имеет место равенство

$$\int_a^b u dv = u v \Big|_a^b - \int_a^b v du$$

Доказательство.

Рассмотрим произведение функций $u \cdot v$.

Дифференцируем:

$$\begin{aligned} d(u \cdot v) &= v du + u dv \\ u dv &= d(uv) - v du \end{aligned}$$

Интегрируем:

$$\int_a^b u dv = \int_a^b (d(uv) - v du) = \int_a^b d(uv) - \int_a^b v du = u v \Big|_a^b - \int_a^b v du$$

■

Пример.

$$\begin{aligned} \int_1^e \ln x dx &= \left| \begin{array}{ll} u = \ln x & du = \frac{1}{x} dx \\ dv = dx & v = x \end{array} \right| = x \ln x \Big|_1^e - \int_1^e x \cdot \frac{1}{x} dx = (e \ln e - 1 \cdot \ln 1) - x \Big|_1^e = \\ &= e - (e - 1) = \cancel{e} - \cancel{e} + 1 = 1 \end{aligned}$$

3.5.2 Метод подстановки (замена переменной)

Теорема 2.

Пусть

1. $y = f(x)$ непрерывна на $[a; b]$
2. $x = \varphi(t)$ непрерывно дифференцируема при $t \in [t_1; t_2]$
3. при $t \in [t_1; t_2]$ значения функции $\varphi(t)$ не выходят за пределы $[a; b]$
4. $\varphi(t_1) = a, \varphi(t_2) = b$

$$\text{Тогда } \int_a^b f(x) dx = \left| \begin{array}{lll} x = \varphi(t), & x_{\text{н}} = a, & t_{\text{н}} = t_1 \\ dx = \varphi'(t) dt, & x_{\text{в}} = b, & t_{\text{в}} = t_2 \end{array} \right| = \int_{t_1}^{t_2} f(\varphi(t)) \varphi'(t) dt$$

Доказательство.

Так как

1. $y = f(x)$ непрерывна на $[a; b]$, а
2. $x = \varphi(t)$ непрерывна на $[t_1; t_2]$, то

сложная $y = f(\varphi(t))$ непрерывна на $[t_1; t_2]$ по теореме о непрерывности сложной функции.

Так как $y = f(x)$ непрерывна на $[a; b]$, а функция $f(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t)$ — непрерывна на $[t_1; t_2]$, то существует определённый и неопределённый интеграл от этих функций.

Пусть $F(x)$ — первообразная функции $f(x)$ на $[a; b]$. В силу инвариантности неопределённого интеграла $F(\varphi(t))$ — первообразная функции $f(\varphi(t))$ на $[t_1; t_2]$.

Тогда

$$\begin{aligned} \int_a^b f(x) dx &= F(x) \Big|_a^b \stackrel{\text{Н-Л}}{=} \boxed{F(b) - F(a)} \\ \int_{t_1}^{t_2} f(\varphi(t)) \varphi'(t) dt &= F(\varphi(t)) \Big|_{t_1}^{t_2} \stackrel{\text{Н-Л}}{=} F(\varphi(t_2)) - F(\varphi(t_1)) = \boxed{F(b) - F(a)} \end{aligned}$$

■

Замечание.

- ⊕ При замене переменной в определённом интеграле обратную замену не делают.
- ⊖ Нужно не забыть изменить пределы интегрирования.

Пример.

$$\begin{aligned} \int_1^e \frac{\ln x}{x} dx &= \int_1^e \ln x d(\ln x) \ominus \frac{\ln^2 x}{2} \Big|_1^e = \frac{\ln^2 e}{2} - \frac{\ln^2 1}{2} = \frac{1}{2} \\ \ominus \left| \begin{array}{l} \ln x = t \\ x_{\text{н}} = 1, \quad t_{\text{н}} = 0 \\ x_{\text{в}} = e, \quad t_{\text{в}} = 1 \end{array} \right| &= \int_0^1 t dt = \frac{t^2}{2} \Big|_0^1 = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

3.6 Интегрирование чётных и нечётных функций по симметричному относительно начала координат промежутку

Теорема 1.

Пусть функция $y = f(x)$ непрерывна на $[-a; a]$, где $a \in \mathbb{R}$, $a > 0$. Тогда

$$\int_{-a}^a f(x) dx = \begin{cases} 2 \int_0^a f(x) dx, & f - \text{чётная} \\ 0, & f - \text{нечётная} \end{cases}$$

Доказательство.

$$\begin{aligned} \int_{-a}^a f(x) dx &= \int_{-a}^0 f(x) dx + \int_0^a f(x) dx \Leftrightarrow \\ \int_{-a}^0 f(x) dx &= \left| \begin{array}{ll} x = -t, & dx = -dt \\ x_{\text{н}} = -a, & t_{\text{н}} = a \\ x_{\text{в}} = 0, & t_{\text{в}} = 0 \end{array} \right| = \int_a^0 f(-t) (-dt) = \int_0^a f(-t) dt = \\ &= \begin{cases} \int_0^a f(t) dt, & f - \text{чётная} \\ -\int_0^a f(t) dt, & f - \text{нечётная} \end{cases} \\ \Leftrightarrow \int_0^a f(x) dx + \begin{cases} \int_0^a f(x) dx, & f - \text{чётная} \\ -\int_0^a f(x) dx, & f - \text{нечётная} \end{cases} &= \begin{cases} 2 \int_0^a f(x) dx, & f - \text{чётная} \\ 0, & f - \text{нечётная} \end{cases} \end{aligned}$$

■

Пример.

$$\begin{aligned} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos x dx &\Leftrightarrow \sin x \Big|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} = \sin \frac{\pi}{2} - \sin \left(-\frac{\pi}{2} \right) = 1 - (-1) = 2 \\ \Leftrightarrow 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x dx &= 2 \end{aligned}$$

Пример.

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sin x dx \Leftrightarrow -\cos x \Big|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} = -\left(\cos \frac{\pi}{2} - \cos \left(-\frac{\pi}{2} \right) \right) = 0$$

Пример.

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos^2 x \sin^3 x dx = 0 \quad \text{т.к. } \cos^2 x \sin^3 x = y \text{ нечётная функция на } [-\pi; \pi]$$

3.7 Интегрирование периодических функций

Теорема 2.

Пусть $f(x)$ непрерывная периодическая функция с периодом T . Тогда

$$\int_a^{a+T} f(x) dx = \int_0^T f(x) dx, \quad \forall a \in \mathbb{R}$$

Доказательство.

$$\int_a^{a+T} f(x) dx = \int_a^0 f(x) dx + \int_0^T f(x) dx + \int_T^{T+a} f(x) dx$$

$$\int_T^{T+a} f(x) dx = \left| \begin{array}{l} t = x - T, \quad x = t + T, \quad dx = dt \\ x_{\text{н}} = T, \quad t_{\text{н}} = 0 \\ x_{\text{к}} = T + a, \quad t_{\text{к}} = a \end{array} \right| = \int_0^a f(t + T) dt \stackrel{\text{период.}}{=} \int_0^a f(t) dt$$

$$\int_a^{a+T} f(x) dx = \int_a^0 f(x) dx + \int_0^T f(x) dx + \int_0^a f(x) dx$$

$$\int_a^{a+T} f(x) dx = -\cancel{\int_0^a f(x) dx} + \int_0^T f(x) dx + \cancel{\int_0^a f(x) dx}$$

$$\int_a^{a+T} f(x) dx = \int_0^T f(x) dx, \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

■

Пример.

$$\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{5\pi}{2}} \sin x dx = \int_{\frac{\pi}{2}}^{2\pi + \frac{\pi}{2}} \sin x dx = \int_0^{2\pi} \sin x dx = 0$$

4 Приложения определённого интеграла

4.1 Площадь плоской фигуры

4.1.1 Прямоугольная декартова система координат

Пусть функция $y = f(x)$ непрерывна на $[a; b]$ и $\forall x \in [a; b]: f(x) \geq 0$. Из геометрического смысла определённого интеграла:

$$S = \int_a^b f(x) dx \quad (1)$$

Этапы вывода формулы:

1. Разбиваем $[a; b]$ точками $a = x_0 < x_1 < \dots < x_i < \dots < x_n = b$
2. $[x_{i-1}; x_i]$, $i = \overline{1, n}$ — отрезки разбиения
 $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$ — длины отрезков разбиения
3. $\forall \xi_i \in [x_{i-1}; x_i]$, $i = \overline{1, n}$ $f(\xi_i)$
Криволинейную трапецию с основанием Δx_i заменяем прямоугольником длины $f(\xi_i)$.
Криволинейная трапеция с основанием $[a; b]$ заменяется на ступенчатую фигуру.
4. $\lambda = \max_i \Delta x_i$
 $\sum_{i=1}^n f(\xi_i) \cdot \Delta x_i$ — интегральная сумма
5. $\lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(\xi_i) \cdot \Delta x_i = \int_a^b f(x) dx = S$

Следствие 1.1. Если функция $y = f(x)$ непрерывна на $[a; b]$ и $f(x) < 0 \forall x \in [a; b]$, то

$$S = - \int_a^b f(x) dx \quad (2)$$

Следствие 1.2. Пусть функция ограничена графиками функции $\begin{cases} y_1 = f_1(x) \\ y_2 = f_2(x) \end{cases}$, непрерывных и неотрицательных на $[a; b]$. Тогда

$$S = \int_a^b (f_1(x) - f_2(x)) dx \quad (3)$$

Следствие 1.3. Если фигура симметрична относительно хотя бы одной из координатных осей, то

$$S_{\Phi} = 2S_{\text{пол}}$$

Следствие 1.4. Если функция $y = f(x)$ конечное число раз меняет знак на $[a; b]$, то определённый интеграл от этой функции на $[a; b]$ равен алгебраической сумме площадей соответствующих криволинейных трапеций.

$$S = \int_a^b f(x) dx = -S_1 + S_2 - S_3$$

Пример. $S_\Phi - ?$ $x = y^2, x = a$

$$S_a = 2 \cdot S_{\text{пол}}$$

$$S_{\text{пол}} = \int_0^a \sqrt{x} dx = \left. \frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} \right|_0^a = \frac{2}{3} a \sqrt{a}$$

$$S_\Phi = \frac{4}{3} a \sqrt{a}$$

4.1.2 Параметрически заданная функция

$$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t), t \in [t_1; t_2] \end{cases}$$

$x(t), y(t)$ — непрерывно дифференцируемы при $t \in [t_1; t_2]$

$$x(t_1) = a, \quad x(t_2) = b, \quad x(t) \geq 0, \quad \forall t \in [t_1; t_2]$$

Тогда:

$$S_\Phi = \int_a^b y(x) dx = \left| \begin{array}{ll} y = y(t), & a = x(t_1) \\ x = x(t), & b = x(t_2) \\ dx = x'(t) dt \end{array} \right| = \boxed{\int_{t_1}^{t_2} y(t) x'(t) dt = S} \quad (4)$$

Замечание. Изменение параметра $t \in [t_1; t_2]$ способствует росту переменной x . (обход параметра $t \in [t_1; t_2]$ происходит по часовой стрелке)

Пример.

$$\begin{cases} x = a \cos^3 t \\ y = a \sin^3 t \end{cases}$$

t	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
x	a	0	$-a$	0	a
y	0	a	0	$-a$	0

$$S_\Phi = 4S^*$$

$$S^* = \int_{\frac{\pi}{2}}^0 \underbrace{a \sin^3 t}_{y(t)} \cdot \underbrace{3a \cdot \cos^3 t \cdot (-\sin t)}_{x'(t)} dt = 3a^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^4 t \cos^3 t dt = \dots = \frac{3\pi a^2}{32}$$

$$S_\Phi = \frac{3\pi a^2}{8}$$

4.1.3 Полярная система координат

Определение 1. Криволинейный сектор — это фигура, ортогональная лучами $\varphi = \alpha$, $\varphi = \beta$ и графиком непрерывной кривой $r = r(\varphi)$, $\varphi \in [\alpha; \beta]$

Этапы вывода формулы:

1. Разбиваем сектор A_0OA_n лучами $\alpha = \varphi_0 < \varphi_1 < \dots < \varphi_n = \beta$ на углы $\angle A_0OA_1, \angle A_1OA_2, \dots, \angle A_{n-1}OA_n$
 $\Delta\varphi_i = \varphi_i - \varphi_{i-1}$ — величина $\angle A_{i-1}OA_i$ в радианах
 $\lambda = \max_i \Delta\varphi_i, i = \overline{1, n}$
2. \forall выберем и проведём $\Psi_i, \Psi_i \in \angle A_{i-1}OA_i$
Находим $r = r(\Psi_i)$
 $M_i(\Psi_i, r(\Psi_i)), M_i \in \angle A_{i-1}OA_i, M_i \in r = r(\varphi)$
3. Заменяем каждый i -ый криволинейный сектор на круговой сектор $R = r(\Psi_i), i = \overline{1, n}$
 $S_i = \frac{1}{2}R^2 \cdot \Delta\varphi_i$ — площадь i -го кругового сектора
 $R = r(\Psi_i)$

$$\sum_{i=1}^n S_i = \sum_{i=1}^n \frac{1}{2}r^2(\Psi_i) \cdot \Delta\varphi_i = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n r^2(\Psi_i) \cdot \Delta\varphi_i$$
4. Вычисляем предел

$$\lim_{\lambda \rightarrow 0} \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n r^2(\Psi_i) \cdot \Delta\varphi_i = \boxed{\frac{1}{2} \int_{\alpha}^{\beta} r^2 d\varphi = S} \quad (5)$$

Пример. S_{Φ} — ?

Вне окружности $r = 1$ Внутри окружности $r = 1 + \cos \varphi$

$$\begin{cases} r = 1 \\ r = 1 + \cos \varphi \end{cases} \quad \cos \varphi = 0, \varphi = \pm \frac{\pi}{2}$$

φ	0	$\frac{\pi}{2}$	π
r	2	1	0

$$S_{\Phi} = 2(S_{\text{кар}} - S_{\text{окр}}) = 2 \left(\frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 + \cos \varphi)^2 d\varphi - \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} 1^2 d\varphi \right) = \dots = 2 \left(1 + \frac{\pi}{8} \right) = 2 + \frac{\pi}{4}$$

4.2 Объём тела

Пусть T — тело, S — площадь сечения тела плоскостью перпендикулярной Ox или площадь поперечного сечения.

$S = S(x)$ — непрерывная функция на $[a; b]$

1. Разбиваем отрезок $[a; b]$ точками $a = x_0 < x_1 < \dots < x_{i-1} < x_i < \dots < x_n = b$

Отрезки разбиения $[x_{i-1}; x_i]$

$\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$ — длина отрезка разбиения

$a = \max_i \Delta x_i, \quad i = \overline{1, n}$

2. Проводим плоскости

$$\left\{ \begin{array}{l} x = x_0 = a \\ \dots\dots\dots \\ x = x_{i-1} \\ x = x_i \\ \dots\dots\dots \\ x = x_n = b \end{array} \right. \quad \text{— эти плоскости разбивают тело } T \text{ на слои}$$

3. $\forall \xi_i \in [x_{i-1}; x_i], \quad i = \overline{1, n}$

Проводим плоскость $x = \xi_i$. Находим $S(\xi_i)$.

Каждый слой заменяем цилиндром с основанием $S(\xi_i)$ и высотой $\Delta x_i, \quad i = \overline{1, n}$

4. $V_{\text{ц}} = S(\xi_i) \cdot \Delta x_i$ — объём i -го цилиндра

$\sum_{i=1}^n S(\xi_i) \cdot \Delta x_i$ — интегральная сумма

5. Вычисляем предел

$$\lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n S(\xi_i) \cdot \Delta x_i = \boxed{\int_a^b S(x) dx = V_T} \quad (6)$$

4.3 Тела вращения

4.3.1 Прямоугольная декартова система координат

Вокруг оси Ox

Рассмотрим криволинейную трапецию, ограниченную графиком непрерывной функции $y = f(x)$, $x = a$, $x = b$ и осью Ox . Пусть $\forall x \in [a; b]: f(x) \geq 0$

Поперечное сечение — круг

$$S_{\text{круга}} = \pi R^2 = (R = y) = \pi y^2$$

$$V_{Ox} = \pi \int_a^b y^2 dx \quad (7)$$

Пусть криволинейная трапеция ограничена графиками непрерывных функций $y_1 = f_1(x)$ и $y_2 = f_2(x)$, прямыми $x = a$, $x = b$

$$V_{Ox} = V_{Ox}^1 - V_{Ox}^2 = \pi \int_a^b y_1^2 dx - \pi \int_a^b y_2^2 dx = \pi \int_a^b (y_1^2 - y_2^2) dx = V_{Ox} \quad (8)$$

Вокруг Oy

Пусть непрерывная функция $x = f(y)$, $y \in [c; d]$

$$V_{Oy} = \pi \int_c^d x^2 dy \quad (9)$$

Пусть $y = f(x)$ — непрерывная на $[a; b]$ функция, $\forall x \in [a; b]: f(x) \geq 0$.

Криволинейная трапеция ограничена графиком функции $y = f(x)$, $x = a$, $x = b$ и осью Ox .

Аналогично формула (6) и (8):

$$V_{Oy} = 2\pi \int_a^b x|y| dx \quad \begin{matrix} a \geq 0 \\ y \geq 0 \end{matrix} \quad (10)$$

Следствие 1.1. Если функция $y = f(x)$ задана параметрически:

$$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases} \text{ — непрерывно дифференцируемы на } [t_1; t_2]$$

$$\begin{aligned} x(t_1) &= a & y(t_1) &= c \\ x(t_2) &= b & y(t_2) &= d \end{aligned} \quad (*)$$

Тогда:

$$\begin{cases} V_{Ox} \stackrel{(7)}{=} \pi \int_a^b y^2 dx \stackrel{(*)}{=} \pi \int_{t_1}^{t_2} y^2(t) x'(t) dt \\ V_{Oy} \stackrel{(9)}{=} \pi \int_c^d x^2 dy \stackrel{(*)}{=} \pi \int_{t_1}^{t_2} x^2(t) y'(t) dt \\ V_{Oy} \stackrel{(10)}{=} \pi \int_a^b x(t) y(t) x'(t) dt \end{cases} \quad (11)$$

4.3.2 Полярная система координат

Пусть $r = r(\varphi)$ — непрерывная на $[\alpha; \beta]$.

Криволинейный сектор ограничен графиком непрерывной функции $r = r(\varphi)$ и $\varphi = \alpha$, $\varphi = \beta$.

$$V_{Or} = \frac{2}{3} \pi \int_{\alpha}^{\beta} r^3 \sin \varphi d\varphi \quad (12)$$

Пример.

$y = e^{-2x} - 1$	
$y = e^{-x} + 1$	
$x = 0$	
$V_{Ox} - ?$	
$V_{Oy} - ?$	

$$\begin{aligned} e^{-2x} - 1 &= e^{-x} + 1 & t^2 - t - 2 &= 0 & e^{-x} &= 2 \\ e^{-2x} - e^{-x} - 2 &= 0 & t_1 &= 2 & x &= -\ln 2 \\ e^{-x} &= t & t_2 &= -1 \quad \emptyset \end{aligned}$$

$$V_{Ox} = V_1 - V_2 = \pi \int_{-\ln 2}^0 \left((e^{-x} + 1)^2 - (e^{-2x} - 1)^2 \right) dx = \dots = \frac{11}{4} \pi$$

$$V_{Oy} = V_1 - V_2 = 2\pi \int_0^{\ln 2} x \left(e^x + 1 - (e^{2x} - 1) \right) dx = \dots = \ln^2 2 \cdot \frac{1}{4}$$

Пример.

$$\left. \begin{array}{l} x = a \cos^3 t \\ y = a \sin^3 t \end{array} \right| \\ \hline V_{Ox} - ?$$

$$V_{Ox}^* = \pi \int_{\frac{\pi}{2}}^0 (a \sin^3 t)^2 \cdot \underbrace{3a \cos^2 t (-\sin t)}_{x'} dt = 3\pi a^3 \int_{\frac{\pi}{2}}^0 \sin^6 t \cos^2 t d(\cos t) =$$

$$= 3\pi a^3 \sin^3 \int_{\frac{\pi}{2}}^0 (1 - \cos^2 t)^3 \cos^2 t d(\cos t) = \dots = \frac{128}{105} \pi$$

$$V_{Ox} = 2V_{Ox}^* = \frac{256}{105} \pi$$

Пример.

$$\left. \begin{array}{l} r = a \sin^2 \varphi \end{array} \right| \\ \hline V_{Or} - ?$$

$$\begin{array}{c|c|c|c|c|c} \varphi & 0 & \frac{\pi}{2} & \frac{\pi}{4} & \frac{3\pi}{4} & \pi \\ \hline r & 0 & a & \frac{a}{2} & \frac{a}{2} & 0 \end{array} \quad \forall \varphi \in [0; 2\pi]$$

$$V_{Or} = \frac{2}{3} \pi \int_0^\pi (a \sin^2 \varphi)^3 \sin \varphi d\varphi = -\frac{2}{3} \pi a^3 \int_0^\pi \sin^6 \varphi d \cos \varphi =$$

$$= -\frac{2}{3} \pi a^3 \int_0^\pi (1 - \cos^2 \varphi)^3 d \cos \varphi = \dots = \frac{64}{105} \pi a^3$$

4.4 Длина дуги

4.4.1 Прямоугольная декартовая система координат

Пусть $y = f(x)$ непрерывна на $[a; b]$.

$M_0(x_0, y_0)$ $M(x, y)$

Δx — приращение x Δy — приращение y

$x \rightarrow x + \Delta x$
 $y \rightarrow y + \Delta y$ $M(x, y) \rightarrow M_1(x + \Delta x, y + \Delta y)$

l_0 — $\widehat{M_0 M_1}$ — дуга кривой Δl — приращение дуги кривой $\Delta l = \widehat{M M_1}$

Найдём l'_x — ?

$$l'_x = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta l}{\Delta x}$$

$\triangle M M_1 A$ $MA = \Delta x$ $AM_1 = \Delta y$

$$MM_1^2 = \Delta x^2 + \Delta y^2 \quad | \cdot \Delta l^2 | : \Delta l^2$$

$$\left(\frac{MM_1}{\Delta l} \right)^2 \cdot (\Delta l)^2 = \Delta x^2 + \Delta y^2 \quad | : \Delta x^2$$

$$\left(\frac{MM_1}{\Delta l} \right)^2 \cdot \left(\frac{\Delta l}{\Delta x} \right)^2 = 1 + \left(\frac{\Delta y}{\Delta x} \right)^2$$

Вычислим предел при $\Delta x \rightarrow 0$.

Левая часть:

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left(\frac{MM_1}{\Delta l} \right)^2 \cdot \left(\frac{\Delta l}{\Delta x} \right)^2 = \left| \begin{array}{ll} \text{при } \Delta x \rightarrow 0 & M \rightarrow M_1 \\ \Delta l \rightarrow MM_1 & \text{дуга} \rightarrow \text{хорда} \end{array} \right| = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} 1^2 \cdot \left(\frac{\Delta l}{\Delta x} \right)^2 = (l'_x)^2$$

Правая часть:

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left(1 + \left(\frac{\Delta y}{\Delta x} \right)^2 \right) = 1 + \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left(\frac{\Delta y}{\Delta x} \right)^2 = 1 + (y'_x)^2$$

Получаем:

$$\begin{aligned} (l'_x)^2 &= 1 + (y'_x)^2 \\ l'_x &= \sqrt{1 + (y'_x)^2} \quad | \cdot dx \\ l'_x dx &= \sqrt{1 + (y'_x)^2} dx \\ dl &= \sqrt{1 + (y'_x)^2} dx \end{aligned} \quad (\vee)$$

$$\boxed{l = \int_a^b \sqrt{1 + (y'_x)^2} dx} \quad (13)$$

4.4.2 Параметрически заданная функция

$$(\vee) = dl = \sqrt{1 + (y'_x)^2} dx = \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} dx = \sqrt{\frac{(dx)^2 + (dy)^2}{(dx)^2}} dx = \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2} = dl$$

(VV)

Пусть кривая задана параметрически:

$$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases} \text{ — непрерывно дифференцируемые функции на } [t_1; t_2].$$

$$x(t_1) = a, \quad x(t_2) = b$$

$$\begin{aligned} (VV) = dl &= \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2} = \sqrt{(x'(t) dt)^2 + (y'(t) dt)^2} = \sqrt{[(x'(t))^2 + (y'(t))^2] (dt)^2} = \\ &= \sqrt{(x'_t)^2 + (y'_t)^2} dt = \sqrt{(x'_t)^2 + (y'_t)^2} dt \end{aligned}$$

$$\boxed{l = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{(x'_t)^2 + (y'_t)^2} dt} \quad (14)$$

4.4.3 Полярная система координат

Пусть $r = r(\varphi)$ — непрерывная на $[\alpha; \beta]$ функция.

$$\begin{aligned} (VV) = dl &= \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2} \ominus \\ x &= r \cos \varphi \quad y = r \sin \varphi \\ dx &= (r \cos \varphi)'_{\varphi} d\varphi = (r' \cos \varphi - r \sin \varphi) d\varphi \\ dy &= (r \sin \varphi)'_{\varphi} d\varphi = (r' \sin \varphi + r \cos \varphi) d\varphi \\ (dx)^2 + (dy)^2 &= [(r' \cos \varphi - r \sin \varphi)^2 + (r' \sin \varphi + r \cos \varphi)^2] (d\varphi)^2 = \\ &= \left[(r')^2 \cos^2 \varphi - \cancel{2r'r \cos \varphi \sin \varphi} + r^2 \sin^2 \varphi + \right. \\ &\quad \left. + (r')^2 \sin^2 \varphi + \cancel{2r'r \cos \varphi \sin \varphi} + r^2 \cos^2 \varphi \right] (d\varphi)^2 = \\ &= [(r')^2 (\cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi) + r^2 (\cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi)] (d\varphi)^2 = [(r')^2 + r^2] (d\varphi)^2 \\ \ominus \sqrt{(r')^2 + r^2} d\varphi &= dl \end{aligned}$$

$$\boxed{l = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{(r')^2 + r^2} d\varphi} \quad (15)$$

Пример. $y = x^2$, от $x = 0$ до $x = 1$

$$l = \int_0^1 \sqrt{1 + (2x)^2} dx = \int_0^1 \sqrt{1 + 4x^2} dx = \dots = \frac{1}{2} \sqrt{5} + \frac{1}{4} \ln(2 + \sqrt{5})$$

Пример. $x = e^t \cos t$ $y = e^t \sin t$ $t = 0, t = 1$ $l = ?$

$$l = \int_0^1 \sqrt{(x'_t)^2 + (y'_t)^2} dt = \left| \begin{array}{l} x'_t = e^t \cos t - e^t \sin t \\ y'_t = e^t \sin t + e^t \cos t \\ (x'_t)^2 + (y'_t)^2 = \dots = 2e^{2t} \end{array} \right| = \int_0^1 \sqrt{2e^{2t}} dt = \dots = \sqrt{2}(e - 1)$$

Пример.

$$r = 2(1 - \cos \varphi)$$

$$r = 1$$

внутри окружности

вне кардиоиды

$$l = ?$$

φ	0	$\frac{\pi}{2}$	π
r	0	2	4

$$2(1 - \cos \varphi) = 1$$

$$1 - \cos \varphi = \frac{1}{2}$$

$$\cos \varphi = \frac{1}{2} \Rightarrow \varphi = \frac{\pi}{3}$$

$$l^* = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{(r')^2 + r^2} d\varphi = \left| r' = 2 \sin \varphi \quad (r')^2 = 4 \sin^2 \varphi \quad r^2 = 4(1 - \cos \varphi)^2 \right| =$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{3}} \sqrt{4 \sin^2 \varphi + 4 - 8 \cos \varphi + 4 \cos^2 \varphi} d\varphi = \int_0^{\frac{\pi}{3}} \sqrt{8 - 8 \cos \varphi} d\varphi =$$

$$= 2\sqrt{2} \int_0^{\frac{\pi}{3}} \sqrt{1 - \cos \varphi} d\varphi = \left| \begin{array}{l} \sin^2 \frac{\varphi}{2} = \frac{1 - \cos \varphi}{2} \\ 1 - \cos \varphi = 2 \sin^2 \frac{\varphi}{2} \end{array} \right| = 4 \int_0^{\frac{\pi}{3}} \sqrt{\sin^2 \frac{\varphi}{2}} d\varphi =$$

$$= 4 \int_0^{\frac{\pi}{3}} \left| \sin \frac{\varphi}{2} \right| d\varphi = 4 \int_0^{\frac{\pi}{3}} \sin \frac{\varphi}{2} d\varphi = \dots = 4(2 - \sqrt{3})$$

$$l = 2l^* = 8(2 - \sqrt{3})$$

4.5 Площадь поверхности вращения (внешняя оболочка)

Пусть $y = f(x)$ — непрерывно дифференцируема на $[a; b]$. Будем искать площадь поверхности, образованной вращением дуги \widehat{AB} графика функции $y = f(x)$ вокруг оси Ox .

Этапы вывода формулы:

1. Разбиваем отрезок $[a; b]$ точками: $a = x_0 < x_1 < \dots < x_{i-1} < x_i < \dots < x_n < b$
 $[x_{i-1}; x_i]$ — отрезок разбиения
 $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$ — длина отрезка разбиения
 $y_i = f(x_i), i = \overline{1, n}$
 $M_i(x_i, f(x_i)) — i = \overline{1, n}$
 Хорды: $AM_1, M_1M_2, \dots, M_{i-1}M_i, \dots, M_{n-1}B$

2. Хорда при вращении опишет усечённый конус

$$Q_i = 2\pi R_i \Delta S_i \quad \pi l(1 + R)$$

R_i — средний радиус

$$R_i = \frac{f(x_{i-1}) + f(x_i)}{2}$$

ΔS_i — хорда $M_{i-1}M_i$

По теореме *Больцано-Коши* функция $y = f(x)$ принимает все свои значения между $f(a)$ и $f(b)$:

$$R_i = \frac{f(x_{i-1}) + f(x_i)}{2} = f(\xi_i) \quad \exists \xi_i \in [x_{i-1}; x_i], i = \overline{1, n}$$

$$\Delta S_i^2 = \Delta x_i^2 + \Delta y_i^2$$

$$\Delta S_i = \sqrt{\Delta x_i^2 + \Delta y_i^2} \quad \Big| \cdot \frac{\Delta x_i}{\Delta x_i}$$

$$\Delta S_i = \sqrt{\Delta x_i^2 + \Delta y_i^2} \cdot \frac{\Delta x_i}{\Delta x_i}$$

$$\Delta S_i = \sqrt{\frac{\Delta x_i^2 + \Delta y_i^2}{\Delta x_i^2}} \cdot \Delta x_i$$

$$\Delta S_i = \sqrt{1 + \left(\frac{\Delta y_i}{\Delta x_i}\right)^2} \cdot \Delta x_i$$

По теореме *Лагранжа*:

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(c) \quad \exists c \in (a; b)$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_i) - f(x_{i-1})}{x_i - x_{i-1}} = f'(\xi_i) \quad \exists \xi_i \in (x_{i-1}; x_i)$$

$$\Delta S_i = \sqrt{1 + (f'(\xi_i))^2} \cdot \Delta x_i$$

$$Q_i = 2\pi f(\xi_i) \cdot \sqrt{1 + (f'(\xi_i))^2} \cdot \Delta x_i$$

3. Суммируем

$$Q = \sum_{i=1}^n Q_i = 2\pi \sum_{i=1}^n f(\xi_i) \cdot \sqrt{1 + (f'(\xi_i))^2} \cdot \Delta x_i$$

4. Вычислим предел:

$$\lim_{\lambda \rightarrow 0} 2\pi \overbrace{\sum_{i=1}^n f(\xi_i) \cdot \sqrt{1 + (f'(\xi_i))^2} \cdot \Delta x_i}^{\text{интегральная сумма}} = 2\pi \int_a^b f(x) \sqrt{1 + (f')^2} dx =$$

$$\lambda = \max_i \Delta x_i = \boxed{2\pi \int_a^b y \underbrace{\sqrt{1 + (y'_x)^2}}_{dl} dx = Q_{Ox}} \quad (16)$$

Если $x = f(y) \in C[c; d]$, тогда:

$$\boxed{Q_{Oy} = 2\pi \int_c^d x \underbrace{\sqrt{1 + (x'_y)^2}}_{dl} dy} \quad (17)$$

4.5.1 Следствия

Следствие 1.2. Параметрически заданная функция $\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}$ — непрерывно дифференцируема на $[t_1; t_2]$

$$y'_x = \frac{y'_t}{x'_t} \quad \begin{matrix} x(t_1) = a \\ x(t_2) = b \end{matrix} \quad \begin{cases} y(t_1) = c \\ y(t_2) = d \end{cases}$$

$$Q_{Ox} \stackrel{(16)}{=} 2\pi \int_a^b y \sqrt{1 + (y'_x)^2} dx = 2\pi \int_{t_1}^{t_2} y(t) \sqrt{1 + \left(\frac{y'_t}{x'_t}\right)^2} x'_t dt =$$

$$= 2\pi \int_{t_1}^{t_2} y(t) \cdot \frac{\sqrt{(x'_t)^2 + (y'_t)^2}}{x'_t} \cdot x'_t dt = \boxed{2\pi \int_{t_1}^{t_2} y(t) \underbrace{\sqrt{(x'_t)^2 + (y'_t)^2}}_{dl} dt = Q_{Ox}} \quad (18)$$

Аналогично:

$$\boxed{Q_{Oy} \stackrel{(17)}{=} 2\pi \int_{t_1}^{t_2} x(t) \sqrt{(x'_t)^2 + (y'_t)^2} dt} \quad (19)$$

Следствие 1.3. Полярная система координат:

$r = r(\varphi)$ — непрерывно дифференцируема на $[\alpha; \beta]$ $\begin{cases} x = r \cos \varphi \\ y = r \sin \varphi \end{cases}$

$$Q_{Or} \stackrel{(16)}{=} 2\pi \int_{\alpha}^{\beta} r \sin \varphi dl = \boxed{2\pi \int_{\alpha}^{\beta} r \sin \varphi \sqrt{(r')^2 + r^2} d\varphi = Q_{Or}} \quad (20)$$

Пример.

$$\left. \begin{array}{l} y = \operatorname{ch} x \\ x = -\ln 3 \\ x = \ln 2 \end{array} \right| Q_{Ox} = ?$$

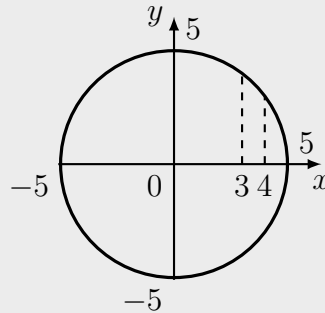
$$y = \operatorname{ch} x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

x	0	$\ln 2$	$-\ln 2$	$\ln 3$	$-\ln 3$
y	1	$\frac{5}{4}$	$\frac{5}{4}$	$\frac{5}{3}$	$\frac{5}{3}$

$$\begin{aligned} Q_{Ox} &= 2\pi \int_{-\ln 3}^{\ln 2} \operatorname{ch} x \cdot \sqrt{1 + \operatorname{sh}^2 x} dx = \left| \begin{array}{l} \operatorname{ch}^2 x - \operatorname{sh}^2 x = 1 \\ 1 + \operatorname{sh}^2 x = \operatorname{ch}^2 x \end{array} \right| = 2\pi \int_{-\ln 3}^{\ln 2} \operatorname{ch} x \cdot \operatorname{ch} x dx = \\ &= 2\pi \int_{-\ln 3}^{\ln 2} \operatorname{ch}^2 x dx = \dots = \frac{\pi}{2} \left(2 \ln 6 \cdot \frac{455}{72} \right) \end{aligned}$$

Пример.

$$\left. \begin{array}{l} \begin{cases} x = 5 \sin t \\ y = 5 \cos t \end{cases} \\ \text{от } (3; 4) \\ \text{до } (4; 3) \end{array} \right| Q_{Ox} = ?$$



$$\sin t = \frac{x}{5} \quad \cos t = \frac{y}{5} \quad \sin^2 t + \cos^2 t = 1 \Rightarrow \boxed{\frac{x^2}{5^2} + \frac{y^2}{5^2} = 1}$$

$$y^2 = 25 - x^2 \Rightarrow y = \pm \sqrt{25 - x^2} \quad y'_x = \frac{-2x}{2\sqrt{25 - x^2}}$$

$$\begin{aligned} Q_{Ox} &\stackrel{(16)}{=} 2\pi \int_3^4 \underbrace{\sqrt{25 - x^2}}_y \cdot \underbrace{\sqrt{1 + \frac{x^2}{25 - x^2}}}_{1 + y'^2_2} dx = 2\pi \int_3^4 \sqrt{25 - x^2} \cdot \frac{5}{\sqrt{25 - x^2}} dx = \\ &= 5 \cdot 2\pi \int_3^4 dx = 10\pi \end{aligned}$$

Пример.

$$\left. \begin{array}{l} r = \cos \varphi \\ \varphi = \frac{\pi}{4} \quad \varphi = \frac{\pi}{3} \end{array} \right| r \geq 0 \quad \cos \varphi \geq 0$$

$$Q_{Or} = ?$$

$$Q_{Or} = 2\pi \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} -\cos \varphi \cdot \sin \varphi \cdot \sqrt{\cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi} d\varphi = 2\pi \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \cos \varphi \sin \varphi d\varphi = \dots = \frac{\pi}{4}$$

5 Несобственные интегралы

5.1 Интегралы по бесконечному промежутку

Пусть $y = f(x)$ определена на $[a; +\infty]$, интегрируема на $[a; b] \subset [a; +\infty)$. Тогда определена функция

$$\boxed{\Phi(b) = \int_a^b f(x) dx} \text{ на } [a; +\infty) \quad (1)$$

как определённый интеграл с переменным верхним пределом интегрирования.

Определение 1. Предел функции $\Phi(b)$ при $b \rightarrow +\infty$ называется **несобственным интегралом** от функции $f(x)$ по бесконечному промежутку $[a; +\infty)$ или **несобственным интегралом первого рода** и обозначается

$$\boxed{\int_a^{+\infty} f(x) dx = \lim_{b \rightarrow +\infty} \Phi(b) = \lim_{b \rightarrow +\infty} \int_a^b f(x) dx} \quad (2)$$

Если предел в правой части равенства (2) существует и конечен, то несобственный интеграл в левой части равенства (2) **сходится**.

Если предел в правой части равенства (2) не существует или равен бесконечности, то несобственный интеграл в левой части равенства (2) **расходится**.

Аналогично:

$$\int_{-\infty}^b f(x) dx = \lim_{a \rightarrow -\infty} \int_a^b f(x) dx \quad (3)$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = \int_{-\infty}^c f(x) dx + \int_c^{+\infty} f(x) dx \quad c - \text{число} \quad (4)$$

Несобственный интеграл левой части (4) **сходится**, если оба несобственных интеграла в правой части (4) сходятся. Если хотя бы один несобственный интеграл в правой части (4) расходится, то несобственный интеграл в левой части (4) **расходится**.

Геометрический смысл: если $f(x) \geq 0, \forall x > 0$, то значение сходящегося несобственного интеграла от функции $f(x)$ по промежутку $[a; +\infty)$ соответствует площади бесконечно длинной криволинейной трапеции.

Пример.

$$\int_0^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2} - ? \quad y = \frac{1}{1+x^2}$$

$$\begin{aligned} \int_0^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2} &= \lim_{b \rightarrow +\infty} \int_0^b \frac{dx}{1+x^2} = \lim_{b \rightarrow +\infty} \left(\arctg x \Big|_0^b \right) = \lim_{b \rightarrow +\infty} (\arctg b - \arctg 0) = \\ &= \lim_{b \rightarrow +\infty} \arctg b - 0 = \frac{\pi}{2} - 0 = \frac{\pi}{2} \end{aligned}$$

$$\int_0^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2} - \text{сходится}$$

5.2 Признаки сходимости и расходимости несобственных интегралов 1-го рода

Теорема 1 (*Признак сходимости по неравенству*).

Пусть функции $f(x)$ и $g(x)$ интегрируемы на $[a; b] \subset [a; +\infty)$, причём

$$\forall x \geq a: 0 \leq f(x) \leq g(x)$$

Тогда:

1. Если $\int_a^{+\infty} g(x) dx$ сходится, то $\int_a^{+\infty} f(x) dx$ — сходится
2. Если $\int_a^{+\infty} f(x) dx$ расходится, то $\int_a^{+\infty} g(x) dx$ — расходится

Доказательство.

$\int_a^{+\infty} g(x) dx$ — сходится \Rightarrow по определению несобственного интеграла 1-го рода (опр. 1)

$$\int_a^{+\infty} g(x) dx = \lim_{b \rightarrow +\infty} \int_a^b g(x) dx = C \quad C — \text{число}$$

Так как $\forall x \geq a: g(x) \geq 0$

$$\Phi(b) = \int_a^b g(x) dx \leq C, \quad b > a$$

По условию: $\forall x \geq a: 0 \leq f(x) \leq g(x)$

Интегрируем:

$$\int_a^b f(x) dx \leq \int_a^b g(x) dx \leq C$$

Так как $f(x) \geq 0$, $\forall x \geq a$ и $b > a$, то функция

$$\Psi(b) = \int_a^b f(x) dx \text{ монотонно возрастает и ограничена сверху}$$

Утверждение: монотонная и ограниченная сверху функция при $x \rightarrow +\infty$ имеет конечный предел.

По утверждению функция $\Psi(b)$ имеет конечный предел при $x \rightarrow +\infty$, то есть

$$\int_a^{+\infty} f(x) dx = \lim_{b \rightarrow +\infty} \Psi(b) = \lim_{b \rightarrow +\infty} \int_a^b f(x) dx — \text{конечный предел}$$

■

Доказательство (Метод от противного).

Дано: $\int_a^{+\infty} f(x) dx$ — расходится

Предположим, что $\int_a^{+\infty} g(x) dx$ — сходится

Тогда по первой части теоремы:

$$\int_a^{+\infty} f(x) dx \text{ — сходится}$$

А это противоречит условию теоремы $\Rightarrow \int_a^{+\infty} g(x) dx$ — расходится ■

Пример.

$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2(1+3^x)} dx$ — ? несобственный интеграл 1-го рода $x \in [1; +\infty)$

$$\left. \begin{aligned} f(x) &= \frac{1}{x^2(1+3^x)} \\ g(x) &= \frac{1}{4x^2} \end{aligned} \right\} \frac{1}{x^2(1+3^x)} \leq \frac{1}{4x^2}$$

$$\begin{aligned} \int_1^{+\infty} g(x) dx &= \frac{1}{4} \int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^2} = \frac{1}{4} \cdot \lim_{b \rightarrow +\infty} \int_1^b \frac{dx}{x^2} = \frac{1}{4} \cdot \lim_{b \rightarrow +\infty} \left(\frac{x^{-1}}{-1} \Big|_1^b \right) = \\ &= -\frac{1}{4} \lim_{b \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{b} - 1 \right) = \frac{1}{4} \end{aligned}$$

\Downarrow

$$\int_1^{+\infty} g(x) dx = \frac{1}{4} \int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^2} \text{ — сходится}$$

По признаку сходимости по неравенству:

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2(1+3^x)} dx \text{ — сходится}$$

Пример.

$\int_1^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{x} + \cos^2 x} - ?$ несобственный интеграл 1-го рода $x \in [1; +\infty)$

$$f(x) = \frac{dx}{\sqrt{x} + \cos^2 x}$$

$$0 \leq \cos^2 x \leq 1 \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{x} + 1} \leq \frac{1}{\sqrt{x} + \cos^2 x} \leq \frac{1}{\sqrt{x}}$$

$$g(x) = \frac{1}{\sqrt{x} + 1}$$

$$\begin{aligned} \int_1^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{x} + 1} &= \lim_{b \rightarrow +\infty} \int_1^b \frac{dx}{\sqrt{x} + 1} = \left| \begin{matrix} x = t^2 & dx = 2t dt \\ x_{\text{н}} = 1, & t_{\text{н}} = 1 \end{matrix} \right| = \lim_{b \rightarrow +\infty} \int_1^b \frac{2t dt}{t + 1} = \\ &= 2 \lim_{b \rightarrow +\infty} \int_1^b \frac{t + 1 - 1}{t + 1} dt = 2 \lim_{b \rightarrow +\infty} \left(\int_1^b dt - \int_1^b \frac{dt}{t + 1} \right) = \\ &= 2 \lim_{b \rightarrow +\infty} (b - 1 - \ln |b + 1| + \ln 2) = \infty \end{aligned}$$

$$\int_1^{+\infty} g(x) dx = \int_1^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{x} + 1} - \text{расходится}$$

$$\int_1^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{x} + \cos^2 x} - \text{расходится по неравенству}$$

Теорема 2 (Предельный признак сходимости).

Пусть $f(x)$ и $g(x)$ интегрируемы на $[a; b] \subset [a; +\infty)$ и $\forall x \geq a: f(x) \geq 0, g(x) > 0$. Если существует конечный предел:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lambda > 0 \quad (5)$$

то $\int_a^{+\infty} f(x) dx$ и $\int_a^{+\infty} g(x) dx$ сходятся или расходятся одновременно.

Доказательство.

Из (5) \Rightarrow по определению предела:

$$\forall \varepsilon > 0, \exists M(\varepsilon) > 0: \forall x > M \Rightarrow \left| \frac{f(x)}{g(x)} - \lambda \right| < \varepsilon$$

$$-\varepsilon < \frac{f(x)}{g(x)} - \lambda < \varepsilon$$

$$\lambda - \varepsilon < \frac{f(x)}{g(x)} < \lambda + \varepsilon$$

$$(\lambda - \varepsilon) \cdot g(x) < f(x) < (\lambda + \varepsilon) \cdot g(x) \quad \forall x > M \quad (*)$$

1 шаг Рассмотрим $f(x) < (\lambda + \varepsilon)g(x)$

Интегрируем:

$$\int_a^{+\infty} f(x) dx < (\lambda + \varepsilon) \int_a^{+\infty} g(x) dx$$

Число $(\lambda + \varepsilon)$ не влияет на сходимость/расходимость несобственного интеграла.

Пусть $\int_a^{+\infty} g(x) dx$ — сходится, тогда:

$$(\lambda + \varepsilon) \int_a^{+\infty} g(x) dx \text{ — сходится}$$

По теореме 1 $\int_a^{+\infty} f(x) dx$ — сходится.

Пусть $\int_a^{+\infty} f(x) dx$ расходится, тогда по теореме 1

$$(\lambda + \varepsilon) \int_a^{+\infty} g(x) dx \text{ — расходится} \Rightarrow \int_a^{+\infty} g(x) dx \text{ — расходится}$$

2 шаг Рассмотрим $(\lambda - \varepsilon) \cdot g(x) < f(x)$

Интегрируем:

$$(\lambda - \varepsilon) \int_a^{+\infty} g(x) dx < \int_a^{+\infty} f(x) dx$$

$(\lambda - \varepsilon)$ не влияет на сходимость/расходимость несобственного интеграла

Пусть $\int_a^{+\infty} f(x) dx$ — сходится, тогда по теореме 1

$$(\lambda - \varepsilon) \int_a^{+\infty} g(x) dx \text{ — сходится} \Rightarrow \int_a^{+\infty} g(x) dx \text{ — сходится}$$

Пусть $(\lambda - \varepsilon) \int_a^{+\infty} g(x) dx$ — расходится, тогда $\int_a^{+\infty} g(x) dx$ — расходится

По теореме 1 $\int_a^{+\infty} f(x) dx$ расходится, тогда

$$\int_a^{+\infty} f(x) dx \text{ и } \int_a^{+\infty} g(x) dx \text{ сходятся и расходятся одновременно}$$

■

Пример.

$$\int_1^{+\infty} \frac{\sqrt{x^3} + \sqrt{x^2 + 1}}{x^3 + 3x + 1} dx$$

$$f(x) = \frac{\sqrt{x^3} + \sqrt{x^2 + 1}}{x^3 + 3x + 1} \quad g(x) = \frac{1}{x^{3/2}}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\left(x^{\frac{3}{2}} + \sqrt{x^2 + 1}\right) \cdot x^{\frac{3}{2}}}{(x^3 + 3x + 1) \cdot 1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^3 \left(1 + \sqrt{\frac{1}{x} + \frac{1}{x^3}}\right)}{x^3 \left(1 + \frac{3}{x^2} + \frac{1}{x^3}\right)} = \frac{1}{1} = 1 = \lambda > 0$$

$$\int_1^{+\infty} g(x) dx = \int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^{\frac{3}{2}}} = \lim_{b \rightarrow +\infty} \int_1^b x^{-\frac{3}{2}} dx = \lim_{b \rightarrow +\infty} \left. \frac{x^{-\frac{1}{2}}}{-\frac{1}{2}} \right|_1^b = -2 \lim_{b \rightarrow +\infty} \left. \frac{1}{\sqrt{x}} \right|_1^b = 2$$

5.3 Интегралы для сравнения

5.3.1 Эталоны

$$\begin{aligned}\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha} &= \lim_{b \rightarrow +\infty} \int_1^b x^{-\alpha} dx = \lim_{b \rightarrow +\infty} \left(\frac{x^{-\alpha+1}}{-\alpha+1} \Big|_1^b \right) = \frac{1}{1-\alpha} \cdot \lim_{b \rightarrow +\infty} x^{-\alpha+1} \Big|_1^b = \\ &= \frac{1}{1-\alpha} \left(\lim_{b \rightarrow +\infty} b^{-\alpha+1} - 1 \right) = \begin{cases} \frac{1}{\alpha-1} & \alpha > 1 \\ \infty & \alpha < 1 \end{cases}\end{aligned}$$

$$\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x} = \lim_{b \rightarrow +\infty} \int_1^b \frac{dx}{x} = \lim_{b \rightarrow +\infty} (\ln |b| - \ln |1|) = \lim_{b \rightarrow +\infty} \ln |b| = \infty$$

Вывод:

$$\boxed{\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha} = \begin{cases} \text{сходится при } \alpha > 1 \\ \text{расходится при } \alpha \leq 1 \end{cases}}$$

интеграл Дирихле