

# Математический анализ

## Содержание

<b>1</b>	<b>Основы математического анализа</b>	<b>3</b>
1.1	Математическая логика . . . . .	3
1.1.1	Логические символы . . . . .	3
1.2	Теория множеств . . . . .	3
1.2.1	Символы теории множеств . . . . .	4
1.2.2	Операции со множествами . . . . .	4
1.2.3	Способы задания множества . . . . .	4
1.2.4	Числовые множества . . . . .	4
1.3	Промежутки . . . . .	5
1.3.1	Виды промежутков . . . . .	5
1.3.2	Конечные и бесконечные окрестности . . . . .	5
<b>2</b>	<b>Числовая последовательность</b>	<b>6</b>
2.1	Предел последовательности . . . . .	7
2.1.1	Геометрический смысл . . . . .	7
2.2	Свойства сходящихся последовательностей . . . . .	8
2.2.1	Предел последовательности $x_n = (1 + \frac{1}{n})$ . . . . .	9
<b>3</b>	<b>Предел функции</b>	<b>10</b>
3.1	Ограниченная функция . . . . .	11
3.2	Основные теоремы о пределах . . . . .	11
<b>4</b>	<b>Бесконечно малые функции</b>	<b>16</b>
4.1	Свойства бесконечно малых функций . . . . .	16
<b>5</b>	<b>Арифметические операции над функциями, имеющими конечный предел</b>	<b>19</b>
<b>6</b>	<b>Предел функции</b>	<b>21</b>
6.1	Односторонние пределы . . . . .	21
6.2	Пределы на бесконечности . . . . .	21
6.3	Бесконечные пределы . . . . .	22
6.3.1	Бесконечный предел на бесконечности . . . . .	23
<b>7</b>	<b>Бесконечно малые и бесконечно большие функции</b>	<b>23</b>
7.1	Связь бесконечно малой и бесконечно большой функций . . . . .	23
7.2	Первый замечательный предел . . . . .	23
7.3	Второй замечательный предел . . . . .	26
7.4	Сравнение бесконечно малых и бесконечно больших функций . . . . .	28
7.6	Свойства эквивалентных бесконечно малых функций . . . . .	29
<b>8</b>	<b>Непрерывность функции. Точки разрыва</b>	<b>32</b>
8.1	Односторонняя непрерывность . . . . .	33
8.2	Классификация точек разрыва . . . . .	34
8.3	Свойства непрерывных функций в точке . . . . .	36
8.4	Непрерывность элементарных функций . . . . .	38
8.5	Свойства функций непрерывных на промежутке . . . . .	39

<b>9</b>	<b>Производная функции</b>	<b>40</b>
9.1	Понятие производной . . . . .	40
9.2	Односторонние производные . . . . .	41
9.3	Геометрический смысл производной. Уравнение касательной и нормали к графику функции . . . . .	43
9.3.1	Уравнение касательной . . . . .	44
9.3.2	Выводы . . . . .	44
9.3.3	Уравнение нормали . . . . .	45
9.3.4	Замечание . . . . .	45
9.3.5	Угол между двумя пересекающимися кривыми . . . . .	46
9.4	Дифференцируемость функции в точке . . . . .	47
9.5	Правила дифференцирования . . . . .	48
9.6	Производная сложной функции . . . . .	51
9.7	Производная обратной функции . . . . .	52
9.8	Производная высших порядков . . . . .	53
<b>10</b>	<b>Дифференциал функции</b>	<b>54</b>
10.1	Понятие дифференциала . . . . .	54
10.2	Геометрический смысл дифференциала . . . . .	55
10.3	Инвариантность формы первого дифференциала . . . . .	55
10.4	Дифференциал высшего порядка . . . . .	56
<b>11</b>	<b>Основные теоремы дифференциального исчисления</b>	<b>56</b>
11.1	Правило Лопиталья-Бернулли . . . . .	60
11.2	Сравнение показательной, степенной и логарифмической функции на бесконечности . . . . .	61
11.3	Формула Тейлора. Многочлены Тейлора . . . . .	62

# Модуль №1

## Элементарные функции и пределы

## 1 Основы математического анализа

**Математический анализ** — изучение через размышление

Объект математического анализа - **функция**

В математическом анализе используются символы из математической логики и теории множеств.

### 1.1 Математическая логика

Объект изучения математической логики - **высказывание**.

**Определение 1. Высказывание** — повествовательное предложение, относительно которого можно сказать, истинно оно или ложно. Обозначаются заглавными буквами латинского алфавита.

**Пример.**  $2 + 3 = 5$  – истинно,  $3 < 0$  – ложно

#### 1.1.1 Логические символы

- $\wedge$  - конъюнкция (логическое "И")
- $\vee$  - дизъюнкция (логическое "ИЛИ")
- $\implies$  - импликация ("если A то B")
- $\iff$  - эквивалентность или равносильность ("тогда и только тогда")

**Кванторы** - общее название для логических операций

- $\exists$  - существует
- $\nexists$  - не существует
- $!\exists$  - существует единственный элемент
- $\forall$  - для каждого

### 1.2 Теория множеств

**Определение 1. Множество** — совокупность объектов, связанных одним и тем же свойством. Обозначаются заглавными латинскими буквами. Элементы множества обозначаются строчными латинскими буквами.

### 1.2.1 Символы теории множеств

- $\in$  - принадлежит
- $\notin$  - не принадлежит
- $\subset$  - включает
- $\subseteq$  - включает, возможно равенство
- $\equiv$  - тождественное равенство (для любого значения переменной)
- $\emptyset$  - пустое множество

### 1.2.2 Операции со множествами

- $\cup$  - объединение множеств
- $\cap$  - пересечение множеств

**Примечание.**

$$A \cup B = \{x: x \in A \wedge x \in B\}$$

$$A \cap B = \{x: x \in A \vee x \in B\}$$

**Определение 2. Подмножество** — множество  $A$  называется подмножеством  $B$ , если каждый элемент множества  $A$  является элементом множества  $B$ .

**Определение 3. Универсальное множество** — такое множество, подмножествами которого являются все рассматриваемые множества.

### 1.2.3 Способы задания множества

1. Перечислить все элементы:

$$A = \{1, 2, 3, 4, \dots\}.$$

2. Указание свойства, которым обладают все элементы множества:

$$B = \{x: Q(x)\}.$$

### 1.2.4 Числовые множества

- $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, 4\}$  - множество натуральных чисел
- $\mathbb{Z} = \{\dots - 2, -1, 0, 1, 2, \dots\}$  - множество целых чисел
- $\mathbb{Q} = \{x: x = \frac{m}{n}, m \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N}\}$  - множество рациональных чисел
- $\mathbb{I} = \{\pi, \sqrt{2}, \dots\}$  - множество иррациональных чисел
- $\mathbb{R} = \mathbb{Q} \cup \mathbb{I}$  - множество действительных чисел

**Примечание.** Порядок вложенности:  $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$

## 1.3 Промежутки

**Определение 1. Промежуток** — подмножество  $X$  множества  $\mathbb{Q}$ , где  $\forall x_1, x_2 \in X$  этому множеству принадлежат все  $x$ , где  $x_1 < x < x_2$ .

### 1.3.1 Виды промежутков

1. Отрезок  $[a; b] = \{x \in \mathbb{R}: a \leq x \leq b\}$
2. Интервал  $(a; b) = \{x \in \mathbb{R}: a < x < b\}$
3. Полуинтервал  $[a; b) = \{x \in \mathbb{R}: a \leq x < b\}$ ;  $(-\infty, b] = \{x \in \mathbb{R}: x \leq b\}$

### 1.3.2 Конечные и бесконечные окрестности

Пусть  $x_0 \in \mathbb{R}$ ,  $\delta$  и  $\varepsilon$  — малые положительные величины

**Определение 2. Окрестностью** точки  $x_0$  называется любой интервал, содержащий эту точку

**Определение 3.  $\delta$ -окрестностью**  $S(x_0; \delta)$  точки  $x_0$  называется интервал с центром в точке  $x_0$  и длиной  $2\delta$ .

$$S(x_0; \delta) = (x_0 - \delta; x_0 + \delta)$$

**Определение 4.  $\varepsilon$ -окрестностью**  $(S(x_0, \varepsilon))$  точки  $x_0$  называется интервал с центром в точке  $x_0$  и длиной  $2\varepsilon$ .

$$S(x_0; \varepsilon) = (x_0 - \varepsilon; x_0 + \varepsilon)$$

**Определение 5. Окрестностью**  $+\infty$  называется любой интервал вида:

$$S(+\infty) = (a; +\infty), \quad a \in \mathbb{R}, \quad a > 0.$$

**Определение 6. Окрестностью**  $-\infty$  называется любой интервал вида:

$$S(-\infty) = (-\infty; -a), \quad a \in \mathbb{R}, \quad a > 0.$$

**Определение 7. Окрестностью**  $\infty$  называется любой интервал вида

$$S(\infty) = (-\infty; -a) \cup (a; +\infty), \quad a \in \mathbb{R}, \quad a > 0.$$

## 2 Числовая последовательность

**Определение 1.** Числовая последовательность — это бесконечное множество числовых значений, которое можно упорядочить (перенумеровать).

**Задать последовательность** — указать формулу или правило, по которой  $\forall n \in \mathbb{N}$  можно записать соответствующий элемент последовательности.

**Примечание.** Множество значений последовательности может быть конечным или бесконечным, но число элементов последовательности всегда бесконечно.

Пример.  $1, -1, 1, -1, 1, \dots \leftarrow$  Число элементов: бесконечно  
Значений последовательности: два

Пример.  $x_n = (-1)^{n+1}$   
 $2, 2, 2, 2, 2, \dots \leftarrow$  Число элементов: бесконечно  
Значений последовательности: одно

Пример.  $x_n = 2 * 1^n$   
 $1, 2, 3, 4, 5, \dots \leftarrow$  Число элементов: бесконечно  
Значений последовательности: бесконечно  
 $x_n = n, \forall n \in \mathbb{N}.$

**Определение 2.** Последовательность чисел  $\{x_n\}$  называется **неубывающей**, если каждый последующий член  $x_{n+1} \geq x_n, \forall n \in \mathbb{N}$ .

Пример.  $1, 2, 3, 4, 4, 5, 5, \dots$

**Определение 3.** Последовательность чисел  $\{x_n\}$  называется **возрастающей**, если каждый последующий член  $x_{n+1} > x_n, \forall n \in \mathbb{N}$ .

Пример.  $1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, \dots$

**Определение 4.** Последовательность чисел  $\{x_n\}$  называется **невозрастающей**, если каждый последующий член  $x_{n+1} \leq x_n, \forall n \in \mathbb{N}$ .

Пример.  $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \dots$

**Определение 5.** Последовательность чисел  $\{x_n\}$  называется **убывающей**, если каждый последующий член  $x_{n+1} < x_n, \forall n \in \mathbb{N}$ .

Пример.  $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \dots$

**Определение 6.** Возрастающие и убывающие последовательности называются **строго монотонными**.

**Определение 7.** Неубывающие, возрастающие, невозрастающие и убывающие последовательности называются **монотонными**.

**Пример.** Немонотонная последовательность:  $1, 2, 3, 2, 1 \dots$

**Пример.** Постоянная последовательность:  $1, 1, 1, 1, 1 \dots$

## 2.1 Предел последовательности

**Определение 8.** Число  $a$  называется пределом последовательности  $\{x_n\}$ , если для любого положительного числа  $\varepsilon$  найдется натуральное число  $N(\varepsilon)$ , такое, что если порядковый номер  $n$  члена последовательности станет больше  $N(\varepsilon)$ , то имеет место неравенство  $|x_n - a| < \varepsilon$ .

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a \iff (\forall \varepsilon > 0)(\exists N(\varepsilon) \in \mathbb{N}): (\forall n > N(\varepsilon)) \Rightarrow |x_n - a| < \varepsilon.$$

**Примечание.** Т.е. начиная с номера  $N(\varepsilon) + 1$  все элементы последовательности  $\{x_n\}$  попадают в  $\varepsilon$ -окрестность точки  $a$ .

### 2.1.1 Геометрический смысл

$$\begin{aligned} |x_n - a| &< \varepsilon \\ -\varepsilon &< x_n - a < \varepsilon \\ a - \varepsilon &< x_n < a + \varepsilon \\ \forall n &> N(\varepsilon) \end{aligned}$$

Какой бы малый  $\varepsilon$  мы не взяли, бесконечное количество элементов последовательности  $\{x_n\}$  попадают в  $\varepsilon$ -окрестность точки  $a$ , причем чем  $\varepsilon \downarrow$ , тем  $N(\varepsilon) \uparrow$ .

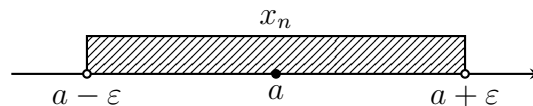


Рис. 1: Геометрический смысл предела последовательности

**Пример.** Рассмотрим последовательность  $x_n = \frac{1}{n+1} = \left\{ \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \frac{1}{6}, \dots \right\}$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n+1} = 0$$

Пусть  $\varepsilon = 0.3$ ,  $x_n \in (a - \varepsilon; a + \varepsilon)$ , т.е.  $(-0.3; 0.3)$

Получается два элемента  $x_1, x_2 \notin (-0.3, 0.3) \Downarrow$

$$N(\varepsilon) = 2$$

$$N(\varepsilon) + 1 = 3$$

$$x_3, x_4, x_5 \dots \in (-0.3, 0.3)$$

**Определение 9.** Последовательность, имеющая предел, называется **сходящейся**.

**Определение 10.** Последовательность  $\{x_n\}$  называется **ограниченной снизу (сверху)**, если  $\exists m \in \mathbb{R} (M \in \mathbb{R})$ , что для всех  $\forall n \in \mathbb{N}$  выполнено неравенство  $x_n \geq m$  ( $x_n \leq M$ )

**Определение 11.** Последовательность  $x_n$  называется **ограниченной**, если она ограничена и сверху, и снизу, т.е.  $\forall n \in \mathbb{N}, m \leq x_n \leq M$  или  $|x_n| \leq M$ .

**Определение 12.** Последовательность  $\{x_n\}$  называется **фундаментальной**, если для любого  $\varepsilon > 0 \exists$  свой порядковый номер  $N(\varepsilon)$  такой, что при всех  $n \geq N(\varepsilon)$  и  $m \geq N(\varepsilon)$  выполнено неравенство  $|x_n - x_m| < \varepsilon$ .

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N(\varepsilon) \quad \forall n \geq N(\varepsilon) \quad \forall m \geq N(\varepsilon) \implies |x_n - x_m| < \varepsilon$$

**Теорема 1** (*Критерий Коши существования предела последовательности*).

Для того, чтобы последовательность была сходящейся, необходимо и достаточно она была фундаментальной.

$$\{x_n\} - \text{сходится} \iff \{x_n\} - \text{фундаментальная.}$$

## 2.2 Свойства сходящихся последовательностей

**Теорема 2** (*О существовании единственности предела последовательности*).

Любая сходящаяся последовательность имеет единственный предел.

**Доказательство.**

(Аналитическое доказательство)

Пусть  $\{x_n\}$  - сходящаяся последовательность.

Рассуждаем методом от противного. Пусть последовательность  $\{x_n\}$  более одного предела.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} = a$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} = b$$

$$a \neq b$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} = a \iff (\forall \varepsilon_1 > 0)(\exists N_1(\varepsilon_1) \in \mathbb{N})(\forall n > N_1(\varepsilon_1) \implies |x_n - a| < \varepsilon_1) \quad (1)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} = b \iff (\forall \varepsilon_2 > 0)(\exists N_2(\varepsilon_2) \in \mathbb{N})(\forall n > N_2(\varepsilon_2) \implies |x_n - b| < \varepsilon_2) \quad (2)$$

Выберем  $N = \max\{N_1(\varepsilon_1), N_2(\varepsilon_2)\}$ .



Пусть

$$\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \varepsilon = \frac{|b - a|}{3}$$

$$\begin{aligned} 3\varepsilon &= |b - a| = |b - a + x_n - x_n| = \\ &= |(x_n - a) - (x_n - b)| \leq |x_n - a| + |x_n - b| < \varepsilon_1 + \varepsilon_2 = 2\varepsilon \\ 3\varepsilon &< 2\varepsilon \end{aligned}$$

Противоречие. Значит, предположение не является верным  $\implies$  последовательность  $x_n$  имеет единственный предел. ■

**Доказательство.**

(Геометрическое доказательство)

Нельзя уложить бесконечное число членов последовательности  $x_n$  в две непересекающиеся окрестности. ■

**Теорема 3** (Об ограниченности сходящейся последовательности).

Любая сходящаяся последовательность ограничена.

**Доказательство.**

По определению сходящейся последовательности

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a \iff (\forall \varepsilon > 0)(\exists N(\varepsilon) \in \mathbb{N})(\forall n > N(\varepsilon) \implies |x_n - a| < \varepsilon).$$

Выберем в качестве  $M = \max\{|x_1|, |x_2|, \dots, |x_n|, |a - \varepsilon|, |a + \varepsilon|\}$ .

Тогда для  $\forall n \in \mathbb{N}$  будет верно  $|x_n| \leq M$  — это и означает, что последовательность  $x_n$  — ограниченная. ■

**Теорема 4** (Признак сходимости Вейерштрасса).

Ограниченная монотонная последовательность сходится.

### 2.2.1 Предел последовательности $x_n = (1 + \frac{1}{n})$

**Теорема 5.**

Последовательность  $x_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)$  имеет предел равный  $e$ .

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right) = e$$

### 3 Предел функции

**Определение 1.** Окрестностью, из которой исключена точка  $x_0$  называется **проколотой окрестностью**.

$$\mathring{S}(x_0; \delta) = S(x_0; \delta) \setminus x_0$$

**Определение 2** (Определение функции по Коши или на языке  $\varepsilon$  и  $\delta$ ).

Число  $a$  называется пределом функции  $y = f(x)$  в точке  $x_0$ , если  $\forall \varepsilon > 0$  найдется  $\delta$ , зависящее от  $\varepsilon$  такое что  $\forall x \in \mathring{S}(x_0; \delta)$  будет верно неравенство  $|f(x) - a| < \varepsilon$ .

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = a \iff (\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta(\varepsilon) > 0)(\forall x \in \mathring{S}(x_0; \delta) \implies |f(x) - a| < \varepsilon)$$

Эквивалентные записи определения

$$\begin{aligned} \dots \forall x \in \mathring{S}(x_0; \delta) &\implies \dots \\ \dots \forall x \neq x_0, |x - x_0| < \varepsilon &\implies \dots \\ \dots \forall x, 0 < |x - x_0| < \delta &\implies \dots \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \dots &\implies |f(x) - a| < \varepsilon \\ \dots &\implies f(x) \in \mathring{S}(a, \varepsilon) \end{aligned}$$

#### Геометрический смысл предела функции

Если для  $\forall \mathring{S}(a; \varepsilon)$  найдется  $\mathring{S}(x_0; \delta)$ , то соответствующие значения функции лежат в  $\mathring{S}(a; \varepsilon)$  (полоса  $2\varepsilon$ ):

$$\forall x_1 \in \mathring{S}(x_0; \delta) \implies |f(x_1) - a| < \varepsilon$$

**Определение 3** (Определение предела функции по Гейне или на языке последовательностей).

Число  $a$  называется пределом  $y = f(x)$  в точке  $x_0$ , если эта функция определена в окрестности точки  $a$  и  $\forall$  последовательности  $x_n$  из области определения этой функции, сходящейся к  $x_0$  соответствующая последовательность функций  $\{f(x_n)\}$  сходится к  $a$ .

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = a \iff (\forall x_n \in D_f)(\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x_0 \implies \lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = a)$$

#### Геометрический смысл

$$\forall x_n \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x_0$$

Для любых точек  $x$ , достаточно близких к точке  $x_0$  (на языке математики  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x_0$ ) соответствующие значения  $f(x_n)$  достаточно близко расположены к  $a$  (на языке математики  $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = a$ )

**Примечание.** Определение предела функции по Коши и по Гейне эквивалентны.

### 3.1 Ограниченная функция

**Определение 4.** Функция называется **ограниченной** в данной области изменения аргумента  $x$ , если  $\exists M \in \mathbb{R}, M > 0, |f(x)| \leq M$ .

**Определение 5.** Если  $\nexists M \in \mathbb{R}, M > 0$ , то функция  $f(x)$  называется **неограниченной**.

**Определение 6.** Функция называется **локально ограниченной** при  $x \rightarrow x_0$ , если существует проколота окрестность с центром в точке  $x_0$ , в которой данная функция ограничена.

### 3.2 Основные теоремы о пределах

**Теорема 1** (О локальной ограниченности функции, имеющей конечный предел).  
Функция, имеющая конечный предел, локально ограничена.

Доказательство.

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = a \iff (\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta(\varepsilon) > 0)(\forall x \in \dot{S}(x_0, \delta) \implies |f(x) - a| < \varepsilon)$$

Распишем:

$$\begin{aligned} -\varepsilon < f(x) - a < \varepsilon \\ a - \varepsilon < f(x) < a + \varepsilon \end{aligned} \quad \forall x \in \dot{S}(x_0, \delta)$$

Выберем  $M = \max\{|a - \varepsilon|, |a + \varepsilon|\}$

$$|f(x)| \leq M, \quad \forall x \in \dot{S}(x_0, \delta)$$

Что и требовалось доказать. ■

**Теорема 2** (О единственности предела функции).

Если функция имеет конечный предел, то он единственный.

Доказательство.

Предположим, что функция имеет более одного предела, например 2 -  $a$  и  $b$ . Тогда:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = a \tag{1}$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = b \tag{2}$$

$a \neq b$ , пусть  $b > a$

$$(1) \iff (\forall \varepsilon_1 > 0)(\exists \delta_1(\varepsilon_1) > 0)(\forall x \in \dot{S}(x_0, \delta_1) \implies |f(x) - a| < \varepsilon_1)$$

$$(2) \iff (\forall \varepsilon_2 > 0)(\exists \delta_2(\varepsilon_2) > 0)(\forall x \in \dot{S}(x_0, \delta_2) \implies |f(x) - b| < \varepsilon_2)$$

Распишем:

$$(1) \implies a - \varepsilon_1 < f(x) < a + \varepsilon_1, \forall x \in \dot{S}(x_0, \delta_1)$$

$$(2) \implies b - \varepsilon_2 < f(x) < b + \varepsilon_2, \forall x \in \dot{S}(x_0, \delta_2)$$

Выберем  $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$ , тогда  $\forall x \in \dot{S}(x_0, \delta)$  будет верно (1) и (2) одновременно.  
 Пусть  $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \varepsilon = \frac{b-a}{2}$ :

$$(1) \implies f(x) < a + \varepsilon_1 = a + \frac{b-a}{2} = \frac{a+b}{2}$$

$$(2) \implies f(x) > b - \varepsilon_2 = b - \frac{b-a}{2} = \frac{a+b}{2}$$

$$\forall x \in \dot{S}(x_0, \delta)$$

Мы получили противоречие. Это означает, что предположение не является верным.  
 Функция имеет единственный предел. ■

**Теорема 3** (О сохранении функцией знака своего предела).

Если  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = a \neq 0$ , то  $\exists \dot{S}(x_0, \delta)$  такая, что функция в ней сохраняет знак своего предела.

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = a \neq 0 \rightarrow \begin{matrix} a > 0 \\ a < 0 \end{matrix} \implies \begin{matrix} f(x) > 0 \\ f(x) < 0 \end{matrix} \quad \forall x \in \dot{S}(x_0, \delta)$$

**Доказательство.**

Пусть  $a > 0$ . Выберем  $\varepsilon = a > 0$ .

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = a \iff (\forall \varepsilon = a)(\exists \delta(x) > 0)(\forall x \in \dot{S}(x_0, \delta) \implies |f(x) - a| < \varepsilon = a)$$

Распишем:

$$-a < f(x) - a < a$$

$$\boxed{0 < f(x) < 2a}$$

Знак у функции  $f(x)$  и числа  $a$  - одинаковые. Пусть  $a < 0$ . Выберем  $\varepsilon = -a$ .

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = a \iff (\forall \varepsilon = -a)(\exists \delta(x) > 0)(\forall x \in \dot{S}(x_0, \delta) \implies |f(x) - a| < \varepsilon = -a)$$

Распишем:

$$-a < f(x) - a < a$$

$$\boxed{-2a < f(x) < 0}$$

Знак у функции  $f(x)$  и числа  $a$  - одинаковые.

Значит,  $f(x)$  сохраняет знак своего предела  $\forall x \in \dot{S}(x_0, \delta)$  ■

**Следствие 3.1.** Если функция  $y = f(x)$  имеет предел в точке  $x_0$  и знакопостоянна в  $\dot{S}(x_0, \delta)$ , тогда её предел не может иметь с ней противоположные знак.

**Теорема 4** (О предельном переходе в неравенстве).

Пусть существуют конечные пределы функций  $f(x)$  и  $g(x)$  в точке  $x_0$  и  $\forall x \in \dot{S}(x_0, \delta)$  верно  $f(x) < g(x)$ . Тогда  $\forall x \in \dot{S}(x_0, \delta)$  имеет место неравенство  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \leq \lim_{x \rightarrow x_0} g(x)$ .

**Доказательство.**

По условию  $f(x) < g(x), \forall x \in \dot{S}(x_0, \delta)$ .

Введём функцию  $F(x) = f(x) - g(x) < 0, \forall x \in \dot{S}(x_0, \delta)$ . Т.к.  $f(x)$  и  $g(x)$  имеют конечные пределы в точке  $x_0$ , соответственно и функция  $F(x)$  имеет конечный предел в точке

$x_0$  (как разность  $f(x)$  и  $g(x)$ ).

По следствию **3.1**  $\implies \lim_{x \rightarrow x_0} F(x)$

Подставим  $F(x) = f(x) - g(x)$ :

$$\lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) - g(x)) \leq 0 \implies \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) - \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) \leq 0 \implies \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \leq \lim_{x \rightarrow x_0} g(x)$$

■

**Пример.** Пусть  $f(x) = 0$ ,  $g(x) = x^2$  и  $x_0 = 0$ .

$$\begin{aligned} \forall x \in \mathring{S}(x_0, \delta) \quad 0 < x^2 \\ \lim_{x \rightarrow 0} f(x) &= 0 \\ \lim_{x \rightarrow 0} g(x) &= \lim_{x \rightarrow 0} x^2 = 0 \\ \lim_{x \rightarrow 0} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 0} g(x) \\ \lim_{x \rightarrow 0} f(x) &\leq \lim_{x \rightarrow 0} g(x) \end{aligned}$$

В теореме знак **строгий** переходит в **нестрогий**!

**Теорема 5** (*О пределе промежуточной функции*).

Пусть существуют конечные пределы функций  $f(x)$  и  $g(x)$  в точке  $x_0$  и  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = a$  и

$\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = a$ ,  $\forall x \in \mathring{S}(x_0, \delta)$  верно неравенство  $f(x) \leq h(x) \leq g(x)$ . Тогда  $\lim_{x \rightarrow x_0} h(x) = a$ .

**Доказательство.**

По условию:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = a \iff (\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta_1(\varepsilon) > 0)(\forall x \in \mathring{S}(x_0, \delta) \implies |f(x) - a| < \varepsilon) \quad (1)$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = a \iff (\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta_2(\varepsilon) > 0)(\forall x \in \mathring{S}(x_0, \delta) \implies |g(x) - a| < \varepsilon) \quad (2)$$

Выберем  $\delta_0 = \min\{\delta, \delta_1, \delta_2\}$ , тогда (1), (2) и  $f(x) \leq h(x) \leq g(x)$  верны одновременно  $\forall x \in \mathring{S}(x_0, \delta_0)$ .

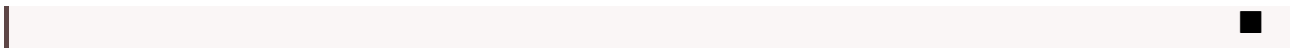
$$(1) \quad a - \varepsilon < f(x) < a + \varepsilon$$

$$(2) \quad a - \varepsilon < g(x) < a + \varepsilon$$

$$\begin{aligned} f(x) &\leq h(x) \leq g(x) \\ \implies a - \varepsilon_1 &< f(x) \leq h(x) \leq g(x) < a + \varepsilon_2 \\ \implies \forall x \in \mathring{S}(x_0, \delta_0) \quad a - \varepsilon &< h(x) < a + \varepsilon \end{aligned}$$

В итоге:

$$\begin{aligned} (\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta_0(\varepsilon) > 0)(\forall x \in \mathring{S}(x_0, \delta_0) \implies |h(x) - a| < \varepsilon) \\ \implies \text{по определению предела} \\ \lim_{x \rightarrow x_0} h(x) &= a \end{aligned}$$



**Теорема 6** (*О пределе сложной функции*).

Если функция  $y = f(x)$  имеет предел в точке  $x_0$  равный  $a$ , то функция  $\varphi(y)$  имеет предел в точке  $a$ , равный  $C$ , тогда сложная функция  $\varphi(f(x))$  имеет предел в точке  $x_0$ , равный  $C$ .

$$\left. \begin{array}{l} y = f(x) \\ \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = a \\ \lim_{y \rightarrow a} \varphi(y) = C \end{array} \right\} \implies \lim_{x \rightarrow x_0} \varphi(f(x)) = C$$

**Доказательство.**

$$\lim_{y \rightarrow a} \varphi(y) \iff (\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta_1 > 0)(\forall y \in \mathring{S}(a, \delta_1) \implies |\varphi(y) - a| < \varepsilon) \quad (1)$$

Выберем в качестве  $\varepsilon$  в пределе найденное  $\delta_1$ :

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = a \iff (\forall \delta_1 > 0)(\exists \delta_2 > 0)(\forall x: 0 < |x - x_0| < \delta_2 \implies |f(x) - a| < \delta_1) \quad (2)$$

В итоге:

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta_2 > 0)(\forall x: 0 < |x - x_0| < \delta_2 \implies |\varphi(f(x)) - c| < \varepsilon)$$

Что равносильно:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \varphi(f(x)) = c$$

■

## 4 Бесконечно малые функции

**Определение 1.** Функция называется **бесконечно малой** при  $x \rightarrow x_0$ , если предел функции в этой точке равен 0. Кратко - **б.м.ф.** или **б.м.в.**

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = 0$$
$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta(\varepsilon))(\forall x \in \overset{\circ}{S}(x_0, \delta) \implies |f(x)| < \varepsilon)$$

**Примечание.**

- Стремление аргумента может быть *любое*, главное, чтобы предел был равен нулю.
- Бесконечно малые функции обозначаются  $\alpha(x), \beta(x), \gamma(x) \dots$

**Пример.**

$$y = x - 2$$
$$\lim_{x \rightarrow 2} (x - 2) = 0$$

$y = x - 2$  является бесконечно малой при  $x \rightarrow 2$ .

**Пример.**

$$y = \sin(x)$$
$$\lim_{x \rightarrow 0} \sin(x) = 0$$

$y = \sin(x)$  является бесконечно малой при  $x \rightarrow 0$ .

**Пример.**

$$y = \sin\left(\frac{1}{x}\right)$$
$$\lim_{x \rightarrow \infty} \sin\left(\frac{1}{x}\right) = 0$$

$y = \sin\left(\frac{1}{x}\right)$  является бесконечно малой при  $x \rightarrow \infty$ .

### 4.1 Свойства бесконечно малых функций

**Теорема 1** (*О сумме конечного числа бесконечно малых функций*).

Конечная сумма бесконечно малых функций есть бесконечно малая функция.

**Доказательство.**

Пусть дано конечное число бесконечно малых функций, например, две:  $\alpha(x), \beta(x)$ . Тогда по определению бесконечно малой функции:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \alpha(x) = 0 \quad \lim_{x \rightarrow x_0} \beta(x) = 0$$

Нужно доказать, что:  $\lim_{x \rightarrow x_0} (\alpha(x) + \beta(x)) = 0$



Распишем:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \alpha(x) = 0 \iff \left( \forall \varepsilon_1 = \frac{\varepsilon}{2} > 0 \right) (\exists \delta_1 > 0) \left( \forall x \in \dot{S}(x_0, \delta_1) \Rightarrow |\alpha(x)| < \frac{\varepsilon}{2} \right) \quad (1)$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \beta(x) = 0 \iff \left( \forall \varepsilon_2 = \frac{\varepsilon}{2} > 0 \right) (\exists \delta_2 > 0) \left( \forall x \in \dot{S}(x_0, \delta_2) \Rightarrow |\beta(x)| < \frac{\varepsilon}{2} \right) \quad (2)$$

Выберем  $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$ . Тогда (1) и (2) верны одновременно. Получаем:

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0) \left( \forall x \in \dot{S}(x_0, \delta) \Rightarrow |\alpha(x) + \beta(x)| \leq |\alpha(x)| + |\beta(x)| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon \right)$$

Тогда по определению бесконечно малой функции:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} (\alpha(x) + \beta(x)) = 0$$

■

**Теорема 2** (*О произведении бесконечно малой функций на локально ограниченную*).  
Произведение бесконечно малой функции на локально ограниченную есть величина бесконечно малая.

**Доказательство.**

Пусть  $\alpha(x)$  - бесконечно малая функция при  $x \rightarrow x_0$ , а функция  $f(x)$  при  $x \rightarrow x_0$  является локально ограниченной. Доказываем, что:

$$\alpha(x) \cdot f(x) = 0$$

Распишем:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \alpha(x) = 0 \iff \left( \forall \varepsilon_1 = \frac{\varepsilon}{M} > 0 \right) (\exists \delta_1 > 0) \left( \forall x \in \dot{S}(x_0, \delta_1) \Rightarrow |\alpha(x)| < \varepsilon_1 = \frac{\varepsilon}{M} \right) \quad (1)$$

$$M \in \mathbb{R}, M > 0$$

$$\forall x \in \dot{S}(x_0, \delta_2) \implies |f(x)| < M \quad (2)$$

Выберем  $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$ , тогда (1) и (2) верны одновременно. В итоге получаем:

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall x \in \dot{S}(x_0, \delta) \implies |\alpha(x) \cdot f(x)| = |\alpha(x)| \cdot |f(x)| < \frac{\varepsilon}{M} \cdot M < \varepsilon$$

Тогда по определению бесконечно малой функции:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \alpha(x) \cdot f(x) = 0$$

■

**Пример.**

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sin(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} \cdot \sin(x) = 0$$

Т.к.  $\sin(x)$  при  $x \rightarrow \infty$  является локально ограниченной  $\sin(x) \leq 1$ .

**Теорема 3** (О связи функции, её предела и бесконечно малой).

Функция  $y = f(x)$  имеет конечный предел в точке  $x_0$  тогда и только тогда, когда её можно представить в виде суммы предела и некоторой бесконечно малой функции.

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = a \iff f(x) = a + \alpha(x), \text{ где } \alpha(x) - \text{б.м.ф. при } x \rightarrow x_0$$

**Доказательство** (Необходимость).

Дано:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = a$$

Доказать:

$$f(x) = a + \alpha(x), \text{ где } \alpha(x) - \text{б.м.ф. при } x \rightarrow x_0$$

Распишем:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = a \iff (\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall x \in \dot{S}(x_0, \delta) \implies |f(x) - a| < \varepsilon)$$

Обозначим  $f(x) - a = \alpha(x)$ , тогда:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = a \iff (\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall x \in \dot{S}(x_0, \delta) \implies |\alpha(x)| < \varepsilon)$$

По определению бесконечно малой функции  $\alpha(x)$  - бесконечно малая функция. Из обозначения следует, что:

$$f(x) = a + \alpha(x)$$

где  $\alpha(x)$  - бесконечно малая функция при  $x \rightarrow x_0$ . ■

**Доказательство** (Достаточность).

Дано:

$$f(x) = a + \alpha(x), \text{ где } \alpha(x) - \text{б.м.ф. при } x \rightarrow x_0$$

Доказать:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = a$$

По определению б.м.ф.:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \alpha(x) = 0 \iff (\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\dot{S}(x_0, \delta) \implies |\alpha(x)| < \varepsilon)$$

С учётом введённого обозначения:

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\dot{S}(x_0, \delta) \implies |f(x) - a| < \varepsilon) \iff \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = a$$

■

**Следствие 3.1.** Т.к. любая бесконечно малая функция локально ограничена, то произведение двух бесконечно малых функций есть бесконечно малая функция.

**Следствие 3.2.** Произведение бесконечно малой функции на константу есть величина бесконечно малая.

## 5 Арифметические операции над функциями, имеющими конечный предел

Пусть  $f(x)$  и  $g(x)$  имеют конечные пределы в точке  $x_0$ .

### Теорема 4.

Предел суммы (разности) двух функций, имеющих конечные пределы равен сумме (разности) пределов.

$$\lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) \pm g(x)) = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \pm \lim_{x \rightarrow x_0} g(x)$$

### Теорема 5 (О пределе отношения функций).

Предел отношения двух функций, имеющих конечный предел, равен частному их пределов при условии, что предел в знаменателе отличен от нуля.

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \left( \frac{f(x)}{g(x)} \right) = \frac{\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)}{\lim_{x \rightarrow x_0} g(x)}, \quad \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) \neq 0$$

### Теорема 6 (О пределе произведения функций).

Предел произведения функций равен произведению пределов.

$$\lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) \cdot g(x)) = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \cdot \lim_{x \rightarrow x_0} g(x)$$

### Доказательство.

Пусть:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = a \tag{1}$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = b \tag{2}$$

По теореме о связи функции, её предела и бесконечно малой функции:

$$(1) \implies f(x) = a + \alpha(x), \text{ где } \alpha(x) - \text{б.м.ф.}$$

$$(2) \implies g(x) = b + \beta(x), \text{ где } \beta(x) - \text{б.м.ф.}$$

Рассмотрим:

$$\begin{aligned} f(x) \cdot g(x) &= (a + \alpha(x))(b + \beta(x)) \\ f(x) \cdot g(x) &= ab + \underbrace{a \cdot \beta(x) + b\alpha(x) + \alpha(x) \cdot \beta(x)}_{\gamma(x)} \\ f(x) \cdot g(x) &= ab + \gamma(x) \end{aligned}$$

По следствию из теоремы 3:

$$\begin{aligned} a \cdot \beta(x) &= \text{б.м.ф. при } x \rightarrow 0 \\ b \cdot \alpha(x) &= \text{б.м.ф. при } x \rightarrow 0 \\ \alpha(x) \cdot \beta(x) &= \text{б.м.ф. при } x \rightarrow 0 \end{aligned}$$

По теореме о сумме конечного числа с б.м.ф.:

$$\gamma(x) = \text{б.м.ф. при } x \rightarrow 0$$

Далее расписываем предел:

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \cdot g(x) &= \lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) \cdot g(x)) \\ \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \cdot g(x) &= \lim_{x \rightarrow x_0} ab + \lim_{x \rightarrow x_0} \gamma(x) \\ \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \cdot g(x) &= ab + 0 \\ \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \cdot g(x) &= ab\end{aligned}$$



### Следствие 6.1.

$$\lim_{x \rightarrow x_0} (c \cdot f(x)) = c \cdot \lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$$

## 6 Предел функции

### 6.1 Односторонние пределы

**Определение 1.** Число  $A_1$  называется пределом функции  $y = f(x)$  в точке  $x_0$  **слева**, если:

$$\lim_{x \rightarrow x_0-} f(x) = A_1 \iff (\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall x \in (x_0 - \delta, x_0) \implies |f(x) - A_1| < \varepsilon)$$

**Определение 2.** Число  $A_2$  называется пределом функции  $y = f(x)$  в точке  $x_0$  **справа**, если:

$$\lim_{x \rightarrow x_0+} f(x) = A_2 \iff (\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall x \in (x_0, x_0 + \delta) \implies |f(x) - A_2| < \varepsilon)$$

**Примечание.** Пределы справа и слева называют *односторонними пределами*.

**Теорема 1** (*О существовании предела функции в точке*).

Функция  $y = f(x)$  в точке  $x_0$  имеет конечный предел тогда и только тогда, когда существуют пределы справа и слева и они равны между собой.

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0+} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0-} f(x)$$

### 6.2 Пределы на бесконечности

**Определение 3.** Число  $a$  называется пределом функции  $y = f(x)$  при  $x \rightarrow +\infty$ , если:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = a \iff (\forall \varepsilon > 0)(\exists N(\varepsilon) > 0)(\forall x > N \implies |f(x) - a| < \varepsilon)$$

где  $N$  — большое число,  $N > 0$ ,  $N \in \mathbb{R}$ .

**Определение 4.** Число  $a$  называется пределом функции  $y = f(x)$  при  $x \rightarrow -\infty$ , если:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = a \iff (\forall \varepsilon > 0)(\exists N(\varepsilon) > 0)(\forall x < -N \implies |f(x) - a| < \varepsilon)$$

где  $N$  — большое число,  $N > 0$ ,  $N \in \mathbb{R}$ .

**Примечание.**

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = a \iff (\forall \varepsilon > 0)(\exists N(\varepsilon) > 0)(\forall x > N \implies |f(x) - a| < \varepsilon)$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = a \iff (\forall \varepsilon > 0)(\exists N(\varepsilon) > 0)(\forall x < -N \implies |f(x) - a| < \varepsilon)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = a \iff (\forall \varepsilon > 0)(\exists N(\varepsilon) > 0)(\forall x \in |x| > N \implies |f(x) - a| < \varepsilon)$$

## 6.3 Бесконечные пределы

**Определение 5.** Функция  $y = f(x)$  имеет бесконечный предел при  $x \rightarrow x_0$ , если:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \infty \iff (\forall M > 0)(\exists \delta(M) > 0)(\forall x \in \dot{S}(x_0, \delta) \implies |f(x)| > M)$$

где  $M$  — большое число,  $M > 0$ ,  $M \in \mathbb{R}$ , а  $\delta$  — малое число.

**Примечание.**

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = +\infty \iff (\forall M > 0)(\exists \delta(M) > 0)(\forall x \in \dot{S}(x_0, \delta) \implies f(x) > M)$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = -\infty \iff (\forall M > 0)(\exists \delta(M) > 0)(\forall x \in \dot{S}(x_0, \delta) \implies f(x) < -M)$$

**Пример.**

$$y = \operatorname{arctg}(x), \quad x \rightarrow \infty$$
$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \operatorname{arctg}(x) = \frac{\pi}{2}$$
$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \operatorname{arctg}(x) = -\frac{\pi}{2}$$

**Пример.**

$$y = \ln(x), \quad x \rightarrow 0$$
$$\lim_{x \rightarrow 0-} = \nexists$$
$$\lim_{x \rightarrow 0+} = -\infty$$

**Пример.**

$$y = \sqrt{-x}, \quad x \rightarrow 0$$
$$\lim_{x \rightarrow 0+} = \nexists$$
$$\lim_{x \rightarrow 0-} = 0$$

**Пример.**

$$y = \frac{1}{|x - 2|}, \quad x \rightarrow 2$$
$$\lim_{x \rightarrow 2+} \frac{1}{|x - 2|} = +\infty$$
$$\lim_{x \rightarrow 2-} \frac{1}{|x - 2|} = +\infty$$

**Определение 6.** Функция  $y = f(x)$  называется **бесконечно большой функцией** (далее - **б.б.ф.**) если:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \infty$$

### 6.3.1 Бесконечный предел на бесконечности

$$\lim_{x \rightarrow \infty} = \infty \iff (\forall M > 0)(\exists N(M) > 0)(\forall x \in |x| > N \implies |f(x)| > M)$$

## 7 Бесконечно малые и бесконечно большие функции

### 7.1 Связь бесконечно малой и бесконечно большой функций

**Теорема 1** (О связи бесконечно малой и бесконечно большой функции).

Если  $\alpha(x)$  - бесконечно большая функция при  $x \rightarrow x_0$ , то  $\frac{1}{\alpha(x)}$  - бесконечно малая функция при  $x \rightarrow x_0$ .

**Доказательство.**

По условию  $\alpha(x)$  - б.б.ф. при  $x \rightarrow x_0$ . По определению:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \alpha(x) = \infty \iff (\forall M > 0)(\exists \delta(M) > 0)(\forall x \in \mathring{S}(x_0, \delta) \implies |\alpha(x)| > M)$$

Рассмотрим неравенство:

$$|\alpha(x)| > M, \forall x \in \mathring{S}(x_0, \delta)$$

Обозначим  $\varepsilon = \frac{1}{M}$ .

$$|\alpha(x)| > M \implies \frac{1}{|\alpha(x)|} < \frac{1}{M} \implies \left| \frac{1}{\alpha(x)} \right| < \frac{1}{M} < \varepsilon$$

В итоге получаем:

$$\forall x \in \mathring{S}(x_0, \delta) \implies \left| \frac{1}{\alpha(x)} \right| < \varepsilon$$

Что по определению является бесконечно малой функцией. ■

### 7.2 Первый замечательный предел

**Теорема 2.**

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1$$

**Доказательство.**

Рассмотрим  $\lim_{x \rightarrow 0+} \frac{\sin(x)}{x} = 1$ . Потом  $\lim_{x \rightarrow 0-} \frac{\sin(x)}{x} = 1$ .

Пусть  $\alpha$  - угол в радианах,  $x \rightarrow 0, x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ .

Окружность  $R = 1$ .

Отложим луч  $OK$  под углом к оси  $OX$  равным  $x$ , где  $O(0,0)$ ,  $K \in$  окружности.  
 $KH \perp OA$ .

Рассмотрим  $\triangle OKH$ :  $OA = 1$  как радиус.  $\sin(x) = \frac{KH}{OA} = KH$ .

Рассмотрим  $\triangle OLA$ :  $OA = 1$  как радиус.  $\operatorname{tg}(x) = \frac{LA}{OA} = LA$ .

Из геометрических построений:

$$S_{\triangle OKA} < S_{\text{сек}OKA} < S_{\triangle OLA}$$

$$\begin{aligned} S_{\triangle OKA} &= \frac{1}{2} OA \cdot KH = \frac{1}{2} \sin(x) = \frac{\sin(x)}{2} \\ S_{\text{сек}OKA} &= \frac{1}{2} OA \cdot OK \cdot KA = \frac{1}{2} \cdot x = \frac{x}{2} \\ S_{\triangle OLA} &= \frac{1}{2} OA \cdot LA = \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot \operatorname{tg}(x) = \frac{\operatorname{tg}(x)}{2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\sin(x)}{2} &< \frac{x}{2} < \frac{\operatorname{tg}(x)}{2} \quad | \cdot 2 \\ \sin(x) &< x < \operatorname{tg}(x) \\ x \rightarrow 0+ &\implies \left\{ \begin{array}{l} \sin(x) > 0 \\ \operatorname{tg}(x) > 0 \end{array} \right\} \implies \sin(x) < x < \operatorname{tg}(x) \quad | : \sin(x) \\ 1 &< \frac{x}{\sin(x)} < \frac{1}{\cos(x)} \\ \cos(x) &< \frac{\sin(x)}{x} < 1 \end{aligned}$$

По теореме о предельном переходе в неравенстве:

$$\lim_{x \rightarrow 0+} \cos(x) \leq \lim_{x \rightarrow 0+} \frac{\sin(x)}{x} \leq 1$$

По теореме о промежуточной функции:

$$\lim_{x \rightarrow 0+} \cos(x) = 1 \implies \lim_{x \rightarrow 0+} \frac{\sin(x)}{x} = 1$$

Аналогично для  $\lim_{x \rightarrow 0-} \frac{\sin(x)}{x} = 1$ . Т.к. односторонние пределы равны:

$$\lim_{x \rightarrow 0+} \frac{\sin(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0-} \frac{\sin(x)}{x} = 1 \iff \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\sin(x)}{x} = 1$$

■



**Следствие 2.1.**

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} x}{x} = 1$$

**Доказательство.**

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg}(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x)}{x \cos(x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x)}{x} \cdot \frac{1}{\cos(x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\cos x} = 1 \cdot \frac{1}{1} = 1$$

■

**Следствие 2.2.**

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsin x}{x} = 1$$

**Доказательство.**

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsin x}{x} = \left| \begin{matrix} t = \arcsin(x) \\ x \rightarrow 0, t \rightarrow 0 \end{matrix} \right| = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\arcsin(\sin t)}{\sin t} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{t}{\sin t} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{\frac{\sin t}{t}} = \frac{1}{1} = 1$$

■

**Следствие 2.3.**

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{arctg} x}{x} = 1$$

**Доказательство.**

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{arctg} x}{x} = \left| \begin{matrix} x = \operatorname{tg} t \\ x \rightarrow 0, t \rightarrow 0 \end{matrix} \right| = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\operatorname{arctg}(\operatorname{tg} t)}{\operatorname{tg} t} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{t}{\operatorname{tg} t} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{\frac{\operatorname{tg} t}{t}} = \frac{1}{\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} t}{t}} = \frac{1}{1} = 1$$

■

**Следствие 2.4.**

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} = \frac{1}{2}$$

**Доказательство.**

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos(x)}{x^2} &= \left| \begin{matrix} \sin^2 \frac{x}{2} = \frac{1 - \cos(x)}{2} \\ 1 - \cos(x) = 2 \sin^2 \frac{x}{2} \end{matrix} \right| = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \sin^2 \frac{x}{2}}{x^2} = 2 \lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{\sin^2 \frac{x}{2}}{\left(\frac{x}{2}\right)^2} \cdot \frac{\left(\frac{x}{2}\right)^2}{x^2} \right) = \\ &= 2 \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

■

## 7.3 Второй замечательный предел

**Теорема 3.**

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e$$

**Следствие 3.1.**

$$\lim_{x \rightarrow 0} (1 + x)^{\frac{1}{x}} = e$$

**Доказательство.**

$$\lim_{x \rightarrow 0} (1 + x)^{\frac{1}{x}} = \left| \begin{array}{l} \frac{1}{x} = t, \quad x = \frac{1}{t} \\ x \rightarrow 0, \quad t \rightarrow \infty \end{array} \right| = \lim_{t \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{t}\right)^t = e$$

■

**Следствие 3.2.**

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1 + x)}{x} = 1$$

**Доказательство.**

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1 + x)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{1}{x} \cdot \ln(1 + x) \right) = \lim_{x \rightarrow 0} \left( \ln(1 + x)^{\frac{1}{x}} \right) \stackrel{\text{сл. 4.1}}{=} \ln e = 1$$

■

**Следствие 3.3.**

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log_a(1 + x)}{x} = \frac{1}{\ln a}$$

**Доказательство.**

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log_a(1 + x)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1 + x)}{\ln a \cdot x} = \frac{1}{\ln a} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1 + x)}{x} \stackrel{\text{сл. 4.2}}{=} \frac{1}{\ln a} \cdot 1 = \frac{1}{\ln a}$$

■

### Следствие 3.4.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$$

Доказательство.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = \left| \begin{array}{l} e^x - 1 = t \\ e^x = t + 1 \\ x = \ln(t + 1) \\ x \rightarrow 0, t \rightarrow 0 \end{array} \right| = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{t}{\ln(1 + t)} = \frac{1}{\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\ln(1+t)}{t}} \stackrel{\text{сл. 4.2}}{=} \frac{1}{1} = 1$$

■

### Следствие 3.5.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^x - 1}{x} = \ln a$$

Доказательство.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^x - 1}{x} = \left| \begin{array}{l} a^x - 1 = t \\ a^x = t + 1 \\ x = \log_a(1 + t) \\ x \rightarrow 0, t \rightarrow 0 \end{array} \right| = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{t}{\log_a(1 + t)} = \frac{1}{\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\log_a(t + 1)}{t}} \stackrel{\text{сл. 4.3}}{=} \frac{1}{\frac{1}{\ln a}} = \ln a$$

■

## 7.4 Сравнение бесконечно малых и бесконечно больших функций

Пусть даны функции  $\alpha(x)$  и  $\beta(x)$ , которые являются б.м.ф. при  $x \rightarrow x_0$ .

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)}$$

Рассмотрим варианты:

- $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = 0$

$\alpha(x)$  имеет более высокий порядок малости, чем  $\beta(x)$ .

$$\boxed{\alpha(x) = o(\beta(x)), \text{ при } x \rightarrow x_0}$$

- $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = \infty$

$\beta(x)$  имеет более высокий порядок малости, чем  $\alpha(x)$ .

$$\boxed{\beta(x) = o(\alpha(x)), \text{ при } x \rightarrow x_0}$$

- $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = 1$

$\alpha(x)$  и  $\beta(x)$  - эквивалентны.

$$\boxed{\alpha(x) \sim \beta(x), \text{ при } x \rightarrow x_0}$$

- $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = \text{const}$

$\alpha(x)$  и  $\beta(x)$  - одного порядка малости.

$$\boxed{\begin{array}{l} \alpha(x) = O(\beta(x)) \\ \beta(x) = O(\alpha(x)) \end{array} \quad \text{при } x \rightarrow x_0}$$

- $\nexists \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)}$

$\alpha(x)$  и  $\beta(x)$  - несравнимы.

**Определение 1.** Две б.м.ф.  $\alpha(x)$  и  $\beta(x)$  называются функциями **одного порядка малости**, если:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = \text{const} \neq 0$$

**Определение 2.** Две б.м.ф.  $\alpha(x)$  и  $\beta(x)$  называются **несравнимыми**, если:

$$\nexists \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)}$$

**Определение 3.** Две б.м.ф.  $\alpha(x)$  и  $\beta(x)$  называются **эквивалентными**, если:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = 1$$

**Определение 4.** Если:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = 0$$

где  $\alpha(x)$  и  $\beta(x)$  – б.м.ф. при  $x \rightarrow x_0$ , то говорят, что функция  $\alpha(x)$  имеет **более высокий порядок малости**, чем  $\beta(x)$ .

**Определение 5.** Б.м.ф.  $\alpha(x)$  имеет **порядок малости  $k$**  относительно функции б.м.ф.  $\beta(x)$ , если:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\alpha(x)}{[\beta(x)]^k} = \text{const} \neq 0$$

где  $k$  – порядок малости.

## 7.6 Свойства эквивалентных бесконечно малых функций

### Теорема 1.

Если  $\alpha(x) \sim \beta(x)$ , а  $\beta(x) \sim \gamma(x)$ , при  $x \rightarrow x_0$ , то  $\alpha(x) \sim \gamma(x)$  при  $x \rightarrow x_0$ .

**Доказательство.**

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\alpha(x)}{\gamma(x)} &= \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\alpha(x) \cdot \beta(x)}{\gamma(x) \cdot \beta(x)} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} \cdot \frac{\beta(x)}{\gamma(x)} = 1 \cdot 1 = 1 \\ &\Downarrow \\ \alpha(x) &\sim \gamma(x), \text{ при } x \rightarrow x_0 \end{aligned}$$

■

**Теорема 2** (Необходимое и достаточное условие эквивалентных бесконечно малых функций).

Две функции  $\alpha(x)$  и  $\beta(x)$  эквивалентны тогда и только тогда, когда их разность имеет более высокий порядок малости по сравнению с каждой из них.

$$\alpha(x), \beta(x) - \text{б.м.ф при } x \rightarrow x_0$$
$$\alpha(x) \sim \beta(x) \iff \begin{matrix} \alpha(x) - \beta(x) = o(\alpha(x)) \\ \alpha(x) - \beta(x) = o(\beta(x)) \end{matrix} \text{ при } x \rightarrow x_0$$

**Доказательство.**

*Необходимость.*

Дано:

$$\alpha(x), \beta(x) - \text{б.м.ф при } x \rightarrow x_0$$

Доказать:

$$\alpha(x) - \beta(x) = o(\alpha(x)), \text{ при } x \rightarrow x_0$$

Доказательство:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\alpha(x) - \beta(x)}{\alpha(x)} = \lim_{x \rightarrow x_0} \left( 1 - \frac{\beta(x)}{\alpha(x)} \right) = 1 - \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\beta(x)}{\alpha(x)} = 1 - \frac{1}{1} = 0$$

■

**Доказательство.**

*Достаточность.*

Дано:

$$\alpha(x) - \beta(x) = o(\beta(x)), \text{ при } x \rightarrow x_0$$

Доказать:

$$\alpha(x) \sim \beta(x), \text{ при } x \rightarrow x_0$$

Доказательство:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\alpha(x) - \beta(x)}{\beta(x)} = \lim_{x \rightarrow x_0} \left( \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} - 1 \right) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} - 1 = 0 \implies$$
$$\implies \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = 1 \implies \alpha(x) \sim \beta(x), \text{ при } x \rightarrow x_0$$

■

**Теорема 3** (*О сумме бесконечно малых разного порядка*).

Сумма бесконечно малых функций разных порядков малости эквивалентна слагаемому низшего порядка малости.

$$\left. \begin{array}{l} \alpha(x), \beta(x) - \text{б.м.ф. при } x \rightarrow x_0 \\ \alpha(x) = o(\beta(x)), \text{ при } x \rightarrow x_0 \end{array} \right\} \Rightarrow \alpha(x) + \beta(x) \sim \beta(x), \text{ при } x \rightarrow x_0$$

**Доказательство.**

Рассмотрим предел:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\alpha(x) + \beta(x)}{\beta(x)} = \lim_{x \rightarrow x_0} \left( \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} + 1 \right) = \lim_{x \rightarrow x_0} \left( \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} \right) + 1 = 0 + 1 = 1$$

■

**Следствие 3.1.** Сумма б.б.ф. разного порядка роста эквивалентна слагаемому высшего порядка роста.

**Теорема 4** (*О замене функции на эквивалентную под знаком предела*).

Предел отношения двух б.м.ф. (б.б.ф) не изменится, если заменить эти функции на эквивалентные.

$$\left. \begin{array}{l} \alpha(x), \beta(x) - \text{б.м.ф. при } x \rightarrow x_0 \\ \alpha(x) \sim \alpha_0(x) \\ \beta(x) \sim \beta_0(x) \end{array} \right\} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = \frac{\alpha_0(x)}{\beta_0(x)}$$

**Доказательство.**

Рассмотрим предел:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} &= \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\alpha(x) \cdot \alpha_0(x) \cdot \beta_0(x)}{\beta(x) \cdot \alpha_0(x) \cdot \beta_0(x)} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\alpha(x)}{\alpha_0(x)} \cdot \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\beta_0(x)}{\beta(x)} \cdot \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\alpha_0(x)}{\beta_0(x)} = \\ &= 1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} \end{aligned}$$

■

Таблица 1: Таблица эквивалентных б.м.ф.

1. $\sin x \sim x$ при $x \rightarrow 0$ ;	6. $e^x - 1 \sim x$ ( $x \rightarrow 0$ );
2. $\operatorname{tg} x \sim x$ ( $x \rightarrow 0$ );	7. $a^x - 1 \sim x \cdot \ln a$ ( $x \rightarrow 0$ );
3. $\arcsin x \sim x$ ( $x \rightarrow 0$ );	8. $\ln(1+x) \sim x$ ( $x \rightarrow 0$ );
4. $\operatorname{arctg} x \sim x$ ( $x \rightarrow 0$ );	9. $\log_a(1+x) \sim x \cdot \log_a e$ ( $x \rightarrow 0$ );
5. $1 - \cos x \sim \frac{x^2}{2}$ ( $x \rightarrow 0$ );	10. $(1+x)^k - 1 \sim k \cdot x$ , $k > 0$ ( $x \rightarrow 0$ );
11. $a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^2 \sim a_nx^2$ ( $x \rightarrow \infty$ )	
12. $a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n \sim a_1x$ ( $x \rightarrow 0$ )	

## 8 Непрерывность функции. Точки разрыва

**Определение 1.** Функция  $f(x)$ , определённая в некоторой окрестности точки  $x_0$ , называется **непрерывной** в этой точке если:

$$\exists \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$$

**Примечание.** Множество непрерывных функций в точке  $x_0$  обозначается  $C(x_0)$

$$f(x) \in C(x_0) \iff \text{функция непрерывна в точке } x_0$$

**Пример.**

$$\lim_{x \rightarrow 0} \sin(x) = \sin(0) = 0 \iff \sin(x) \in C(0)$$

**Пример.**

$$\operatorname{sgn} x = \begin{cases} 1, & x > 0 \\ 0, & x = 0 \\ -1, & x < 0 \end{cases} \implies \operatorname{sgn} \notin C(0)$$

**Определение 2.** Функция  $y = f(x)$ , определённая в некоторой окрестности точки  $x_0$ , называется **непрерывной** в этой точке, если в достаточно малой окрестности точки  $x_0$  значение функции близко к  $f(x_0)$ .

$$\begin{aligned} y = f(x) \in C(x_0) \\ \Updownarrow \\ (\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta(\varepsilon) > 0)(\forall x \in \dot{S}(x_0, \delta) \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon) \end{aligned}$$

**Определение 3.** Функция  $y = f(x)$  в некоторой окрестности точки  $x_0$  называется **непрерывной** в этой точке, если выполняются условия:

1.  $\exists \lim_{x \rightarrow x_0+} f(x)$
2.  $\exists \lim_{x \rightarrow x_0-} f(x)$
3.  $\lim_{x \rightarrow x_0+} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0-} f(x) = f(x)$

**Определение 4.** Пусть  $y = f(x)$  определена в некоторой точке в окрестности  $x_0$ . Выберем произвольный  $x$  в этой окрестности. Тогда:

$\Delta x = x - x_0$  — **приращение аргумента**

$\Delta y = f(x) - f(x_0)$  — соответствующее **приращение функции**



**Определение 5.** Функция  $y = f(x)$  называется **непрерывной** в точке  $x_0$ , если бесконечно малому приращению аргумента соответствует бесконечно малое приращение функции.

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \Delta y = 0$$

## 8.1 Односторонняя непрерывность

**Определение 6.** Функция  $y = f(x)$  определённая в правосторонней окрестности точки  $x_0$  (математическим языком —  $[x_0, x_0 + \delta)$ ) называется **непрерывной справа** в этой точке, если:

$$\exists \lim_{x \rightarrow x_0+} f(x) = f(x_0)$$

**Определение 7.** Функция  $y = f(x)$  определённая в левосторонней окрестности точки  $x_0$  (математическим языком —  $(x_0 - \delta, x_0]$ ) называется **непрерывной слева** в этой точке, если:

$$\exists \lim_{x \rightarrow x_0-} f(x) = f(x_0)$$

### Теорема 1.

Для того, чтобы функция  $y = f(x)$  была непрерывна в точке  $x_0$  необходимо и достаточно, чтобы она была непрерывна в этой точке справа и слева.

**Определение 8.** Функция  $y = f(x)$  называется **непрерывной на интервале**  $(a, b)$ , если она непрерывна в каждой точке этого интервала.

**Определение 9.** Функция  $y = f(x)$  называется **непрерывной на отрезке**  $[a, b]$ , если она:

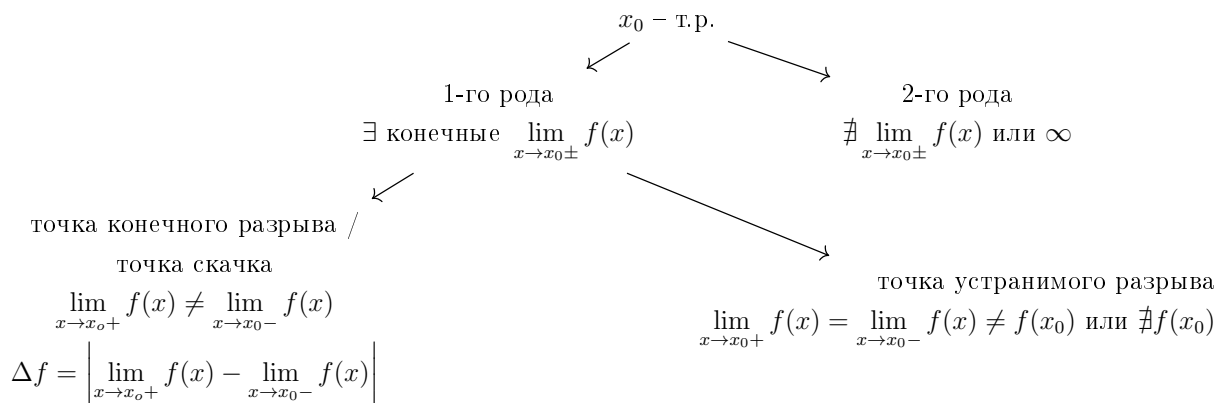
1. Непрерывна на интервале  $(a, b)$
2. Непрерывна в точке  $a$  справа
3. Непрерывна в точке  $b$  слева

### Примечание.

- $C(a, b)$  — множество функций, непрерывных на интервале.
- $C[a, b]$  — множество функций, непрерывных на отрезке.
- $C(X)$  — множество функций, непрерывных на промежутке  $X$ .

## 8.2 Классификация точек разрыва

**Определение 10.** Пусть функция  $y = f(x)$  определена в некоторой проколотой окрестности точки  $x_0$ , непрерывна в любой точке этой окрестности за исключением самой точки  $x_0$ . Тогда точка  $x_0$  называется **точкой разрыва функции**  $y = f(x)$ .



**Определение 11.** Если точка  $x_0$  – точка разрыва функции  $y = f(x)$  и существуют конечные пределы  $\lim_{x \rightarrow x_0+} f(x)$  и  $\lim_{x \rightarrow x_0-} f(x)$ , то  $x_0$  называют **точкой I-го рода**.

**Определение 12.** Если точка  $x_0$  – точка разрыва функции  $y = f(x)$  и **не** существуют конечные пределы  $\lim_{x \rightarrow x_0+} f(x)$  и  $\lim_{x \rightarrow x_0-} f(x)$  или  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \infty$ , то  $x_0$  называется **точкой разрыва II-го рода**.

**Определение 13.** Если точка  $x_0$  – точка разрыва первого рода функции  $y = f(x)$ , и предел  $\lim_{x \rightarrow x_0+} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow x_0-} f(x)$ , то  $x_0$  называется **точкой конечного разрыва** или **точкой скачка**.

**Определение 14.** Если точка  $x_0$  – точка разрыва первого рода функции  $y = f(x)$ , и предел  $\lim_{x \rightarrow x_0+} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0-} f(x)$ , но  $\neq f(x_0)$ , то точка  $x_0$  называется **точкой устранимого разрыва**.

## Примеры

Пример.

$$y = \frac{|x-1|}{x-1}$$

$$D_f = \mathbb{R} \setminus \{1\}$$

$x = 1$  - точка разрыва

$$\lim_{x \rightarrow 1+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1+} \frac{|x-1|}{x-1} = \frac{x-1}{x-1} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 1-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1-} \frac{|x-1|}{x-1} = \frac{1-x}{x-1} = -1$$

$$\lim_{x \rightarrow 1+} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow 1-} f(x)$$



$x = 1$  — т.р. I рода, точка скачка

$$\Delta f = \left| \lim_{x \rightarrow 1+} f(x) - \lim_{x \rightarrow 1-} f(x) \right| = |1 - (-1)| = 2$$

Пример.

$$y = \frac{\sin(x)}{x}$$

$$D_f = \mathbb{R} \setminus \{0\}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0+} \frac{\sin(x)}{x} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0-} \frac{\sin(x)}{x} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0-} f(x)$$



$x = 0$  — т.р. I рода, устранимая точка разрыва

$$g(x) = \begin{cases} \frac{\sin(x)}{x}, & x \neq 0 \\ 1, & x = 0 \end{cases}$$

$$f(x) \notin C(0)$$

$$g(x) \in C(0)$$

Пример.

$$\begin{aligned}y &= e^{\frac{1}{x}} \\D_f &= \mathbb{R} \setminus \{0\} \\ \lim_{x \rightarrow 0+} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 0+} e^{\frac{1}{x}} = e^{+\infty} = \infty \\ \lim_{x \rightarrow 0-} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 0-} e^{\frac{1}{x}} = e^{-\infty} = 0 \\ \lim_{x \rightarrow 0+} f(x) &= \infty \\ &\Downarrow \\ x = 0 &- \text{ т.р. II рода}\end{aligned}$$

### 8.3 Свойства непрерывных функций в точке

**Теорема 1.**

Пусть функции:

$$\left. \begin{aligned}y &= f(x) \\ y &= g(x)\end{aligned} \right\} \in C(x_0)$$

Тогда:

$$\begin{aligned}f(x) + g(x) &\in C(x_0) \\ (f \cdot g)(x) &\in C(x_0)\end{aligned}$$

**Доказательство.**

По определению непрерывной функции:

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) &= f(x_0) \\ \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) &= g(x_0)\end{aligned}$$

Рассмотрим:

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) + g(x)) &= \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) + \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = f(x_0) + g(x_0) \\ &\Downarrow \\ f(x) + g(x) &\in C(x_0)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow x_0} (f \cdot g)(x) &= \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \cdot g(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \cdot \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = f(x_0) \cdot g(x_0) \\ &\Downarrow \\ (f \cdot g)(x) &\in C(x_0) \\ \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{g(x)} &= \frac{\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)}{\lim_{x \rightarrow x_0} g(x)}\end{aligned}$$

■

**Теорема 2.**

Пусть функция  $g(y)$  непрерывна в точке  $y_0$ ,  $y_0 = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ .

Тогда  $\lim_{x \rightarrow x_0} g(f(x)) = g\left(\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)\right)$

**Доказательство.**

$$\left. \begin{array}{l} \text{Так как } g(y) \in C(y_0), \text{ то } \lim_{x \rightarrow x_0} g(y) = g(y_0) \\ \text{По условию } \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = y_0 \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$(g(y_0) \rightarrow C, y_0 \rightarrow a)$$

$$\Rightarrow \text{ по теореме о пределе сложной функции } \exists \lim_{x \rightarrow x_0} g(f(x)) = g(y_0)$$

Подставляем в последнее равенство:  $y_0 = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) : \lim_{x \rightarrow x_0} g(f(x)) = g\left(\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)\right)$

■

**Теорема 3 (О непрерывности сложной функции).**

Пусть функция  $f(x)$  непрерывна в точке  $x_0$ , а  $g(y)$  в точке  $y_0$ , причём  $y_0 = f(x_0)$ .

Тогда сложная функция  $F(x) = g(f(x))$  непрерывна в точке  $x_0$

**Доказательство.**

Так как  $y = f(x) \in C(x_0) \Rightarrow \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$

Так как  $g(y) \in C(y_0) \Rightarrow \lim_{y \rightarrow y_0} g(y) = g(y_0)$ ,  $y_0 = f(x_0)$

Рассмотрим  $\lim_{x \rightarrow x_0} F(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} g(f(x)) \stackrel{\text{Т.2}}{=} g\left(\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)\right) \stackrel{\text{непр. } f}{=} g(f(x_0)) = F(x_0) \Rightarrow$   
 $\Rightarrow g(f(x_0)) \in C(x_0)$

■

**Теорема 4 (О сохранении знака непрерывной функции в окрестности точки).**

Если функция  $y = f(x)$  непрерывна в точке  $x_0$  и  $f(x_0) \neq 0$ , то  $\exists S(x_0)$ , в которой знак значений функции совпадает со знаком  $f(x_0)$

**Доказательство.**

Так как  $y = f(x)$  непрерывна в точке  $x_0$ , то  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$

По теореме о сохранении знака своего предела  $\Rightarrow \exists S(x_0)$ , в которой знак значений функции совпадает со знаком  $f(x_0)$ .

$(f(x_0) \rightarrow a)$

■

**Примечание.** На экзамене требуется доказать также и теорему о сохранении функции знака своего предела!

## 8.4 Непрерывность элементарных функций

### Теорема 1.

Основные элементарные функции непрерывны в области определения

**Доказательство.**

Докажем её для функций  $y = \sin x$  и  $y = \cos x$ ,  $Dy = \mathbb{R}$ .

$$x_0 = 0, \lim_{x \rightarrow 0} \sin x = \sin 0 = 0 \Rightarrow y = \sin x \in C(0)$$

$$x = x_0 + \Delta x, x \in D_f = \mathbb{R}$$

Соответствующее приращение функции

$$\begin{aligned} \Delta y &= y(x) - y(y_0) = y(x_0 + \Delta x) - y(x_0) = \\ &= \sin(x_0 + \Delta x) - \sin x_0 = 2 \sin \frac{x_0 + \Delta x - x_0}{2} \cos \frac{x_0 + \Delta x + x_0}{2} = \\ &= 2 \sin \frac{\Delta x}{2} \cos \left( x_0 + \frac{\Delta x}{2} \right) \end{aligned}$$

По теореме о произведении б.м.ф на ограниченную:

$$\begin{aligned} \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \Delta y &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} 2 \sin \frac{\Delta x}{2} \cos \left( x_0 + \frac{\Delta x}{2} \right) = 0 \\ \sin \frac{\Delta x}{2} &\text{ б.м.ф при } \Delta x \rightarrow 0 - ? \\ \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \sin \frac{\Delta x}{2} &= \sin 0 = 0 \quad \sin \frac{\Delta x}{2} \text{ б.м.ф при } \Delta x \rightarrow 0 \\ \cos \left( x_0 + \frac{\Delta x}{2} \right) &- \text{огр. функция} - ? \\ \left| \cos \left( x_0 + \frac{\Delta x}{2} \right) \right| &\leq 1 - \text{огр. функция} \end{aligned}$$

Т.к.  $x_0$  – произвольная точка из области определения, то  $y = \sin x$  непрерывна на всей области определения ■

**Замечание.** Эта теорема доказывается для каждой из элементарных функций отдельно.

### Теорема 2.

Элементарные функции непрерывны в области определения

**Доказательство.**

Доказательство данной теоремы следует из определения элементарных функций (это функции, полученные из основных элементарных функций с помощью операций «+», «−», «×» на число, операций композиции) предыдущей теоремы, теоремы об алгебраических свойствах непрерывных функций и теоремы о композиции непрерывных функций. ■

## 8.5 Свойства функций непрерывных на промежутке

**Теорема 1** (об ограниченности непрерывной функции (*Первая теорема Вейерштрасса*)).

Если функция  $y = f(x)$  непрерывна на  $[a, b]$ , то она на этом отрезке ограничена.

Кратко:

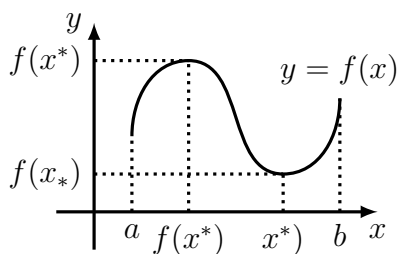
$$(f(x) \in C[a, b]) \Rightarrow (\exists M \in \mathbb{R}, M > 0)(\forall x \in [a, b]: |f(x)| \leq M)$$

**Теорема 2** (о достижении непрерывной функции наибольшего и наименьшего значений (*Вторая теорема Вейерштрасса*)).

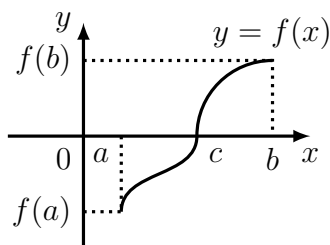
Если функция  $y = f(x)$  непрерывна на  $[a, b]$ , то она достигает на этом отрезке своего наибольшего и наименьшего значений.

Кратко:

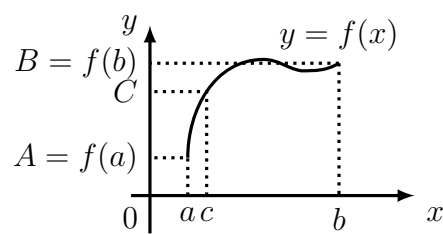
$$(f(x) \in C[a, b]) \Rightarrow (\exists x_*, x^* \in [a, b]: (\forall x \in [a, b] \Rightarrow m = f(x_*) \leq f(x) \leq f(x^*) = M))$$



(а) Теорема №2



(б) Теорема №3



(с) Теорема №4

**Теорема 3** (о существовании нуля непрерывной функции (*Первая теорема Больцана-Коши*)).

Если функция  $y = f(x)$  непрерывна на отрезке  $[a, b]$  и на концах отрезка принимает значения разных знаков, то  $\exists c \in (a, b): f(c) = 0$

Кратко:

$$(f(x) \in C[a, b]) \wedge (f(a) \cdot f(b) < 0) \Rightarrow (\exists c \in (a, b)): f(c) = 0$$

**Теорема 4** (о промежуточном значении непрерывной функции (*Вторая теорема Больцана-Коши*)).

Если функция  $y = f(x)$  непрерывна на  $[a, b]$  и принимает на границах отрезка различные значения ( $f(a) = A \neq f(b) = B$ ), то  $\forall C$ , лежащего между  $A$  и  $B$ ,  $\exists c \in (a, b), f(c) = C$

Кратко:

$$(f(x) \in C[a, b]) \wedge (f(a) = A \neq f(b) = B) \Rightarrow (\forall C \in (A, B) \exists c \in (a, b) f(c) = C)$$

**Теорема 5** (о существовании обратной к непрерывной функции).

Пусть  $y = f(x)$  непрерывна на интервале  $(a, b)$  и строго монотонна (возрастает/убывает) на этом интервале. Тогда в соответствующем  $(a, b)$  интервале значений функции существует обратная функция (обозначается  $x = f^{-1}(y)$ ), которая также строго монотонна и непрерывна.

## Модуль №2

### Дифференциальное исчисление функции одной переменной

## 9 Производная функции

### 9.1 Понятие производной

Рассмотрим функцию  $y = f(x)$ , определённую в некоторой окрестности точки  $x_0$ .

Пусть  $x$  – произвольная точка из  $S(x_0)$

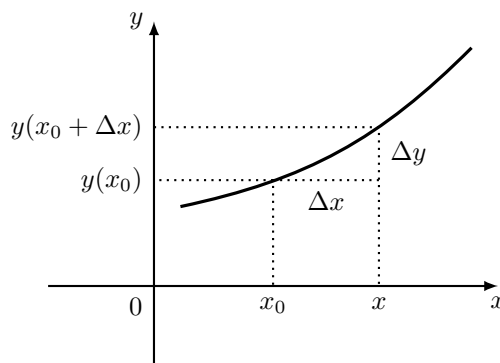
$\Delta x$  – **приращение аргумента**

$$x = x_0 + \Delta x$$

$$\Delta x = x - x_0$$

Соответствующее **приращение функции**:

$$\Delta y = y(x_0 + \Delta x) - y(x_0)$$



**Определение 1.** Производной функции  $y = f(x)$  в точке  $x_0$  называется предел отношения приращения функции к приращению аргумента при стремлении последнего к нулю.

$$y'(x_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} \quad (1)$$

**Определение 2.**

Если предел (1) конечен, то функция  $y = f(x)$  в точке  $x_0$  имеет **конечную производную**.

Если предел (1) бесконечен, то функция  $y = f(x)$  в точке  $x_0$  имеет **бесконечную производную**.

**Определение 3.** Дифференцирование — процесс нахождения производной.

### Примеры

**Пример.**  $y = e^x$ ,  $D_f = \mathbb{R}$

$$\forall x_0 \in D_f$$

$\Delta x$  – приращение аргумента

$$x = x_0 + \Delta x, \quad x \in D_f$$

Соответствующее приращение функции:

$$\Delta y = y(x_0 + \Delta x) - y(x_0) = e^{x_0 + \Delta x} - e^{x_0} = e^{x_0}(e^{\Delta x} - 1)$$

$$\begin{aligned} y'(x_0) &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{e^{x_0}(e^{\Delta x} - 1)}{\Delta x} = \left| \begin{array}{l} e^{\Delta x} - 1 \sim \Delta x \\ \Delta x \rightarrow 0 \end{array} \right| = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{e^{x_0} \cdot \Delta x}{\Delta x} = \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} e^{x_0} = e^{x_0} \end{aligned}$$

$$(e^x)' = e^x$$



**Пример.**  $y = \sin x$ ,  $D_f = \mathbb{R}$

$\forall x_0 \in D_f$

$\Delta x$  – приращение аргумента

$x = x_0 + \Delta x$ ,  $x \in D_f$

Соответствующее приращение функции:

$$\begin{aligned}\Delta y &= y(x_0 + \Delta x) - y(x_0) = \sin(x_0 + \Delta x) - \sin x_0 = \\ &= 2 \sin \frac{x_0 + \Delta x - x_0}{2} \cos \frac{x_0 + \Delta x + x_0}{2} = 2 \sin \frac{\Delta x}{2} \cos \left( x_0 + \frac{\Delta x}{2} \right)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}y'(x_0) &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{2 \sin \frac{\Delta x}{2} \cos \left( x_0 + \frac{\Delta x}{2} \right)}{\Delta x} = \left| \sin \frac{\Delta x}{2} \sim \frac{\Delta x}{2} \right|_{\Delta x \rightarrow 0} = \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{2 \cdot \frac{\Delta x}{2} \cos \left( x_0 + \frac{\Delta x}{2} \right)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \cos \left( x_0 + \frac{\Delta x}{2} \right) = \cos x_0\end{aligned}$$

$$(\sin x)' = \cos x$$

## 9.2 Односторонние производные

**Определение 4.** Производной функции  $y = f(x)$  в точке  $x_0$  справа(слева) или **правосторонней(левосторонней) производной** называется предел отношения приращения функции к приращению аргумента при стремлении к нулю справа(слева).

$$y'_+(x_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0+} \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

$$y'_-(x_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0-} \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

**Теорема 1** (*О существовании производной функции в точке*).

Функция  $y = f(x)$  в точке  $x_0$  имеет производную тогда и только тогда, когда она имеет производные и справа, и слева, и они равны между собой.

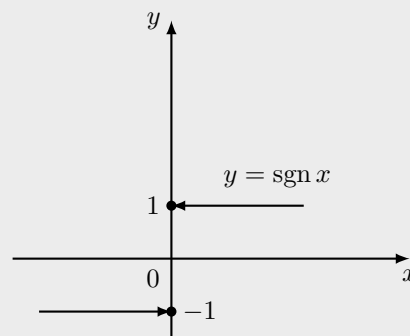
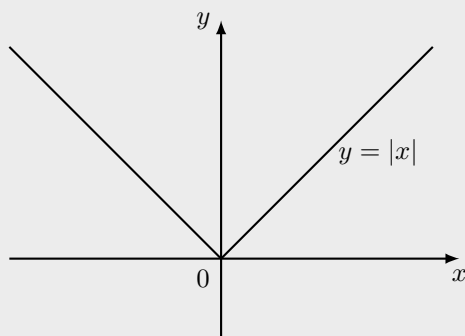
$$y'(x_0) = y'_+(x_0) = y'_-(x_0)$$

## Примеры

Пример.  $y = |x|$ ,  $x_0 = 0$

$$y = \begin{cases} x, & x > 0 \\ 0, & x = 0 \\ -x, & x < 0 \end{cases} \rightarrow y' = \begin{cases} 1, & x > 0 \\ 0, & x = 0 = \operatorname{sgn} x \\ -1, & x < 0 \end{cases}$$

$y'_+(0) = 1$   
 $y'_-(0) = -1$  } т.к. производные конечные, но различные,  
 то  $x_0 = 0$  называется **точкой излома**.



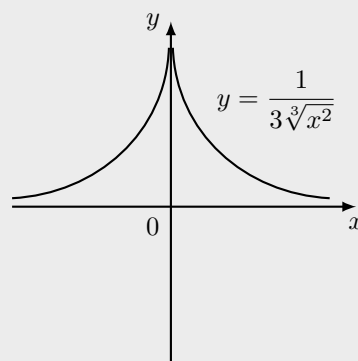
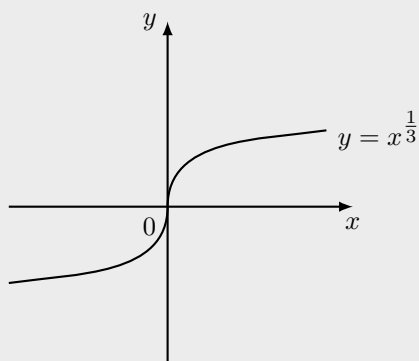
Геометрический смысл:  $\nexists$  касательной к графику функции в точке излома.

Пример.  $y = x^{\frac{1}{3}}$ ,  $x_0 = 0$

$$y' = \frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}} = \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$$

$y'_+(0) = \frac{1}{0+} = +\infty$   
 $y'_-(0) = \frac{1}{0+} = +\infty$  }  $\Rightarrow$  знаки бесконечностей совпадают,  
 поэтому  $x_0 = 0$  — **точка бесконечной производной**

$$y'(0) = y'_+(0) = y'_-(0) = +\infty$$

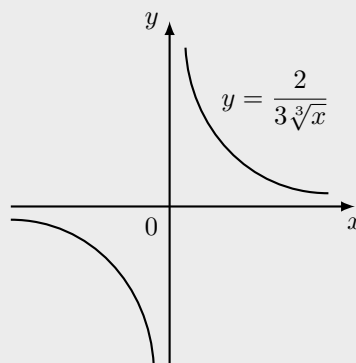
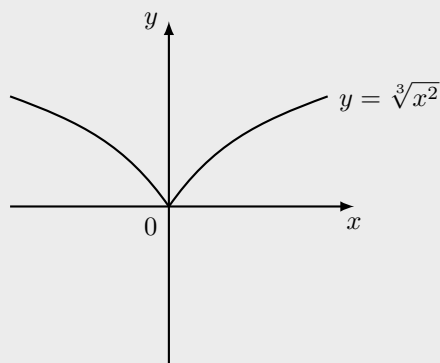


Геометрический смысл: В точке с бесконечной производной касательная к графику функции параллельна оси  $Oy$  и имеет вид  $x = x_0$

Пример.  $y = \sqrt[3]{x^2}$ ,  $x_0 = 0$

$$y' = \left(x^{\frac{2}{3}}\right)' = \frac{2}{3}x^{-\frac{1}{3}} = \frac{2}{3\sqrt[3]{x}}$$

$$\left. \begin{aligned} y'_+(0) &= \frac{2}{3 \cdot 0+} = +\infty \\ y'_-(0) &= \frac{2}{3 \cdot 0-} = -\infty \end{aligned} \right\} \begin{aligned} &\text{знаки бесконечностей разные, поэтому} \\ &x_0 = 0 \text{ называется } \mathbf{\text{точкой возврата или заострения}} \end{aligned}$$



Геометрический смысл:  $\nexists$  касательной к функции в точке возврата/заострения.

### 9.3 Геометрический смысл производной. Уравнение касательной и нормали к графику функции

Пусть  $y = f(x)$  определена в  $S(x_0)$ .

$x_0$

$f(x_0) = y_0$

$M(x_0, y_0)$

$\Delta x$  – приращение аргумента

$x = x_0 + \Delta x$

$y(x_0 + \Delta x)$

$N(x_0 + \Delta x, y(x_0 + \Delta x))$

$MN$  – секущая

При  $\Delta x \rightarrow 0$  точка  $N$  движется вдоль графика функции  $y = f(x)$ , а секущая  $MN$  вращается вокруг графика.

В пределе:  $N = M$ , а секущая  $MN =$  касательная

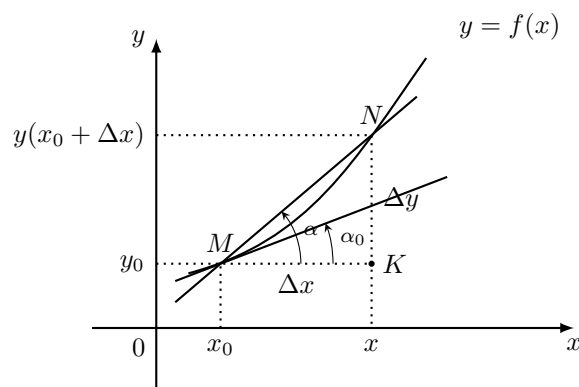


Рис. 3: Геометрический смысл производной

**Определение 5.** Если существует предельное положение секущей  $MN$ , когда точка  $N$ , перемещаясь вдоль графика функции, стремится к точке  $M$  — это положение секущей называется **касательной** к графику функции в точке  $M$ .

Рассмотрим  $\triangle MNK$  (Рис. 3):

$$\left. \begin{aligned} \operatorname{tg} \alpha &= \frac{\Delta y}{\Delta x} \\ \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \operatorname{tg} \alpha &= \operatorname{tg} \alpha_0 \\ \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} &= y'(x_0) \end{aligned} \right\} \Rightarrow \boxed{\operatorname{tg} \alpha_0 = y'(x_0)}$$

$\alpha$  – угол между секущей и положительным направлением оси  $Ox$

$\alpha_0$  – угол между касательной и положительным направлением оси  $Ox$

С другой стороны: прямая, проходящая через точку  $M(x_0, y_0)$  с заданным угловым коэффициентом  $k$  имеет вид:  $y - y_0 = k \cdot (x - x_0)$ , где  $k$  – тангенс угла наклона прямой к положительному направлению оси  $Ox$ .

$$\boxed{\operatorname{tg} \alpha_0 = y'(x_0) = k}$$

### 9.3.1 Уравнение касательной

Рассмотрим  $\forall P(x, y)$  на касательной к графику функции  $y = f(x)$  в точке  $M(x_0, y_0)$  (Рис. 4)

$$\triangle MPK: \operatorname{tg} \alpha_0 = \frac{PK}{MK}$$

$$\operatorname{tg} \alpha_0 = \frac{y - y_0}{x - x_0}$$

$$y'(x_0) = \operatorname{tg} \alpha_0$$

$$y'(x_0) = \frac{y - y_0}{x - x_0}$$

$\boxed{y - y_0 = y'(x_0)(x - x_0)}$  – уравнение касательной к графику функции  $y = f(x)$  в точке  $M(x_0, y_0)$

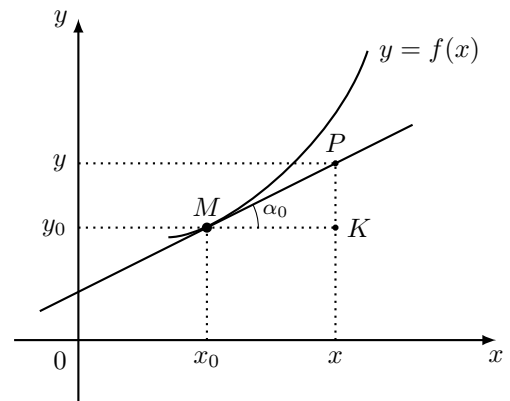


Рис. 4

### 9.3.2 Выводы

#### 1. Геометрический смысл производной

Производная функции  $y = f(x)$  в точке  $x_0$  равна тангенсу угла наклона касательной к положительному направлению оси  $Ox$  или угловому коэффициенту касательной.

$$\boxed{y'(x_0) = \operatorname{tg} \alpha_0 = k}$$

#### 2. Механический (физический) смысл производной

Производная функции  $S = f(t)$  в точке  $t_0$  равна мгновенной скорости в момент времени  $t_0$ .

$$\boxed{v(t_0) = S'(t)}$$

### 9.3.3 Уравнение нормали

**Определение 6.** Нормалью к графику функции  $y = f(x)$  в точке  $x_0$  называется прямая, перпендикулярная касательной к графику функции в этой точке.

$$\begin{aligned} l_1: y_1 &= k_1 x + b_1 \\ l_2: y_2 &= k_2 x + b_2 \end{aligned} \quad \boxed{l_1 \perp l_2 \Leftrightarrow k_1 \cdot k_2 = -1}$$

$y - y_0 = y'(x_0) \cdot (x - x_0)$  – уравнение касательной к графику функции  $y = f(x)$

$$k_1 = y'(x_0) \Rightarrow k_2 = -\frac{1}{y'(x_0)} \Rightarrow \boxed{y - y_0 = -\frac{1}{y'(x_0)}(x - x_0)}$$

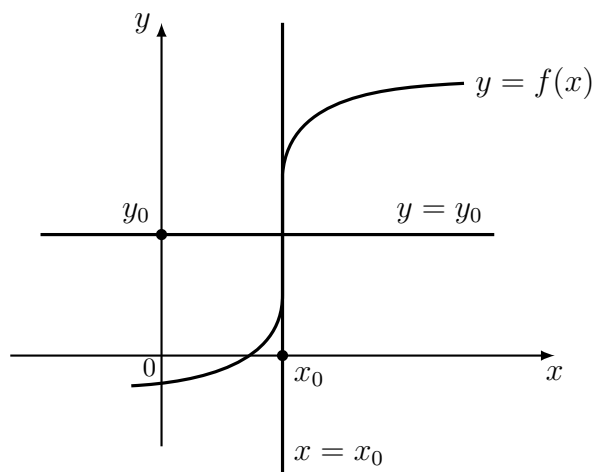
### 9.3.4 Замечание

**Замечание.** Касательная к графику функции существует не в любой точке (точка излома, точка заострения).

**Определение 7.** Кривая, имеющая касательную в любой точке рассматриваемого промежутка, называется **гладкой**.

**Следствие 1.1.** Если  $y'(x_0) = \infty$  (Рис. 5а), то касательная к графику функции  $y = f(x)$  в точке  $x_0$  параллельна  $Oy$  и имеет вид:  $x = x_0$  (нормаль:  $y = y_0$ ).

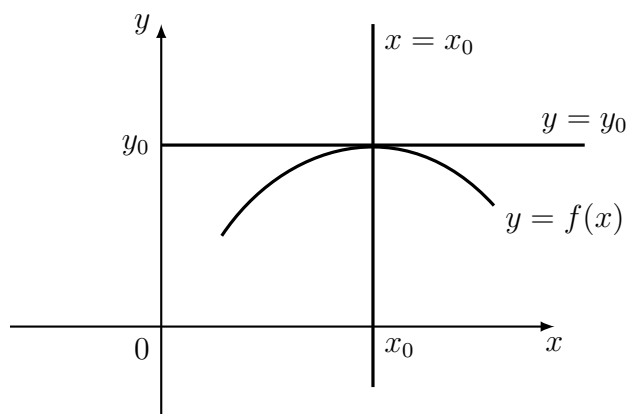
**Следствие 1.2.** Если  $y'(x_0) = 0$  (Рис. 5б), то касательная к графику функции  $y = f(x)$  в точке  $x_0$  параллельна  $Ox$  и имеет вид:  $y = y_0$  (нормаль:  $x = x_0$ ).



$x = x_0$  касательная

$y = y_0$  нормаль

(а) Следствие 1.1



$y = y_0$  касательная

$x = x_0$  нормаль

(б) Следствие 1.2

Рис. 5

### 9.3.5 Угол между двумя пересекающимися кривыми

**Определение 8.** Углом между двумя пересекающимися кривыми в точке с абсциссой  $x_0$  называется угол между касательными, проведёнными в этой точке.

$$\begin{array}{lll} y = f_1(x) & f_1 \cap f_2 = M_0(x_0, y_0) & y_1 = k_1x + b_1 - \text{касательная к } f_1 \\ y = f_2(x) & & y_2 = k_2x + b_2 - \text{касательная к } f_2 \\ \varphi - \text{угол между } f_1 \text{ и } f_2 & & \end{array}$$

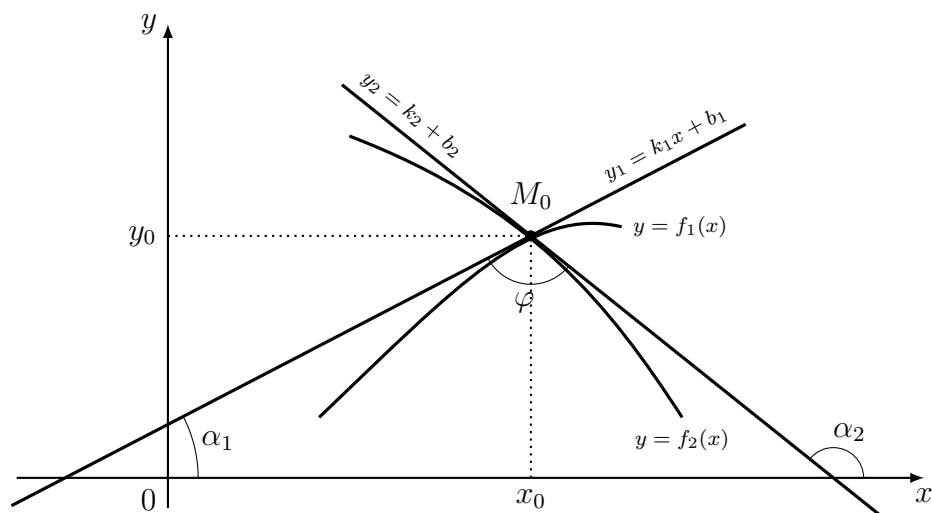


Рис. 6

$$\begin{array}{ll} \operatorname{tg} \alpha_1 = k_1 = f'_1(x_0) & \varphi = \alpha_2 - \alpha_1 \\ \operatorname{tg} \alpha_2 = k_2 = f'_2(x_0) & \operatorname{tg} \varphi = \operatorname{tg}(\alpha_2 - \alpha_1) = \frac{\operatorname{tg} \alpha_2 - \operatorname{tg} \alpha_1}{1 + \operatorname{tg} \alpha_2 \cdot \operatorname{tg} \alpha_1} = \frac{k_2 - k_1}{1 + k_2 \cdot k_1} = \frac{y'_2(x_0) - y'_1(x_0)}{1 + y'_2(x_0) \cdot y'_1(x_0)} \end{array}$$

$$\boxed{\operatorname{tg} \varphi = \left| \frac{f'_2(x_0) - f'_1(x_0)}{1 + f'_1(x_0) \cdot f'_2(x_0)} \right|}$$

## 9.4 Дифференцируемость функции в точке

**Определение 1.** Функция  $y = f(x)$  называется **дифференцируемой в точке**  $x_0$ , если существует константа  $A$  такая, что приращение функции в этой точке представимо в виде:

$$\Delta y = A \cdot \Delta x + \alpha(\Delta x) \cdot \Delta x$$

где  $\alpha(\Delta x)$  – б.м.ф. при  $\Delta x \rightarrow 0$

**Теорема 1** (Необходимое и достаточное условие дифференцируемости функции). Функция  $y = f(x)$  дифференцируема в точке  $x_0$  тогда и только тогда, когда она имеет в этой точке конечную производную.

**Доказательство** (Необходимость).

Дано:  $y = f(x)$  дифференцируема в точке  $x_0$

Доказать:  $\exists y'(x_0)$  – конечное число

Т.к.  $y = f(x)$  дифференцируема в точке  $x_0$ , то  $\Delta y = A \cdot \Delta x + \alpha(\Delta x) \cdot \Delta x$ , где  $\alpha(\Delta x)$  – б.м.ф. при  $\Delta x \rightarrow 0$

Вычислим предел:

$$\begin{aligned} \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{A \cdot \Delta x + \alpha(\Delta x) \cdot \Delta x}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} (A + \alpha(\Delta x)) = A + \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \alpha(\Delta x) = \\ &= A + 0 = A \end{aligned}$$

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = y'(x_0) \text{ – по определению производной в точке}$$

$$y'(x_0) = A = \text{const} \Rightarrow \exists y'(x_0) \text{ – конечное число}$$

■

**Доказательство** (Достаточность).

Дано:  $\exists y'(x_0)$  – конечное число

Доказать:  $y = f(x)$  дифференцируема в точке  $x_0$

$$\text{Т.к. } \exists y'(x_0), \text{ то по определению производной: } y'(x_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

$$\text{По теореме о связи функции, её предела и б.м.ф. (с.18, Т.3)} \Rightarrow \frac{\Delta y}{\Delta x} = y'(x_0) + \alpha(\Delta x),$$

где  $\alpha(\Delta x)$  – б.м.ф. при  $\Delta x \rightarrow 0$

$$\Delta y = y'(x_0) \cdot \Delta x + \alpha(\Delta x) \cdot \Delta x, \text{ где } \underbrace{y'(x_0)}_A = \text{const} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y = f(x) \text{ дифференцируема в точке } x_0$$

■

**Следствие 1.1.** Функция, выражающая дифференцируемость функции  $y = f(x)$  в точке  $x_0$  примет вид:

$$\Delta y = y'(x_0) \cdot \Delta x + \alpha(\Delta x) \cdot \Delta x$$

где  $\alpha(\Delta x)$  – б.м.ф. при  $\Delta x \rightarrow 0$

**Теорема 2** (Связь дифференцируемости и непрерывности функции).

Если функция дифференцируема в точке  $x_0$ , то она в этой точке непрерывна.

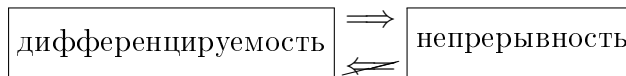
**Доказательство.**

Т.к.  $y = f(x)$  дифференцируема в точке  $x_0$ , то  $\Delta y = y'(x_0) \cdot \Delta x + \alpha(\Delta x) \cdot \Delta x$ , где  $y'(x_0) = \text{const}$ ,  $\alpha(\Delta x)$  – б.м.ф. при  $\Delta x \rightarrow 0$

Вычислим:

$$\begin{aligned}\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \Delta y &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} (y'(x_0) \cdot \Delta x + \alpha(\Delta x) \cdot \Delta x) = \\ &= y'(x_0) \cdot \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \Delta x + \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \alpha(\Delta x) \cdot \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \Delta x = y'(x_0) \cdot 0 + 0 \cdot 0 = 0\end{aligned}$$

По определению непрерывной функции  $y = f(x)$  непрерывна в точке  $x_0$  ■



**Пример.**  $y = |x|$ ,  $x_0 = 0$  является непрерывной, но не является дифференцируемой

## 9.5 Правила дифференцирования

**Теорема 3** (Арифметические операции).

Пусть функции  $u = u(x)$ ,  $v = v(x)$  дифференцируемы в точке  $x$ .

Тогда в этой точке дифференцируема их сумма/разность, произведение, частное (при условии  $v \neq 0$ ) и справедливы равенства:

1.  $(u \pm v)' = u' \pm v'$
2.  $(u \cdot v)' = u' \cdot v + v' \cdot u$
3.  $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u' \cdot v - v' \cdot u}{v^2}$

Распишем приращения каждой из функций:

$$\begin{cases} \Delta u = u(x + \Delta x) - u(x) \\ \Delta v = v(x + \Delta x) - v(x) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u(x + \Delta x) = \Delta u + u(x) \\ v(x + \Delta x) = \Delta v + v(x) \end{cases}$$

**Доказательство** (Производная произведения).

Пусть  $y = u \cdot v$ , тогда:

$$\begin{aligned}\Delta y &= y(x + \Delta x) - y(x) = u(x + \Delta x) \cdot v(x + \Delta x) - u(x) \cdot v(x) = \\ &= (\Delta u + u(x)) \cdot (\Delta v + v(x)) - u(x) \cdot v(x) = \\ &= \Delta u \cdot \Delta v + \Delta u \cdot v(x) + \Delta v \cdot u(x) + \cancel{u(x) \cdot v(x)} - \cancel{u(x) \cdot v(x)} = \\ &= \Delta u \cdot \Delta v + \Delta u \cdot v(x) + \Delta v \cdot u(x)\end{aligned}$$



Вычислим:

$$\begin{aligned}
 y'(x) &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta u \cdot \Delta v + \Delta u \cdot v(x) + \Delta v \cdot u(x)}{\Delta x} = \\
 &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left( \Delta u \frac{\Delta v}{\Delta x} + v(x) \frac{\Delta u}{\Delta x} + u(x) \frac{\Delta v}{\Delta x} \right) = \\
 &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \Delta u \cdot \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta v}{\Delta x} + v(x) \cdot \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta u}{\Delta x} + u(x) \cdot \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta v}{\Delta x} = \\
 &= 0 \cdot v'(x) + v(x) \cdot u'(x) + u(x) \cdot v'(x) = \boxed{v(x) \cdot u'(x) + u(x) \cdot v'(x)}
 \end{aligned}$$

Т.к. функции  $u = u(x)$ ,  $v = v(x)$  дифференцируемы в точке  $x$ , то по теореме о связи дифференцируемости и непрерывности функции (Т. 2)  $\Rightarrow u = u(x)$  и  $v = v(x)$

непрерывны в точке  $x \Rightarrow$  по определению непрерывной функции:  $\begin{cases} \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \Delta u = 0 \\ \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \Delta v = 0 \end{cases}$  ■

**Доказательство** (Производная частного).

Пусть  $y = \frac{u}{v}$ , тогда:

$$\begin{aligned}
 \Delta y &= y(x + \Delta x) - y(x) = \frac{u(x + \Delta x)}{v(x + \Delta x)} - \frac{u(x)}{v(x)} = \frac{u(x + \Delta x) \cdot v(x) - u(x) \cdot v(x + \Delta x)}{v(x + \Delta x) \cdot v(x)} = \\
 &= \left| \frac{u(x + \Delta x) = u(x) + \Delta u}{v(x + \Delta x) = v(x) + \Delta v} \right| = \frac{(u(x) + \Delta u) \cdot v(x) - u(x) \cdot (v(x) + \Delta v)}{(\Delta v + v(x)) \cdot v(x)} = \\
 &= \frac{\cancel{u(x) \cdot v(x)} + \Delta u \cdot v(x) - \cancel{u(x) \cdot v(x)} - u(x) \cdot \Delta v}{v^2(x) + v(x) \cdot \Delta v} = \frac{\Delta u \cdot v(x) - \Delta v \cdot u(x)}{v^2(x) + v(x) \cdot \Delta v}
 \end{aligned}$$

Вычислим предел:

$$\begin{aligned}
 y'(x) &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\frac{\Delta u \cdot v(x) - \Delta v \cdot u(x)}{v^2(x) + v(x) \cdot \Delta v}}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{v(x) \frac{\Delta u}{\Delta x} - u(x) \frac{\Delta v}{\Delta x}}{v^2(x) + v(x) \cdot \Delta v} = \\
 &= \frac{v(x) \cdot \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta u}{\Delta x} - u(x) \cdot \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta v}{\Delta x}}{v^2(x) - v(x) \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \Delta v} = \frac{v(x) \cdot u'(x) - u(x) \cdot v'(x)}{v^2(x) + v(x) \cdot 0} = \\
 &= \boxed{\frac{v(x) \cdot u'(x) - u(x) \cdot v'(x)}{v^2(x)}}
 \end{aligned}$$

Использовали:  $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta u}{\Delta x} = u'(x)$   $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta v}{\Delta x} = v'(x)$

Так как  $v(x)$  – дифференцируема, то по теореме о связи дифференцируемости и непрерывности функции (Т. 2)  $v(x)$  – непрерывна  $\Rightarrow$  по определению непрерывности  $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \Delta v = 0$

$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u' \cdot v - v' \cdot u}{v^2}$$

■

**Теорема 4.**

Производная от постоянной равна нулю

$$(C)' = 0, \quad C = \text{const}$$

**Следствие 4.1.** Константу можно выносить за знак производной.

$$(C \cdot f)' = C \cdot f', \quad C = \text{const}$$

**Следствие 4.2.** Производная функции  $y = \frac{1}{v(x)}$  имеет вид:

$$\left( \frac{1}{v(x)} \right)' = -\frac{1}{v^2} \cdot v'(x)$$

**Определение 2.** Функция  $y = f(x)$  называется **дифференцируемой на интервале**  $(a; b)$ , если она дифференцируема в каждой точке этого интервала.

## 9.6 Производная сложной функции

**Теорема 5** (*Производная сложной функции*).

Пусть функция  $u = g(x)$  дифференцируема в точке  $x = a$ , а функция  $y = f(u)$  дифференцируема в соответствующей точке  $b = g(a)$ .

Тогда сложная функция  $F(x) = f(g(x))$  дифференцируема в точке  $x = a$  и

$$F'(x) \Big|_{x=a} = (f(g(x)))' \Big|_{x=a} = f'_u(b) \cdot g'_x(a)$$

**Доказательство.**

Так как функция  $u = g(x)$  дифференцируема в точке  $x = a$ , то по определению дифференцируемости, то:

$$\Delta u = g'(a) \cdot \Delta x + \alpha(\Delta x) \cdot \Delta x \quad (1)$$

где  $\alpha(\Delta x)$  – б.м.ф. при  $\Delta x \rightarrow 0$

Так как функция  $y = f(u)$  дифференцируема в точке  $b$ , то по определению дифференцируемости, то:

$$\Delta y = f'(b) \cdot \Delta u + \beta(\Delta u) \cdot \Delta u \quad (2)$$

где  $\beta(\Delta u)$  – б.м.ф. при  $\Delta u \rightarrow 0$

Подставим (1) в (2):

$$\begin{aligned} \Delta y &= f'(b) \cdot (g'(a) \cdot \Delta x + \alpha(\Delta x) \cdot \Delta x) + \beta(\Delta u) \cdot (g'(a) \cdot \Delta x + \alpha(\Delta x) \cdot \Delta x) = \\ &= f'(b) \cdot g'(a) \cdot \Delta x + \Delta x \cdot (f'(b) \cdot \alpha(\Delta x) + g'(a) \cdot \beta(\Delta u) + \beta(\Delta u) \cdot \alpha(\Delta x))' = \Delta F \end{aligned}$$

Обозначим:

$$\gamma(\Delta x) = f'(b) \cdot \alpha(\Delta x) + g'(a) \cdot \beta(\Delta u) + \beta(\Delta u) \cdot \alpha(\Delta x)$$

В итоге получаем:

$$\Delta F = f'(b) \cdot g'(a) \cdot \Delta x + \gamma(\Delta x) \cdot \Delta x$$

$f'(b) \cdot \alpha(\Delta x)$  – б.м.ф. при  $\Delta x \rightarrow 0$  (как произведение постоянной на б.м.ф.)

Так как  $u = g(x)$  дифференцируема в точке  $x = a$ , то по теореме о связи дифференцируемости и непрерывности функции (**Т. 2**)  $\Rightarrow u = g(x)$  непрерывна в точке  $x = a \Rightarrow \Rightarrow$  по определению непрерывности  $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \Delta u = 0$  или при  $\Delta x \rightarrow 0$ ,  $\Delta u \rightarrow 0$

$$\left. \begin{aligned} g'(a) \cdot \beta(\Delta u) &\text{ – б.м.ф. при } \Delta x \rightarrow 0 \text{ (как произведение постоянной на б.м.ф.)} \\ \beta(\Delta u) \cdot \alpha(\Delta x) &\text{ – б.м.ф. при } \Delta x \rightarrow 0 \text{ (как произведение двух б.м.ф.)} \end{aligned} \right| \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \gamma(\Delta x) \text{ – б.м.ф. при } \Delta x \rightarrow 0 \text{ (как сумма конечного числа б.м.ф.)}$$

Вычислим предел:

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta F}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} (f'(b) \cdot g'(a) + \gamma(\Delta x)) = f'(b) \cdot g'(a) + 0 = f'(b) \cdot g'(a)$$

■

## 9.7 Производная обратной функции

**Теорема 6** (*Производная обратной функции*).

Пусть функция  $y = f(x)$  в точке  $x = a$  имеет конечную и отличную от нуля производную  $f'(a)$  и пусть для неё существует однозначная обратная функция  $x = g(y)$ , непрерывная в соответствующей точке  $b = f(a)$ . Тогда существует производная обратной функции и она равна

$$g'(b) = \frac{1}{f'(a)}$$

**Доказательство.**

Так как функция  $x = g(y)$  однозначно определена  $\Rightarrow$  при  $\Delta y \neq 0$ ,  $\Delta x \neq 0$

Так как функция  $x = g(y)$  непрерывна в точке  $b \Rightarrow \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \Delta x = 0$  или  $\Delta x \rightarrow 0$  при  $\Delta y \rightarrow 0$

$$g'(b) = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{\Delta x}{\Delta y} = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{1}{\frac{\Delta y}{\Delta x}} = \frac{1}{\lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}} = \frac{1}{\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}} = \frac{1}{f'(a)}$$

■

**Пример.**

$$\begin{array}{lll} y = \arcsin x & x = \sin y & y' = \frac{1}{x'} \\ y' = (\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} & x' = \cos y & \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \stackrel{?}{=} \frac{1}{\cos y} \end{array}$$

$$\cos^2 y + \sin^2 y = 1 \Rightarrow \cos^2 y = 1 - \sin^2 y \Rightarrow \cos y = \pm \sqrt{1 - \sin^2 y}$$

$$y = \arcsin x$$

$$D_f = [-1; 1] \quad E_f = \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right] \quad y \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right] \Rightarrow \cos y \geq 0$$

$$\cos y = \sqrt{1 - \sin^2 y}, \sin y = x \Rightarrow \cos y = \sqrt{1 - x^2}$$

$$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

## 9.8 Производная высших порядков

Пусть  $y = f(x)$  дифференцируема на  $(a; b)$ , тогда  $\forall x \in (a, b)$  существует производная  $y' = f'(x)$ .

Функция  $y'' = (y')' = f''(x)$  называется **производной второго порядка** или **второй производной**.

**Определение 1.** Производной  $n$ -го порядка или  $n$ -ой производной функции  $y = f(x)$  называется производная от  $(n - 1)$ -ой производной функции  $y = f(x)$

$$y^{(n)} = (y^{(n-1)})'$$

**Пример.**

$$y = e^{-kx}$$

$$y' = -ke^{-kx}$$

$$y'' = (-k)^2 \cdot e^{-kx}$$

$$y''' = (-k)^3 \cdot e^{-kx}$$

$$y^{(IV)} = (-k)^4 \cdot e^{-kx}$$

.....

$$y^{(n)} = (-1)^n \cdot k^n \cdot e^{-kx}, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

**Определение 2.**

- $C[a, b]$  – множество непрерывных функций на  $[a; b]$
- $C^1[a; b]$  – множество функций, непрерывных вместе со своей производной на  $[a; b]$  или непрерывно-дифференцируемых.

**Определение 3.** Производная порядка выше первого называется **производной высшего порядка**.

## 10 Дифференциал функции

### 10.1 Понятие дифференциала

Пусть функция  $y = f(x)$  определена в окрестности точки  $x_0$  и дифференцируема в точке  $x_0$ .

Тогда по определению дифференцируемой функции:

$$\Delta y = f'(x_0) \cdot \Delta x + \alpha(\Delta x) \cdot \Delta x \quad (1)$$

где  $\alpha(\Delta x)$  – б.м.ф. при  $\Delta x \rightarrow 0$

Если  $f'(x_0) \neq 0$ , то  $f'(x_0) \cdot \Delta x$  – имеет один порядок малости,  $\alpha(\Delta x) \cdot \Delta x$  – б.м.ф. более высокого порядка малости, чем  $f'(x_0) \cdot \Delta x$ .

Тогда по теореме о сумме б.м.ф. разного порядка малости (С.31, Т. 3)  $\Rightarrow$

$\Rightarrow \Delta y \sim f'(x_0) \cdot \Delta x$  при  $\Delta x \rightarrow 0$ .

По определению главной части  $\Rightarrow f'(x_0) \cdot \Delta x$  – главная часть равенства (1) приращения функции  $\Delta y$ .

**Определение 1.** Дифференциалом функции  $y = f(x)$  в точке  $x_0$  называется главная часть приращения функции  $\Delta y$  или первое слагаемое в равенстве (1).

$$1] dy = f'(x_0) \cdot \Delta x \quad (2)$$

#### Примечание.

1. Если  $f'(x_0) = 0$ , то  $dy = 0$ , но  $f'(x_0) \cdot \Delta x$  уже не является главной частью приращения функции  $\Delta y$ .

Пусть  $y = x$ , тогда по определению дифференциала  $\Rightarrow dy = (x)' \cdot \Delta x = 1 \cdot \Delta x$ .

С другой стороны:  $y = x \Rightarrow dx = \Delta x$

**Вывод:** дифференциал независимой переменной равен её приращению.

2. Подставим  $\Delta x = dx$  в (2):

$$dy = f'(x_0) dx \quad (3)$$

Если  $y = f(x)$  дифференцируема на интервале  $(a; b)$ , тогда  $\forall x \in (a; b)$ :

$$dy = f'(x) dx \quad (4)$$

$$f'(x) = \frac{dy}{dx} \quad (5)$$

**Вывод:** производная функции представима в виде отношения дифференциалов функции и независимой переменной.

## 10.2 Геометрический смысл дифференциала

Дифференциал функции  $y = f(x)$  в точке  $x_0$  равен приращению ординаты касательной к графику функции в этой точке.

$M_0(x_0, y_0)$

$\Delta x$  – приращение аргумента

$M(x, y)$

$MK = \Delta y$

$M_0K = \Delta x$

$PK = dy$

$\Delta y = f'(x_0) \cdot \Delta x + \alpha(\Delta x) \cdot \Delta x$ ,

где  $\alpha(\Delta x)$  – б.м.ф. при  $\Delta x \rightarrow 0$

$dy = f'(x_0) \cdot \Delta x$

$y - y_0 = f'(x_0)(x - x_0)$  – уравнение касательной

$y - y_0 = \Delta y$

$f'(x_0)(x - x_0) = f'(x_0) \cdot \Delta x = f'(x_0)dx = dy$

$dy = \Delta y$

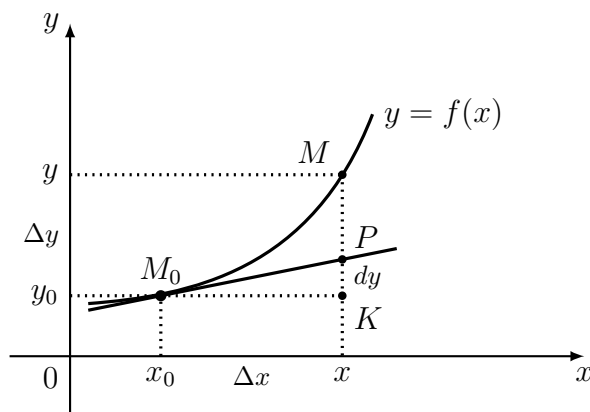


Рис. 7: Геометрический смысл дифференциала

## 10.3 Инвариантность формы первого дифференциала

Формула первого дифференциала:

$$dy = f'(x)dx$$

(3)

$x$  – неизвестная переменная

Докажем, что формула (3) верна и в том случае, когда  $x$  – функция другой переменной.

**Теорема 1** (Инвариантность формы первого дифференциала).

Форма записи первого дифференциала не зависит от того, является ли  $x$  независимой переменной или функцией другого аргумента.

**Доказательство.**

Пусть  $y = f(x)$ , тогда можно задать сложную функцию  $F(t) = y = f(\varphi(t))$

По определению дифференциала функции:

$$dy = F'(t)dt$$

(6)

По теореме о производной сложной функции (С.51, Т. 5):

$$F'(t) = f'(x) \cdot \varphi'(t)$$

(7)

Подставим (7) в (6):

$$dy = f'(x) \cdot \varphi(t)dt$$

(8)

По определению дифференцируемой функции:

$$dx = x\varphi'(t)dt$$

(9)

Подставим (9) в (8):

$$dy = f'(x)dx$$

■

## 10.4 Дифференциал высшего порядка

Пусть функция  $y = f(x)$  дифференцируема на  $(a; b)$ , тогда  $\forall x \in (a; b) \Rightarrow dy = f'(x)dx$   
Дифференциал – это функция:

$$dy = y'(x)$$

**Определение 2.** Вторым дифференциалом или дифференциалом второго порядка называется дифференциал от первого дифференциала.

$$d^2y = d(dy)$$

**Определение 3.**  $n$ -ым дифференциалом или дифференциалом  $n$ -го порядка называется дифференциал от дифференциала  $(n - 1)$ -го порядка.

$$d^n y = d(d^{n-1}y), \quad n = 2, 3, \dots$$

**Следствие 1.1.** Свойством инвариантности обладает только первый дифференциал.

## 11 Основные теоремы дифференциального исчисления

**Теорема 1 (Теорема Ферма (о нулях производной)).**

Пусть функция  $y = f(x)$  определена на промежутке  $X$  и во внутренней точке  $c$  этого промежутка достигает наибольшего или наименьшего значения. Если в этой точке существует производная  $f'(c)$ , то  $f'(c) = 0$ .

**Доказательство.**

Пусть функция  $y = f(x)$  в точке  $x = c$  принимает наибольшее значение на промежутке  $X \Rightarrow \forall x \in X \Rightarrow f(x) \leq f(c)$

Дадим приращение  $\Delta x$  в точке  $x = c$ , тогда  $f(c + \Delta x) \leq f(c)$ .

Пусть  $\exists f'(c) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{y(c + \Delta x) - y(c)}{\Delta x}$

Рассмотрим два случая:

1.  $\Delta x > 0, \Delta x \rightarrow 0+, x \rightarrow c+$

$$f'_+(c) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0+} \frac{y(c + \Delta x) - y(c)}{\Delta x} = \left( \frac{-}{+} \right) \leq 0$$

2.  $\Delta x < 0, \Delta x \rightarrow 0-, x \rightarrow c-$

$$f'_-(c) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0-} \frac{y(c + \Delta x) - y(c)}{\Delta x} = \left( \frac{-}{-} \right) \geq 0$$

По теореме о существовании производной функции в точке (С.41, Т. 1):

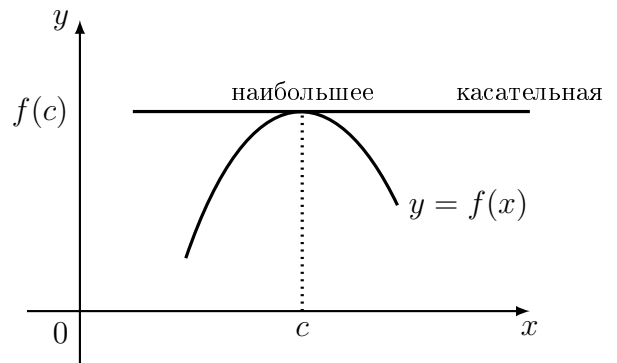
$$f'(c) = f'_+(c) = f'_-(c) = 0$$





## Геометрический смысл теоремы Ферма

Касательная к графику функции  $y = f(x)$  в точке  $(c, f(c))$  параллельна оси абсцисс.  
 $f(c)$  – наибольшее значение функции



### Теорема 2 (Теорема Ролля).

Пусть  $y = f(x)$

1. непрерывна на  $[a; b]$
2. дифференцируема на  $(a; b)$
3.  $f(a) = f(b)$

Тогда  $\exists c \in (a; b): f'(c) = 0$

**Доказательство.**

Так как функция  $y = f(x)$  непрерывна на  $[a; b]$ , то по теореме Вейерштрасса (С.39, Т.2) она достигает на этом отрезке своего наибольшего и наименьшего значений.

Возможны два случая:

1. Наибольшее и наименьшее значения достигаются на границе, то есть в точке  $a$  и в точке  $b$

$M = m$ , где  $m$  – наименьшее  
 $M$  – наибольшее  $\Rightarrow y = f(x) = \text{const}$  на  $[a; b] \Rightarrow$

$\Rightarrow \forall x \in (a; b): f'(x) = 0$

2. Наибольшее или наименьшее значение достигается во внутренней точке  $(a; b)$ .

Тогда для функции  $y = f(x)$  справедлива теорема Ферма (Т.1)  $\Rightarrow$

$\Rightarrow \exists c \in (a; b): f'(c) = 0$

■

**Следствие 2.1.** Если  $f(a) = f(b) = 0$ , то между двумя нулями функции существует хотя бы один нуль производной.

### Теорема 3 (Теорема Лагранжа).

Пусть функция  $y = f(x)$

1. непрерывна на  $[a; b]$
2. дифференцируема на  $(a; b)$

Тогда  $\exists c \in (a; b): \boxed{f(b) - f(a) = f'(c) \cdot (b - a)}$

**Доказательство.**

Рассмотрим вспомогательную функцию:  $F(x) = f(x) - f(a) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \cdot (x - a)$

$F(x)$  непрерывна на  $[a; b]$  как сумма непрерывных функций.

Существует конечная производная функции  $F(x)$ .

$$F'(x) = f'(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \Rightarrow \text{по необходимому и достаточному условию дифференцируемости (С.47, Т.1)} \Rightarrow$$

$\Rightarrow F(x)$  – дифференцируема на  $(a; b)$

Покажем, что  $F(a) = F(b)$ :

$$F(a) = f(a) - f(a) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \cdot (a - a) = 0$$

$$F(b) = f(b) - f(a) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \cdot (b - a) = f(b) - f(a) - f(b) + f(a) = 0$$

$\Rightarrow F(x)$  удовлетворяет условиям теоремы Ролля (Т. 2)

По теореме Ролля  $\Rightarrow \exists c \in (a; b) \quad F'(c) = 0$

$$F'(x) = f'(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

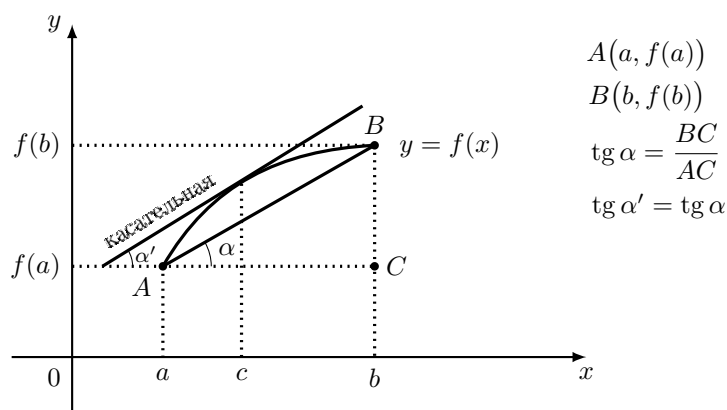
$$F'(c) = f'(c) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a} = 0$$

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

$$f(b) - f(a) = f'(c) \cdot (b - a)$$



### Геометрический смысл теоремы Лагранжа



**Теорема 4 (Теорема Коши).**

Пусть функции  $f(x)$  и  $\varphi(x)$

1. непрерывны на  $[a; b]$
2. дифференцируемы на  $(a; b)$
3.  $\forall x \in (a; b): \varphi'(x) \neq 0$

Тогда  $\exists c \in (a; b):$

$$\frac{f(b) - f(a)}{\varphi(b) - \varphi(a)} = \frac{f'(c)}{\varphi'(c)}$$

**Доказательство.**

Рассмотрим вспомогательную функцию:

$$F(x) = f(x) - f(a) - \frac{f(b) - f(a)}{\varphi(b) - \varphi(a)} \cdot (\varphi(x) - \varphi(a))$$

1.  $F(x)$  непрерывна на  $[a; b]$  как линейная комбинация непрерывных функций
2.  $F(x)$  дифференцируема на  $(a; b)$  как линейная комбинация дифференцируемых функций
3.  $F(a) = F(b)$

$$F(a) = \cancel{f(a)} - \cancel{f(a)} - \frac{f(b) - f(a)}{\varphi(b) - \varphi(a)} \cdot \underbrace{(\varphi(a) - \varphi(a))}_0 = 0$$

$$F(b) = f(b) - f(a) - \frac{f(b) - f(a)}{\varphi(b) - \varphi(a)} \cdot (\varphi(b) - \varphi(a)) = \cancel{f(b)} - \cancel{f(a)} - \cancel{f(b)} + \cancel{f(a)} = 0$$

Функция  $F(x)$  удовлетворяет условию теоремы Ролля (Т.2).

По теореме Ролля  $\Rightarrow \exists c \in (a; b): F'(c) = 0$

$$\text{Вычислим } F'(x) = f'(x) - \frac{f(b) - f(a)}{\varphi(b) - \varphi(a)} \cdot \varphi'(x)$$

$$F'(c) = f'(c) - \frac{f(b) - f(a)}{\varphi(b) - \varphi(a)} \cdot \varphi'(c) = 0$$

$$\frac{f(b) - f(a)}{\varphi(b) - \varphi(a)} \cdot \varphi'(c) = f'(c)$$

$$\frac{f(b) - f(a)}{\varphi(b) - \varphi(a)} = \frac{f'(c)}{\varphi'(c)}$$



## 11.1 Правило Лопиталья-Бернулли

### Теорема 1.

Пусть  $f(x)$  и  $\varphi(x)$ :

1. определены и дифференцируемы в  $\mathring{S}(x_0)$
2.  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = 0$ ;  $\lim_{x \rightarrow x_0} \varphi(x) = 0$
3.  $\forall x \in \mathring{S}(x_0): \varphi'(x) \neq 0$
4.  $\exists \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{\varphi'(x)} = A$ ,  $A$  — конечное или  $\infty$

Тогда  $\exists \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{\varphi(x)} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{\varphi'(x)} = A$

**Доказательство.**

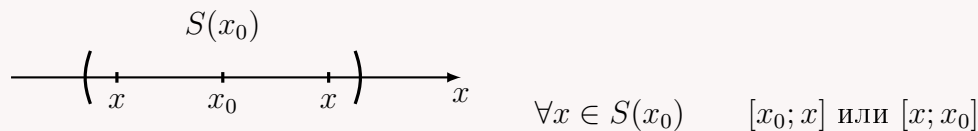
Доопределим функции  $f(x)$  и  $\varphi(x)$  в точке  $x_0$  нулём.

Пусть  $\begin{cases} f(x_0) = 0 \\ \varphi(x_0) = 0 \end{cases}$

По условию 2)  $\Rightarrow \left. \begin{aligned} \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = 0 = f(x_0) \\ \lim_{x \rightarrow x_0} \varphi(x) = 0 = \varphi(x_0) \end{aligned} \right\} \Rightarrow \begin{aligned} &\text{по определению непрерывной} \\ &\text{функции в точке } f(x) \text{ и } \varphi(x) \\ &\text{непрерывны в точке } x_0. \end{aligned}$

По условию 1) функции  $f(x)$  и  $\varphi(x)$  дифференцируемы в  $\mathring{S}(x_0) \Rightarrow$  по теореме о связи дифференцируемости и непрерывности (С.48, Т. 2)  $\Rightarrow f(x)$  и  $\varphi(x)$  непрерывны в  $\mathring{S}(x_0)$ .

Таким образом,  $f(x)$  и  $\varphi(x)$  непрерывны в  $S(x_0)$ .



функции  $f(x)$  или  $\varphi(x)$  удовлетворяют условию теоремы Коши (Т.4) на  $[x_0; x]$ .

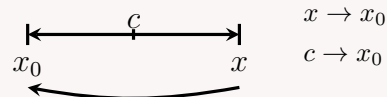
По теореме Коши  $\exists c \in (x_0; x)$ :

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{\varphi(x) - \varphi(x_0)} = \frac{f'(c)}{\varphi'(c)} \quad (*)$$

Так как  $f(x_0) = 0, \varphi(x_0) = 0 \Rightarrow \boxed{\frac{f(x)}{\varphi(x)} = \frac{f'(c)}{\varphi'(c)}}$  (\*)

Так как  $\exists \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{\varphi'(x)} = A$ :

Правая часть (\*):  $\lim_{c \rightarrow x_0} \frac{f'(c)}{\varphi'(c)} \stackrel{4)}{=} A$



Левая часть (\*):  $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{\varphi(x)} = \lim_{c \rightarrow x_0} \frac{f'(c)}{\varphi'(c)} = A$

Получаем, что  $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{\varphi(x)} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{\varphi'(x)} = A$  ■

### Теорема 2.

Пусть функции  $f(x)$  и  $\varphi(x)$ :

1. определены и дифференцируемы в  $S(x_0)$

2.  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \infty$ ,  $\lim_{x \rightarrow x_0} \varphi(x) = \infty$

3.  $\forall x \in \overset{\circ}{S}(x_0): \varphi'(x) \neq 0$

4.  $\exists \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{\varphi'(x)} = A$

Тогда  $\exists \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{\varphi(x)} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{\varphi'(x)} = A$

## 11.2 Сравнение показательной, степенной и логарифмической функции на бесконечности

$$f(x) = x^n, \quad n \in \mathbb{N}$$

Пусть  $g(x) = a^x, \quad a > 1 \quad x \rightarrow +\infty$

$$h(x) = \ln x$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^n}{a^x} = \left( \frac{\infty}{\infty} \right) \stackrel{\text{Л-Б}}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{n \cdot x^{n-1}}{a^x \cdot \ln a} = \left( \frac{\infty}{\infty} \right) \stackrel{\text{Л-Б}}{=}$$

$$\stackrel{\text{Л-Б}}{=} \dots \stackrel{\text{Л-Б}}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \dots \cdot 1}{a^x (\ln a)^n} = \frac{n!}{\ln^n a} \cdot \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{a^x} = \frac{n!}{\ln^n a} \cdot 0 = 0$$

$a^x$  растёт быстрее, чем  $x^n$  при  $x \rightarrow +\infty$  или  $x^n = o(a^x)$  при  $x \rightarrow +\infty$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{h(x)}{f(x)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x^n} = \left( \frac{\infty}{\infty} \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{1}{x}}{n \cdot x^{n-1}} = \frac{1}{x} \cdot \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x^n} = \frac{1}{n} \cdot 0 = 0$$

$x^n$  растёт быстрее, чем  $\ln x$  при  $x \rightarrow +\infty$  или  $\ln x = O(x^n)$  при  $x \rightarrow +\infty$

Вывод: 
$$\begin{array}{l} 1. \quad g(x) = a^x, \quad a > 1 \\ 2. \quad f(x) = x^n, \quad n \in \mathbb{N} \\ 3. \quad h(x) = \ln x \end{array} \quad \left| \quad x \rightarrow +\infty \right.$$

### 11.3 Формула Тейлора. Многочлены Тейлора

#### Теорема 1.

Пусть функция  $y = f(x)$   $n$  раз дифференцируема в точке  $x_0$  и определена в некоторой окрестности этой точки. Тогда  $\forall x \in S(x_0)$  имеет место формула Тейлора:

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!} \cdot (x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!} \cdot (x - x_0)^2 + \frac{f'''(x_0)}{3!} \cdot (x - x_0)^3 + \dots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} \cdot (x - x_0)^n + R_n(x) \quad (1)$$

Кратко:  $f(x) = P_n(x) + R_n(x)$ , где

$$P_n(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!} \cdot (x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!} \cdot (x - x_0)^2 + \frac{f'''(x_0)}{3!} \cdot (x - x_0)^3 + \dots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} \cdot (x - x_0)^n \quad \text{— многочлен Тейлора} \quad x \rightarrow x_0$$

$R_n(x)$  — остаточный член формулы Тейлора

#### Доказательство.

Покажем, что такой многочлен существует. Будем искать многочлен Тейлора в виде:

$$P_n(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)^2 + a_3(x - x_0)^3 + a_4(x - x_0)^4 + \dots + a_n(x - x_0)^n \quad (2)$$

$a_1, a_2, \dots, a_n$  — const

$$\text{Пусть выполнено условие: } \begin{cases} P_n(x_0) = f(x_0) \\ P'_n(x_0) = f'(x_0) \\ P''_n(x_0) = f''(x_0) \\ \dots \\ P^{(n)}_n(x_0) = f^{(n)}(x_0) \end{cases} \quad (3)$$

$f'(x_0), f''(x_0), \dots, f^{(n)}(x_0)$  — существуют, так как  $y = f(x)$   $n$  раз дифференцируема в точке  $x_0$ .

Вычислим  $P'_n(x), \dots, P^{(n)}_n(x)$ :

$$\begin{aligned} P_n(x) &= a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)^2 + a_3(x - x_0)^3 + a_4(x - x_0)^4 + \dots + a_n(x - x_0)^n \\ P'_n(x) &= a_1 \cdot 1 + a_2 \cdot 2(x - x_0) + a_3 \cdot 3(x - x_0)^2 + a_4 \cdot 4(x - x_0)^3 + \dots + a_n \cdot n(x - x_0)^{n-1} \\ P''_n(x) &= a_2 \cdot 2 \cdot 1 + a_3 \cdot 3 \cdot 2(x - x_0) + a_4 \cdot 4 \cdot 3(x - x_0)^2 + \dots + a_n \cdot n \cdot (n-1)(x - x_0)^{n-2} \\ P'''_n(x) &= a_3 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 + a_4 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2(x - x_0) + \dots + a_n \cdot n \cdot (n-1) \cdot (n-2)(x - x_0)^{n-3} \\ &\dots \\ P^{(n)}_n(x) &= a_n \cdot n(n-1) \cdot (n-2) \cdot \dots \cdot 1 = a_n \cdot n! \end{aligned}$$

$$x = x_0$$

$$\begin{cases} P_n(x_0) = a_0 \\ P'_n(x_0) = 1 \cdot a_1 \\ P''_n(x_0) = 1 \cdot 2 \cdot a_2 \\ P'''_n(x_0) = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot a_3 \\ \dots\dots\dots \\ P^{(n)}_n(x_0) = n! \cdot a_n \end{cases} \xrightarrow{(3)} \begin{cases} P_n(x_0) = a_0 = f(x_0) \\ P'_n(x_0) = 1 \cdot a_1 = f'(x_0) \\ P''_n(x_0) = 1 \cdot 2 \cdot a_2 = f''(x_0) \\ P'''_n(x_0) = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot a_3 = f'''(x_0) \\ \dots\dots\dots \\ P^{(n)}_n(x_0) = n! \cdot a_n = f^{(n)}(x_0) \end{cases}$$

Выразим  $a_0, a_1, \dots, a_n$ :

$$\begin{cases} a_0 = f(x_0) \\ a_1 = \frac{f'(x_0)}{1!} \\ a_2 = \frac{f''(x_0)}{2!} \\ a_3 = \frac{f'''(x_0)}{3!} \\ \dots\dots\dots \\ a_n = \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} \end{cases}$$

Подставим  $a_0, a_1, \dots, a_n$  в (2):

$$P_n(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!} \cdot (x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!} \cdot (x - x_0)^2 + \frac{f'''(x_0)}{3!} \cdot (x - x_0)^3 + \dots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} \cdot (x - x_0)^n$$

– многочлен Тейлора



## Теорема 2.

Пусть функция  $y = f(x)$   $n$  раз дифференцируема в точке  $x_0$ , тогда

$$x \rightarrow x_0 \quad \boxed{R_n(x) = o((x - x_0)^n)} \quad \text{— форма Пеано.}$$

**Доказательство.**

Формула Тейлора:

$$f(x) = P_n(x) + R_n(x)$$

$$R_n(x) = f(x) - P_n(x)$$

В силу условия (3):

$$R_n(x_0) = f(x_0) - P_n(x_0) \stackrel{(3)}{=} f(x_0) - f(x_0) = 0$$

$$R'_n(x_0) = f'(x_0) - P'_n(x_0) \stackrel{(3)}{=} f'(x_0) - f'(x_0) = 0$$

$$\dots\dots\dots$$

$$R^{(n)}_n(x_0) = f^{(n)}(x_0) - P^{(n)}_n(x_0) \stackrel{(3)}{=} f^{(n)}(x_0) - f^{(n)}(x_0) = 0$$

Вычислим:

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{R_n(x)}{(x - x_0)^n} &= \left( \frac{0}{0} \right) \stackrel{\text{Л-Б}}{=} \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{R'_n(x)}{n \cdot (x - x_0)^{n-1}} = \left( \frac{0}{0} \right) \stackrel{\text{Л-Б}}{=} \dots = \\ &= \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{R_n^{(n)}(x)}{n \cdot (n-1) \cdot \dots \cdot 1} = \frac{1}{n'} \cdot R_n^{(n)}(x_0) = \frac{1}{n'} \cdot 0 = 0\end{aligned}$$

Вывод:  $R_n(x) = o((x - x_0)^n)$  при  $x \rightarrow x_0$

