Интегралы и дифференциальные уравнения

Рубежный контроль

2 семестр | Модуль №1

GitHub: malyinik

2024 г.

Содержание

1 Вопросы, оцениваемые в 1 балл **2**
1.1 Сформулировать определение первообразной 2
1.2 Сформулировать определение неопределённого интеграла 2
1.3 Сформулировать определение определённого интеграла 2
1.4 Сформулировать определение интеграла с переменным верхним пределом . 3
1.5 Сформулировать определение несобственного интеграла 1-го рода 3
1.6 Сформулировать определение несобственного интеграла 2-го рода 4
1.7 Сформулировать определение сходящегося несобственного интеграла 1-го рода 4
1.8 Сформулировать определение абсолютно сходящегося несобственного интеграла 1-го рода 4
1.9 Сформулировать определение условно сходящегося несобственного интеграла 1-го рода 5
1.10 Сформулировать определение сходящегося несобственного интеграла 2-го рода 5
1.11 Сформулировать определение абсолютно сходящегося несобственного интеграла 2-го рода 5
1.12 Сформулировать определение условно сходящегося несобственного интеграла 2-го рода 5

2 Вопросы, оцениваемые в 3 балла **6**
2.1 Сформулировать и доказать теорему об оценке определённого интеграла . . 6
2.2 Сформулировать и доказать теорему о среднем 6
2.3 Сформулировать и доказать теорему о производной интеграла с переменным верхним пределом 7
2.4 Сформулировать и доказать теорему Ньютона - Лейбница 8
2.5 Сформулировать и доказать теорему об интегрировании по частям в определённом интеграле 9
2.6 Сформулировать и доказать признак сходимости по неравенству для несобственных интегралов 1-го рода 10
2.7 Сформулировать и доказать предельный признак сравнения для несобственных интегралов 1-го рода 11
2.8 Сформулировать и доказать признак абсолютной сходимости для несобственных интегралов 1-го рода 12
2.9 Вывести формулу для вычисления площади криволинейного сектора, ограниченного лучами $\varphi = \alpha$, $\varphi = \beta$ и кривой $\rho = \rho(\varphi)$ 13
2.10 Вывести формулу для вычисления длины дуги графика функции $y = f(x)$, отсечённой прямыми $x = a$ и $x = b$ 13

3 Используемые теоремы **15**

1 Вопросы, оцениваемые в 1 балл

1.1 Сформулировать определение первообразной

Определение 1. Функция $F(x)$ называется **первообразной** функции $f(x)$ на интервале $(a;b)$, если $F(x)$ дифференцируема на $(a;b)$ и $\forall x \in (a;b)$:

$$\boxed{F'(x) = f(x)} \tag{1}$$

1.2 Сформулировать определение неопределённого интеграла

Определение 2. Множество первообразных функции $f(x)$ на $(a;b)$ называется **неопределённым интегралом**.

$$\boxed{\int f(x)\,dx = F(x) + C} \tag{2}$$

$\int$ — знак интеграла
$f(x)$ — подынтегральная функция
$f(x)\,dx$ — подынтегральное выражение
x — переменная
$F(x) + C$ — множество первообразных
C — произвольная константа

1.3 Сформулировать определение определённого интеграла

Пусть функция $y = f(x)$ определена на $[a;b]$.
Рассмотрим произвольное разбиение $[a;b]$. В каждом из отрезков разбиения $[x_{i-1};x_i]$ выберем точку $\xi_i,\ i = \overline{1,n}$. Составим сумму

$$\boxed{S_n = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i) \cdot \Delta x_i} \tag{3}$$

Определение 3. Определённым интегралом от функции $y = f(x)$ на $[a;b]$ называется <u>конечный</u> предел интегральной суммы (3), когда число отрезков разбиения растёт, а их длины стремятся к нулю.

$$\boxed{\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{\lambda \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i) \cdot \Delta x} \tag{4}$$

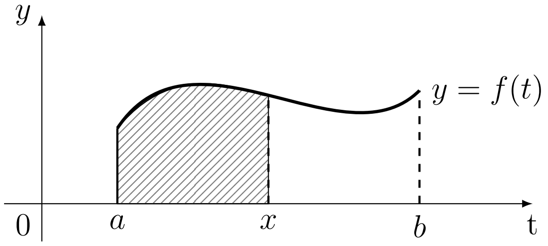
Предел (4) не зависит от способа разбиения отрезка $[a;b]$ и выбора точек $\xi_i,\ \overline{1,n}$.
$f(x)$ — подынтегральная функция
$f(x)\,dx$ — подынтегральное выражение
$\displaystyle\int_a^b$ — знак определённого интеграла
a — нижний предел интегрирования
b — верхний предел интегрирования

1.4 Сформулировать определение интеграла с переменным верхним пределом

Пусть $f(x)$ непрерывна на $[a;b]$. Рассмотрим $\int_a^b f(x)\,dx$. Закрепим нижний предел интегрирования a. Изменяем верхний предел интегрирования b, чтобы подчеркнуть изменение верхнего предела интегрирования.

$b \longrightarrow x \quad x \in [a;b] \quad [a;x] \subset [a;b] \quad I(x) = \displaystyle\int_a^x f(t)\,dt.$

> **Определение 4.** **Определённым интегралом с переменным верхним пределом интегрирования** от непрерывной функции $f(x)$ на $[a;b]$ называется интеграл вида
>
> $$\boxed{I(x) = \int_a^x f(t)\,dt}, \text{ где } x \in [a;b]$$



$I(x)$ — переменная площадь криволинейной трапеции с основанием $[a;x] \subset [a;b]$.

1.5 Сформулировать определение несобственного интеграла 1-го рода

Пусть $y = f(x)$ определена на $[a;+\infty)$, интегрируема на $[a;b] \subset [a;+\infty)$. Тогда определена функция

$$\boxed{\Phi(b) = \int_a^b f(x)\,dx} \text{ на } [a;+\infty) \tag{5}$$

как определённый интеграл с переменным верхним пределом интегрирования.

> **Определение 5.** Предел функции $\Phi(b)$ при $b \to +\infty$ называется несобственным интегралом от функции $f(x)$ по бесконечному промежутку $[a;+\infty)$ или **несобственным интегралом 1-го рода** и обозначается
>
> $$\boxed{\int_a^{+\infty} f(x)\,dx = \lim_{b\to+\infty} \Phi(b) = \lim_{b\to+\infty} \int_a^b f(x)\,dx} \tag{6}$$

1.6 Сформулировать определение несобственного интеграла 2-го рода

Пусть функция $f(x)$ определена на полуинтервале $[a;b)$, а в точке $x = b$ терпит разрыв 2-го рода. Предположим, что функция $f(x)$ интегрируема на $[a;\eta] \subset [a;b)$. Тогда на $[a;b)$ определена функция

$$\Phi(\eta) = \int_a^\eta f(x)\,dx \tag{7}$$

как интеграл с переменным верхним пределом.

> **Определение 6.** Предел функции $\Phi(\eta)$ при $\eta \to b-$ называется несобственным интегралом от неограниченной функции $f(x)$ на $[a;b)$ или **несобственным интегралом 2-го рода** и обозначается
>
> $$\boxed{\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{\eta\to b-} \Phi(\eta) = \lim_{\eta\to b-} \int_a^\eta f(x)\,dx} \tag{8}$$

1.7 Сформулировать определение сходящегося несобственного интеграла 1-го рода

> **Определение 7.**
>
> $$\int_a^{+\infty} f(x)\,dx = \lim_{b\to+\infty} \Phi(b) = \lim_{b\to+\infty} \int_a^b f(x)\,dx$$
>
> Если предел в правой части равенства существует и конечен, то несобственный интеграл в левой части равенства **сходится**.

1.8 Сформулировать определение абсолютно сходящегося несобственного интеграла 1-го рода

> **Определение 8.** Если наряду с несобственным интегралом от функции $f(x)$ по бесконечному промежутку $[a;+\infty)$ сходится и несобственный интеграл от функции $|f(x)|$ по этому же промежутку, то первый несобственный интеграл называется **сходящимся абсолютно**.
>
> $\boxed{\text{несобственный интеграл от } f(x) \text{ сходится абсолютно}} = \boxed{\text{несобственный интеграл от } f(x) \text{ сходится}} + \boxed{\text{несобственный интеграл от } |f(x)| \text{ сходится}}$

1.9 Сформулировать определение условно сходящегося несобственного интеграла 1-го рода

Определение 9. Если несобственный интеграл от функции $f(x)$ по бесконечному промежутку $[a; +\infty)$ сходится, а несобственный интеграл от функции $|f(x)|$ по этому же промежутку расходится, то первый несобственный интеграл называется **сходящимся условно**.

$$\boxed{\begin{array}{l}\text{несобственный интеграл}\\ \text{от } f(x) \text{ сходится условно}\end{array}} = \boxed{\begin{array}{l}\text{несобственный интеграл}\\ \text{от } f(x) \text{ сходится}\end{array}} + \boxed{\begin{array}{l}\text{несобственный интеграл}\\ \text{от } |f(x)| \text{ расходится}\end{array}}$$

1.10 Сформулировать определение сходящегося несобственного интеграла 2-го рода

Определение 10.

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{\eta\to b-} \Phi(\eta) = \lim_{\eta\to b-} \int_a^\eta f(x)\,dx$$

Если предел в правой части равенства существует и конечен, то несобственный интеграл от неограниченной функции $f(x)$ по $[a; b)$ **сходится**.

1.11 Сформулировать определение абсолютно сходящегося несобственного интеграла 2-го рода

Определение 11. Если несобственный интеграл от неограниченной функции $f(x)$ при $x \to b-$ по промежутку $[a; b)$ сходится и несобственный интеграл функции $|f(x)|$ по этому же промежутку сходится, то первый из несобственных интегралов **сходится абсолютно**.

1.12 Сформулировать определение условно сходящегося несобственного интеграла 2-го рода

Определение 12. Если несобственный интеграл от неограниченной функции $f(x)$ при $x \to b-$ по промежутку $[a; b)$, сходится, а несобственный интеграл от функции $|f(x)|$ по этому же промежутку расходится, то первый из несобственных интегралов **сходится условно**.

2 Вопросы, оцениваемые в 3 балла

2.1 Сформулировать и доказать теорему об оценке определённого интеграла

Теорема 1 *(Об оценке определённого интеграла)***.**
Пусть функции $f(x)$ и $g(x)$ интегрируемы на $[a;b]$ и $\forall x \in [a;b]\colon\ m \leqslant f(x) \leqslant N,\ g(x) \geqslant 0.$
Тогда

$$\boxed{m\int_a^b g(x)\,dx \leqslant \int_a^b f(x)\,g(x)\,dx \leqslant M\int_a^b g(x)\,dx}$$

Доказательство.
Так как $\forall x \in [a;b]$ верны неравенства

$$\begin{aligned} m \leqslant f(x) \leqslant M \quad &| \cdot g(x) \\ g(x) \geqslant 0 \qquad &m, M \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

$$m \cdot g(x) \leqslant f(x) \cdot g(x) \leqslant M \cdot g(x)$$

По теореме 11 и 10:

$$m\int_a^b g(x) \leqslant \int_a^b f(x)\,g(x)\,dx \leqslant M\int_a^b g(x)\,dx$$

■

2.2 Сформулировать и доказать теорему о среднем

Теорема 2 *(О среднем значении для определённого интеграла)***.**
Если $f(x)$ непрерывна на $[a;b]$, то

$$\exists\, c \in [a;b]\colon\ f(c) = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx$$

Доказательство.
Так как функция $y = f(x)$ непрерывна на $[a;b]$, то по теореме *Вейерштрасса* она достигает своего наибольшего и наименьшего значения.
То есть $\exists\, m, M \in \mathbb{R},\ \forall x \in [a;b]\colon\ m \leqslant f(x) \leqslant M$
По теореме 11:

$$\int_a^b m\,dx \leqslant \int_a^b f(x)\,dx \leqslant \int_a^b M\,dx$$

По теореме 10:

$$m\int_a^b dx \leqslant \int_a^b f(x)\,dx \leqslant M\int_a^b dx$$

По теореме 9:

$$m(b-a) \leqslant \int_a^b f(x)\,dx \leqslant M(b-a) \quad | : (b-a)$$

Так как функция $y = f(x)$ непрерывна на $[a; b]$, то по теореме *Больцано-Коши* она принимает все свои значения между наибольшим и наименьшим значением.

$$m \leqslant \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)\,dx \leqslant M$$

По теореме *Больцано-Коши* $\exists\, c \in [a; b]$:

$$f(c) = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)\,dx$$

■

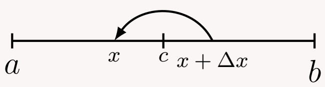
2.3 Сформулировать и доказать теорему о производной интеграла с переменным верхним пределом

Теорема 3 *(О производной $I(x)$)*.
Если функция $y = f(x)$ непрерывна на $[a; b]$, то $\forall x \in [a; b]$ верно равенство

$$\boxed{\big(I(x)\big)' = \left(\int_a^x f(t)\,dt\right)' = f(x)}$$

Доказательство.

$$\big(I(x)\big)' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta I(x)}{\Delta x} \overset{\text{T12}}{=\!=} \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(c)\cdot \Delta x}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} f(c) \overset{*}{=\!=} f(x)$$

$*$: 

при $\Delta x \to 0 \quad x + \Delta x \to x \quad c \to x$

■

Следствие 3.1. Функция $I(x)$ — первообразная функции $f(x)$ на $[a; b]$, так как по теореме 3 $\big(I(x)\big)' = f(x)$.

2.4 Сформулировать и доказать теорему Ньютона - Лейбница

Теорема 4.
Пусть функция $f(x)$ — непрерывна на $[a;b]$. Тогда

$$\boxed{\int_a^b f(x)\,dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a)}$$

где $F(x)$ — первообразная $f(x)$.

Доказательство.
Пусть $F(x)$ первообразная $f(x)$ на $[a;b]$. По следствию из теоремы 3 $I(x)$ — первообразная $f(x)$ на $[a;b]$.
По свойству первообразной:

$$I(x) - F(x) = C$$
$$I(x) = F(x) + C, \text{ где } C \text{ — } const$$

$$\int_a^x f(t)\,dt = F(x) + C, \text{ где } C \text{ — } const \qquad (\vee)$$

• $x = a$:

$$\int_a^a f(t)\,dt = F(a) + C$$
$$0 = F(a) + C$$
$$C = -F(a)$$

$C = -F(a)$ подставим в $(\vee)$:

$$\int_a^x f(t)\,dt = F(x) - F(a)$$

• $x = b$:

$$\boxed{\int_a^b f(t)\,dt = F(b) - F(a)}$$

■

2.5 Сформулировать и доказать теорему об интегрировании по частям в определённом интеграле

Теорема 5.
Пусть функции $u = u(x)$ и $v = v(x)$ непрерывно дифференцируемы на $[a; b]$. Тогда имеет место равенство

$$\boxed{\int_a^b u\,dv = u\,v\Big|_a^b - \int_a^b v\,du}$$

Доказательство.
Рассмотрим произведение функций $u \cdot v$.
Дифференцируем:

$$d(u \cdot v) = v\,du + u\,dv$$
$$u\,dv = d(uv) - v\,du$$

Интегрируем:

$$\int_a^b u\,dv = \int_a^b \big(d(uv) - v\,du\big) = \int_a^b d(uv) - \int_a^b v\,du - u\,v\Big|_a^b - \int_a^b v\,du$$

■

2.6 Сформулировать и доказать признак сходимости по неравенству для несобственных интегралов 1-го рода

Теорема 6 *(Признак сходимости по неравенству)*.
Пусть функции $f(x)$ и $g(x)$ интегрируемы на $[a;b] \subset [a;+\infty)$, причём

$$\forall x \geqslant a\colon 0 \leqslant f(x) \leqslant g(x)$$

Тогда:

1. Если $\int_a^{+\infty} g(x)\,dx$ сходится, то $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ — сходится
2. Если $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ расходится, то $\int_a^{+\infty} g(x)\,dx$ — расходится

Доказательство.
$\int_a^{+\infty} g(x)\,dx$ — сходится $\Rightarrow$ $\overset{(\textbf{опр. 5})}{\text{по определению}}$ несобственного интеграла 1-го рода

$$\int_a^{+\infty} g(x)\,dx = \lim_{b\to+\infty} \int_a^b g(x)\,dx = C \quad C \text{ — число}$$

Так как $\forall x \geqslant a\colon g(x) \geqslant 0$

$$\Phi(b) = \int_a^b g(x)\,dx \leqslant C, \quad b > a$$

По условию: $\forall x \geqslant a\colon 0 \leqslant f(x) \leqslant g(x)$
Интегрируем:

$$\int_a^b f(x)\,dx \leqslant \int_a^b g(x)\,dx \leqslant C$$

Так как $f(x) \geqslant 0,\ \forall x \geqslant a$ и $b > a$, то функция

$$\Psi(b) = \int_a^b f(x)\,dx \text{ монотонно возрастает и ограничена сверху}$$

Утверждение: монотонная и ограниченная сверху функция при $x \to +\infty$ имеет конечный предел.
По утверждению функция $\Psi(b)$ имеет конечный предел при $x \to +\infty$, то есть

$$\int_a^{+\infty} f(x)\,dx = \lim_{b\to+\infty} \Psi(b) = \lim_{b\to+\infty} \int_a^b f(x)\,dx \text{ — конечный предел}$$

■

Доказательство (Метод от противного).
Дано: $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ — расходится
Предположим, что $\int_a^{+\infty} g(x)\,dx$ — сходится
Тогда по первой части теоремы:

$$\int_a^{+\infty} f(x)\,dx \text{ — сходится}$$

А это противоречит условию теоремы $\Rightarrow \int_a^{+\infty} g(x)\,dx$ — расходится ■

2.7 Сформулировать и доказать предельный признак сравнения для несобственных интегралов 1-го рода

Теорема 7 *(Предельный признак сходимости)***.**
Пусть $f(x)$ и $g(x)$ интегрируемы на $[a;b] \subset [a;+\infty)$ и $\forall x \geqslant a\colon\ f(x) \geqslant 0,\ \ g(x) > 0$. Если существует конечный предел:

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lambda > 0 \tag{9}$$

то $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ и $\displaystyle\int_a^{+\infty} g(x)\,dx$ сходятся или расходятся одновременно.

Доказательство.
Из (5) $\Rightarrow$ по определению предела:

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists\, M(\varepsilon) > 0\colon \forall x > M\ \ \Rightarrow \left|\frac{f(x)}{g(x)} - \lambda\right| < \varepsilon$$

$$-\varepsilon < \frac{f(x)}{g(x)} - \lambda < \varepsilon$$

$$\lambda - \varepsilon < \frac{f(x)}{g(x)} < \lambda + \varepsilon$$

$$(\lambda - \varepsilon) \cdot g(x) < f(x) < (\lambda + \varepsilon) \cdot g(x) \quad \forall x > M \tag{$*$}$$

$\boxed{\text{1 шаг}}$ Рассмотрим $f(x) < (\lambda + \varepsilon) g(x)$
Интегрируем:

$$\int_a^{+\infty} f(x)\,dx < (\lambda + \varepsilon) \int_a^{+\infty} g(x)\,dx$$

Число $(\lambda + \varepsilon)$ не влияет на сходимость/расходимость несобственного интеграла.
Пусть $\int_a^{+\infty} g(x)\,dx$ — сходится, тогда:

$$(\lambda + \varepsilon) \int_a^{+\infty} g(x)\,dx \ \text{— сходится}$$

По теореме 6 $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ — сходится.

Пусть $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ расходится, тогда по теореме 6

$$(\lambda + \varepsilon) \int_a^{+\infty} g(x)\,dx \ \text{— расходится} \ \Rightarrow \ \int_a^{+\infty} g(x)\,dx \ \text{— расходится}$$

$\boxed{\text{2 шаг}}$ Рассмотрим $(\lambda - \varepsilon) \cdot g(x) < f(x)$
Интегрируем:

$$(\lambda - \varepsilon) \int_a^{+\infty} g(x)\,dx < \int_a^{+\infty} f(x)\,dx$$

$(\lambda - \varepsilon)$ не влияет на сходимость/расходимость несобственного интеграла

Пусть $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ — сходится, тогда по теореме 6

$$(\lambda-\varepsilon)\int_a^{+\infty} g(x)\,dx \text{ — сходится } \Rightarrow \int_a^{+\infty} g(x)\,dx \text{ — сходится}$$

Пусть $(\lambda-\varepsilon)\int_a^{+\infty} g(x)\,dx$ — расходится, тогда $\int_a^{+\infty} g(x)\,dx$ — расходится

По теореме 6 $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ расходится, тогда

$$\int_a^{+\infty} f(x)\,dx \text{ и } \int_a^{+\infty} g(x)\,dx \text{ сходятся и расходятся одновременно}$$

■

2.8 Сформулировать и доказать признак абсолютной сходимости для несобственных интегралов 1-го рода

Теорема 8 *(Признак абсолютной сходимости)***.**
Пусть функция $f(x)$ знакопеременна на $[a;+\infty)$. Если функции $f(x)$ и $|f(x)|$ интегрируемы на любом отрезке $[a;b]\subset[a;+\infty)$ и несобственный интеграл от функции $|f(x)|$ по бесконечному промежутку $[a;+\infty)$ сходится, то сходится и несобственный интеграл от функции $f(x)$ по $[a;+\infty)$, причём абсолютно.

Доказательство.
Так как $\forall x\in[a;+\infty)$ верно неравенство

$$\begin{aligned} -|f(x)| \leqslant f(x) \leqslant |f(x)| \quad &\Big|+|f(x)| \\ 0 \leqslant f(x)+|f(x)| \leqslant 2|f(x)| \end{aligned}$$

По условию $\int_a^{+\infty} |f(x)|\,dx$ сходится $\Rightarrow$ $2\int_a^{+\infty} |f(x)|\,dx$ сходится.

По теореме 6 (*признак сходимости по неравенству*):

$$\int_a^{+\infty} \big(f(x)+|f(x)|\big)\,dx \text{ — сходится}$$

Рассмотрим

$$\int_a^{+\infty} f(x)\,dx = \underbrace{\int_a^{+\infty} \big(f(x)+|f(x)|\big)\,dx}_{\text{сх-ся по Т6}} - \underbrace{\int_a^{+\infty} |f(x)|\,dx}_{\text{сх-ся по условию}}$$

По определению сходящегося несобственного интеграла $\Rightarrow$ $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ сходится
По определению абсолютной сходимости $\Rightarrow$ $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ сходится абсолютно ■

2.9 Вывести формулу для вычисления площади криволинейного сектора, ограниченного лучами $\varphi = \alpha,\ \varphi = \beta$ и кривой $\rho = \rho(\varphi)$

1. Разбиваем сектор A_0OA_n лучами $\alpha = \varphi_0 < \varphi_1 < \ldots < \varphi_n = \beta$ на углы $\angle A_0OA_1$, $\angle A_1OA_2$, ..., $\angle A_{n-1}OA_n$
   $\Delta\varphi_i = \varphi_i - \varphi_{i-1}$ — величина $\angle A_{i-1}OA_1$ в радианах
   $\lambda = \max\limits_i \Delta\varphi_i,\ i = \overline{1,n}$

2. $\forall$ выберем и проведём Ψ_i, $\Psi_i \in \angle A_{i-1}OA_i$
   Находим $\rho = \rho(\Psi_i)$
   $M_i\big(\Psi_i,\ r(\Psi_i)\big), \quad M_i \in \angle A_{i-1}OA_i, \quad M_i \in r = r(\varphi)$

3. Заменяем каждый i-ый криволинейный сектор на круговой сектор $R = \rho(\Psi_i),\ i = \overline{1,n}$
   $S_i = \dfrac{1}{2}R^2 \cdot \Delta\varphi_i$ — площадь i-го кругового сектора
   $R = \rho(\Psi_i)$
   $$\sum_{i=1}^{n} S_i = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{2}\rho^2(\Psi_i) \cdot \Delta\varphi_i = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} \rho^2(\Psi_i) \cdot \Delta\varphi_i$$

4. Вычисляем предел
   $$\lim_{\lambda \to 0} \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} \rho^2(\Psi_i) \cdot \Delta\varphi_i = \boxed{\frac{1}{2}\int_\alpha^\beta \rho^2\, d\varphi = S}$$

2.10 Вывести формулу для вычисления длины дуги графика функции $y = f(x)$, отсечённой прямыми $x = a$ и $x = b$

Пусть $y = f(x)$ непрерывна на $[a;b]$.
$M_0(x_0, y_0) \quad M(x,y)$
Δx — приращение $x \quad \Delta y$ — приращение y

$$\begin{matrix} x \to x + \Delta x \\ y \to x + \Delta y \end{matrix} \quad M(x,y) \to M_1(x + \Delta x, y + \Delta y)$$

l_0 — $\overset{\frown}{M_0M}$ — дуга кривой $\quad \Delta l$ — приращение дуги кривой $\quad \Delta l = \overset{\frown}{MM_1}$
Найдём l'_x — ?
$l'_x = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta l}{\Delta x}$
$\triangle MM_1A \quad MA = \Delta x \quad AM_1 = \Delta y$

$MM_1^2 = \Delta x^2 + \Delta y^2 \quad | \cdot \Delta l^2 \mid : \Delta l^2$
$$\left(\frac{MM_1}{\Delta l}\right)^2 \cdot (\Delta l)^2 = \Delta x^2 + \Delta y^2 \quad | : \Delta x^2$$
$$\left(\frac{MM_1}{\Delta l}\right)^2 \cdot \left(\frac{\Delta l}{\Delta x}\right)^2 = 1 + \left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right)^2$$

Вычислим предел при $\Delta x \to 0$.
Левая часть:
$$\lim_{\Delta \to 0}\left(\frac{MM_1}{\Delta l}\right)^2 \cdot \left(\frac{\Delta l}{\Delta x}\right)^2 = \begin{vmatrix} \text{при } \Delta x \to 0 \quad M \to M_1 \\ \Delta l \to MM_1 \quad \text{дуга} \ \to \ \text{хорде} \end{vmatrix} = \lim_{\Delta x \to 0} 1^2 \cdot \left(\frac{\Delta l}{\Delta x}\right)^2 = (l'_x)^2$$

Правая часть:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \left(1 + \left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right)^2\right) = 1 + \lim_{\Delta x \to 0} \left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right)^2 = 1 + (y'_x)^2$$

Получаем:

$$\begin{aligned} (l'_x)^2 &= 1 + (y'_x)^2 \\ l'_x &= \sqrt{1 + (y'_x)^2} \quad | \cdot dx \\ l'_x \, dx &= \sqrt{1 + (y'_x)^2} \, dx \\ dl &= \sqrt{1 + (y'_x)^2} \, dx \end{aligned} \tag{$\vee$}$$

$$\boxed{l = \int_a^b \sqrt{1 + (y'_x)^2} \, dx} \tag{10}$$

3 Используемые теоремы

Теорема 9.
Если C — $const$, то

$$\boxed{\int_a^b c\,dx = c \cdot (b-a)}$$

Теорема 10.
Если функции $f_1(x),\ f_2(x)$ интегрируемы на $[a;b]$, то их линейная комбинация

$$\lambda_1 f_1(x) + \lambda_2 f_2(x),\ \text{где } \lambda_1,\ \lambda_2 \in \mathbb{R}$$

интегрируема на $[a;b]$ и верно равенство:

$$\int_a^b \Big(\lambda_1 f_1(x) + \lambda_2 f_2(x)\Big)\,dx = \lambda_1 \int_a^b f_1(x)\,dx + \lambda_2 \cdot \int_a^b f_2(x)\,dx$$

Теорема 11 *(Об интегрировании неравенства)***.**
Пусть функции $f(x)$ и $g(x)$ интегрируемы на $[a;b]$ и $\forall x \in [a;b]\colon f(x) \geqslant g(x)$, то

$$\boxed{\int_a^b f(x)\,dx \geqslant \int_a^b g(x)\,dx}$$

Теорема 12 *(Непрерывность $I(x)$)***.**
Если функция $f(x)$ на $[a;b]$ непрерывна, то $I(x) = \int_a^x f(x)\,dt$ — непрерывна на $[a;b]$.