МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РФ

МОСКВА

ФЕДЕРАЛЬНОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО АВТОНОМНОГО ОБРАЗОВАТЕЛЬНОГО

УЧРЕЖДЕНИЯ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ ТЕХНОЛОГИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ «МИСиС»

КАФЕДРА Инженерной кибернетики

НАПРАВЛЕНИЕ Прикладная математика ГРУППА БПМ-16-2

КУРСОВАЯ РАБОТА

по курсу **Дискретная математика**

Тема: «Кривые Безье»

Выполнил студент гр. БПМ-16-2

Малынковский Олег

Руководитель Пышняк Марина Олеговна, доцент КиК

Оценка выполнения курсовой работы ____________________________

Москва, 2018 г

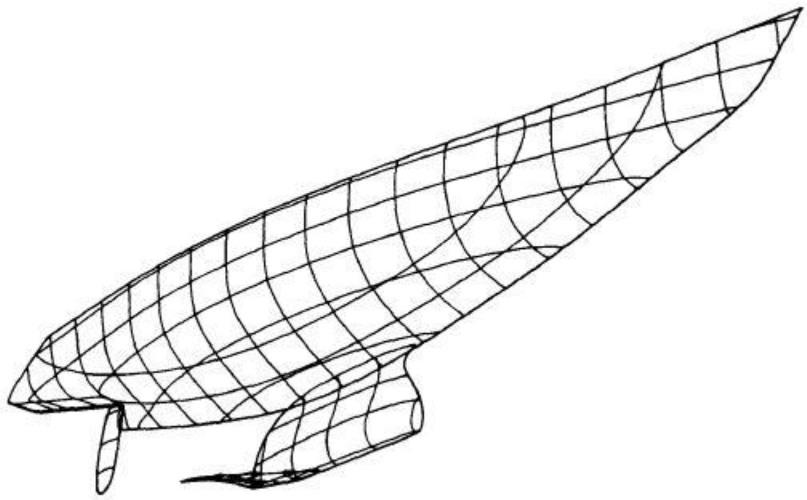
Оглавление

1. Введение.

Кривая, с точки зрения алгебры, — это геометрическое место (множество) точек на плоскости (O; x, y), которое определяется как множество нулей от многочлена от двух переменных. Степенью (или порядком) n этой кривой называется степень этого многочлена.

Трёхмерные, или иначе пространственные, кривые нашли широкое применение в инженерном деле, проектировании и разработке различных видов продукции – от автомобилей, кораблей, самолётов до одежды и обуви. Важнейшее значение данные кривые имеют для описания и интерпретации физических явлений в таких науках, как геология, физика, медицина.

Поверхности часто изображаются как сеть кривых, лежащих в ортогональных секущих плоскостях, с трёхмерными контурами деталей. Следующий пример наглядно иллюстрирует поверхность, изображённую в виде сети ортогональных плоских кривых.



Существуют два основных подхода построения пространственных кривых. Первый заключается в математическом подборе кривой, проходящей через все заданные точки. Другой подход заключается в том, что математическое описание кривых генерируется без изначального знания формы кривой. Примером данного подхода являются кривые Безье, которые мы и будем рассматривать в нашей работе.

2. Актуальность выбранной темы.

Сегодня кривые Безье применяются во всех современных программах, работающих с векторной графикой. Главное преимущество их использования состоит в том, что нет необходимости запоминать каждую точку кривой — достаточно знать, во-первых, координаты ее начала и конца, а во-вторых, математическую формулу, описывающую кривую. В итоге — полная свобода трансформации векторных изображений без какой-либо потери качества.

Любой векторный контур состоит из одного или нескольких криволинейных сегментов (как исключение, сегменты могут быть и прямолинейными), каждый из которых является элементарной кривой Безье. В начале и конце каждого сегмента находятся так называемые опорные точки (рис. 1), которые бывают двух типов: гладкие и угловые. Гладкая опорная точка соединяет две кривые без излома, а угловая опорная точка находится на изгибе между двумя кривыми. Кроме того, каждый сегмент имеет направляющие линии, ограниченные направляющими точками и определяющие угол наклона и кривизну кривой. Изменить форму сегмента можно посредством перемещения опорных точек или точек направляющих. В конце концов благодаря бесконечным перемещениям точек и трансформациям отдельных сегментов можно сформировать любой самый причудливый векторный контур.

3. Историческая справка.

Пьер Этьен Безье родился в Париже в 1910 г. в семье инженера. В 1930 г. он окончил парижскую Национальную высшую школу искусств и ремёсел, получив степень в машиностроении, а на следующий год дополнил ее степенью в электротехнике. В 1933 г. он был принят на работу в автомобильную компанию Рено (Франция), в которой и проработал до 1975 г. В 50-е Безье отвечал за внедрение одних из первых сверлильных и фрезерных станков с ЧПУ (т.е. с числовым программным управлением; в те дни этот термин встречался еще редко).

С 1960 г. Безье в основном занимался программой UNISURF — одной из первых систем автоматизированного проектирования и производства, использовавшейся в Рено для интерактивного конструирования автомобильных деталей. Для UNISURF нужно было разработать пригодную к промышленному внедрению методику математического определения сложных кривых, которая позволила бы конструкторам манипулировать кривыми, ничего не зная о задающих их функциях. В результате этой самой работы и появились на свет кривые, которые теперь носят имя Безье.

Однако кривые Безье, что удивительно, были открыты несколькими годами ранее. Французский инженер Поль де Кастельжо, работавший в автомобильном концерне Ситроен в атмосфере строжайшей секретности и корпоративной тайны, решал идентичную задачу. Де Кастельжо не только выбрал то же семейство многочленов для решения аналогичной задачи за три года до Безье, но и придумал более удобный метод построения кривой, который мы сегодня и используем.

4. Аналитический обзор литературы.

Задача компьютерной графики заключается в моделировании некоторой гладкой кривой или поверхности массивом выделенных опорных точек, а затем - в построении с помощью этой модели кривых или поверхностей путем подбора нужных фрагментов. Тем самым решение подобных задач разбивается на несколько этапов:

1) задание подходящего набора опорных точек;

2) выработка универсального и, по возможности, несложного способа построения элементарных фрагментов;

3) отыскивание эффективного механизма плавной состыковки этих фрагментов;

4) анализ полученных результатов.

Ясно, что решение такой задачи далеко не однозначно, так как приблизить массив точек плавно изменяющейся кривой можно очень многими способами. Тем самым множество приближающих геометрических объектов практически необозримо. Вместе с тем при решении конкретных задач, как правило, требуется найти только один приближающий объект, причем ведущий себя достаточно хорошо.

Укажем некоторые вполне естественные требования, которые нужно наложить на выделяемые классы кривых и выполнение которых необходимо для успешного разрешения задачи приближения (разумеется, есть и другие).

1. Выбираемый класс должен описываться достаточно просто.

2. Кривые, входящие в выделенный класс, не должны иметь особенностей, то есть должны быть достаточно гладкими - нигде не рваться, иметь непрерывно изменяющуюся касательную.

3. Поиск нужной кривой в выделенном классе должен быть сравнительно легким, что предполагает наличие эффективного алгоритма ее построения.

4. Для достаточно больших массивов точек найденные кривые или поверхности должны вести себя вполне предсказуемо.

Небезынтересно заметить, что кривые и поверхности, удовлетворяющие перечисленным требованиям, существуют. Они составлены из ладно пригнанных гладких кусочков.

Именно эти кривые и поверхности принято называть сплайнами.

Сплайн-функции

Пусть на отрезке [a, b] задана сетка w:

$a = x_o < x < \ldots < x_{m-1} < x_m = b$.

Точки x_o и x_m называются граничными узлами сетки w, а точки

$x_1, \ldots, x_{m-1}$ - ее внутренними узлами (рис. 1.1). Сетка называется равно-

равномерной, если расстояния между любыми двумя соседними узлами одинаковы.

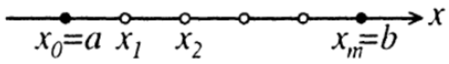


Рис. 1.1

Функция S(x), заданная на отрезке [a,b], называется сплайном порядка p+1 (степени p), если эта функция:

1) на каждом из отрезков

$\Delta_i = [x_i, x_{i+1}]$, i = 0, 1, ..., m-1,

является многочленом заданной степени p≥2, то есть может быть записана в виде

$$S(x) = S_i(x) = \sum_{k=0}^{p} a^{(i)}{}_k (x - x_i)^k, \quad i = 0,1,\ldots,m-1$$

2) p - 1 раз непрерывно дифференцируема на отрезке [a, b], то есть

$$S(x) \in C^{p-1}\,[a,b]$$

Замечание: Индекс (i) у чисел $a^{(i)}$ указывает на то, что набор коэффициентов,

которым определяется функция S(x), на каждом частичном отрезке Δ_i свой.

На каждом из отрезков Δ_i, i = 0, 1, ..., m-1, сплайн S(x) является многочленом степени p и определяется на этом отрезке p+1 коэффициентом. Всего 3частичных отрезков - m. Значит, для того чтобы полностью определить сплайн, необходимо найти (p +1)m чисел.

Условие $S(x) \in C^{p-1}\,[a,b]$ означает непрерывность функции S(x) и ее производных S'(x), S"(x), …, $S^{(p-1)}$ (x) во всех внутренних узлах сетки w. Число таких узлов – (m – 1). Тем самым для отыскания коэффициентов всех многочленов получается p(m -1) условий (уравнений).

Для полного определения сплайна недостает (p +1)m - p(m - 1) = m + p условий (уравнений). Выбор дополнительных условий определяется характером рассматриваемой задачи, а иногда и просто желанием пользователя.

Наиболее часто рассматриваются задачи интерполяции и сглаживания, когда требуется построить тот или иной сплайн по заданному массиву точек на плоскости (рис. 1.2).

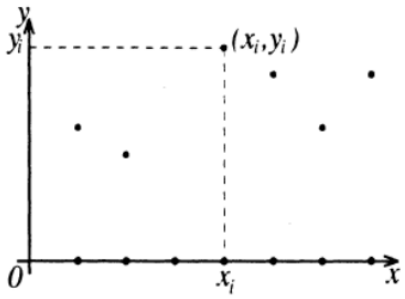


Рис. 1.2

В задачах интерполяции требуется, чтобы график сплайна проходил через точки (x_i, y_i), i = 0, 1, ..., m, что накладывает на его коэффициенты m + 1 дополнительных условий (уравнений). Остальные p - 1 условий (уравнений) для однозначного построения сплайна чаще всего задают в виде значений младших производных сплайна на концах рассматриваемого отрезка [a, b] - граничных (краевых) условий. Возможность выбора различных граничных условий позволяет строить сплайны, обладающие самыми разными свойствами.

В задачах сглаживания (аппроксимации) сплайн строят так, чтобы его график проходил вблизи точек (x_i, y_i), i = 0, 1, ..., m, а не через них. Меру этой близости можно определять по-разному, что приводит к значительному разнообразию сглаживающих сплайнов.

Общую задачу можно сформулировать так: по заданному множеству вершин $P = \{P_0, P_1, \dots, P_{m-1}, P_m\}$ с учетом их нумерации построить гладкую кривую, которая, плавно изменяясь, последовательно проходила бы вблизи этих вершин и удовлетворяла некоторым дополнительным условиям.

Эти условия могут иметь различный характер. Например, можно потребовать, чтобы искомая кривая проходила через все заданные вершины или, проходя через заданные вершины, касалась заданных направлений, являлась замкнутой или имела заданную регулярность и т. п.

При отыскании подходящего решения задачи приближения важную роль играет ломаная, звенья которой соединяют соседние вершины заданного набора. Эту ломаную называют контрольной или опорной, а ее вершины - контрольными или опорными (рис. 3.1).

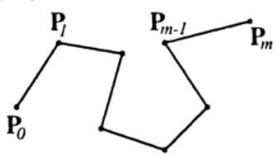


Рис. 3.1

Во многих случаях она довольно точно показывает, как будет проходить искомая кривая, что особенно полезно при решении задачи сглаживания. Каждая вершина заданного массива является либо внутренней, либо граничной (концевой). В массиве P вершины P_i , (i = 1, ..., m-1) внутренние, а вершины P_o и P_m - граничные (концевые).

Описание нужной кривой следует искать в более общей, параметрической форме, например в следующем виде

$$R(t) = \sum a_i(t)P_i \,,$$

где $a_i(t)$ - некоторые функциональные коэффициенты, подлежащие определению.

Если количество вершин в заданном множестве P достаточно велико, то найти универсальные функциональные коэффициенты a_i как правило, довольно затруднительно. Если универсальные коэффициенты все же найдены, то часто оказывается, что они наряду с нужными свойствами обладают и такими, которые не всегда удовлетворительно согласуются с ожидаемым поведением соответствующей кривой (например, кривая, описываемая уравнением с этими коэффициентами, может осциллировать или отклоняться от заданного множества местами очень заметно).

Для успешного решения поставленной задачи приближения, весьма удобно привлечь кривые, составленные из элементарных фрагментов. В случае, когда эти элементарные фрагменты строятся по единой сравнительно простой схеме, такие составные кривые принято называть сплайновыми кривыми.

Параметрические уравнения каждого элементарного фрагмента ищутся в том же виде с той лишь разницей, что всякий раз привлекается только часть заданных вершин множества P, а соответствующие коэффициенты имеют одинаковую природу: часто используются многочлены одинаковой степени, рациональные дроби, экспоненты и др.

Для описания элементарных кривых и вычисления их геометрических характеристик (информация о которых необходима при состыковке) в качестве функциональных коэффициентов обычно используются многочлены невысоких степеней, 2-й или 3-й, в первую очередь потому, что они сравнительно просто вычисляются. Конечно, привлекая многочлены больших степеней, можно описывать весьма сложные кривые. Однако у таких многочленов много коэффициентов, физический и геометрический смысл которых трудно понять. Кроме того, использование многочленов высокой степени может вызвать нежелательные колебания результирующей кривой.

Параметризованные кривые

Параметрически заданной пространственной кривой называется множество γ точек M пространства, декартовы координаты x, y и z которых определяются посредством соотношений

x = x(t), y = y(t), a <t <b,

где x(t),y(t), - функции, непрерывные на отрезке [a,b], или в векторно-матричной форме:

$$R = R(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}, \qquad a \leq t \leq b$$

Эти соотношения называют параметрическими уравнениями кривой γ или просто параметризацией кривой γ.

Гладкие и регулярные кривые

Пространственная кривая γ называется C^r -гладкой относительно за-заданной параметризации, если векторная функция R(r) является C^r - гладкой на отрезке [a, b], то есть каждая из координатных функций x(t), y(t) имеет на отрезке [a, b] непрерывные производные до порядка r включительно (в точках a и b вычисляются односторонние производные, соответственно правая и левая).

Гладкая параметризация называется регулярной, если

$$R' = R'^{(t)} = \begin{pmatrix} x'(t) \\ y'(t) \end{pmatrix} \neq 0, \qquad a \leq t \leq b$$

где точкой обозначается дифференцирование по параметру t.

Величина

$$|R'(t)| = \sqrt{x'^2(t) + y'^2(t)}$$

называется скоростью кривой (относительно заданной параметризации) в точке M=M(t), а

$$s = s(t) = \int_0^t |R'(\varepsilon)| d\varepsilon = \int_0^t \sqrt{x'^2(\varepsilon) + y'^2(\varepsilon)} d\varepsilon$$

- длиной дуги отрезка кривой ‿AM (рис. 3.2).

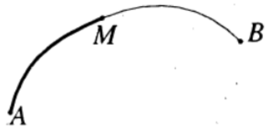


Рис. 3.2

Составные кривые

Часто кривую приходится строить из определенным образом подо-подобранных частей. Для того, чтобы получающаяся в результате составная кривая имела достаточно хорошие геометрические характеристики, важна не только регулярность составляющих ее частичных кривых, но и выполнение определенных требований в стыковочных точках.

Пусть

$$R = R_-(t),\ a_- \le t \le b_-, \qquad R = R_+(t),\ a_+ \le t \le b_+$$

- параметрические уравнения гладких, кривых у$_-$ и у$_+$ соответственно.

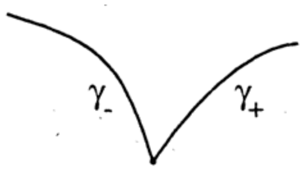
Требования для стыковки составных частей кривой:

Требование 1

Для того чтобы составная кривая у$_-$ U у$_+$ была непрерывна, необходимо,

чтобы правый конец кривой у$_-$ совпадал с левым концом кривой у$_+$:

$$R_-(b_-) = R_+(a_+)$$



Требование 2

$$R'_+(a_+) = \alpha R'_-(b_-) \quad \alpha > 0$$

Требование 3

$$R'_+(a_+) \ne 0 \quad R'_-(b_-) \ne 0$$

Требование 4

$$R''_+(a_+) = {\beta_1}^2 R''_-(b_-) + \beta_2 R'_-(b_-)$$

Итак, задано некоторое множество вершин в двухмерном или трехмерном пространстве

$P = \{P_m(x_m, y_m) |\ m = \overline{0, n}\}$ или $P = \{P_m(x_m, y_m, z_m) |\ m = \overline{0, n}\}$

Тогда (элементарная) кривая Безье степени (n) определяется при помощи векторного уравнения

$\vec{B}(t) = \sum_{m=0}^{n} B_m^n(t)\overrightarrow{P_m}$, $0 \leq t \leq 1$,

где $B_m^n(t) = C_n^m t^m (1-t)^{n-m} = \frac{n!}{m!(n-m)!} t^m (1-t)^{n-m}$,

так называемые, многочлены Бернштейна, о которых уместно сообщить некоторые сведения.

Многочлены Бернштейна:

1) неотрицательны,

2) в сумме составляют единицу:

$$\sum_{i=0}^{m} B_i^m(t) = 1$$

3) не зависят от вершин массива P (универсальны).

Основные свойства кривых Безье

Элементарная кривая Безье, порожденная массивом P:

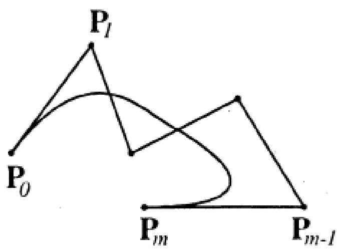
1) является гладкой кривой.

2) начинается в 1-й вершине P_o массива P, $R(0) = P_0$, касаясь отрезка P_0P_1 опорной ломаной,

$R'(0) = m(P_1 - P_0)$,

и заканчивается в последней его вершине P_m, $R(l) = P_m$, касаясь отрезка $_{Pm-1}P_m$ опорной ломаной,

$R'(1) = m(P_m - P_{m-1})$,



3)симметрична - сохраняет свою форму при перемене порядка вер-

шин массива на противоположный;

4) аффинно инвариантна;

5) в случае, если опорные вершины P_0, ..., P_m лежат на одной

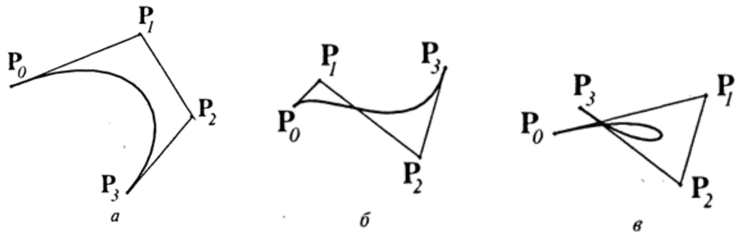
прямой (коллинеарные), кривая Безье совпадает с отрезком P_0P_m;

6) степень функциональных коэффициентов напрямую связана с количеством вершин в массиве (на единицу больше) и растет при его увеличении;

7) при добавлении в массив хотя бы одной вершины возникает необходимость полного пересчета параметрических уравнений элементарной кривой Безье;

8) изменение хотя бы одной вершины в массиве приводит к заметному изменению всей кривой Безье;

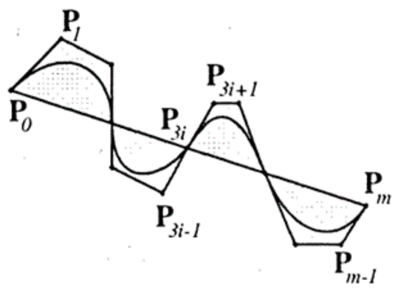
9) априорные сведения о расположении кривой Безье (принадлежность выпуклой оболочке заданного массива вершин) являются достаточно грубыми (на рисунке показан вид кривых Безье для массива из четырех вершин на плоскости при разном порядке их нумерации; нетрудно видеть, что, находясь в одном и том же выпуклом четырехугольнике и пытаясь повторить ход соответствующих опорных ломаных, эти кривые сильно разнятся);



10) в уравнении, описывающем элементарную кривую Безье, нет свободных параметров - заданный массив однозначно определяет кривую Безье, не давая возможности хоть как-то влиять на ее форму;

Условие гладкости составной кубической кривой Безье:

Необходимо, чтобы тройки вершин P_{3i-1},P_{3i}, P_{3i+1} $(i \geq 1)$ были коллинеарны (лежали на одной прямой).



5. Основная часть.

5.1 Определение кривой Безье.

Кривая Безье — параметрическая кривая, задаваемая выражением

$$\mathbf{B}(t) = \sum_{i=0}^{n} \mathbf{P}_i \mathbf{b}_{i,n}(t), \quad 0 \leqslant t \leqslant 1$$

где — функция компонент векторов опорных вершин, а — базисные функции кривой Безье.

$$\mathbf{b}_{i,n}(t) = \binom{n}{i} t^i (1-t)^{n-i},$$

где — число сочетаний из n по i, где n — степень полинома, — i порядковый номер опорной вершины.

5.2 Частные случаи кривой Безье

5.2.1 Линейные кривые

При n = 1 кривая представляет собой отрезок прямой линии, опорные точки P_0 и P_1 определяют его начало и конец. Кривая задаётся уравнением:

.

$$B(t) = (1-t)P_0 + tP_1 \qquad t \in [0,1]$$

5.2.2 Квадратичные кривые

Квадратичная кривая Безье (n = 2) задаётся 3-мя опорными точками: P_0, P_1 и P_2.

$$B(t) = (1-t)^2 P_0 + 2t(1-t)P_1 + t^2 P_2$$

.

$$t = \frac{\mathbf{P}_0 - \mathbf{P}_1 \pm \sqrt{(\mathbf{P}_0 - 2\mathbf{P}_1 + \mathbf{P}_2)\mathbf{B} + \mathbf{P}_1^2 - \mathbf{P}_0\mathbf{P}_2}}{\mathbf{P}_0 - 2\mathbf{P}_1 + \mathbf{P}_2}, \quad \mathbf{P}_0 - 2\mathbf{P}_1 + \mathbf{P}_2 \neq 0$$

$$t = \frac{\mathbf{B} - \mathbf{P}_0}{2(\mathbf{P}_1 - \mathbf{P}_0)}, \quad \mathbf{P}_0 - 2\mathbf{P}_1 + \mathbf{P}_2 = 0, \quad \mathbf{P}_0 \neq \mathbf{P}_1$$

$$t = \sqrt{\frac{\mathbf{B} - \mathbf{P}_0}{\mathbf{P}_2 - \mathbf{P}_1}}, \quad \mathbf{P}_0 = \mathbf{P}_1 \neq \mathbf{P}_2$$

5.2.3 Кубические кривые

В параметрической форме кубическая кривая Безье (n = 3) описывается следующим уравнением:

$$B(t) = (1-t)^3 P_0 + 3t(1-t)^2 P_1 + 3t^2(1-t)P_2 + t^3 P_3 \quad t \in [0,1]$$

.

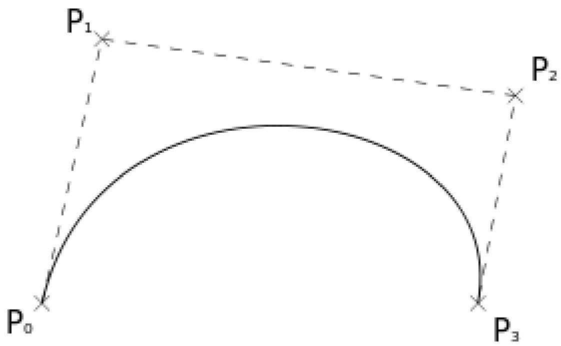


Рисунок 1. Кубическая кривая Безье.

Четыре опорные точки P0, P1, P2 и P3, заданные в 2-х или 3-мерном пространстве определяют форму кривой.

Линия берёт начало из точки P0 направляясь к P1 и заканчивается в точке P3 подходя к ней со стороны P2. То есть кривая не проходит через точки P1 и P2, они используются для указания её направления. Длина отрезка между P0 и P1 определяет, как скоро кривая повернёт к P3.

Квадратичная кривая Безье с координатами преобразовывается в кубическую кривую Безье с координатами

$$(x_0; y_0), \left(x_0 + \frac{2 \cdot (x_1 - x_0)}{3}; y_0 + \frac{2 \cdot (y_1 - y_0)}{3}\right), \left(x_1 + \frac{x_2 - x_1}{3}; y_1 + \frac{y_2 - y_1}{3}\right), (x_2; y_2)$$

5.3 Алгоритм де Кастельжо.

В вычислительной математике алгоритм де Кастельжо, названный в честь его изобретателя Поля де Кастельжо — рекурсивный метод определения формы многочленов Бернштейна или кривых Безье. Алгоритм де Кастельжо также может быть использован для разделения кривой Безье на две части по произвольному значению параметра (t).

Достоинством алгоритма является его более высокая вычислительная устойчивость по сравнению с прямым методом.

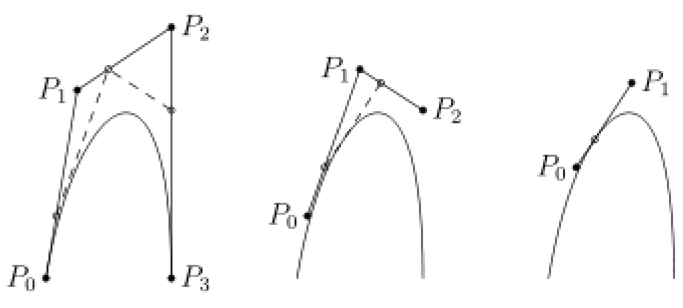
5.3.1 Геометрическая интерпретация алгоритма де Кастельжо.

Задана кривая Безье с опорными точками. Соединив последовательно опорные точки с первой по последнюю, получаем ломаную линию.

Разделяем каждый полученный отрезок этой ломаной в соотношении и соединяем полученные точки. В результате получаем ломаную линию с количеством отрезков, меньшим на один, чем исходная ломаная линия.

Повторяем процесс до тех пор, пока не получим единственную точку. Эта точка и будет являться точкой на заданной кривой Безье с параметром .

Следующая иллюстрация демонстрирует этот процесс для кубической кривой Безье:



Следует заметить, что полученные в процессе построения промежуточные точки являются опорными точками для двух новых кривых Безье, в точности совпадающих с исходной, и в совокупности дающих исходную кривую Безье.

Этот алгоритм не только определяет точку кривой в , но и делит кривую на две части в, а также предоставляет описание двух субкривых в форме Безье.

6. Содержательная постановка задачи

Имеется произвольно выбранный контур, а именно картинка с явно выделенными кривыми. Нужно написать программу, которая будет натягивать составную кривую на данный контур, получать его изображения в различных масштабах и с хорошим качеством. Для соблюдения наглядности работы кривых Безье, следует продемонстрировать программу на нескольких картинках.

7. Математическая постановка задачи

Имеются формулы:

(1) $$B_x(t) = \sum_{m=0}^{n} C_n^m t^m (1-t)^{n-m} x_m, \qquad B_y(t) = \sum_{m=0}^{n} C_n^m t^m (1-t)^{n-m} y_m$$

(2) $$\begin{aligned} c_x &= 3(x_1 - x_0) \\ b_x &= 3(x_0 - 2x_1 + x_2) = 3(x_2 - x_1) - c_x \\ a_x &= x_3 + 3x_1 - 3x_2 - x_0 = x_3 - x_0 - 3[(x_2 - x_1) + (x_1 - x_0) - (x_1 - x_0)] = \\ &= x_3 - x_0 - b_x - c_x \end{aligned}$$

(3) $$\begin{aligned} c_y &= 3(y_1 - y_0) \\ b_y &= 3(y_2 - y_1) - c_y \\ a_y &= y_3 - y_0 - b_y - c_y \end{aligned}$$

Требуется:

а) Построить элементарные кривые Безье третьего порядка по формулам 1 - 3.

б) Натянуть составную кривую на произвольно выбранный контур и получить его изображения в различных масштабах.

в) Найти формулы деления элементарной кривой в отношении

8. Программная и техническая реализация.

8.1. Листинг

```
List<double> gr = new List<double>();
double[] ptind = new double[POINTS_ON_CURVE];
double[] p = new double[POINTS_ON_CURVE];
int k = 0;
if (ptList.Count > 8)
{

for (int i = 0; i < ptList.Count; i += 2)
{
k++;

if ((k == 4) && (i < ptList.Count - 1))
{
double xs = (ptList[i-2] + ptList[i]) / 2;
double ys = (ptList[i-1] + ptList[i + 1]) / 2;
gr.Add(xs);
gr.Add(ys);
gr.Add(xs);
gr.Add(ys);
k = 2;
}
gr.Add(ptList[i]);
gr.Add(ptList[i + 1]);
}
for (int i = 0; i < 8*(gr.Count / 8); i += 8)
{
double[] send = new double[8];
... заполнение массива
bc.Bezier2D(send, (POINTS_ON_CURVE) / 2, ptind);
for (int j = 1; j != POINTS_ON_CURVE - 1; j += 2)
{
g.DrawRectangle(newpx, new Rectangle((int)ptind[j + 1], (int)ptind[j],
1, 1));
gp.DrawRectangle(newpx, new Rectangle((int)ptind[j + 1], (int)ptind[j],
1, 1)); } }
for (int i = (8*(gr.Count / 8)); i < gr.Count; i += 100)
```

```
{
double[] send = new double[gr.Count - (8 * (gr.Count / 8))];
...заполнение оставшихся точек

bc.Bezier2D(send, (POINTS_ON_CURVE) / 2, ptind);
for (int j = 1; j != POINTS_ON_CURVE - 1; j += 2)
{
g.DrawRectangle(newpx, new Rectangle((int)ptind[j + 1], (int)ptind[j],
1, 1));
gp.DrawRectangle(newpx, new Rectangle((int)ptind[j + 1], (int)ptind[j],
1, 1)); }}
```

8.2 Пример работы программы

Рис 1. Выделение контуров автомобиля с использованием кривых Безье.

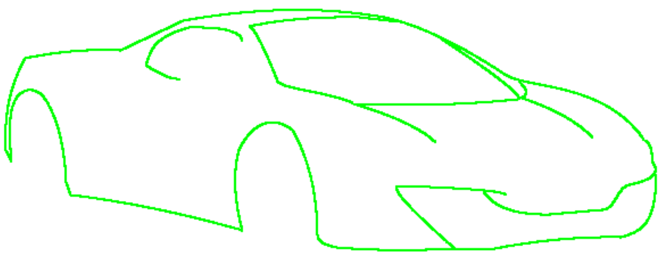
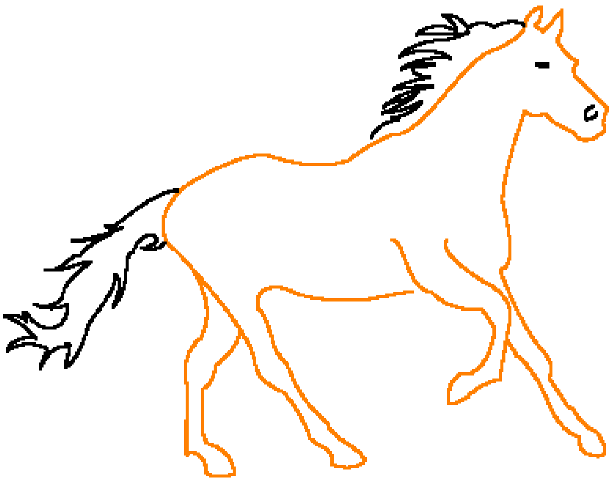


Рис 2. Результат работы программы.



8.2.1 Описание программы

Программа представляет собой оконное приложение (созданное средствами языка C#). Основное пространство интерфейса отведено под изображение, на котором пользователь может ставить опорные точки, по которым будет строиться кривая Безье. Для удобства работы с программой есть кнопки, которые дают дополнительные возможности для управления кривой. Можно задать цвет самой кривой(кнопка color) и опорных точек(кнопка points), можно всё стереть и начать заново(кнопка refresh).Элементы Curve point и User points отображают текущие цвета. Кнопка new позволяет начать построенные новой кривой, уже не привязанной к предыдущим. Image открывает диалоговое окно для выбора изображения с компьютера. Save открывает диалоговое окно для выбора места сохранения файла, по умолчанию изображённые кривые сохраняются в формате png.

Список литературы

1. Е.В. Шикин и А.И. Плис. «Кривые и поверхности на экране компьютера» (руководство по сплайнам для пользователей) М: ДИАЛОГ – МИФИ 1996

2. Алберг Дж. Нильсон Э.Уолш.Дж. «Теория сплайнов и ее приложения». М: Мир 1972-318 с.

3. Денискин Ю.И. «Геометрическое моделирование криволинейных объектов с использованием барицентрических координат». Прикладная геометрия - 1999-вып.1 №1

4. https://learn.javascript.ru/bezier [Электронный ресурс]

5.http://optic.cs.nstu.ru/files/CC/CompGraph/L5_Кривые%20Безье.pdf [Электронный ресурс]

6. https://pomax.github.io/bezierinfo [Электронный ресурс]