# Teorema delle Contrazioni per Funzioni Vettoriali Differenziabili

## Premessa

Sia $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, con $X \subseteq \mathbb{R}^n$. Supponiamo che $f$ sia differenziabile. Per la definizione di differenziabilità:

- Ogni componente scalare $f_\alpha : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, per $\alpha = 1, \dots, m$, è differenziabile in $x \in X$.
- Esiste la matrice Jacobiana $Df(x)$, data da:

$$Df(x) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n} \end{bmatrix}.$$

Dato che $f$ è differenziabile, possiamo scrivere localmente l'approssimazione lineare di $f$:

$$f(x+h) \approx f(x) + Df(x)h,$$

dove $Df(x)h$ rappresenta il prodotto tra la Jacobiana e il vettore $h$.

## Collegamento con il Teorema delle Contrazioni

Supponiamo che $f$ sia contrattiva su $X$ rispetto alla norma indotta $\|\cdot\|_p$, ovvero:

$$\|f(x) - f(y)\|_p \leq K\|x - y\|_p, \quad \text{con } K < 1, \forall x, y \in X.$$

Usando l'approssimazione differenziale di $f$, possiamo stimare la differenza tra $f(x+h)$ e $f(x)$:

$$\|f(x+h) - f(x)\|_p \leq \|Df(x)h\|_p.$$

Applicando la proprietà submoltiplicativa della norma indotta:

$$\|Df(x)h\|_p \leq \|Df(x)\|_p \|h\|_p.$$

Per la contrattività, inoltre:

$$\|f(x+h) - f(x)\|_p \leq K\|h\|_p.$$

Quindi, combinando le disuguaglianze ed applicando la disuguaglianza di Cauchy-Schwarz:

$$\|Df(x)\|_p \|h\|_p \leq K\|h\|_p,$$

da cui segue:

$$\|Df(x)\|_p \leq K.$$

## Dimostrazione della Convergenza

Fissiamo un punto arbitrario $x_0 \in X$ e consideriamo la successione definita da:

$$x_{n+1} = f(x_n), \quad \text{per ogni } n \in \mathbb{N}.$$

Poiché $f$ è una contrazione, cioè esiste $L < 1$ tale che:

$$d(f(x), f(y)) \leq L \cdot d(x, y),$$

possiamo provare che la successione $(x_n)$ è di Cauchy. Infatti:

$$d(x_{n+1}, x_n) = d(f(x_n), f(x_{n-1})) \leq L \cdot d(x_n, x_{n-1}).$$

Iterando questo procedimento, otteniamo:

$$d(x_{n+k}, x_n) \leq L^n \cdot d(x_1, x_0).$$

Poiché $L < 1$, segue che $d(x_{n+k}, x_n) \to 0$ per $n \to \infty$, cioè la successione $(x_n)$ è di Cauchy. Per completezza di $X$ (spazio di Banach), $(x_n)$ converge ad un punto $x^* \in X$.

## Conclusioni

1. **Esistenza del punto fisso:** Grazie al Teorema delle Contrazioni, se la norma della Jacobiana soddisfa $\|Df(x)\|_p \leq K < 1$, allora esiste un unico punto fisso $x^* \in X$ tale che:

   $$f(x^*) = x^*.$$

2. **Convergenza della successione:** La successione iterativa definita da:

   $$x_{n+1} = f(x_n), \quad x_0 \in X,$$

   converge al punto fisso $x^*$.

3. **Coerenza con il Teorema delle Contrazioni:** Se $\|Df(x)\|_p \leq K < 1$, allora $f$ è contrattiva rispetto alla norma indotta $\|\cdot\|_p$, coerentemente con il Teorema delle Contrazioni. Questo implica la convergenza della successione e l'esistenza del punto fisso.