UV Traitement du signal

***Cours 8***

## Systèmes linéaires discrets

Définition et caractérisations (temporelle et fréquentielle)

**ASI 3**

# Contenu du cours

- Introduction
  - Définition d'un système discret
  - Classification des systèmes discrets
- Caractérisation temporelle des systèmes linéaires discrets
  - Notion de convolution linéaire de signaux discrets
  - Réponse impulsionnelle d'un système (stabilité, réponse à une entrée quelconque)
  - Système linéaire discret décrit par une équation aux différences
- Réponse fréquentielle des systèmes linéaires discrets
  - Caractérisation des SLID par la fonction de transfert
  - Transformée en z
    - Définition
    - Propriétés
    - SLID et Transformée en z
    - Pôles et zéros
    - Stabilité d'un SLID

# Introduction

## ❑ Définition d'un système discret

Un système discret est une entité qui réalise la conversion d'une suite discrète $\{x(n)\}$ en entrée en une autre suite discrète $\{y(n)\}$ en sortie.

$$\text{Signal d'entrée } x(n) \longrightarrow \boxed{\begin{array}{c}\text{Système discret}\\ \mathcal{T}\end{array}} \longrightarrow \begin{array}{l}\text{Signal de sortie}\\ \text{ou réponse } y(n)\end{array}$$

Notation : $y(n) = \mathcal{T}\left[x(n)\right]$

## ❑ Classification des systèmes

- **Système statique ou sans mémoire**

  L'échantillon de sortie $y(n)$ à l'instant $n$ ne dépend que de l'échantillon de l'entrée $x(n)$ au même instant

  <u>Exemple</u> :

  $$y(n) = ax^2(n) + b$$

- **Système dynamique ou avec mémoire**

  L'échantillon $y(n)$ est fonction des échantillons de l'entrée aux instants antérieurs ou égaux à $n$ et/ou des échantillons de sortie antérieurs à l'instant $n$

  <u>Exemple</u> : $y(n) = a_1 y(n-1) + a_2\sqrt{y(n-2)} + b_0 x^2(n) + b_1 x(n-1)$

# Introduction

## Exemple de systèmes dynamiques : « Voice transformer »

Signal d'entrée $x(n)$ $\longrightarrow$ Système discret $\mathcal{T}$ $\longrightarrow$ Signal de sortie ou réponse $y(n)$

- Effet « écho » : ajout au signal d'entrée le même son retardé

$$y(t)=x(t)+x(t-t_0)$$

- Effet « réverbération » : addition d'échos successifs avec retards et filtrages différents (atténuations)

$$y(t)=x(t)+\sum_{n=0}^{nbechos}\frac{A}{2^n}x(t-nt_0)$$

- Effet « voix de robot » : addition d'un tremolo

$$y(t)=x(t)+\sin(2\pi f_0 t)$$

- Effet « flanger », « chorus », « wha wha », etc.

# Introduction

## Classification des systèmes

- **Linéarité**

  Si $x(n) = a_1 x_1(n) + a_2 x_2(n)$ alors $y(n) = a_1 \mathcal{T}\left[x_1(n)\right] + a_2 \mathcal{T}\left[x_2(n)\right]$

- **Causalité**

  La réponse $y(n)$ du système à l'instant $n{=}k_0$ ne dépend que des entrées $x(n)$ aux instants $n \leq k_0$

- **Invariance temporelle**

  Si $y(n) = \mathcal{T}\left[x(n)\right]$ alors $y(n-n_0) = \mathcal{T}\left[x(n-n_0)\right] \quad \forall\, n, n_0 \in \mathbb{Z}$

  <u>Exemples</u>

  - $y(n) = x(n) - x(n-1)$ est un système invariant
  - $y(n) = n x(n)$ est un système variant

- **Stabilité BIBO (Bounded Input, Bounded Output)**

  Un système discret est dit stable si en réponse à une entrée bornée, sa sortie est bornée

  $$\exists\, M_x \,/\, \left|x(n)\right| < M_x \Rightarrow \exists\, M_y \,/\, \left|\, y(n) = \mathcal{T}\left[x(n)\right] \right| < M_y \quad \forall\, n \in \mathbb{Z}$$

# Convolution linéaire de signaux discrets

## Définition

On appelle produit de convolution linéaire de deux signaux discrets $x(n)$ et $h(n)$, l'expression

$$x(n) * h(n) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x(k)h(n-k)$$

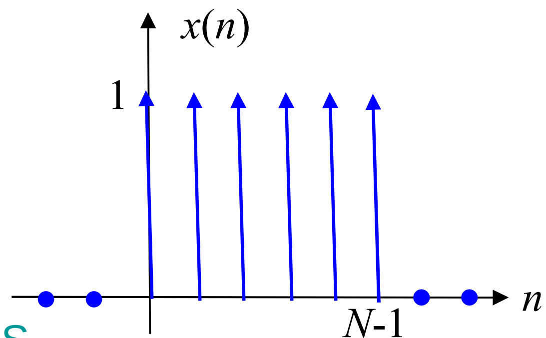
- Cas de signaux causaux  ( $x(n) = 0,\ h(n) = 0$ pour $n < 0$)

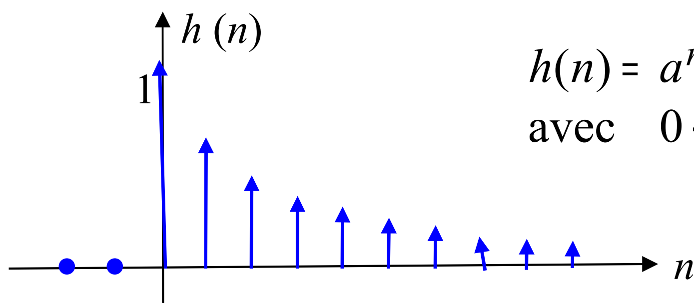
$$x(n) * h(n) = \sum_{k=0}^{n} x(k)h(n-k)$$

⚠ Ne pas confondre la convolution linéaire et la convolution circulaire des signaux discrets

## Exemple

Calculer le produit de convolution linéaire des signaux suivants




$h(n) = a^n \Gamma(n)$

avec $0 < a < 1$

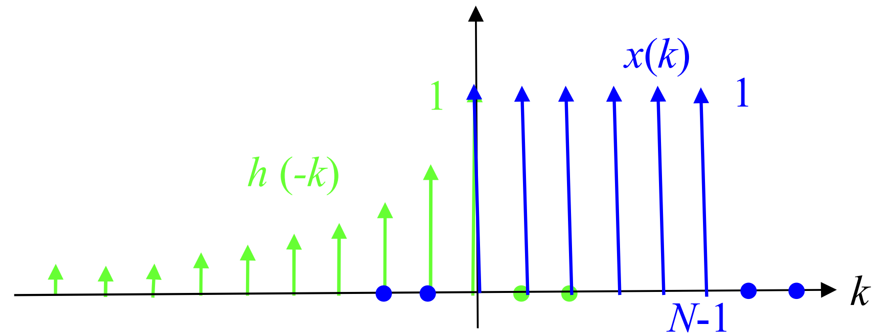
# Convolution linéaire de signaux discrets

## Exemple (suite et fin)

Posons $z(n) = x(n) * h(n)$. Les 2 signaux étant causaux, on a

$$z(n) = \sum_{k=0}^{n} x(k)h(n-k)$$

On distingue 3 cas

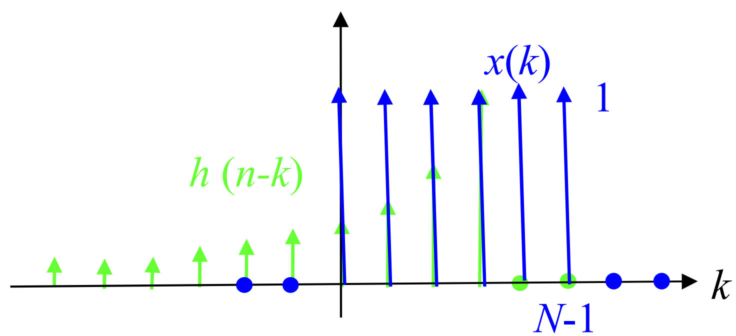



### ▪ $n < 0$

$x(k)$ et $h(n-k)$ n'ont pas d'échantillons non nuls en commun

$$z(n) = 0$$

### ▪ $0 \leq n < N-1$

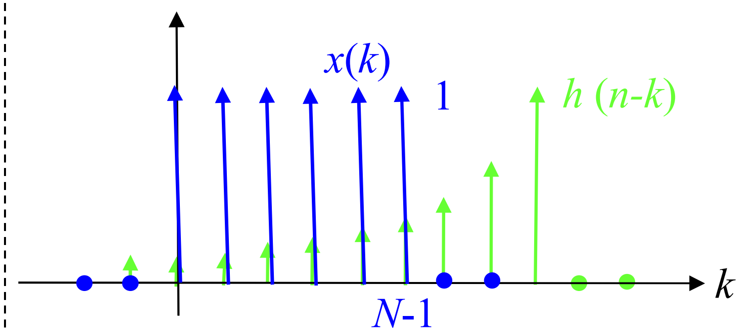



$$z(n) = \sum_{k=0}^{n} a^{n-k}.$$

Suite géo. de premier terme $a^n$ et de raison 1/a

$$z(n) = a^n \frac{1-a^{-(n+1)}}{1-a^{-1}} \rightarrow z(n) = \frac{a^{(n+1)}-1}{a-1}$$

### ▪ $n \geq N-1$




$$z(n) = \sum_{k=0}^{N-1} a^{n-k}.$$

On trouve

$$z(n) = a^n \frac{1-a^{-N}}{1-a^{-1}}$$

# Convolution linéaire de signaux discrets

## Propriétés (idem analogique)

- Commutativité

$$x(n) * h(n) = x(n) * h(n)$$

- Associativité

$$x(n) * h(n) * z(n) = x(n) * \left(h(n) * z(n)\right) = \left(x(n) * h(n)\right) * z(n)$$

- Distributivité par rapport à l'addition

$$h(n) * \left(x(n) + z(n)\right) = h(n) * x(n) + h(n) * z(n)$$

- Elément neutre du produit de convolution : impulsion de Dirac

$$x(n) * \delta(n) = x(n)$$

et aussi :

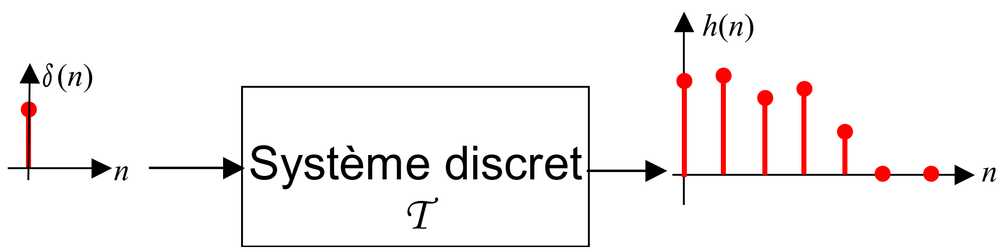
- Durée d'un signal issu du produit de convolution linéaire

Si $x(n)$ est de durée $N_1$ et $h(n)$ de durée $N_2$, alors $x(n)_* h(n)$ est de durée $N_1+N_2-1$

# Etude de système linéaire invariant discret (SLID)

- Caractérisation d'un SLID : réponse impulsionnelle

La réponse impulsionnelle d'un système discret est sa réponse à une entrée sous forme d'impulsion de Dirac




$$h(n) = \mathcal{T}[\delta(n)]$$

- Avantages de la réponse impulsionnelle : idem analogique
  - caractérisation complète du système
  - permet de calculer la sortie du système discret pour des signaux d'entrée quelconques en utilisant la convolution linéaire de signaux discrets

# Réponse d'un SLID à une entrée quelconque

## Application de la convolution linéaire

$$x(n) \longrightarrow \boxed{\text{Système } \mathcal{T}} \longrightarrow y(n) = \ ?$$

Décomposition du signal discret $x(n)$

$$x(n) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} x(k)\delta(n-k)$$

Réponse du système

$$y(n) = \mathcal{T}\left[x(n)\right] \quad \Rightarrow \quad y(n) = \mathcal{T}\left[\sum_{k \in \mathbb{Z}} x(k)\delta(n-k)\right]$$

Propriété de linéarité du système discret

$$y(n) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} x(k)\mathcal{T}\left[\delta(n-k)\right]$$

L'opérateur $\mathcal{T}[.]$ agit sur les termes dépendant de la variable temporelle $n$

Propriété d'invariance temporelle du système

$$\mathcal{T}\left[\delta(n-k)\right] = h(n-k)$$

Réponse impulsionnelle décalée

On en déduit

$$y(n) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} x(k)h(n-k) \quad \Rightarrow \quad \boxed{y(n) = x(n) * h(n)}$$

La réponse d'un système discret linéaire invariant à une entrée quelconque $x(n)$ est la convolution linéaire de $x(n)$ avec la réponse impulsionnelle $h(n)$ du système.

# Réponse impulsionnelle d'un SLID

## Stabilité et réponse impulsionnelle

Stabilité = garantir que la sortie d'un système est bornée si son entrée est bornée

Un système linéaire discret invariant est stable ssi sa réponse impulsionnelle est absolument sommable

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} |h(n)| < +\infty$$

## Causalité et réponse impulsionnelle

Un système linéaire discret invariant est causal ssi sa réponse impulsionnelle $h(n)$ est causale

$$h(n) = 0 \quad \forall\, n < 0$$

- Remarque : si le système est causal, on a

$$y(n) = x(n) * h(n) = \sum_{k=-\infty}^{n} x(k)h(n-k)$$

## Exemple

Etudier la causalité et la stabilité du système linéaire caractérisé par la réponse impulsionnelle

$$h(n) = a^n \Gamma(n)$$

# Autre caractérisation d'un SLID

## Equation aux différences linéaire à coefficients constants

Système régi par une équation aux différences d'ordre $N$

$$\sum_{k=0}^{N} a_k y(n-k) = \sum_{r=0}^{M} b_r x(n-r) \longrightarrow y(n) = -\sum_{k=1}^{N} \frac{a_k}{a_0} y(n-k) + \sum_{r=0}^{M} \frac{b_r}{a_0} x(n-r)$$

### Avantages

- Calcul de la sortie du système sans connaissance de la réponse impulsionnelle $h(n)$

- Calcul de la sortie $y(n)$ à partir des $N$ sorties décalées $y(n-k)$, des $M$ entrées décalées $x(n-r)$ et de l'entrée courante $x(n)$. Mais ceci nécessite la *connaissance des conditions initiales du système*

- Quelle que soit la longueur de la réponse impulsionnelle $h(n)$ (finie ou infinie), le nombre d'opérations nécessaires au calcul de $y(n)$ est fini (comparativement au calcul par convolution linéaire)

## Exemple

$$y(n) - ay(n-1) = cx(n)$$

# Autre caractérisation d'un SLID

- Equation aux différences linéaire à coefficients constants

$$\sum_{k=0}^{N} a_k y(n-k) = \sum_{r=0}^{M} b_r x(n-r) \qquad \text{avec } a_0=1$$

- $N=0 \longrightarrow y(n) = \sum_{r=0}^{M} b_r x(n-r)$
  - $y(n)$ dépend de l'entrée courante $x(n)$ et des $M$ entrées précédentes $x(n-r)$
  - Système à *réponse non récursive*
  - La réponse impulsionnelle est finie $\longrightarrow h(n) = \sum_{r=0}^{M} b_r \delta(n-r)$

  On parle de système à *Réponse Impulsionnelle Finie (RIF)*

- $N \geq 1 \longrightarrow y(n) = -\sum_{k=1}^{N} a_k y(n-k) + \sum_{r=0}^{M} b_r x(n-r)$
  - $y(n)$ dépend de l'entrée courante $x(n)$ , des $M$ entrées précédentes $x(n-r)$ mais aussi des $N$ sorties précédentes $y(n-k)$
  - *Système à réponse récursive*
  - Système à *Réponse Impulsionnelle Infinie (RII)*

# SLID et Transformée de Fourier à Temps Discret

$$x(n) \longrightarrow \boxed{\text{Système } \mathcal{T}} \longrightarrow y(n)$$

## Réponse fréquentielle des SLID

$$y(n) = h(n) * x(n)$$

En utilisant le théorème de Plancherel, on a

$$Y(f) = H(f).X(f)$$

$H(f)$ : TFTD de la réponse impulsionnelle ou fonction de transfert du système discret

$H(f)$

- Module $|H(f)|$ : spectre d'amplitude
- Argument $\phi(f) = \arg(H(f))$ : spectre de phase

# Transformée en z (TZ)

## Définition

La TZ est la généralisation de la TFTD. Soit un signal discret $x(n)$. Sa TZ est définie par

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(n).z^{-n} \qquad \text{avec} \qquad z \in \mathbb{C}$$

Rappel : la TFTD de x(n) est :

$$X(f) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(n)e^{-j2\pi nf}$$

## Condition d'existence de la TZ

La transformée existe si la série converge. L'ensemble des valeurs de la variable complexe $z$ pour lesquelles la série converge est appelée Région De Convergence (RDC)

$$RDC = \left\{ z \in \mathbb{C} \ / \ \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \left| x(n).z^{-n} \right| < +\infty \right\}$$

## Exemple

Calculer la TZ de $x(n) = \Gamma(n)$

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(n).z^{-n} \longrightarrow X(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} z^{-n} \longrightarrow X(z) = \lim_{N\to+\infty} \sum_{n=0}^{N-1} z^{-n}$$

$$X(z) = \lim_{N\to+\infty} \frac{1-z^{-N}}{1-z^{-1}}$$

La limite est finie si $\left|z^{-1}\right| < 1$ i.e. $|z| > 1$ $\longrightarrow X(z) = \dfrac{1}{1-z^{-1}}$ pour $|z| > 1$

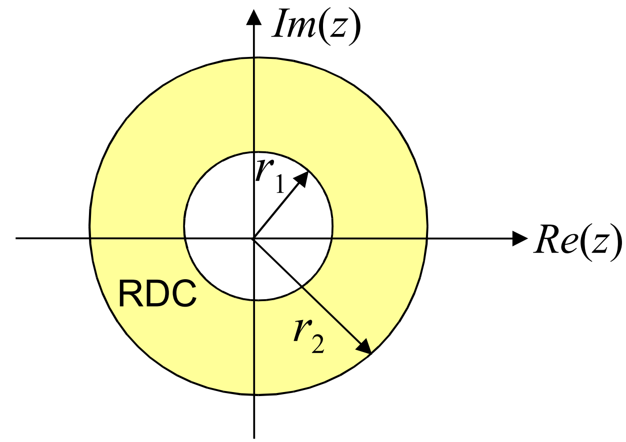
# Transformée en z

## Région de convergence

De façon générale, on montre que la RDC est un anneau de convergence défini par

$$0 \leq r_1 \leq |z| \leq r_2 \leq +\infty$$

avec $r_1 = \lim\limits_{n \to +\infty} |x(n)|^{1/n}$ et $r_2 = \lim\limits_{n \to +\infty} |x(-n)|^{-1/n}$

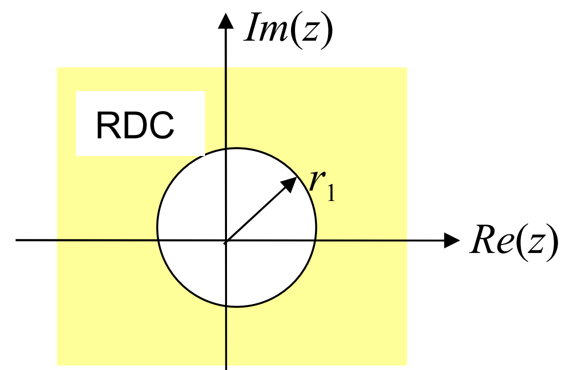



## Remarques

- Si r1 > r2, la série ne converge pas
- Signal défini à droite $\exists\, n_0 \,/\, x(n) = 0 \quad \forall\, n < n_0$

  (signal causal pour $n_0$=0)

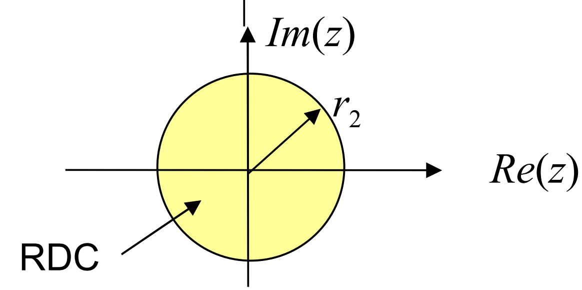
  $r_2 = +\infty$ $\boxed{\text{RDC = région extérieure au cercle de rayon } r_1}$




- Signal défini à gauche $\exists\, n_0 \,/\, x(n) = 0 \quad \forall\, n > n_0$

  (signal anticausal pour $n_0$=0)

  $r_1 = 0$ $\boxed{\text{RDC = disque de rayon } r_2}$



# Transformée en z : propriétés

Soit $x(n)$, un signal discret. Soit $X(z)$ sa TZ avec la RDC : $r_1 \leq |z| \leq r_2$

## Linéarité

$$ax(n) + by(n) \rightarrow aX(z) + bY(z)$$

La RDC est au moins l'intersection de la RDC de $X(z)$ et de la RDC de $Y(z)$

## Changement d'échelle en $z$

$$a^n x(n) \rightarrow X\left(\frac{z}{a}\right)$$

RDC : $|a| r_1 \leq |z| \leq |a| r_2$

## Retournement du temps

$$x(-n) \rightarrow X(z^{-1})$$

RDC : $\frac{1}{r_2} \leq |z| \leq \frac{1}{r_1}$

## Théorème de la valeur finale

$$\lim_{n \to +\infty} x(n) = \lim_{z \to 1} (z-1) X(z)$$

## Décalage temporel

$$x(n - n_0) \rightarrow z^{-n_0} X(z) \quad \forall\, n_0 \in \mathbb{Z}$$

La RDC est identique à l'exception de restrictions éventuelles en $z=0$ et $z=\infty$

## Dérivation en $z$

$$n\,x(n) \rightarrow -z \frac{dX(z)}{dz}$$

La RDC est identique à l'exception de restrictions éventuelles en $z=0$ et $z=\infty$

## Produit de convolution

$$x(n) * y(n) \rightarrow X(z).Y(z)$$

La RDC est au moins l'intersection de la RDC de $X(z)$ et de la RDC de $Y(z)$

# Transformée en z : propriétés

## Transformée en z inverse

- Intégrale de Cauchy $x(n) = \frac{1}{j2\pi}\oint_C X(z)z^{n-1}dz$ (en pratique : théorème des résidus)

$$x(n) = \sum_{z_i = \text{pôles de } z^{n-1}X(z)} Res\{z^{n-1}X(z)\}_{z=z_i}$$

- Décomposition en éléments simples

$$X(z) = \sum_i X_i(z) \longrightarrow x(n) = \sum_i x_i(n)$$

Les $X_i(z)$ sont des fonctions à TZ$^{-1}$ connues

- Développement en série de puissance

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n z^{-n} \longrightarrow x(n) = c_n \quad \forall n$$

Si $X(z)$ peut être décomposé en série alors $x(n)$ est le coefficient associé à $z^{-n}$

## TZ et Transformée de Fourier à Temps Discret (TFTD)

- Hypothèse : on suppose que le cercle unité ($|z|=1$) $\in$ RDC de $X(z)$.

On restreint le calcul de $X(z)$ au cercle unité en posant $z = e^{j2\pi f}$

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(n).e^{-j2\pi fn} = X(f) \longrightarrow X(f) = X(z)\big|_{z=e^{j2\pi f}}$$

($|z|=1$) $\in$ RDC

La transformée de Fourier à temps discret (TFTD) d'un signal est sa transformée en $z$ évaluée sur le cercle unité

# Transformée en z

## Exemples

Calculer la TZ et la région de convergence associée des signaux suivants :

- $x(n) = a^n \Gamma(n), \quad a \in \mathbb{R}^+$

- $x(n) = \begin{cases} a^n, & n \geq 0 \\ -b^n, & n \leq -1 \end{cases}$ avec $|a| < |b|$

- $x(n) = \Gamma(n) - \Gamma(N - n)$

# Transformée en z et systèmes linéaires discrets

## Caractérisation par la réponse impulsionnelle

$$x(n) \longrightarrow \boxed{\text{Système } \mathcal{T}} \longrightarrow y(n)$$

$$y(n) = h(n) * x(n)$$

$$\downarrow$$

$$Y(z) = X(z).H(z)$$

$h(n)$ : réponse impulsionnelle du système

## Caractérisation du SLID par une équation aux récurrences

Equation aux récurrences : $\displaystyle\sum_{k=0}^{N} a_k y(n-k) = \sum_{r=0}^{M} b_r x(n-r)$

En utilisant la propriété de décalage temporel de la TZ, on a : $\displaystyle\left(\sum_{k=0}^{N} a_k z^{-k}\right) Y(z) = \left(\sum_{r=0}^{M} b_r z^{-r}\right) X(z)$

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{\displaystyle\sum_{k=0}^{N} a_k z^{-k}}{\displaystyle\sum_{r=0}^{M} b_r z^{-r}} \quad \text{ou} \quad H(z) = \frac{b_M z^{-M} + \cdots + b_1 z^{-1} + b_0}{a_N z^{-N} + \cdots + a_1 z^{-1} + a_0}$$

La fonction de transfert $H(z)$ a la forme d'une fraction rationnelle : $H(z) = \dfrac{N(z)}{D(z)}$

$N(z)$ et $D(z)$ : polynômes en $z^{-1}$ de degrés respectifs $M$ *pour les entrées* et $N$ *pour les sorties*

# Pôles et zéros – stabilité d'un système discret causal

$$H(z) = \frac{N(z)}{D(z)}$$

## ❑ Zéros d'un système discret

Les zéros sont les racines du polynôme $N(z)$

## ❑ Pôles d'un système discret

Les pôles sont les racines $\lambda_i \in$  du polynôme $D(z)$

➢ Remarque : $H(z)$ diverge ($H(z) = \infty$) pour $z = \lambda_i$
$\Rightarrow \lambda_i \notin$ RDC de $H(z)$

## ❑ Fonction de transfert $H(z)$ et stabilité d'un système discret causal

- **Causalité**

Le système est causal ssi la RDC de $H(z)$ est l'extérieur d'un disque $\Rightarrow \lambda_i \in$ au disque

$$RDC = \{z \in \mathbb{C} , |z| > r\} \longrightarrow \lambda_i \in \{z \in \mathbb{C} , |z| \leq r\}$$

- **Stabilité**

Un système linéaire discret est stable ssi sa FT $H(z)$ converge sur le cercle unité

$$\sum_{n \in \mathbb{N}} |h(n)| < +\infty \Leftrightarrow \{z \in \mathbb{C} , |z| = 1\} \in RDC$$

- **Conclusion**

Un système discret linéaire et causal est stable ssi tous les pôles de $H(z)$ sont à l'intérieur du cercle unité