

Von der Normalform zur Scheitelpunktsform

Wir beginnen mit der Parabel in Normalform:

$$f(x) = ax^2 + bx + c.$$

1. a ausklammern

$$f(x) = a\left(x^2 + \frac{b}{a}x\right) + c.$$

2. Quadratische Ergänzung

Berechne:

$$\left(\frac{b}{2a}\right)^2.$$

Führe sie im Inneren ein und ziehe sie wieder ab:

$$f(x) = a\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \left(\frac{b}{2a}\right)^2 - \left(\frac{b}{2a}\right)^2\right) + c.$$

3. Zum Quadrat zusammenfassen

$$x^2 + \frac{b}{a}x + \left(\frac{b}{2a}\right)^2 = \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2.$$

Damit:

$$f(x) = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - a\left(\frac{b}{2a}\right)^2 + c.$$

4. Vereinfachen

$$-a\left(\frac{b}{2a}\right)^2 = -\frac{b^2}{4a}.$$

5. Scheitelpunktsform

$$f(x) = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \left(c - \frac{b^2}{4a}\right)$$

Scheitelpunkt

$$S\left(-\frac{b}{2a}, c - \frac{b^2}{4a}\right).$$