

Von der Normalform zur Scheitelpunktsform

Wir beginnen mit der Parabel in Normalform:

$$f(x) = \textcolor{blue}{a}x^2 + \textcolor{red}{b}x + \textcolor{green}{c}.$$

1. $\textcolor{blue}{a}$ ausklammern

$$f(x) = \textcolor{blue}{a}\left(x^2 + \frac{\textcolor{red}{b}}{\textcolor{blue}{a}}x\right) + \textcolor{green}{c}.$$

2. Quadratische Ergänzung

Berechne:

$$\left(\frac{\textcolor{red}{b}}{2\textcolor{blue}{a}}\right)^2.$$

Führe sie im Inneren ein und ziehe sie wieder ab:

$$f(x) = \textcolor{blue}{a}\left(x^2 + \frac{\textcolor{red}{b}}{\textcolor{blue}{a}}x + \left(\frac{\textcolor{red}{b}}{2\textcolor{blue}{a}}\right)^2 - \left(\frac{\textcolor{red}{b}}{2\textcolor{blue}{a}}\right)^2\right) + \textcolor{green}{c}.$$

3. Zum Quadrat zusammenfassen

$$x^2 + \frac{\textcolor{red}{b}}{\textcolor{blue}{a}}x + \left(\frac{\textcolor{red}{b}}{2\textcolor{blue}{a}}\right)^2 = \left(x + \frac{\textcolor{red}{b}}{2\textcolor{blue}{a}}\right)^2.$$

Damit:

$$f(x) = \textcolor{blue}{a}\left(x + \frac{\textcolor{red}{b}}{2\textcolor{blue}{a}}\right)^2 - \textcolor{blue}{a}\left(\frac{\textcolor{red}{b}}{2\textcolor{blue}{a}}\right)^2 + \textcolor{green}{c}.$$

4. Vereinfachen

$$-\textcolor{blue}{a}\left(\frac{\textcolor{red}{b}}{2\textcolor{blue}{a}}\right)^2 = -\frac{\textcolor{red}{b}^2}{4\textcolor{blue}{a}}.$$

5. Scheitelpunktsform

$$f(x) = \textcolor{blue}{a}\left(x + \frac{\textcolor{red}{b}}{2\textcolor{blue}{a}}\right)^2 + \left(\textcolor{green}{c} - \frac{\textcolor{red}{b}^2}{4\textcolor{blue}{a}}\right)$$

Scheitelpunkt

$$S\left(-\frac{\textcolor{red}{b}}{2\textcolor{blue}{a}}, \textcolor{green}{c} - \frac{\textcolor{red}{b}^2}{4\textcolor{blue}{a}}\right).$$