سوال اول

$P(z) = N(z|0,1)$

$P(x|z) = N(x\,|\,Wz+\mu, \sigma^2 I)$

الف) می‌دانیم z و ε مستقل هستند و همبستگی ندارند

$\longrightarrow E(x) = E(Wz+\mu+\varepsilon) = \mu$

$\longrightarrow Cov(x) = E[(Wz+\varepsilon)(Wz+\varepsilon)^T]$

$= E[Wzz^TW^T] + E[\varepsilon\varepsilon^T] = WW^T + \sigma^2 I$

ب)

$$P(z|x) = \frac{P(x|z)P(z)}{P(x)} = \frac{N(0,1) \times N(x\,|\,Wz+\mu, \sigma^2 I)}{N(\mu, C)}$$

$$\Longrightarrow P(z|x) = \frac{\left[\frac{1}{(\sqrt{2\pi})^n} \times \exp\left\{\frac{-1}{2} z^T z\right\}\right]\left[\frac{1}{(\sqrt{2\pi})^d} \times \exp\left\{\frac{(x-Wz-\mu)^T(x-Wz-\mu)}{2\sigma^2}\right\}\right]}{\frac{1}{(\sqrt{2\pi})^d} \times \frac{1}{\sqrt{|C|}} \exp\left\{\frac{-1}{2}(x-\mu)^T C^{-1}(x-\mu)\right\}}$$

$$\longrightarrow P(z|x) = \frac{1}{(\sqrt{2\pi})^n} \times \frac{1}{\sqrt{|\sigma^2 \mu^{-1}|}} \exp\left\{\frac{-1}{2}\left(z-\mu^{-1}w^T(x-\mu)\right)^T \times \frac{\mu}{\sigma^2} \times \left(z-\mu^{-1}w^T(x-\mu)\right)\right\}$$

$$\longrightarrow P(z|x) \sim N\left(\mu^{-1}w^T(x-\mu), \sigma^2\mu^{-1}\right)$$

$$\longrightarrow \mu = ww^T + \sigma^2 I$$

سوال دوم

الف) می دانیم که پیچیدگی محاسباتی در الگوریتم ها PCA و LDA برابر $O(d^3)$ است
همچنین می دانیم این مقدار با افزایش ابعاد حساس بوده و افزایش پیدا می کند.
که برای رفع این مشکل از الگوریتم SVD استفاده می کنیم $\longleftarrow$ $O(d \times k \times m)$

ب)

$$x_1 = \{(4{,}2 , 1{,}3), (2, 3.5), (2,4), (3, 5{,}8), (4,5)\} \longrightarrow \underline{\mu_1} = \begin{bmatrix} 3{,}04 \\ 3{,}92 \end{bmatrix}$$

$$x_2 = \{(8,10), (6, 8{,}2), (9,5), (8,7), (10,9)\} \longrightarrow \underline{\mu_2} = \begin{bmatrix} 8{,}2 \\ 7{,}84 \end{bmatrix}$$

$$S = \sum_{x \in C} (x-\mu)(x-\mu)^T \longrightarrow \begin{cases} S_1 = \begin{bmatrix} 4{,}43 & -1{,}72 \\ -1{,}72 & 11{,}748 \end{bmatrix} \\ S_2 = \begin{bmatrix} 8{,}8 & -1{,}24 \\ -1{,}24 & 14{,}92 \end{bmatrix} \end{cases} \longrightarrow S_w = S_1 + S_2 = \begin{bmatrix} 13{,}23 & -2{,}96 \\ -2{,}96 & 26{,}6 \end{bmatrix}$$

$$w = S_w^{-1}(\mu_1 - \mu_2)$$

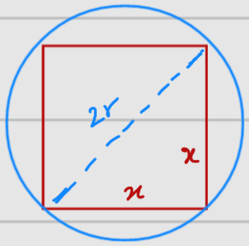
$$w = \begin{bmatrix} 0{,}077 & 0{,}008 \\ 0{,}008 & 0{,}038 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -5{,}16 \\ -3{,}92 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0{,}43 \\ -0{,}19 \end{bmatrix}$$

سؤال سوم

الف) • در یک بعد مکعب منطبق بر کره است ← عرض مکعب = $\overset{R}{\text{قطر کره}}$ = $\overset{r}{\text{شعاع کره}} \times 2$

$\longrightarrow V(H_1) = R = 2r$

• در حالت دوبعدی قطر اصلی مکعب منطبق بر قطر کره است

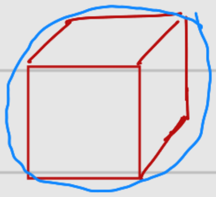


↳ قطر اصلی مکعب = قطر کره = شعاع دایره $\times 2$

$\longrightarrow x^2 + x^2 = (2r)^2 \longrightarrow 2x^2 = 4r^2 \longrightarrow x = \sqrt{2}\, r$

$\longrightarrow V(H_2) = 2r^2$

• در حالت سه بعدی قطر اصلی مکعب منطبق بر قطر کره است



$\longrightarrow x^2 + x^2 + x^2 = (2r)^2 \longrightarrow x^2 = \frac{2}{\sqrt{3}} r$

$\longrightarrow V(H_3) = x^3 = \frac{8}{3\sqrt{3}} r^3$

• در حالت کلی می‌توان بصورت زیر تعمیم داد ←

$$\begin{cases} x = \frac{2}{\sqrt{d}} r \\ V(H_d) = \frac{2^d}{(\sqrt{d})^d} r^d \end{cases}$$

ب)

$$\frac{V(H_1)}{V(k_1)} = \frac{2r}{2r} = 1 \quad \text{و} \quad \frac{V(H_2)}{V(k_2)} = \frac{2r^2}{\pi r^2} = \frac{2}{\pi}$$

$$\text{و} \quad \frac{V(H_3)}{V(k_3)} = \frac{\frac{8}{3} r^3 \sqrt{3}}{\frac{4}{3}\pi r^3} = \frac{2}{\sqrt{3}\,\pi} \xrightarrow{\text{کلی}} \frac{V(H_d)}{V(k_d)} = \frac{\frac{2^d}{(\sqrt{d})^d} r^d}{\frac{(\sqrt{\pi})^d}{\Gamma(d/2+1)} r^d} = \frac{2^d\,\Gamma(d/2+1)}{(\sqrt{d\pi})^d}$$

سوال چهارم

الف)

$$x_1 = \{(1,1),(2,4)\} \longrightarrow \mu_1 = \begin{bmatrix} 1,5 \\ 2,5 \end{bmatrix}$$

$$x_2 = \{(2,5,1),(3,2)\} \longrightarrow \mu_2 = \begin{bmatrix} 2,75 \\ 1,5 \end{bmatrix}$$

$$\longrightarrow S_B = \underbrace{\begin{bmatrix} 1,56 & -1,25 \\ -1,25 & 1 \end{bmatrix}}_{(\mu_+ - \mu_-)(\mu_+ - \mu_-)^T}$$

ب)

$$\longrightarrow S_+ = \begin{bmatrix} -0,5 \\ -1,5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -0,5 & -1,5 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0,5 \\ 1,5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0,5 & 1,5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,5 & 1,5 \\ 1,5 & 4,5 \end{bmatrix}$$

همانند محاسبه بالا برای گروه (1-) داریم

$$S_- = \begin{bmatrix} 0,125 & 0,25 \\ 0,25 & 0,5 \end{bmatrix}$$

$$S_W = S_+ + S_- = \begin{bmatrix} 0,625 & 1,75 \\ 1,75 & 5 \end{bmatrix} \xrightarrow{w = S_W^{-1}(\mu_+ - \mu_-)} w = \begin{bmatrix} 80 & -28 \\ -28 & 10 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1,25 \\ 1 \end{bmatrix}$$

ج)

$$\longrightarrow w = \begin{bmatrix} -128 \\ 45 \end{bmatrix}$$

سوال پنجم

الف)

[k=2]

	x_1	x_2
x_1^T	0	2
x_2^T	0	0
x_3^T	1,5	0
x_4^T	5	0
x_5^T	5	2

initials $\rightarrow$

$$\begin{cases} C_1 = \{x_1, x_2, x_4\} \rightarrow \mu_1 = (5/3, 2/3)^T = (1{,}67, 0{,}67)^T \\ C_2 = \{x_3, x_5\} \rightarrow \mu_2 = (6{,}5/2, 2/2)^T = (3{,}25, 1)^T \end{cases}$$

$$d(p,q) = \sqrt{\sum (q_i - p_i)^2}$$ ← فاصله اقلیدسی

مرحله اول

	$d(\mu_1, x)$		$d(\mu_2, x)$	Cluster
x_1	2,1	<	3,4	C_1
x_2	1,8	<	3,4	C_1
x_3	0,7	<	2	C_1
x_4	3,4	>	2	C_2
x_5	3,6	>	2	C_2

$\mu_1 = (1{,}5/3, 2/3)^T$

$\mu_2 = (10/2, 2/2)^T$

مرحله دوم

	$d(\mu_1, x)$		$d(\mu_2, x)$	Cluster
x_1	1,4	<	5,1	C_1
x_2	0,8	<	5,1	C_1
x_3	1,2	<	3,6	C_1
x_4	4,5	>	1	C_2
x_5	4,7	>	1	C_2

تغییر مشاهده نشد پس الگوریتم را متوقف می کنیم

ب) فاصله منهتن → $d(p,q) = \sum |p_i - q_i|$

مرحله اول

	$d(\mu_1, x)$		$d(\mu_2, x)$	Cluster
x_1	3	<	4,25	C_1
x_2	2,34	<	4,25	C_1
x_3	0,84	<	2,75	C_1
x_4	4	>	2,75	C_2
x_5	4,66	>	2,75	C_2

$\mu_1 = (1{,}5/3, 2/3)$

$\mu_2 = (10/2, 2/2)$

مرحله دو

	$d(\mu_1, x)$		$d(\mu_2, x)$	Cluster
x_1	1,8	<	6	C_1
x_2	1,7	<	6	C_1
x_3	1,6	<	4,5	C_1
x_4	5,1	>	1	C_2
x_5	5,83	>	1	C_2

بدون تغییر توقف