

实验三 使用快速傅里叶变换进行频谱分析

一、实验目的

1. 加深对快速傅里叶变换（FFT）与频谱混叠、频谱泄漏现象的理解；
2. 熟悉应用 FFT 对典型信号进行频谱分析的方法；
3. 了解应用 FFT 进行信号频谱分析以及实际应用可能出现的问题；
4. 熟悉应用 FFT 实现两个序列的线性卷积的方法；
5. 熟悉 FFT 计算与应用的仿真软件编程。

二、实验内容

1. 假设我们已经对连续时间三角脉冲信号和矩形脉冲信号以采样频率 $f_s=1000\text{Hz}$ 进行采样，得到了相应的离散时间序列。要求通过 FFT 分析以下离散时间序列，在绘图窗口绘制幅度谱和相位谱。FFT 样点数选择 $N=10000$ ，以 MATLAB 函数为例，相应函数为 $X_k = \text{fft}(x_n, N)$ 。绘制幅度谱和相位谱时，注意频率区间可以通过样点数和采样频率计算。观察所得结果，结合所学理论（可以参考第一章部分例题得到的结论）进行分析。

$$(1) \text{ 三角波序列: } x_1[n] = \begin{cases} n+1, & 0 \leq n \leq 4, \\ 9-n, & 5 \leq n \leq 8, \\ 0, & \text{其他;} \end{cases}$$

$$(2) \text{ 矩形序列: } x_2[n] = \begin{cases} 1, & 0 \leq n \leq 6, \\ 0, & \text{其他。} \end{cases}$$

2. 取采样频率 $f_s=1000\text{Hz}$ ，样点数 $N=20000$ ，用 FFT 计算下列两个离散序列的线性卷积，在绘图窗口绘制这两个离散序列及其卷积后序列的幅度谱，分析幅度谱之间的关系。计算卷积时，注意离散序列的长度。结合线性卷积 `conv` 函数和圆周卷积函数 `cconv`（以 MATLAB 为例，MWORKS 是 `circleconv`）以及所学知识对 FFT 得到的结果进行验证。

$$(1) x_1[n] = \begin{cases} n+1, & 0 \leq n \leq 4, \\ 10-n, & 5 \leq n \leq 9, \\ 0, & \text{其他,} \end{cases} \quad x_2[n] = \begin{cases} 2^n, & 0 \leq n \leq 5, \\ -2^{n-6}, & 6 \leq n \leq 11, \\ 0, & \text{其他;} \end{cases}$$

$$(2) x_3[n] = \begin{cases} 0.8^n, & 0 \leq n \leq 6, \\ n-3, & 7 \leq n \leq 11, \\ 0, & \text{其他,} \end{cases} \quad x_4[n] = \begin{cases} n-1, & 0 \leq n \leq 4, \\ -0.6^{n-6}, & 5 \leq n \leq 12, \\ 0, & \text{其他。} \end{cases}$$

3. 假设一个连续时间信号 $x(t)$ 由两个正弦信号叠加而成，两个正弦信号的初始相位为零，频率分别是 5Hz 和 9Hz，请按以下要求绘图并进行讨论：

(1) 当采样频率分别为 $f_1 = 5\text{Hz}$ ， $f_2 = 15\text{Hz}$ 和 $f_3 = 40\text{Hz}$ 时，信号采样后取 128 点离散序列，画出离散序列时域波形和频谱幅度谱。

(2) 取采样频率为 60Hz 时 $x(t)$ 的 64 点离散序列，再将其结尾补零加长到 128 点，画出上述两种情况下的离散序列时域波形和频域幅度谱。

(3) 取采样频率为 60Hz 时 $x(t)$ 的 128 点离散序列，画出离散序列时域波形和频域幅度谱，并与 (2) 中结尾补零、加长到 128 点的序列波形和频谱相比较，能发现什么现象？

4. (选做) 音乐趣味小实验

(1) 乐曲解析

乐音的基本特征可以用基波频率、谐波频率和包络波形三个方面来描述，我们用大写英文字母 CDEFGAB 表示每个音的“音名”(或称为“音调”)，当指定某一音名时，它对应固定的基波信号频率。

图 1 表示钢琴的键盘结构，注明了每个琴键对应的音名和基波频率值。这些频率值是按“十二平均律”(八度的音程按波长比例平均分成十二等份)计算导出。图 2 和表 1 分别给出了乐曲《两只老虎》的曲谱和相应的频率。

^bE	E	622.25 Hz	659.25 Hz
^bD	D	554.36 Hz	587.33 Hz
	C		523.25 Hz
^bB	B	466.16 Hz	493.88 Hz
^bA	A	415.30 Hz	440 Hz (f_{A1})
^bG	G	369.99 Hz	392 Hz
	F		349.23 Hz
^bE	E	311.13 Hz	329.63 Hz
^bD	D	277.18 Hz	293.66 Hz
	C		261.63 Hz (中央C, f_{C1})
^bB	B	233.08 Hz	246.94 Hz
^bA	A	207.65 Hz	220 Hz (f_{A0})
^bG	G	184.99 Hz	196 Hz
	F		174.61 Hz

图 1 钢琴键盘和相应频率

两只老虎

1=C $\frac{4}{4}$

1 2 3 1 | 1 2 3 1 | 3 4 5 - | 3 4 5 - |
 两 只 老 虎, 两 只 老 虎, 跑 得 快, 跑 得 快,

图 2 乐曲《两只老虎》曲谱

表 1 曲谱相应频率

乐音	1	2	3	1	1	2	3	1
频率	261.63	293.66	329.63	261.63	261.63	293.66	329.63	261.63
乐音	3	4	5	3	4	5		
乐音	329.63	349.23	392	329.63	349.23	392		

(2) 根据给出的音频文件 laohu.wav 进行分析, 分析出歌曲的音调, 以及对应音调的总时间。

乐音	1	2	3	1	1	2	3	1	3	4
时间	0.5	0.5	0.5	0.5	0.5	0.5	0.5	0.5	0.5	0.5

乐音	5	3	4	5
时间	1	0.5	0.5	1

(3) 根据上面学习的乐理和信号处理知识, 自己合成一个曲谱如图 2 的音乐文件保存为 5-3.wav 文件, 乐音所用的抽样频率为 $f_s=8000\text{Hz}$, 幅度为 1。

(4) 你一定注意到 5-3.wav 乐曲中相邻乐音之间有“啪”的杂声, 这是由于相位不连续产生了高频分量。这种噪声严重影响合成音乐的质量, 丧失真实感, 请通过包络的方法处理, 使得音乐更加和谐, 生成音乐文件 5-4.wav 并画出波形图。

(5) 你是否感觉音乐有些沉闷, 这是因为声音频率不连续。请尝试加入二、三、四次谐波, 使得音乐更加动听, 生成音乐文件 5-5.wav 并画出波形图。

三、实验预习要求

1. 复习与本实验有关的各项基本内容, 认真思考并回答实验思考题。
2. 仔细阅读实验指导书, 熟悉实验内容、要求和注意事项。

3. 认真阅读程序使用说明，掌握有关函数使用方法。
4. 熟悉相应的编程语言。

四、实验报告要求

1. 给出可实现实验内容的程序代码，绘制相应序列的时域波形和频谱曲线；
2. 对程序中所用变量和函数需加适当注释，画图时需要标注横、纵坐标的含义；
3. 注意 FFT 应用中可能出现的频谱混叠和频谱泄漏问题，结合所学知识进行讨论；
4. 思考并回答实验指导书后面的思考题，实验报告交电子版。

五、实验思考题

1. 阐述线性卷积、圆周卷积和周期卷积的区别和（或）联系。用 FFT 计算线性卷积时，FFT 的长度 N 应满足什么条件？
2. 实数序列的频域幅度谱和相位谱有什么规律？虚数序列的频域幅度谱和相位谱有什么规律？（结合课上所学知识，可以自行设定序列，仿真观察）
3. 同一连续信号离散化后有两种情况，第一种是取较长的离散序列求 FFT；第二种是取较短的离散序列，结尾补零扩展成与第一种中的长度相等，再求 FFT。在上述两种情况下，信号的频谱有何异同点？