

实验二采用 MATLAB

1. 时域采样的验证

代码:

```
clear;
clc;
%1
A=444.128;
a=50*sqrt(2)*pi;
w1=a; %基本参数设置

f=[1000 300 200];
N=floor(0.064.*f); %频率即采样点设置
figure (1);%创建画布
figure (2);%创建画布
%计算不同采样频率对应的采样点和频谱
for i=1:1:3

x=zeros(1,N(i));
k=1;
for t=1/f(i):1/f(i):0.064 %u(t)在 t 等于 0 没有定义，从 1/fs 开始采样
x(k)=A*exp(-a*t)*sin(w1*t);
k=k+1;
end
n=0:1:N(i)-1;
figure(1);
subplot(3,3,3*i-2);
stem(n,x); %绘图设置
str=['1. ' num2str(f(i)) 'Hz 采样点'];
title(str);
xlabel('采样点 n');
ylabel('x(n)');

figure(2);
subplot(3,2,2*i-1);
stem(n,x); %绘图设置
str=['1. ' num2str(f(i)) 'Hz 采样点'];
title(str);
xlabel('采样点 n');
ylabel('x(n)');

%用模拟频率做横坐标
o=0:0.01:2*f(i);
fou=0;
```

```

re=0;
im=0;
for n=1:1:N(i)
re=re+x(n)*cos(2*pi*o*n/f(i));
im=im-x(n)*sin(2*pi*o*n/f(i));
end
fou=sqrt(re.^2+im.^2);
figure(1);
subplot(3,3,3*i-1);
plot(o,fou);
str=['1. ' num2str(f(i)) 'Hz 采样频谱(模拟频率)'];
title(str);
xlabel('f/Hz (模拟频率)');
ylabel('采样序列幅度谱');

```

%用数字角频率做横坐标

```

o=0:0.01:2*pi; %计算 DTFT 频谱， 但将数字角频率取连续的值
fou=0;
re=0;
im=0;
for n=1:1:N(i) %计算 DTFT 频谱的实部和虚部
re=re+x(n)*cos(o*n);
im=im-x(n)*sin(o*n);
end
fou=sqrt(re.^2+im.^2);

```

%画由 DTFT 得到的频谱及绘图设置

```

figure(1);
subplot(3,3,3*i);
plot(o,fou);
xlabel('\Omega/rad (数字角频率 0-2*pi)');
ylabel('采样序列幅度谱 |X(\Omega)|');
str=['1. ' num2str(f(i)) 'Hz 采样频谱(数字角频率)'];
title(str);
xlim([0,2*pi]);

```

%用数字角频率做横坐标

```

o=0:2*pi/N(i):2*pi-2*pi/N(i); %计算 DFT 频谱， 但将数字角频率取连续的值
fou=0;
re=0;
im=0;
for n=1:1:N(i) %计算 DFT 频谱的实部和虚部
re=re+x(n)*cos(o*n);
im=im-x(n)*sin(o*n);

```

```

end
fou=sqrt(re.^2+im.^2);

%画由 DFT 得到的频谱及绘图设置
figure(2);
subplot(3,2,2*i);
plot(o,fou);
xlabel('\Omega/rad (数字角频率 0-2*pi)');
ylabel('采样序列幅度谱 |X(\Omega)|');
str=['1. ' num2str(f(i)) 'Hz 采样频谱(数字角频率)'];
title(str);
xlim([0,2*pi]);
end

```

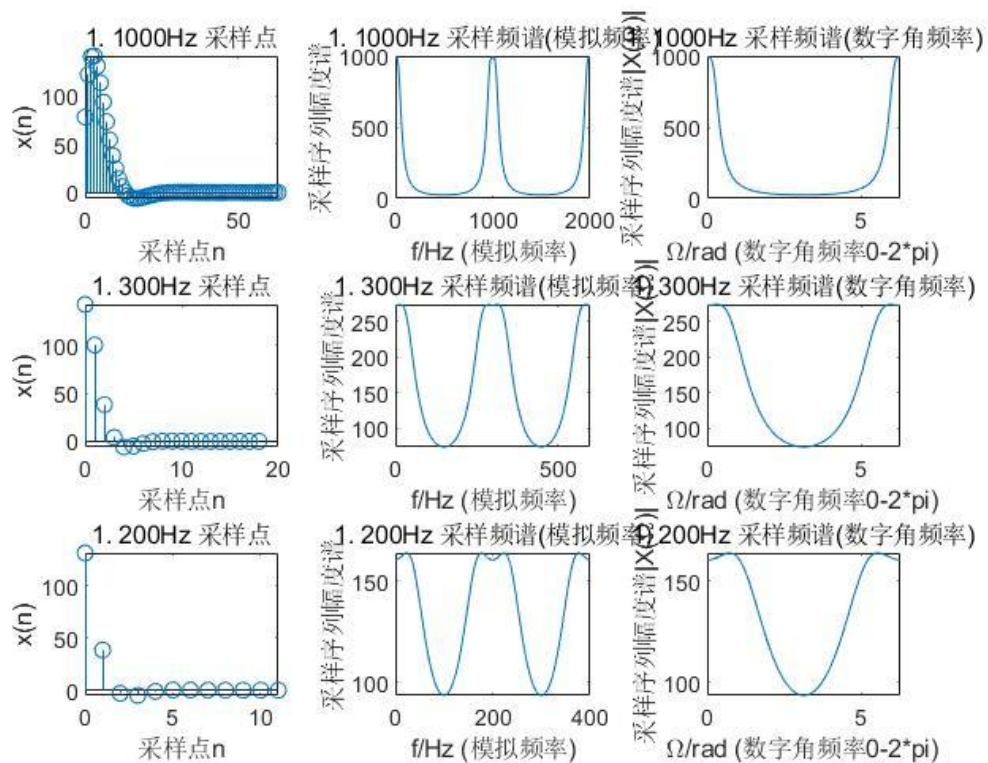
运行截图：

第一种通过 DTFT 求频谱

第一列为采样点图

第二列为幅频特性曲线 模拟频率作横轴

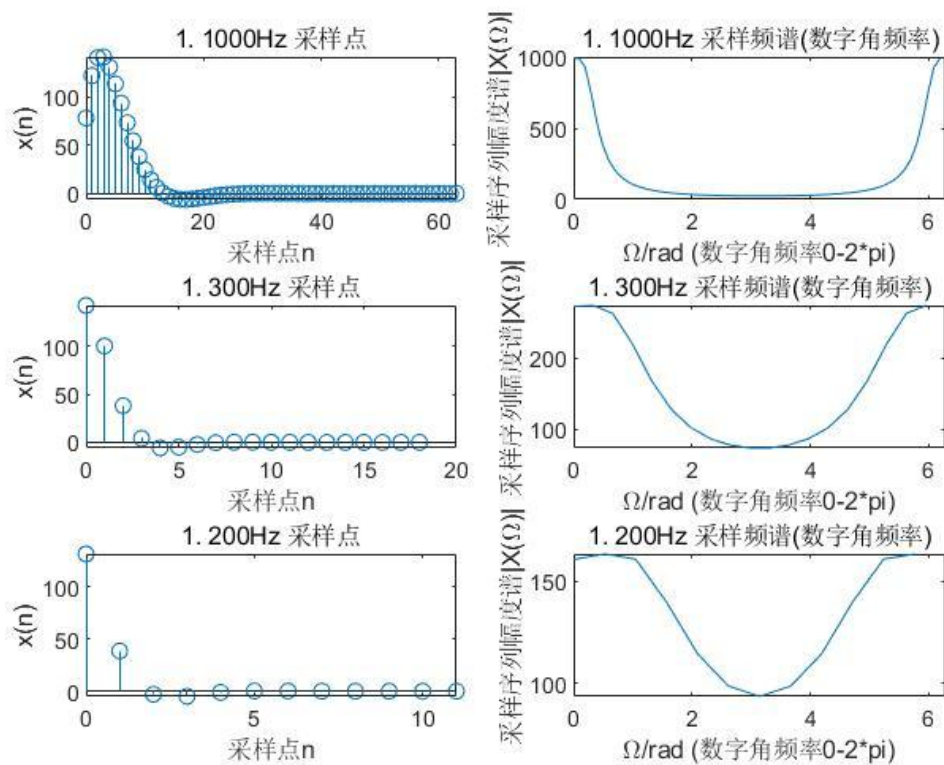
第三列为幅频特性曲线 数字角频率做横轴



第二种通过 DFT 求频谱

第一列为采样点图

第二列为幅频特性曲线 数字频率作横轴



给定的模拟信号在 1000Hz, 300Hz, 200Hz 采样频率下的采样点图和对应的幅度谱图, 可见当采样频率较低时产生了混叠。采样频率越低, 混叠程度越高, 当 $f=1000\text{Hz}$ 时混叠较小, 且幅频特性曲线比较接近原信号频谱

第二问 2. 频域采样的验证

代码:

```
%2
clear;
clc;
figure;%创建画布
O=0:0.01:2*pi;
dtft=0;
re=0;
im=0;
O_32=0:pi/16:2*pi-pi/16;
re_32=0;
im_32=0;
O_16=0:pi/8:2*pi-pi/8;
re_16=0;
im_16=0; %创建 DTFT 横坐标和采样频谱坐标及实部虚部数组
for n=0:1:26
    if n<=13 %n<14 的情况
        re=re+(n+1)*cos(n*O);
        im=im-(n+1)*sin(n*O); %计算 DTFT
```

```

re_32=re_32+(n+1)*cos(n*0_32);
im_32=im_32-(n+1)*sin(n*0_32); %对实部和虚部在 DTFT 谱上 32 点采样
re_16=re_16+(n+1)*cos(n*0_16);
im_16=im_16-(n+1)*sin(n*0_16); %对实部和虚部在 DTFT 谱上 16 点采样
end
if n>13 %n>13 的情况
re=re+(27-n)*cos(n*0);
im=im-(27-n)*sin(n*0); %计算 DTFT
re_32=re_32+(27-n)*cos(n*0_32);
im_32=im_32-(27-n)*sin(n*0_32); %对实部和虚部在 DTFT 谱上 32 点采样
re_16=re_16+(27-n)*cos(n*0_16);
im_16=im_16-(27-n)*sin(n*0_16); %对实部和虚部在 DTFT 谱上 16 点采样
end
end
dtft=sqrt(re.^2+im.^2);
dft_32=sqrt(re_32.^2+im_32.^2);
dft_16=sqrt(re_16.^2+im_16.^2); %计算 DTFT 幅度谱 32 点采样频域幅度谱 16 点采样频域幅度谱
subplot(3,2,1); %画 DTFT 幅度谱
plot(0,dtft);
xlim([0,2*pi]);
xlabel('\Omega/rad (数字角频率 0-2*pi)');
ylabel('|X(\Omega)|');
title('DTFT 频谱');
subplot(3,2,3); %画 32 点频域采样频谱
stem(0_32,dft_32);
xlim([0,2*pi]);
xlabel('k\Omega/rad (\Omega=2*pi/32)');
ylabel('|X32(k)|');
title('32 点采样频谱');
subplot(3,2,5); %画 16 点频域采样频谱
stem(0_16,dft_16);
title('16 点采样频谱');
xlim([0,2*pi]);
xlabel('k\Omega/rad (\Omega=2*pi/16)');
ylabel('|X16(k)|');

%画时域图
x=zeros(1,32);
n=1;
for i=0:1:26
if i<=13
x(n)=i+1;
end

```

```

if i>13
x(n)=27-i;
end
n=n+1;
end
n=0:1:31;
subplot(3,2,2); %画原信号
stem(n,x);
title('x(n)');
ylabel('x(n)');
xlabel('n');
xlim([0 31]);

x_32_re=zeros(1,32); %计算由频域 32 点采样的道德 IDFT x32(n)
x_32_im=zeros(1,32);
for n=1:1:32
for i=1:1:32 %计算 IDFT
x_32_re(n)=
x_32_re(n)+re_32(i)*cos((i-1)*2*pi*(n-1)/32)/32-im_32(i)*sin((i-1)*2*pi*(n-
1)/32)/32;
x_32_im(n)=
x_32_im(n)+im_32(i)*cos((i-1)*2*pi*(n-1)/32)/32+re_32(i)*sin((i-1)*2*pi*(n-
1)/32)/32;
end
end
subplot(3,2,4);
n=0:1:32-1;
stem(n,x_32_re); %画 32 点 IDFT 序列 x32(n)
title('32 点 IDFT 序列 x32(n)');
ylabel('x32(n)');
xlabel('n');
xlim([0 31]);

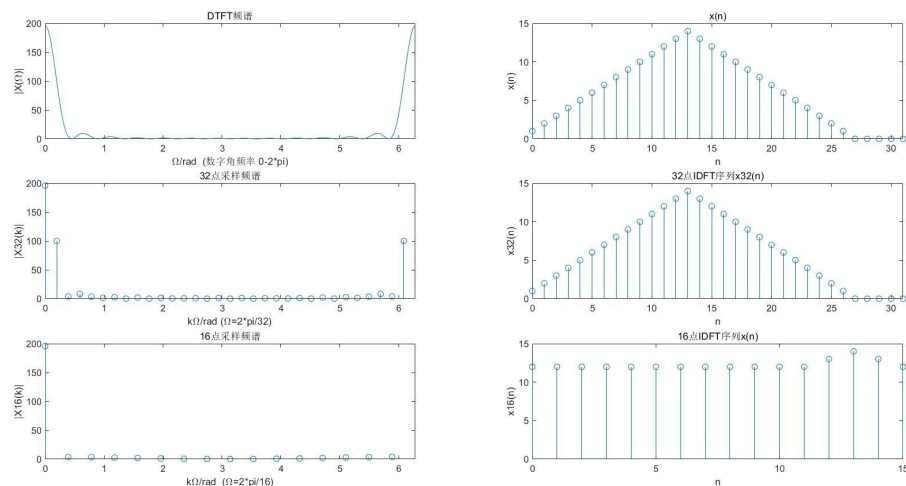
x_16_re=zeros(1,16);
x_16_im=zeros(1,16); %计算由频域 16 点采样的道德 IDFT x16(n)
for n=1:1:16
for i=1:1:16 %计算 IDFT
x_16_re(n)=
x_16_re(n)+re_16(i)*cos((i-1)*2*pi*(n-1)/16)/16-im_16(i)*sin((i-1)*2*pi*(n-
1)/16)/16;
x_16_im(n)=
x_16_im(n)+im_16(i)*cos((i-1)*2*pi*(n-1)/16)/16+re_16(i)*sin((i-1)*2*pi*(n-
1)/16)/16;
end
end

```

```

end
subplot(3,2,6);
n=0:1:16-1;
stem(n,x_16_re); %画 16 点 IDFT 序列 x16(n)
title('16 点 IDFT 序列 x(n)');
ylabel('x16(n)');
xlabel('n');
xlim([0 15]);
运行结果：

```



上图是利用 DFT 得到的三角波序列的频谱和在频域采样后对应的时域图像。当频域的采样间隔较大，采样频率较低时，对应的时域信号发生了混叠，32 点频域采样时域序列未发生混叠，16 点频域采样时域序列发生混叠，

实验思考题

1. 如果序列 $x(n)$ 的长度为 M ，希望得到其频谱 $X(e^{j\omega})$ 在 $[0, 2\pi]$ 上的 N 点等间隔采样，
当 $N < M$ 时，如何用一次最少点数的 DFT 得到该频谱采样？
将原序列以 N 为长度周期延拓，之后取延拓后的序列做 N 点 DFT，所得即为原序列频谱的 N 点等间隔采样，证明在下图

DFT

$$X(\Omega) = \sum_{n=0}^{M-1} x(n) e^{-j\Omega n}$$

等距采样 $X(k\Omega_0) = X(\Omega) \big|_{\Omega = \frac{2\pi k}{N}}$

$$X(k\Omega_0) = \sum_{n=0}^{M-1} x(n) e^{-j\frac{2\pi}{N}kn}$$

~~$$X(\Omega) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} X(\Omega) e^{j\Omega n} d\Omega$$~~

~~$$X(k\Omega_0) = \sum_{n=0}^{M-1} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} X(\Omega) e^{j\Omega n} e^{-j\frac{2\pi}{N}kn} d\Omega$$~~
~~$$= \sum_{n=0}^{M-1} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} X(\Omega) e^{j\Omega n} e^{-j\frac{2\pi}{N}kn} d\Omega$$~~

$M > N$

$$\begin{aligned} X(k\Omega_0) &= \sum_{n=0}^{N-1} x(n) e^{-j\frac{2\pi}{N}kn} + \sum_{n=N}^{M-1} x(n) e^{-j\frac{2\pi}{N}kn} \\ &= \sum_{n=0}^{N-1} x(n) e^{-j\frac{2\pi}{N}kn} + \sum_{m=0}^{M-N-1} x(N+m) e^{-j\frac{2\pi}{N}k(N+m)} \\ &= \sum_{n=0}^{N-1} [x(n) + x(N+n) + \dots] e^{-j\frac{2\pi}{N}kn} \\ &= \sum_{n=0}^{N-1} \left(\sum_{k=0}^{\lfloor \frac{M}{N} \rfloor} x(n+kN) \right) e^{-j\frac{2\pi}{N}kn} \end{aligned}$$

$n+kN < M$

易得 $\left(\sum_{k=0}^{\lfloor \frac{M}{N} \rfloor} x(n+kN) \right)_{n+kN < M}$ 为新构造序列

$$= \left(\sum_{k=-\infty}^{+\infty} x(n-kN) \right) R_N(n)$$

即在序列以 N 为长度周期延拓后的主值区间

2. 在时域采样的验证过程中, 为什么采用 DFT (离散傅里叶变换) 或者 FFT (快速傅里叶变换) 求模拟信号的幅频特性?
通过采样求模拟信号的幅频特性得到的幅频特性为

$$X_s(\omega) = \mathcal{F}[x_s(t)] = \frac{1}{T_s} \sum_{n=-\infty}^{\infty} X(\omega - n\omega_s)$$

求解过程为对冲激采样信号傅里叶变换，
冲激采样信号

$$x_s(t) = x(t) \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT_s)$$

对其傅里叶变换，利用冲激信号的筛选性质可得

$$X_s(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \left[x(t) \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT_s) \right] e^{-j\omega t} dt = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} x(t) \delta(t - nT_s) e^{-j\omega t} dt$$

$$X_s(\omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(nT_s) e^{-j\omega nT_s}$$

注意到采样信号 $x(nT_s)$ = 采样序列 $x(n)$ ，将模拟角频率转为数字角频率 $\Omega = \omega T_s$ 后有

$$X_s(\Omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n) e^{-jn\Omega}$$

这正是 DTFT 频谱表达式，

也就是说利用 DTFT 可以得到模拟信号采样后的频谱，其与原模拟信号采样频谱仅在幅度差一个 $1/T_s$ ，这样得到的频谱和采样频率有关，当采样频率满足采样定理时，频谱才不发生混叠由 DTFT 得到的频谱就和原频谱幅度上差一个常数

不过即使不满足采样定理，由上述推导可知，DTFT 频谱也之和原模拟信号采样频谱仅在幅度差一个 $1/T_s$ 。

说明 DTFT 频谱能比较好的反应采样频谱的性质。

而 DFT 是对 DTFT 的采样，由于计算机无法处理连续信号，所以采用 DFT 对 DTFT 采样之后通过插值复原频谱，DFT 通过等间隔采样保存频谱的主要信息

不同的是：DFT 得到的是离散谱，在模拟角频率转数字角频率时 $\Omega = \omega T_s$ ，我们希望得到时模拟信号频谱是连续的，所以这时数字角频率不取离散的值而是 $0-2\pi$ 的连续值。

由 DTFT 得到的频谱只需将数字角频率取连续的值和模拟信号采样频谱只在幅度上差一个常数，在满足采样定理下，DTFT 得到的频谱能保留原模拟信号的频谱信息且不发生混叠（只在幅度上差一个常数不影响频谱的整体变化）

综上。

DFT 是对 DTFT 的采样，通过等间隔采样保存频谱的主要信息，方便计算机处理数据，而 fft 是 DFT 快速算法两者都能反应幅频特性。