

G Operatore funzione generatrice

$$G(a_n) = \sum_{n \geq 0} a_n t^n$$

Proprietà

Linearità : $G(\alpha a_n + \beta b_n) = \alpha G(a_n) + \beta G(b_n)$

Spostamento : $G(a_{n+1}) = \frac{G(a_n) - a_0}{t}$

Questa proprietà può essere generalizzata:

$$G(a_{n+p}) = a_p + a_{p+1}t + a_{p+2}t^2 + \dots$$

$$G(a_n) = a_0 + a_1t + a_2t^2 + \dots + a_{p-1}t^{p-1} + a_pt^p + a_{p+1}t^{p+1} + \dots$$

In generale quindi:

$$G(a_{n+p}) = \frac{G(a_n) - a_0 - a_1t - a_2t^2 - \dots - a_{p-1}t^{p-1}}{t^p}$$

Derivazione : $G(na_n) = tDG(a_n)$

Convoluzione : $G(\sum_{k=0}^n a_k b_{n-k}) = G(a_n)G(b_n)$

Composizione : $\sum_{n \geq 0} a_n (G(b_k))^n = G(a_n) \circ G(b_n)$

Si riprende la proprietà di convoluzione.

$$G(a_n) * G(b_n) = (a_0 + a_1t + a_2t^2 + \dots)(b_0 + b_1t + b_2t^2 + \dots)$$

$$= a_0b_0 + (a_0b_1 + a_1b_0)t + (a_0b_2 + a_1b_1 + a_2b_0)t^2 + \dots$$

Quindi: $\sum_{k=0}^n a_k b_{n-k}$

Inversa di una sequenza rispetto ad a_n

$$(a_0 + a_1t + a_2t^2 + \dots)(b_0 + b_1t + b_2t^2 + \dots) = 1$$

Quindi $a_0b_0 = 1$

$$(a_0b_1 + a_1b_0) = 0$$

$$(a_0b_2 + a_1b_1 + a_2b_0) = 0 \text{ etc.}$$

La prima equazione ci impone una condizione:

$$b_0 = \frac{1}{a_0}$$

è necessario quindi che $a_0 \neq 0$

$$(a_0b_1 + a_1b_0) = 0 \Rightarrow b_1 = -\frac{a_1b_0}{a_0} = -\frac{a_1}{a_0^2}$$

questa operazione si può fare anche per il secondo passo in

$$(a_0b_2 + a_1b_1 + a_2b_0) = 0 \text{ per } b_2 :$$

$$b_2 = \frac{-a_1b_1 - a_2b_0}{a_0} = \frac{a_1^2 - a_0a_2}{a_0^3}$$

Data a_n con $a_0 \neq 0$ esiste sempre l'inversa di $G(a_n)$ ovvero $G(a_n)G(b_n) = 1$

Prendendo : $G(a_n) = 1 - t \Rightarrow a_n = (1, -1, 0, 0, 0, \dots)$

Usando i sistemi sviluppati in precedenza si avrà:

$$G^{-1}(a_n) = 1 + t^1 + t^2 + \dots$$

Quindi la sequenza inversa è $b_n = (1, 1, 1, 1, \dots)$

Principio di identità: $a_n = b_n \quad \forall n \quad \Longleftrightarrow \quad G(a_n) = G(b_n)$

Metodo del rapporto:

a_n data in modo esplicito

voglio trovare $G(a_n)$

valuto il rapporto $\frac{a_{n+1}}{a_n}$

trasformo la sequenza esplicita in una relazione di ricorrenza

$$a_n = (1, 1, 1, 1, \dots)$$

$$G(a_n) = \sum_{n \geq 0} t^n$$

si valuta $\frac{a_{n+1}}{a_n} = 1$ che sarà in questo caso 1

quindi si può dire che : $a_{n+1} = a_n \quad \forall n \geq 0$

$$\text{e } G(a_{n+1}) = G(a_n)$$

$$\text{e } \frac{G(a_n)-1}{t} = G(a_n) \Rightarrow G(a_n) = \frac{1}{1-t}$$

Quindi riprendendo i ragionamenti sull inversa $G(1) = \frac{1}{1-t}$

$$(1-t)G(b_n)^{-1} = 1$$

chiamando $b_n = (1, -1, 0, 0, 0, \dots)$

$G(b_n)^{-1} = \frac{1}{1-t}$ come avevamo visto in precedenza.

$$(a_n) = (0, 1, 2, 3, \dots)$$

$$a_n = n$$

$G(n) = \sum nt^n$ si può usare il metodo del rapporto, ma è più facile usare la proprietà di Derivazione.

$$G(n) = G(n * 1) = tDG(1) = tD\frac{1}{1-t} = t\frac{1}{(1-t)^2} = \frac{t}{(1-t)^2} = 0 + t + 2t^2 + 3t^3 + \dots$$

In generale $a_0 = (a_0)$

Si può fare lo stesso ragionamento con $G(n^2)$ e usando la derivata di un rapporto:

$$\begin{aligned} G(n^2) &= t + 4t^2 + 9t^3 + \dots = G(n * n) = tDG(n) = tD\frac{t}{(1-t)^2} = t\frac{(1-t)^2 2t(1-t)}{(1-t)^4} = \\ &= \frac{t(1-t+2t)}{(1-t)^3} = \frac{t(t+1)}{(1-t)^3} \end{aligned}$$

Per $a_n = 2n + \frac{1}{3}n^2$ si possono usare i risultati trovati:

$$G(a_n) = 2G(n) + \frac{1}{3}G(n^2)$$

Per $(a_n) = (1, 0, 1, 0, 1, 0, \dots)$

$$G(a_n) = 1 + t^2 + t^4 + \dots$$

NB: i dispari sono zero

$$= \sum t^{2n} = \sum (t^2)^n$$

Si può usare la proprietà di Composizione.

$\sum (t^2)^n$ è della forma $\sum_{n \geq 0} a_n (G(b_k))^n$

in cui $t^2 = 0 + 0t + t^2 + 0t^3$

$$(b_k) = (0, 0, 1, 0, 1, 0, \dots)$$

Quindi:

$$G(a_n) = \sum t^{2n} = \sum (t^2)^n = G(1) \circ t^2 = \frac{1}{1-t} \circ t^2 = \frac{1}{1-t^2}$$

Per $a_n = (1, 0, 0, 1, 0, 0, 1, 0, 0, \dots)$ analogamente:

$$G(a_n) = \sum t^{3n} = \frac{1}{1-t^3}$$

Per $(a_n) = (1, -1, 1, -1, \dots)$

$$G(a_n) = \sum (-1)^n t^n = \sum (-t)^n$$

Si fa la composizione della funzione con $-t$

$$= \frac{1}{1-t} \circ (-t) = \frac{1}{1+t}$$

Per $(a_n) = (0, -1, 2, -3, 4, -5, 6, \dots)$

$$G(a_n) = \sum (-1)^n n t^n = \sum n (-t)^n = \frac{t}{(1-t)^2} \circ (-t) = \frac{-t}{(1+t)^2}$$

In generale quindi $a(t) = G(a_n) = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + \dots$

$$G((-1)^n a_n) = G(a_n) \circ (-t) = a(-t)$$

$$a_n = 2^n$$

$$(a_n) = (1, 2, 4, 8, \dots)$$

$$G(2^n) = \sum 2^n t^n = \sum 2t^n = \frac{1}{1-2t}$$

In generale

$$G(c^n) = \frac{1}{1-ct}$$

$$a_n = \frac{1}{n!}$$

Si prova con il metodo del rapporto

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{n!}{(n+1)!} = \frac{1}{n+1}$$

$$(n+1)a_{n+1} = a_n$$

Si deve controllare che sia vero per ogni n , è semplice vedere che $\forall n$

$$G((n+1)a_{n+1}) = DG(a_n)$$

Si può associare $b_{n+1} = (n+1)a_{n+1}$ e $b_n = na_n, b_0 = 0$

$$\begin{aligned} G(b_{n+1}) &= \frac{G(b_n) - b_0}{t} = \frac{G(na_n) - 0}{t} \\ &= \frac{tDG(a_n)}{t} = G(a_n) \end{aligned}$$

$a'(t) = a(t)$ equazione differenziale del primo ordine

$$\frac{a'(t)}{a(t)} = 1$$

$$\log_n a(t) = t + k$$

Dato che $a(0) = a_0 = 1$ allora

$$k = 0$$

quindi $a(t) = e^t$

$$a_n = \frac{1}{n} \text{ con } a_0 = 0$$

Si può provare il rapporto

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{n}{n+1} \Rightarrow (n+1)a_{n+1} = na_n$$

Si verifica che valga per ogni n

$$a_1 = 0 \quad ?$$

no perché si ha $1 = 0$

Si usa il delta di Kronecker $\delta_{n,k} = 1$ con $n = k$ e 0 altrimenti

$$\delta_{n,0} = (1, 0, 0, \dots)$$

$$\delta_{n,k} = (0, 0, 0, \dots, 1, 0, 0, 0, \dots)$$

$$G(\delta_{n,k}) = t^k$$

$$G(\delta_{n,0}) = t^0 = 1$$

$$\text{Quindi } \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{n}{n+1} \Rightarrow (n+1)a_{n+1} = na_n + \delta_{n,0}$$

$$G((n+1)(a_{n+1})) = G(na_n + \delta_{n,0})$$

$$DG(a_n) = G(na_n) + G(\delta_{n,0})$$

$$DG(a_n) = tDG(a_n) + 1$$

$$a'(t) = ta'(t) + 1$$

$$(1-t)a'(t) = 1$$

$$a'(t) = \frac{1}{1-t}$$

$$a(t) = -\log_n(1-t) + k$$

$$a(t) = \log_n(1-t)^{-1} \text{ con } k=0$$

$$= \log_n \frac{1}{1-t}$$

$$\text{Quindi } G\left(\frac{1}{n}\right) = \log_n \frac{1}{1-t}$$

$$a_n = H_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$$

Si usa la convoluzione da sinistra verso destra.

$$\text{si può vedere } \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} * 1$$

Definiamo $c_k = 0$ per $k = 0$ e $1/k$ per $k > 0$

$$a_n = \sum c_k * 1$$

$$G(\sum c_k * 1) = G(c_n)G(1)$$

$$G(\sum a_k) = G(\sum a_k * 1) = G(1)G(a_k) = \frac{1}{1-t}G(a_k)$$

$$G(\sum c_k * 1) = G(c_n)G(1) = \frac{1}{1-t} \log_n \frac{1}{1-t}$$

Chiamata Formula di Eulero

trovare la funzione generatrice di $\frac{n(n+1)}{2}$