Binomiali

Si vuole generalizzare i binomiali sui numeri reali.

Permutazioni

Per n oggetti in quanti modi si possono mescolare? Per :
$a_1, a_2, a_3, \dots$

Si indica con $P_n =$numero di permutazioni di lunghezza n

Per esempio se $n = 3$

$$\begin{aligned}&a_1, a_2, a_3\\&a_1, a_3, a_3\\&a_2, a_1, a_3\\&\quad\dots\end{aligned}$$

$P_3 = 6$ in questo caso.

Aggiungendo un numero le permutazioni saranno

$P_{n+1} = (n+1)P_n$

$P_0 = P_1 = 1$

Se si sviluppa fino a zero si ha:
$(n+1)P_n = (n+1)n(n-1)\dots\ P_0 = (n+1)!$

Quindi $P_n = n!$

Disposizioni

Per n oggetti quanti sono i gruppi dato k?
Si indicano con $D_{n,k} =$ numero di disposizioni di n oggetti in gruppi di k
Per esempio $n = 4$ e $k = 2$ di a, b, c, d cioè $D_{4,2} = 12$
$(a,b), (b,a), (a,c), (c,a), (a,d), (d,a), (b,c), (c,b), (b,a), (d,b), (c,d), (d,c)$

$D_{n,k} = n(n-1)(n-2)\dots(n-k+1)$

Combinazioni

Si scelgo tra n oggetti gruppi di k senza contare l ordine.

$C_{n,k} =$ numero di combinazioni di k oggetti su n a disposizione
Si deve dividere per il numero di modi in cui si possono scambiare gli elementi nel gruppo, cioè le permutazioni di k cioè $k!$

$$C_{n,k} = \frac{D_{n,k}}{k!} = \frac{n(n-1)(n-2)\dots(n-k+1)}{k!}$$

Le combinazioni si indicheranno con il binomiale:

$$\binom{n}{k} = C_{n,k}$$

$$\binom{n}{k} = \frac{n(n-1)(n-2)\dots(n-k+1)(n-k)(n-k-1)\dots 1}{k!(n-k)(n-k-1)\dots(1)} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

Proprietà dei binomiali

$$\binom{n}{k} = \frac{n(n-1)!}{k!(k-1)!(n-k)!} = \frac{n}{k}\binom{n-1}{k-1}$$

$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$$

Binomiale su reali

Se si guarda $\frac{D_{n,k}}{k!} = \frac{n(n-1)(n-2)...(n-k+1)}{k!}$

k deve essere per forza un intero ma il numeratore si può sviluppare anche sui reali

$\binom{r}{k} = \frac{r(r-1)(r-2)...(r-k+1)}{k!}$ con r reale
Si chiamano binomiali per la relazione che c'è tra le potenze dei binomi.
$(a+b)^n = \sum^n \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$
I binomi si possono anche scrivere come:

$(a+b)^n = a^n(1 + (\frac{b}{a})^n)$

Si usano gli sviluppi di Taylor

$f(z) = (1+z)^r = \sum_{k\geq 0} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} z^k$

$f(z) = (1+z)^r$
$f^{'}(z) = r(1+z)^{r-1}$
$f^{''}(z) = r(r-1)(1+z)^{r-2}$
$f^k(z) = r(r-1)(r-2)\dots(r-k+1)(1+z)^{r-k}$
$f^k(0) = r(r-1)(r-2)\dots(r-k+1)$

Quindi

$f(z) = (1+z)^r = \sum_{k\geq 0} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} z^k = \sum_{k\geq 0} \frac{r(r-1)(r-2)...(r-k+1)z^k}{k!}$

$$= \sum_{k\geq 0} \binom{r}{k} z^k$$

Ad esempio

$\binom{1/2}{3} = \frac{1/2(1/2-1)(1/2-2)}{3!} = \frac{1}{16}$

Proprietà per i reali

Numeri Negativi

$\binom{-n}{k} = \frac{-n(-n-1)...(-n-k+1)}{k!}$

$= (-1)^k \frac{n(n+1)(n+2)...(n+k-1)}{k!} \frac{1*2...(n-1)}{1*2...(n-1)}$

$= (-1)^k \frac{(n-1+k)!}{k!(n-1)!} = (-1)^k \binom{n+k-1}{k}$

Se ci da noia un numero negativo quindi si può trasformare

$$\binom{-n}{k} = (-1)^k \binom{n+k-1}{k}$$

Triangolo di Tartaglia

$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1}$

Condizioni iniziali
$\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1$

n/k	0	1	2	3	4	5
0	1	0	0	0	0	0
1	1	1	0	0	0	0
2	1	2	1	0	0	0
3	1	3	3	1	0	0
4	1	4	6	4	1	0
5	1	5	10	10	5	1

Si può vedere che il triangolo è simmetrico e che alla riga n la somma degli elementi corrisponde a 2^n . La riga rappresenta il numero totale di sottoinsiemi in un insieme di n elementi, che è ovviamente 2^n .

I numeri $c_n = \binom{2n}{n}$ sono chiamati binomiali centrali. Ad esempio
Se 2n = 4 e n = 2 il binomiale centrale è 6.

Per calcolare il binomio $\binom{-\frac{1}{2}}{n}$ si usano i coef. centrali.

$$\binom{-\frac{1}{2}}{n} = \frac{(-1/2)(-3/2)...(-(2n-1)/2)}{n!}$$

$$\binom{-\frac{1}{2}}{n} = (-1)^n \frac{(\frac{1}{2})(\frac{3}{2})...((\frac{2n-1}{2}))}{n!}$$

Si mette in evidenza il 2 dei denominatori poi si moltiplica per i pari sopra e sotto. Si evidenzia i due dei pari.

$$\frac{(-1)^n}{2^n}\frac{1*3...(2n-1)}{n!}\frac{2*4*6...2n}{2*4*6...2n} = \frac{(-1)^n(2n)!}{2^n(n!)2^n(n!)}$$

$$= \frac{(-1)^n(2n)!}{4^n(n!)(n!)} = \frac{(-1)^n(2n)!}{4^n(n!)(2n-n)!} = \frac{(-1)^n}{4^n}\binom{2n}{n}$$

In modo simile per altri valori sarà ad esempio:

$$\binom{1/2}{n} = \frac{(-1)^{n-1}}{4^n(2n-1)}\binom{2n}{n}$$

$$\binom{3/2}{n} = \frac{(-1)^n 3}{4^n(2n-1)(2n-3)}\binom{2n}{n}$$