G Operatore funzione generatrice

$G(a_n) = \sum_{n\geq 0} a_n t^n$

Proprietà

Linearità : $G(\alpha a_n + \beta b_n) = \alpha G(a_n) + \beta G(b_n)$

Spostamento : $G(a_{n+1}) = \frac{G(a_n) - a_0}{t}$

Questa proprietà può essere generalizzata:

$G(a_{n+p}) = a_p + a_{p+1}t + a_{p+2}t^2 + \ldots$

$G(a_n) = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + \ldots + a_{p-1}t^{p-1} + a_p t^p + a_{p+1}t^{p+1} + \ldots$

In generale quindi:

$G(a_{n+p}) = \frac{G(a_n) - a_0 - a_1 t - a_2 t^2 - \ldots - a_{p-1}t^{p-1}}{t^p}$

Derivazione : $G(na_n) = tDG(a_n)$

Convoluzione : $G(\sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}) = G(a_n)G(b_n)$

Composizione : $\sum_{n\geq 0} a_n (G(b_k))^n = G(a_n) \circ G(b_n)$

Si riprende la proprietà di convoluzione.

$G(a_n) * G(b_n) = (a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + \ldots)(b_0 + b_1 t + b_2 t^2 + \ldots)$

$= a_0 b_0 + (a_0 b_1 + a_1 b_0)t + (a_0 b_2 + a_1 b_1 + a_2 b_0)t^2 + \ldots$

Quindi: $\sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}$

Inversa di una sequenza rispetto ad a_n

$(a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + \ldots)(b_0 + b_1 t + b_2 t^2 + \ldots) = 1$

Quindi $a_0 b_0 = 1$

$(a_0 b_1 + a_1 b_0) = 0$

$(a_0 b_2 + a_1 b_1 + a_2 b_0) = 0$ etc.

La prima equazione ci impone una condizione:

$b_0 = \frac{1}{a_0}$

è necessario quindi che $a_0 \neq 0$

$(a_0 b_1 + a_1 b_0) = 0 \Rightarrow b_1 = -\frac{a_1 b_0}{a_0} = -\frac{a_1}{a_0^2}$

questa operazione si può fare anche per il secondo passo in $(a_0 b_2 + a_1 b_1 + a_2 b_0) = 0$ per b_2 :

$b_2 = \frac{-a_1 b_1 - a_2 b_0}{a_0} = \frac{a_1^2 - a_0 a_2}{a_0^3}$

Data a_n con $a_0 \neq 0$ esiste sempre l'inversa di $G(a_n)$ ovvero $G(a_n)G(b_n) = 1$
Prendendo : $G(a_n) = 1 - t \Rightarrow a_n = (1, -1, 0, 0, 0, \ldots)$
Usando i sistemi sviluppati in precendenza si avrà:
$G^{-1}(a_n) = 1 + t^1 + t^2 + \ldots$
Quindi la sequenza inversa è $b_n = (1, 1, 1, 1, \ldots)$

Principio di identità: $a_n = b_n \quad \forall n \quad \iff \quad G(a_n) = G(b_n)$

Metodo del rapporto:

a_n data in modo esplicito
voglio trovare $G(a_n)$
valuto il rapporto $\frac{a_{n+1}}{a_n}$
trasformo la sequenza esplicita in una relazione di ricorrenza

$a_n = (1, 1, 1, 1, \ldots)$
$G(a_n) = \sum_{n \geq 0} t^n$
si valuta $\frac{a_{n+1}}{a_n} = 1$ che sarà in questo caso 1
quindi si può dire che : $a_{n+1} = a_n \qquad \forall n \geq 0$

e $G(a_{n+1}) = G(a_n)$

e $\frac{G(a_n) - 1}{t} = G(a_n) \Rightarrow G(a_n) = \frac{1}{1-t}$

Quindi riprendendo i ragionamenti sull inversa $G(1) = \frac{1}{1-t}$

$(1 - t)G(b_n)^{-1} = 1$

chiamando $b_n = (1, -1, 0, 0, 0, \ldots)$

$G(b_n)^{-1} = \frac{1}{1-t}$ come avevamo visto in precendenza.

$(a_n) = (0, 1, 2, 3, \dots)$

$a_n = n$

$G(n) = \sum nt^n$ si può usare il metodo del rapporto, ma è più facile usare la proprietà di Derivazione.

$G(n) = G(n * 1) = tDG(1) = tD\frac{1}{1-t} = t\frac{1}{(1-t)^2} = \frac{t}{(1-t)^2} = 0 + t + 2t^2 + 3t^3 + \dots$

In generale $a_0 = (a_0)$

Si può fare lo stesso ragionamento con $G(n^2)$ e usando la derivata di un rapporto:

$G(n^2) = t + 4t^2 + 9t^3 + \dots = G(n * n) = tDG(n) = tD\frac{t}{(1-t)^2} = t\frac{(1-t)^2 2t(1-t)}{(1-t)^4} =$

$= \frac{t(1-t+2t)}{(1-t)^3} = \frac{t(t+1)}{(1-t)^3}$

Per $a_n = 2n + \frac{1}{3}n^2$ si possono usare i risultati trovati:

$G(a_n) = 2G(n) + \frac{1}{3}G(n^2)$

Per $(a_n) = (1, 0, 1, 0, 1, 0, \dots)$

$G(a_n) = 1 + t^2 + t^4 + \dots$

> NB: i dispari sono zero

$= \sum t^{2n} = \sum (t^2)^n$

Si può usare la proprietà di Composizione.

$\sum (t^2)^n$ è della forma $\sum_{n\geq 0} a_n(G(b_k))^n$

in cui $t^2 = 0 + 0t + t^2 + 0t^3$

$(b_k) = (0, 0, 1, 0, 1, 0, \dots)$

Quindi:

$G(a_n) = \sum t^{2n} = \sum (t^2)^n = G(1) \circ t^2 = \frac{1}{1-t} \circ t^2 = \frac{1}{1-t^2}$

Per $a_n = (1, 0, 0, 1, 0, 0, 1, 0, 0, \dots)$ analogamente:

$G(a_n) = \sum t^{3n} = \frac{1}{1-t^3}$

Per $(a_n) = (1, -1, 1, -1, \dots)$

$G(a_n) = \sum (-1)^n t^n = \sum (-t)^n$

Si fa la composizione della funzione con -t

$= \frac{1}{1-t} \circ (-t) = \frac{1}{1+t}$

Per $(a_n) = (0, -1, 2, -3, 4, -5, 6, ...)$

$G(a_n) = \sum(-1)^n nt^n = \sum n(-t)^n = \frac{t}{(1-t)^2} \circ (-t) = \frac{-t}{(1+t)^2}$

In generale quindi $a(t) = G(a_n) = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + ...$

$G((-1)^n a_n) = G(a_n) \circ (-t) = a(-t)$

$a_n = 2^n$

$(a_n) = (1, 2, 4, 8, ...)$

$G(2^n) = \sum 2^n t^n = \sum 2t^n = \frac{1}{1-2t}$

In generale

$G(c^n) = \frac{1}{1-ct}$

$a_n = \frac{1}{n!}$

Si prova con il metodo del rapporto

$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{n!}{(n+1)!} = \frac{1}{n+1}$

$(n+1)a_{n+1} = a_n$

Si deve controllare che sia vero per ogni n, è semplice vedere che $\forall n$

$G((n+1)a_{n+1}) = DG(a_n)$

Si può associare $b_{n+1} = (n+1)a_{n+1}$ e $b_n = na_n, b_0 = 0$

$G(b_{n+1}) = \frac{G(b_n) - b_0}{t} = \frac{G(na_n) - 0}{t}$

$= \frac{tDG(a_n)}{t} = G(a_n)$

$a'(t) = a(t)$ equazione differenziale del primo ordine

$\frac{a'(t)}{a(t)} = 1$

$\log_n a(t) = t + k$

Dato che $a(0) = a_0 = 1$ allora

$k = 0$

quindi $a(t) = e^t$

$a_n = \frac{1}{n}$ con $a_0 = 0$

Si può provare il rapporto

$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{n}{n+1} \Rightarrow (n+1)a_{n+1} = na_n$

Si verifica che valga per ogni n

$a_1 = 0 \quad ?$

> no perché si ha 1 = 0

Si usa il delta di Kronecker $\delta_{n,k} = 1$ con $n = k$ e 0 altrimenti

$\delta_{n,0} = (1, 0, 0, \ldots)$

$\delta_{n,k} = (0, 0, 0, \ldots, 1, 0, 0, 0, \ldots)$

$G(\delta_{n,k}) = t^k$

$G(\delta_{n,0}) = t^0 = 1$

Quindi $\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{n}{n+1} \Rightarrow (n+1)a_{n+1} = na_n + \delta_{n,0}$

$G((n+1)(a_{n+1})) = G(na_n + \delta_{n,0})$

$DG(a_n) = G(na_n) + G(\delta_{n,0})$

$DG(a_n) = tDG(a_n) + 1$

$a'(t) = ta'(t) + 1$

$(1-t)a'(t) = 1$

$a'(t) = \frac{1}{1-t}$

$a(t) = -\log_n(1-t) + k$

$a(t) = \log_n(1-t)^{-1}$ con k=0

$= \log_n \frac{1}{1-t}$

Quindi $G(\frac{1}{n}) = \log_n \frac{1}{1-t}$

$a_n = H_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$

Si usa la convoluzione da sinistra verso destra.

si può vedere $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} * 1$

Definiamo $c_k = 0 \quad per \quad k = 0$ e $1/k \quad per \quad k > 0$

$a_n = \sum c_k * 1$
$G(\sum c_k * 1) = G(c_n)G(1)$

$$G(\sum a_k) = G(\sum a_k * 1) = G(1)G(a_k) = \frac{1}{1-t}G(a_k)$$

$$G(\sum c_k * 1) = G(c_n)G(1) = \frac{1}{1-t}\log_n\frac{1}{1-t}$$

Chiamata Formula di Eulero

> trovare la funzione generatrice di \frac{n(n+1)}{2}