Alberi binari

$B_{n+1} = \sum_{k=0}^{n} B_x B_{n-k}$

$B =$ {insieme degli alberi binari}

$|b| =$ numero dei nodi interni
$B = \{\square\} \cup \{o\} \times B \times B$
i due progetti indicano i due rami che partono da un nodo

$B(t) = t^0 + tB(t)^2 = 1 + tB(t)^2$
$= \frac{1 \pm \sqrt{1-4t}}{2t}$
si esclude il caso positivo per le condizioni iniziali

$\lim_{t \to 0} \frac{1 \pm \sqrt{1-4t}}{2t} \frac{1+\sqrt{1-4t}}{1+\sqrt{1-4t}} = \lim_{t \to 0} \frac{1-1+4t}{2t(1+\sqrt{1-4t})}$
$B(0) = B(1) = 1$
$B_n = \frac{1}{n+1}\binom{2n}{n}$

Prendendo $|b| =$ numero di nodi esterni □

$B(t) = t + t^0 B(t)^2$
$B(t) = t + B(t)^2$
$B(t)^2 - B(t) + t = 0$
$B(t) = \frac{1 \pm \sqrt{1-4t}}{2}$

$B(0) = 0$ con questa condizione si prendono entrambi i casi.
C'è uno shift di uno rispetto al caso precedente
$B_n = \frac{1}{n}\binom{2(n-1)}{(n-1)}$

> Le due funzioni si possono unire
> t per nodi interni o
> w per nodi esterni □
> $B(t,w) = w + tB(t,w)^2$

Alberi s-ari

B = {L insieme di alberi s-ari}
$|b| =$ numero dei nodi interni

$B = \{\square\} \cup \{o\} \times B \times B \times ... \times B$ con s prodotti

$B(t) = 1 + tB(t)^s$
$B_n = \frac{1}{(s-1)n+1}\binom{sn}{n}$

Alberi ordinati

Un albero è un nodo (la radice) connesso ad una sequenza di alberi (foresta)

G è la classe degli alberi ordinati
F è la classi delle foreste

$F = S(G) = \{\epsilon\} \cup \{G\} \cup G \times G \cup G \times G \times G \cup ...$

$F(t) = \frac{1}{1-G(t)}$

$G = \{o\} \times F$
$G(t) = tF(t)$ si sostituisce con l equazione di F

$F(t) = \frac{1}{1-tF(t)}$
$F(t) - tF(t)^2 - 1 = 0$
$= tF(t)^2 - F(t) + 1 = 0$
$F(t) = \frac{1\pm\sqrt{1-4t}}{2t} = \frac{1-\sqrt{1-4t}}{2t}$

$G(t) = tF(t) = \frac{1-\sqrt{1-4t}}{2}$

$G_n = B_{n-1}$ con $B_n = \frac{1}{n+1}\binom{2n}{n}$

Quindi ha la stessa funzione degli alberi binari meno uno, infatti c'è una relazione tra alberi ordinati e alberi binari

---

$G(f_n) = \sum_{n\geq 0} f_n t^n = f(t)$
$[t^n]$ operatore "coefficiente di"
$[t^n]G(f_n) = f_n$

- $[t^n](\alpha f(t) + \beta g(t)) = \alpha[t^n]f(t) + \beta[t^n]g(t)$ linearità
- $[t^n]tf(t) = [t^{n-1}]f(t)$ spostamento
  $tf(t) = t\sum_{k\geq 0} f_k t^k = \sum_{k\geq 0} f_k t^{k+1}$
- $[t^n]f(t)g(t) = \sum_{k=0}^{n} f_k g_{n-k}$ convoluzione
- $[t^n]f(t)og(t) = \sum_{k\geq 0} f_k[t^n]g_t$ composizione

$f(t) = \frac{1+t}{1-t-t^2}$

$[t^n]f(t) = [t^n]\frac{1}{1-t-t^2} + [t^n]\frac{t}{1-t-t^2}$
$= [t^n]t^{-1}\frac{t}{1-t-t^2} = [t^{n+1}]\frac{t}{1-t-t^2} = F_{n+1}$

$[t^n]f(t) = [t^n]\frac{1}{1-t-t^2} + [t^n]\frac{t}{1-t-t^2} = F_{n+1} + F_n = F_{n+2}$

$f(t) = \frac{1-t}{1-2t}$
$[t^n]f(t) = [t^n]\frac{1}{1-2t} + [t^n]\frac{t}{1-2t} = 2^n - [t^{n-1}]\frac{1}{1-2t} = 2^n - 2^{n-1} = 2^{n-1}(2-1) = 2^{n-1}$

$(1-t-t^2)F(t) = 1+t$
$[t^n](1-t-t^2)F(t) = [t^n](1+t)$
$[t^n]F(t) - [t^n]tF(t - [t^n]t^2F(t) = [t^n](1+t)$
Per $n > 1 \quad F_n - F_{n-1} - F_{n-2} = 0$