Esempio

$E ::= T|AT$
$T ::= F|TAF$
$F ::= P|FMP$
$P ::= a|(E)$
$M ::= *|/$
$A ::= +|-$
$NT = \{E, T, F, P, M, A\}$
Terminali $= \{n, (,), *, /, +, -\}$

Genera espressioni aritmetiche. La grammatica è non ambigua.
Prendiamo t come lunghezza dell espressione, z per tenere traccia del numero di simboli 'n' e si tiene traccia dei simboli parentesi con w.

$E = E(t, z, w)$
$E = T + A \cdot T$
$T = F + TA \cdot F$
$F = P + F \cdot M \cdot P$
$P = tz + t^2w^2E$
Si contano tutte e due le parentesi, aperte o chiuse.
$M = 2t$
$A = 2t$
$E = E(t, z, w) = zt + 2zt^2 + z(w^2 + 4z)t^3 + 4z(2z + w^2)t^4 \ldots$

1. n
2. $+n, -n$
3. $(n), n + n, n - n, n * n, n/n$
4. $+n + n, -n + n, -n - n, +n - n, +n * n, -n * n, +n/n, -n/n,$
   $(-n), (+n,)$
   $-(n), +(n)$
   Mettendo a 1 w e z si può trovare direttamente la funzione con solo t.
   $E(t, 1, 1) = t + 2t^2 + 5t^3 + 12t^4 \ldots$

$G(f_n) = \sum_{n \geq 0} f_n t^n = f(t)$
$[t^n]$ operatore "coefficiente di"
$[t^n]G(f_n) = f_n$

- *linearità*: $[t^n](\alpha f(t) + \beta g(t)) = \alpha[t^n]f(t) + \beta[t^n]g(t)$
- *spostamento*: $[t^n]tf(t) = [t^{n-1}]f(t)$
  $tf(t) = t\sum_{k \geq 0} f_k t^k = \sum_{k \geq 0} f_k t^{k+1}$
- *convoluzione*: $[t^n]f(t)g(t) = \sum_{k=0}^{n} f_k g_{n-k}$
- *composizione*: $[t^n]f(t) \circ g(t) = \sum_{k \geq 0} f_k [t^n] g_t$

Regola di Newton

$[t^n](1+\alpha t)^r = \binom{r}{n}\alpha^n$

[Dim]

$[t^n]f'(t) = (n+1)f_{n+1}$
$[t^{n-1}]f'(t) = (n)f_n$
$f_n = \frac{1}{n}[t^{n-1}]f'(t)$
$[t^n]f(t) = \frac{1}{n}[t^{n-1}]f'(t)$ derivazione
$[t^n](1+\alpha t)^r = \frac{1}{n}[t^{n-1}]r\alpha(1+\alpha t)^{r-1} = \frac{\alpha r}{n}[t^{n-1}](1+\alpha t)^{r-1}$
$= \frac{\alpha r}{n}\frac{1}{n-1}[t^{n-2}](r-1)(1+\alpha t)^{r-2}$
$= \frac{\alpha r}{n}\frac{\alpha(r-1)}{n-1}\frac{\alpha(r-2)}{n-2}\dots\frac{\alpha(r-n+1)}{1}[t^{n-n}](1+\alpha t)^{r-n}$
$= \frac{a^n r(r-1)(r-n+1)}{n!} = \alpha^n\binom{r}{n}$