Lezione 27 Settembre

Lo studio si focalizza sul caso medio degli algoritmi.

Lucido 1

Le formule presentate sono delle relazioni di ricorrenza. Esprimono un valore in funzione di altri valori precedenti.
Formula1 : Numero medio di confronti del quicksort.
Formula2 : Numero medio di scambi del quicksort con le stesse caratteristiche delle algoritmo.
Formula3 : Numero medio di confronti con il perno scelto come mediano tra tre.
Formula4 : Variante del quicksort con l'insertionSort con file di piccole dimensioni. Con l'analisi si può determinare il
valore di n in modo tale che l'algoritmo sia più veloce.

Lucido 2

Programma del corso.
Funzioni generatrici sono uno strumento per trasformare le relazioni di ricorrenza in funzioni risolvibili.
Il giovedì si andrà in laboratorio per approfondire i concetti teorici e verificarli con Maple. Si potrà simulare
gli algoritmi su file di grandi dimensioni.
Metodo simbolico è applicato nell enumerazioni di linguaggi.

Lucido 3

Formula1 : Funzione generatrice del numero medio di confronti nel quicksort.
Rappresentazione finita del problema.
Andando a sviluppare la funzione in serie su una costante, che rappresenza la lunghezza della lista, si trova
il valore medio di confronti utilizzando il quicksort.
H_n+1 è il numero armonico che può essere associato al log di n se n è grande.
Formula2 : La scelta del perno non cambia la complessità, ma la costante

moltiplicativa da 2 passa a 12/7

Lucido 4

Password PAA1617
Il materiale viene passato dai professori, il secondo libro si può usare per consultazione.
Esame: progetto in maple o altri sistemi (libreria python).

Lucido 5

Definizioni

Lucido 6

La complessità basata su confronti è theta nlog. Si cercherà di si far vedere che non è possibile fare di meglio.

Lucido 7

Se si dimostra che il mergesort ha una complessità di nlogn, si può dire che non la complessità dell'ordinamento non
può essere minore di nlogn.

Lucido 8

Per studiare la complessità si usa Cn cioè i confronti. Si cerca una ricorrenza per la funzione Cn. Ci si basa sull'
applicazione effettiva dell' algoritmo, ci si basa cioè sulla divisione a metà del problema.
$C_n = C_(n/2) + c(n/2) + n$
In cui n indica i confronti che faccio durante la fase di fusione.
C_1 è la condizione iniziale.
Dimostrazione: si ipotizza che n è una potenza di 2. Una volta trasformato si può dividere per 2^m.
Si può iterare il procedimento analogo a $X_m = X_{m-1} + 1$ che si può

trasformare in $X_{m-2} + 2$.
Si arriva a $C_{2^0}/2^0 + m$ cioè m.
In un caso particolare si è dimostrato che la complessità è $nlog(n)$. Ma si può dimostrare che anche nel caso medio ha la
stessa complessità.

Lucido 9

Non si può fare di meglio. Per dimostrarlo si usa l'albero binario. Ai nodi esterni sono associate tutte le permutazioni
(cioè n! possibilità). Altezza dell albero mi dice qual è il costo per da ordinare un vettore di lunghezza n.
Si deve quindi sviluppare l'espressione $n! < 2^h$.
Il fattoriale di n grande si può approssimare con la formula di Stirling.
Nel lucido altezza dell albero dei confronti si sostituisce n! con la formula di Stirling. Si cambia di base il log a base 2
per aiutare i calcoli. Si usa la proprietà del prodotto dei log. log di 2π va via perché è un numero finito mentre ln(1/e) = -1
e va a moltiplicare n quindi diventa negativo. Una volta svolto si fa solo di nuovo il cambio di base a 2.

Quicksort

Esempio di quicksort con pseudocodice.
Si esaminano i contronti del quicksort. La parte importante è il partizionamento perché poi si effettuano solo due chiamate ricorsive. Ogni partizionamento dovrò confrontare il perno con tutti gli altri valori, quindi $n-1$ poi si dovrà aggiungere anche +2
Costo partizionamento $= n - 1 + 2 = n + 1$
perché si fanno una coppia di confronti arrivando allo scambio degli indici i e j.

Dimostrazione caso medio

I partizionamenti sono n.
Per come l algoritmo è sviluppato la posizione degli elementi ha un ruolo fondamentale.
Ci sono tre casi: ottimo, pessimo e medio.
Ottimo: le partizioni sono più o meno simili.
Pessimo: Una partizione è vuota e l altra è ha i restanti elementi. (Se il vettore è quasi ordinato o ordinato).

Nel caso pessimo si avrà C_n:
$C_n = C_{n-1} + n + 1 \ \rightarrow C_n = O(n^2)$

Condizione iniziale $C_0 = 0$

$$\begin{aligned} C_n &= C_{n-2} + n + (n+1) \\ &= C_{n-3} + (n-1) + n + (n+1) \\ &= C_{n-4} + (n-2) + (n-1) + n + (n+1) \\ &= C_0 + 2 + 3 + \ldots + n + (n+1) \\ &= \sum_{k=2}^{n+1}(k) \end{aligned}$$

Cioè la somma dei primi numeri interi partendo da 2 che è

$\sum_{k=0}^{n}(k) = \frac{n(n+1)}{2}$ è la formula di Gauss normale

$\sum_{k=2}^{n+1}(k) - 1 = \frac{(n+2)(n+1)}{2}$ è la formula per $k = 2$

Quicksort caso medio

a vettore di dimensione n

Si ipotizza che il vettore contenga una qualsiasi permutazione di n valori, i possibili input sono n! I valori sono tutti distinti mescolati a caso.

Si può dire che il vettore contiene i numeri da 1 a n (1,2,...,n)

Esaminiamo la versione dell algorimo in cui il perno sia l elemento a destra

$$[\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad |j\,]$$

$$[\underbrace{\qquad\qquad\qquad}_{<j}|j|\underbrace{\qquad\qquad\qquad}_{>j}]$$

Il primo sottovettore ha dimensione $j-1$ il secondo sottovettore $n-j$

Probabilità che il perno sia j(j che divide il vettore con i partizionamenti simili) è $\frac{1}{n}$ cioè $\frac{(n-1)!}{n!}$

Il numero medio di confronti, cioè arrivare a j nel mezzo è

$$
\begin{aligned}
C_n = {} & (n+1)_{costoPartizionamento} \\
& + \frac{1}{n}_{probalitaDelPerno} \\
& * \sum_{j=1}^{n}[C_{j-1}+C_{n-j}]_{costoChiamateRicorsive}
\end{aligned}
$$

Condizione iniziale è $C_0 = 0$

Condizione iniziale ci porta a dire che $C_1 = 2$

Nella sommatoria ci sono le due quantità, il primo termine assumerà i valori da C_0 fino a C_{n-1}, il secondo da C_{n-1} fino a C_0.

Dato che si somma due volte la stessa cosa si può scrivere

$C_n = (n+1) + \frac{2}{n}\sum_{j=0}^{n-1}[C_j]$ si moltiplica tutto per n

$nC_n = n(n+1) + 2\sum_{j=0}^{n-1}[C_j]$

Si vuole eliminare la somma e si parte scrivendo la ricorrenza con $n-1$

$(n-1)C_{n-1} = (n-1)n + 2\sum_{j=0}^{n-2}[C_j]$

Facendo la differenza

$$
\begin{aligned}
nC_n - (n-1)C_{n-1} &= n(n+1) + 2\sum_{j=0}^{n-1}[C_j] - (n-1)n - 2 * \sum_{j=0}^{n-2}[C_j] \\
&= n(n+1) - (n-1)n + 2 * C_{n-1} \\
&= 2n + 2 * C_{n-1}
\end{aligned}
$$

$$nC_n - (n-1)C_{n-1} = 2n + 2 * C_{n-1}$$

$$\Rightarrow nC_n = 2n + (n+1)C_{n-1}$$

Si vuole trasformare l espressione dividendo tutto per $n(n+1)$

$\frac{nC_n}{n(n+1)} = \frac{2n}{n(n+1)} + \frac{(n+1)C_{n-1}}{n(n+1)}$

$\frac{C_n}{n+1} = \frac{2}{n+1} + \frac{Cn-1}{n}$
$a_n \qquad a_{n-1}$

L'espressione è più semplice e senza la somma

Si itera su $\frac{C_{n-1}}{n}$

$\frac{2}{n+1} + \frac{Cn-1}{n} = \frac{2}{n+1} + \frac{2}{n} + \frac{C_{n-2}}{n-1}$ questo passaggio si può iterare fino ad arrivare alla condizione iniziale

$\frac{C_n}{n+1} = \frac{2}{n+1} + \frac{2}{n} + \frac{2}{n-1} + \frac{2}{n-2} \cdots$

$= \sum_{k=3}^{n+1} \frac{2}{k} + \frac{C_1}{2}$

si sostituisce C_1 con 2 e si cambia il valore di k da cui si inizia la sommatoria
$= \sum_{k=2}^{n+1} \frac{2}{k}$

Si arriva a dire quindi che

$\frac{C_n}{n+1} = 2 \sum_{k=2}^{n+1} \frac{1}{k}$

$H_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$ per i numeri armonici
Essendo quasi simile alla sommatoria ripresa dai numeri amonici a meno del K che parte da 2 si inserisce l' n-esimo numero armonico meno 1
$\frac{C_n}{n+1} = 2 \sum_{k=2}^{n+1} \frac{1}{k}$

$\Rightarrow 2 \sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k} - 1$

Si toglie dal denominatore (n+1) e si ha:
$C_n = 2(n+1)(H_{n+1} - 1)$

Fine Dimostrazione

La formula precendente è per i confronti si dovrà studiare anche la formula per gli scambi. Si userà sempre lo stesso trucco sulle somme

Formula degli scambi

$S_n = \frac{n-2}{6} + \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n} (S_{j-1} + S_{n-j})$

Lezione 4 Ottobre

Formula degli scambi
$S_n = \frac{n-2}{6} + \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n} (S_{j-1} + S_{n-j})$

$\frac{n-1}{2}$ è il numero medio di scambi che il SQ esegue durante il partizionamento
La seconda parte è analoga a quella dei confronti
$\frac{1}{n}$ è la probabilità che il perno sia j

$$[\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad |j\,]$$
$$[\underbrace{\qquad\qquad}_{\text{<j}}|j|\underbrace{\qquad\qquad}_{\text{>j}}]$$

> NB l ultimo scambio del perno non viene contato

p_k^j è la probabilità di fare k scambi quando il perno è j
Per fare k scambi nel partizionamento nella prima parte del vettore ci sono k elementi più gradi del perno e nella seconda parte k elementi più piccoli.

Gli elementi più grandi del perno sono $n-j$ e quindi le possibilità sono il binomiale di $\binom{n-j}{k}$, mentre $\binom{j-1}{k}$ sono i modi di scegliere i più piccoli di j.

$$p_k^j = \frac{\binom{n-j}{k}\ \binom{j-1}{k}(j-1)!(n-j)!}{(n-1)!}$$

Si devono moltiplicare per il numero di permutazioni con j in ultima posizione. Le permutazioni dei k elementi maggiori di $> j$ tra i primi $j-1$ elementi e le permutazioni dei k elementi $< j$ tra gli ultimi $n-j$ elementi.

Numero medio di scambi quando il perno è j :
$\sum_{k \geq 0} kp_k^j$ e la chiamiamo P^j si sviluppa in questo modo:

$P^j = \frac{1}{\binom{n-j}{j-1}} \sum_{k \geq 0} k \binom{n-j}{k} \binom{j-1}{k}$

N.B 1. $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$ e 2. $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$

sviluppando la parte $\frac{(j-1)!(n-j)!}{(n-1)!}$ si arriva a $\frac{1}{\binom{n-j}{j-1}}$ e dato che non compare k allora si porta fuori dalla sommatoria.

Si sfrutta la formula di Vandermonde per semplificare la sommatoria.

$$\sum_{k>0} \binom{r}{k}\binom{s}{n-k} = \binom{r+s}{n}$$

Sviluppo di P^j

$P^j = \frac{1}{\binom{n-j}{j-1}} \sum_{k\geq 0} k\binom{n-j}{k}\binom{j-1}{k}$

Si scrive la parte di $\binom{j-1}{k}$ come $\frac{(j-1)(j-2)!}{k(k-1)!(j-1-k)!} = \frac{j-1}{k}\binom{j-2}{k-1}$

$p^j = \frac{1}{\binom{n-j}{j-1}} \sum_{k\geq 0} k\binom{n-j}{k}\binom{j-1}{k}$ si sostituisce l ultima parte con $\frac{j-1}{k}\binom{j-2}{k-1}$
k si semplifica

$$\frac{j-1}{\binom{n-j}{j-1}} \sum_{k\geq 0} \binom{n-j}{k}\binom{j-2}{k-1}$$

Si applica la seconda trasformazione di N.B sul secondo elemento della sommatoria
Quindi $\binom{j-2}{k-1} = \binom{j-2}{j-2-(k-1)} = \binom{j-2}{j-1-k}$ da cui:

$$\frac{j-1}{\binom{n-j}{j-1}} \sum_{k\geq 0} \binom{n-j}{k}\binom{j-2}{j-1-k}$$

Usando l uguaglianza con la formula di Vandermonde si toglie la sommatoria e diventa:

$$\Rightarrow \frac{j-1}{\binom{n-j}{j-1}}\binom{n-2}{j-1}$$

Prendendo r come $n-j$, s come $j-2$ e n come $j-1$

I due binomiali si possono semplificare

$P^j = (j-1)\frac{(n-2)!}{(j-1)!(n-1-j)!}\frac{(j-1)!(n-j)!}{(n-1)!}$

$$P^j = \frac{(j-1)(n-j)}{n-1}$$

questa è la probabilità quando j è il perno.

Si deve capire qual è il numero medio di scambi tenendo conto della probabilità di j

$$\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} p^j$$

Numero medio di scambi durante il partizionamento (prima che i puntatori si incrorocino)

$\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}\frac{(j-1)(n-j)}{n-1}$

che si può semplificare

$\frac{1}{n(n-1)}\sum_{j=1}^{n} jn - j^2 - n + j$

si mette in evidenza n

jn e j diventano la prima sommatoria $(n+1)\sum j$ che è la somma dei primi numeri interi.

La sommatoria di n quadrati è uguale a $\sum^n j^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

$= \frac{1}{n(n-1)}[(n+1)\sum_{j=1}^{n} j - \sum_{j=1}^{n} j^2 - n\sum_{j=1}^{n} 1]$
$= \frac{1}{n(n-1)}[\frac{n(n+1)^2}{2} - \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} - n^2] = \frac{n-2}{6}$

Una volta trovato $\frac{n-2}{6}$ si deve sviluppare tutta l espressione.

$S_n = \frac{n-2}{6} + \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}(S_{j-1} + S_{n-j})$

$S_n = \frac{n-2}{6} + \frac{2}{n}\sum_{j=0}^{n-1}(S_j)$

$nS_n = \frac{n(n-2)}{6} + 2\sum_{j=0}^{n-1}(S_j)$

$n-1$ al posto di n

$(n-1)S_{n-1} = \frac{(n-1)(n-3)}{6} + 2\sum_{j=0}^{n-2}(S_j)$

$nS_n - (n-1)S_{n-1} = \frac{n(n-2)}{6} - \frac{(n-1)(n-3)}{6} + 2\sum_{j=0}^{n-1} S_j - 2\sum_{j=0}^{n-2} S_j$

$= \frac{2n-3}{6} + 2S_{n-1}$

$nS_n = \frac{2n-3}{6} + (n+1)S_{n-1}$

Divido per $n(n+1)$ e poi itero su S_{n-1}

$$\frac{S_n}{n+1} = \frac{2n-3}{6n(n+1)} + \frac{S_{n-1}}{n}$$

Si ritrova di nuovo un espressione del tipo $a_n = a_{n-1} + b_n$

$a_n = a_{n-2} + b_{n-1} + b_n = a_{n-3} + b_{n-2} + b_{n-1} + b_n = \ \ldots$

$\frac{S_n}{n+1} = \frac{2n-3}{6n(n+1)} + \frac{2(n+1)-3}{6(n-1)(n+1-1)} + \frac{S_{n-2}}{n-1}$

Ci si ferma a S_{n-2} perché in questo caso è il primo valore noto.
Si deve praticamente trovare da dove parte k che è il denominatore di $\frac{S_x}{m}$

$$\frac{S_n}{n+1} = \sum_{k=3}^{n} \frac{2k-3}{6k(k+1)} + \frac{S_2}{3}$$

Condizioni iniziali $S_0 = S_1 = S_2 = 0$ quindi

$$\frac{S_n}{n+1} = \sum_{k=3}^{n} \frac{2k-3}{6k(k+1)}$$

Si usano di nuovo i numeri armonici di H_n
Il procedimento per spezzare la sommatoria è simile alla scomposizione per gli integrali. , quindi:
$\frac{2k-3}{k(k+1)} = \frac{A}{k} + \frac{B}{k+1}$
$= \frac{A(k+1)+Bk}{k(k+1)} = \frac{(A+B)k+A}{k(k+1)}$

$A + B = 2B = 5A = -3$

$\frac{S_n}{n+1} = \sum_{k=3}^{n} \frac{2k-3}{6k(k+1)}$
$= \frac{1}{6} \sum_{k=3}^{n} [\frac{-3}{k} + \frac{5}{k+1}]$

$= -\frac{1}{2} \sum_{k=3}^{n} \frac{1}{k} + \frac{5}{6} \sum_{k=4}^{n+1} \frac{1}{k}$

$= -\frac{1}{2} [\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - 1 - \frac{1}{2}] + \frac{5}{6} \sum_{k=1}^{n+1} (\frac{1}{k} - 1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{3})$

$= -\frac{1}{2} H_n + \frac{3}{4} + \frac{5}{6} H_{n+1} - \frac{55}{36}$

Si deve trasformare in $H_{n+1} = H_n + \frac{1}{n+1}$
$H_n = H_{n+1} - \frac{1}{n+1}$

Si sviluppa ancora:

$= -\frac{1}{2}H_{n+1} + \frac{1}{2(n+1)} + \frac{5}{6}H_{n+1} - \frac{7}{9}$

$$\frac{S_n}{n+1} = \frac{1}{3}H_{n+1} + \frac{1}{2(n+1)} - \frac{7}{9}$$

Si cerca di scriverlo il più simile a S_n

$S_n = \frac{1}{3}(n+1)H_{n+1} - \frac{7}{9}(n+1) + \frac{1}{2}$

Si mette in evidenza $(n+1)$

$$S_n = \frac{1}{3}(n+1)(H_{n+1} - \frac{7}{3}) + \frac{1}{2}$$

Binomiali

Si vuole generalizzare i binomiali sui numeri reali.

Permutazioni

Per n oggetti in quanti modi si possono mescolare? Per :
$a_1, a_2, a_3, \dots$

Si indica con $P_n =$numero di permutazioni di lunghezza n

Per esempio se $n = 3$

$$
\begin{aligned}
&a_1, a_2, a_3 \\
&a_1, a_3, a_3 \\
&a_2, a_1, a_3 \\
&\quad \dots
\end{aligned}
$$

$P_3 = 6$ in questo caso.

Aggiungendo un numero le permutazioni saranno

$P_{n+1} = (n+1)P_n$

$P_0 = P_1 = 1$

Se si sviluppa fino a zero si ha:
$(n+1)P_n = (n+1)n(n-1)\dots P_0 = (n+1)!$

Quindi $P_n = n!$

Disposizioni

Per n oggetti quanti sono i gruppi dato k?
Si indicano con $D_{n,k} =$ numero di disposizioni di n oggetti in gruppi di k
Per esempio $n = 4$ e $k = 2$ di a, b, c, d cioè $D_{4,2} = 12$
$(a, b), (b, a), (a, c), (c, a), (a, d), (d, a), (b, c), (c, b), (b, a), (d, b), (c, d), (d, c)$

$D_{n,k} = n(n-1)(n-2)\dots(n-k+1)$

Combinazioni

Si scelgo tra n oggetti gruppi di k senza contare l ordine.

$C_{n,k} =$ numero di combinazioni di k oggetti su n a disposizione
Si deve dividere per il numero di modi in cui si possono scambiare gli elementi nel gruppo, cioè le permutazioni di k cioè $k!$

$$C_{n,k} = \frac{D_{n,k}}{k!} = \frac{n(n-1)(n-2)\dots(n-k+1)}{k!}$$

Le combinazioni si indicheranno con il binomiale:

$$\binom{n}{k} = C_{n,k}$$

$$\binom{n}{k} = \frac{n(n-1)(n-2)\dots(n-k+1)(n-k)(n-k-1)\dots 1}{k!(n-k)(n-k-1)\dots(1)} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

Proprietà dei binomiali

$$\binom{n}{k} = \frac{n(n-1)!}{k!(k-1)!(n-k)!} = \frac{n}{k}\binom{n-1}{k-1}$$

$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$$

Binomiale su reali

Se si guarda $\frac{D_{n,k}}{k!} = \frac{n(n-1)(n-2)...(n-k+1)}{k!}$

k deve essere per forza un intero ma il numeratore si può sviluppare anche sui reali

$\binom{r}{k} = \frac{r(r-1)(r-2)...(r-k+1)}{k!}$ con r reale
Si chiamano binomiali per la relazione che c'è tra le potenze dei binomi.
$(a+b)^n = \sum^n \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$
I binomi si possono anche scrivere come:

$(a+b)^n = a^n(1+(\frac{b}{a})^n)$

Si usano gli sviluppi di Taylor

$f(z) = (1+z)^r = \sum_{k\geq 0} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} z^k$

$f(z) = (1+z)^r$
$f^{'}(z) = r(1+z)^{r-1}$
$f^{''}(z) = r(r-1)(1+z)^{r-2}$
$f^k(z) = r(r-1)(r-2)\dots(r-k+1)(1+z)^{r-k}$
$f^k(0) = r(r-1)(r-2)\dots(r-k+1)$

Quindi

$f(z) = (1+z)^r = \sum_{k\geq 0} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} z^k = \sum_{k\geq 0} \frac{r(r-1)(r-2)\dots(r-k+1)z^k}{k!}$

$$= \sum_{k\geq 0} \binom{r}{k} z^k$$

Ad esempio

$\binom{1/2}{3} = \frac{1/2(1/2-1)(1/2-2)}{3!} = \frac{1}{16}$

Proprietà per i reali

Numeri Negativi

$\binom{-n}{k} = \frac{-n(-n-1)\dots(-n-k-1)}{k!}$

$\quad = (-1)^k \frac{n(n+1)(n+2)\dots(n+k+1)}{k!} \frac{1*2\dots(n-1)}{1*2\dots(n-1)}$

$\quad = (-1)^k \frac{(n+1-k)!}{k!(n-1)!} = (-1)^k \binom{n+k-1}{k}$

Se ci da noia un numero negativo quindi si può trasformare

$$\binom{-n}{k} = (-1)^k \binom{n+k-1}{k}$$

Triangolo di Tartaglia

$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1}$

Condizioni iniziali
$\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1$

n/k	0	1	2	3	4	5
0	1	0	0	0	0	0
1	1	1	0	0	0	0
2	1	2	1	0	0	0
3	1	3	3	1	0	0
4	1	4	6	4	1	0
5	1	5	10	10	5	1

Si può vedere che il triangolo è simmetrico e che alla riga n la somma degli elementi corrisponde a 2^n . La riga rappresenta il numero totale di sottoinsiemi in un insieme di n elementi, che è ovviamente 2^n .

I numeri $c_n = \binom{2n}{n}$ sono chiamati binomiali centrali. Ad esempio
Se 2n = 4 e n = 2 il binomiale centrale è 6.

Per calcolare il binomio $\binom{-\frac{1}{2}}{n}$ si usano i coef. centrali.

$$\binom{-\frac{1}{2}}{n} = \frac{(-1/2)(-3/2)...(-(2n-1)/2)}{n!}$$

$$\binom{-\frac{1}{2}}{n} = (-1)^n \frac{(\frac{1}{2})(\frac{3}{2})...((\frac{2n-1}{2}))}{n!}$$

Si mette in evidenza il 2 dei denominatori poi si moltiplica per i pari sopra e sotto. Si evidenzia i due dei pari.

$$\frac{(-1)^n}{2^n} \frac{1*3...(2n-1)}{n!} \frac{2*4*6...2n}{2*4*6...2n} = \frac{(-1)^n (2n)!}{2^n (n!) 2^n (n!)}$$

$$= \frac{(-1)^n (2n)!}{4^n (n!)(n!)} = \frac{(-1)^n}{4^n} \binom{2n}{n}$$

In modo simile per altri valori sarà ad esempio:

$$\binom{1/2}{n} = \frac{(-1)^{n-1}}{4^n (2n-1)} \binom{2n}{n}$$

$$\binom{3/2}{n} = \frac{(-1)^n 3}{4^n (2n-1)(2n-3)} \binom{2n}{n}$$

Funzioni generatrici

Abbiamo trovato le funzioni per i confronti del mergesort, la funzione
sul numero medio dei confronti e una funzione analoga per gli scambi.

La ricorrenza di fibonacci è detta lineare perché i coef. sono costanti.

$F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$ con $F_0 = 0, F_1 = 1$

Definiamo in generale sequenza di reali:

$$(a_n)_{n \in N} \qquad a_n \in R$$

Ad esempio:
$(C_n)_n = (0, 2, 5, \frac{26}{3}, \frac{77}{6} \dots)$ con $C_n \in Q$
Abbiamo trovato C_n per le soluzioni della lezione passata.

Indichiamo con G l'operatore funzione generatrice.

$G_n^t(a_n) = \sum_{n \geq 0} a_n t^n = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + \dots$

Non essendoci una differenza sostanziale tra le sequenze e le sommatoria di espressioni
esponenziali, le associamo ad una funzione che chiameremo appunto funzione generatrice.
Facciamo questa associazione perché le funzioni generatrici sono più facili da studiare.
Se non si sono ambiguità si scriverà soltanto $G(a_n)$
t è un segnaposto e di solito non ha significato. Indica solo la posizione del valore della sommatoria. t^2 indica il secondo posto.

Proprietà di G

Linearità

$(a_n)_n, (b_n)_n$ sono due sequenze
L'insieme di due sequenze è un gruppo commutativo rispetto alla somma.

$$G(\alpha a_n + \beta b_n) = \alpha G(a_n) + \beta G(b_n) \quad \alpha, \beta \in R$$

Dimostrazione :
$G(\alpha a_n + \beta b_n) = \sum_{n\geq 0}(\alpha a_n + \beta b_n)t^n$
$\qquad = \alpha \sum a_n t^n + \beta \sum b_n t^n$

il prima sommatoria corrisponde a $G(a_n)$

Spostamento

$G(a_{n+1}) = \frac{G(a_n) - a_0}{t}$

$= \sum a_{n+1}t^n = a_1 + a_2 t + ..$
$= \frac{a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + \ldots}{t}$

Lo spostamento si vedrà che potrà essere generalizzata anche per altre posizioni.

Derivazione

$G(na_n)k = tDG(a_n)$
$\qquad = \sum_{n\geq 0} na_n t^n = 0 + a_1 t + 2a_1 t^2 + 3a_2 t^3 + \ldots$

> $N.B.$ Per fibonacci G è
> $G(F_n) = t + t^2 + 2t^3 + 3t^4 + \ldots$
> $nG(F_n) = t + 2t^2 + 6t^3 + 12t^4 + 25t^5 \ldots$

$DG(a_n) = 0 + a_1 + 2a_2 t + 3a_3 t^2 + \ldots$

Si moltiplica l espressione per t
$tDG(a_n) = 0 + a_1 t + 2a_2 t^2 + 3a_3 t^3 + \ldots$

Abbiamo così la relazione

Convoluzione

$G(\sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}) = G(a_n)G(b_n)$
Permette di trasformare prodotti di funzioni generatrici note in altre funzioni generatrici.

$G(b_n) = \sum b_n t^n$ e si sviluppa come $G(a_n)$
Il prodotto:
$G(a_n)G(b_n) = (a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + \ldots)(b_0 + b_1 t + b_2 t^2 + \ldots)$

a_0b_0 è il termine noto perché non ha t
si ha t^1 solo per le moltiplicazioni con a_0, b_0 con i primi t di a_1 e b_1
Il procedimento per t^2 è analogo

$$a_0b_0 + (a_0b_1 + a_1b_0)t + (a_0b_2 + a_1b_1 + a_2b_0)t^2 + \dots$$

in generale potremo scrivere questa somma con la sommatoria :

$\sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}$

Ad esempio :
$(a_n) = \frac{1}{n}, (b_n) = 1$
$\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k} = H_n$
Facendo la convoluzione si ha la ricorrenza dei numeri armonici.
Per :
$(a_n) = n, (b_n) = 1$
$\sum_{k=0}^{n} n =$ Formula di Gauss

Composizione

$\sum_{n\geq 0} a_n (G(b_k))^n = G(a_n) \circ G(b_n)$
Praticamente se si mette al posto di t una altra sequenza.
$G_n^t(a_n) = \sum_{n\geq 0} a_n t^n$
Troviamo la composizione di due funzioni.

Per esempio:

$\sum 2^n a_n t^n = \sum a_n (2t)^n$
$= G(a_n) \circ G(2t)$
In questo caso 2t è la funzione generatrice (per quanto semplice) :
$2t \to (0, 2, 0, 0, 0, 0, \dots)$

Principio di identità

$a_n = b_n \quad \forall n \quad \iff \quad G(a_n) = G(b_n)$
C'è una equivalenza tra funzioni generatrici e sequenze.

Metodo del rapporto

Sequenza definita da una relazione di ricorrenza
Sequenza nota $(a_n = 1 \quad \forall n)$

$G(1) = \sum t^n$

In questo metodo si va a valutare il rapporto tra due termini della sequenza.

$\frac{a_{n+1}}{a_n} = 1 \rightarrow a_{n+1} = a_n$

Dato che vale per ogni n allora si può trasformare in un uguaglianza tra funzioni generatrici.

$G(a_{n+1}) = G(a_n)$

$\frac{G(a_n)-1}{t} = G(a_n)$

$(1-t)G(a_n) = 1 \rightarrow G(1) = \frac{1}{1-t}$

la funzione generatrice della sequanza 1 può essere generata da $\frac{1}{1-t}$

G Operatore funzione generatrice

$G(a_n) = \sum_{n \geq 0} a_n t^n$

Proprietà

Linearità : $G(\alpha a_n + \beta b_n) = \alpha G(a_n) + \beta G(b_n)$
Spostamento : $G(a_{n+1}) = \frac{G(a_n)-a_0}{t}$

Questa proprietà può essere generalizzata:

$G(a_{n+p}) = a_p + a_{p+1}t + a_{p+2}t^2 + ...$
$G(a_n) = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + ... + a_{p-1}t^{p-1} + a_p t^p + a_{p+1}t^{p+1} + ...$
In generale quindi:
$G(a_{n+p}) = \frac{G(a_n)-a_0-a_1t-a_2t^2-...-a_{p-1}t^{p-1}}{t^p}$

Derivazione : $G(na_n) = tDG(a_n)$
Convoluzione : $G(\sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}) = G(a_n)G(b_n)$
Composizione : $\sum_{n \geq 0} a_n (G(b_k))^n = G(a_n) \circ G(b_n)$

Si riprende la proprietà di convoluzione.
$G(a_n) * G(b_n) = (a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + ...)(b_0 + b_1 t + b_2 t^2 + ...)$
$= a_0 b_0 + (a_0 b_1 + a_1 b_0)t + (a_0 b_2 + a_1 b_1 + a_2 b_0)t^2 + ...$

Quindi: $\sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}$

Inversa di una sequenza rispetto ad a_n
$(a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + ...)(b_0 + b_1 t + b_2 t^2 + ...) = 1$
Quindi $a_0 b_0 = 1$
$(a_0 b_1 + a_1 b_0) = 0$
$(a_0 b_2 + a_1 b_1 + a_2 b_0) = 0$ etc.

La prima equazione ci impone una condizione:
$b_0 = \frac{1}{a_0}$
è necessario quindi che $a_0 \neq 0$
$(a_0 b_1 + a_1 b_0) = 0 \Rightarrow b_1 = -\frac{a_1 b_0}{a_0} = -\frac{a_1}{a_0^2}$
questa operazione si può fare anche per il secondo passo in
$(a_0 b_2 + a_1 b_1 + a_2 b_0) = 0$ per b_2 :
$b_2 = \frac{-a_1 b_1 - a_2 b_0}{a_0} = \frac{a_1^2 - a_0 a_2}{a_0^3}$

Data a_n con $a_0 \neq 0$ esiste sempre l'inversa di $G(a_n)$ ovvero $G(a_n)G(b_n) = 1$
Prendendo : $G(a_n) = 1 - t \Rightarrow a_n = (1, -1, 0, 0, 0, ...)$
Usando i sistemi sviluppati in precendenza si avrà:
$G^{-1}(a_n) = 1 + t^1 + t^2 + ...$
Quindi la sequenza inversa è $b_n = (1, 1, 1, 1, ...)$

Principio di identità: $a_n = b_n \quad \forall n \quad \iff \quad G(a_n) = G(b_n)$

Metodo del rapporto:

a_n data in modo esplicito
voglio trovare $G(a_n)$
valuto il rapporto $\frac{a_{n+1}}{a_n}$
trasformo la sequenza esplicita in una relazione di ricorrenza

$a_n = (1, 1, 1, 1, ...)$
$G(a_n) = \sum_{n \geq 0} t^n$
si valuta $\frac{a_{n+1}}{a_n} = 1$ che sarà in questo caso 1
quindi si può dire che : $a_{n+1} = a_n \qquad \forall n \geq 0$

e $G(a_{n+1}) = G(a_n)$

e $\frac{G(a_n)-1}{t} = G(a_n) \Rightarrow G(a_n) = \frac{1}{1-t}$

Quindi riprendendo i ragionamenti sull inversa $G(1) = \frac{1}{1-t}$

$(1-t)G(b_n)^{-1} = 1$

chiamando $b_n = (1, -1, 0, 0, 0, ...)$

$G(b_n)^{-1} = \frac{1}{1-t}$ come avevamo visto in precendenza.

$(a_n) = (0, 1, 2, 3, ...)$
$a_n = n$
$G(n) = \sum nt^n$ si può usare il metodo del rapporto, ma è più facile usare la proprietà di Derivazione.
$G(n) = G(n * 1) = tDG(1) = tD\frac{1}{1-t} = t\frac{1}{(1-t)^2} = \frac{t}{(1-t)^2} = 0 + t + 2t^2 + 3t^3 + ...$

In generale $a_0 = (a_0)$

Si può fare lo stesso ragionamento con $G(n^2)$ e usando la derivata di un rapporto:
$G(n^2) = t + 4t^2 + 9t^3 + ... = G(n * n) = tDG(n) = tD\frac{t}{(1-t)^2} = t\frac{(1-t)^2 2t(1-t)}{(1-t)^4} =$
$= \frac{t(1-t+2t)}{(1-t)^3} = \frac{t(t+1)}{(1-t)^3}$

Per $a_n = 2n + \frac{1}{3}n^2$ si possono usare i risultati trovati:
$G(a_n) = 2G(n) + \frac{1}{3}G(n^2)$

Per $(a_n) = (1, 0, 1, 0, 1, 0, ...)$
$G(a_n) = 1 + t^2 + t^4 + ...$

> NB: i dispari sono zero

$= \sum t^{2n} = \sum (t^2)^n$
Si può usare la proprietà di Composizione.
$\sum (t^2)^n$ è della forma $\sum_{n \geq 0} a_n (G(b_k))^n$
in cui $t^2 = 0 + 0t + t^2 + 0t^3$
$(b_k) = (0, 0, 1, 0, 1, 0, ...)$
Quindi:
$G(a_n) = \sum t^{2n} = \sum (t^2)^n = G(1) \circ t^2 = \frac{1}{1-t} \circ t^2 = \frac{1}{1-t^2}$

Per $a_n = (1, 0, 0, 1, 0, 0, 1, 0, 0, ...)$ analogamente:
$G(a_n) = \sum t^{3n} = \frac{1}{1-t^3}$

Per $(a_n) = (1, -1, 1, -1, ...)$
$G(a_n) = \sum (-1)^n t^n = \sum (-t)^n$
Si fa la composizione della funzione con -t
$= \frac{1}{1-t} \circ (-t) = \frac{1}{1+t}$

Per $(a_n) = (0, -1, 2, -3, 4, -5, 6, ...)$
$G(a_n) = \sum (-1)^n n t^n = \sum n(-t)^n = \frac{t}{(1-t)^2} \circ (-t) = \frac{-t}{(1+t)^2}$

In generale quindi $a(t) = G(a_n) = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + ...$
$G((-1)^n a_n) = G(a_n) \circ (-t) = a(-t)$

$a_n = 2^n$
$(a_n) = (1, 2, 4, 8, ...)$
$G(2^n) = \sum 2^n t^n = \sum 2t^n = \frac{1}{1-2t}$
In generale
$G(c^n) = \frac{1}{1-ct}$

$a_n = \frac{1}{n!}$
Si prova con il metodo del rapporto
$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{n!}{(n+1)!} = \frac{1}{n+1}$
$(n+1)a_{n+1} = a_n$
Si deve controllare che sia vero per ogni n, è semplice vedere che $\forall n$

$G((n+1)a_{n+1}) = DG(a_n)$
Si può associare $b_{n+1} = (n+1)a_{n+1}$ e $b_n = na_n, b_0 = 0$

$G(b_{n+1}) = \frac{G(b_n)-b_0}{t} = \frac{G(na_n)-0}{t}$
$= \frac{tDG(a_n)}{t} = G(a_n)$
$a'(t) = a(t)$ equazione differenziale del primo ordine
$\frac{a'(t)}{a(t)} = 1$
$\log_n a(t) = t + k$
Dato che $a(0) = a_0 = 1$ allora
$k = 0$
quindi $a(t) = e^t$

$a_n = \frac{1}{n}$ con $a_0 = 0$
Si può provare il rapporto
$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{n}{n+1} \Rightarrow (n+1)a_{n+1} = na_n$
Si verifica che valga per ogni n
$a_1 = 0 \quad ?$

> no perché si ha 1 = 0

Si usa il delta di Kronecker $\delta_{n,k} = 1$ con $n = k$ e 0 altrimenti
$\delta_{n,0} = (1, 0, 0, ...)$
$\delta_{n,k} = (0, 0, 0, ..., 1, 0, 0, 0, ...)$
$G(\delta_{n,k}) = t^k$
$G(\delta_{n,0}) = t^0 = 1$

Quindi $\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{n}{n+1} \Rightarrow (n+1)a_{n+1} = na_n + \delta_{n,0}$
$G((n+1)(a_{n+1})) = G(na_n + \delta_{n,0})$
$DG(a_n) = G(na_n) + G(\delta_{n,0})$
$DG(a_n) = tDG(a_n) + 1$

$a'(t) = ta'(t) + 1$
$(1-t)a'(t) = 1$
$a'(t) = \frac{1}{1-t}$
$a(t) = -\log_n(1-t) + k$
$a(t) = \log_n(1-t)^{-1}$ con k=0
$= \log_n \frac{1}{1-t}$

Quindi $G(\frac{1}{n}) = \log_n \frac{1}{1-t}$

$a_n = H_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$
Si usa la convoluzione da sinistra verso destra.
si può vedere $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} * 1$

Definiamo $c_k = 0 \quad per \quad k = 0$ e $1/k \quad per \quad k > 0$

$a_n = \sum c_k * 1$
$G(\sum c_k * 1) = G(c_n)G(1)$

$G(\sum a_k) = G(\sum a_k * 1) = G(1)G(a_k) = \frac{1}{1-t}G(a_k)$

$G(\sum c_k * 1) = G(c_n)G(1) = \frac{1}{1-t} \log_n \frac{1}{1-t}$

Chiamata Formula di Eulero

> trovare la funzione generatrice di $\frac{n(n+1)}{2}$

Funzioni generatrici

In laboratorio abbiamo provato che partendo da
$G(a_n) = 1 - t - t^2 \rightarrow (a_n)_n = (1, -1, -1, 0, 0, \dots)$
si arriva a $(b_n)_n = (1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, \dots)$ cioè fibonacci.

Applicando le proprietà delle funzioni generatrici è possibile determinare
$G(F_n) = ?$
Per fibonacci $F_n = F_{n-1} + F_{n-2} + \dots$
$F_0 = F_{-1} + F_{-2}$ che in questo caso non ha senso.
Quindi non vale per ogni N.
F_n è lineare (i termini non sono quadratici o altro) e a coefficienti costanti (i termini che moltiplicano sono costanti).

Per farla definire sempre si fa uno shift $F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$
$F_{n+2} \iff G(F_{n+2}) = G(F_{n+1} + F_n)$

$G(F_{n+2}) = G(F_{n+1} + F_n)$
$G(F_{n+2})$ e $G(F_{n+1})$ si possono scrivere come segue:
$= \frac{G(F_n) - F_0 - F_1 t}{t^2} = \frac{G(F_n) - F_0}{t} + G(F_n)$ per traslazione di G
$= \frac{G(F_n) - t}{t^2} = \frac{G(F_n) + tG(F_n)}{t}$ togliendo il t al denominatore
$= G(F_n) - tG(F_n) - t^2 G(F_n) = t$
$= (1 - t - t^2) G(F_n) = t$
$= G(F_n) = \frac{t}{1 - t - t^2}$

Avendo preso n+2 lo riportiamo a n+1 così:
$G(F_{n+1}) = \frac{G(F_n) - F_0}{t} = \frac{1}{1 - t - t^2}$
$= 1 + t + 2t^2 + 3t^3 + 5t^4 + \dots$
In questo modo la funzione è invertibile

Per la sequenza $a_n = a_{n-1} + a_{n-2} + a_{n-3}$ di Tribonacci
$0, 1, 1, 2, 4, 7, 13, 24, \dots$
Con le condizioni iniziali $a_0 = 0, a_1 = 1, a_2 = 1$

Si fa uno shift anche in questo caso
$a_{n+3} = a_{n+2} + a_{n+1} + a_n$

$\frac{G(a_n)-t-t^2}{t^3} = \frac{G(a_n)-t}{t^2} + \frac{G(a_n)}{t} + G(a_n)$

$G(a_n) - t - t^2 = tG(a_n) - t^2 + t^2G(a_n) + t^3G(a_n)$
$= (1 - t - t^2 - t^3)G(a_n) = t$
$G(a_n) = \frac{t}{1-t-t^2-t^3}$

Si introduce sempre una frazione nella funzione generatrice

$a_n = \binom{p}{n}$
$G(a_n) = \sum_{n\geq 0} \binom{p}{n} t^n = (1+t)^p$
analogo a $\sum_{n\geq 0} \binom{n}{k} a^k b^{n-k} = (a+b)^n$

$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \binom{p}{n+1} / \binom{p}{n} =$
$\frac{p!}{(n+1)!(p-n-1)!} \frac{n!(p-n)!}{p!} = \frac{(p-n)}{n+1}$

quindi: $(n+1)a_{n+1} = (p-n)a_n$

Le condizioni iniziali $a_0 = \binom{p}{0} = 1$ e $a_1 = \binom{p}{1} = p$
Dato che funziona anche in zero si applica il principio di identità
$G((n+1)a_{n+1}) = pG(a_n) - G(na_n)$
$DG(a_n) = pG(a_n) - tDG(a_n)$ si introduce un eq differenziale del primo ordine.

$(1+t)a'(t) = pa(t)$
$\frac{a'(t)}{a(t)} = \frac{p}{1+t}$
$\log a(t) = p\log(1+t) + k$
k deve essere 0
quindi : $a(t) = (1+t)^p$

$a_n = \binom{2n}{n}$
$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \binom{2(n+1)}{n+1} / \binom{2n}{n} =$
$= \frac{(2n+2)!}{(n+1)!(n+1)!} \frac{n!n!}{(2n)!}$
$= \frac{(2n+2)(2n+1)}{(n+1)^2}$
$= \frac{2(n+1)(2n+1)}{(n+1)^2} = \frac{2(2n+1)}{n+1}$

$(n+1)a_{n+1} = 2(2n+1)a_n$

condizioni iniziali $a_1 = 2a_0$

$G((n+1)a_{n+1}) = 2G(2(2n+1)a_n)$
$G((n+1)a_{n+1}) = 4G(na_n) + 2G(a_n)$
$DG(a_n) = 4tDG(a_n) + 2G(a_n)$
$(1-4t)a(t) = 2a(t)$
$\frac{a'(t)}{a(t)} = \frac{2}{1-4t}$
$\log a(t) = -\frac{1}{2}\log(1-4t) + k$
$\log a(t) = \log(1-4t)^{-\frac{1}{2}}$
$a(t) = \frac{1}{\sqrt{1-4t}}$

Numeri di Catalan

$a_n = \frac{1}{n+1}\binom{2n}{n}$
$G(\binom{2n}{n}) = \frac{1}{\sqrt{1-4t}}$

$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{1}{(n+2)}\binom{2(n+1)}{n+1} / \frac{1}{n+1}\binom{2n}{n}$
$= \frac{(2n+2)!}{(n+1)!(n+1)!(n+2)}\frac{n!n!}{(2n)!}$
$= \frac{(2n+2)(2n+1)(n+1)}{(n+1)^2(n+2)}$
$= \frac{(n+1)2(n+1)(2n+1)}{(n+1)^2(n+1)} =$
$= \frac{2(2n+1)}{n+1}\frac{n+1}{n+2} = \frac{2(2n+1)}{n+2}$

$(n+2)a_{n+1} = 2(2n+1)a_n$
Condizioni iniziali : $2a_1 = 2a_0$

$G((n+2)a_{n+1}) = 4G(na_n) + 2G(a_n)$
$G((n+1)a_{n+1}) + G(a_{n+1}) = 4G(na_n) + 2G(a_n)$

$a'(t) + \frac{a(t)-a_0}{t} = 4ta'(t) + 2a(t)$
$ta'(t) + a(t) - 1 = 4t^2a(t) + 2ta(t)$
$(t-4t^2)a'(t) + (1-2t)a(t) = 1$

Si deve risolvere l equazione differenziale
$A(t)a'(t) + B(t)a(t) = C(t)$

- Si considera l equazione omogenea associata
  $A(t)\rho'(t) - B(t)\rho(t) = 0$
  Si riscrive l' equazione in questo modo e si indica con ρ per non confondere le due equazioni. Le soluzioni non sono uguali ma:
  $\frac{\rho'(t)}{\rho(t)} = \frac{B(t)}{A(t)}$
  $\rho(t)$ soluzione dell eq. omogenea associata con una qualsiasi condizione iniziale.
- $(\frac{a(t)}{\rho(t)})' = \frac{a'(t)\rho(t)-a(t)\rho'(t)}{\rho(t)^2}$ raggruppando per $\rho(t)$
  $= \frac{\rho(t)(a'(t)-a(t)\frac{\rho'(t)}{\rho(t)})}{\rho(t)^2}$ sostituendo $\frac{\rho'(t)}{\rho(t)}$ ed semplificando $\rho(t)$

$= \frac{a'(t) - a(t)\frac{B(t)}{A(t)}}{\rho(t)}$
$= \frac{A(t)a'(t) - a(t)B(t)}{\rho(t)A(t)} = \frac{C(t)}{\rho(t)A(t)}$
Nell ultimo passaggio tutto il termine si può semplificare con $C(t)$

Ora si cerca la soluzione di $(t-4t^2)a'(t) + (1-2t)a(t) = 1$

- $(t-4t^2)\rho'(t) + (1-2t)\rho(t) = 0$
  $\frac{\rho'(t)}{\rho(t)} = \frac{-1+2t}{t-4t^2} = \frac{-1+2t}{t(1-4t)}$
  $\frac{k}{t} + \frac{r}{(1-4t)} = \frac{k(1-4t)+rt}{t(1-4t)}$
  $\frac{k-4kt+rt}{t(1-4t)}$
  Si associano i valori di k e r all'equazione $\frac{-1+2t}{t-4t^2}$
  $\begin{cases} k = -1 \\ -4k + r = 2 \end{cases} \begin{cases} k = -1 \\ r = -2 \end{cases}$
  da cui : $\frac{-1}{t} - \frac{2}{1-4t}$
  $\log\rho(t) = -\log(t) + \frac{1}{2}\log(1-4t)$
  $\log\rho(t) = \log\ \frac{1}{t} + \log\sqrt{(1-4t)}$
  $\log\rho(t) = \log\ \frac{\sqrt{(1-4t)}}{t}$
  $\to \rho(t) = \frac{\sqrt{(1-4t)}}{t}$
- $(\frac{a(t)}{\frac{\sqrt{(1-4t)}}{t}})' = \frac{1}{\frac{\sqrt{(1-4t)}}{t}(t-4t^2)}$
  $= \frac{1}{\sqrt{(1-4t)}(1-4t)} = \frac{C(t)}{\rho(t)A(t)}$
  $t\frac{a(t)}{\sqrt(1-4t)} = \int_o^t \frac{1}{\sqrt{(1-4t)}(1-4t)}dx = \int_o^t \frac{1}{(1-4t)^{3/2}}dx$
  Sostituzione
  $1 - 4x = y$
  $1 - y = 4x \to x = \frac{1-y}{4} \to dx = -\frac{1}{4}dy$
  $\int_{x=0}^{x=t} -\frac{1}{4y^{3/2}}dy$
  $-\frac{1}{4}\int y^{-3/2}dy$
  $-\frac{1}{4}|\frac{y^{-3/2+1}}{-3/2+1}|_{x=0}^{x=t}$
  $-\frac{1}{4}|2y^{-1/2}|_{x=0}^{x=t}$
  $-\frac{1}{4}|2(1-4x)^{-1/2}|_0^t$

  > riguardare i passaggi

  Quindi:
  $t\frac{a(t)}{\sqrt(1-4t)} = -\frac{1}{4}(-2\frac{1}{\sqrt{1-4t}} - 2)$

$= \frac{1}{2}(\frac{1}{\sqrt{1-4t}} - 1) = \frac{1}{2}\frac{1-\sqrt{1-4t}}{\sqrt{1-4t}}$
$a(t) = \frac{1}{2}\frac{1-\sqrt{1-4t}}{\sqrt{1-4t}}\frac{\sqrt{1-4t}}{t}$

Abbiamo così:

$$a(t) = \frac{1 - \sqrt{1 - 4t}}{2t}$$

Funzioni di ricorrenza del Quicksort

$C_n = n + 1 + \frac{2}{n}\sum_{j=0}^{n-1} C_j$

$S_n = \frac{n-2}{6} + \frac{2}{n}\sum_{j=0}^{n-1}(S_j)$

$nC_n = n(n+1)2\sum_{j=0}^{n-1} C_j$ con $C_0 = 0$ e $C_1 = 2$

Si applica la linearità
$G(nC_n) = G(n(n+1)) + 2G(\sum_{j=0}^{n-1} C_j)$ -->shift indietro poi convoluzione

> $G(a_{n+p}) = \frac{G(a_n) - a_0 - a_1 t - ... a_{p-1}t^{p-1}}{t^p} = \sum_{k\geq 0} a_{k+p}t^k$ shift in avanti
> $G(a_{n-p}) = \sum_{k\geq p} a_{k-p}t^k = a_0 t^p + a_1 t^{p+1} + a_2 t^{p+2} + ... =$ shift indietro
> Si deve passare da $G(a_{n-p})$ a $G(a_n)$ con $G(a_n)$
> $G(a_n) = G(a_{n-p})t^p + a_0 + a_1 t + ... + a_{p-1}t^{p-1}$ quindi riprendendo $G(a_{n-p})$:
> $G(a_{n-p}) = t^p(a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + ...)$
> $= t^p G(a_n)$

$tDG(C_n) = G(n^2) + G(n) + 2tG(\sum_{j=0}^{n} C_j)$
Si usa la formula di Eulero $G(\sum_{k=0}^{n} a_k) = \frac{1}{1-t}G(a_n)$

$tDG(C_n) = G(n^2) + G(n) + 2t\frac{1}{1-t}G(C_n)$
$tDG(C_n) = \frac{t+t^2}{(1-t)^3} + \frac{t}{(1-t)^2} + 2t\frac{1}{1-t}G(C_n)$

> $G(n) = G(n \cdot 1) = tDG(1) = tD\frac{1}{1-t} = \frac{t}{(1-t)^2}$
> $G(n^2) = G(n \cdot n) = tDG(n) = tD\frac{t}{(1-t)} = \frac{t+t^2}{(1-t)^3}$

$G(C_n) = C(t)$
$C'(t) = \frac{1+t+(1-t)}{(1-t)^3} + \frac{2}{1-t}C(t)$
$C'(t) = \frac{2}{(1-t)^3} + \frac{2}{(1-t)}C(t)$ con $C_0 = C(0) = 0$

Si deve risolvere l equazione differenziale, prendendo l equazione omogenea associata.

- eq. omogenea

$\rho'(t) = \frac{2}{(1-t)}\rho(t)$
$\frac{\rho'(t)}{\rho(t)} = \frac{2}{1-t}$
$\log\rho(t) = -2\log(1-t) = \log\frac{1}{(1-t)^2}$
$\rho(t) = \frac{1}{(1-t)^2}$

- $(\frac{C(t)}{\rho(t)})' = \frac{C'(t)\rho(t)-C(t)\rho'(t)}{\rho'(t)^2}$
  $= \frac{\rho(t)[C'(t)-C(t)\frac{\rho'(t)}{\rho(t)}]}{\rho(t)^2}$ sostituisco la frazione di ρ
  $= \frac{C'(t)-C(t)\frac{2}{1-t}}{\rho(t)}$ dato che $C'(t) = \frac{2}{(1-t)^3} + \frac{2}{(1-t)}C(t)$
  $= \frac{\frac{2}{(1-t)^3}}{\frac{1}{(1-t)^2}} = \frac{2}{1-t}$
  $\frac{C(t)}{\rho(t)} = -2\log(1-t) + k$ con $k = 0$
  Si porta il meno dentro il log e si sostiuisce con il risultato trovato
  $C(t) = 2\rho(t)\log(\frac{1}{1-t}) = \frac{2}{(1-t)^2}\log(\frac{1}{1-t})$

$C(t) = \frac{2}{(1-t)^2}\log(\frac{1}{1-t})$ assomiglia ai numeri armonici
$G(H_n) = \frac{1}{1-t}\log(\frac{1}{1-t}) = G(\sum\frac{1}{k})$

$C(t) = \frac{2}{(1-t)^2}\log(\frac{1}{1-t}) = \frac{2}{(1-t)}\frac{1}{1-t}\log(\frac{1}{1-t})$ Si scompone il primo elemento
$\frac{2}{(1-t)}G(H_n) = 2G(\sum_{k=0}^{n} H_k)$

ma dato che $G(C_n) = C(t)$
allora $C_n = 2\sum_{k=0}^{n} H_k = 2(n+1)(H_{n+1} - 1)$
Per $f_n = g_n \forall n \leftrightarrow G(f_n) = G(g_n)$

$nS_n = \frac{n(n-2)}{6} + 2\sum_{j=0}^{n-1}(S_j)$
$n = 0$ si ha $0 = 0 + 0$ quindi vale per zero
$n = 1 \quad 0 = -\frac{1}{6}$ per uno invece si ha un problema
si usa il delta per aggiustare
$nS_n = \frac{n(n-2)}{6} + 2\sum_{j=0}^{n-1}(S_j) + \frac{1}{6}\delta_{n,1}$

$G(nS_n) = \frac{1}{6}G(n^2) - \frac{1}{3}G(n) + 2tG(\sum S_j) + \frac{1}{6}G(\delta_{n,1})$
$tS'(t) = \frac{1}{6}\frac{t+t^2}{(1-t)^3} - \frac{1}{3}\frac{1}{(1-t)^2} + \frac{2t}{1-t}G(S_n) + \frac{1}{6}t$ Si applica eulero

$S'(t) = \frac{1+t-2(1-t)+(1-t)^3}{6(1-t)^3} + \frac{2}{1-t}G(S_n)$
$S'(t) = \frac{t^2(3-t)}{6(1-t)^3} + \frac{2}{1-t}G(S_n)$

- eq. omogenea

$\rho'(t) = \frac{2}{1-t}\rho(t)$
$\rho(t) = \frac{1}{(1-t)^2}$

- $(\frac{S(t)}{\rho(t)})' = \frac{S'(t)\rho(t)-S(t)\rho'(t)}{\rho(t)^2}$
$= \frac{\rho(t)[S'(t)-S(t)\frac{\rho'(t)}{\rho(t)}]}{\rho(t)^2}$
$= \frac{S'(t)-\frac{2}{1-t}S(t)}{\rho(t)}$
$= \frac{t^2(3-t)}{6(1-t)^3}(1-t)^2 = \frac{t^2(3-t)}{6(1-t)}$ la parte $(1-t)^2$ è il denominatore ρ che moltiplica

$\frac{S(t)}{\rho(t)} = \int \frac{t^2(3-t)}{6(1-t)}dt$
Si deve trasformare prima l espressione per usare i tratti semplici
$\frac{t^2(2+1-t)}{6(1-t)} = \frac{2t^2}{6(1-t)} + \frac{(1-t)t^2}{6(1-t)}$
$= \frac{2t^2}{6(1-t)} + \frac{1}{6}t^2$
$= \frac{2t^2-2+2}{6(1-t)} + \frac{1}{6}t^2 = \frac{2(t^2-1)}{6(1-t)} + \frac{2}{6(1-t)} + \frac{1}{6}t^2$
$= \frac{2(t-1)(t+1)}{6(1-t)} + \frac{1}{3(1-t)} + \frac{1}{6}t^2$
$= -\frac{1}{3}(1+t) + \frac{1}{3(1-t)} + \frac{1}{6}t^2$

Quindi $\int \frac{t^2(3-t)}{6(1-t)}dt = \int -\frac{1}{3}(1+t) + \frac{1}{3(1-t)} + \frac{1}{6}t^2 dt$
$= -\frac{t^2}{6} - \frac{1}{3}t + \frac{t^3}{18} - \frac{1}{3}\log(1-t)$

$S(t) = \frac{1}{3}\frac{1}{(1-t)^2}\log(\frac{1}{1-t}) + \frac{t^3-3t^2-6t}{18(1-t)^2}$

l ultimo termine non è altro che:
$\frac{t^2}{18}\frac{t}{(1-t)^2} - \frac{t}{6}\frac{t}{(1-t)^2} - \frac{1}{3}\frac{t}{(1-t)^2}$ cioè
$\frac{t^2}{18}G(n-2) - \frac{t}{6}G(n-1) - \frac{1}{3}G(n)$

Metodo simbolico

$A = \{\epsilon, 01, 001, 10\}$
$B = \{110, 1101, 0, 1\}$

$\alpha \in A \qquad |\alpha| =$ lunghezza di α

$a(t) = \sum_{\alpha \in A} t^{|\alpha|}$

$a(t) = t^0 + t^2 + t^3 + t^2 = 1 + 2t^2 + t^3 \qquad a_n = (1, 0, 2, 1, 0, 0, 0, ...)$

$b(t) = t^3 + t^4 + t + t = 2t + t^3 + t^4 \qquad b_n = (0, 2, 0, 1, 1, 0, 0, 0, ...)$

Prendendo A come un insieme di alberi
$\alpha \in A \qquad |\alpha| =$ numero di nodi interni all albero α

$a(t) = t + t^3 + t^2 + t^2 + t^3$

Per ogni insieme se è possibile associare una misura allora si può trovare una funzione generatrice.

Se A è un insieme di strutture combinatorie, ovvero oggetti ai quali posso associare una misura, (dato $\alpha \in A$ si può trovare la sua misura)
$a(t) = \sum_{\alpha \in A} t^{|\alpha|} = \sum_{n \geq 0} a_n t^n$
con a_n = numero di oggetti della classe che hanno misura n
Metodo simbolico.

Dato $A \cup B = \{\epsilon, 01, 001, 10, 110, 1101, 0, 1\}$
$C(t) = 1 + t^2 + t^3 + t^2 + t^3 + ... = a(t) + b(t)$
Gli insiemi devono essere disgiunti
$C = A \cup B \qquad c(t) = a(t) + b(t)$

Prodotto cartesiano

$A \cdot B = \{110, 1101, 0, 1, 01110, 011101, 010, 011, 001110, 0011101,$
$0010, 0011, 10110, 101101, 100, 101\}$
$C(t) = t^3 + t^4 + t + t + t^5 + t^6 + t^3 + t^3 + t^6 + t^7 + t^4 + t^4 + t^5 + t^6 + t^3 + t^3 =$
$= 2t + 5t^3 + 3t^4 + 2t^5 + 3t^6 + t^7$

che è il prodotto di $a(t) \cdot b(t)$
$C = A \times B = \{\gamma = (\alpha, \beta) : \alpha \in A, \beta \in B. |\gamma| = |\alpha| + |\beta|\}$

$C(t) = \sum_{\gamma \in C} t^{|\gamma|} = \sum_{\alpha \in A, \beta \in B} t^{|\alpha|+|\beta|} = \sum_{n \geq 0} C_n t^n$

$B =$ insieme di stringhe binarie
Si cerca un equazione simbolica associata alla lunghezza di $b \in B$ $\quad |b|$ lunghezza

$B = \epsilon \cup \{0, 1\} \times B$ equazione simbolica
$b(t) = 1 + 2t \cdot b(t)$
$b(t) = \frac{1}{1-2t} = G(2^n)$

$A =$ { insieme di strutture combinatorie}

Insieme finito o numerabile di oggetti sul quale è definita una misura
$\forall \alpha \in A,\ |\alpha|$

$a(t) = \sum t^{|\alpha|} = \sum a_n t^n$

a_n è il numero di oggetti α di A tale che $|\alpha| = n$

Dati A e B classi di strutture si può fare l unione delle due classi.

e la funzione generatrice è determinabile facendo la somma delle funzioni generatrici.

$A \cup B \qquad c(t) = a(t) + b(t)$

Per il prodotto cartesiano si ottiene invece il prodotto delle funzioni generatrici.

$A \times B \qquad c(t) = a(t) \cdot b(t) = \sum_{n \geq 0} \quad \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k} t^k$

Prendendo $\beta =$ { insieme stringhe binarie}
$|\beta| =$ lunghezza della stringa

$\beta = \{\epsilon\} \cup \{0, 1\} \times B \rightarrow b(t) = t^0 + 2tb(t)$
$b(t) = \frac{1}{1-2t}$
t^0 rappresenta epsilon
t^2 rappresenta {0,1}

Prendendo $\beta =$ { insieme stringhe binarie che non contengono 2bit 0 consecutivi}
$|\beta| =$ lunghezza della stringa

$\beta = \{\epsilon\} \cup \{0\} \cup \{01, 1\} \times \beta$
$\rightarrow b(t) = t^0 + t + (t + t^2)b(t)$
$b(t) = \frac{1+t}{1-t-t^2}$ che assomiglia a fibonacci
quindi possiamo riscrivere $b(t)$
$= \frac{1}{1-t-t^2} + \frac{t}{1-t-t^2} = \frac{1}{t}F(t) + F(t)$

Con $F(t) = 0 + t + t^2 + 2t^3 + 3t^4 + \ldots$
$G(t) = \frac{F(t)}{t} = 1 + t + 2t^2 + 3t^3 + \ldots$

$F_3 = 2$ e $G_2 = 2$

C'è uno spostamento quindi $G_n = F_{n+1}$

$b_n = F_{n+1} + F_n = F_{n+2}$

Concatenazione di A si definisce come

$C = S(A) = \epsilon \cup \{A\} \cup \{A \times A\} \cup \{A \times A \times A\} \cup \ldots$

In generale la funzione generatrice

$C(t) = 1 + a(t) + a(t^2) + \ldots = \sum_{k \geq 0} at^k = \frac{1}{1-t} \circ a(t) = \frac{1}{1-a(t)}$

$A = \{0, 1\} \quad a(t) = 2t$

$C(t) = \frac{1}{1-2t}$

> Notazione $A \times A = A^2$

$C = S_k(A) = A \times A \times A\ldots = A^k$ sequenze con esattamente k componenti

$C(t) = a(t)^k$

$C = S_{\geq k} = A^k \cup A^{k+1}\ldots$

$C(t) = a(t)^k + a(t)^{k+1} + \ldots = a(t)^k(1 + a(t) + a(t)^2) = \frac{a(t)^k}{1-at}$

$I = \{1, 2, 3, 4, \ldots\}$ interi maggiori o uguali di 1

$x \in I, \ |x| = x$

$I(t) = t + t^2 + t^3 + \ldots = t(1 + t + t^2 + \ldots) = \frac{t}{1-t}$

Si può anche ricavare in questo modo:

$I = \{ \cdot, \ \cdot \ \cdot, \ \cdot \ \cdot \ \cdot, \ \cdot \ \cdot \ \cdot \ \cdot, etc. \} = S_{\geq 1}(\{ \cdot \}) = \frac{t}{1-t}$

Composizioni di interi

$x = 4$ in quanti modi posso arrivare a 4 facendo le composizioni degli interi positivi?

$4, 3+1, 2+2, 1+3, 1+1+2, 2+1+1, 1+2+1, 1+1+1+1$

C_n numero di composioni di n
$C_4 = 8$
$C = S(I) = \{\epsilon\} \cup I \cup I^2 \cup I^3$
$C(t) = \frac{1}{1-I(t)} = \frac{1}{1-\frac{t}{1-t}} = \frac{1-t}{1-2t}$
$C(t) = \frac{1-t}{1-2t} = 1 + t + 2t^2 + 4t^3 + 8t^4 + 16t^5$
Nel caso t^4 si trova infatti 8

Alberi binari

$B_{n+1} = \sum_{k=0}^{n} B_x B_{n-k}$

$B =$ {insieme degli alberi binari}

$|b| =$ numero dei nodi interni
$B = \{\square\} \cup \{\circ\} \times B \times B$
i due B indicano i due rami che partono da un nodo

$B(t) = t^0 + tB(t)^2 = 1 + tB(t)^2$
$= \frac{1 \pm \sqrt{1-4t}}{2t}$
si esclude il caso positivo per le condizioni iniziali

$\lim_{t \to 0} \frac{1 \pm \sqrt{1-4t}}{2t} \frac{1+\sqrt{1-4t}}{1+\sqrt{1-4t}} = \lim_{t \to 0} \frac{1-1+4t}{2t(1+\sqrt{1-4t})}$
$B(0) = B(1) = 1$
$B_n = \frac{1}{n+1}\binom{2n}{n}$

Prendendo $|b| =$ numero di nodi esterni $\square$

$B(t) = t + t^0 B(t)^2$
$B(t) = t + B(t)^2$
$B(t)^2 - B(t) + t = 0$
$B(t) = \frac{1 \pm \sqrt{1-4t}}{2}$

$B(0) = 0$ con questa condizione si prendono entrambi i casi.
C'è uno shift di uno rispetto al caso precedente

$B_n = \frac{1}{n}\binom{2(n-1)}{(n-1)}$

> Le due funzioni si possono unire
> t per nodi interni $\circ$
> w per nodi esterni $\square$
> $B(t, w) = w + tB(t, w)^2$

Alberi s-ari

$B = \{$L'insieme di alberi s-ari$\}$
$|b| =$ numero dei nodi interni
$B = \{\square\} \cup \{\circ\} \times B \times B \times ... \times B$ con s prodotti

$B(t) = 1 + tB(t)^s$
$B_n = \frac{1}{(s-1)n+1}\binom{sn}{n}$

Alberi ordinati

Un albero è un nodo (la radice) connesso ad una sequenza di alberi (foresta)

G è la classe degli alberi ordinati
F è la classi delle foreste

$F = S(G) = \{\epsilon\} \cup \{G\} \cup G \times G \cup G \times G \times G \cup ...$

$F(t) = \frac{1}{1-G(t)}$

$G = \{\circ\} \times F$
$G(t) = tF(t)$ si sostituisce con l equazione di F

$F(t) = \frac{1}{1-tF(t)}$
$F(t) - tF(t)^2 - 1 = 0$
$= tF(t)^2 - F(t) + 1 = 0$
$F(t) = \frac{1 \pm \sqrt{1-4t}}{2t} = \frac{1-\sqrt{1-4t}}{2t}$

$G(t) = tF(t) = \frac{1-\sqrt{1-4t}}{2}$

$G_n = B_{n-1}$ con $B_n = \frac{1}{n+1}\binom{2n}{n}$

Quindi ha la stessa funzione degli alberi binari meno uno, infatti c'è una relazione tra alberi ordinati e alberi binari

Alberi binari

$B_{n+1} = \sum_{k=0}^{n} B_x B_{n-k}$

$B =$ {insieme degli alberi binari}

$|b| =$ numero dei nodi interni
$B = \{\square\} \cup \{o\} \times B \times B$
i due progetti indicano i due rami che partono da un nodo

$B(t) = t^0 + tB(t)^2 = 1 + tB(t)^2$
$= \frac{1 \pm \sqrt{1-4t}}{2t}$
si esclude il caso positivo per le condizioni iniziali

$\lim_{t \to 0} \frac{1 \pm \sqrt{1-4t}}{2t} \frac{1+\sqrt{1-4t}}{1+\sqrt{1-4t}} = \lim_{t \to 0} \frac{1-1+4t}{2t(1+\sqrt{1-4t})}$
$B(0) = B(1) = 1$
$B_n = \frac{1}{n+1}\binom{2n}{n}$

Prendendo $|b| =$ numero di nodi esterni □

$B(t) = t + t^0 B(t)^2$
$B(t) = t + B(t)^2$
$B(t)^2 - B(t) + t = 0$
$B(t) = \frac{1 \pm \sqrt{1-4t}}{2}$

$B(0) = 0$ con questa condizione si prendono entrambi i casi.
C'è uno shift di uno rispetto al caso precedente
$B_n = \frac{1}{n}\binom{2(n-1)}{(n-1)}$

> Le due funzioni si possono unire
>
> t per nodi interni o
>
> w per nodi esterni □
> $B(t, w) = w + tB(t, w)^2$

Alberi s-ari

B = {L insieme di alberi s-ari}
$|b| =$ numero dei nodi interni

$B = \{\square\} \cup \{o\} \times B \times B \times ... \times B$ con s prodotti

$B(t) = 1 + tB(t)^s$
$B_n = \frac{1}{(s-1)n+1}\binom{sn}{n}$

Alberi ordinati

Un albero è un nodo (la radice) connesso ad una sequenza di alberi (foresta)

G è la classe degli alberi ordinati
F è la classi delle foreste

$F = S(G) = \{\epsilon\} \cup \{G\} \cup G \times G \cup G \times G \times G \cup ...$

$F(t) = \frac{1}{1-G(t)}$

$G = \{o\} \times F$
$G(t) = tF(t)$ si sostituisce con l equazione di F

$F(t) = \frac{1}{1-tF(t)}$
$F(t) - tF(t)^2 - 1 = 0$
$= tF(t)^2 - F(t) + 1 = 0$
$F(t) = \frac{1 \pm \sqrt{1-4t}}{2t} = \frac{1-\sqrt{1-4t}}{2t}$

$G(t) = tF(t) = \frac{1-\sqrt{1-4t}}{2}$

$G_n = B_{n-1}$ con $B_n = \frac{1}{n+1}\binom{2n}{n}$

Quindi ha la stessa funzione degli alberi binari meno uno, infatti c'è una relazione tra alberi ordinati e alberi binari

---

$G(f_n) = \sum_{n \geq 0} f_n t^n = f(t)$
$[t^n]$ operatore "coefficiente di"
$[t^n]G(f_n) = f_n$

- $[t^n](\alpha f(t) + \beta g(t)) = \alpha[t^n]f(t) + \beta[t^n]g(t)$ linearità
- $[t^n]tf(t) = [t^{n-1}]f(t)$ spostamento
  $tf(t) = t\sum_{k \geq 0} f_k t^k = \sum_{k \geq 0} f_k t^{k+1}$
- $[t^n]f(t)g(t) = \sum_{k=0}^{n} f_k g_{n-k}$ convoluzione
- $[t^n]f(t)og(t) = \sum_{k \geq 0} f_k [t^n] g_t$ composizione

---

$f(t) = \frac{1+t}{1-t-t^2}$

$[t^n]f(t) = [t^n]\frac{1}{1-t-t^2} + [t^n]\frac{t}{1-t-t^2}$
$= [t^n]t^{-1}\frac{t}{1-t-t^2} = [t^{n+1}]\frac{t}{1-t-t^2} = F_{n+1}$

$[t^n]f(t) = [t^n]\frac{1}{1-t-t^2} + [t^n]\frac{t}{1-t-t^2} = F_{n+1} + F_n = F_{n+2}$

$f(t) = \frac{1-t}{1-2t}$
$[t^n]f(t) = [t^n]\frac{1}{1-2t} + [t^n]\frac{t}{1-2t} = 2^n - [t^{n-1}]\frac{1}{1-2t} = 2^n - 2^{n-1} = 2^{n-1}(2-1) = 2^{n-1}$

$(1-t-t^2)F(t) = 1+t$
$[t^n](1-t-t^2)F(t) = [t^n](1+t)$
$[t^n]F(t) - [t^n]tF(t - [t^n]t^2F(t) = [t^n](1+t)$
Per $n > 1 \quad F_n - F_{n-1} - F_{n-2} = 0$

Medoto simbolico

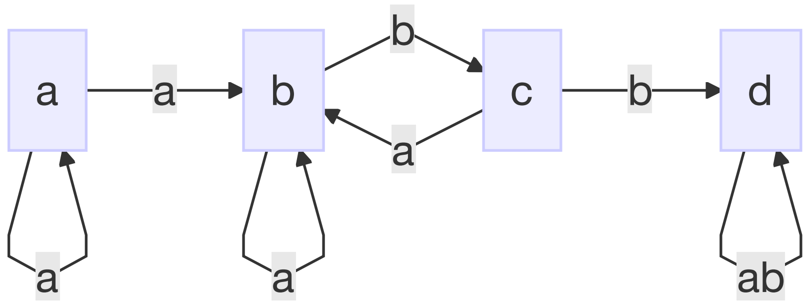
$A, \alpha \in A, |\alpha|$
$a(t) = \sum_{\alpha\in A} t^{|\alpha|} = \sum_{\geq 0} a_n t^n$

Si applica il metodo per i linguaggi, in particolare per linguaggi regolari o context free.
Si può fare unione di espressioni regolari $e_1 \cup e_2$ oppure usare la star $(*)$ o la concatenazione $e_1 \cdot e_2$

La funzione generatrice associata all unione è la somma $e_3(t) = e_1(t) + e_2(t)$, per la star $1 + e_1(t) + e_1(t)^2 + \ldots = \frac{1}{1-e_1(t)}$

- Esempio
  $e = (1 + 01 + 00 + 0001)^*(\epsilon + 0 + 00 + 000)$
  Non ci sono più di 3 zeri consecutivi
  $|\alpha| =$ lunghezza della parola
  $1 + 01 + 001 + 0001 \rightarrow t + t^2 + t^3 + t^4$
  $e_1 = (1 + 01 + 001 + 0001)^* \rightarrow \frac{1}{t+t^2+t^3+t^4}$
  $e_2 = (\epsilon + 0 + 00 + 000) \rightarrow t + t^2 + t^3$
  $\sum_{i=0}^{k} t^i = \frac{1-t^{k+1}}{1-t}$
  $e = e_1 \cdot e_2 \rightarrow \frac{t+t^2+t^3}{1-(t+t^2+t^3+t^4)} = \frac{\frac{1-t^4}{1-t}}{1-t\frac{1-t^4}{1-t}} = \frac{1-t^4}{1-t}\frac{1-t}{1-t-t-t^5} = \frac{1-t^4}{1-2t+t^5}$
  $= 1 + 2t + 4t^2 + 8t^3 + 15t^4 + 29t^5 + \ldots$

Parole del linguaggio che contengono abb
$A = a, b$
Si usa un automa a stati finiti che accetta la stringa abb con d stato finale



$b^*(a^+b)^+b(a\cup b)^*$
$b \to t$
$b^* \to \frac{1}{1-t}$
$(a^+b) \to \frac{t}{1-t}t = \frac{t^2}{1-t}$
$(a^+b)^+ \to \frac{t^2}{1-t}/(1-\frac{t^2}{1-t})$
$(a\cup b) \to 2t$
$(a\cup b)^* \to \frac{1}{1-2t}$
$e \to \frac{1}{1-t}\frac{\frac{t^2}{1-t}}{1-\frac{t^2}{1-t}}t\frac{1}{1-2t} = \frac{t^3}{(1-t)(1-2t)(1-t-t^2)}$

$L_0 ::= aL_1|bL_0 \to L_0(t) = tL_1(t) + tL_0(t)$
$L_1 ::= aL_1|bL_2 \to L_1(t) = tL_1(t) + tL_2(t)$
$L_2 ::= aL_1|bL_3 \to L_2(t) = tL_1(t) + tL_3(t)$
$L_3 ::= aL_3|bL_3 \to L_3(t) = tL_3(t) + tL_3(t)$

Si associa ad ogni simbolo non terminale una gunzione generatrice $L_i(t)$ e l'unione diventa una somma. Traduco la grammatica i un sistema di formule e si vuole trovare $L_0(t)$

$$T = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \; L = \begin{pmatrix} L_0(t) \\ L_1(t) \\ L_2(t) \\ L_3(t) \end{pmatrix}$$

$T(i,j)$ = in quanti modi mi sposto da $L_i \to L_j$ = Matrice di transazione di stato.
$u = (1,0,0,0)$ prima colonna
$v = (0,0,0,1)^t$
$L_0 = u(I-tT)^{-1}v$

$$\begin{pmatrix} L_0(t) \\ L_1(t) \\ L_2(t) \\ L_3(t) \end{pmatrix} = t \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} L_1(t) \\ L_1(t) \\ L_1(t) \\ L_1(t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$IL - tTL = v$ in cui I è la matrice identità
$(I - tT)L = v$
$L = (I - tT)^{-1}v$

u serve per prendere sola la prima componente $\Rightarrow L_0 = u(I - tT)^{-1}v$
v contiene tutti 0 tranne nella posizione che corrisponde allo stato finale.

G automa deterministico a stati finiti
$Q = \{q_1, q_2, q_3, \dots q_5\}$ insieme degli stati
q_0 stato iniziale
$\dot{Q} = \{\dot{q}_1, \dot{q}_2\}$ insieme degli stati finali

La f.g del linguaggio accettato dell'automa è una f.g. razionale fratta che in forma matriciale si può esprimere nel modo seguente:
$L(t) = u(I - tT)^{-1}v$
dove $T_{i,j} = card\{\alpha \in A,$ t.c. esiste un arco da $q_i \to q_j$ etichettato $\alpha\}$
$u = (1, 0, \dots, 0)$
$v = (v_0, \dots, v_j)^t$
$v_i = [q_i \in \dot{Q}] = 1$ se q_i è stato finale 0 altrimenti

---

$p = abb$
$f(t) = \frac{t^3}{(1-t)(1-2t)(1-t-t^2)}$ f.g. che conta le parole su $A = \{a, b\}$ che contengono p = abb
Qual è la funzione generatrice delle parole su $A = \{a, b\}$ che non contengono p?
$(a \cup b)^*$ $\qquad g(t) = \frac{1}{1-2t}$
$h(t) = g(t) - f(t)$ f.g. che conta le parole che non contengono p

Guibas e Oblyzko

Prendiamo $p = abb$ e costruiamo il seguente diagramma

abb	$CodaPattern$	$esito$
abb		$1\ L_0$
ab	b	$0\ L_1$
a	bb	$0\ L_2$

Metto 1 o 0 a seconda se c'è corrispondenza tra le stringhe

$L(t) = \sum c_i t^i = c_0 t^0 + c_1 t^1 + c_2 t^2 = 1$ Polinomio di correlazione

Per trovare la funzione generatrice di un linguaggio che evita un pattern basta trovare il polinomio di correlazione, poi $L(t) = \frac{c(t)}{t^k + (1-mt)c(t)}$

con $k =$cardinalità di $p = |p|$ e $m = |A|$

Per $p = abb$ abbiamo $k = 3$ e $m = 2$

$L(t) = \frac{1}{t^3 + (1-2t)*1}$

$\frac{1}{1-2t} - \frac{t^3}{(1-t)(1-2t)(1-t-t^2)} = \frac{1}{1-2t+t^3}$ ■

A alfabeto , $|A| = m$

p pattern, $p \in A^*$, $|p| = k$
$S(t)$ f.g. delle parole su A che evitano p (rispetto alla lunghezza delle parole)
$[t^n]S(t) = S_n$ numero di parole del linguaggio che evitano p e hanno lunghezza n.

Guibas e Oblyzko (1981)

$S(t) = \frac{C(t)}{t^k + (1-mt)c(t)}$
dove c(t) è il polinomio di autocorrelazione di p.

$A = a, b, \quad m = 2$
$p = aabbaa \quad k = 6$

aabbaa	$CodaPattern$	$esito$
aabba		$1\ C_0$
aabba	a	$0\ C_1$
aabb	aa	$0\ C_2$
aab	baa	$0\ C_3$
aa	$bbaa$	$1\ C_4$
a	$abbaa$	$1\ C_5$

$c(t) = \sum_{i=0}^{k-1} c_i t^i$
i corrisponde alla lunghezza della coda del pattern.
$c(t) = \sum_{i=0}^{k-1} c_i t^i = c_0 + c_4 t^4 + c_5 t^5$
$S(t) = \frac{1+t^4+t^5}{t^6 + (1-2t)(1+t^4+t^5)}$

Notazione di Iversion

Se si parte da un pattern $p = p_1 p_2 \ldots p_k$
$C_i = [p_1 p_2 \ldots p_{k-1} = p_{i+1} p_{i+2} \ldots p_k]$
Nel nostro caso $p = aabbaa$
$C_0 = [aabbaa = aabbaa] = 1$
$C_1 = [aabba = abbaa] = 0$ non vale
$C_2 = [aabb = bbaa] = 0$
$C_3 = [aab = baa] = 0$

$C_4 = [aa = aa] = 1$
$C_5 = [a = a] = 1$

$p = p_1p_2 \dots p_k$
$C_i = [p_1p_2 \dots p_{k-1} = p_{i+1}p_{i+2} \dots p_k]$
S è l insieme delle parole che evitano p.
T è l insieme delle parole che contengono p solo alla fine.

Si considera una parola in S e si prova a concatenare la parola con una lettera del alfabeto. $S \times A$. La parola potrebbe non contenere ancora il pattern e quindi appartenere sempre a S oppure si potrebbe trovare il pattern alla fine cioè appartiene a T
$S \times A \cup \{\epsilon\} = S \cup T$
Concatenando invece della lettera si concatena tutto il pattern, ovviamente la parola avrà il pattern in fondo, ma potrebbe anche apparire prima nella parola. $S \times \{p\}$

$$\overbrace{[\qquad\qquad\qquad}^{\text{S}} | p_1p_2 \ \dots \ p_{k-1} | p_{k+1} \dots p_k] \text{ Pattern in fondo}$$
$$\underbrace{[\quad p_1 \dots p_i | p_{i+1}p_{i+2} \dots p_k}_{\text{T}} \underbrace{|p_{k+1} \dots p_k]}_{\text{Coda dim=i}} \text{ Pattern nella parola}$$

Si verifica quando $[p_1 \dots p_{k-1} = p_{i+1} \dots p_k] = c_i = 1$
$S \times \{p\} = T \times \cup_{c_i \neq 0} < coda >_i$
Si vogliono trasformare in funzioni generatrici.
Si chiamano $S(t)$ e $T(t)$
$S(t) + T(t) = S(t)mt + 1$
$S(t) \cdot t^k = T(t) \cdot c(t)$
L'unione della coda è direttamente $c(t)$

$T(t) = \frac{S(t)t^k}{c(t)}$
$S(t) + \frac{S(t)t^k}{c(t)} = S(t)mt + 1$

$C(t)S(t) + t^kS(t) = C(t)S(t)mt + c(t)$
$S(t) = \frac{C(t)}{t^k + c(t) - mtc(t)}$
$S(t) = \frac{C(t)}{t^k + (1-mt)c(t)}$
$T(t) = \frac{t^k}{t^k + c(t)(1-mt)}$

$L(t) = \frac{1}{1-mt} - S(t) = \frac{t^k + c(t)(1-mt) - (1+mt)c(t)}{(1-mt)(t^k + c(t)(1-mt))} = \frac{t^k}{(t^k + c(t)(1-mt))(1-mt)}$ funzione generatrice delle parole che contengono p

In cui $A^* = \frac{1}{1-a(t)} = \frac{1}{1-mt}$

$m = 2 \qquad S(t,w)$ funzione generatrice cdelle parole che evitano p in cui t tiene conto dei bit 1 e w tiene conto dei bit 0.

$S(t,w) + T(t,w) = S(t,w)(t+w) + 1$

$S(t,w)t^{n_1p}w^{n_0p} = T(t,w)c(t,w)$

aabbaa	$CodaPattern$	$esito$
aabba		$1\ C_0$
aabba	a	$0\ C_1$
aabb	aa	$0\ C_2$
aab	baa	$0\ C_3$
aa	$bbaa$	$1\ C_4$
a	$abbaa$	$1\ C_5$

Invece di contare la lunghezza delle code, prendendo $a = 0, b = 1$,

$C(t,w) = 1 + t^2w^2 + t^2w^3$

$A = \{a, b, c\}$

$S ::= BC$

$B ::= aBb|c$

$C ::= aC|a$

Simbolo non terminale $\to$ f.g.

$::= \quad \to \quad =$

Simbolo terminale $\to$ la trasformazione dipende da cosa voglio contare

$| \to +$

concatenazione -> *

$S(t) = B(t)C(t) \Rightarrow S(t) = \frac{t^2}{(1-t)(1-t^2)}$

$B(t) = t^2B(t) + t \Rightarrow B(t) = \frac{t}{1-t^2}$

$C(t) = tC(t) + t \Rightarrow C(t) = \frac{t}{1-t}$

Se prendiamo t lunghezza, w numero di a

$$S(t,w) = B(t,w)C(t,w)$$
$$B(t,w) = t^2wB(t,w) + t$$
$$C(t,w) = twC(t) + tw$$

Esempio

$E ::= T|AT$
$T ::= F|TAF$
$F ::= P|FMP$
$P ::= a|(E)$
$M ::= *|/$
$A ::= +|-$
$NT = \{E, T, F, P, M, A\}$
Terminali $= \{n, (,), *, /, +, -\}$

Genera espressioni aritmetiche. La grammatica è non ambigua.
Prendiamo t come lunghezza dell espressione, z per tenere traccia del numero di simboli 'n' e si tiene traccia dei simboli parentesi con w.

$E = E(t, z, w)$
$E = T + A \cdot T$
$T = F + TA \cdot F$
$F = P + F \cdot M \cdot P$
$P = tz + t^2w^2E$
Si contano tutte e due le parentesi, aperte o chiuse.
$M = 2t$
$A = 2t$
$E = E(t, z, w) = zt + 2zt^2 + z(w^2 + 4z)t^3 + 4z(2z + w^2)t^4 \dots$

1. n
2. $+n, -n$
3. $(n), n + n, n - n, n * n, n/n$
4. $+n + n, -n + n, -n - n, +n - n, +n * n, -n * n, +n/n, -n/n,$
   $(-n), (+n,)$
   $-(n), +(n)$
   Mettendo a 1 w e z si può trovare direttamente la funzione con solo t.
   $E(t, 1, 1) = t + 2t^2 + 5t^3 + 12t^4 \dots$

$G(f_n) = \sum_{n \geq 0} f_n t^n = f(t)$
$[t^n]$ operatore "coefficiente di"
$[t^n]G(f_n) = f_n$

- *linearità*: $[t^n](\alpha f(t) + \beta g(t)) = \alpha[t^n]f(t) + \beta[t^n]g(t)$
- *spostamento*: $[t^n]tf(t) = [t^{n-1}]f(t)$
  $tf(t) = t\sum_{k \geq 0} f_k t^k = \sum_{k \geq 0} f_k t^{k+1}$
- *convoluzione*: $[t^n]f(t)g(t) = \sum_{k=0}^{n} f_k g_{n-k}$
- *composizione*: $[t^n]f(t) \circ g(t) = \sum_{k \geq 0} f_k [t^n] g_t$

Regola di Newton

$[t^n](1 + \alpha t)^r = \binom{r}{n}\alpha^n$

[Dim]

$[t^n]f'(t) = (n+1)f_{n+1}$
$[t^{n-1}]f'(t) = (n)f_n$
$f_n = \frac{1}{n}[t^{n-1}]f'(t)$
$[t^n]f(t) = \frac{1}{n}[t^{n-1}]f'(t)$ derivazione
$[t^n](1+\alpha t)^r = \frac{1}{n}[t^{n-1}]r\alpha(1+\alpha t)^{r-1} = \frac{\alpha r}{n}[t^{n-1}](1+\alpha t)^{r-1}$
$= \frac{\alpha r}{n}\frac{1}{n-1}[t^{n-2}](r-1)(1+\alpha t)^{r-2}$
$= \frac{\alpha r}{n}\frac{\alpha(r-1)}{n-1}\frac{\alpha(r-2)}{n-2}\dots\frac{\alpha(r-n+1)}{1}[t^{n-n}](1+\alpha t)^{r-n}$
$= \frac{a^n r(r-1)(r-n+1)}{n!} = \alpha^n\binom{r}{n}$