Lezione 4 Ottobre

Formula degli scambi
$S_n = \frac{n-2}{6} + \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}(S_{j-1} + S_{n-j})$

$\frac{n-2}{6}$ è il numero medio di scambi che il SQ esegue durante il partizionamento
La seconda parte è analoga a quella dei confronti
$\frac{1}{n}$ è la probabilità che il perno sia j

$$[\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad |j\,]$$
$$[\underbrace{\qquad\qquad}_{\text{<j}}|j|\underbrace{\qquad\qquad}_{\text{>j}}]$$

> NB l ultimo scambio del perno non viene contato

p_k^j è la probabilità di fare k scambi quando il perno è j
Per fare k scambi nel partizionamento nella prima parte del vettore ci sono k elementi più gradi del perno e nella seconda parte k elementi più piccoli.

Gli elementi più grandi del perno sono $n-j$ e quindi le possibilità sono il binomiale di $\binom{n-j}{k}$, mentre $\binom{j-1}{k}$ sono i modi di scegliere i più piccoli di j.

$$p_k^j = \frac{\binom{n-j}{k}\binom{j-1}{k}(j-1)!(n-j)!}{(n-1)!}$$

Si devono moltiplicare per il numero di permutazioni con j in ultima posizione. Le permutazioni dei k elementi maggiori di $> j$ tra i primi $j-1$ elementi e le permutazioni dei k elementi $< j$ tra gli ultimi $n-j$ elementi.

Numero medio di scambi quando il perno è j :
$\sum_{k\geq 0} kp_k^j$ e la chiamiamo P^j si sviluppa in questo modo:

$P^j = \frac{1}{\binom{n-1}{j-1}}\sum_{k\geq 0} k\binom{n-j}{k}\binom{j-1}{k}$

> N.B 1. $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$ e 2. $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$

sviluppando la parte $\frac{(j-1)!(n-j)!}{(n-1)!}$ si arriva a $\frac{1}{\binom{n-1}{j-1}}$ e dato che non compare k allora si porta fuori dalla sommatoria.

Si sfrutta la formula di Vandermonde per semplificare la sommatoria.

$$\sum_{k>0} \binom{r}{k} \binom{s}{n-k} = \binom{r+s}{n}$$

Sviluppo di P^j

$P^j = \frac{1}{\binom{n-j}{j-1}} \sum_{k\geq 0} k \binom{n-j}{k} \binom{j-1}{k}$

Si scrive $\binom{j-1}{k}$ usando uguaglianza $\binom{n}{k} = \frac{n}{k} \binom{n-1}{k-1}$ come :

$$\frac{(j-1)(j-2)!}{k(k-1)!(j-1-k)!} = \frac{j-1}{k} \binom{j-2}{k-1}$$

$p^j = \frac{1}{\binom{n-1}{j-1}} \sum_{k\geq 0} k \binom{n-j}{k} \binom{j-1}{k}$ si sostituisce l ultima parte con $\frac{j-1}{k} \binom{j-2}{k-1}$
k si semplifica e $j-1$ si porta fuori dalla sommatoria

$$\frac{j-1}{\binom{n-j}{j-1}} \sum_{k\geq 0} \binom{n-j}{k} \binom{j-2}{k-1}$$

Si applica l'uguaglianza $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$ sul secondo elemento della sommatoria

Quindi $\binom{j-2}{k-1} = \binom{j-2}{j-2-(k-1)} = \binom{j-2}{j-1-k}$ da cui:

$$\frac{j-1}{\binom{n-1}{j-1}} \sum_{k\geq 0} \binom{\overbrace{n-j}^{\text{r}}}{k} \underbrace{\binom{\overbrace{j-2}^{\text{s}}}{j-1-k}}_{\text{n - k}}$$

Usando l uguaglianza con la formula di Vandermonde si toglie la sommatoria e diventa:

$$\Rightarrow \frac{j-1}{\binom{n-1}{j-1}} \binom{n-2}{j-1}$$

Prendendo r come $n-j$, s come $j-2$ e n come $j-1$

I due binomiali si possono semplificare

$P^j \; = (j-1)\frac{(n-2)!}{(j-1)!(n-1-j)!}\frac{(j-1)!(n-j)!}{(n-1)!}$

$$P^j = \frac{(j-1)(n-j)}{n-1}$$

questa è la probabilità quando j è il perno.

Si deve capire qual è il numero medio di scambi tenendo conto della probabilità di j

$$\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} p^j$$

Numero medio di scambi durante il partizionamento (prima che i puntatori si incrorocino)

$\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}\frac{(j-1)(n-j)}{n-1}$

che si può semplificare

$\frac{1}{n(n-1)}\sum_{j=1}^{n} jn - j^2 - n + j$

si mette in evidenza j e jn e j diventano la prima sommatoria $(n+1)\sum j$ che è la somma dei primi numeri interi.

La sommatoria di n quadrati è uguale a $\sum^n j^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

$= \frac{1}{n(n-1)}[(n+1)\sum_{j=1}^{n} j - \sum_{j=1}^{n} j^2 - n\sum_{j=1}^{n} 1]$
$= \frac{1}{n(n-1)}[\frac{n(n+1)^2}{2} - \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} - n^2] = \frac{n-2}{6}$

Una volta trovato $\frac{n-2}{6}$ si deve sviluppare tutta l espressione.

$S_n = \frac{n-2}{6} + \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}(S_{j-1} + S_{n-j})$

$S_n = \frac{n-2}{6} + \frac{2}{n}\sum_{j=0}^{n-1}(S_j)$ si somma due volte la stessa quantità

$nS_n = \frac{n(n-2)}{6} + 2\sum_{j=0}^{n-1}(S_j)$ si moltiplica per n

$n-1$ al posto di n

$(n-1)S_{n-1} = \frac{(n-1)(n-3)}{6} + 2\sum_{j=0}^{n-2}(S_j)$ Si fa la differenza

$nS_n - (n-1)S_{n-1} = \frac{n(n-2)}{6} - \frac{(n-1)(n-3)}{6} + 2\sum_{j=0}^{n-1} S_j - 2\sum_{j=0}^{n-2} S_j$

$= \frac{2n-3}{6} + 2S_{n-1}$

$nS_n = \frac{2n-3}{6} + (n+1)S_{n-1}$

Divido per $n(n+1)$ e poi itero su S_{n-1}

$$\frac{S_n}{n+1} = \frac{2n-3}{6n(n+1)} + \frac{S_{n-1}}{n}$$

Si ritrova di nuovo un espressione del tipo $a_n = a_{n-1} + b_n$

$a_n = a_{n-2} + b_{n-1} + b_n = a_{n-3} + b_{n-2} + b_{n-1} + b_n = \ \ldots$

$\frac{S_n}{n+1} = \frac{2n-3}{6n(n+1)} + \frac{2(n-1)-3}{6(n-1)(n+1-1)} + \frac{S_{n-2}}{n-1}$

Ci si ferma a S_{n-2} perché in questo caso è il primo valore noto.
Si deve praticamente trovare da dove parte k che è il denominatore di $\frac{S_x}{m}$

$$\frac{S_n}{n+1} = \sum_{k=3}^{n} \frac{2k-3}{6k(k+1)} + \frac{S_2}{3}$$

Condizioni iniziali $S_0 = S_1 = S_2 = 0$ quindi

$$\frac{S_n}{n+1} = \sum_{k=3}^{n} \frac{2k-3}{6k(k+1)}$$

Si usano di nuovo i numeri armonici di H_n
Il procedimento per spezzare la sommatoria è simile alla scomposizione per gli integrali. , quindi:
$\frac{2k-3}{k(k+1)} = \frac{A}{k} + \frac{B}{k+1}$
$= \frac{A(k+1)+Bk}{k(k+1)} = \frac{(A+B)k+A}{k(k+1)}$

$A + B = 2$
$B = 5 \Rightarrow A = -3$

$\frac{S_n}{n+1} = \sum_{k=3}^{n} \frac{2k-3}{6k(k+1)}$
$= \frac{1}{6}\sum_{k=3}^{n}[\frac{-3}{k} + \frac{5}{k+1}]$

$= -\frac{1}{2}\sum_{k=3}^{n} \frac{1}{k} + \frac{5}{6}\sum_{k=4}^{n+1} \frac{1}{k}$

$= -\frac{1}{2}[\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - 1 - \frac{1}{2}] + \frac{5}{6}\sum_{k=1}^{n+1}(\frac{1}{k} - 1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{3})$

$= -\frac{1}{2}H_n + \frac{3}{4} + \frac{5}{6}H_{n+1} - \frac{55}{36}$

Si deve trasformare in $H_{n+1} = H_n + \frac{1}{n+1}$
$H_n = H_{n+1} - \frac{1}{n+1}$

Si sviluppa ancora:

$= -\frac{1}{2}H_{n+1} + \frac{1}{2(n+1)} + \frac{5}{6}H_{n+1} - \frac{7}{9}$

$$\frac{S_n}{n+1} = \frac{1}{3}H_{n+1} + \frac{1}{2(n+1)} - \frac{7}{9}$$

Si cerca di scriverlo il più simile a S_n

$S_n = \frac{1}{3}(n+1)H_{n+1} - \frac{7}{9}(n+1) + \frac{1}{2}$

Si mette in evidenza $(n+1)$

$$S_n = \frac{1}{3}(n+1)(H_{n+1} - \frac{7}{3}) + \frac{1}{2}$$