Funzioni generatrici

In laboratorio abbiamo provato che partendo da
$G(a_n) = 1 - t - t^2 \rightarrow (a_n)_n = (1, -1, -1, 0, 0, \dots)$
si arriva a $(b_n)_n = (1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, \dots)$ cioè fibonacci.

Applicando le proprietà delle funzioni generatrici è possibile determinare
$G(F_n) = ?$
Per fibonacci $F_n = F_{n-1} + F_{n-2} + \dots$
$F_0 = F_{-1} + F_{-2}$ che in questo caso non ha senso.
Quindi non vale per ogni N.
F_n è lineare (i termini non sono quadratici o altro) e a coefficienti costanti (i termini che moltiplicano sono costanti).

Per farla definire sempre si fa uno shift $F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$
$F_{n+2} \iff G(F_{n+2}) = G(F_{n+1} + F_n)$

$G(F_{n+2}) = G(F_{n+1} + F_n)$
$G(F_{n+2})$ e $G(F_{n+1})$ si possono scrivere come segue:
$= \frac{G(F_n) - F_0 - F_1 t}{t^2} = \frac{G(F_n) - F_0}{t} + G(F_n)$ per traslazione di G
$= \frac{G(F_n) - t}{t^2} = \frac{G(F_n) + tG(F_n)}{t}$ togliendo il t al denominatore
$= G(F_n) - tG(F_n) - t^2 G(F_n) = t$
$= (1 - t - t^2) G(F_n) = t$
$= G(F_n) = \frac{t}{1 - t - t^2}$

Avendo preso n+2 lo riportiamo a n+1 così:
$G(F_{n+1}) = \frac{G(F_n) - F_0}{t} = \frac{1}{1 - t - t^2}$
$= 1 + t + 2t^2 + 3t^3 + 5t^4 + \dots$
In questo modo la funzione è invertibile

Per la sequenza $a_n = a_{n-1} + a_{n-2} + a_{n-3}$ di Tribonacci
$0, 1, 1, 2, 4, 7, 13, 24, \dots$
Con le condizioni iniziali $a_0 = 0, a_1 = 1, a_2 = 1$

Si fa uno shift anche in questo caso
$a_{n+3} = a_{n+2} + a_{n+1} + a_n$

$\frac{G(a_n)-t-t^2}{t^3} = \frac{G(a_n)-t}{t^2} + \frac{G(a_n)}{t} + G(a_n)$

$G(a_n) - t - t^2 = tG(a_n) - t^2 + t^2G(a_n) + t^3G(a_n)$
$= (1 - t - t^2 - t^3)G(a_n) = t$
$G(a_n) = \frac{t}{1-t-t^2-t^3}$

Si introduce sempre una frazione nella funzione generatrice

$a_n = \binom{p}{n}$
$G(a_n) = \sum_{n\geq 0} \binom{p}{n} t^n = (1+t)^p$
analogo a $\sum_{n\geq 0} \binom{n}{k} a^k b^{n-k} = (a+b)^n$

$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \binom{p}{n+1} / \binom{p}{n} =$
$\frac{p!}{(n+1)!(p-n-1)!} \frac{n!(p-n)!}{p!} = \frac{(p-n)}{n+1}$

quindi: $(n+1)a_{n+1} = (p-n)a_n$

Le condizioni iniziali $a_0 = \binom{p}{0} = 1$ e $a_1 = \binom{p}{1} = p$
Dato che funziona anche in zero si applica il principio di identità
$G((n+1)a_{n+1}) = pG(a_n) - G(na_n)$
$DG(a_n) = pG(a_n) - tDG(a_n)$ si introduce un eq differenziale del primo ordine.

$(1+t)a'(t) = pa(t)$
$\frac{a'(t)}{a(t)} = \frac{p}{1+t}$
$\log a(t) = p\log(1+t) + k$
k deve essere 0
quindi : $a(t) = (1+t)^p$

$a_n = \binom{2n}{n}$
$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \binom{2(n+1)}{n+1} / \binom{2n}{n} =$
$= \frac{(2n+2)!}{(n+1)!(n+1)!} \frac{n!n!}{(2n)!}$
$= \frac{(2n+2)(2n+1)}{(n+1)^2}$
$= \frac{2(n+1)(2n+1)}{(n+1)^2} = \frac{2(2n+1)}{n+1}$

$(n+1)a_{n+1} = 2(2n+1)a_n$

condizioni iniziali $a_1 = 2a_0$

$G((n+1)a_{n+1}) = 2G(2(2n+1)a_n)$
$G((n+1)a_{n+1}) = 4G(na_n) + 2G(a_n)$
$DG(a_n) = 4tDG(a_n) + 2G(a_n)$
$(1-4t)a(t) = 2a(t)$
$\frac{a'(t)}{a(t)} = \frac{2}{1-4t}$
$\log a(t) = -\frac{1}{2}\log(1-4t) + k$
$\log a(t) = \log(1-4t)^{-\frac{1}{2}}$
$a(t) = \frac{1}{\sqrt{1-4t}}$