$A =$ { insieme di strutture combinatorie}

Insieme finito o numerabile di oggetti sul quale è definita una misura
$\forall \alpha \in A, |\alpha|$

$a(t) = \sum t^{|\alpha|} = \sum a_n t^n$

a_n è il numero di oggetti α di A tale che $|\alpha| = n$

Dati A e B classi di strutture si può fare l unione delle due classi.

e la funzione generatrice è determinabile facendo la somma delle funzioni generatrici.

$A \cup B \qquad c(t) = a(t) + b(t)$

Per il prodotto cartesiano si ottiene invece il prodotto delle funzioni generatrici.

$A \times B \qquad c(t) = a(t) \cdot b(t) = \sum_{n \geq 0} \quad \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k} t^k$

Prendendo $\beta =$ { insieme stringhe binarie}
$|\beta| =$ lunghezza della stringa

$\beta = \{\epsilon\} \cup \{0, 1\} \times B \rightarrow b(t) = t^0 + 2tb(t)$
$b(t) = \frac{1}{1-2t}$
t^0 rappresenta epsilon
t^2 rappresenta {0,1}

Prendendo $\beta =$ { insieme stringhe binarie che non contengono 2bit 0 consecutivi}
$|\beta| =$ lunghezza della stringa

$\beta = \{\epsilon\} \cup \{0\} \cup \{01, 1\} \times \beta$
$\rightarrow b(t) = t^0 + t + (t + t^2)b(t)$
$b(t) = \frac{1+t}{1-t-t^2}$ che assomiglia a fibonacci
quindi possiamo riscrivere $b(t)$
$= \frac{1}{1-t-t^2} + \frac{t}{1-t-t^2} = \frac{1}{t}F(t) + F(t)$

Con $F(t) = 0 + t + t^2 + 2t^3 + 3t^4 + \ldots$
$G(t) = \frac{F(t)}{t} = 1 + t + 2t^2 + 3t^3 + \ldots$

$F_3 = 2$ e $G_2 = 2$
C'è uno spostamento quindi $G_n = F_{n+1}$

$b_n = F_{n+1} + F_n = F_{n+2}$

Concatenazione di A si definisce come
$C = S(A) = \epsilon \cup \{A\} \cup \{A \times A\} \cup \{A \times A \times A\} \cup \dots$

In generale la funzione generatrice
$C(t) = 1 + a(t) + a(t^2) + \dots = \sum_{k \geq 0} at^k = \frac{1}{1-t} \circ a(t) = \frac{1}{1-a(t)}$

$A = \{0, 1\} \quad a(t) = 2t$
$C(t) = \frac{1}{1-2t}$

> Notazione $A \times A = A^2$

$C = S_k(A) = A \times A \times A \dots = A^k$ sequenze con esattamente k componenti
$C(t) = a(t)^k$

$C = S_{\geq k} = A^k \cup A^{k+1} \dots$
$C(t) = a(t)^k + a(t)^{k+1} + \dots = a(t)^k(1 + a(t) + a(t)^2) = \frac{a(t)^k}{1-at}$

$I = \{1, 2, 3, 4, \dots\}$ interi maggiori o uguali di 1

$x \in I, |x| = x$

$I(t) = t + t^2 + t^3 + \dots = t(1 + t + t^2 + \dots) = \frac{t}{1-t}$

Si può anche ricavare in questo modo:
$I = \{\cdot, \cdot\cdot, \cdot\cdot\cdot, \cdot\cdot\cdot\cdot, etc.\} = S_{\geq 1}(\{\cdot\}) = \frac{t}{1-t}$

Composizioni di interi
$x = 4$ in quanti modi posso arrivare a 4 facendo le composizioni degli interi positivi?

$4, 3+1, 2+2, 1+3, 1+1+2, 2+1+1, 1+2+1, 1+1+1+1$

C_n numero di composioni di n
$C_4 = 8$
$C = S(I) = \{\epsilon\} \cup I \cup I^2 \cup I^3$
$C(t) = \frac{1}{1-I(t)} = \frac{1}{1-\frac{t}{1-t}} = \frac{1-t}{1-2t}$
$C(t) = \frac{1-t}{1-2t} = 1 + t + 2t^2 + 4t^3 + 8t^4 + 16t^5$
Nel caso t^4 si trova infatti 8

Alberi binari

$B_{n+1} = \sum_{k=0}^{n} B_x B_{n-k}$

$B =$ {insieme degli alberi binari}

$|b| =$ numero dei nodi interni
$B = \{\square\} \cup \{\circ\} \times B \times B$
i due B indicano i due rami che partono da un nodo

$B(t) = t^0 + tB(t)^2 = 1 + tB(t)^2$
$= \frac{1 \pm \sqrt{1-4t}}{2t}$
si esclude il caso positivo per le condizioni iniziali

$\lim_{t\to 0} \frac{1 \pm \sqrt{1-4t}}{2t} \frac{1+\sqrt{1-4t}}{1+\sqrt{1-4t}} = \lim_{t\to 0} \frac{1-1+4t}{2t(1+\sqrt{1-4t})}$
$B(0) = B(1) = 1$
$B_n = \frac{1}{n+1}\binom{2n}{n}$

Prendendo $|b| =$ numero di nodi esterni $\square$

$B(t) = t + t^0 B(t)^2$
$B(t) = t + B(t)^2$
$B(t)^2 - B(t) + t = 0$
$B(t) = \frac{1 \pm \sqrt{1-4t}}{2}$

$B(0) = 0$ con questa condizione si prendono entrambi i casi.
C'è uno shift di uno rispetto al caso precedente

$B_n = \frac{1}{n}\binom{2(n-1)}{(n-1)}$

> Le due funzioni si possono unire
> t per nodi interni $\circ$
> w per nodi esterni $\square$
> $B(t, w) = w + tB(t, w)^2$

Alberi s-ari

$B = \{$L'insieme di alberi s-ari$\}$
$|b| =$ numero dei nodi interni
$B = \{\square\} \cup \{\circ\} \times B \times B \times ... \times B$ con s prodotti

$B(t) = 1 + tB(t)^s$
$B_n = \frac{1}{(s-1)n+1}\binom{sn}{n}$

Alberi ordinati

Un albero è un nodo (la radice) connesso ad una sequenza di alberi (foresta)

G è la classe degli alberi ordinati
F è la classi delle foreste

$F = S(G) = \{\epsilon\} \cup \{G\} \cup G \times G \cup G \times G \times G \cup ...$

$F(t) = \frac{1}{1-G(t)}$

$G = \{\circ\} \times F$
$G(t) = tF(t)$ si sostituisce con l equazione di F

$F(t) = \frac{1}{1-tF(t)}$
$F(t) - tF(t)^2 - 1 = 0$
$= tF(t)^2 - F(t) + 1 = 0$
$F(t) = \frac{1 \pm \sqrt{1-4t}}{2t} = \frac{1-\sqrt{1-4t}}{2t}$

$G(t) = tF(t) = \frac{1-\sqrt{1-4t}}{2}$

$G_n = B_{n-1}$ con $B_n = \frac{1}{n+1}\binom{2n}{n}$

Quindi ha la stessa funzione degli alberi binari meno uno, infatti c'è una relazione tra alberi ordinati e alberi binari