Numeri di Catalan

$a_n = \frac{1}{n+1}\binom{2n}{n}$
$G(\binom{2n}{n}) = \frac{1}{\sqrt{1-4t}}$

$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{1}{(n+2)}\binom{2(n+1)}{n+1}/\frac{1}{n+1}\binom{2n}{n}$
$= \frac{(2n+2)!}{(n+1)!(n+1)!(n+2)}\frac{n!n!}{(2n)!}$
$= \frac{(2n+2)(2n+1)(n+1)}{(n+1)^2(n+2)}$
$= \frac{(n+1)2(n+1)(2n+1)}{(n+1)^2(n+1)} =$
$= \frac{2(2n+1)}{n+1}\frac{n+1}{n+2} = \frac{2(2n+1)}{n+2}$

$(n+2)a_{n+1} = 2(2n+1)a_n$
Condizioni iniziali : $2a_1 = 2a_0$

$G((n+2)a_{n+1}) = 4G(na_n) + 2G(a_n)$
$G((n+1)a_{n+1}) + G(a_{n+1}) = 4G(na_n) + 2G(a_n)$

$a'(t) + \frac{a(t)-a_0}{t} = 4ta'(t) + 2a(t)$
$ta'(t) + a(t) - 1 = 4t^2a(t) + 2ta(t)$
$(t-4t^2)a'(t) + (1-2t)a(t) = 1$

Si deve risolvere l equazione differenziale
$A(t)a'(t) + B(t)a(t) = C(t)$

- Si considera l equazione omogenea associata
  $A(t)\rho'(t) - B(t)\rho(t) = 0$
  Si riscrive l' equazione in questo modo e si indica con ρ per non confondere le due equazioni. Le soluzioni non sono uguali ma:
  $\frac{\rho'(t)}{\rho(t)} = \frac{B(t)}{A(t)}$
  $\rho(t)$ soluzione dell eq. omogenea associata con una qualsiasi condizione iniziale.
- $(\frac{a(t)}{\rho(t)})' = \frac{a'(t)\rho(t)-a(t)\rho'(t)}{\rho(t)^2}$ raggruppando per $\rho(t)$
  $= \frac{\rho(t)(a'(t)-a(t)\frac{\rho'(t)}{\rho(t)})}{\rho(t)^2}$ sostituendo $\frac{\rho'(t)}{\rho(t)}$ ed semplificando $\rho(t)$

$= \frac{a'(t)-a(t)\frac{B(t)}{A(t)}}{\rho(t)}$
$= \frac{A(t)a'(t)-a(t)B(t)}{\rho(t)A(t)} = \frac{C(t)}{\rho(t)A(t)}$
Nell ultimo passaggio tutto il termine si può semplificare con $C(t)$

Ora si cerca la soluzione di $(t-4t^2)a'(t)+(1-2t)a(t)=1$

- $(t-4t^2)\rho'(t)+(1-2t)\rho(t)=0$
  $\frac{\rho'(t)}{\rho(t)} = \frac{-1+2t}{t-4t^2} = \frac{-1+2t}{t(1-4t)}$
  $\frac{k}{t} + \frac{r}{(1-4t)} = \frac{k(1-4t)+rt}{t(1-4t)}$
  $\frac{k-4kt+rt}{t(1-4t)}$
  Si associano i valori di k e r all'equazione $\frac{-1+2t}{t-4t^2}$
  $\begin{cases} k=-1 \\ -4k+r=2 \end{cases} \begin{cases} k=-1 \\ r=-2 \end{cases}$
  da cui : $\frac{-1}{t} - \frac{2}{1-4t}$
  $\log\rho(t) = -\log(t) + \frac{1}{2}\log(1-4t)$
  $\log\rho(t) = \log\ \frac{1}{t} + \log\sqrt{(1-4t)}$
  $\log\rho(t) = \log\ \frac{\sqrt{(1-4t)}}{t}$
  $\rightarrow \rho(t) = \frac{\sqrt{(1-4t)}}{t}$
- $(\frac{a(t)}{\frac{\sqrt{(1-4t)}}{t}})' = \frac{1}{\frac{\sqrt{(1-4t)}}{t}(t-4t^2)}$
  $= \frac{1}{\sqrt{(1-4t)}(1-4t)} = \frac{C(t)}{\rho(t)A(t)}$
  $t\frac{a(t)}{\sqrt(1-4t)} = \int_o^t \frac{1}{\sqrt{(1-4t)}(1-4t)}dx = \int_o^t \frac{1}{(1-4t)^{3/2}}dx$
  Sostituzione
  $1-4x=y$
  $1-y=4x \rightarrow x=\frac{1-y}{4} \rightarrow dx=-\frac{1}{4}dy$
  $\int_{x=0}^{x=t} -\frac{1}{4y^{3/2}}dy$
  $-\frac{1}{4}\int y^{-3/2}dy$
  $-\frac{1}{4}|\frac{y^{-3/2+1}}{-3/2+1}|_{x=0}^{x=t}$
  $-\frac{1}{4}|2y^{-1/2}|_{x=0}^{x=t}$
  $-\frac{1}{4}|2(1-4x)^{-1/2}|_0^t$

  > riguardare i passaggi

  Quindi:
  $t\frac{a(t)}{\sqrt(1-4t)} = -\frac{1}{4}(-2\frac{1}{\sqrt{1-4t}}-2)$

$= \frac{1}{2}(\frac{1}{\sqrt{1-4t}} - 1) = \frac{1}{2}\frac{1-\sqrt{1-4t}}{\sqrt{1-4t}}$
$a(t) = \frac{1}{2}\frac{1-\sqrt{1-4t}}{\sqrt{1-4t}}\frac{\sqrt{1-4t}}{t}$

Abbiamo così:

$$a(t) = \frac{1 - \sqrt{1 - 4t}}{2t}$$