Quicksort

Esempio di quicksort con pseudocodice.
Si esaminano i contronti del quicksort. La parte importante è il partizionamento perché poi si effettuano solo due chiamate ricorsive. Ogni partizionamento dovrò confrontare il perno con tutti gli altri valori, quindi $n-1$ poi si dovrà aggiungere anche +2
Costo partizionamento $= n-1+2 = n+1$
perché si fanno una coppia di confronti arrivando allo scambio degli indici i e j.

Dimostrazione caso medio

I partizionamenti sono n.
Per come l algoritmo è sviluppato la posizione degli elementi ha un ruolo fondamentale.
Ci sono tre casi: ottimo, pessimo e medio.
Ottimo: le partizioni sono più o meno simili.
Pessimo: Una partizione è vuota e l altra è ha i restanti elementi. (Se il vettore è quasi ordinato o ordinato).

Nel caso pessimo si avrà C_n:
$C_n = C_{n-1} + n + 1 \ \rightarrow C_n = O(n^2)$

Condizione iniziale $C_0 = 0$

$$\begin{aligned} C_n &= C_{n-2} + n + (n+1) \\ &= C_{n-3} + (n-1) + n + (n+1) \\ &= C_{n-4} + (n-2) + (n-1) + n + (n+1) \\ &= C_0 + 2 + 3 + \ldots + n + (n+1) \\ &= \sum_{k=2}^{n+1}(k) \end{aligned}$$

Cioè la somma dei primi numeri interi partendo da 2 che è

$\sum_{k=0}^{n}(k) = \frac{n(n+1)}{2}$ è la formula di Gauss normale

$\sum_{k=2}^{n+1}(k) - 1 = \frac{(n+2)(n+1)}{2}$ è la formula per $k=2$

Quicksort caso medio

a vettore di dimensione n
Si ipotizza che il vettore contenga una qualsiasi permutazione di n valori, i possibili input sono n! I valori sono tutti distinti mescolati a caso.
Si può dire che il vettore contiene i numeri da 1 a n (1,2,...,n)
Esaminiamo la versione dell algorimo in cui il perno sia l elemento a destra

$$[\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad |j\,]$$

$$[\underbrace{\qquad\qquad}_{<j}|j|\underbrace{\qquad\qquad}_{>j}]$$

Il primo sottovettore ha dimensione $j-1$ il secondo sottovettore $n-j$
Probabilità che il perno sia $j(j$ che divide il vettore con i partizionamenti simili$)$ è $\frac{1}{n}$ cioè $\frac{(n-1)!}{n!}$
Il numero medio di confronti, cioè arrivare a j nel mezzo è

$$C_n = (n+1)_{costoPartizionamento} \\ +\frac{1}{n}_{probalitaDelPerno} \\ *\sum_{j=1}^{n}[C_{j-1}+C_{n-j}]_{costoChiamateRicorsive}$$

Condizione iniziale è $C_0 = 0$

Condizione iniziale ci porta a dire che $C_1 = 2$
Nella sommatoria ci sono le due quantità, il primo termine assumerà i valori da C_0 fino a C_{n-1}, il secondo da C_{n-1} fino a C_0.
Dato che si somma due volte la stessa cosa si può scrivere
$C_n = (n+1) + \frac{2}{n}\sum_{j=0}^{n-1}[C_j]$ si moltiplica tutto per n
$nC_n = n(n+1) + 2\sum_{j=0}^{n-1}[C_j]$
Si vuole eliminare la somma e si parte scrivendo la ricorrenza con $n-1$
$(n-1)C_{n-1} = (n-1)n + 2\sum_{j=0}^{n-2}[C_j]$
Facendo la differenza

$$\begin{aligned} nC_n-(n-1)C_{n-1} &= n(n+1)+2\sum_{j=0}^{n-1}[C_j] - (n-1)n - 2*\sum_{j=0}^{n-2}[C_j] \\ &= n(n+1)-(n-1)n+2*C_{n-1} \\ &= 2n+2*C_{n-1} \end{aligned}$$

$$nC_n-(n-1)C_{n-1} = 2n+2*C_{n-1}$$

$$\Rightarrow nC_n = 2n+(n+1)C_{n-1}$$

Si vuole trasformare l espressione dividendo tutto per $n(n+1)$

$$\frac{nC_n}{n(n+1)} = \frac{2n}{n(n+1)} + \frac{(n+1)C_{n-1}}{n(n+1)}$$

$$\underbrace{\frac{C_n}{n+1}}_{a_n} = \underbrace{\frac{2}{n+1} + \frac{Cn-1}{n}}_{a_{n-1}}$$

L'espressione è più semplice e senza la somma

Si itera su $\frac{C_{n-1}}{n}$

$\frac{2}{n+1} + \frac{Cn-1}{n} = \frac{2}{n+1} + \frac{2}{n} + \frac{C_{n-2}}{n-1}$ questo passaggio si può iterare fino ad arrivare alla condizione iniziale

$$\frac{C_n}{n+1} = \frac{2}{n+1} + \frac{2}{n} + \frac{2}{n-1} + \frac{2}{n-2} \dots$$
$$= \sum_{k=3}^{n+1} \frac{2}{k} + \frac{C_1}{2}$$

si sostituisce C_1 con 2 e si cambia il valore di k da cui si inizia la sommatoria $= \sum_{k=2}^{n+1} \frac{2}{k}$

Si arriva a dire quindi che

$$\frac{C_n}{n+1} = 2\sum_{k=2}^{n+1} \frac{1}{k}$$

$H_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$ per i numeri armonici
Essendo quasi simile alla sommatoria ripresa dai numeri amonici a meno del K che parte da 2 si inserisce l' n-esimo numero armonico meno 1
$$\frac{C_n}{n+1} = 2\sum_{k=2}^{n+1} \frac{1}{k}$$

$$\Rightarrow 2\sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k} - 1$$

Si toglie dal denominatore (n+1) e si ha:
$$C_n = 2(n+1)(H_{n+1} - 1)$$

Fine Dimostrazione

La formula precendente è per i confronti si dovrà studiare anche la formula per gli scambi. Si userà sempre lo stesso trucco sulle somme

Formula degli scambi

$$S_n = \frac{n-2}{6} + \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}(S_{j-1} + S_{n-j})$$