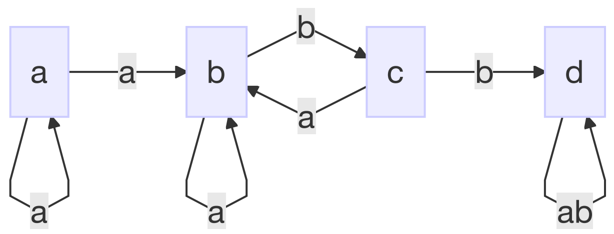
Medoto simbolico

$A, \alpha \in A, |\alpha|$
$a(t) = \sum_{\alpha \in A} t^{|\alpha|} = \sum_{\geq 0} a_n t^n$
Si applica il metodo per i linguaggi, in particolare per linguaggi regolari o context free.
Si può fare unione di espressioni regolari $e_1 \cup e_2$ oppure usare la star ($*$) o la concatenazione $e_1 \cdot e_2$

La funzione generatrice associata all unione è la somma $e_3(t) = e_1(t) + e_2(t)$, per la star $1 + e_1(t) + e_1(t)^2 + \ldots = \frac{1}{1-e_1(t)}$

- Esempio
  $e = (1 + 01 + 00 + 0001)^*(\epsilon + 0 + 00 + 000)$
  Non ci sono più di 3 zeri consecutivi
  $|\alpha| =$ lunghezza della parola
  $1 + 01 + 001 + 0001 \to t + t^2 + t^3 + t^4$
  $e_1 = (1 + 01 + 001 + 0001)^* \to \frac{1}{t+t^2+t^3+t^4}$
  $e_2 = (\epsilon + 0 + 00 + 000) \to t + t^2 + t^3$
  $\sum_{i=0}^{k} t^i = \frac{1-t^{k+1}}{1-t}$
  $e = e_1 \cdot e_2 \to \frac{t+t^2+t^3}{1-(t+t^2+t^3+t^4)} = \frac{\frac{1-t^4}{1-t}}{1-t\frac{1-t^4}{1-t}} = \frac{1-t^4}{1-t}\frac{1-t}{1-t-t-t^5} = \frac{1-t^4}{1-2t+t^5}$
  $= 1 + 2t + 4t^2 + 8t^3 + 15t^4 + 29t^5 + \ldots$

Parole del linguaggio che contengono abb
$A = a, b$
Si usa un automa a stati finiti che accetta la stringa abb con d stato finale



$b^*(a^+b)^+b(a\cup b)^*$

$b \to t$

$b^* \to \frac{1}{1-t}$

$(a^+b) \to \frac{t}{1-t}t = \frac{t^2}{1-t}$

$(a^+b)^+ \to \frac{t^2}{1-t}/(1-\frac{t^2}{1-t})$

$(a\cup b) \to 2t$

$(a\cup b)^* \to \frac{1}{1-2t}$

$e \to \frac{1}{1-t}\frac{\frac{t^2}{1-t}}{1-\frac{t^2}{1-t}}t\frac{1}{1-2t} = \frac{t^3}{(1-t)(1-2t)(1-t-t^2)}$

$L_0 ::= aL_1 \mid bL_0 \;\to\; L_0(t) = tL_1(t) + tL_0(t)$

$L_1 ::= aL_1 \mid bL_2 \;\to\; L_1(t) = tL_1(t) + tL_2(t)$

$L_2 ::= aL_1 \mid bL_3 \;\to\; L_2(t) = tL_1(t) + tL_3(t)$

$L_3 ::= aL_3 \mid bL_3 \;\to\; L_3(t) = tL_3(t) + tL_3(t)$

Si associa ad ogni simbolo non terminale una gunzione generatrice $L_i(t)$ e l'unione diventa una somma. Traduco la grammatica i un sistema di formule e si vuole trovare $L_0(t)$

$$T = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} L = \begin{pmatrix} L_0(t) \\ L_1(t) \\ L_2(t) \\ L_3(t) \end{pmatrix}$$

$T(i,j)$ = in quanti modi mi sposto da $L_i \to L_j$ = Matrice di transazione di stato.

$u = (1,0,0,0)$ prima colonna

$v = (0,0,0,1)^t$

$L_0 = u(I-tT)^{-1}v$

$$\begin{pmatrix} L_0(t) \\ L_1(t) \\ L_2(t) \\ L_3(t) \end{pmatrix} = t\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} L_1(t) \\ L_1(t) \\ L_1(t) \\ L_1(t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$IL - tTL = v$ in cui I è la matrice identità

$(I-tT)L = v$

$L = (I - tT)^{-1}v$

u serve per prendere sola la prima componente $\Rightarrow L_0 = u(I - tT)^{-1}v$
v contiene tutti 0 tranne nella posizione che corrisponde allo stato finale.

G automa deterministico a stati finiti
$Q = \{q_1, q_2, q_3, \ldots q_5\}$ insieme degli stati
q_0 stato iniziale
$\dot{Q} = \{\dot{q}_1, \dot{q}_2\}$ insieme degli stati finali

La f.g del linguaggio accettato dell'automa è una f.g. razionale fratta che in forma matriciale si può esprimere nel modo seguente:
$L(t) = u(I - tT)^{-1}v$
dove $T_{i,j} = card\{\alpha \in A,$ t.c. esiste un arco da $q_i \rightarrow q_j$ etichettato $\alpha\}$
$u = (1, 0, \ldots, 0)$
$v = (v_0, \ldots, v_j)^t$
$v_i = [q_i \in \dot{Q}] = 1$ se q_i è stato finale 0 altrimenti

---

$p = abb$
$f(t) = \frac{t^3}{(1-t)(1-2t)(1-t-t^2)}$ f.g. che conta le parole su $A = \{a, b\}$ che contengono p = abb
Qual è la funzione generatrice delle parole su $A = \{a, b\}$ che non contengono p?
$(a \cup b)^*$ $\quad g(t) = \frac{1}{1-2t}$
$h(t) = g(t) - f(t)$ f.g. che conta le parole che non contengono p

Guibas e Oblyzko

Prendiamo $p = abb$ e costruiamo il seguente diagramma

abb	$CodaPattern$	$esito$
abb		$1\ L_0$
ab	b	$0\ L_1$
a	bb	$0\ L_2$

Metto 1 o 0 a seconda se c'è corrispondenza tra le stringhe
$L(t) = \sum c_i t^i = c_0 t^0 + c_1 t^1 + c_2 t^2 = 1$ Polinomio

Per trovare la funzione generatrice di un linguaggio che evita un pattern basta trovare il polinomio, poi $L(t) = \dfrac{c(t)}{t^k + (1-mt)c(t)}$

con $k =$ cardinalità di $p = |p|$ e $m = |A|$

Per $p = abb$ abbiamo $k = 3$ e $m = 2$

$$L(t) = \frac{1}{t^3 + (1-2t) * 1}$$

$$\frac{1}{1-2t} - \frac{t^3}{(1-t)(1-2t)(1-t-t^2)} = \frac{1}{1-2t+t^3} \qquad \blacksquare$$