Esercizio 5.1 Calcolare il numero di condizionamento dell'integrale $\int_0^{e^{21}} sin\sqrt{x}dx$. Questo problema e' ben condizionato o mal condizionato?

Soluzione Per quanto riguarda il fattore di condizionamento k, sappiamo che vale la relazione 0=b-a. In questo caso abbiamo $b = e^{21}$ e a=0, quindi k=e^{21}. Il problema risulta malcondizionato.

Esercizio 5.2 Derivare dalla formula di Newton-Cotes, i coecienti della formula dei trapezi e della formula di Simpson.

Soluzione
1)Formula dei trapezi (n=1):
$c_{0,1} = \int_0^1 \frac{t-0}{1-0}dt = \int_0^1 tdt = \frac{t^2}{2} \mid_0^1 = \frac{1}{2}$
$c_{1,1} = 1 - c_{0,1} = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$

1)Formula di Simpson (n=2):
$c_{0,2} = \int_0^2 \frac{(t-1)(t-2)}{(0-1)(0-2)}dt = \frac{1}{2}\int_0^2 t^2 - 3t + 2dt = \frac{1}{2}(\frac{t^3}{3} - \frac{3}{2}t^2 + 2t) \mid_0^2 = \frac{1}{3}$
Eseguendo lo stesso procedimento si ottiene:
$c_{1,2} = \frac{4}{3}$
$c_{2,2} = \frac{1}{3}$

Esercizio 5.3 Verifcare la stima dell'errore per il metodo dei trapezi e di Simpson.

Soluzione
1)Metodo dei trapezi (n=1, k=1):
$\nu_1 = \int_0^1 \Pi_{j=0}^1 (t-j)dt = (\frac{t^3}{3} - \frac{t^2}{2}) \mid_0^1 = -\frac{1}{6}$
da cui:
$E_1(f) = \nu_1 \frac{f^{(2)}(\xi)}{2!}(\frac{b-a}{1})^3 = -\frac{f^{(2)}(\xi)(b-a)^3}{12}$

1)Metodo di Simpson (n=2, k=2):
$\nu_2 = \int_0^2 \Pi_{j=0}^2 (t-j)dt = (\frac{t^5}{5} - \frac{3t^4}{4} + \frac{2t^3}{3}) \mid_0^2 = -\frac{4}{15}$
da cui:
$E_2(f) = \nu_2 \frac{f^{(4)}(\xi)}{4!}(\frac{b-a}{2})^5 = -\frac{1}{90} f^{(4)}(\xi)\frac{(b-a)^5}{2^5}$

Esercizio 5.8 Come e' classifcabile, dal punto di vista del condizionamento il problema $\int_{\frac{1}{2}}^{100} -2x^{-3}cos(x^{-2})dx \equiv sin(10^{-4}) - sin(4)$?

Soluzione Dato che b=100 e a=$\frac{1}{2}$ abbiamo k=100-$\frac{1}{2}$ $= 99.5 \gg 1$ quindi il problema e' malcondizionato.