Esercizio 3.2 Dimostrare che la somma ed il prodotto di matrici triangolari inferiori (superiori), e' una matrice triangolare inferiore (superiore).

Soluzione

SOMMA:

In questo caso, si esegue la somma tra gli elementi con gli stessi indici di riga e di colonna delle due matrici di partenza. Di conseguenza, nelle posizioni in cui queste hanno elementi nulli, avremo degli zeri anche nella matrice somma, che sara' percio' triangolare (inferiore/superiore).

PRODOTTO:

Se A e' una matrice quadrata, sappiamo che $a_{ij} = 0 \forall i < j$.
Di conseguenza:
$c_{ij} = \Sigma_{k=1}^{n} a_{ik}b_{kj} = \Sigma_{k=1}^{j-1} a_{ik}b_{kj} + \Sigma_{k=i+1}^{n} a_{ik}b_{kj} + \Sigma_{k=i+1}^{j-1} a_{ik}b_{kj} = 0 \ \forall i < j$
dato che:
$\Sigma_{k=1}^{j-1} a_{ik}b_{kj} = \Sigma_{k=i+1}^{j-1} a_{ik}b_{kj} = \Sigma_{i+1}^{n} = 0 \ \forall i < j$

Esercizio 3.3 Dimostrare che il prodotto di due matrici triangolari inferiori(superiori) a diagonale unitaria Ã¨ a sua volta una matrice triangolare inferiore(superiore) a diagonale unitaria.

Soluzione

Sfruttando il risultato dell'esercizio precedente, resta solo da dimostrare che la diagonale della matrice (ottenuta con il prodotto) e' unitaria.

$c_{ij} = \Sigma_{k=1}^{n} a_{ik}b_{kj} = a_{ii} + b_{ii} + \Sigma_{k=1}^{i-1} a_{ik}b_{kj} + \Sigma_{k=i+1}^{n} a_{ik}b_{kj} = 1$

dato che: $\Sigma_{k=1}^{i-1} b_{kj} = 0$ e $\Sigma_{k=i+1}^{n} a_{ik} = 0$

Esercizio 3.5 Dimostrare i lemmi 3.2 e 3.3.

Soluzione

-Dimostrazione lemma 3.2
Sia A $\in \Re^{nxn}$ una matrice triangolare e nonsingolare.

$\Rightarrow$
Il determinante di una matrice triangolare si ottiene effettuando il prodotto degli elementi della diagonale; se ci fosse un minore principale nullo, quindi un qualche a$_{ii}$ = 0, il determinante della matrice A sarebbe nullo, ma questo contraddirebbe l'ipotesi di nonsingolarita'.

$\Leftarrow$
Se tutti i minori principali della matrice triangolare A sono non nulli, allora risulta che il determinante Ã¨ diverso da zero (dato che questo si calcola moltiplicando tra loro gli elementi diagonali).

-Dimostrazione lemma 3.3
Sia A una matrice fattorizzabile LU, cioe' tale che A=LU. Sia A_k una sottomatrice di A di ordine k, tale che $det(A_k) = det(U_k)$.

Ma $A_k = \begin{bmatrix} I_k & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_k & | & A_{k1} \\ --- & --- & --- \\ A_{k2} & | & A_{k3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_k \\ 0 \end{bmatrix} =$

$$\left[\begin{bmatrix} I_k & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} L_k & | & 0 \\ --- & --- & --- \\ L_{k1} & | & L_{k2} \end{bmatrix} \right] \left[\begin{bmatrix} U_k & | & U_{k1} \\ --- & --- & --- \\ 0 & | & U_{k2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_k \\ 0 \end{bmatrix} \right]$$

Si ricava percio': $\begin{bmatrix} L_k & | & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_k \\ 0 \end{bmatrix} = L_k U_k$

Ma $det(A_k) = det(L_k U_k) = det(L_k) det(U_k) = det(U_k)$
dato che L_k Ã¨ una matrice triangolare con diagonale unitaria, con determinante uguale a 1.

Esercizio 3.6 Dimostrare che il numero di **flop** richiesti dall'Algoritmo 3.5 e' dato da $\approx \frac{2}{3}n^3$ flop.

Soluzione L'algoritmo viene ripetuto per i=n-1 volte. Ad ogni iterazione vengono eseguite (n-1) divisioni per calcolare il vettore di Gauss, e $(n-1)^2$ moltiplicazioni (per ottenere L_i) e altrettante divisioni (per ricavare A^{i+1}).
Di conseguenza il costo computazionale risulta: $\Sigma_{i=1}^{n-1}[(n-i) + 2(n-i)^2] = \Sigma_{k=1}^{n-1} i + 2\Sigma_{k=1}^{n-1} i^2 = \frac{n(n-1)}{2} + \frac{n(n-1)(2n-1)}{6} \approx \frac{2}{3}n^3 flop.$

Esercizio 3.9 Dimostrare i lemmi 3.4 e 3.5.

Soluzione
-Lemma 3.4: Se una matrice A e' diagonale dominante per righe (rispettivamente per colonne), allora tali sono tutte le sue sottomatrici principali.
Dimostrazione:
Se A e' una matrice diagonale dominante per righe, vale la seguente relazione:
$|a_{ii}| > \Sigma_{j=1,j\neq i}^{n} |a_{ij}| \geq \Sigma_{j=1,j\neq i}^{k} |a_{ij}|$
con k.
Sia A_k una generica sottomatrice di A di ordine k. Utilizzando la disuguaglianza beginmath k, l'asserto risulta verificato.

-Lemma 3.5: Una matrice A e' diagonale dominante per righe (rispettivamente, per colonne)$\Leftrightarrow$ A^T e' diagonale dominante per colonne (rispettivamente, per righe).
Dimostrazione:
La trasposta di una matrice A si ottiene invertendo gli indici di riga e colonna, rispettivamente i e j (gli elementi della diagonale rimangono invariati). Se in A vale la relazione:
$|a_{ii}| > \Sigma_{j=1,j}^{n} |a_{ij}|$
allora in A^T si avra' che:
$|a_{ii}| > \Sigma_{j=1,j}^{n} |a_{ji}|$
quindi la matrice e' diagonale dominante per colonne.

Se una matrice A^T e' diagonale dominante per colonne (rispettivamente, per righe) $\Rightarrow$ A^T A e' diagonale dominante per righe (rispettivamente, per colonne).
La dimostrazione e' analoga a quella appena riportata.

Esercizio 3.10 Completare la dimostrazione del teorema 3.6.

Soluzione

-Teorema 3.6: Se A=LDL^T $\Leftrightarrow$ A e' SDP.

Dimostrazione:

Per prima cosa, dimostriamo che A e' simmetrica. Infatti:

$A^T = (LDL^T)^T = LD^T L^T$

ma $D^T = D$ in quanto diagonale, quindi:

$A^T = (LDL^T)^T = LD^T L^T = LDL^T = A$

Successivamente dimostriamo che A e' definita positiva:

$\forall \underline{x} \in \Re t.c.\underline{x} \neq 0$ abbiamo $\underline{x}^T A\underline{x} = \underline{x}^T LDL^T \underline{x} = (\underline{x}^T L)D(L^T \underline{x}) = (L^T \underline{x})^T D(\underline{x}^T L)^T$.

Ponendo $\underline{y} = L^T \underline{x} t.c.\underline{y} \neq 0$, dato che L e' nonsingolare e $\underline{x} \neq 0$, si ottiene:

$\underline{y}^T D\underline{y}$.

In conclusione, dato che gli elementi diagonali della matrice D sono tutti positivi, si ha che:

$\underline{x}^T D\underline{x} = \underline{y}^T D\underline{y} = \Sigma_{i=1}^n d_i y_i^2 > 0$

Esercizio 3.11 Dimostrare che, se A e' nonsingolare, le matrici $A^T A$ e $AA^T A$sono sdp.

Soluzione

1) $A^T A$ e' sdp:

$(A^T A)^T = A^T (A^T)^T = A^T A$ quindi e' simmetrica

ponendo $\underline{\text{y}}$=A$\underline{\text{x}}$, $\underline{x}^T A^T A\underline{x}$ diventa $\underline{y}^T \underline{y} = \Sigma_{i=1}^n y_i^2 > 0$ quindi e' positiva

2) AA^T e' sdp:

$(AA^T)^T = (A^T)^T A^T = AA^T$ quindi e' simmetrica

ponendo $\underline{\text{y}}$=A$^T \underline{x}, \underline{x}^T AA^T \underline{x}$ diventa $\underline{y}^T \underline{y} = \Sigma_{i=1}^n y_i^2 > 0$ quindi e' positiva.

Esercizio 3.12 Dimostrare che se A$\in \Re^{mxn}$ con $m = rank(A)$ allora la matrice ${}^T A$ e' sdp.

Soluzione

1) $(A^T A) = (A^T A)^T = A^T (A^T)^T = A^T A$ quindi e' simmetrica

2) $\forall \underline{x} \neq 0 \underline{x}^T A^T A\underline{x}$ ponendo y=Ax si ottiene $\underline{\text{y}}^T \underline{y} = \|_2^2 \geq 0$. Questa quantita' vale 0 solo nel caso in cui $\underline{y} = 0$, condizione che pero' non si verifica poiche' il rango della matrice e' massimo.

Esercizio 3.13 Data una matrice A $A \in \Re^{nxn}$, dimostrare che essa puo' essere scritta come

$$\text{A}=\frac{1}{2}(A + A^T) + \frac{1}{2}(A - A^T) \equiv A_s + A_a,$$

dove $A_s = A_s^T$, mentre $A_a = -A_a^T$ e' detta parte antisimmetrica di A. Dimostrare inoltre che, dato un generico vettore $x \in \Re^n$ risulta

$$x^T Ax = x^T A_s x.$$

Soluzione Per prima cosa dimostriamo che A_s e' simmetrica.
$\frac{1}{2}(A + A^T) = (\frac{1}{2}(A + A^T))^T = \frac{1}{2}((A + A^T)^T) = \frac{1}{2}(A^T + A) = \frac{1}{2}(A + A^T)$.

Adesso dimostriamo che A_a e' antisimmetrica.
$\frac{1}{2}(A - A^T))^T = \frac{1}{2}(A^T - (A^T)^T)) = \frac{1}{2}(A^T - A) = -\frac{1}{2}(A - A^T)$.

Sfruttando le due relazioni appena ricavate, si ottiene che: A$=\frac{1}{2}(A + A^T) + \frac{1}{2}(A - A^T) \equiv A_s + A_a$

A questo punto dobbiamo dimostrare che $\underline{x}^T A\underline{x} = \underline{x}^T A_s\underline{x}$ con $\underline{x} \in \Re^n$.

Dato che $\underline{x}^T A\underline{x} = \underline{x}^T(A_s + A_a)\underline{x} = \underline{x}^T A_s\underline{x} + \underline{x}^T A_a\underline{x}$ e' sufficiente dimostrare che $\underline{x}^T A_a\underline{x} = 0$.

Ma $\underline{x}^T A_a\underline{x} = \frac{1}{2}(\underline{x}^T A^T\underline{x} - \underline{x}^T A\underline{x})$

Il prossimo passo consiste nel verificare che tale differenza e' uguale a 0.

$\underline{x}^T A^T\underline{x} = \Sigma_{j=1}^n x_j\Sigma_{k=1}^n a_{ik}x_k = (x_1\Sigma_{k=1}^n a_{1k}x_k) + ... + (x_n\Sigma_{k=1}^n a_{nk}x_k) = \Sigma_{j=1}^n x_j(x_1 a_{1j} + ... + x_n a_{nj}) = \Sigma_{j=1}^n x_j\Sigma_{k=1}^n x_k a_{kj} = \Sigma_{j=1}^n x_j\Sigma_{k=1}^n a_{kj}x_k = \underline{x}^T A\underline{x}$.

Esercizio 3.15 Dimostrare che il numero di flop richiesti dall'algoritmo di fattorizzazione LDL^T e' $\approx \frac{1}{3}n^3$.

Soluzione Per calcolare L si devono eseguire j-1 somme di due prodotti, una sottrazione ed una divisione con un costo di 2(j-1) + 2 = 2j flops. Tale calcolo dovra' essere eseguito per un totale di n-j volte per ciascuna colonna, essendo L una matrice triangolare. Di conseguenza il costo computazionale sara':
$2\Sigma_{j=1}^n(n - j)j = 2n\Sigma_{j=1}^n j - 2\Sigma_{j=1}^n j^2 = 2n\frac{n(n+1)}{2} - 2\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \simeq n^3 - \frac{2}{3}n^3 = \frac{1}{3}n^3$flop.

Esercizio 3.19 Dimostrare che, al passo i-esimo di eliminazione di Gauss con pivoting parziale, si ha $a_{ki,i}^{(i)} \neq 0$ se A e' nonsingolare.

Soluzione Utilizzando la tecnica del pivotng, all'i-esimo passo si avra' $|a_{ki,i}^{(i)}| \equiv max_{k\geq i}|a_{k,i}^{(i)}|$. Se si verifica che $a_{ki,i}^{(i)} = 0$, questo vuol dire che gli elementi della colonna j-esima sono tutti nulli, ma questo contraddice l'ipotesi di non singolarita'.

Esercizio 3.25 Si consideri la seguente matrice bidiagonale inferiore 10x10:

$$A=\begin{bmatrix} 1 & & & \\ 100 & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & 100 & 1 \end{bmatrix}$$

Calcolare $k_\infty(A)$. Confrontare il risultato con quello fornito dalla function cond di Matlab. Dimostrare, e verificare, che $k_\infty(A) = k_1(A)$.

Soluzione

La matrice inversa di A e'

$$A^{-1} == \begin{bmatrix} 1 & & & \\ -100 & 1 & & \\ \vdots & \ddots & \ddots & \\ -100^9 & \dots & -100 & 1 \end{bmatrix}$$

Inoltre, eseguendo i calcoli, si ottiene che:
$k_1(A) = ||A||_1||A^{-1}||_1 = 101\Sigma_{i=0}^{9}100^i \simeq 1.0101e^{18}$
$k_\infty(A) = ||A||_\infty||A^{-1}||_\infty = 101\Sigma_{i=0}^{9}100^i \simeq 1.0101e^{18}$
Come si puo' notare, la matrice e' mal condizionata. A maggior riprova che tale problema e' malcondizionato, eseguendo *cond* con Matlab, si ha come risultato: ans=Inf.