Esercizio 2.1 Definire una procedura iterativa basata sul metodo di Newton per determinare $\sqrt{\alpha}$, per un assegnato $\alpha > 0$. Costruire una tabella delle approssimazioni relativa al caso $\alpha = x_0 = 2$. Comparare, infine, con la tabella:

n	xn
0	2
1	1.5
2	1.416666666666...
3	1.414215686274...
4	1.414213562374...

che rappresenta le approssimazioni di $\sqrt{2}$ fornite da $x_{n+1} = \frac{1}{2}(x_n + \frac{2}{x_n})$, n=0,1,2..., $x_0 = 2$.

Soluzione Per calcolare $\sqrt{\alpha} siconsideralafunzione f(x) = x^2 - \alpha datochesiannullaper x = \sqrt{\alpha} e x = -\sqrt{\alpha}. Sappiamocheladerivataprima è f'(x) = 2x.$

Utilizzando questa funzione diventa, l'iterazione del metodo di Newton diventa:

$x_{i+1} = x_i - \frac{f(x_i)}{f'(x_i)} = x_i - \frac{x_i^2-\alpha}{2x_i} = x_i - \frac{x_i(x_i-\frac{\alpha}{x_i})}{2x_i} = \frac{2x_i-x_i+\frac{\alpha}{x_i}}{2} = \frac{1}{2}(x_i + \frac{\alpha}{x_i})$
per $i = 0, 1, 2..$

L'esecuzione di tale metodo, con $\alpha = 2 = x_0 = 2$ produce le seguenti approssimazioni:

0	2.00000000000000
1	1.50000000000000
2	1.41666666666667
3	1.41421568627451
4	1.41421356237469
5	1.41421356237309

L'algoritmo termina alla sesta iterazione, con un'approssimazione di $\sqrt{2}$ dell'ordine di 10^{-16}.

Esercizio 2.2 Generalizzare il risultato del precedente esercizio, derivando una procedura iterativa basata sul metodo di Newton per determinare $\sqrt[n]{\alpha}$ per un assegnato $\alpha>0$.

Soluzione In questo caso scegliamo come funzione $f(x) = x^n - \alpha$, la quale si annulla per x=$\sqrt[n]{\alpha}$ e la cui derivata vale $f'(x) = nx^{n-1}$.
Considerando la procedure iterativa del metodo di Newton, ricaviamo:

$$x_{i+1} = x_i - \frac{f(x_i)}{f'(x_i)} = x_i - \frac{x^n-\alpha}{nx^{n-1}} = \frac{nx_i^n-x_i^n+\alpha}{nx_i^{n-1}} = (\frac{1}{n})((n-1)x_i + \frac{\alpha}{x_i^{n-1}})$$

Esercizio 2.3 In analogia con quanto visto nell' esercizio 2.1, definire una procedura iterativa basata sul metodo delle secanti per determinare $\sqrt{\alpha}$. Confrontare con l'esercizio 1.4.

Soluzione Si considera la funzione $f(x) = x^2 - \alpha$, che si annulla in $x = \sqrt{\alpha}$ e $x = -\sqrt{\alpha}$.

Considerando il metodo iterativo delle secanti, ricaviamo:

$$x_{i+1} = \frac{f(x_i)x_{i-1} - f(x_{i-1})x_i}{f(x_i) - f(x_{i-1})} = \frac{(x_i^2-\alpha)x_{i-1} - (x_{i-1}^2-\alpha)x_i}{x_i^2-\alpha-x_{i-1}^2+\alpha} = \frac{x_i^2 x_{i-1} - \alpha x_{i-1} - x_{i-1}^2 x_i + \alpha x_i}{x_i^2 - x_{i-1}^2} =$$

$$\frac{x_i x_{i-1}(x_i - x_{i-1}) + \alpha(x_i - x_{i-1})}{(x_i - x_{i-1})(x_i + x_{i-1})} = \frac{(x_i - x_{i-1})(x_i x_{i-1} + \alpha)}{(x_i - x_{i-1})(x_i + x_{i-1})} = \frac{x_i x_{i-1} + \alpha}{x_i + x_{i-1}} \text{ con i=0,1,2..}$$

Con l'esecuzione del metodo, scegliendo $\alpha = x_0 = 2$ si ottengono tali approssimazioni con una tolleranza pari alla precisione di macchina:

i	x_i
0	2
1	1.5
2	1.428571428571429..
3	1.414634146341463..
4	1.414215686274510..
5	1.414213562688869..
6	1.414213562373095..
7	1.414213562373095..

Osservando i valori, si nota che la convergenza risulta piu' lenta rispetto al metodo di Newton dellâ esercizio 2.1. Dalla sesta iterazione in poi, l'algoritmo termina fornendo un'approssimazione con un errore dell'ordine di 10^{-16}.

Esercizio 2.4 Discutere la convergenza del metodo di Newton, applicato per determinare le radici dell'equazione $x^3 - 5x$, in funzione della scelta del punto iniziale x_0.

Soluzione La funzione $f(x) = x^3 - 5x$ ha tre radici:
$x_0 = 0, x_1 = \sqrt{5}, x_2 = -\sqrt{5}$. Se scegliamo come punto di innesto 1 o -1 il metodo non converge e applichiamo il metodo di Newton, possiamo notare che questo non converge.

$x_0 = -1$

i	x_i
1	-1
2	1
3	-1
4	1

$x_0 = 1$

i	x_i
1	1
2	-1
3	1
4	-1

Se invece il punto di innesto e' ad esempio 2, si ha la convergenza al valore 2.23...

$x_0 = 2$

i	x_i
1	2.237639989074023
2	2.236069632529971
3	2.236067977501627
4	2.236067977499790

Esercizio 2.6 E' possibile, nel caso delle funzioni del precedente esercizio, utilizzare il metodo di bisezione per determinare lo zero?

Soluzione Le funzioni del precedente esercizio sono sempre positive e si annullano in x=1. Visto che non si verifica la condizione f(a)f(b)< 0 per qualche a,b (Teorema degli Zeri), non e' possibile utilizzare il metodo di bisezione.

Esercizio 2.7 Costruire una tabella in cui si comparano, a partire dallo stesso punto iniziale x0=0, e per valori decrescenti della tolleranza **tolx**, il numero di iterazioni richieste per la convergenza dei metodi di Newton, corde e secanti, utilizzati per determinare lo zero della funzione $f(x) = x - cos(x)$

Soluzione

tolx	Newton	Corde	Secanti
10^{-1}	x = 0:73911 , i = 2	x = 0:70137 , i = 5	x = 0:7363 , i = 2
10^{-2}	x = 0:73909 , i = 3	x = 0:7356 , i = 11	x = 0:73912 , i = 3
10^{-3}	x = 0:73909 , i = 3	x = 0:73876 , i = 17	x = 0:73909 , i = 4
10^{-4}	x = 0:73909 , i = 3	x = 0:73905 , i = 23	x = 0:73909 , i = 4
10^{-5}	x = 0:73909 , i = 4	x = 0:73908 , i = 29	x = 0:73909 , i = 5
10^{-6}	x = 0:73909 , i = 4	x = 0:73909 , i = 34	x = 0:73909 , i = 5
10^{-7}	x = 0:73909 , i = 4	x = 0:73909 , i = 40	x = 0:73909 , i = 5
10^{-8}	x = 0:73909 , i = 4	x = 0:73909 , i = 46	x = 0:73909 , i = 6
10^{-9}	x = 0:73909 , i = 4	x = 0:73909 , i = 52	x = 0:73909 , i = 6
10^{-10}	x = 0:73909 , i = 5	x = 0:73909 , i = 58	x = 0:73909 , i = 6
10^{-11}	x = 0:73909 , i = 5	x = 0:73909 , i = 64	x = 0:73909 , i = 6
10^{-12}	x = 0:73909 , i = 5	x = 0:73909 , i = 69	x = 0:73909 , i = 6
10^{-13}	x = 0:73909 , i = 5	x = 0:73909 , i = 75	x = 0:73909 , i = 7
10^{-14}	x = 0:73909 , i = 5	x = 0:73909 , i = 81	x = 0:73909 , i = 7
10^{-15}	x = 0:73909 , i = 5	x = 0:73909 , i = 87	x = 0:73909 , i = 7

I metodi di Newton e delle secanti convergono molto rapidamente alla soluzione, rispetto al metodo delle corde. Se pero' si osserva il tempo di esecuzione, si deduce che i metodi delle corde e delle secanti hanno un tempo di esecuzione medio per step inferiore.

Esercizio 2.8 Completare i confronti del precedente esercizio inserendo quelli con il metodo di bisezione, con intervallo di confidenza [0,1]?

Soluzione La seguente tabella contiene i risultati dellâesecuzione del metodo di bisezione con intervallo di confidenza iniziale [0, 1]:

$f(x) = x - cos(x)$

tolx	approssimazione	iterazioni
10^{-1}	x = 0.75	i = 1
10^{-2}	x = 0.7344	i = 5
10^{-3}	x = 0.7383	i = 8
10^{-4}	x = 0.7390	i = 11
10^{-5}	x = 0.7391	i = 15
10^{-6}	x = 0.7391	i = 18
10^{-7}	x = 0.7391	i = 19
10^{-8}	x = 0.7391	i = 23
10^{-9}	x = 0.7391	i = 27
10^{-10}	x = 0.7391	i = 29
10^{-11}	x = 0.7391	i = 34
10^{-12}	x = 0.7391	i = 38
10^{-13}	x = 0.7391	i = 40
10^{-14}	x = 0.7391	i = 43
10^{-15}	x = 0.7391	i = 48

In questo caso il metodo di bisezione converge piu' lentamente dei metodi di Newton e delle secanti, ma anche piu' rapidamente rispetto al metodo delle corde.
Nonostante questo, il metodo di bisezione ha un minor costo computazionale rispetto ai metodi delle secanti e di Newton.

Esercizio 2.9

Quali controlli introdurreste, negli Algoritmi 2.4-2.6, al fine di rendere piu' robuste le corrispondenti iterazioni?

Soluzione

Nel metodo di Newton si dovrebbe inserire un controllo sulla derivata f'(x): quest'ultima infatti deve essere diversa da 0, perche' altrimenti avremmo una divisione con denominatore nullo e si verrebbe a verificare un errore.

if (f1x==0) error (La derivata deve essere diversa da 0); end

Per quanto riguarda il metodo delle secanti, vogliamo evitare anche in questo caso una divisione con denominatore nullo. Quindi imponiamo che fx-fx0 sia diverso da 0.

if (fx-fx0==0) error (Denominatore uguale a 0); end

Nell'algoritmo di Aitken, deve essere imposto che x-2*x1+x0 sia diverso da zero.

if (x-2*x1+x0==0) error (Denominatore uguale a 0); end

Infine, si possono aggiungere dei controlli sul numero massimo di iterazioni eseguite e sull' errore commesso (rispetto ad un tolx fissato).