Esercizio 1.01 Sia $x = \pi \simeq 3.1415 = \widehat{x}$. Calcolare il corrispondente errore relativo ε_x. Verificare che il numero di cifre decimali corrette nella rappresentazione approssimata di x mediante $\overline{x}$ é all'incirca dato da: $-log10(|\varepsilon_x|)$.

Soluzione Dalla formula $\varepsilon_x = \frac{\widehat{x-x}}{x}$, ponendo $x = \pi$ e $\widehat{x} = 3.1415$ si ricava $\varepsilon_x = -2.9493 \cdot 10^{-5}$. Quindi il numero di cifre decimali rappresentate in modo corretto é $-log10(|\varepsilon_x|) \simeq 4.5303$. Infatti 4 é proprio il numero di cifre decimali dell'approssimazione di π rappresentate correttamente.

Esercizio 1.08 Quante cifre binarie sono utilizzate per rappresentare, mediante arrotondamento, la mantissa di un numero, sapendo che la precisione di macchina é $\simeq 4.66 \cdot 10^{-10}$?

Soluzione

Per il Teorema 1.4, vale la relazione $u = \frac{1}{2}b^{1-m}$ in caso di arrotondamento (dove u indica la precisione di macchina e b la base). Dato che b=2 e u=$4.66 \cdot 10^{-10}$, si ricava che m=$log_2 4.66 \cdot 10^2 \simeq 31$.

Esercizio 1.09 Dimostrare che, detta u la precisione di macchina utilizzata,$-log_2 u$ fornisce, approssimativamente, il numero di cifre decimali correttamente rappresentate dalla mantissa.

Soluzione

Arrotondamento: $u = \frac{1}{2}b^{1-m}$ si eseguono i seguenti passaggi

$2u = b^{1-m}$

$1 - m = log_b 2u$

$m = 1 - log_b 2u$

$m = 1 - log_b u - log_b 2$

e si pone b=10 ottenendo $m = 1 - log_{10} u - log_{10} 2$.

Dato che $1 - log_{10} 2 \simeq 0.7$, é possibile approssimare m cosí $m = -log_2 u$

Troncamento: $u = b^{1-m}$ si eseguono i seguenti passaggi

$-log_{10} b^{1-m} = r$

$(m - 1) log_{10} b = r$

e si pone b=10 ottendendo $m = 1 - log_{10} u$

Esercizio 1.15 Eseguire l'analisi dell'errore (relativo) dei due seguenti algoritmi per calcolare la somma di tre numeri

1. $(x \oplus y) \oplus z$
2. $x \oplus (y \oplus z)$

Soluzione

1. Dalla relazione $r\varepsilon_r = (x\varepsilon_x + y\varepsilon_y) + z\varepsilon_z$ si ricava

$\varepsilon_r = \frac{(x\varepsilon_x + y\varepsilon_y)}{(x+y)+z)}$

Se ε_{max} rappresenta il massimo tra $\varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_z$, si ottiene

$\varepsilon_{max} = \frac{|(x+y)|+|z|}{|(x+y)+z)|} \cdot \varepsilon_{max}$

2. Si procede in modo analogo, ottenendo peró

$\varepsilon_{max} = \frac{|x|+|(y+z)|}{|x+(y+z)|} \cdot \varepsilon_{max}$

Esercizio 1.16 Dimostrare che il numero di condizionamento del problema del calcolo di $y = \sqrt{x}$ é $k = \frac{1}{2}$.

Soluzione In questo caso, poiché $f(x) = \sqrt{x}$, sappiamo che $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$. Sfruttando la seguente relazione $|\varepsilon_y| \simeq |f'(x) \cdot \frac{x}{y}| \cdot |\varepsilon_x| \equiv k \cdot |\varepsilon_x|$, si ricava $k = |f'(x) \cdot \frac{x}{y}|$ Sostituendo poi $y = \sqrt{x}$ e $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$, si ottiene $k = |\frac{x}{2\sqrt{x}\sqrt{x}}| = \frac{1}{2}$.

Esercizio 1.17

(Cancellazione Numerica)
Si supponga di dover calcolare l'espressione $y = 0.12345678 - 0.12341234 \equiv 0.00004444$ utilizzando una rappresentazione decimale con arrotondamento alla quarta cifra significativa. Comparare il risultato esatto con quello ottenuto in aritmetica finita, e determinare la perdita di cifre significative derivante dall'operazione effettuata. Verificare che questo risultato e' in accordo con l'analisi di condizionamento.

Soluzione I due addendi sono di segno discorde e sono vicini in valore assoluto: il problema é malcondizionato e siamo in presenza della cancellazione numerica. Ponendo $x_1 = 0.12345678$ e $x_2 = 0.12345678$, il risultato di $y = x_1 - x_2$ in aritmetica esatta vale 0.00004444 ($\simeq 4 \cdot 10^{-5}$). In aritmetica finita, arrotondando alla quarta cifra significativa, abbiamo $\widehat{x_1} = 0.1235$, $\widehat{x_2} = 0.1234$ e quindi $\widehat{y} = \widehat{x_1} - \widehat{x_2} = 0.001(\simeq 10 \cdot 10^5)$. Confrontando i due risultati, si nota un'evidente perdita di cifre significative. Nel caso approssimato, il problema risulta malcondizionato. Abbiamo $k = \frac{|x_1|+|x_2|}{|x_1+x_2|} = \frac{0.12345678+0.12341234}{0.00004444} \simeq \frac{0.3}{4*10^{-5}} \simeq 10^4$ Avendo inoltre $u = \frac{1}{2}10^{-4} \simeq 10^{-4}$ si ha il caso degenere dove k_{-1}.