Università degli studi di Firenze

Curriculum Data Science

Inferenza statistica Bayesiana

Quaderno degli esercizi

Studente
Filippo Mameli
filippo.mameli@stud.unifi.it

Anno accademico 2017-2018

1 Prima Parte

2 Seconda Parte

2.1 Esercizio 13 Novembre 2017

Dimostrare che SSR_g (come definita a pagina 158 del libro di P. Hoff) tendo a $SSR_{ols} = \sum(y_i - \hat{\beta}_{ols})^2$ per $g \to \infty$

Svolgimento:

Per poter dimostrare l'enunciato è necessaria la proprietà di idempotenza ovvero una matrice A è idempotente se $A^r = A \, \forall \, r \geqslant 1$ e sapere che $\hat{\beta}_{ols} = X\left(X^T X\right)^{-1} X^T y$.
Innanzitutto risoliviamo il limite:

$$\begin{aligned} lim_{g \to +\infty} \, SSR_g &= lim_{g \to +\infty} \, y^T \left(I - \frac{g}{g+1} X \left(X^T X\right)^{-1} X^T \right) \\ &= y^T \left(I - X \left(X^T X\right)^{-1} X^T \right) y \end{aligned}$$

Possiamo notare che la proprietà di idempotenza vale per $X\left(X^T X\right)^{-1} X^T$ dato che

$$\left[X \left(X^T X\right)^{-1} X^T \right]^2 = X \left(X^T X\right)^{-1} X^T \cdot X \left(X^T X\right)^{-1} X^T =$$
$$X \left(X^T X\right)^{-1} \left[X^T X \left(X^T X\right)^{-1} \right] X^T = X \left(X^T X\right)^{-1} X^T$$

Perciò possiamo concludere la dimostrazione con i seguenti passaggi algebrici

$$\begin{aligned}
y^T \left(I - X\left(X^TX\right)^{-1}X^T\right)y &= y^T \left(I - X\left(X^TX\right)^{-1}X^T + X\left(X^TX\right)^{-1}X^T - X\left(X^TX\right)^{-1}X^T\right)y \\
&= y^T \left(I - 2X\left(X^TX\right)^{-1}X^T + X\left(X^TX\right)^{-1}X^T\right)y \\
&= y^T \left(I - 2X\left(X^TX\right)^{-1}X^T + X\left(X^TX\right)^{-1}X^TX\left(X^TX\right)^{-1}X^T\right)y \\
&= y^Ty - 2y^TX\left(X^TX\right)^{-1}X^Ty + y^TX\left(X^TX\right)^{-1}X^TX\left(X^TX\right)^{-1}X^Ty \\
&= y^Ty - 2\hat{\beta}_{ols}^TX^Ty + \hat{\beta}_{ols}^TX^TX\hat{\beta}_{ols} \\
&= \sum_{i=1}^{n}(y_i - \hat{\beta}_{ols}^Tx_i)^2
\end{aligned}$$

che è ciò che volevamo dimostrare