Docente TIC

Entrega 2- 2_ConceptosClasificadorBayes.ipynb

Ejercicio 3

Partiendo del modelo de clasificación cuadrático:

$$R(x) = -\frac{1}{2}(X-M_A)^T\Sigma_A^{-1}(X-M_A) + \frac{1}{2}(X-M_B)^T\Sigma^{-1}(X-M_B)$$
$$-\frac{1}{2}\log(|\Sigma_A|) + \frac{1}{2}\log(|\Sigma_B|) - \log(P(B)/P(A))$$

* CLASIFICADOR LINEAL

Se asume:

$\Sigma_A = \Sigma_B = \Sigma$ y se reemplaza en $R(x)$

$$R(x) = -\frac{1}{2}(X-M_A)^T\Sigma^{-1}(X-M_A) + \frac{1}{2}(X-M_B)^T\Sigma^{-1}(X-M_B) + cte$$
$$= \frac{1}{2}\Big[-X^T\Sigma^{-1}X + X^T\Sigma^{-1}M_A + M_A^T\Sigma^{-1}X - M_A^T\Sigma^{-1}M_A$$
$$+ X^T\Sigma^{-1}X - X^T\Sigma^{-1}M_B - M_B^T\Sigma^{-1}X$$
$$+ M_B^T\Sigma^{-1}M_B\Big] + cte$$

$$R(x) = \underbrace{-\frac{1}{2}M_A^T\Sigma^{-1}M_A + M_B^T\Sigma^{-1}M_B + cte}_{cte} + [M_A - M_B]^T\Sigma^{-1}X$$

En el caso en que solo existen las clases A y B en el espacio muestral:

$$P(A|X) + P(B|X) = 1 \;, \quad X \in A \;\; o \;\; X \in B$$

Esta ecuación se reemplaza en la ecuación de detección y se llega a:

$$P(A|x) = \frac{(1 - P(A|X))\, P(X|A)\, P(A)}{P(X|B)\, P(B)}$$

$$P(A|x) = \frac{P(X|A)\, P(A)}{P(X|B)\, P(B)} - \frac{P(A|X)\, P(X|A)\, P(A)}{P(X|B)\, P(B)}$$

$$P(A|X) = e^{W^T X + W_0} - P(A|X)\, e^{W^T X + W_0}$$

$$P(A|X) + P(A|X)\, e^{W^T X + W_0} = e^{W^T X + W_0}$$

$$P(A|X)\left[1 + e^{W^T X + W_0}\right] = e^{W^T X + W_0}$$

$$P(A|X) = \frac{e^{W^T X + W_0}}{1 + e^{W^T X + W_0}} \left(\frac{e^{-(W^T X + W_0)}}{e^{-(W^T X + W_0)}}\right)$$

$$P(A|X) = \frac{1}{1 + e^{-(W^T X + W_0)}}$$

Entrega 2 - 2_ConceptosClasificadorBayes.ipynb

Ejercicio 4

se parte de la teoría de detección

$$L(x) = \frac{P(A|X)}{P(B|X)} = \frac{P(X|A)}{P(X|B)} > \frac{P(B)}{P(A)}$$

y se combina con Teorema de Bayes:

$$P(A|x) = \frac{P(X|A)\,P(A)}{P(X)}$$

Llegando a:

$$L(x) = \frac{P(A|x)}{P(B|X)} = \frac{P(X|A)\,P(A)}{P(X|B)\,P(B)}$$

se aplica log natural a la ecuación y se obtiene:

$$\log(L(x)) = \log\left(\frac{P(A|x)}{P(B|X)}\right) = \log\left(\frac{P(X|A)\,P(A)}{P(X|B)\,P(B)}\right) = w^T x + w_0$$

y se iguala a un modelo lineal (se asume)

* DIFERENCIA DE MEDIAS

Si $\Sigma_A = \Sigma_B = \sigma^2 I$ se reemplaza en $R(x)$:

se cancelan los términos con log y se llega a:

$$R(x) = -\frac{1}{2}(x-\mu_A)^T\left(\frac{1}{\sigma} I\right)(x-\mu_A) + \frac{1}{2}(x-\mu_B)^T \underbrace{\Sigma_B^{-1}}_{\left(\frac{1}{\sigma} I\right)} (x-\mu_B) + cte$$

$$R(x) = \frac{1}{2\sigma^2}\left(-x^T x + x^T\mu_A + \mu_A^T x - \mu_A^T \mu_A + x^T x - x^T \mu_B - \mu_B^T x + \mu_B^T \mu_B\right) + cte$$

Simplificando y realizando operaciones:

$$R(x) = \frac{1}{2\sigma^2}\left(2\mu_A^T x - 2\mu_B^T x\right) + cte$$

$$R(x) = \frac{1}{\sigma^2}(\mu_B - \mu_B)^T x + cte$$