Entrega 3. Ejercicio 1

El problema de minimizar el error de reconstrucción de los datos en PCA, equivale Maximizar covarianza

- siendo $\hat{X}_n = Z_n W^T$ Los datos reconstruidos a partir de
- $Z_n = X_n W$, la base ortogonal, se plantea el error de reconstrucción como:

$$\min_{w} E_x\{\|X_n - \hat{X}_n\|_2^2\} = E_x\underbrace{\{\langle X_n - Z_n W^T, X_n - Z_n W^T\rangle\}}_{m}$$

$$m = E_x\{X_n X_n^T - 2X_n(Z_n W^T)^T + Z_n W^T(Z_n W^T)^T\}$$

$$m = E_x\{X_n X_n^T - 2X_n w w^T X_n^T + X_n w w^T X_n^T\}$$

$$m = E_x\{X_n - X_n w w^T X_n^T\} = E_x\{-X_n w w^T X_n^T\}$$

Entonces:

$$\min_{w} E_x\{\|X_n - \hat{X}_n\|_2^2\} = \min_{w} m$$

Sabiendo que minimizar una cantidad negativa es maximizarla:

$$\min_{w} E_x\{-W^T X_n^T X_n W\} = \max_{w} E\{W^T X_n^T X_n W\}$$

como $W^T W = 1$

$$\min_{w} E_x\{-W^T X_n^T X_n W\} \Rightarrow E_x\{X_n^T X_n\}$$

$$\min_{w} -W^T \Sigma_x W = \max_{w} W^T \Sigma_x W$$

$$L(w,\lambda) = W^T \Sigma_x W - \lambda (W^T W - 1)$$

$$\frac{dL}{dW} = 2\Sigma_x W - 2\lambda W^T W = 0 \rightarrow \underbrace{\Sigma_x W = \lambda W}_{\text{Valores propios}}$$

$$W^T \Sigma_x W = \lambda W^T W = \lambda$$

Con lo que se concluye que:

$$E\{W^T X_n^T X_n W\} = E\{Z_n^T Z_n\} = \sigma_Z^2 = \lambda$$

Minimizar error de reconstrucción equivale a maximizar varianza