

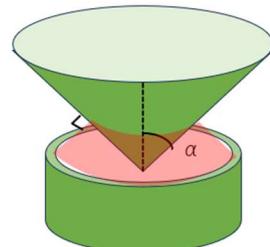
## <本資料で取り扱う内容>

円筒の開口部に円錐で開口部をふさぐことを考えます。円筒の開口部の半径  $R$ 、円錐の半頂角  $\alpha$  とし、頂点を開口部に近づけたとき、円錐表面に垂直な方向に投影した時の開口部の有効面積を求めます。円錐が円板に対して傾いたと場合の一般式も導きます。

円錐が開口部法線に対して傾いた場合に生じる断面積の変化を、重積分を用いて定式化し、その挙動を具体例とともに検討します。

厳密な流体解析や数値シミュレーションを目的とするものではなく、幾何学的関係に着目し、計算可能な範囲でのモデル化と理解を目的とします。

本稿で整理した考え方が、流体バルブ等の工学的応用における現象理解や検討の一助となればうれしいです。



赤い部分の面積について、円錐の高さ、傾きでの変化を調べる。

### 1. 開口部法線と円錐軸が一致する場合の開口部の有効面積

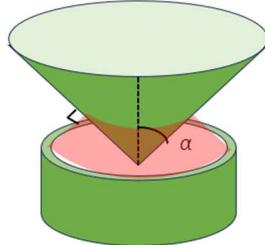


図 1-a

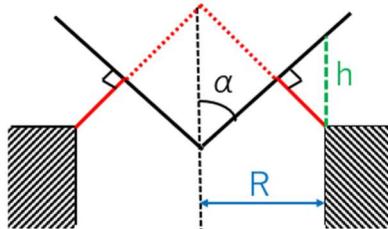


図 1-b

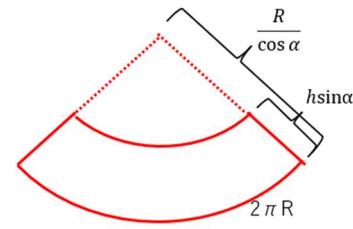


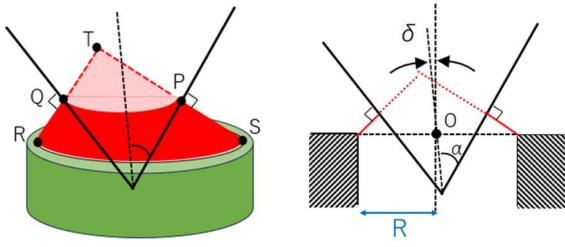
図 1-c

円筒端からの円錐高さを  $h$  とする(図 1 -b)。(円錐で円筒を完全にふさぐとき、 $h=0$ ) 求める開口面積は、図 1 -a の赤い部分の面積となるので、これは、図 1-c の赤実線部の面積となる。これは半径  $R/\cos \alpha$  の扇形の面積から半径  $(R/\cos \alpha - h\sin \alpha)$  の扇形の面積を引けば求まるので、

$$\begin{aligned}
 S &= \pi \left( \frac{R}{\cos \alpha} \right)^2 \cdot \frac{2\pi R}{2\pi \cdot \frac{R}{\cos \alpha}} - \pi \left( \frac{R}{\cos \alpha} - h\sin \alpha \right)^2 \cdot \frac{2\pi R}{2\pi \cdot \frac{R}{\cos \alpha}} \\
 &= \pi \frac{R^2}{\cos^2 \alpha} \cdot \cos \alpha - \pi \left( \frac{R^2}{\cos^2 \alpha} - 2 \cdot \frac{R h \sin \alpha}{\cos \alpha} + h^2 \sin^2 \alpha \right) \cdot \cos \alpha \\
 &= 2\pi R h \sin \alpha - \pi h^2 \sin^2 \alpha \cdot \cos \alpha \\
 &= \pi h \cdot \sin \alpha (2R - h \cdot \sin \alpha \cdot \cos \alpha) \cdots \cdots \cdots (A)
 \end{aligned}$$

と求めることができる。

## 2.開口部軸に対して円錐軸が傾く場合の開口部の有効面積



左図のように、開口部軸に対して円錐軸が $\delta$ 傾く場合の開口部の有効面積を考える。

左図の赤い部分の面積を求ることになり、斜円錐の表面積を求める形となる。斜円錐 TRS の表面積から斜円錐 TQP の表面積を引き算することで求めるが、斜円錐 TQP については、底面の形状を求める、すなわち円錐を斜めにカットした時の楕円の式を求める必要がある。まず、計算に必要な各点について、座標を求め、その後、斜円錐 TQP の底面の形状を求め、最後に斜円錐の表面積を求める、という形で計算を進める。

### 2.1 斜円錐 TRS の各座標と形状を求める

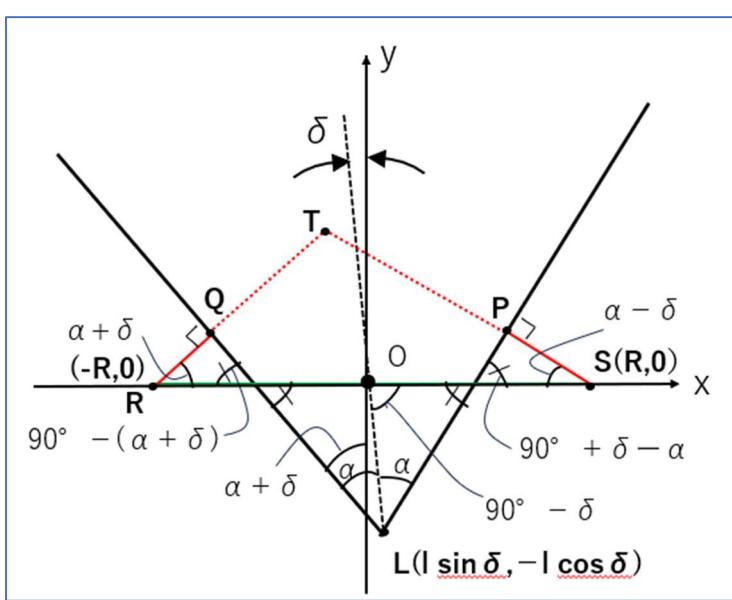


図 2.1-1

$OL=l$  とする。

左図の通りに  $x$  軸と  $y$  軸とする。

原点  $O$  を中心に  $\delta$ だけ傾いているとする。円錐の半頂角  $\alpha$ 、円筒の開口部の半径  $R$  とする。

直線 QL

$y = -\tan(90^\circ - \alpha - \delta) \cdot x + b$  の形となり、

$L(l \sin \delta, -l \cos \delta)$  を通るので、

$$\begin{aligned} l \cos \delta &= -\tan(90^\circ - \alpha - \delta) \cdot l \sin \delta + b \\ b &= -l \cos \delta + \tan(90^\circ - \alpha - \delta) \cdot l \sin \delta \\ \therefore y &= -\tan(90^\circ - \alpha - \delta)x - l \cos \delta + \tan(90^\circ - \alpha - \delta) \cdot l \sin \delta \end{aligned} \quad (1)$$

直線 RQ

$y = \tan(\alpha + \delta) \cdot x + b$  の形となり、 $R(-R, 0)$  を通るので、

$$\therefore y = \tan(\delta + \alpha) \cdot x + \tan(\delta + \alpha) \cdot R \quad (2)$$

### 直線 PL

$y = \tan(90^\circ + \delta - \alpha) \cdot x + b$  の形となり、 $L(l \cdot \sin\delta, -l \cdot \cos\delta)$  を通るので、

$$\therefore y = \tan(90^\circ + \delta - \alpha) \cdot x - l \cdot \cos\delta - \tan(90^\circ + \delta - \alpha) \cdot l \cdot \sin\alpha \quad (3)$$

### 直線 PS

$y = -\tan(\alpha - \delta) \cdot x + b$  の形となり、 $S(R, 0)$  を通るので、

$$\therefore y = -\tan(\alpha - \delta) \cdot x + R \cdot \tan(\alpha - \delta) \quad (4)$$

### 座標 T

直線 RQ と直線 PS の交点なので、(2)(4) より、 $T(T_x, T_y)$  とすると、

$$T_x = \frac{\tan(\alpha - \delta) - \tan(\alpha + \delta)}{\tan(\delta + \alpha) + \tan(\alpha - \delta)} R \quad (5)$$

$$T_y = \tan(\delta + \alpha)T_x + \tan(\delta + \alpha)R \quad (6)$$

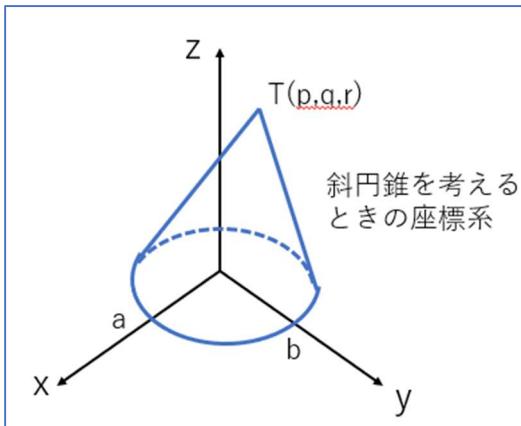


図 2.1-2

斜円錐 TRS について、

図 2.1-1 の x 軸・y 軸を x 軸 → y 軸、y 軸 → z 軸に読み替えて左図のように座標をとると、

$$T(p, q, r) = T(0, T_x, T_y)$$

図 2.1-2 の a,b について  $a=b=R$  となり、頂点  $T(0, T_x, T_y)$ ,  $a=b=R$  の斜円錐となることがわかる。

## 2.2 斜円錐 TQP の各座標を求める

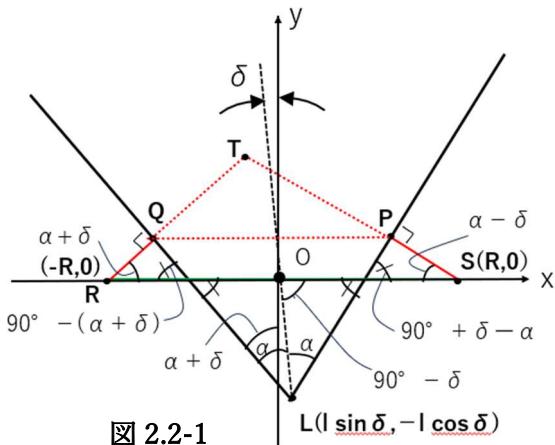


図 2.2-1

### 座標 Q

座標 Q は、直線 QL と直線 RQ の交点であるため、式(1)と式(2)から求めることができる。 $Q(Q_x, Q_y)$  とおくと、

$$\therefore y = -\tan(90^\circ - \alpha - \delta)x - l \cdot \cos\delta + \tan(90^\circ - \alpha - \delta) \cdot l \cdot \sin\delta \quad (1)$$

$$\therefore y = \tan(\delta + \alpha) \cdot x + \tan(\delta + \alpha) \cdot R \quad (2)$$

より、

$$Q_x = \frac{-l \cdot \tan(90^\circ - \delta - \alpha) \cdot \sin\delta + l \cdot \cos\delta + R \cdot \tan(\delta + \alpha)}{-\tan(90^\circ - \alpha - \delta) - \tan(\delta + \alpha)} \quad (7)$$

$$Q_y = \tan(\delta + \alpha) \cdot Q_x + R \cdot \tan(\delta + \alpha) \quad (8)$$

座標 P

座標 P は、直線 PL と直線 PS の交点なので、式(3)と式(4)より求めることができる。

$$\therefore y = \tan(90^\circ + \delta - \alpha) \cdot x - l \cdot \cos\delta - \tan(90^\circ + \delta - \alpha) \cdot l \cdot \sin\alpha \quad (3)$$

$$\therefore y = -\tan(\alpha - \delta) \cdot x + R \cdot \tan(\alpha - \delta) \quad (4)$$

より、

$$P_x = \frac{l \cdot \cos\delta + l \cdot \tan(90^\circ + \delta - \alpha) \cdot \sin\delta + \tan(\alpha - \delta) \cdot R}{\tan(90^\circ + \delta - \alpha) + \tan(\alpha - \delta)} \quad (9)$$

$$P_y = -\tan(\alpha - \delta) \cdot P_x + R \cdot \tan(\alpha - \delta) \quad (10)$$

斜円錐 TPQ の底面の形状を求めるため、円錐を斜めにカットした時の断面について求める。まず、一般的な式で円錐を斜めにカットした時の断面の式を求め、そこから、斜円錐 TPQ の底面の形状を求めていく。

### 2.3-1 円錐を斜めにカットした時の断面を求める

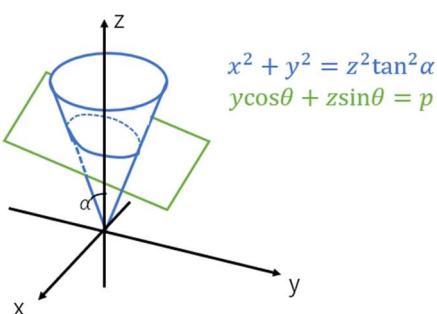


図 2.3-1

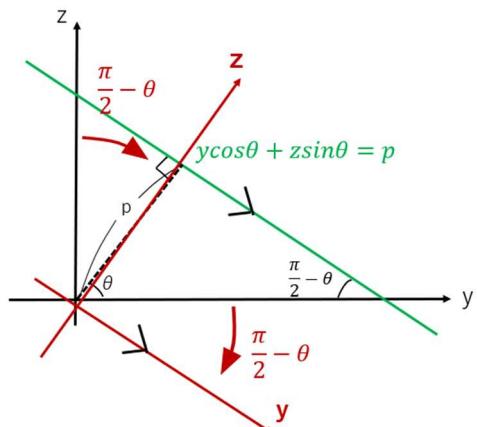
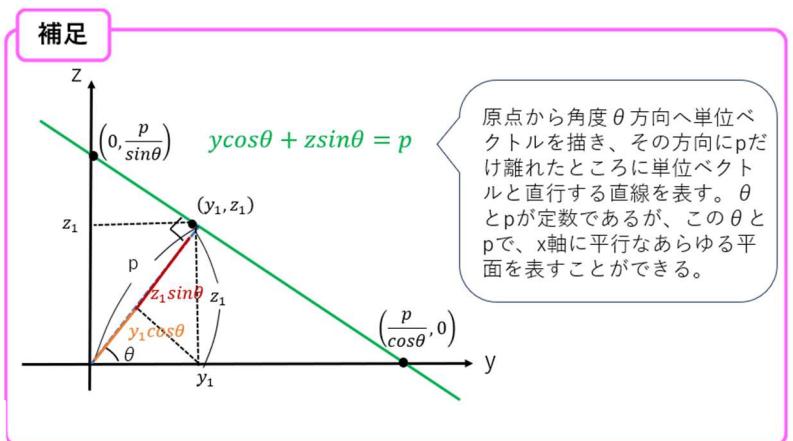


図 2.3-2

$x^2 + y^2 = z^2 \tan^2 \alpha$  で表すことができる円錐を、x 軸に平行な面  $y \cdot \cos\theta + z \cdot \sin\theta = p$  でカットした時の断面を考える。

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = z^2 \tan^2 \alpha \\ y \cdot \cos\theta + z \cdot \sin\theta = p \end{cases} \quad (11)$$

式(11)から z を消去した x と y の関係式は、切り口を xy 平面に投影した式であり、そのままでは切り

口を表す方程式にならない。それを避けるために、図 2.3-2 のように、切断面が xy 平面と平行になるように式(11)を x 軸周りに  $(\frac{\pi}{2} - \theta)$  回転して考える。

(図 2.3-2 は y 軸と z 軸が  $(\frac{\pi}{2} - \theta)$  回転しているが、座標が  $(\frac{\pi}{2} - \theta)$  回転していると考えてほしい。)

$(x, y, z)$  を x 軸周りに  $(\frac{\pi}{2} - \theta)$  回転したものを  $(x', y', z')$  とすると、

$$x' = x$$

$$\begin{pmatrix} y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\frac{\pi}{2} - \theta) & -\sin(\frac{\pi}{2} - \theta) \\ \sin(\frac{\pi}{2} - \theta) & \cos(\frac{\pi}{2} - \theta) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y \\ z \end{pmatrix}$$

より

$$x = x'$$

### 補足

$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$  について原点を中心に反時計回りに  $\theta$ だけ回転させた点を  $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$  とすると、以下の式で表すことができる。

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

このときの  $R_\theta = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$  を

回転行列という。

$$\begin{pmatrix} y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\theta - \frac{\pi}{2}) & -\sin(\theta - \frac{\pi}{2}) \\ \sin(\theta - \frac{\pi}{2}) & \cos(\theta - \frac{\pi}{2}) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y' \\ z' \end{pmatrix}$$

$$\therefore x = x', y = y' \sin \theta + z' \cos \theta, z = -y' \cos \theta + z' \sin \theta \quad (12)$$

よって、円錐  $x^2 + y^2 = z^2 \tan^2 \alpha$  を x 軸の周りに  $(\frac{\pi}{2} - \theta)$  回転すると、(12) より

$$\begin{aligned} x'^2 + (y' \sin \theta + z' \cos \theta)^2 &= (-y' \cos \theta + z' \sin \theta)^2 \tan^2 \alpha \\ \therefore x^2 + (\sin^2 \theta - \tan^2 \alpha \cdot \cos^2 \theta)y^2 + \sin 2\theta(1 + \tan^2 \alpha)yz \\ &\quad + (\cos^2 \theta - \tan^2 \alpha \sin^2 \theta)z^2 = 0 \end{aligned} \quad (13)$$

また、 $y \cdot \cos \theta + z \cdot \sin \theta = p$  を x 軸の周りに  $(\frac{\pi}{2} - \theta)$  回転すると、図 2.3-2 より

$$z = p \quad (14)$$

である。よって、切断面は式(13)と式(14)から z を消去した式であり、以下となる。

$$\begin{aligned} \therefore x^2 + (\sin^2 \theta - \alpha \cdot \cos^2 \theta)y^2 + p \cdot \sin 2\theta(1 + \tan^2 \alpha)y + p^2(\cos^2 \theta - \tan^2 \alpha \sin^2 \theta) \\ = 0 \end{aligned} \quad (15)$$

$$k = \sin^2 \theta - \tan^2 \alpha \cdot \cos^2 \theta, 2l = p \cdot \sin 2\theta(1 + \tan^2 \alpha), m = p^2(\cos^2 \theta - \tan^2 \alpha \sin^2 \theta)$$

とおくと、式(15)は

$$x^2 + ky^2 + 2ly + m = 0$$

となるので

$$x^2 + k \left( y + \frac{l}{k} \right)^2 = \frac{l^2}{k} - m$$

切断面は橜円になるので  $\frac{l^2}{k} - m >$  として、両辺を  $\frac{l^2}{k} - m$  で割ると

$$\frac{x^2}{\frac{l^2}{k} - m} + \frac{\left( y + \frac{l}{k} \right)^2}{\frac{l^2}{k^2} - \frac{m}{k}} = 1$$

橜円の短軸  $2a = 2\sqrt{\frac{l^2}{k} - m}$ 、長軸  $2b = 2\sqrt{\frac{l^2}{k^2} - \frac{m}{k}}$  である。

$k = \sin^2\theta - \tan^2\alpha \cdot \cos^2\theta$ ,  $2l = p \cdot \sin 2\theta (1 + \tan^2\alpha)$ ,  $m = p^2 (\cos^2\theta - \tan^2\alpha \sin^2\theta)$

であったので、これらを代入すると

$$a = \sqrt{\frac{l^2}{k} - m} = \sqrt{\frac{l^2 - km}{k}} \quad (16)$$

$$= \sqrt{\frac{(p \cdot \sin\theta \cos\theta (1 + \tan^2\alpha))^2 - p^2 (\cos^2\theta - \tan^2\alpha \sin^2\theta) (\sin^2\theta - \alpha \cdot \cos^2\theta)}{\sin^2\theta - \tan^2\alpha \cdot \cos^2\theta}}$$

$\sqrt{\text{ }} \text{内の分子について}$

$$\begin{aligned} & p^2 \sin^2\theta \cos^2\theta + 2p^2 \sin^2\theta \cos^2\theta \tan^2\alpha + p^2 \sin^2\theta \cos^2\theta \tan^4\alpha \\ & \quad - (p^2 \cos^2\theta \sin^2\theta - p^2 \cos^4\theta \tan^2\alpha - p^2 \tan^2\alpha \sin^4\theta + p^2 \tan^4\alpha \sin^2\theta \cos^2\theta) \\ & = 2p^2 \sin^2\theta \cos^2\theta \tan^2\alpha + p^2 \cos^4\theta \tan^2\alpha + p^2 \sin^4\theta \tan^2\alpha \\ & = p^2 \tan^2\alpha (\sin^2\theta + \cos^2\theta)^2 \\ & = p^2 \tan^2\alpha \end{aligned}$$

よって、式(16)は

$$\begin{aligned} a &= \sqrt{\frac{p^2 \tan^2\alpha}{\sin^2\theta - \tan^2\alpha \cdot \cos^2\theta}} = \sqrt{\frac{p^2 \sin^2\alpha}{\sin^2\theta \cos^2\alpha - \sin^2\alpha \cdot \cos^2\theta}} \\ &= \sqrt{\frac{p^2 \sin^2\alpha}{\sin^2\theta (1 - \sin^2\alpha) - \sin^2\alpha (1 - \sin^2\theta)}} = \frac{psin\alpha}{\sqrt{\sin^2\theta - \sin^2\alpha}} \\ \therefore 2a &= \frac{2psin\alpha}{\sqrt{\sin^2\theta - \sin^2\alpha}} \quad (17) \end{aligned}$$

$$b = \sqrt{\frac{l^2}{k^2} - \frac{m}{k}} = \sqrt{\frac{l^2 - km}{k^2}} = \frac{\sqrt{l^2 - km}}{k}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{p \cdot \tan \alpha}{\sin^2 \theta - \tan^2 \alpha \cos^2 \theta} = \frac{p \cdot \sin \alpha \cdot \cos \alpha}{\sin^2 \theta \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha \cos^2 \theta} = \frac{p \cdot \sin \alpha \cdot \cos \alpha}{\sin^2 \theta (1 - \sin^2 \alpha) - \sin^2 \alpha (1 - \sin^2 \theta)} \\
&= \frac{p \cdot \sin \alpha \cdot \cos \alpha}{\sin^2 \theta - \sin^2 \alpha} \\
\therefore 2b &= \frac{p \sin 2\alpha}{\sin^2 \theta - \sin^2 \alpha} \tag{18}
\end{aligned}$$

### 2.3-2 斜円錐 TPQ の底面の形状を求める

斜円錐 TPQ の底面を求めるため、頂点 L がなす円錐に着目し、図 2.2-1 を図 2.3-1 の形に持っていくため、図 2.2-1 から  $\delta$  回転させて y 座標を 1 シフトする(図 2.3-3)。

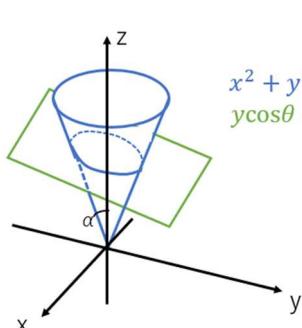


図 2.3-1

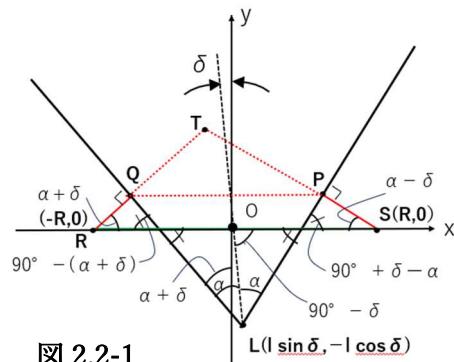


図 2.2-1

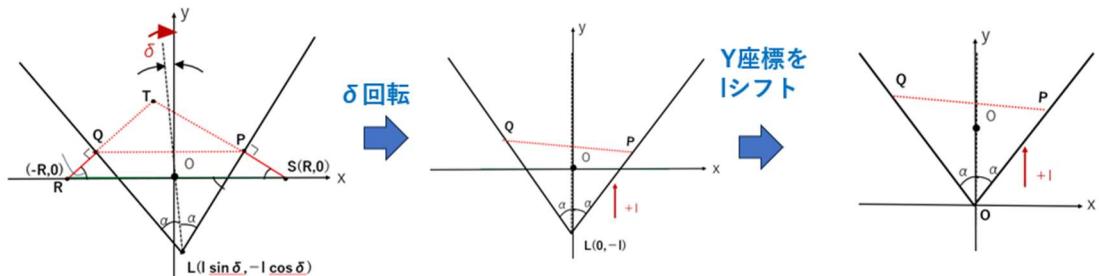


図 2.3-3

P, Q の座標は式(7)~(10)で求めており、それぞれ、 $-\delta$  回転させて y 座標を 1 シフトする。まず、P について $-\delta$  回転させるので、回転させた後の座標を  $P''$  とすると、

$$\begin{pmatrix} P''_x \\ P''_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \delta & \sin \delta \\ -\sin \delta & \cos \delta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} P_x \\ P_y \end{pmatrix}$$

$$P''_x = \cos \delta \cdot P_x + \sin \delta \cdot P_y$$

$$P''_y = -\sin \delta \cdot P_x + \cos \delta \cdot P_y$$

ここから、y 座標を 1 シフトするので、座標を  $P'$  とすると

$$P'_x = \cos \delta \cdot P_x + \sin \delta \cdot P_y \tag{19}$$

$$P'_y = -\sin \delta \cdot P_x + \cos \delta \cdot P_y + l \tag{20}$$

同様に、座標 Q, T についても、

$$Q'_x = \cos\delta \cdot Q_x + \sin\delta \cdot Q_y \quad (21)$$

$$Q'_y = -\sin\delta \cdot Q_x + \cos\delta \cdot Q_y + l \quad (22)$$

$$T'_x = \cos\delta \cdot T_x + \sin\delta \cdot T_y \quad (23)$$

$$T'_y = -\sin\delta \cdot T_x + \cos\delta \cdot T_y + l \quad (24)$$

この直線  $P'Q'$  が図 2.3-2 の  $y \cdot \cos\theta + z \cdot \sin\theta = p$  と同じである。

$y \cdot \cos\theta + z \cdot \sin\theta = p$  を式変形すると、

$$z = -\frac{1}{\tan\theta}y + \frac{p}{\sin\theta} \quad (25)$$

一方、 $P'Q'$  は

$$y = \frac{P'_y - Q'_y}{P'_x - Q'_x}x - \frac{P'_y - Q'_y}{P'_x - Q'_x}P'_x + P'_y \quad (26)$$

式(26)の  $x$  を  $y$ 、 $y$  を  $z$  と読み替えて、傾きと切片が等しくなるので、傾きについて

$$\begin{aligned} -\frac{1}{\tan\theta} &= -\tan(90^\circ - \theta) = \frac{P'_y - Q'_y}{P'_x - Q'_x} \\ 90^\circ - \theta &= -\tan^{-1}\left(\frac{P'_y - Q'_y}{P'_x - Q'_x}\right) \\ \theta &= 90^\circ + \tan^{-1}\left(\frac{P'_y - Q'_y}{P'_x - Q'_x}\right) \end{aligned} \quad (27)$$

切片について

$$\begin{aligned} \frac{p}{\sin\theta} &= -\frac{P'_y - Q'_y}{P'_x - Q'_x}P'_x + P'_y \\ p &= \left(-\frac{P'_y - Q'_y}{P'_x - Q'_x}P'_x + P'_y\right)\sin\theta \end{aligned} \quad (28)$$

以上の結果をまとめると、斜円錐 TPQ の底面の楕円の短軸と長軸は

$$\begin{aligned} \therefore 2a &= \frac{2psin\alpha}{\sqrt{\sin^2\theta - \sin^2\alpha}} , 2b = \frac{psin2\alpha}{\sin^2\theta - \sin^2\alpha} \\ \text{ただし、} \theta &= 90^\circ + \tan^{-1}\left(\frac{P'_y - Q'_y}{P'_x - Q'_x}\right), p = \left(-\frac{P'_y - Q'_y}{P'_x - Q'_x}P'_x + P'_y\right)\sin\theta, \end{aligned} \quad (29)$$

$$P'_x = \cos\delta \cdot P_x + \sin\delta \cdot P_y, P'_y = -\sin\delta \cdot P_x + \cos\delta \cdot P_y + l \quad (19)(20)$$

$$Q'_x = \cos\delta \cdot Q_x + \sin\delta \cdot Q_y, Q'_y = -\sin\delta \cdot Q_x + \cos\delta \cdot Q_y + l \quad (21)(22)$$

$$P_x = \frac{l \cdot \cos\delta + l \cdot \tan(90^\circ + \delta - \alpha) \cdot \sin\delta + \tan(\alpha - \delta) \cdot R}{\tan(90^\circ + \delta - \alpha) + \tan(\alpha - \delta)} \quad (9)$$

$$P_y = -\tan(\alpha - \delta) \cdot P_x + R \cdot \tan(\alpha - \delta) \quad (10)$$

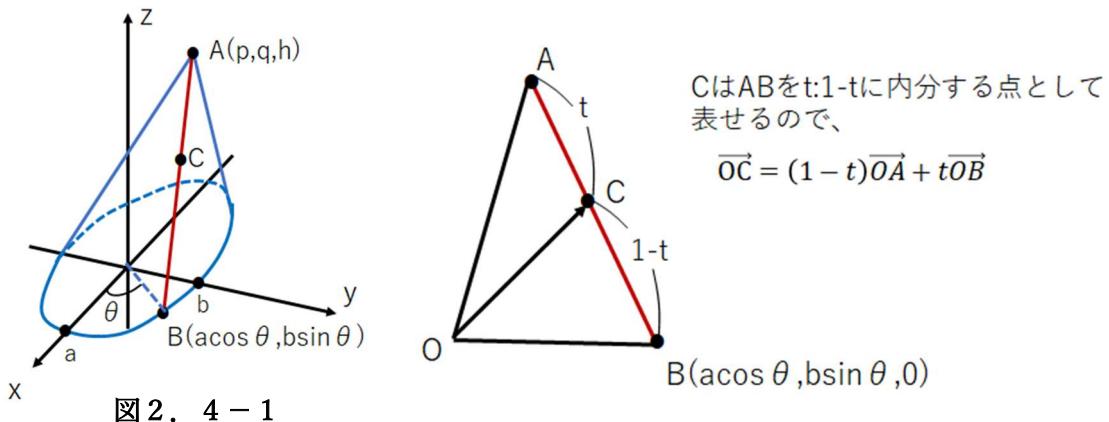
$$Q_x = \frac{-l \cdot \tan(90^\circ - \delta - \alpha) \cdot \sin\delta + l \cdot \cos\delta + R \cdot \tan(\delta + \alpha)}{-\tan(90^\circ - \alpha - \delta) - \tan(\delta + \alpha)} \quad (7)$$

$$Q_y = \tan(\delta + \alpha) \cdot Q_x + R \cdot \tan(\delta + \alpha) \quad (8)$$

## 2.4 斜円錐 TRS,TQP の表面積を求める

まず、一般的な斜円錐の表面積の求め、その式に斜円錐 TRS,TQP に当てはめる、という形で進める。

図 2.4-1 のように底面が楕円で xy 平面上にある斜円錐の頂点を A、底面の点を B、AB 上の点(斜円錐表面上の点)を C とする。底面の中心が原点とする。



ベクトル  $\overrightarrow{OC}$  は、AB を  $t:1-t$  に内分する点として表すことができ、

$$\begin{aligned} \overrightarrow{OC} &= (1-t)\overrightarrow{OA} + t\overrightarrow{OB} = (1-t)(p, q, h) + t(a \cdot \cos\theta, b \cdot \sin\theta, 0) \\ &= (at \cdot \cos\theta + (1-t)p, bt \cdot \sin\theta + (1-t)q, (1-t)h) \end{aligned}$$

**補足**

$$S = \iint \left| \frac{\partial \overrightarrow{OC}}{\partial t} \times \frac{\partial \overrightarrow{OC}}{\partial \theta} \right|$$

$\left| \frac{\partial \overrightarrow{OC}}{\partial \theta} \times \frac{\partial \overrightarrow{OC}}{\partial \theta} \right|$  は、 で示す

2つのベクトルでできる平行四辺形の面積。  
これを、 $\theta : 0 \sim 2\pi$ 、 $t : 0 \sim 1$  で積分することで、斜円錐の表面積を求めることができる。

$$\frac{\partial \overrightarrow{OC}}{\partial t} = (a \cdot \cos\theta - p, b \cdot \sin\theta - q, -h)$$

$$\frac{\partial \overrightarrow{OC}}{\partial \theta} = (-at \cdot \sin\theta, bt \cdot \cos\theta, 0)$$

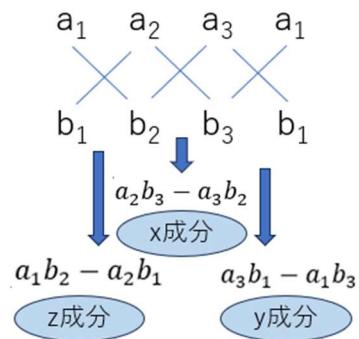
$$\frac{\partial \overrightarrow{OC}}{\partial t} \times \frac{\partial \overrightarrow{OC}}{\partial \theta} = (hbt \cdot \cos\theta, ath \cdot \sin\theta, (a \cdot \cos\theta - p)bt \cdot \cos\theta + (b \cdot \sin\theta - q), bt \cdot \cos\theta)$$

$$= (hbt \cdot \cos\theta, ath \cdot \sin\theta, t(ab - bp \cdot \cos\theta - qa \cdot \sin\theta))$$

$$\left| \frac{\partial \overrightarrow{OC}}{\partial t} \times \frac{\partial \overrightarrow{OC}}{\partial \theta} \right| = t \sqrt{h^2 b^2 \cos^2\theta + h^2 a^2 \sin^2\theta + (ab - pb \cos\theta - qa \sin\theta)^2}$$

補足

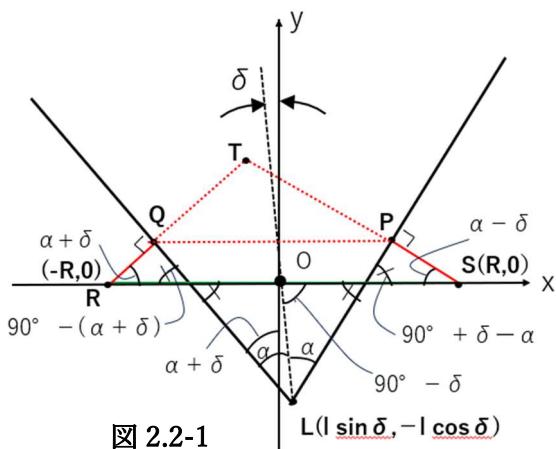
$$\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}, \vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} \text{ のとき、 } \vec{a} \times \vec{b} = \begin{pmatrix} a_2 b_3 - a_3 b_2 \\ a_3 b_1 - a_1 b_3 \\ a_1 b_2 - a_2 b_1 \end{pmatrix}$$



よって、

$$= (hbt \cdot \cos\theta, ath \cdot \sin\theta, t(ab - bp \cdot \cos\theta - qa \cdot \sin\theta))$$

$$\begin{aligned} S &= \int_0^1 t \, dt \int_0^{2\pi} \sqrt{h^2 b^2 \cos^2\theta + h^2 a^2 \sin^2\theta + (ab - pb \cos\theta - qa \sin\theta)^2} \, d\theta \\ &= \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \sqrt{h^2 b^2 \cos^2\theta + h^2 a^2 \sin^2\theta + (ab - pb \cos\theta - qa \sin\theta)^2} \, d\theta \end{aligned} \quad (30)$$



斜円錐 TRS は、式(5)(6)で  $T_x, T_y$  を出したので、式 (30) に  $T(p,q,h)=T(0,T_x, T_y)$ ,  $a=b=R$  を代入することで求めることができる。

$$T_x = \frac{\tan(\alpha - \delta) - \tan(\alpha + \delta)}{\tan(\delta + \alpha) + \tan(\alpha - \delta)} R \quad (5)$$

$$T_y = \tan(\delta + \alpha)T_x + \tan(\delta + \alpha)R \quad (6)$$

斜円錐 TQP を求めるためには、斜円錐 TQP を図 2.4-1 の形に揃えたい、つまり底面が xy 平面上にあり、底面の楕円の中心が原点となる形にしたい。

よって、斜円錐 TQP について PQ の中点が原点になるよう平行移動した後、QP の傾き分回転させることで、図 2.4-1 と同じ形に持っていく。

まず、PQ の中点が原点になるように平行移動するので、平行移動後の各座標を  $T_1''$ 、 $P_1''$ 、 $Q_1''$  とすると、

$$T_x'' = T_x - \frac{P_x + Q_x}{2}$$

$$T_y'' = T_y - \frac{P_y + Q_y}{2}$$

座標 P, Q についても同様。

次に、PQ の傾き分回転する。PQ は  $y = \frac{P_y - Q_y}{P_x - Q_x}x - \frac{P_y - Q_y}{P_x - Q_x}P_x + P_y$  なので、傾きを  $\tan \theta$  とする

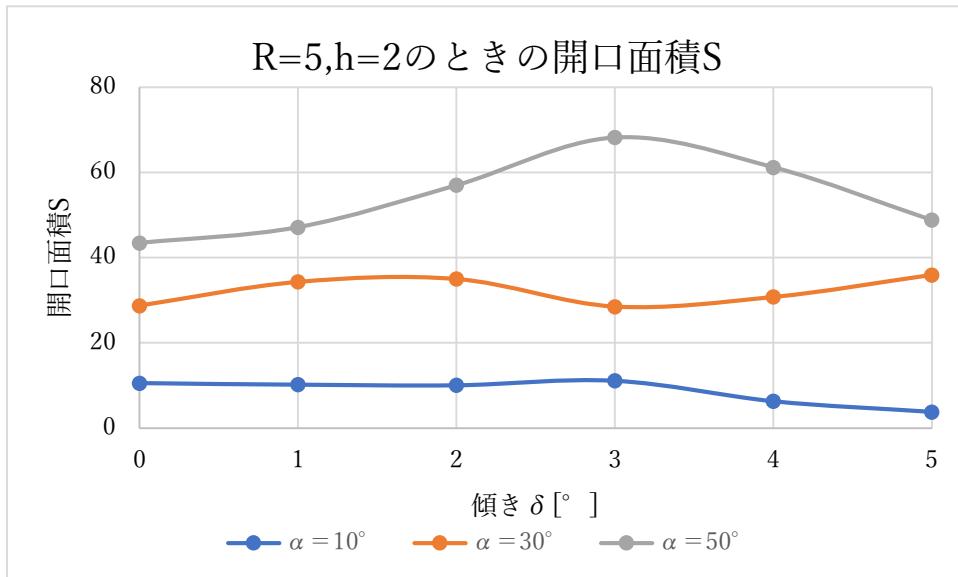
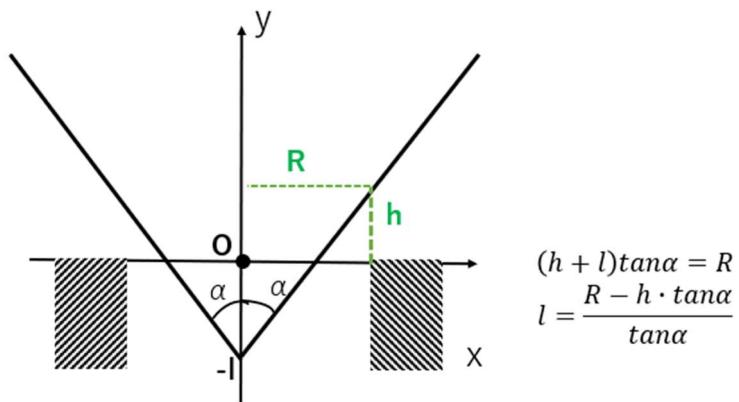
と、 $\theta = \tan^{-1} \frac{P_y - Q_y}{P_x - Q_x}$  で、 $-\theta$  回転させればよい。回転後の各座標を  $T_1'$ 、 $P_1'$ 、 $Q_1'$  とすると、

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} T'_{1x} \\ T'_{1y} \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \cos(-\theta) & -\sin(-\theta) \\ \sin(-\theta) & \cos(-\theta) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} T''_{1x} \\ T''_{1y} \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} T'_{1x} \\ T'_{1y} \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} T''_{1x} \\ T''_{1y} \end{pmatrix} \\ \begin{cases} T'_{1x} = \cos\theta T''_{1x} + \sin\theta T''_{1y} \\ T'_{1y} = -\sin\theta T''_{1x} + \cos\theta T''_{1y} \end{cases} \end{aligned} \quad (31)$$

座標 P, Q についても同様。

よって、斜円錐 TPQ については、a, b については式(29)を、 $T'_1(p, q, h) = T'_1(0, T'_{1x}, T'_{1y})$  を代入することで求まる。

R=10, h=5,  $\alpha$  を  $10^\circ$ 、 $30^\circ$ 、 $50^\circ$  にしたときの、 $\delta$  と S の関係を以下に示す。



円錐の半頂角  $\alpha$  が大きいほど、開口面積が大きくなり、角度による開口面積の変動が大きくなることがわかる。

$\delta = 0$  における計算結果は、式(30)を用いた場合と式(A)を用いた場合でおおむね一致していることを確認した。

	(式30)	(式A)
$\alpha = 10^\circ$	10.56	10.54
$\alpha = 30^\circ$	28.75	28.70
$\alpha = 50^\circ$	43.48	43.39

### <最後に>

円錐軸の傾き  $\delta$  を導入すると、幾何学的対称性が失われ、有効面積は複数の補正項の積分として評価されます。そのため、 $\delta$  が小さい場合でも、結果が直観に反する場合があるのだと思えます。式(30)を用いた計算は、Excel を用いて計算していますので、数値シミュレーションとの比較による検証の余地があります。本資料は、そのための幾何学的基礎理解を目的として作成されました。

### 参考文献

<http://takeno.iee.niit.ac.jp/~shige/math/lecture/misc/data/yokoyama1.pdf>

[https://www.chart.co.jp/subject/sugaku/suken\\_tsushin/07/7-2.pdf](https://www.chart.co.jp/subject/sugaku/suken_tsushin/07/7-2.pdf)