

Zadanie 2

Do obliczeń użyłem języka Python na systemie Windows 10.

Układ do rozwiązania metodą Newtona.

$$\begin{cases} x_1^2 + x_2^2 + x_3 = 1 \\ 2x_1^2 + x_2^2 + x_3^3 = 2 \\ 3x_1 - 2x_2^3 - 2x_3^2 = 3 \end{cases}$$

Kryteria stopu:

1. Kryterium

$$|x_{(i+1)} - x_i| < \rho$$

2. Kryterium

$$|f(x_i)| < \rho$$

Niech:

$$F(X) = \begin{bmatrix} f_1(X) \\ f_2(X) \\ f_3(X) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1^2 & + & x_2^2 & + & x_3 & - & 1 \\ 2x_1^2 & + & x_2^2 & + & x_3^3 & - & 2 \\ 3x_1 & - & 2x_2^3 & - & 2x_3^2 & - & 3 \end{bmatrix}$$

Metoda Newtona dla układów równań jest analogiczna jak dla równania nieliniowego, z taką różnicą, że zamiast z pochodnej należy skorzystać z jacobianu macierzy. Dla tego układu:

$$J(X) = \begin{bmatrix} 2x_1 & 2x_2 & 1 \\ 4x_1 & 2x_2 & 3x_3^2 \\ 3 & -6x_2^2 & -4x_3 \end{bmatrix}$$

Dany układ ma 1 rzeczywiste rozwiązanie:

$$x_1 = 1, x_2 = -1, x_3 = -1$$

W metodzie Newtona rozważane były wektory z przedziału $[-1, -1, -1]$ do

$[1, 1, 1]$ w różnych kombinacjach dla każdej współrzędnej, wybrano niektóre przypadki. Wybór przedziału wynika z faktu, że znajduje się w nim jedyne rozwiązanie.

Wektor początkowy	Wynik dla precyzji: 0.001	Wynik dla precyzji: 0.0001	Wynik dla precyzji: 0.00001	Wynik dla dokładności: 0.000001
[-1.0, -1.0, -1.0]	[1. -1. -1.]	[1. -1. -1.]	[1. -1. -1.]	[1. -1. -1.]
[-0.6, -1.0, 1.0]	-	-	-	-
[-0.6, -0.6, -0.6]	[0.99, -1.00000008, -0.99]	[1. -1. -1.]	[1. -1. -1.]	[1. -1. -1.]
[-0.2, -0.2, -0.2]	[0.99, -1.00000011, -1.00000017]	[1. -1. -1.]	[1. -1. -1.]	[1. -1. -1.]
[0.2, -0.6, 0.6]	-	-	-	-
[0.2, 0.2, 0.2]	[0.99, -1.00000001 -1]	[1. -1. -1.]	[1. -1. -1.]	[1. -1. -1.]
[0.6, 0.6, 0.6]	[0.99, 8.23492005e-04, -2.93966816e-09]	[1, 5.15740984e-05, -7.31025343e-13]	[1, 6.44753218e-06 -1.23701699e-15]	[1, 8.05887622e-07, 2.23963895e-16]
[1.0, 1.0, 1.0]	[1. -1. -1.]	[1. -1. -1.]	[1. -1. -1.]	[1. -1. -1.]

Tabela 1. Tabela wyników dla wybranych wektorów startowych, dla kryterium 1, „-” oznacza że nie uzyskano wyniku.

Wektor początkowy	Precyzja: 0,001	Precyzja: 0,0001	Precyzja: 0,00001	Precyzja: 0,000001
[-1,0, -1,0, -1,0]	105	105	105	105
[-0.6, -1.0, -0.6]	13	13	14	14
[-0,6, -0,6, -0,6]	45	46	46	46
[-0,2, -0,2, -0,2]	233	234	234	234
[0.2, -0.6, -0.2]	9	10	10	10
[0,2, 0,2, 0,2]	10	11	11	11
[0,6, 0,6, 0,6]	70	74	77	80
[1,0, 1,0, 1,0]	40	40	41	41

Tabela 2. Tabela liczba iteracji dla wybranych wektorów startowych, dla kryterium 1.

Wektor początkowy	Wynik dla precyzji: 0,001	Wynik dla precyzji: 0,0001	Wynik dla precyzji: 0,00001	Wynik dla precyzji: 0,000001
[-1,0, -1,0, -1,0]	[0,99999988, -1,00000093, -1,0000013]	[0,99999988, -1,00000093, -1,0000013]	[0,99999988, -1,00000093, -1,0000013]	[1, -1, -1,]
[-0,6, -1,0, 1,0]	-	-	-	-
[-0,6, -0,6, -0,6]	[0,99989946, -1,0002701, -1,00015229]	[0,99999996, -1,00000008, -0,99999999]	[0,99999996, -1,00000008, -0,99999999]	[0,99999996, -1,00000008, -0,99999999]
[-0,2, -0,2, -0,2]	[1,00001804, -1,00017529, -1,00034028]	[0,99999999, -1,00000011, -1,00000017]	[0,99999999, -1,00000011, -1,00000017]	[0,99999999, -1,00000011, -1,00000017]
[0,2, -0,6, 0,6]	-	-	-	-
[0,2, 0,2, 0,2]	[0,99996993, -1,00010111, - 1,00008432]	[0,99999999, -1,00000001, -1,]	[0,99999999, -1,00000001, -1,]	[0,99999999, -1,00000001, -1]
[0,6, 0,6, 0,6]	[,99997, 2,48022474e-02, -5,87422775e-05]	[0,99999, 6,49068207e-03, -1,32224620e-06]	[0,99999, 1,64340648e-03, -2,30667395e-08]	[0,99999, 8,23492005e-04, -2,93966816e-09]
[1,0, 1,0, 1,0]	[0,99998164, -1,00005729, - 1,00001209]	[1, -1, -1,]	[1, -1, -1,]	[1, -1, -1,]

Tabela 3. Tabela wyników dla wybranych wektorów startowych, dla kryterium 2, „-” oznacza że nie uzyskano wyniku.

Wektor początkowy	Precyzja: 0,001	Precyzja: 0,0001	Precyzja: 0,00001	Precyzja: 0,000001
[-1,0, -1,0, -1,0]	104	104	104	105
[-0.6, -1.0, -0.6]	12	12	13	13
[-0,6, -0,6, -0,6]	45	45	45	45
[-0,2, -0,2, -0,2]	232	233	233	233
[0.2, -0.6, -0.2]	8	8	8	9
[0,2, 0,2, 0,2]	9	10	10	10
[0,6, 0,6, 0,6]	65	67	69	70
[1,0, 1,0, 1,0]	39	40	40	40

Tabela 2. Tabela liczba iteracji dla wybranych wektorów startowych, dla kryterium 2.

Wnioski

Precyzja ma nieznaczny wpływ na liczbę iteracji. W zależności od wektora początkowego występowały pewne wahania, różnice między nimi nie przekraczały 10. Dla kryterium 2 widać zauważalne pogorszenie dokładności uzyskiwanych wyników.