Funkcja sklejana 3 stopnia

1.

$$S_i(x) = a_i(x-x_i)^3 + b_i(x-x_i)^2 + c_i(x-x_i) + d_i$$

$$S_i'(x) = 3a_i(x-x_i)^2 + 2b_i(x-x_i) + c_i$$

$$S_i''(x) = 6a_i(x-x_i) + 2b_i$$

$S_i(x_i) = S_{i-1}(x_i)$ - analogicznie dla pochodnych (S' i S'')

$$S_i(x_i) = y_i = a_i \cdot 0^3 + b_i \cdot 0^2 + c_i \cdot 0 + d_i \Rightarrow \underline{y_i = d_i}$$

$S_i(x_i) = S_{i-1}(x_i)$

$$d_i = a_{i-1}(x-x_{i-1})^3 + b_{i-1}(x-x_{i-1})^2 + c_{i-1}(x-x_{i-1}) + d_{i-1}$$

Dla uproszczenia $x - x_{i-1} = h$

$$\underline{d_i = a_{i-1}h^3 + b_{i-1}h^2 + c_{i-1}h + d_{i-1}}$$

$$S_i'(x_i) = c_i$$

Tak samo jak dla d_i

$$\underline{c_i = 3a_{i-1}h^2 + 2b_{i-1}h + c_{i-1}}$$

$$S''(x_i) = 2b_i$$

Tak samo jak dla d_i

$$\underline{2b_i = 6a_{i-1}h + 2b_{i-1}}$$

2.

$$S_i''(x_i) = z_i$$

$$S_i'(x_i) = 2b_i \Rightarrow \left[b_i = \frac{z_i}{2} \right]$$

$$\left[d_i = y_i \right]$$

Wyznaczanie a_i

$$2b_{i+1} = 6a_i h + 2b_i \Rightarrow \left[a_i = \frac{z_{i+1} - z_i}{6h} \right]$$

Wyznaczanie c_i

$$d_{i+1} = a_i h^3 + b_i h^2 + c_i h + d_i \Rightarrow c_i = \frac{-a_i h^3 - b_i h^2}{h} + \frac{-d_i + d_{i+1}}{h} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow c_i = \frac{y_{i+1} - y_i}{h} - \left(\frac{z_{i+1} - z_i}{6} \cdot h + \frac{z_i}{2} h\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left[c_i = \frac{y_{i+1} - y_i}{h} - \left(\frac{z_{i+1} + 2z_i}{6}\right) h\right]$$

$$a_i = \frac{z_{i+1} - z_i}{6h}$$

$$b_i = \frac{z_i}{2}$$

$$c_i = \frac{y_{i+1} - y_i}{h} - \left(\frac{z_{i+1} + 2z_i}{6}\right) h$$

$$d_i = y_i$$

Podstawiając te wyrażenia do $c_{i+1} = 3a_i h^2 + 2b_i h + c_i$ otrzymujemy ostatecznie równanie

$$z_i + 4z_{i+1} + z_{i+2} = 6\left(\frac{y_i - 2y_{i+1} + y_{i+2}}{h^2}\right)$$

Zapisując w postaci macierzowej

$$\begin{bmatrix} 1 & 4 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 1 & \cdots & 0 & & \cdots & 0 \\ \vdots & & & & \ddots & & & & \\ 0 & & & & & & & & \\ 0 & & \cdots & & & 1 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & & \cdots & & & 0 & 1 & 4 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \\ \vdots \\ z_{n-2} \\ z_{n-1} \\ z_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_1 - 2y_2 + y_3 \\ y_2 - 2y_3 + y_4 \\ \vdots \\ y_{n-2} - 2y_{n-1} + y_n \end{bmatrix} \cdot \frac{6}{h^2}$$

Otrzymujemy macierz o n-kolumnach i $n-2$ wierszach

Stosując natural cubic spline jako warunek brzegowy:

$$Z_1 = Z_n = 0$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 1 & & & & & \\ 0 & 0 & 1 & 4 & & & & & \\ \vdots & & & & \ddots & & & & \\ & & & & 1 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & & & & & 1 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & & & & & & & & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0_1 \\ Z_2 \\ Z_3 \\ \vdots \\ Z_{n-1} \\ 0_n \end{bmatrix} = \frac{6}{h^2} \begin{bmatrix} \\ y_1 - 2y_2 + y_3 \\ y_2 - 2y_3 + y_4 \\ \vdots \\ y_{n-2} - 2y_{n-1} + y_n \end{bmatrix}$$

~~Upraszczając macierz~~ Pierwszą i ostatnią kolumnę macierzy można wyeliminować ponieważ odpowiadające im wartości M_1 i M_n są równe 0, otrzymujemy więc:

$$\begin{bmatrix} 4 & 1 & 0 & \cdots & & & 0 \\ 1 & 4 & 1 & & & & \vdots \\ 0 & 1 & 4 & & & & \\ \vdots & & & \ddots & & & \\ 0 & & & & 4 & 1 & 0 \\ 0 & & & & 1 & 4 & 1 \\ 0 & \cdots & & & 0 & 1 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Z_2 \\ Z_3 \\ Z_4 \\ \vdots \\ Z_{n-3} \\ Z_{n-2} \\ Z_{n-1} \end{bmatrix} = \frac{6}{h^2} \begin{bmatrix} y_1 - 2y_2 + y_3 \\ \vdots \\ y_{n-2} - 2y_{n-1} + y_n \end{bmatrix}$$

Stosując ~~parabolic~~ ~~spline~~ warunek brzegowy parabolic spline tzn:

$$z_1 = z_2$$

$$z_n = z_{n-1}$$

$$\begin{bmatrix} 5 & 1 & 0 & & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & 1 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & & & \ddots & \vdots & & \\ 0 & 0 & 0 & & 4 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & & 0 & 1 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_2 \\ z_3 \\ z_4 \\ \vdots \\ z_{n-3} \\ z_{n-2} \\ z_{n-1} \end{bmatrix} = \frac{6}{h^2} \begin{bmatrix} y_1 - 2y_2 + y_3 \\ y_2 - 2y_3 + y_4 \\ \vdots \\ y_{n-2} - 2y_{n-1} + y_n \end{bmatrix}$$

Funkcja sklejana 2 stopnia

1) $$s_i(x) = a_i(x-x_i)^2 + b_i(x-x_i) + c_i$$

$$s'_i(x) = 2a_i(x-x_i) + b_i$$

$i \in \langle 1, 2, \dots, n-1 \rangle$

$$s_i(x_i) = y_i$$

$$s_{i+1}(x_{i+1}) = s_i(x_{i+1})$$

$$s'_{i+1}(x_{i+1}) = s'_i(x_{i+1})$$

2) $$\underline{s_i(x_i) = c_i = y_i}$$

3) $$s'_{i+1}(x_{i+1}) = s'_i(x_{i+1})$$

$$2a_{i+1}(x_{i+1} - x_{i+1}) + b_{i+1} = 2a_i(x_{i+1} - x_i) + b_i$$

$$\left[a_i = \frac{b_{i+1} - b_i}{2(x_{i+1} - x_i)} \right]$$

4) $$s_{i+1}(x_{i+1}) = s_i(x_{i+1})$$

$$a_{i+1}(x_{i+1} - x_{i+1})^2 + b_{i+1}(x_{i+1} - x_{i+1}) + c_{i+1} = a_i(x_{i+1} - x_i)^2 + b_i(x_{i+1} - x_i) + c_i$$

$$y_{i+1} = a_i(x_{i+1} - x_i)^2 + b_i(x_{i+1} - x_i) + y_i$$

$$y_{i+1} = (x_{i+1} - x_i)\left(\frac{b_{i+1} - b_i}{2} + b_i\right) + y_i$$

$$b_{i+1} + b_i = 2\frac{y_{i+1} - y_i}{x_{i+1} - x_i}$$

Przesuwając indeksy

$$b_{i-1} + b_i = 2\frac{y_i - y_{i-1}}{x_i - x_{i-1}} \quad ; \quad \frac{y_i - y_{i-1}}{x_i - x_{i-1}} = \gamma_i$$

$$x_i - x_{i-1} = h$$

$$b_{i-1} + b_i = 2\frac{y_i - y_{i-1}}{h} \quad ; \quad \gamma_i = \frac{y_i - y_{i-1}}{h}$$

Zapisując w postaci macierzowej

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & & & 0 \\ & 1 & 1 & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ 0 & & & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} G_1 \\ G_2 \\ \vdots \\ G_{n-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2y_1 \\ 2y_2 \\ \vdots \\ 2y_{n-1} \end{bmatrix}$$

Jednak do rozwiązania równania brakuje jednego równania.
Dlatego przyjmujemy jakiś warunek brzegowy:
natural boundary condition: $G_0 = 0$
otrzymujemy macierz

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & & & 0 \\ 1 & 1 & & & \\ & 1 & 1 & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ 0 & & & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} G_0 \\ G_1 \\ G_2 \\ \vdots \\ G_{n-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 2y_1 \\ 2y_2 \\ \vdots \\ 2y_{n-1} \end{bmatrix}$$

Dla clamped boundary

$$G_0 = \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0} = \frac{y_1 - y_0}{h} = G_1$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & & & 0 \\ 1 & 1 & & & \\ & 1 & 1 & & \\ & & & & \\ 0 & & & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} G_0 \\ G_1 \\ G_2 \\ \vdots \\ G_{n-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_1 \\ 2y_1 \\ 2y_2 \\ \vdots \\ 2y_{n-1} \end{bmatrix}$$