

Rozwiązywanie układów równań liniowych metodami iteracyjnymi

Marcin Mikuła

Zadanie 1

Dany jest układ równań liniowych $\mathbf{Ax}=\mathbf{b}$.

Elementy macierzy \mathbf{A} są zadane wzorem

$$\text{b) } \begin{cases} a_{i,i} = k \\ a_{i,j} = \frac{1}{|i-j|+m} \quad \text{dla } i \neq j \end{cases}$$

Gdzie $m = 4$, $k = 5$

Przyjmij wektor \mathbf{x} jako dowolną n -elementową permutację ze zbioru $\{1, -1\}$ i oblicz wektor \mathbf{b} .

Metodą Jacobiego rozwiąż układ równań liniowych $\mathbf{Ax}=\mathbf{b}$ (przyjmując jako niewiadomą wektor \mathbf{x}),
przyjmując kolejno kryterium stopu:

1. $\|\mathbf{x}^{(i+1)} - \mathbf{x}^{(i)}\| < \rho$
2. $\|\mathbf{Ax}^{(i)} - \mathbf{b}\| < \rho$

Obliczenia wykonaj dla różnych rozmiarów układu n , dla różnych wektorów początkowych, a także różnych wartości ρ w kryteriach stopu. (Podaj, jak liczono normę.) Wyznacz liczbę iteracji oraz sprawdź różnicę w czasie obliczeń dla obu kryteriów stopu.
Sprawdź dokładność obliczeń.

Zakres n wynosi 3-100, przyjęty wektor \mathbf{x} składa się naprzemiennie z 1 oraz -1,
 $\mathbf{x} = [1, -1, 1, -1, \dots]$.

Błąd obliczeń w podpisach oznacza różnicę między wynikiem oczekiwanym a uzyskanym.

n	Precyzja				
	1e-2	1e-4	1e-5	1e-6	1e-10
3	2.6248e-04	1.3399e-06	1.0038e-07	7.5696e-09	4.3253e-11
5	1.0362e-03	2.6423e-06	3.6267e-07	4.9779e-08	1.3133e-10
7	4.1653e-04	1.4957e-05	5.3720e-07	1.0181e-07	7.3870e-11
9	8.4510e-04	1.0971e-05	6.0600e-07	1.4243e-07	1.1405e-10
11	1.4082e-03	8.1020e-06	6.1456e-07	1.6926e-07	1.4762e-10
13	2.0843e-03	1.9690e-05	1.9137e-06	1.8601e-07	1.8492e-10
15	9.8383e-04	1.3911e-05	1.6542e-06	1.9670e-07	2.3650e-10
17	1.3870e-03	1.0313e-05	1.4517e-06	2.0436e-07	3.1559e-10
19	1.8552e-03	1.9787e-05	1.2977e-06	2.1104e-07	2.5461e-10
21	2.3837e-03	1.4941e-05	2.7548e-06	2.1810e-07	2.4242e-10
23	2.9677e-03	2.5926e-05	2.4231e-06	2.2648e-07	2.6669e-10
25	1.7176e-03	2.0172e-05	2.1861e-06	2.3691e-07	3.3338e-10
27	2.1350e-03	3.2726e-05	2.0195e-06	2.5003e-07	3.2349e-10
29	2.5979e-03	2.6309e-05	1.9072e-06	2.6645e-07	3.7316e-10
31	3.1048e-03	2.1896e-05	3.4158e-06	2.8686e-07	3.7178e-10
33	2.0349e-03	3.3770e-05	3.2464e-06	3.1207e-07	3.4376e-10
35	2.4386e-03	2.8925e-05	3.1502e-06	3.4309e-07	4.0033e-10
37	2.8827e-03	2.5490e-05	3.1169e-06	2.2539e-07	3.6980e-10
39	3.3671e-03	2.3057e-05	3.1407e-06	2.5989e-07	3.7173e-10
41	2.4245e-03	3.4293e-05	3.2192e-06	3.0220e-07	4.2289e-10
43	2.8423e-03	3.1735e-05	3.3534e-06	3.5434e-07	4.1330e-10
45	3.2997e-03	3.0028e-05	3.5467e-06	2.7327e-07	4.5955e-10
47	3.7972e-03	2.9007e-05	3.8058e-06	3.3263e-07	4.3940e-10
49	2.9461e-03	2.8569e-05	2.8134e-06	2.7705e-07	4.4984e-10
51	3.4030e-03	2.8654e-05	3.1596e-06	3.4841e-07	4.6470e-10
53	3.9017e-03	2.9235e-05	3.5895e-06	3.1071e-07	4.3253e-11
55	3.1862e-03	3.0312e-05	4.1229e-06	4.0214e-07	1.3133e-10
57	3.6648e-03	3.1914e-05	3.4883e-06	3.8128e-07	7.3870e-11
59	4.1882e-03	3.4089e-05	4.1544e-06	3.7480e-07	1.1405e-10
61	3.5751e-03	3.6918e-05	3.7516e-06	3.8123e-07	1.4762e-10
63	4.0971e-03	4.0508e-05	3.5165e-06	4.0051e-07	1.8492e-10
65	3.6074e-03	3.4776e-05	3.4144e-06	4.3386e-07	2.3650e-10
67	4.1432e-03	3.9618e-05	4.3784e-06	3.7883e-07	3.1559e-10
69	3.7526e-03	3.6179e-05	3.5524e-06	4.3992e-07	2.5461e-10
71	4.3174e-03	4.2624e-05	3.7941e-06	4.2080e-07	2.4242e-10
73	4.0130e-03	4.1174e-05	4.1706e-06	4.2245e-07	2.6669e-10
75	3.7973e-03	4.1064e-05	3.8701e-06	4.4408e-07	3.3338e-10
77	4.4012e-03	4.2221e-05	3.7684e-06	4.0504e-07	3.2349e-10
79	4.2597e-03	4.4692e-05	3.8418e-06	3.9351e-07	3.7316e-10
81	4.1885e-03	4.1241e-05	4.0923e-06	4.0607e-07	3.7178e-10
83	4.1812e-03	3.9867e-05	4.5460e-06	4.4391e-07	3.4376e-10
85	4.2347e-03	4.0292e-05	4.5456e-06	4.4340e-07	4.0033e-10
87	4.3488e-03	4.2493e-05	4.2005e-06	4.1522e-07	3.6980e-10
89	4.5257e-03	4.6684e-05	4.1757e-06	4.2410e-07	3.7173e-10
91	4.2383e-03	4.2105e-05	4.4523e-06	4.1828e-07	4.2289e-10
93	4.5616e-03	4.5539e-05	4.5501e-06	4.5463e-07	4.1330e-10
95	4.4880e-03	4.6903e-05	4.5580e-06	4.4293e-07	4.5955e-10
97	4.5381e-03	4.7042e-05	4.5713e-06	4.4422e-07	4.3940e-10
99	4.7113e-03	4.6928e-05	4.6836e-06	4.6745e-07	4.4984e-10

Tabela 1. Błędy obliczeń dla 1 kryterium stopu.

n	Precyzja				
	1e-2	1e-4	1e-5	1e-6	1e-10
3	2.6248e-04	1.8247e-05	1.3399e-06	1.0038e-07	4.3253e-11
5	1.0362e-03	2.6423e-06	3.6267e-07	4.9779e-08	1.3133e-10
7	4.1653e-04	1.4957e-05	5.3720e-07	1.0181e-07	7.3870e-11
9	8.4510e-04	1.0971e-05	6.0600e-07	1.4243e-07	1.1405e-10
11	1.4082e-03	8.1020e-06	6.1456e-07	4.6616e-08	5.9532e-11
13	6.4979e-04	6.1385e-06	5.9663e-07	5.7990e-08	8.3920e-11
15	9.8383e-04	1.3911e-05	5.7042e-07	6.7829e-08	1.1787e-10
17	1.3870e-03	1.0313e-05	1.4517e-06	7.6676e-08	9.1454e-11
19	7.4814e-04	7.9795e-06	1.2977e-06	8.5107e-08	8.4024e-11
21	1.0235e-03	6.4155e-06	1.1829e-06	9.3649e-08	8.9469e-11
23	1.3468e-03	1.1766e-05	1.0997e-06	1.0278e-07	1.0854e-10
25	8.1888e-04	9.6174e-06	1.0423e-06	1.1295e-07	9.8560e-11
27	1.0641e-03	8.1296e-06	1.0065e-06	1.2462e-07	1.0742e-10
29	6.9945e-04	7.0836e-06	9.8962e-07	7.1738e-08	9.8691e-11
31	8.9975e-04	1.1787e-05	9.8988e-07	8.3128e-08	1.1167e-10
33	1.1330e-03	1.0470e-05	1.0065e-06	9.6758e-08	8.8423e-11
35	8.0478e-04	9.5457e-06	1.0396e-06	1.1322e-07	9.2193e-11
37	1.0081e-03	8.9134e-06	1.0900e-06	7.8815e-08	9.8843e-11
39	1.2427e-03	8.5097e-06	1.1591e-06	9.5919e-08	9.3731e-11
41	9.4110e-04	8.2934e-06	7.7853e-07	1.1730e-07	1.0405e-10
43	1.1568e-03	8.2396e-06	8.7065e-07	9.1998e-08	1.0234e-10
45	9.1591e-04	8.3351e-06	9.8448e-07	1.1628e-07	1.0281e-10
47	1.1226e-03	8.5757e-06	1.1251e-06	9.8339e-08	9.4457e-11
49	9.2450e-04	8.9653e-06	8.8286e-07	8.6940e-08	9.8351e-11
51	1.1300e-03	9.5150e-06	1.0492e-06	1.1570e-07	9.9987e-11
53	9.6385e-04	1.0244e-05	8.8672e-07	1.0887e-07	4.3253e-11
55	8.4267e-04	1.1179e-05	1.0904e-06	1.0635e-07	1.3133e-10
57	1.0344e-03	9.0079e-06	9.8459e-07	1.0762e-07	7.3870e-11
59	9.3129e-04	1.0239e-05	9.2377e-07	1.1258e-07	1.1405e-10
61	1.1397e-03	8.8430e-06	8.9862e-07	9.1317e-08	5.9532e-11
63	1.0539e-03	1.0420e-05	9.0453e-07	1.0302e-07	8.3920e-11
65	9.9362e-04	9.5785e-06	9.4045e-07	9.2336e-08	1.1787e-10
67	9.5416e-04	9.1237e-06	1.0083e-06	1.1143e-07	9.1454e-11
69	9.3234e-04	8.9886e-06	1.1131e-06	1.0930e-07	8.4024e-11
71	9.2619e-04	9.1438e-06	1.0141e-06	9.0272e-08	8.9469e-11
73	9.3467e-04	9.5898e-06	9.7137e-07	9.8392e-08	1.0854e-10
75	9.5746e-04	1.0354e-05	9.7583e-07	9.1967e-08	9.8560e-11
77	9.9494e-04	9.5447e-06	1.0259e-06	9.1564e-08	1.0742e-10
79	1.0481e-03	9.2286e-06	9.4528e-07	9.6824e-08	9.8691e-11
81	9.4850e-04	9.3392e-06	9.2671e-07	9.1956e-08	1.1167e-10
83	1.0354e-03	9.8722e-06	9.6399e-07	9.4130e-08	8.8423e-11
85	9.8872e-04	9.4074e-06	1.0613e-06	1.0352e-07	9.2193e-11
87	9.7288e-04	9.5063e-06	9.3970e-07	1.0644e-07	9.8843e-11
89	9.8517e-04	1.0162e-05	1.0321e-06	1.0483e-07	9.3731e-11
91	1.0255e-03	1.0188e-05	9.5711e-07	1.0121e-07	1.0405e-10
93	9.8221e-04	9.8057e-06	9.7974e-07	9.7892e-08	1.0234e-10
95	9.8122e-04	1.0255e-05	9.9653e-07	9.6841e-08	1.0281e-10
97	1.0207e-03	9.6389e-06	1.0282e-06	9.9917e-08	9.4457e-11
99	1.0137e-03	1.0097e-05	1.0077e-06	1.0058e-07	9.8351e-11

Tabela 2. Błędy obliczeń dla 2 kryterium stopu.

Z przedstawionych tabel 1 i 2 wynika, że błąd rozwiązania maleje wraz z malejącą wartością ρ niezależnie od rozmiaru macierzy. Rozmiar macierzy wydają się nie mieć dużego znaczenia dla obliczanego rozwiązania. Wyniki dla kryterium 2 są nieco bardziej dokładne niż dla kryterium 1.

n	Precyzja				
	1e-2	1e-4	1e-5	1e-6	1e-10
3	3	5	6	7	9
7	4	6	8	9	13
11	4	8	10	11	17
15	5	9	11	13	20
19	5	10	13	15	23
23	5	11	14	17	26
27	6	12	16	19	29
31	6	14	17	21	32
35	7	15	19	23	36
39	7	17	21	26	40
43	8	18	23	28	44
47	8	20	25	31	48
51	9	22	28	34	53
55	10	24	30	37	58
59	10	26	33	41	64
63	11	28	37	45	71
67	12	31	40	50	78
71	13	34	45	55	87
75	15	38	50	61	97
79	16	42	56	69	108
83	18	48	62	77	122
87	20	54	71	88	138
91	23	62	81	101	159
95	26	71	94	117	185
99	30	84	111	138	219

Tabela 3. Liczba iteracji dla 1 kryterium stopu.

n	Precyzja				
	1e-2	1e-4	1e-5	1e-6	1e-10
3	3	4	5	6	9
7	4	6	8	9	13
11	4	8	10	12	17
15	5	9	12	14	20
19	6	11	13	16	24
23	6	12	15	18	27
27	7	14	17	20	30
31	8	15	19	23	34
35	9	17	21	25	38
39	9	19	23	28	42
43	10	21	26	31	46
47	11	23	28	34	51
51	12	25	31	37	56
55	14	27	34	41	62
59	15	30	38	45	68
63	16	33	42	50	76
67	18	37	46	55	84
71	20	41	51	62	93
75	22	45	57	69	104
79	24	51	64	77	116
83	27	57	72	87	131
87	31	65	82	98	149
91	35	74	94	113	172
95	41	86	109	132	200
99	48	102	129	156	237

Tabela 4. Liczba iteracji dla 2 kryterium stopu.

Z tabel 3 i 4 wywnioskować można, że kryterium 2 jest bardziej rygorystyczne i zwraca dokładniejsze wyniki, co ma przełożenie na większą liczbę iteracji. Można również zauważyć, że wraz z dokładnością wzrasta liczba iteracji.

n	Precyzja				
	1e-2	1e-4	1e-5	1e-6	1e-10
3	0.0000469	0.0000313	0.0000313	0.0000312	0.0001270
7	0.0000288	0.0000384	0.0000303	0.0000323	0.0000729
11	0.0000202	0.0000303	0.0000304	0.0000303	0.0000671
15	0.0000223	0.0000323	0.0000304	0.0000303	0.0000723
19	0.0000283	0.0000325	0.0000304	0.0000384	0.0000816
23	0.0000222	0.0000404	0.0000303	0.0000303	0.0000864
27	0.0000303	0.0000304	0.0000384	0.0000324	0.0000937
31	0.0000282	0.0000303	0.0000304	0.0000405	0.0000857
35	0.0000203	0.0000303	0.0000304	0.0000405	0.0000804
39	0.0000304	0.0000303	0.0000384	0.0000406	0.0000768
43	0.0000224	0.0000303	0.0000384	0.0000405	0.0000789
47	0.0000203	0.0000407	0.0000304	0.0000404	0.0000744
51	0.0000222	0.0000384	0.0000324	0.0000505	0.0000838
55	0.0000302	0.0000404	0.0000405	0.0000505	0.0001248
59	0.0000304	0.0000469	0.0000312	0.0000534	0.0001069
63	0.0000312	0.0000405	0.0000405	0.0000505	0.0000894
67	0.0000303	0.0000425	0.0000483	0.0000505	0.0000766
71	0.0000323	0.0000486	0.0000404	0.0000505	0.0000915
75	0.0000324	0.0000404	0.0000404	0.0000505	0.0000950
79	0.0000303	0.0000425	0.0000405	0.0000506	0.0000854
83	0.0000404	0.0000405	0.0000425	0.0000505	0.0001332
87	0.0000407	0.0000506	0.0000405	0.0000586	0.0000998
91	0.0000426	0.0000485	0.0000405	0.0000608	0.0001006
95	0.0000404	0.0000485	0.0000425	0.0000606	0.0000992
99	0.0002811	0.0004011	0.0004011	0.0005170	0.0011147

Tabela 5. Pomiary czasów dla1 kryterium stopu.

n	Precyzja				
	1e-2	1e-4	1e-5	1e-6	1e-10
3	0.0000378	0.0000313	0.0000424	0.0000324	0.0001680
7	0.0000303	0.0000431	0.0000364	0.0000324	0.0000742
11	0.0000304	0.0000405	0.0000403	0.0000404	0.0000659
15	0.0000304	0.0000405	0.0000404	0.0000478	0.0000668
19	0.0000313	0.0000403	0.0000323	0.0000503	0.0000925
23	0.0000302	0.0000404	0.0000405	0.0000486	0.0001347
27	0.0000303	0.0000424	0.0000402	0.0000484	0.0000891
31	0.0000322	0.0000405	0.0000385	0.0000404	0.0000923
35	0.0000303	0.0000404	0.0000405	0.0000405	0.0000741
39	0.0000383	0.0000323	0.0000324	0.0000506	0.0001006
43	0.0000305	0.0000404	0.0000384	0.0000525	0.0000835
47	0.0000303	0.0000403	0.0000403	0.0000536	0.0000908
51	0.0000264	0.0000405	0.0000405	0.0000505	0.0000841
55	0.0000405	0.0000406	0.0000404	0.0000505	0.0001004
59	0.0000324	0.0000486	0.0000406	0.0000506	0.0000988
63	0.0000324	0.0000506	0.0000405	0.0000607	0.0001258
67	0.0000304	0.0000404	0.0000425	0.0000506	0.0001083
71	0.0000324	0.0000405	0.0000506	0.0000587	0.0001114
75	0.0000324	0.0000485	0.0000405	0.0000652	0.0001045
79	0.0000359	0.0000506	0.0000485	0.0000625	0.0001090
83	0.0000403	0.0000506	0.0000584	0.0000625	0.0000980
87	0.0000484	0.0000603	0.0000584	0.0000626	0.0001260
91	0.0000404	0.0000526	0.0000505	0.0000627	0.0001305
95	0.0000405	0.0000505	0.0000505	0.0000708	0.0001576
99	0.0004970	0.0007090	0.0007160	0.0009492	0.0020947

Tabela 6. Pomiary czasów dla 2 kryterium stopu.

Na podstawie tabel 5 i 6 łatwo zauważyć i wywnioskować, że czas pomiarów dla 2 kryterium stopu jest większy niż dla kryterium 1 co ma oczywisty związek z liczbą iteracji.

Wektor początkowy w tym przypadku jest wybierany losowo w sposób:

```
X_start = np.array([random.randint(-10e10, 10e10) for _ in range(n)])
```

n	Precyzja				
	1e-2	1e-4	1e-5	1e-6	1e-10
3	12	14	15	15	19
7	19	21	22	25	29
11	25	28	26	32	38
15	28	32	36	39	43
19	35	40	42	45	53
23	41	46	49	52	59
27	45	49	55	60	68
31	50	58	63	68	76
35	57	63	70	71	82
39	64	71	77	82	92
43	72	78	85	91	103
47	79	90	96	94	114
51	87	99	103	108	125
55	96	103	114	122	139
59	106	117	123	137	151
63	116	131	142	154	156
67	133	143	145	171	185
71	139	168	165	171	207
75	156	182	195	209	227
79	177	179	219	234	261
83	201	234	248	266	294
87	227	270	282	299	340
91	270	295	316	349	392
95	309	358	381	408	442
99	381	411	444	466	543

Tabela 7. Liczba iteracji dla 1 kryterium dla losowego wektora początkowego.

Z przeprowadzonych testów oraz analizy tabelki 7 i 3 wynika, że liczba iteracji zwiększa się wraz z rozszerzaniem przedziału z którego losowane są wartości wektora początkowego.

Zadanie 2

Dowolną metodą znajdź promień spektralny **macierzy iteracji** (dla różnych rozmiarów układu – takich, dla których znajdowane były rozwiązania układu). Sprawdź, czy spełnione są założenia o zbieżności metody dla zadanego układu.

Opisz metodę znajdowania promienia spektralnego.

Promień spektralny to wartość maksymalna spośród wartości bezwzględnych wartości własnych macierzy:

$$\rho(A) = \max \{|\lambda_1|, \dots, |\lambda_n|\}$$

Wartościami własnymi macierzy są pierwiastki wielomianu charakterystycznego tej macierzy:

$$w_A(\lambda) = \det A - \lambda I$$

Gdzie I jest macierzą jednostkową. Do policzenia wartości własnych wielomianu użyto funkcji `numpy.linalg.eigvals`.

Niech $u = x^{(t)} - x$ gdzie x jest wektorem rzeczywistych rozwiązań układu równań. Wówczas macierz M taką, że:

$$u^{(t)} = M^t \cdot u^{(0)}$$

nazywa się macierzą iteracji. Macierz iteracji dla metody Jakobiego ma postać:

$$M = D^{-1}(L + U)$$

Gdzie (niech A będzie macierzą układu równań)

$$A = D + L + U$$

D jest macierzą diagonalną, z diagonalnych elementów macierzy A , L – poddiagonalną,

U – nad-diagonalną. Mając te informacje, można obliczyć promień spektralny dla macierzy iteracji.

n	promień
3	0.07564
7	0.18952
11	0.27541
15	0.34483
19	0.40327
23	0.45382
27	0.49841
31	0.53832
35	0.57447
39	0.60751
43	0.63795
47	0.66617
51	0.69248
55	0.71713
59	0.74031
63	0.76219
67	0.78291
71	0.80260
75	0.82134
79	0.83923
83	0.85634
87	0.87273
91	0.88847
95	0.90361
99	0.91819
103	0.93225
107	0.94582
111	0.95894
115	0.97165
119	0.98395
123	0.99589
127	1.00747

Tabela 8. Promienie spektralne.

Warunkiem zbieżności metody iteracyjnej jest:

$$\rho(M) < 1$$

Dla wszystkich wcześniej badanych wartości n promień spektralny macierzy iteracji jest mniejszy od jedynki, dla nich metoda jest zbieżna. Wartość promienia przekracza 1 dopiero przy $n = 127$, dla takiego n nie przeprowadzono badań układu.