

Seminario de Modelos y Métodos Cuantitativos

Tarea 2-3

UNIVERSIDAD TÉCNICA FEDERICO SANTA MARÍA - CAMPUS SAN JOAQUÍN

6 de diciembre de 2015

Profesor Andrés Moreira

JUAN PABLO ESCALONA G.

juan.escalona@alumnos.usm.cl

201073515-k

ALONSO LEPE M.

alonso.lepe@alumnos.usm.cl

201173593-5

1. Pregunta 1

Se tiene un grafo $G(n = 400, p = 1)$ esto implica que hay 79800 aristas que conectan a los 400 nodos entre todos. i.e. $\frac{399 \cdot 400}{2} = 79800$

Para que una componente conexa sea gigante debe tener un $k = np > 1$, en este caso $k = 400$, como se necesita un $k \leq 1$ para que deje de ser gigante, entonces p debería ser a lo mas $\frac{1}{400} = 0,0025$

Si se elimina una arista en el segundo 00:00:01 entonces aún quedan 79799 aristas, es decir, una probabilidad de $p = \frac{79799}{79800} = 0,9999$. Pero se sabe que se necesita una probabilidad de 0.0025, por lo que la componente dejará de ser conexa cuando solo hayan $\frac{E}{79800} = 0,0025 \implies E \sim 200$ aristas.

Luego si cada segundo se elimina 1 arista y es preciso eliminar 79600 aristas entonces se tendría que esperar hasta las 22:06:40 (10 de la noche, 6 minutos y 40 segundos)

2. Pregunta 2

La Matriz laplaciana de un grafo se puede obtener a partir de la matriz de adyacencia siguiendo el siguiente formato:

$$l_{i,j} = \begin{cases} k_i & \text{si } i = j \\ -1 & \text{si } i \neq j \\ 0 & \text{e.t.o.c.} \end{cases} \quad (1)$$

que es lo mismo que decir $l = K - A$ donde K es la matriz diagonal de los grados de cada nodo y A es la matriz de adyacencia. Luego para la matriz de adyacencia dada se tiene la siguiente matriz laplaciana:

$$l = \begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 3 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 3 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 2 \end{bmatrix} \quad (2)$$

Luego el valor de Fielder es el segundo valor propio mas pequeño, en este caso corresponde a 0.438 ubicado en la tercera columna como se muestra en las ecuaciones (3) y (4).

$$V = \begin{bmatrix} 0,185 & -0,408 & \mathbf{0.465} & 0,378 & -0,756 & 0,040 \\ 0,185 & -0,408 & \mathbf{0.465} & -0,734 & 0,463 & 0,238 \\ -0,657 & -0,408 & \mathbf{0.261} & 0,357 & 0,292 & -0,278 \\ 0,657 & -0,408 & \mathbf{-0.261} & 0,357 & 0,292 & -0,278 \\ -0,185 & -0,408 & \mathbf{-0.465} & -0,189 & -0,148 & -0,472 \\ -0,185 & -0,408 & \mathbf{-0.465} & -0,168 & -0,145 & 0,751 \end{bmatrix} \quad (3)$$

$$E = \begin{bmatrix} 4,562 & 0,000 & \mathbf{0.438} & 3,000 & 3,000 & 3,000 \end{bmatrix} \quad (4)$$

Es importante ordenarlos para obtener el valor de Fielder, pues este es el segundo menor valor propio.

$$\text{Valor de Fielder: } 0,4384 \quad (5)$$

$$\text{Vector de Fielder: } [0,465 \quad 0,465 \quad 0,261 \quad -0,261 \quad -0,465 \quad -0,465] \quad (6)$$

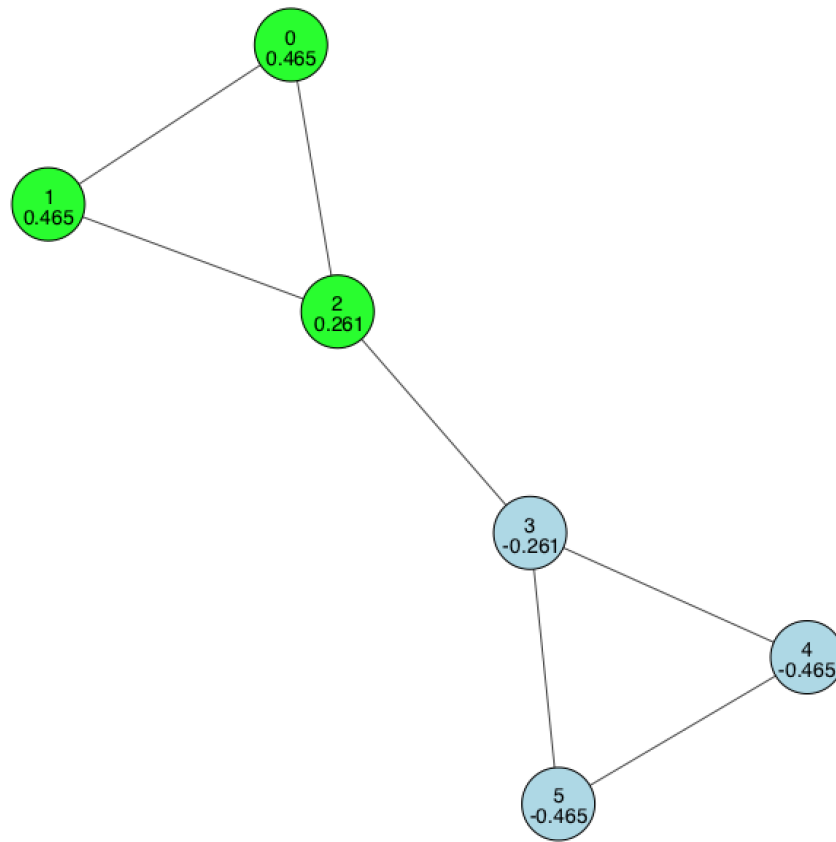


Figura 1: Partición de la red en dos comunidades mostrando sus respectivos valores del vector propio.

Se decidió cortar en el 0, pues los valores se separan uniformemente en torno al este. Se observan claramente dos comunidades en esta red las que interactúan únicamente por el vértice 2-3.

3. Pregunta 3

Dos nodos de un grafo forman un *2-componente* si existen al menos dos caminos independientes entre ellos. Un camino es una secuencia finita de aristas que permiten ir de un nodo inicial a un nodo final dentro de un grafo.

Un *2-componente* o *biconnected component* tienen la particularidad que si se elimina una arista del grafo, aún sería posible llegar de un nodo a otro, pues originalmente existían dos posibles caminos.

Por otro lado un *2-core* es un conjunto de nodos donde cada uno está conectado a los demás con al menos 2 aristas. Un *2-core* solo considera los nodos que estén conectados con una arista dentro del conjunto, si algún nodo tiene una arista a un nodo fuera del conjunto, dicha arista no se cuenta.

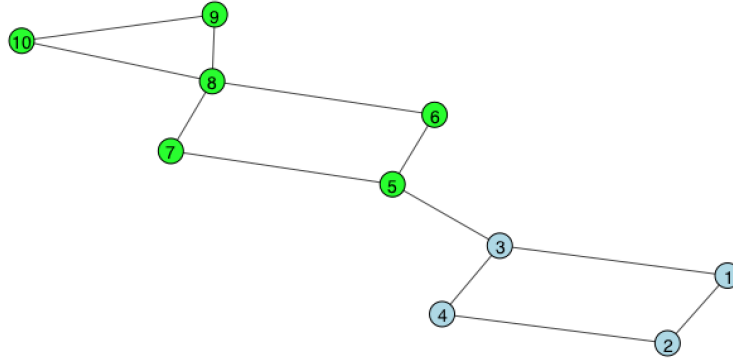


Figura 2: Grafo 2-core con dos 2-componentes.

En la figura 2 se aprecia un grafo con un solo conjunto *2-core* con la totalidad de los nodos, pues todos los nodos del grafo están conectados a los demás con al menos 2 aristas.

Por otra parte existen dos *2-componentes* destacados por los colores. En este caso el *2-componente* [1, 2, 3, 4] y el componente [5, 6, 7, 8, 9, 10]. No puede existir un 2-componente entre el nodo 1 y el nodo 8, pues si o si hay que pasar por la arista 3-5 por lo que sería el mismo camino. Si se quita dicha arista no hay otra forma de llegar de 1 a 8.

4. Pregunta 4

4.1. Grafico de la red

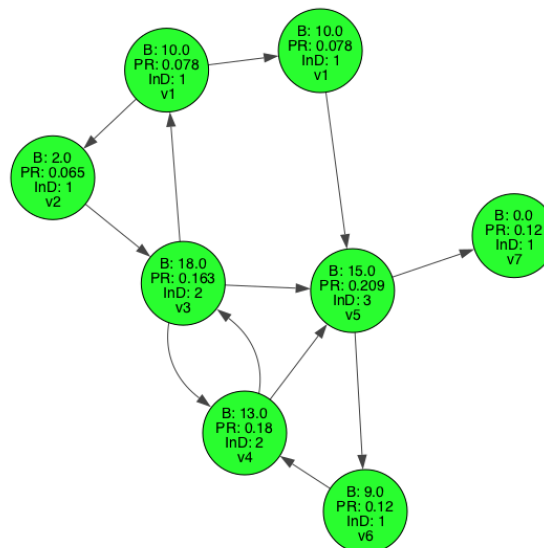


Figura 3: Red chica dirigida. B: Betweenness, PR: PageRank, InD: Grado de entrada.

4.2. Ranking de los índices

GRADO ENTRADA			BETWEENNESS			PAGERANK		
Posición	Nodo	Valor	Posición	Nodo	Valor	Posición	Nodo	Valor
1	v5	3	1	v3	18	1	v5	0.209
2	v4	2	2	v5	15	2	v4	0.180
2	v3	2	3	v4	13	3	v3	0.163
3	v1	1	4	v1	10	4	v6	0.120
3	v2	1	5	v6	9	4	v7	0.120
3	v6	1	6	v8	3	5	v1	0.078
3	v7	1	7	v2	2	6	v2	0.065
3	v8	1	8	v7	0	6	v8	0.065

Cuadro 1: Ranking de cada índice para la red chica.

5. Referencias

6. Apéndice