Nociones Preliminares

Conjuntos

DEFINICION 1
Notacion: A conjunto ⇒ $a \in A$ y $a \notin A$

Un conj = coleccion de objetos, llamados elmtos, que dado un obj cualquiera se puede decidir si ese obj es un elmto del conj o no.

OBSERVACION 1

El orden de los elmtos NO importa en un conj y tampoco se tienen en cuenta las repeticiones.

Ej. $A = \{1,2,3\}$, $B = \{3,1,2\}$, $C = \{1,1,1,3,3,2,2,2\}$ ⇒ $A = B = C$

DEFINICION 2
Notacion: A conjunto ⇒ $\#A$

Sea A un conj, se llama cardinal de A a la cant de elmtos distintos q tiene A. Cdo el conj NO tiene un num finito de elmtos, se dice q es infinito ⇒ $\#A = \infty$

Obs: si A es un conj finito ⇒ $\#A \in \mathbb{N} \cup \{0\} = \mathbb{N}_0$

Como definir un conjunto?

1. Por extension: si el conj es finito, se puede definir listando los elmtos entre llaves i.e. { }
2. Por comprension: a traves de una propiedad q describe los elmtos del conj ⇒ hay q definir subconjuntos xq hay q dar un conj referencial de dnd se eligen los elmtos
3. Graficamente: usando los diagramas de Venn

DEFINICION 3
Notacion: $B \subseteq A$ y $B \not\subseteq A$ (tmb $\subset$ y $\not\subset$)
⚠ Inclusion ≠ Pertenencia

Sea A conj. Se dice q un conj B esta contenido en A si TODO elmto de B es elmto de A ⇒ decimos q B esta incluido en A o q B es un subconjunto de A

⇒ $B \subset A$ si $\forall b \in B, b \in B$ y $B \not\subset A$ si $\exists b \in B / b \notin A$

OBSERVACION 2

$A = B \Leftrightarrow A \subseteq B \wedge B \subseteq A$ i.e. son iguales si tienen exactamente los mismos elmtos

OBSERVACION 3

Sea A un conj finito y sea $B \subseteq A$ ⇒ $\#B \leq \#A$ (y B finito)

DEFINICION 4
Notacion: A conjunto ⇒ $P(A)$

Sea A un conj. El conjunto de partes de A es el conjunto formado x todos los subconj de A i.e. el conj cuyos elmtos son los subconjuntos de A ⇒ $P(A) = \{B \mid B \subseteq A\}$ v $B \in P(A) \Leftrightarrow B \subseteq A$

OPERACIONES ENTRE CONJUNTOS

Sup q los conj A, B, C... son subconj de un mismo conj referencial U i.e. conj universal.

1. Complemento: sea $A \subseteq U$, el complemento de A es el conj $\bar{A}$ de los elmtos de U q no pertenecen a A
⇒ $\bar{A} = \{b \in U / b \notin A\}$ v $\forall b \in U,\ b \in \bar{A} \Leftrightarrow b \notin A$

Obs: v NO es excluyente ⇒ $c \in A$ y $c \in B$, c tmb pertenece a $A \cup B$

2. Union: Sean $A, B \subseteq U$, la union de A y B es el conj $A \cup B$ de los elmtos de U q pertenecen a A o a B
⇒ $A \cup B = \{c \in U / c \in A \vee c \in B\}$ v $\forall c \in U,\ c \in A \cup B \Leftrightarrow c \in A \vee c \in B$

Obs: la union es conmutativa i.e. $A \cup B = B \cup A$ y se tiene $A \cup \emptyset = A$, $A \cup U = U$ y $A \cup \bar{A} = U$

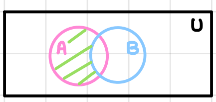
Obs: si $A \cap B = \emptyset$, se dice q son disjuntos

3. Interseccion: sean $A, B \subseteq U$, la intersecc° de A y B es el conj $A \cap B$ de los elmtos de U q pertenecen a A y a B
⇒ $A \cap B = \{c \in U / c \in A \wedge c \in B\}$ v $\forall c \in U,\ c \in A \cap B \Leftrightarrow c \in A \wedge c \in B$

PROPOSICION 1

Sean $A, B, C \subseteq U$, entonces:

- $\overline{(A \cup B)} = \bar{A} \cap \bar{B}$ y $\overline{(A \cap B)} = \bar{A} \cup \bar{B}$ ⇒ Ley de De Morgan
- $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$ y $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$ ⇒ Leyes distributivas



4. Diferencia: A - B es el conj de los elmtos de A q no son elmtos de B i.e. $A - B = A \cap \bar{B}$
⇒ $A - B = \{a \in A / a \notin B\}$ v $a \in A - B \Leftrightarrow a \in A \wedge a \notin B$

5. Diferencia simetrica: $A \triangle B$ es el conj de los elmtos de U q pertenecen a A o a B PERO no a los dos a la vez
⇒ $A \triangle B = \{c \in U / (c \in A \wedge c \notin B) \vee (c \notin A \wedge c \in B)\}$

OBSERVACION 4

Sean $A, B \subseteq U$ conj finitos.

- Si A y B son conj disjuntos ⇒ $\#(A \cup B) = \#A + \#B$
- Sino $\#(A \cup B) = \#A + \#B - \#(A \cap B)$
- Si U es un conj finito ⇒ $\#\bar{A} = \#U - \#A$

Obs: se deduce q $\#(A - B) = \#A - \#(A \cap B)$ y $\#(A \triangle B) = \#A + \#B - 2.\#(A \cap B)$

PRODUCTO CARTESIANO
Notacion: A, B conjuntos ⇒ $A \times B$
Obs: $\#(A \times B) = \#A . \#B$

Sean A, B conjuntos. El prod cartesiano de A con B es el conj de pares ordenados $A \times B = \{(a,b) / a \in A \wedge b \in B\}$

Ej. $A = \{1,2,3\}$ y $B = \{a,b\}$

- $A \times B = \{(1,a), (1,b), (2,a), (2,b), (3,a), (3,b)\}$
- $B \times A = \{(a,1), (a,2), (a,3), (b,1), (b,2), (b,3)\}$

⚠ $A \times B \neq B \times A$

Obs: si $A=B=\mathbb{R} \Rightarrow \mathbb{R}\times\mathbb{R}$ es el espacio euclideo $\mathbb{R}^2$

Obs: si $A\subseteq U$ y $B\subseteq V \Rightarrow A\times B \subseteq U\times V$

EN GENERAL

Producto cartesiano de n conjuntos $A_1, A_2 \dots A_n$ = conj de n-uplas ordenadas:

Obs: $\#(A_1\times\dots\times A_n) = \#A_1 . \#A_2 \dots \#A_n$

$A_1\times A_2\times\dots\times A_n = \{(a_1,a_2,\dots,a_n / a_1\in A_1, a_2\in A_2,\dots,a_n\in A_n\} = \{(a_1,a_2 \dots a_n) / a_i \in A_i, 1\leq i\leq n\}$

Obs: si $A_1=A_2=\dots=A_n=A \Rightarrow$ notamos $A_1\times A_2\times\dots\times A_n = A^n$

PROPOSICION 2

Sea A un conj finito $\Rightarrow \#(P(A)) = 2^{\#A}$

Relaciones

DEFINICION 1

Sean A,B conj. Un subconj R del prod cartesiano $A\times B$ se llama una relacion de A en B i.e. R es una relacion de A en B si $R\in P(A\times B)$. Dados $a\in A, b\in B$ y una relacion R de A en B, se dice q "a esta relacionado con b" si $(a,b)\in R$. Si a no esta relacionado c/ b, $(a,b)\notin R$ (i.e. $a \not R b$)

Notacion: $a\in A$ se relaciona con $b\in B$ $\Rightarrow$ se denota aRb

Cuantos relaciones de A en B hay?

Sabemos q hay una rela° x cada subconj de $A\times B$ i.e. x cada elmto de $P(A\times B) \Rightarrow$ hay tantas relaciones como elmtos en $P(A\times B) \Rightarrow$ la cant de relaciones es igual a $\#(P(A\times B)) = 2^{\#(A\times B)} = 2^{\#A.\#B}$

PROPOSICION 1

Sean A_m y B_n conj finitos c/ m y n elmtos respectivamente $\Rightarrow$ la cant de relaciones de A_m en B_n = $2^{m.n}$

DEFINICION 2

Sea A un conj. Se dice q R es una rela° en A sii $R\subseteq A\times A$

Consideramos relaciones de un conjunto en si mismo

Obs: la igualdad de elmtos siempre es una rela° en cualquier conj A

$\Rightarrow R=\{(a,a), a\in A\}$ es decir $\forall a,b\in A$, $aRb \Leftrightarrow a=b$

Obs: $\leq$ es una relacion en $\mathbb{R}$ y $\subseteq$ es una relacion en P(A) p/ cualquier conj A

DEFINICION 3

1. R es reflexiva si $(a,a)\in R, \forall a\in A$ i.e. si $aRa, \forall a\in A$
2. R es simetrica si $(a,b)\in R$ entonces $(b,a)\in R$ i.e. $\forall a,b\in A$, si $aRb \Rightarrow bRa$
3. R es antisimetrica si $\forall a,b\in A$, $aRb \wedge bRa \Rightarrow a=b$ i.e. si $(a,b)\in R$ y $a\neq b$, entonces $(b,a)\notin R$
4. R es transitiva si $\forall a,b,c\in A$, $aRb \wedge bRc \Rightarrow aRc$ i.e. si (a,b) y $(b,c)\in R$, entonces $(a,c)\in R$

DEFINICION 4

Sean A un conj y R una relacion en A.

- R es relacion de orden si es reflexiva, antisimetrica y transitiva
- R es relacion de equivalencia reflexiva, simetrica y transitiva

DEFINICION 5

Sean A un conj y $\sim$ una rela° de eq en A. P/ cada $a\in A$, la clase de eq de a es $[a]=\{b\in A / b\sim a\}\subseteq A$

Obs: debido a su simetria, se puede definir $[a]=\{b\in A / a\sim b\}$ y daria el mismo subconj de A

PROPOSICION 2

Sean A un conj y $\sim$ una rela° de eq en A. Sean $a,b\in A \Rightarrow [a]\cap[b]=\emptyset$ ó $[a]=[b]$

Obs: Si no vale $[a]\cap[b]=\emptyset \Rightarrow$ debe valer $[a]=[b]$ (y viceversa)

PROPOSICION 3

Sea A un conj. Hay una manera natural de asociarle a una rela° de eq en A una particion de A. Reciprocamente, a toda particion se le puede asociar una rela° de eq y estas relaciones son inversas una de la otra.

DEFINICION 6

Sea A un conj no vacio. Una particion de A es una familia de conj $F=\{A_i\}$ $(i\in I)$.

$\Rightarrow A_i\neq\emptyset, \forall i\in I$

$\Rightarrow A_i\subseteq A, \forall i\in I$

$\Rightarrow A_i\cap A_j\neq\emptyset, \forall i\neq j$

$\Rightarrow \bigcup_{i\in I} A_i = A$

Ej. Sea $A=\mathbb{N}$.

- $A_1=\{x\in A / x$ es par$\}$
- $A_2=\{x\in A / x$ es impar$\}$

$\Rightarrow \{A_1,A_2\}$ es una particion de A

DEFINICION 7

Sean $A_1,\dots,A_n$ conj no vacios. Una relacion n-aria R definida en $A_1\times\dots\times A_n$ es cualquier subconj $R\subseteq A_1\times\dots\times A_n$.

Obs: si $n=2$, decimos q R es una relacion binaria

Obs: una relacion 1-aria definida en un conj A es cualquier subconj $R\subseteq A$

DEFINICION 8

Una relacion R en A es de orden total si es de orden y $\forall x,y\in A, (x,y)\in R$ ó $(y,x)\in R$ (Ej. $R=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 / x\leq y\}$)

DEFINICION 9

Sea R una relacion de eq en A, se define $A/R=\{[x] / x\in A\}$ como el conjunto cociente

1. $R=\{(x,y)\in\mathbb{Z}^2 / x\equiv y\ (2)\} \Rightarrow \mathbb{Z}/R=\mathbb{Z}_2=\{[0],[1]\}$
2. $R=\{(x,y)\in\mathbb{Z}^2 / x\equiv (y)\ (n)\} \Rightarrow \mathbb{Z}/R=\mathbb{Z}_n=\{[0],[1]\dots[n-1]\}$

PROPOSICION 4

la cant de relaciones de eq q se pueden definir en un conj A es eq a la cant de particiones sobre A

Funciones

Consideramos relaciones de un conj A en un conj B.

DEFINICION 1

Sean A y B conj y sea R una rela° de A en B. Se dice q R es una funcion cdo todo elmto $a \in A$ esta relacionado c/ algun $b \in B$ y este elmto b es unico ⇒ $\forall a \in A, \exists!\, b \in B / aRb$ v $\forall a \in A, \exists!\, b \in B / (a,b) \in R$

Obs: se dice q b es la imagen de a

EJEMPLOS

1. $R = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / y = x^2\}$ es funcion / $f(x) = x^2$
2. $R = \{(x,y) \in \mathbb{Z}^2 / x \mid y\}$ NO es funcion pues $(2,2) \in R$ y $(2,4) \in R$ PERO $2 \neq 4$
3. $R = \{(x,y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{N} / x = y\}$ NO es funcion pues $x = 1{,}5 \in \mathbb{R}$ PERO $\nexists\, y \in \mathbb{N} / (x,y) \in R$

EN GENERAL

Si $A_1, A_2 \dots A_n$ son conj no vacios, una funcion $f: A_1 x \dots x A_{n-1} \to A_n$ es una rela° $R \subseteq A_1 x \dots x A_n$ q verifica:
$\forall (x_1, x_2 \dots x_{n-1}) \in A_1 x \dots x A_{n-1}, \exists!\, y \in A_n / (x_1, \dots, x_{n-1}, y) \in R$ ⇒ $y = f(x_1, \dots, x_{n-1})$ es una funcion de (n-1) variables

Obs: generalmente despejamos la ultima variable

1. $R = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 / x^2 + y^2 + z = 0\}$ es funcion / $f(x,y) = z = -x^2 - y^2$
2. $R = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 / x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$ NO es funcion pues $(0,0,1) \in R$ y $(0,0,-1) \in R$ PERO $1 \neq -1$

DEFINICION 2

Sean $f, g: A \to B$ funciones. Se dice q $f = g$ cdo $f(a) = g(a), \forall a \in A$.

- A = dominio
- B = codominio

TODOS los elmtos del dominio deben estar involucrados PERO puede ocurrir q haya elmtos del codominio q no esten involucrados

DEFINICION 3

Sea $f: A \to B$ una funcion. La imagen de f es el subconj de elmtos de B q estan relacionados c/ algun elmto de A i.e. $Im(f) = \{b \in B / \exists\, a \in A$ tal que $f(a) = b\}$

PROPOSICION 1

Sean A_m, B_n conj finitos c/ m y n elmtos respectivamente ⇒ la cant de funciones f q hay de A_m en B_n es n^m.

DEFINICION 4

Sea $f: A \to B$ una funcion.

- f es inyectiva si $\forall$ elmto $b \in B$ $\exists$ a lo sumo un elmto $a \in A$ p/ el cual $f(a) = b$ i.e. $f(a) = f(a')$ ⇒ $a = a'$

Obs: por contrarreciproco, $a \neq a'$ ⇒ $f(a) \neq f(a')$

- f es sobreyectiva si $\forall$ elmto $b \in B$ $\exists$ al menos un elmto $a \in A$ p/ el cual $f(a) = b$ i.e. si $Im(f) = B$
- f es biyectiva si es a la vez I y S i.e. $\forall$ elmto $b \in B, \exists!$ elmto $a \in A / f(a) = b$

EJEMPLOS

1. $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R} / f(x) = x^3$ ⇒ es biyectiva
   - $f(x) = f(y)$ ⇒ $x^3 = y^3$ ⇒ $x = y$ ⇒ es inyectiva
   - Sea $y \in \mathbb{R}$. Tomo $x = \sqrt[3]{y}$ ⇒ $f(x) = (\sqrt[3]{y})^3 = y$ ⇒ es sobreyectiva
2. $f: \mathbb{C} \to \mathbb{C} / f(z) = z^3$

Sea $z_1 = e^{\frac{2\pi}{3} i}$ y $z_2 = e^{\frac{4\pi}{3} i}$ ⇒ $z_1^3 = 1$ y $z_2^3 = 1$ PERO $z_1 \neq z_2$ ⇒ no es inyectiva ⇒ no es biyectiva

DEFINICION 4

Sean A,B,C conj y $f: A \to B$, $g: B \to C$ funciones.
La composicion de f con g es una funcion $g \circ f: A \to C / g \circ f(x) = g(f(x)), \forall x \in A$

Obs: composicion de g con f = $f \circ g$

FUNCIONES BIYECTIVAS

Sea $f: A \to B$ funcion biyectiva i.e. $\forall b \in B, \exists!\, a \in A / f(a) = b$ ⇒ el conj $R' = \{(b,a) / f(a) = b\} \subseteq B \times A$ es una rela° de B en A q satisface las propiedades de funcion pues todos los $b \in B$ estan relacionados c/ un $! a \in A$. Esta funcion se nota f^{-1} y se llama funcion inversa de f : $f^{-1}(b) = a$ ⇔ $f(a) = b$

⚠ f^{-1} $\exists$ unicamente cdo f es biyectiva

PROPOSICION 2

Sea $f: A \to B$ una funcion.

1. Si f es biyectiva ⇒ $f^{-1} \circ f = id_A$ y $f \circ f^{-1} = id_B$

Demos: $f^{-1}(f(a)) = f^{-1}(b) = a$ y $f(f^{-1}(b)) = f(a) = b$

2. Si $\exists$ una funcion $g: B \to A / g \circ f = id_A$ y $f \circ g = id_B$ ⇒ f es biyectiva y $g = f^{-1}$

DEFINICION 5

Sea $f: A \to B$ y c/ $A \subseteq C$. La funcion $\tilde{f}: C \to B$ es una extesion de f si $\tilde{f}|_A = f$ i.e. $\tilde{f}(a) = f(a), \forall a \in A$

1. Hallar extensiones a $\mathbb{R}$ de $f: \mathbb{R}_{\geq 0} \to \mathbb{R} / f(x) = x$
   - $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R} / g(x) = x$ pues $\forall x \in \mathbb{R}_{\geq 0}$, $g(x) = x = f(x)$
   - $h: \mathbb{R} \to \mathbb{R} / h(x) = |x|$ pues $\forall x \in \mathbb{R}_{\geq 0}$, $h(x) = |x| = x = f(x)$
   - $t: \mathbb{R} \to \mathbb{R} / t(x) = \begin{cases} f(x) & \text{si } x \in \mathbb{R}_{\geq 0} \\ q(x) & \text{sino} \end{cases}$

Obs: q(x) puede ser cualquier funcion ⇒ hay infinitas extensiones

2. Hallar extensiones a $\mathbb{R}$ de $f: \mathbb{R} - \{0\} \to \mathbb{R} / f(x) = \sin(x)/x$
   - $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R} / g(x) = \begin{cases} \sin(x)/x & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$ ⇒ es una extension discontinua
   - $h: \mathbb{R} \to \mathbb{R} / h(x) = \begin{cases} \sin(x)/x & \text{si } x \neq 0 \\ 1 & \text{si } x = 0 \end{cases}$ ⇒ es una extension continua

TRANSFORMACION LINEAL

$F: V \to W$ es una transformacion lineal i.e. una fun° tal q V y W son espacios vectoriales y cumple:

1. $F(u + v) = F(u) + F(v)$, $\forall u, v \in V$
2. $F(k.v) = k.F(v)$, $\forall v \in V$ y $\forall k \in \mathbb{R}$

EJEMPLO

$F: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ con $\mathbb{R}$-espacio vectorial tal q $F(x,y) = (2x - y, 3x, x + 4y)$

1. $F((x_1,y_1)+(x_2,y_2)) = F(x_1+x_2, y_1+y_2) = (2(x_1+x_2)-(y_1+y_2),\ 3(x_1+x_2),\ x_1+x_2+4(y_1+y_2))$

$\Rightarrow (2x_1+2x_2-y_1-y_2,\ 3x_1+3x_2,\ x_1+x_2+4y_1+4y_2) = (2x_1-y_1, 3x_1, x_1+4y_1) + (2x_2-y_2, 3x_2, x_2+4y_2) = F(x_1,y_1)+F(x_2,y_2)$

2. $F(k(x_1,y_1)) = F(kx_1, ky_1) = F(2kx_1-ky_1,\ 3kx_1,\ kx_1+4ky_1) = k.F(2x_1-y_1, 3x_1, x_1+4y_1) = k.F(x_1,y_1)$

$\Rightarrow$ F es una transformacion lineal

Numeros Complejos

$z = a+bi \Rightarrow a =$ parte real y $b =$ parte imaginaria

Conjugado: $\bar{z} = a - bi$

Obs: toda ec. de 2do grado c/ coef reales q no tenga soluº real tiene 2 soluciones q son numeros complejos conjugados

MODULO Y ARGUMENTO

- Modulo $|z| = \sqrt{a^2+b^2}$
- Argumento $\arg(z) = \tan^{-1}(b/a)$

FORMA POLAR

Si $z = a+bi$ c/ $r = |z|$ y $\alpha = \arg(z) \Rightarrow \boxed{z = r.(\cos\alpha + i\sin\alpha)}$

Operaciones:

1. Producto: $z_1.z_2 = (r_1.r_2)(\cos(\alpha+\beta) + i\sin(\alpha+\beta))$
2. Cociente: $z_1/z_2 = (r_1/r_2)(\cos(\alpha-\beta) + i\sin(\alpha-\beta))$
3. Potencia: $z^n = r^n(\cos(n\alpha) + i\sin(n\alpha))$
4. Raiz: $\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{r}\left(\cos\left(\frac{\alpha+2k\pi}{n}\right) + i\sin\left(\frac{\alpha+2k\pi}{n}\right)\right)$ tal q $k = 0,1,\dots,n-1$

FORMA EXPONENCIAL

Sea $z = a+bi$ tal q $|z| = r$ y $\arg(z) = \theta \Rightarrow z = r.e^{i\theta}$

Relacion de Euler: $e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta \Rightarrow$ num complejo c/ $|z| = 1$

Operaciones:

1. Producto: $z_1.z_2 = (r_1.r_2)e^{i(\theta_1+\theta_2)}$
2. Cociente: $z_1/z_2 = r_1/r_2.e^{i(\theta_1-\theta_2)}$
3. Potencia: $z^n = r^n.e^{i\theta n}$
4. Raiz: $\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{r}.e^{i.\frac{\theta+2k\pi}{n}}$ tal q $k = 0,1,\dots,n-1$