Lógica Proposicional: Sintaxis

DEFINICION 1

$A = VAR \cup \{(,)\} \cup$ Conectivos = alfabeto de la logica proposicional

- $VAR = \{p_n / n \in \mathbb{N}\} = \{p_0, p_1, \ldots, p_n\}$ es el conjunto de variables
- Conectivos $= \{\wedge, \vee, \Rightarrow, \neg\}$ = {conjuncion, disjuncion, implicacion, negacion}

DEFINICION 2

Se denomina formula de la L.P. a una expre° q cumple lo siguiente:

1. $VAR \subseteq FORM = F$ = conj. de formulas
2. Si $\alpha \in F \Rightarrow \neg\alpha \subseteq F$
3. Si $\alpha, \beta \in F \Rightarrow (\alpha \wedge \beta), (\alpha \vee \beta), (\alpha \Rightarrow \beta) \in F$
4. Cualquier expre° q se obtenga aplicando un nro finito de pasos 1, 2 y 3 es una formula

Obs: El lenguaje de la L.P. es FORM y $FORM \subseteq A^*$

EJEMPLOS

1. $p_1 \in F$
2. $\neg p_1 \in F$
3. $(\neg p_1) \notin F$ pues tiene parentesis
4. $((p_1 \wedge p_2) \Rightarrow \neg p_3) \in F$
5. $\neg p_1 \wedge p_2 \notin F$ pues faltan los parentesis de afuera

DEFINICION 3

Una cadena de formacion (CF) es una suce° finita de elmtos de A^*: $x_1, x_2, \ldots, x_n$ tal q cada x_i $(1 \leq i \leq n)$ verifica:

$x_i \in VAR$ ó $\exists j < i / x_i = \neg x_j$ ó $\exists j, k < i / x_i = (x_j * x_k)$ siendo $* \in \{\wedge, \vee, \neg\}$ = conectivos binarios $(1 \leq i, j, k \leq n)$

Obs: cada x_i se denomina eslabon de la CF

EJEMPLOS

1. $x_1 = p_1$, $x_2 = p_3$, $x_3 = \neg x_1$ es una CF
2. $x_1 = p_1$, $x_2 = \neg x_1$, $x_3 = p_2$, $x_4 = p_3$, $x_5 = (x_3 \Rightarrow x_4)$, $x_6 = \neg x_5$, $x_7 = \neg x_6$ es una CF
3. $x_1 = p_1$, $x_2 = p_3$, $x_3 = ((x_1 \wedge x_2) \Rightarrow x_1)$ NO es una CF

Obs: Si $x_1, x_2, \ldots, x_n$ es una CF $\Rightarrow$ $x_1, x_2, \ldots, x_j / j \leq n$ es una CF

$\Rightarrow$ la idea es no sacar del medio

TEOREMA 1

$\alpha \in FORM \Leftrightarrow \exists x_1, x_2, \ldots, x_n = \alpha$ CF = cadena de formo° de α

DEMOSTRACION

$\Rightarrow$) Por induccion en long(α)

Caso base:

Si long(α) = 1. Sea x_1 una CF $\Rightarrow$ como no hay anteriores, $x_1 = p_j \in VAR \subseteq FORM$

Paso recursivo:

H) $\alpha \in FORM /$ long(α) $= k \leq n \Rightarrow \exists x_1, x_2, \ldots, x_k = \alpha$ CF i.e. $\exists$ una CF de α

T) $\alpha \in FORM /$ long(α) $= n+1 \Rightarrow \exists x_1, x_2, \ldots, x_j = \alpha$ CF i.e. $\exists$ una CF de α

Sea $\alpha \in FORM /$ long(α) $= n+1 > 0$

1. $\alpha = p_j \in VAR \Rightarrow$ defino $x_1 = p_j$ es CF de α
2. $\alpha = \neg\beta$ c/ $\beta \in FORM$, long(α) $= n+1 = 1 +$ long(β) $\Rightarrow$ long(β) $= n$. Por H), $\exists x_1, \ldots, x_k = \beta$ CF.

Defino $y_1 = x_1, y_2 = x_2, \ldots, y_k = x_k, y_{k+1} = \neg y_k = \alpha$ CF

3. $\alpha = (\beta_1 * \beta_2) / * \in \{\wedge, \vee, \Rightarrow\}$ y $\beta_1, \beta_2 \in FORM \Rightarrow$ long(α) $= n+1 =$ long(β_1) + long(β_2) + 3[1] $\Rightarrow \underbrace{\text{long}(\beta_1)}_{\geq 1} + \underbrace{\text{long}(\beta_2)}_{\geq 1} = n-2$

$\Rightarrow$ long(β_1) $< n-2 < n$ y long(β_2) $< n-2 < n$.

Por H), $\exists x_1, \ldots, x_k = \beta_1$ CF y $\exists y_1, \ldots, y_t = \beta_2$ CF. Defino $z_1 = x_1, \ldots, z_k = x_k, z_{k+1} = y_1, \ldots, z_{k+t} = y_t, z_{k+t+1} = (z_k * z_{k+t}) = \alpha$ CF.

[1] va el 3 xq vendrian a ser {(,), *}

$\Leftarrow$) Sea $x_1, \ldots, x_n$ CF $\Rightarrow$ pruebo x induc° en n q $x_j \in FORM$, $1 \leq j \leq n$

Caso base:

$n = 1 \Rightarrow x_1$ es una CF $\Rightarrow x_1 \in VAR \Rightarrow x_1 \in FORM$

Paso recursivo:

H) Sea $x_1, \ldots, x_n$ CF $\Rightarrow x_j \in FORM$, $1 \leq j \leq n$

T) Sea $x_1, \ldots, x_n, x_{n+1}$ CF $\Rightarrow x_j \in FORM$, $1 \leq j \leq n+1$

Por H), sabemos q $x_j \in FORM \Rightarrow$ falta probar q $x_{n+1} \in FORM$

1. Si $x_{n+1} \in VAR \Rightarrow x_{n+1} \in FORM$
2. Sea $x_{n+1} = \neg x_j$ $(j \leq n)$. Como $x_1, \ldots, x_n$ es una CF $\Rightarrow$ por H), $x_j \in FORM$ $(1 \leq j \leq n)$.

Luego, por defini° de formula, $\neg x_j \in FORM$.

3. Sea $x_{n+1} = (x_j * x_k) / j,k \leq n$ y $* \in \{\wedge, \vee, \Rightarrow\}$. Como $x_1, \ldots, x_k$ es CF y $x_1, \ldots, x_j$ es CF $\Rightarrow$ por H), x_j y $x_k \in FORM$.
Luego, por defin° de formula, $(x_j * x_k) \in FORM$.

Conclusion: el teorema nos dice q α es una formula, si y solo si, $\exists$ una CF de lamisma

EJEMPLO

¿ $E = (\neg\neg p_1) \in FORM$?

Sup q $E \in FORM \Rightarrow \exists x_1, \ldots, x_n = E$ CF. Como $x_n = E$ empieza c/ parentesis, entonces x defin° de CF, $\exists j,k \leq n-1 / E = (x_j * x_k)$ c/ $* \in \{\wedge, \vee, \Rightarrow\}$ ABS! pues E no tiene conectivos binarios

Conclusion: E no es formula

DEFINICION 4

$\Rightarrow$ agarro una CF y saco eslabones del medio PERO al sacarlos tiene q seguir siendo una CF

Dado $x_1, \ldots, x_n$ CF, se define $x_{i1}, x_{i2}, \ldots, x_{ik}$ subcadena si cumple:

1. $x_{i1}, \ldots, x_{ik}$ es CF
2. $x_{ik} = x_n$ i.e. podria sacar eslabones q no contribuyen a la formacion de x_n
3. $1 \leq i1 < i2 < \ldots < ik = n$

EJEMPLOS

⚠ Una cadena es subcadena de ella misma

1. Sea $x_1 = p_1, x_2 = p_2, x_3 = \neg x_2, x_4 = (x_2 \Rightarrow x_3)$ una CF $\Rightarrow$ NO es minimal
$y_1 = p_3, y_2 = \neg y_1, y_3 = (y_1 \Rightarrow y_2)$ es CF y es subcadena $\Rightarrow$ sacamos x_1 q llamamos eslabon redundante q son los q podemos quitar de una CF si q esta deje de ser CF.
2. $x_1 = p_1, x_2 = p_2, x_3 = (x_1 \wedge x_2)$ es CF PERO la unica subcadena q tiene es ella misma $\Rightarrow$ decimos q es minimal

DEFINICION 5

Una CF es minimal si la unica subcadena q tiene es ella misma.

Sea X un conjunto y $m \in X$

[Minimal] = un elmto es minimal si no hay elmtos + chicos q el i.e. m es minimal si $\nexists a \in X / a < m$

Obs: analogamente se define maximal y maximo

[Minimo] = un elmto es minimo si todos los elmtos del conj son mayores q dicho elmto i.e. m es minimo si $m \leq b, \forall b \in X$

Relacion de orden: Sean A, B CF $\Rightarrow$ ARB si A es subcadena de B

DEMOSTRACION

1. Toda CF es subcadena de si misma $\Rightarrow$ ARA $\Rightarrow$ es reflexiva
2. Si ARB $\wedge$ BRA $\Rightarrow$ A es subcadena de B y B es subcadena de A $\Rightarrow \forall x_i \in A, x_i \in B \wedge \forall x_j \in B, x_j \in A \Rightarrow$ A y B tienen los mismos eslabones $\Rightarrow A = B \Rightarrow$ es antisimetrica
3. Si ARB $\wedge$ BRC $\Rightarrow$ A es subcadena de B y B es subcadena de C i.e. $\forall x_i \in A, x_i \in B \wedge \forall x_j \in B, x_j \in C \Rightarrow \forall x_i \in A, x_i \in C \Rightarrow$ A es subcadena de C i.e. ARC $\Rightarrow$ es transitiva

Obs: tener en cuenta q una subcadena mantiene el orden relativo de la CF

Obs: NO es de orden total. Sea $A: x_1 = p_1, x_2 = p_2, x_3 = (x_1 \wedge x_2)$ y $B: y_1 = p_8, y_2 = \neg y_1 \Rightarrow A \not R B$ y $B \not R A$.

DEFINICION 6

Sea $E \in A^*$. Se define complejidad de E como la cant de conectivos q aparecen en E y lo notamos C(E)

DEFINICION 7

Se define complejidad binaria de E como la cant de conectivos binarios q aparecen en E y lo notamos Cb(E)

DEFINICION 8

Sea $E \in A^*$. Se define peso de E como la cant de parentesis q abren menos la cant de parentesis q cierran y lo notamos p(E).

EJEMPLOS

1. Sea $E = () \wedge \Rightarrow P_1 \wedge P_2 \Rightarrow C(E) = Cb(E) = 3$ y $p(E) = 0$
2. Sea $\alpha = \neg(P_1 \wedge P_2) \Rightarrow C(E) = 2, Cb(E) = 1$ y $p(E) = 0$ Obs: $\alpha \in FORM$
3. Sea $E = (P_1 \wedge P_2))) \Rightarrow P_8 \Rightarrow C(E) = Cb(E) = 2$ y $p(E) = -2$
4. Sea $\alpha = ((P_1 \Rightarrow P_2) \vee P_3) \Rightarrow C(E) = Cb(E) = 2$ y $p(E) = 0$

LEMA 1

Sea $\alpha \in F$.

- Si $C(\alpha) = 0 \Rightarrow \alpha = p_j \in VAR$
- Si $C(\alpha) > 0 \Rightarrow \alpha = \neg\beta$ $(\beta \in F)$ ó $\alpha = (\beta_1 * \beta_2)$ c/ $\beta_1, \beta_2 \in F$ y $* \in \{\wedge, \vee, \Rightarrow\}$

DEMOSTRACION

Si $\alpha \in F \Rightarrow \exists x_1, \ldots, x_n$ CF y $x_j \in F, 1 \leq j \leq n$

1. Si $C(\alpha) = 0$, defino $\alpha = x_1$ y $x_1 \in VAR \Rightarrow \alpha = p_j \in VAR$
2. Si $C(\alpha) > 0$:
   - Por def de CF, $\exists 1 \leq j < k \leq n / x_k = \neg x_j \Rightarrow$ defino $\alpha = x_k = \neg x_j / x_j \in F$
   - Por def de CF, $\exists 1 \leq j, k < t \leq n / x_t = (x_j * x_k) \Rightarrow$ defino $\alpha = x_t = (x_j * x_k) / x_j, x_k \in F$ y $* \in \{\wedge, \vee, \Rightarrow\}$

DEFINICION 8

Sea $\alpha \in F / C(\alpha) = n$. Decimos q β es subformula de α si cumple c/ la sig definicion recursiva:

1. Si $n = 0$ i.e. $\alpha = P_j$, entonces $\beta \in subf(\alpha) \Leftrightarrow \alpha = \beta$ i.e. $subf(\alpha) = \{P_j\}$
2. Si $n > 0 \Rightarrow \alpha = \neg\sigma$ $(\sigma \in F)$ ó $\alpha = (\sigma_1 * \sigma_2)$ $(\sigma_1, \sigma_2 \in F$ y $* = \{\vee, \wedge, \Rightarrow\})$
   - Si $\alpha = \neg\sigma$ $(\sigma \in F)$, entonces $\beta \in subf(\alpha) \Leftrightarrow \beta = \alpha$ ó $\beta \in subf(\sigma)$ i.e. $subf(\alpha) = \{\alpha\} \cup subf(\sigma)$
   - Si $\alpha = (\sigma_1 * \sigma_2)$ $(\sigma_1, \sigma_2 \in F$ y $* = \{\vee, \wedge, \Rightarrow\})$, entonces $\beta \in subf(\alpha) \Leftrightarrow \beta = \alpha$ ó $\beta \in subf(\sigma_1)$ ó $\beta \in subf(\sigma_2)$ i.e. $subf(\alpha) = \{\alpha\} \cup subf(\sigma_1) \cup subf(\sigma_2)$

Ej. $\alpha = ((p_1 \wedge p_2) \vee p_3)$
$\Rightarrow subf(\alpha) = \{\alpha\} \cup subf((P_1 \wedge P_2)) \cup subf(p_3)$
$\Rightarrow subf((P_1 \wedge P_2)) = \{(P_1 \wedge P_2)\} \cup \{P_1\} \cup \{P_2\}$
$\Rightarrow subf(P_3) = \{P_3\}$
$\Rightarrow subf(\alpha) = \{\alpha, (P_1 \wedge P_2), P_1, P_2, P_3\}$

$\{\alpha\} \cup \{P_1 \wedge P_2\} \cup \{P_1\} \cup \{P_2\} \cup \{P_3\}$

TEOREMA 2

Sea $\alpha \in F$. Entonces:

1. $p(\alpha) = 0$
2. Si $\bullet$ es un conectivo binario q aparece en $\alpha \Rightarrow$ la expre° E a la izq de $\bullet$ en α verifica q $p(E) > 0$

Obs: antecedente $\Rightarrow$ consecuente

Ej. $\alpha = (P_1 \Rightarrow (P_2 \vee P_3))$ y $E = (P_1 \Rightarrow (P_2 \Rightarrow p(\alpha) = 0$ y $p(E) = 2$

DEMOSTRACION

Por inducción en $C(\alpha)$

Caso base:

Sea $\alpha \in F / c(\alpha) = 0 \Rightarrow \alpha = p_j \in VAR \Rightarrow p(\alpha) = 0 \cdot 0 = 0$ y 2. es cierto pues el antecedente es falso i.e. no hay conectivo binario en α

Paso recursivo:

$P(n)$ = Sea $\alpha \in F / c(\alpha) = n$

1. $p(\alpha) = 0$
2. Si $\bullet$ es un conect binario en $\alpha \Rightarrow$ la exp E a la izq de $\bullet$ en α verifica q $p(E) > 0$

$\Big\}$ defino bien la proposiº

H) $P(k)$, $k \leq n$

T) $P(n+1)$

Sea $\alpha \in F / C(\alpha) = n+1 > 0$

Caso 1

$\alpha = \neg\beta$ c/ $\beta \in F \Rightarrow C(\alpha) = 1 + C(\beta) = n+1 \Rightarrow C(\beta) = n.$

1. Por H), $p(\beta) = 0$. Luego, $p(\alpha) = p(\neg) + p(\beta) = 0 + 0 = 0$
2. Sea $\bullet$ un conect binario en $\alpha \Rightarrow \bullet$ aparece en β. Por H), la exp E a la izq de $\bullet$ en β tiene $p(E) > 0$. Sea la exp $E' = \neg E$ a la izq de $\bullet$ en α, entonces $p(E') = p(\neg) + p(E) = 0 + p(E) = p(E) > 0$

Caso 2

$\alpha = (\beta_1 * \beta_2) / \beta_1, \beta_2 \in F$, $* \in \{\wedge, \vee, \Rightarrow\} \Rightarrow c(\alpha) = 1 + c(\beta_1) + c(\beta_2) = n+1 \Rightarrow c(\beta_1) + c(\beta_2) = n \Rightarrow 0 \leq c(\beta_1) \leq n$ y $0 \leq c(\beta_2) \leq n$

1. Por H), $p(\beta_1) = p(\beta_2) = 0 \Rightarrow p(\alpha) = 1 + p(\beta_1) + p(*) + p(\beta_2) - 1 = 1 - 1 = 0 \Rightarrow p(\alpha) = 0$
2. Sea $\bullet$ un conect binario q aparece en α.

i. Si $\bullet$ aparece en β_1, la exp E a la izq de $\bullet$ en β_1 es tal q, por H), $p(E) > 0$. Sea E' la exp a la izq de $\bullet$ en $\alpha \Rightarrow E' = (E \Rightarrow p(E') = p(() + p(E) = 1 + p(E) > 0$

ii. Si $\bullet = *$, la exp a la izq de $\bullet$ es $E = (\beta_1 \Rightarrow p(E) = p(() + p(\beta_1) = 1 + 0 = 1 > 0$

iii. Si $\bullet$ aparece en β_2, la exp E a la izq de $\bullet$ en β es tal q, por H), $p(E) > 0$. Sea E' la exp a la izq de $\bullet$ en $\alpha \Rightarrow E' = (\beta_1 * E \Rightarrow p(E') = p(() + p(\beta_1) + p(*) + p(E) = 1 + 0 + 0 + p(E) > 0$

COROLARIO: "Unicidad de escritura"

Sea $\alpha \in F / c(\alpha) > 0 \Rightarrow \exists ! \beta \in F / \alpha = \neg\beta$ ó $\exists ! * \in \{\wedge, \vee, \Rightarrow\}$ y unicos $\beta_1, \beta_2 \in F / \alpha = (\beta_1 * \beta_2)$

DEMOSTRACION

Caso 1: sup $\alpha = \neg\beta_1 \wedge \alpha = \neg\beta_2$, $\beta_1, \beta_2 \in F \Rightarrow \neg\beta_1 = \neg\beta_2 \Rightarrow \beta_1 = \beta_2$

Caso 2: sup $\alpha = (\beta_1 * \beta_2) \wedge \alpha = (\gamma_1 \bullet \gamma_2)$, $*, \bullet \in \{\wedge, \vee, \Rightarrow\}$ y $\beta_1, \beta_2, \gamma_1, \gamma_2 \in F \Rightarrow (\beta_1 * \beta_2) = (\gamma_1 \bullet \gamma_2) \Rightarrow \beta_1 * \beta_2 = \gamma_1 \bullet \gamma_2$

1. Sup q $long(\beta_1) = long(\beta_2)$. Como $\beta_1 * \beta_2 = \gamma_1 \bullet \gamma_2 \Rightarrow \beta_1 = \gamma_1$, $* = \bullet$ y $\beta_2 = \gamma_2$
2. Sup q $long(\beta_1) > long(\gamma_1) \Rightarrow \exists$ exp $H' / \beta_1 = \gamma_1 H'$. Notemos q $long(H') \geq 1$ y empieza c/ $\bullet$. Luego, como $\beta_1 \in F$, entonces, aplicando el teorema 2. la exp E a la izq de $\bullet$ en β_1 tiene $p(E) > 0 \Rightarrow$ como $E = \gamma_1$, $p(E) = p(\gamma_1) > 0$ ABS! $p(\gamma_1) = 0$
3. Sup q $long(\beta_1) < long(\gamma_1)$. Como $\beta_1 * \beta_2 = \gamma_1 \bullet \gamma_2 \Rightarrow \exists H' / \gamma_1 = \beta_1 H'$ dnd $long(H') \geq 1$ y empieza c/ $*$. Luego, como $\gamma_1 \in F$, entonces, aplicando el teorema 2. la exp E a la izq de $*$ en γ_1 tiene $p(E) > 0$. Como $E = \beta_1 \Rightarrow p(E) = p(\beta_1) > 0$ ABS! $p(\beta_1) = 0$

Caso 3: sup $\alpha = \neg\beta \wedge \alpha = (\gamma_1 * \gamma_2)$ dnd $\beta, \gamma_1, \gamma_2 \in F$ y $* = \{\vee, \wedge, \neg\} \Rightarrow \neg\beta = (\gamma_1 * \gamma_2)$ ABS! no empiezan c/ el mismo simbolo