Nociones Preliminares

Ejercicio 1

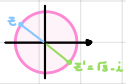
$z = 3+4i$ y $\omega = 6-8i$

1. $z + 3\omega = 3+4i+18-24i = 21-20i \Rightarrow |\cdot| = 29$ y $\alpha = \tan^{-1}(-20/21) = -0{,}761$ rad
2. $1/z = \frac{1}{3+4i} = \frac{3-4i}{(3+4i)(3-4i)} = \frac{3-4i}{9+16} = \frac{3-4i}{25} \Rightarrow |\cdot| = \frac{1}{5}$ y $\alpha = \tan^{-1}\left(\frac{-4}{3}\right) = -0{,}927$ rad
3. $z^3 = 3^3 + 3.3^2.4i + 3.3.16i^2 + 4^3i^3 = -117+44i \Rightarrow |\cdot| = 125$ y $\alpha = \tan^{-1}\left(\frac{-117}{44}\right) + \pi = 1{,}93$ rad
4. Obs: $|z| = 5$ y $\alpha_z = \tan^{-1}(4/3) = 0{,}927$ rad

$\Rightarrow z^{1000} = 5^{1000}.e^{927i} = 5^{1000}(\cos 927 + i\sin 927)$

5. $z.\omega = (3+4i)(6-8i) = 18+24i-24i-32i^2 = 50 \Rightarrow |\cdot| = 50$ y $\alpha = 0$ rad
6. $\frac{z}{\omega} = \frac{3+4i}{6-8i} = \frac{(3+4i)(6+8i)}{36+64} = \frac{-14+48i}{100} = \frac{-7}{50} + \frac{24}{50}i \Rightarrow |\cdot| = \frac{1}{2}$ y $\alpha = \tan^{-1}\left(\frac{-24}{7}\right) + \pi = 1{,}85$ rad

Obs: Si $z = -\sqrt{3}+i$



$\Rightarrow \alpha_{z'} = \tan^{-1}(-\sqrt{3}) \Rightarrow \alpha_z = \tan^{-1}(-\sqrt{3}) + \pi$ ⚠ Ver donde se ubica el nro gráficamente

Ejercicio 2

1. $3z = 6z + 7i \Rightarrow z = -\frac{7}{3}i$
2. $z^2 + z + 1 = 0 \Rightarrow z_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{3}i}{2}$
3. $z^2 - 8i + 6 = 0 \Rightarrow z^2 = 8i - 6 = (a+bi)^2 = a^2 + 2abi - b^2$

$$\begin{cases} a^2 - b^2 = -6 \\ 2ab = 8 \Rightarrow a = 4/b \end{cases}$$

$\Rightarrow \frac{16}{b^2} - b^2 = -6 \Rightarrow -b^4 + 6b^2 + 16 = 0 \Rightarrow -B^2 + 6B + 16 = 0$ dnd $B = b^2 \Rightarrow B = 8 \vee B = -2 \Rightarrow b = \pm 2\sqrt{2}$

- Si $b = 2\sqrt{2}$, $a = \sqrt{2} \Rightarrow z = \sqrt{2} + 2\sqrt{2}i$
- Si $b = -2\sqrt{2}$, $a = -\sqrt{2} \Rightarrow z = -\sqrt{2} - 2\sqrt{2}i$

4. $z^5 = 1 \Rightarrow z = e^{\frac{2k\pi}{5}i}, \forall k \in \mathbb{Z}$
5. $\frac{1}{z} = z \Rightarrow z^2 = 1 \Rightarrow z = e^{k\pi i}, \forall k \in \mathbb{Z}$

Ejercicio 3

1. $f: \mathbb{N} \to \mathbb{N} / f(x) = 2x$ es función y es una relación binaria $\Rightarrow R = \{(x,y) \in \mathbb{N}^2 / y = 2x\}$
2. $f: \mathbb{Q}^2 \to \mathbb{Q} / f(x,y) = 1-x-y$ es función y es una relación 3-aria $\Rightarrow R = \{(x,y,z) \in \mathbb{Q}^3 / z = 1-x-y\}$
3. No es una función pues un animal puede relacionarse c/ 1+ animales de su misma especie.

$\Rightarrow R = \{(x,y) \in A^2 / x$ e y pertenecen a una misma especie$\}$ es una relación binaria

4. $R = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 / x^2+y^2+z^2 = 4\}$ es una relación 3-aria PERO no es función pues $(0,0,2) \in R$ y $(0,0,-2) \in R$ pero $2 \neq -2$
5. $R = \{(p,q,z,w) \in \mathbb{C}^4 / p+q = \overline{z+w}\}$ es una relación 4-aria y es función
6. $R = \{(a,b),(a,c),(b,c),(b,b)\}$ es una relación binaria PERO no es función pues $(a,b),(a,c) \in R$ pero $b \neq c$
7. $R = \{(x,x,x^2)/x \in \mathbb{R}\}$ es una relación 4-aria y es una función $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3 / f(x) = (x,x,x^2)$
8. $R = \{(x,y) \in P / x$ es hijo de $y\}$ es una relación binaria PERO no es función pues $(x,y),(x,z) \in R$ dnd y = madre, z = padre $\Rightarrow y \neq z$

Ejercicio 4

1. $R = \{(x,y) \in \mathbb{N}^2 / x = y^2\}$

- $xRx \Leftrightarrow x = x^2$ ABS! $\Rightarrow$ NO es reflexiva
- $xRy \Rightarrow x = y^2 \Rightarrow y \neq x^2 \Rightarrow y \not R x \Rightarrow$ NO es simétrica
- $xRy \wedge yRx \Rightarrow x = y^2 \wedge y = x^2 \Rightarrow \sqrt{x} = x^2$ ABS! $\Rightarrow$ NO es antisimétrica
- $xRy \wedge yRz \Rightarrow x = y^2 \wedge y = z^2 \Rightarrow x = z^4 \Rightarrow x \not R z \Rightarrow$ NO es transitiva

↳ NO es relación de equivalencia ni de orden

2. $R = \{(x,y) \in \mathbb{Q}^2 / x - y \in \mathbb{Z}\}$

- $x - x = 0 \in \mathbb{Z} \Rightarrow xRx \Rightarrow$ es reflexiva
- $xRy \Rightarrow x-y \in \mathbb{Z} \Rightarrow -(x-y) \in \mathbb{Z} \Rightarrow y-x \in \mathbb{Z} \Rightarrow yRx \Rightarrow$ es simetrica
- $2R4 \wedge 4R2$ PERO $4 \neq 2 \Rightarrow$ NO es antisimetrica
- $xRy \wedge yRz \Rightarrow x-y \in \mathbb{Z} \wedge y-z \in \mathbb{Z} \Rightarrow (x-y)+(y-z) \in \mathbb{Z}$ pues $\mathbb{Z}+\mathbb{Z}=\mathbb{Z} \Rightarrow x-z \in \mathbb{Z} \Rightarrow xRz \Rightarrow$ es transitiva

↳ es relacion de equivalencia

3. $R = \{(a,a),(a,b),(b,b),(b,c),(c,c),(d,d)\}$

- $yRy \;\; \forall y \in X \Rightarrow$ es reflexiva
- aRb PERO $b \not R a \Rightarrow$ NO es simetrica
- $(aRb \wedge b\not R a)$ y $(bRc \wedge c \not R b) \Rightarrow$ es antisimetrica
- $aRb \wedge bRc$ PERO $a \not R c \Rightarrow$ NO es transitiva

↳ NO es relacion de equivalencia ni de orden

4. $R = \{(z,\omega) \in \mathbb{C}^2 / z^3 = \omega^3\}$

- $z^3 = z^3 \Rightarrow zRz \Rightarrow$ es reflexiva
- $zR\omega \Rightarrow z^3 = \omega^3 \Rightarrow \omega^3 = z^3 \Rightarrow \omega R z \Rightarrow$ es simetrica
- $z = e^{\frac{2\pi}{3}i}$ y $\omega = e^{\frac{4\pi}{3}i} \Rightarrow z^3 = \omega^3 = 1 \Rightarrow zR\omega \wedge \omega R z$ PERO $z \neq \omega \Rightarrow$ NO es antisimetrica
- $zR\omega \wedge \omega R x \Rightarrow z^3 = \omega^3 \wedge \omega^3 = x^3 \Rightarrow z^3 = x^3 \Rightarrow$ es transitiva

↳ es relacion de equivalencia

Ejercicio 5

Si, puede ser.

Ej. $R = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / x = y\}$

- $xRy \Rightarrow yRx$ pues $x=y \wedge y=x \Rightarrow$ es simetrica
- $xRy \wedge yRx \Rightarrow x=y \wedge y=x \Rightarrow x=y \Rightarrow$ es antisimetrica

Ejercicio 6

1. $R = \{(x,y) \in \mathbb{Z}^2 / x-y = 3n, n \in \mathbb{Z}\} \Rightarrow \mathbb{Z}_3 = \{[0],[1],[2]\} \Rightarrow \#\mathbb{Z}_3 = 3$
2. $R = \{(a,a),(b,b),(c,c),(b,c),(c,b)\} \Rightarrow X_2 = \{[a],[b]\} \Rightarrow \#X_2 = 2$
3. $R = \{(z,\omega) \in (\mathbb{C}-\{0\})^2 / \arg(z) = \arg(\omega)\} \Rightarrow X/R = \{$todos los argumentos entre 0 incluido y 2π excluido$\} \Rightarrow \# X/R = c$

Ejercicio 7

La cant de relaciones de eq en P = cant de particiones sobre A

- 1 conj en la particion: 1
- 2 conj en la particion: 7
- 3 conj en la particion: 6
- 4 conj en la particion: 1

} 15 particiones posibles = 14 relaciones de equivalencias

Ejercicio 8

1. $f: \mathbb{N} \to \mathbb{N} / f(x) = x+1 \Rightarrow Dom(f) = \mathbb{N}$ y $Im(f) = \mathbb{N} - \{0\}$
2. $f: \mathbb{R} \to \mathbb{Z} / f(x) = [x] \Rightarrow Dom(f) = \mathbb{R}$ y $Im(f) = \mathbb{Z}$
3. $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} / f(x,y) = x+y \Rightarrow Dom(f) = \mathbb{R}^2$ y $Im(f) = \mathbb{R}$
4. $f: \mathbb{N} \to \mathbb{N} / f(n) = (n+1)$-esimo nro primo $\Rightarrow Dom(f) = \mathbb{N}$ y $Im(f) =$ todos los nros primos

Ejercicio 9

1. $f: \mathbb{N} \to \mathbb{N} / f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x = 1 \\ \vdots & \\ k & \text{sino} \end{cases}$ Ej. Si $k = 3 \Rightarrow f: \mathbb{N} \to \mathbb{N} / f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x = 1 \\ 2 & \text{si } x = 2 \\ 3 & \text{sino} \end{cases}$

2. $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R} / f(x) = |[x]|$

Ejercicio 10

1. $f: \mathbb{N} \to \mathbb{N} / f(n) = n, \forall n \geq 3$ sino $f(0) = 1, f(1) = 2, f(2) = 0$

Veamos que es inyectiva:

- Si $x = 0$ e $y = 1$ $(x \neq y) \Rightarrow f(0) = 1 \neq f(1) = 2$
- Si $x = 1$ e $y = 2$ $(x \neq y) \Rightarrow f(1) = 2 \neq f(2) = 0$
- Si $x = 2$ e $y = 0$ $(x \neq y) \Rightarrow f(2) = 0 \neq f(0) = 1$
- Si $x = 0,1,2$ e $y \geq 3 \Rightarrow f(x) = 0,1,2 \neq f(y) \geq 3$

- Sean $x, y \geq 3$, $f(x) = f(y) \Rightarrow x = y$

Veamos que es sobreyectiva:

Sea $n \in \mathbb{N}$.

- Si $n=0$, $n=1$ ó $n=2 \Rightarrow f(0)=1$, $f(1)=2$ y $f(2)=0$
- Si $n \geq 3 \Rightarrow f(n) = n$

Calculamos su inversa:

$f^{-1}: \mathbb{N} \to \mathbb{N} / f^{-1}(n) = n$ p/ $n \geq 3$, $f^{-1}(0) = 2$, $f^{-1}(1) = 0$ y $f^{-1}(2) = 1$

2. $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R} / f(x) = \begin{cases} -3x & \text{si } x \geq 0 \\ -x & \text{si } x < 0 \end{cases}$

Veamos que es inyectiva:

- Sean $x, y \geq 0 \Rightarrow f(x) = f(y) \Rightarrow -3x = -3y \Rightarrow x = y$
- Sean $x, y < 0 \Rightarrow f(x) = f(y) \Rightarrow -x = -y$
- Sea $x \geq 0$ e $y < 0 \Rightarrow x \neq y \Rightarrow f(x) = -3x$ y $f(y) = -y \Rightarrow f(x) \neq f(y)$ pues $f(x) \leq 0$ y $f(y) > 0$

Veamos que es sobreyectiva:

Sea $b \in \mathbb{R}$.

- Si $b \leq 0 \Rightarrow -b/3 \geq 0 \Rightarrow f(-b/3) = -3(-b/3) = b$
- Si $b > 0 \Rightarrow -b < 0 \Rightarrow f(-b) = b$

Calculamos su inversa:

$f^{-1}: \mathbb{R} \to \mathbb{R} / f^{-1}(x) = \begin{cases} -x & \text{si } x > 0 \\ -x/3 & \text{si } x \leq 0 \end{cases}$

Ejercicio 11

1. $f: \mathbb{C} \to \mathbb{C} / f(z) = z.|z|$

Sean $z = e^{2\pi i}$ y $w = e^{4\pi i} \Rightarrow f(z) = z.|z| = 1$ y $f(w) = w.|w| = 1$ PERO $z \neq w \Rightarrow$ no es inyectiva $\Rightarrow$ NO es biyectiva

2. $g: \mathbb{C} \to \mathbb{C} / f(z) = z^3$

Sean $z = e^{\frac{2\pi}{3} i}$ y $w = e^{\frac{4\pi}{3} i} \Rightarrow f(z) = z^3 = 1$ y $f(w) = w^3 = 1$ PERO $z \neq w \Rightarrow$ no es inyectiva $\Rightarrow$ NO es biyectiva

Ejercicio 12

1. $f: \mathbb{R}_{\geq 0} \to \mathbb{R} / f(x) = -5x \Rightarrow g: \mathbb{R} \to \mathbb{R} / g(x) = -5x$ es extensión pues $\forall x \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ se cumple q $g(x) = -5x = f(x)$

2. $f: \mathbb{R} - \{0\} \to \mathbb{R} / f(x) = \begin{cases} 7x & x > 0 \\ -5x & x < 0 \end{cases} \Rightarrow g: \mathbb{R} \to \mathbb{R} / g(x) = \begin{cases} 7x & x > 0 \\ 0 & x = 0 \\ -5x & x < 0 \end{cases}$ es extensión pues $\forall x \in \mathbb{R} - \{0\}$ se cumple q $g(x) = f(x)$

3. $f: \mathbb{R} - \{3\} \to \mathbb{R} / f(x) = \begin{cases} x^2 - 8 & x > 3 \\ 5x - 14 & x < 3 \end{cases} \Rightarrow g: \mathbb{R} \to \mathbb{R} / g(x) = \begin{cases} x^2 - 8 & x > 3 \\ 1 & x = 3 \\ 5x - 14 & x < 3 \end{cases}$ es extensión pues $\forall x \in \mathbb{R} - \{3\}$ se cumple q $g(x) = f(x)$

4. $f: \mathbb{R} - \{-1\} \to \mathbb{R} / f(x) = \begin{cases} x+1 & x > -1 \\ x^2 + 1 & x < -1 \end{cases} \Rightarrow g: \mathbb{R} \to \mathbb{R} / g(x) = \begin{cases} x+1 & x > -1 \\ h(x) & x = -1 \\ x^2 + 1 & x < 1 \end{cases}$ es extensión pues $\forall x \in \mathbb{R} - \{-1\}$ se cumple q $g(x) = f(x)$

⚠ Ninguna de las extensiones es única $\Rightarrow$ existen infinitas extensiones

Ejercicio 13

1. Misma extensión PERO no es única
2. Misma extensión y es única
3. Misma extensión y es única
4. No $\exists$ extensión continua pues $\lim_{x \to -1^+} (x+1) = 0 \neq \lim_{x \to -1^-} x^2 + 1 = 2$

Ejercicio 14

1. $\bar{f}: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3 / \bar{f}(x, y) = \begin{cases} (3, 0, 1) & \text{si } x = 1 \wedge y = 2 \\ (6, 7, 8) & \text{si } x = 0 \wedge y = 5 \\ (x, y, x+y) & \text{sino} \end{cases} \Rightarrow$ NO es única

2. $\bar{f}: \mathbb{R}_2[x] \to \mathbb{R}_4[x] / \bar{f}(P(x)) = \begin{cases} x^4 & \text{si } P(x) = x+1 \\ x & \text{si } P(x) = -2 \\ x^2 & \text{sino} \end{cases} \Rightarrow$ NO es única