2020 2C EJ1

domingo, 11 de abril de 2021 07:18 p. m.

Sea α fórmula tal que la variable p_1 aparece m veces en α.
Sea $\alpha(\beta)$ la fórmula que se obtiene reemplazando todas las apariciones de p_1 en α por β.
Entonces $c(\alpha(\beta)) = c(\alpha) + m c(\beta)$

Inducción en $c(\alpha)$:

CB) $n=0 \Rightarrow \alpha \in VAR$

c1) $\alpha = p_1 \Rightarrow \alpha(\beta) = \beta \Rightarrow c(\alpha(\beta)) = c(\beta) = \underbrace{0}_{c(\alpha)} + \underbrace{1}_{m} \cdot c(\beta)$ ✓

c2) $\alpha = p_j \;\; j \neq 1 \Rightarrow \alpha(\beta) = p_j \Rightarrow c(\alpha(\beta)) = 0 = \underbrace{0}_{c(\alpha)} + \underbrace{0}_{m} \cdot c(\beta)$ ✓

HI) $c(\alpha) = k \Rightarrow c(\alpha(\beta)) = c(\alpha) + m c(\beta) \quad k \leq n$

TI) $c(\alpha) = n+1 \Rightarrow c(\alpha(\beta)) = c(\alpha) + m c(\beta)$

Sea $\alpha \in F / c(\alpha) = n+1$

c1) $\alpha = \neg\gamma$, $\gamma \in F$, $c(\alpha) = 1 + c(\gamma) \Rightarrow c(\gamma) = c(\alpha) - 1$

$\Rightarrow c(\gamma) = n \underset{HI}{\Rightarrow} c(\gamma(\beta)) = c(\gamma) + m c(\beta) \Rightarrow c(\alpha(\beta)) = 1 + c(\gamma(\beta)) = 1 + c(\gamma) + m c(\beta) = c(\alpha) + m c(\beta)$

↳ pues si hay m p_1 en α tambien los hay en γ.

c2) $\alpha = \gamma_1 * \gamma_2$, $\gamma_1, \gamma_2 \in F$, $* = \{\wedge, \vee, \rightarrow\}$

$c(\alpha) = 1 + c(\gamma_1) + c(\gamma_2) \Rightarrow c(\gamma_1) \leq n$ y $c(\gamma_2) < n$

$$\underset{HI}{\begin{cases} c(\gamma_1(\beta)) = c(\gamma_1) + m_1 c(\beta) \\ c(\gamma_2(\beta)) = c(\gamma_2) + m_2 c(\beta) \end{cases}} \quad \text{donde } m = m_1 + m_2$$

$$\Rightarrow c(\alpha(\beta)) = 1 + c(\gamma_1(\beta)) + c(\gamma_2(\beta)) = \overbrace{1 + c(\gamma_1) + c(\gamma_2)}^{c(\alpha)} + \overbrace{m_1 c(\beta) + m_2 c(\beta)}^{m\,c(\beta)} = c(\alpha) + m c(\beta)$$

2020 2C EJ2

domingo, 11 de abril de 2021 08:12 p. m.

Decidir si el siguiente conjunto de fórmulas es una base:

$\Gamma = \{p_{2n+1} : n \text{ es natural}\}$

- ind: $\forall \alpha \in \Gamma$, $\alpha \notin C(\Gamma - \{\alpha\})$. $\Gamma = \{p_1, p_3, p_5, \dots\}$
- max: $\forall \beta \notin \Gamma$, $\Gamma \cup \{\beta\}$ es dependiente $\Rightarrow \forall \beta \notin \Gamma$, $\exists \gamma \in \Gamma \cup \{\beta\} / \gamma \in C(\Gamma - \{\gamma\})$

Defino $\Sigma = \Gamma \cup \{p_2\}$, $p_2 \notin \Gamma$ por def del cjto.

qvq Σ es independiente:

c1) Tomo $p_{2i+1} \in \Gamma$. Defino $f: VAR \to \{0,1\} / f(p_j) = \begin{cases} 0 & \text{si } j = 2i+1 \\ 1 & \text{si no} \end{cases}$. Sea v_f la val que extiende a f.

$v_f(\Sigma - \{p_{2i+1}\}) = 1$ y $v_f(p_{2i+1}) = 0$

$\therefore p_{2i+1} \notin \Sigma - \{p_{2i+1}\}$

c2) Tomo $p_2 \in \Sigma - \Gamma$. Defino $g: VAR \to \{0,1\} / f(p_j) = \begin{cases} 0 & \text{si } j = 2 \\ 1 & \text{si no} \end{cases}$. Sea v_g la val que extiende a g.

$v_g(\Sigma - \{p_2\}) = v_g(\Gamma) = 1$ y $v_g(p_2) = 0$

$\therefore p_2 \notin \Sigma - \{p_2\}$

$\therefore \Sigma$ es independiente $\Rightarrow \exists \beta = p_2 \notin \Gamma / \Gamma \cup \{\beta\}$ es independiente $\Rightarrow \Gamma$ no es maximal con respecto a la independencia.

2020 2C EJ3

domingo, 11 de abril de 2021 08:46 p. m.

> Sea α una fórmula que no posee el conectivo $\neg$ y sea β una contingencia tales que $Var(\alpha) \cap Var(\beta) = \emptyset$.
> Probar que $(\alpha \wedge \beta)$ es contingencia

- β contingencia $\Rightarrow \exists\ v_\beta^1$ val / $v_\beta^1(\beta) = 1$ y $\exists\ v_\beta^0$ val / $v_\beta^0(\beta) = 0$
- Sea α una fórmula que no posee el conectivo $\neg \Rightarrow \alpha$ no es una contradicción

Defino $f: VAR \to \{0,1\}$ / $f(p_j) = 1\ \forall j \in \mathbb{N}$, y sea v_f la val que extiende a f. qvq $V_f(\alpha) = 1$.

Inducción en $c(\alpha)$:

P(K): $\alpha \in F$ / α no posee el conectivo $\neg$ y $c(\alpha) = k \Rightarrow v_f(\alpha) = 1$

CB) $c(\alpha) = 0 \Rightarrow \alpha \in VAR \Rightarrow v_f(\alpha) = 1$

HI) $P(k)\ \forall k \leq n$

TI) $P(n+1)$

Sea $\alpha \in F$ sin "$\neg$" y $c(\alpha) = n+1$

$\Rightarrow \alpha = \beta_1 * \beta_2$, $* = \{\wedge, \vee, \to\}$, $\beta_1, \beta_2 \in F$

C1) $\alpha = \beta_1 \wedge \beta_2$

$\Rightarrow c(\beta_1) \leq n,\ c(\beta_2) \leq n \underset{HI}{\Rightarrow} v_f(\beta_1) = 1$ y $V_f(\beta_2) = 1 \Rightarrow V_f(\alpha) = V_f(\beta_1 \wedge \beta_2) = \min\{\overbrace{v_f(\beta_1)}^{1}, \overbrace{V_f(\beta_2)}^{1}\} = 1$

C2) $\alpha = \beta_1 \vee \beta_2$

$\Rightarrow c(\beta_1) \leq n,\ c(\beta_2) \leq n \underset{HI}{\Rightarrow} v_f(\beta_1) = 1$ y $V_f(\beta_2) = 1 \Rightarrow V_f(\alpha) = V_f(\beta_1 \vee \beta_2) = \max\{\overbrace{v_f(\beta_1)}^{1}, \overbrace{V_f(\beta_2)}^{1}\} = 1$

C3) $\alpha = \beta_1 \to \beta_2$

$\Rightarrow c(\beta_1) \leq n,\ c(\beta_2) \leq n \underset{HI}{\Rightarrow} v_f(\beta_1) = 1$ y $V_f(\beta_2) = 1 \Rightarrow V_f(\alpha) = V_f(\beta_1 \to \beta_2) = \max\{1 - v_f(\beta_1), \overbrace{V_f(\beta_2)}^{1}\} = 1$

$\therefore V_f(\alpha) = 1 \Rightarrow \alpha$ no es una contradicción $\Rightarrow \exists\ V_\alpha^1$ val / $V_\alpha^1(\alpha) = 1$

---

1) Sea $g: VAR \to \{0,1\}$ / $g(p_i) = \begin{cases} v_\beta^0(\beta) & \text{si } p_j \in VAR(\beta) \\ 0 & \text{si no} \end{cases}$. Sea V_g la val que extiende a g.

$\Rightarrow V_g(\alpha \wedge \beta) = \min\{V_g(\alpha), V_g(\beta)\} = 0$

↳ $V_g\big|_{VAR(\beta)} = V_\beta^0\big|_{VAR(\beta)} \Rightarrow V_g(\beta) = V_\beta^0(\beta) = 0$

2) Sea $h: VAR \to \{0,1\} / h(p_j) = \begin{cases} V_\beta^1(p_j) & \text{si } p_j \in VAR(\beta) \\ V_\alpha^1(p_j) & \text{si } p_j \in VAR(\alpha) \\ 0 & \text{si no} \end{cases}$ Sea V_h la val que extiende a h.

↳ Bien definido $VAR(\alpha) \cap VAR(\beta) = \emptyset$

$\Rightarrow V_g(\alpha \wedge \beta) = \min\{V_g(\alpha), V_g(\beta)\} = 1$

↳ $V_g\big|_{VAR(\beta)} = V_\beta^1\big|_{VAR(\beta)} \Rightarrow V_g^1(\beta) = V_\beta^1(\beta) = 1$

↳ $V_g\big|_{VAR(\alpha)} = V_\alpha^1\big|_{VAR(\alpha)} \Rightarrow V_g^1(\alpha) = V_\beta^1(\alpha) = 1$

2020 2C EJ4

domingo, 11 de abril de 2021 11:03 p. m.

Sea $\Sigma = \{(p_{2n} \wedge \neg p_{2n+1}) : n \in \mathbb{N}\}$ y
sea Γ un conjunto de fórmulas que verifica que

si $\alpha \in \Gamma$ entonces $\{\alpha\} \cup \Sigma$ es satisfacible

Probar que Γ es satisfacible.

$\Sigma = \{(p_0 \wedge \neg p_1), (p_2 \wedge \neg p_3), (p_4 \wedge \neg p_5), (p_6 \wedge \neg p_7), \dots\}$

- Como $\{\alpha\} \cup \Sigma$ es sat $\Rightarrow \Sigma$ es sat. Sea v val $/ v(\Sigma) = 1 \Rightarrow v(p_{2n} \wedge \neg p_{2n+1}) = 1 \quad \forall n \in \mathbb{N}$

  $\Longleftrightarrow \min\{v(p_{2n}), v(\neg p_{2n+1})\} = 1 \quad \forall n \in \mathbb{N} \Longleftrightarrow v(p_{2n}) = 1$ y $v(p_{2n+1}) = 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}$

- Dada $f : VAR \to \{0,1\} / f(p_j) = \begin{cases} 1 & \text{si } j = 2n \\ 0 & \text{si } j = 2n+1 \end{cases}$. Sea v_f la val que extiende a f.

$\Rightarrow v = v_f$ ÚNICA V QUE SATISFACE A Σ.

Como $\forall \alpha \in \Gamma$, $\{\alpha\} \cup \Sigma$ es sat. $\Rightarrow v(\{\alpha\} \cup \Sigma) = 1 \quad \forall \alpha \in \Gamma$ pues es la única que satisface a Σ.

$\Rightarrow v(\alpha) = 1 \quad \forall \alpha \in \Gamma \Rightarrow v(\Gamma) = 1 \Rightarrow \Gamma$ es sat.

2020 2C EJ5

domingo, 11 de abril de 2021 11:30 p. m.

Decidir si el conjunto de conectivos C={+,x} es adecuado, siendo:

$(p_1 + p_2) = (\overbrace{\neg\underbrace{(p_1 \wedge \neg p_1)}_{0}}^{1} \wedge \neg p_2)$ → CONTINGENCIA

$(p_1 x p_2) = (\neg p_1 \to \neg p_2)$ → CONTINGENCIA

Justificar.

$$\begin{cases} (\neg(\alpha \wedge \neg\alpha) \wedge \neg\beta) = (\alpha + \beta) \\ (\neg\alpha \longrightarrow \neg\beta) = (\alpha x \beta) \end{cases}$$

$$\begin{cases} v(p_1 + p_2) = \min\{1 - \overbrace{\min\{v(p_1), 1 - v(p_1)\}}^{0}, 1 - v(p_2)\} \\ = \min\{1, 1 - v(p_2)\} = 1 - v(p_2) = v(\neg p_2). \end{cases}$$

$$\begin{cases} v(p_1 x p_2) = \max\{1 - (1 - v(p_1)), 1 - v(p_2)\} \\ = \max\{v(p_1), 1 - v(p_2)\} = \max\{1 - v(p_2), v(p_1)\} = v(p_2 \to p_1) \end{cases}$$

- $\neg\alpha \equiv (\alpha + \alpha)$
- $(\alpha \to \beta) \equiv (\beta x \alpha)$

Como $\{\to, \wedge\}$ es adecuado $\Rightarrow$ C es adecuado.

2020 2C EJ6

lunes, 12 de abril de 2021 12:17 a. m.

Decidir si la siguiente afirmación es verdadera o falsa

Sean Γ_1 y Γ_2 bases tales que $\Gamma_1 \cap \Gamma_2 = \emptyset$ entonces $\Gamma_1 = \Gamma_2$

FALSO

Leí mal la consigna, después lo hago con la consigna correcta. (2020 2C EJ13)

- $\Gamma_1 = \{p_1, \neg p_1\}$
- $\Gamma_2 = \{p_2, \neg p_2\}$

bases.

- Demo sobre Γ_1.

1) Defino $f: VAR \to \{0,1\} / f(p_j) = 0$. Sea V_f la val que extiende a f.

$\Rightarrow V_f(\neg p_1) = 1$ y $V_f(p_1) = 0 \Rightarrow p_1 \notin C(\neg p_1)$

2) Defino $f': VAR \to \{0,1\} / f(p_j) = 1$. Sea V_f' la val que extiende a f'.

$\Rightarrow V_f'(\neg p_1) = 0$ y $V_f'(p_1) = 1 \Rightarrow \neg p_1 \notin C(p_1)$

$\therefore \Gamma_1$ es independiente.

- Supongo que Γ_1 no es max. con respecto a la ind. $\Rightarrow \exists \alpha \notin \Gamma_1 / \Sigma = \Gamma_1 \cup \{\alpha\}$ es ind.

Γ_1 es insat $\Rightarrow C(\Gamma_1) = Form$

Pero $\alpha \in C(\Sigma - \{\alpha\})$ ABS! $\therefore \Gamma_1$ es base.

- Análogo Γ_2 $\therefore \Gamma_2$ es base.

$\Gamma_1 \cap \Gamma_2 = \emptyset$ pero $\Gamma_1 \neq \Gamma_2$

2020 2C EJ7

lunes, 12 de abril de 2021 12:44 a. m.

Decidir si la siguiente afirmación es Verdadera o Falsa. Justificar

Sea Γ un conjunto consistente, y sean v y w valuaciones distintas que verifican $v(\Gamma) = w(\Gamma) = 1$, entonces Γ no es maximal consistente.

- Supongo que Γ es maximal consistente

Como $v \neq w \Rightarrow \exists\, p_j \,/\, v(p_j) \neq w(p_j)$

C1) $p_j \in \Gamma$ como $V(\Gamma) = 1 \Rightarrow v(p_j) = 1$
$w(\Gamma) = 1 \Rightarrow w(p_j) = 1$

C2) $p_j \notin \Gamma \underset{m.c}{\Rightarrow} \neg p_j \in \Gamma$ como $V(\Gamma) = 1 \Rightarrow v(p_j) = 0$
$w(\Gamma) = 1 \Rightarrow w(p_j) = 0$ ABS! $\therefore$ Γ no es max. consistente.

2020 2C EJ8

lunes, 12 de abril de 2021 01:00 a. m.

Sea Γ un conjunto de fórmulas tal que ninguna posee el conectivo $\neg$.
Probar que Γ es finitamente satisfacible

Anteriormente probé que para cualquier fórmula que no posea el conectivo not, la valuación que extiende a la función que retorna un 1 para cualquier variable satisface a dicha fórmula. Por lo tanto como lo probé para una fórmula genérica, esta valuación satisfacerá a todas las fórmulas que pertenezcan a Gamma, por lo tanto Gamma es satisfacible y entonces por compacidad es finitamente satisfacible.

2020 2C EJ9

lunes, 12 de abril de 2021 01:04 a. m.

Hallar dos cadenas de formación de la siguiente fórmula, una de ellas minimal. Justificar

$\alpha = \neg\neg(p_1 \vee p_1)$

$S(\alpha) = \{\alpha\} \cup S(\neg(p_1 \vee p_1)) = \{\alpha\} \cup \{\neg(p_1 \vee p_1)\} \cup \{(p_1 \vee p_1)\} = \{\alpha\} \cup \{\neg(p_1 \vee p_1)\} \cup \{(p_1 \vee p_1)\} \cup \{p_1\}$

$\Rightarrow \#S(\alpha) = 4$

1) $X_1 = p_1 \quad X_2 = p_2 \quad X_3 = (X_1 \vee X_1) \quad X_4 = \neg X_3 \quad X_5 = \neg X_4 = \alpha$

$X_1 X_2 X_3 X_4 X_5$ es c.f. de α

2) $X_1 = p_1 \quad X_2 = (X_1 \vee X_1) \quad X_3 = \neg X_2 \quad X_4 = \neg X_3 = \alpha$

$X_1 X_2 X_3 X_4$ es c.f. de α cant. de eslabones $= 4 \Rightarrow$ c.f minimal.

2020 2C EJ10

lunes, 12 de abril de 2021 12:55 a. m.

Hallar el cardinal de X siendo:

$X = \{(x,y) \in \mathbb{Q}^2 / x + y - 8 = 0\}$

$X = \{(x, y) \in \mathbb{Q}^2 / x + y - 8 = 0\}$

- $X \subset \mathbb{Q}^2 \Rightarrow \#X \leq \aleph_0$

  $\#\mathbb{Q}^2 = \aleph_0$ $\downarrow$ PRÁCTICA

- qvq $\#X \geq \aleph_0$ (si $\exists$ $f: Y \to X$ iny $/ \#Y = \aleph_0$)

  Defino $f: \mathbb{N}_{\geq 1} \to X / f(x) = \left(\frac{1}{x}, 8 - \frac{1}{x}\right)$ (buena def: $\frac{1}{x} + 8 - \frac{1}{x} + 8 = 0$ y $\frac{1}{x} \in \mathbb{Q}$ y $8 - \frac{1}{x} \in \mathbb{Q}$)

iny) Si $f(x) = f(y) \Rightarrow \left(\frac{1}{x}, 8 - \frac{1}{x}\right) = \left(\frac{1}{y}, 8 - \frac{1}{y}\right) \Rightarrow \frac{1}{x} = \frac{1}{y}$ y $8 - \frac{1}{x} = 8 - \frac{1}{y} \Rightarrow x = y$ $\therefore$ Como $\#\mathbb{N}_{\geq 1} = \aleph_0$

$\Rightarrow \#X \geq \aleph_0$ $\therefore \#X = \aleph_0$

2020 2C EJ11

lunes, 12 de abril de 2021 01:03 a. m.

Hallar el cardinal del conjunto de sucesiones de números reales acotadas.

CARD. DE UNA FUNCIÓN

1) $\mathcal{X} = \{ f : \mathbb{N} \to \mathbb{R} \ / \ f \text{ es acotada} \} \subset \{ f : \mathbb{N} \to \mathbb{R} \} \Rightarrow \# \mathcal{X} \leq \# \{ f : \mathbb{N} \to \mathbb{R} \} = c^{\aleph_0} = c$

ALG. DE CARD.

2) Defino $g : (0,1) \to \mathcal{X} \ / \ g(0,b_1 b_2 b_3 \ldots) = b_1 b_2 b_3 \ldots$ donde $f(i) = b_i$

Tomamos $x \in Dom(g)$ de manera tal que su escitura no tenga cola de 9's.

$\Rightarrow$ g bien definida como función ya que además la imagen son funciones acotadas entre 0 y 9, números naturales (que son reales)

iny) Si $g(x) = g(y) \Rightarrow b_1 b_2 b_3 \ldots = c_1 c_2 c_3 \ldots \Rightarrow b_i = c_i \Rightarrow x = y$ $\therefore$ g es iny

POR SER FUNCIONES

$x = 0{,}b_1 b_2 b_3 \ldots$

$y = 0{,}c_1 c_2 c_3 \ldots$

$\therefore \ c \leq \#(0,1) \leq \# \mathcal{X} \Rightarrow \# \mathcal{X} = c$

2020 2C EJ12

lunes, 12 de abril de 2021 01:04 a. m.

Hallar el cardinal del conjunto de sucesiones de números racionales estrictamente crecientes

1) $\mathcal{X} = \{ f : \mathbb{N} \to \mathbb{Q} \, / \, f \text{ es est. crec.} \} \subset \{ f : \mathbb{N} \to \mathbb{Q} \} \Rightarrow \#\mathcal{X} \leq \# \{ f : \mathbb{N} \to \mathbb{Q} \} = \aleph_0^{\aleph_0} = c$

2) Defino $g : P_{inf}(\mathbb{N}) \to \mathcal{X} \, / \, g(A) = f_A$

De esta manera:

- $P_{inf}(\mathbb{N}) = \{ A \in P(\mathbb{N}) \, / \, A \text{ es infinito} \}$
- Como A es un cjto de núm. naturales, sus elementos pueden ordenarse crecientemente

$\Rightarrow f(0) = \min(A)$, $f(1) = \min(A - \{f(0)\}) \Rightarrow f(1) > f(0)$ y así sucesivamente.

iny) $g(A) = g(B) \Rightarrow f_A = f_B \Rightarrow f_A(n) = f_B(n) \; \forall n \in \mathbb{N} \Rightarrow$ La sucesión me devuelve los mismos $q \in \mathbb{Q}$

$\Rightarrow Im(f_A) = Im(f_B) \Rightarrow A = B \quad \therefore \quad g$ es iny

$\Rightarrow c \leq \# P_{inf}(\mathbb{N}) \leq \#\mathcal{X} \Rightarrow \#\mathcal{X} = c$

2020 2C EJ13

lunes, 12 de abril de 2021 07:36 p. m.

Decidir si la siguiente afirmación es verdadera o falsa

Sean Γ_1 y Γ_2 bases tales que $\Gamma_1 \cap \Gamma_2 \neq \emptyset$ entonces $\Gamma_1 = \Gamma_2$

$\Gamma = (VAR - \{p_1\}) \cup \{\neg p_1\}$

ind)

c1) Sea $p_i \in VAR - \{p_1\}$. Defino $f: VAR \to \{0,1\} / f(p_j) = \begin{cases} 0 & \text{si } j = i \\ 0 & \text{si } j = 1 \\ 1 & \text{si no} \end{cases}$. Sea V_f la val que extiende a f.

$\Rightarrow V_f(((VAR - \{p_1\}) - \{p_i\}) \cup \{\neg p_1\}) = 1$

y $V_f(p_i) = 0 \quad \therefore \quad p_i \notin C(\Gamma - \{p_i\})$

c2) Tomo $\neg p_1 \in \Gamma$. Defino $g: VAR \to \{0,1\} / g(p_j) = 1$ Sea V_g la val que extiende a g.

$\Rightarrow V(VAR - \{p_1\}) = 1$

y $V_g(\neg p_1) = 0 \quad \therefore \quad \neg p_1 \notin C(\Gamma - \{\neg p_1\})$

$\therefore \ \forall \alpha \in \Gamma$ se tiene que $\alpha \notin C(\Gamma - \{\alpha\}) \Rightarrow \Gamma$ es ind.

max) Sea $\alpha \notin \Gamma$, $\Sigma = \Gamma \cup \{\alpha\}$

Sea v val / $v(\Gamma) = 1 \Rightarrow v(p_i) = 1 \ \forall \ i \neq 1$ y $V(p_1) = 0$

Dada $f: VAR \to \{0,1\} / f(p_j) = \begin{cases} 1 & \text{si } j \neq 1 \\ 0 & \text{si } j = 1 \end{cases}$. Sea V_f la val que extiende a f.

$V_f\big|_{VAR(\Gamma)} = V\big|_{VAR(\Gamma)} \Rightarrow V_f = V$ ÚNICA VAL QUE SATISFACE A Γ.

Considero dos casos:

1) $v(\alpha) = 1 \Rightarrow \alpha \in C(\Gamma) \Rightarrow \alpha \in C(\Sigma - \{\alpha\}) \Rightarrow \Sigma$ es dep.

2) $v(\alpha) = 0 \Rightarrow \Sigma$ es insat $\Rightarrow \exists \ \Sigma' \subset \Sigma / \Sigma$ es finito insat $\Rightarrow C(\Sigma') = F$

Sea $\gamma \in \Sigma \setminus \Sigma' \Rightarrow \Sigma' \subseteq \Sigma - \{\gamma\} \Rightarrow C(\Sigma') \subseteq C(\Sigma - \{\gamma\})$

Como $\gamma \in C(\Sigma') \Rightarrow \gamma \in C(\Sigma - \{\gamma\}) \Rightarrow \Sigma$ es dep.

$VAR \cap \Gamma = VAR - \{p_1\} \neq \emptyset$ y $VAR \neq \Gamma$

2020 1C EJ1

lunes, 12 de abril de 2021 09:12 p. m.

Ejercicio 1. Hallar el cardinal de X, siendo

$$X = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / z = -x^2 - y^2\}$$

1) $X = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / x^2 + y^2 + z = 0\} \subseteq \mathbb{R}^3 \Rightarrow \#\mathbb{R}^3 = c \geq \#X$

2) qvq $\#X \geq c$

Defino $f: \mathbb{R} \to X / f(n) = (n, n, -n^2 - n^2)$

iny) Si $f(x) = f(y) \Rightarrow (x, x, -x^2 - x^2) = (y, y, -y - y^2) \Rightarrow x = y$ $\therefore$ f es iny

$\Rightarrow \#X \leq \#\mathbb{R} = c$

$\Rightarrow \#X = c$

2020 1C EJ2

lunes, 12 de abril de 2021 10:21 p. m.

Ejercicio 2. Hallar dos cadenas de formación de la fórmula $\alpha = ((p_1 \wedge p_2) \vee p_1)$, una de ellas minimal. Justificar.

1) Una posible c.f. de α es:

$X_1 = p_1 \quad X_2 = p_2 \quad X_3 = (X_1 \wedge X_2) = (p_1 \wedge p_2) \quad X_4 = (X_3 \vee X_1) = ((p_1 \wedge p_2) \vee p_1) = \alpha$

2) Otra posible c.f. de α es:

$X_1 = p_1 \quad X_2 = p_2 \quad X_3 = p_3 \quad X_4 = (X_1 \wedge X_2) = (p_1 \wedge p_2) \quad X_5 = (X_4 \vee X_1) = ((p_1 \wedge p_2) \vee p_1) = \alpha$

La primera es minimal pues tiene 4 eslabones y si calculamos $S(\alpha)$:

$S(\alpha) = \{\alpha, (p_1 \wedge p_2), p_1, p_2\}$ tiene 4 elementos $\Rightarrow$ por ej de la práctica toda c.f debe tener al menos 4 eslabones.

2020 1C EJ3

lunes, 12 de abril de 2021 10:17 p. m.

Ejercicio 3. Decidir si el conjunto de conectivos $C = \{+, *\}$ es adecuado, con

$$+(p_1, p_2, p_3) = ((\neg p_1 \vee p_2) \to p_3)$$

$$*(p_1, p_2, p_3) = ((p_1 \wedge p_2) \wedge p_3)$$

- Defino $f: VAR \to \{0,1\} / f(p_j) = 0 \ \forall j \in \mathbb{N}$. Sea v_f la val que extiende a f.
- Defino $\tilde{c}(\alpha)$ como la cant. de conectivos $+$ ó $*$ en $\alpha \in F_c$.

Veamos que $\forall \alpha \in F_c$, $v_f(\alpha) = 1$. Inducción en $c(\alpha)$.

CB) $\tilde{c}(\alpha) = 0 \Rightarrow \alpha \in VAR \Rightarrow v_f(\alpha) = 1$.

HI) $\alpha \in F_c, \tilde{c}(\alpha) \leq n \Rightarrow v_f(\alpha) = 1$.

TI) $\alpha \in F_c, \tilde{c}(\alpha) = n+1 \Rightarrow v_f(\alpha) = 1$.

Sea $\alpha \in F_c$ con $\tilde{c}(\alpha) = n+1$.

c1) $\alpha = +(\beta_1, \beta_2, \beta_3) \Rightarrow \tilde{c}(\alpha) = 1 + \underbrace{\tilde{c}(\beta_1)}_{\geq 0} + \underbrace{\tilde{c}(\beta_2)}_{\geq 0} + \underbrace{\tilde{c}(\beta_3)}_{\geq 0} = n+1 \Rightarrow \tilde{c}(\beta_i) \leq n \ \forall i \in \{1,2,3\}$.

$\underset{HI}{\Rightarrow} v_f(\beta_i) = 1 \ \forall i \in \{1,2,3\}. \Rightarrow v_f(\alpha) = v_f((\neg\beta_1 \vee \beta_2) \to \beta_3)) = \max\{ * , \underbrace{v_f(\beta_3)}_{1}\} = 1$

c2) $\alpha = *(\beta_1, \beta_2, \beta_3) \Rightarrow \tilde{c}(\alpha) = 1 + \underbrace{\tilde{c}(\beta_1)}_{\geq 0} + \underbrace{\tilde{c}(\beta_2)}_{\geq 0} + \underbrace{\tilde{c}(\beta_3)}_{\geq 0} = n+1 \Rightarrow \tilde{c}(\beta_i) \leq n \ \forall i \in \{1,2,3\}$.

$\underset{HI}{\Rightarrow} v_f(\beta_i) = 1 \ \forall i \in \{1,2,3\}. \Rightarrow v_f(\alpha) = v_f((\beta_1 \wedge \beta_2) \wedge \beta_3)) = \min\{v_f(\beta_1 \wedge \beta_2), v_f(\beta_3)\} = \min\{v(\beta_1), v(\beta_2)\} = 1$

$\therefore v_f(\alpha) = 1 \ \forall \alpha \in F_c \Rightarrow$ Si tomo $\neg p_1 \Rightarrow v_f(\neg p_1) = 0 \ \therefore \nexists \alpha \in F_c / \alpha \equiv \neg p_1 \Rightarrow$ NO ES ADECUADO.

2020 1C EJ4

martes, 13 de abril de 2021 09:07 p. m.

Ejercicio 4. Decidir si Γ es base, donde

$$\Gamma = \{(p_i \to p_j) \;:\; i, j \in \mathbb{N}\}$$

Γ no es independiente.

Prueba:

$\alpha = (p_0 \to p_0) \in \Gamma$ y es tautología. $\Rightarrow \alpha \in C(\Gamma - \{\alpha\})$ pues las tautologías pertenecen a las C de cualquier cjto $\Rightarrow \Gamma$ no es ind.

2020 1C EJ5

martes, 13 de abril de 2021 09:11 p. m.

Ejercicio 5. Decidir si la siguiente afirmación es verdadera o falsa. Justificar.

> Sea Γ un conjunto de fórmulas tal que existe un único Γ' maximal consistente que verifica $\Gamma \subset \Gamma'$. Entonces $p_j \in \Gamma$ o $\neg p_j \in \Gamma$ para toda $p_j \in Var$.

Sea Γ' m.c. / $p_1 \in \Gamma'$ $\Rightarrow$ Sea $\Gamma = \Gamma' - \{p_1\}$. $\Rightarrow$ $p_1 \notin \Gamma$ y $\neg p_1 \notin \Gamma$

↳ pues Γ' es m.c.

Veamos que es único el m.c que contiene a Γ'.

Supongo que no $\Rightarrow$ $\exists$ Σ' m.c / $\Gamma \subset \Sigma$

$p_1 \in \Sigma$ pues en Γ hay fórmulas consistentes con p_1, como $(p_1 \vee p_1)$. Si $\neg p_1 \in \Sigma$ y $(p_1 \vee p_1) \in \Sigma$

$\Rightarrow$ Σ no sería consistente.

$\Rightarrow$ Como $p_1 \in \Sigma$ y $\Gamma \subset \Sigma$ $\Rightarrow$ $\Gamma \cup \{p_1\} \subset \Sigma$ $\Rightarrow$ $\Gamma' \subset \Sigma \underset{m.c.}{\Rightarrow} \Gamma' = \Sigma$

2019 2C EJ1

martes, 13 de abril de 2021 09:33 p. m.

Ejercicio 1. Sea $X = \{p \in \mathbb{C}[X] : p$ es un polinomio mónico con todas las raices enteras$\}$.
Hallar el cardinal de X.
Notar que $p = x^2 - 6x + 1$ no tiene todas sus raices enteras.
Recordar que un polinomio es mónico cuando su coeficiente principal es 1.

$$\mathcal{X} = \{ p \in \mathbb{C}[X] \,/\, p = \prod_{i=1}^{k} (x - r_i) \} \quad r_i \in \mathbb{Z}.$$

- Defino: $\mathcal{X}_k = \{ p \in \mathbb{C}[X] \,/\, p = \prod_{i=1}^{k} (x - r_i) \} \quad r_i \in \mathbb{Z}. \quad k \geq 1.$

$\Rightarrow \mathcal{X} = \bigcup_{i=1}^{\infty} \mathcal{X}_i$. Veamos que $\mathcal{X}_k$ es numerable ($\#\mathcal{X}_k \leq \aleph_0$).

$\Rightarrow$ Defino $f: \mathcal{X}_k \to \mathbb{Z}^k \,/\, f\left(\prod_{i=1}^{k} (x - r_i)\right) = (r_1, r_2, \dots, r_k) \,/\, r_i \geq r_j$ si $i > j$.

iny) Si $f\left(\prod_{i=1}^{k} (x - r_i)\right) = f\left(\prod_{i=1}^{k} (x - s_i)\right) \Rightarrow (r_1, r_2, \dots, r_k) = (s_1, s_2, \dots, s_k) \Rightarrow r_i = s_i \quad \forall\, i \leq k$

$\Rightarrow \prod_{i=1}^{k} (x - r_i) = \prod_{i=1}^{k} (x - s_i) \quad \therefore f$ es iny.

$\Rightarrow \#\mathcal{X}_k \leq \#\mathbb{Z}^k = \aleph_0^{\,k} = \aleph_0 \quad \Rightarrow \mathcal{X}_k$ es numerable.

$\therefore \mathcal{X}$ es numerable pues es unión numerable de cjtos numerables. $\Rightarrow \#\mathcal{X} \leq \aleph_0$.

- Veamos que $\mathcal{X}$ es infinito.

  Defino $f: \mathbb{Z} \to \mathcal{X} \,/\, f(n) = x - n$

iny) Si $f(n) = f(m) \Rightarrow x - n = x - m \Rightarrow n = m \quad \therefore f$ es iny.

$\Rightarrow \#\mathcal{X} \geq \#\mathbb{Z} = \aleph_0 \quad \therefore \#\mathcal{X} = \aleph_0$.

2019 2C EJ2

martes, 13 de abril de 2021 10:08 p. m.

Ejercicio 2. Sea $C = \{\circ\}$ tal que

$$\circ(\alpha, \beta, \gamma) = (\neg(\alpha \wedge \beta) \wedge (\beta \vee \neg\gamma))$$

Decidir si C es adecuado.

1) $\circ(\alpha,\alpha,\alpha) = (\neg(\alpha\wedge\alpha) \wedge (\alpha \vee \neg\alpha)) \overset{①}{\equiv} (\neg\alpha \wedge (\alpha\vee\neg\alpha)) \overset{②}{\equiv} \neg\alpha$

① $v(\neg(\alpha\wedge\alpha)) = 1 - \min\{v(\alpha), v(\alpha)\} = 1 - v(\alpha) = v(\neg\alpha)$

② $v(\neg\alpha \wedge (\alpha\vee\neg\alpha)) = \min\{v(\neg\alpha), v(\alpha\vee\neg\alpha)\} = \min\{v(\neg\alpha), \max\{v(\alpha), 1-v(\alpha)\}\}$

$= \min\{v(\neg\alpha), 1\} = v(\neg\alpha)$

2) $\circ(\alpha,\alpha,\beta) = (\neg(\alpha\wedge\alpha) \wedge (\alpha\vee\neg\beta)) \overset{①}{\equiv} (\neg\alpha \wedge (\alpha\vee\neg\beta)) \overset{D.M.}{\equiv} ((\neg\alpha\wedge\alpha) \vee (\neg\alpha\vee\neg\beta)) \overset{③ y ④}{\equiv} (\neg\alpha\vee\neg\beta)$

③ $v((\neg\alpha\wedge\alpha)) = \min\{1-v(\alpha), v(\alpha)\} = 0$

④ $v((\neg\alpha\wedge\alpha)\vee(\neg\alpha\vee\neg\beta)) = \max\{\underbrace{\min\{1-v(\alpha), v(\alpha)\}}_{0}, v(\neg\alpha\vee\neg\beta)\} = v(\neg\alpha\vee\neg\beta)$

$\Rightarrow \circ(\circ(\alpha,\alpha,\alpha), \circ(\alpha,\alpha,\alpha), \circ(\beta,\beta,\beta)) \equiv (\alpha\vee\beta)$

$\therefore$ Como $\{\vee,\neg\}$ es adecuado $\Rightarrow C=\{\circ\}$ es adecuado porque encontré que $\forall\, \alpha \in F \,/\, \alpha = \neg\beta$ ó $\alpha = \beta_1 \vee \beta_2$

$\exists\, \gamma \in F_C \,/\, \gamma \equiv \alpha$

Ejercicio 3. Sea $\mathcal{R}$ una relación definida en el conjunto de las cadenas de formación. Sean C_1 y C_2 cadenas de formación. Decimos que $C_1 \mathcal{R} C_2$ si C_1 es subcadena de C_2. Probar que $\mathcal{R}$ es una relación de orden.

<u>Prueba:</u> Sean $C_1: x_1, \dots, x_n$ y $C_2: y_1, \dots, y_k$ c.f.

Ⓡ Toda cadena de formación C es subcadena de ella misma pues:

1) es c.f por def.

2) $x_n = x_n$

3) Igualdad de eslabones en el mismo orden. $\Rightarrow C R C \Rightarrow$ Ⓡ

Ⓐ Sean $C_1 = x_1, \dots, x_n$ y $C_2: y_1, \dots, y_k$ c.f. / $C_1 R C_2 \wedge C_2 R C_1$.

1) C_1 y C_2 c.f por def.

2) Defino $\tilde{x} = \{x_i / x_i$ es un eslabón de $C_1\}$. y $\tilde{y} = \{y_i / y_i$ es un eslabón de $C_2\}$.

$\Rightarrow C_1$ subcadena de $C_2 \Rightarrow \tilde{x} \subseteq \tilde{y}$

y C_2 subcadena de $C_1 \Rightarrow \tilde{y} \subseteq \tilde{x}$

$\left.\right\} \tilde{x} = \tilde{y}$ Misma cant. de eslabones.

3) Se respetan el orden relativo de los eslabones y $\tilde{x} = \tilde{y} \Rightarrow C_1 = C_2. \Rightarrow$ Ⓐ

Ⓣ Sean $C_1 = x_1, \dots, x_n$, $C_2: y_1, \dots, y_k$ y $C_3: z_1, \dots, z_r$ c.f / $C_1 R C_2 \wedge C_2 R C_3$.

1) C_1, C_2, C_3 c.f. por def.

2) Como $C_1 R C_2 \Rightarrow x_n = y_k$, se respetan los órdenes relativos de los eslabones y $\tilde{x} \subseteq \tilde{y}$ (Definiéndolas análogamente como en Ⓐ)

Como $C_2 R C_3 \Rightarrow y_k = z_r$, se respetan los órdenes relativos de los eslabones y $\tilde{y} \subseteq \tilde{z}$

$\Rightarrow x_n = z_r$, $\tilde{x} \subseteq \tilde{z}$ y se respetan los órdenes relativos de los eslabones $\Rightarrow C_1$ subcadena de C_3.

$\Rightarrow C_1 R C_3 \Rightarrow$ Ⓣ

$\therefore$ R de orden pues es Ⓡ, Ⓐ y Ⓣ

2019 2C EJ4

miércoles, 14 de abril de 2021 12:14 a. m.

Ejercicio 4. Decimos que dos conjuntos de fórmulas G_1 y G_2 son equivalentes si:

$$G_1 \subset C(G_2) \text{ y } G_2 \subset C(G_1)$$

Sea G finito. Probar que G es equivalente a un conjunto independiente de fórmulas. Sugerencia: Usar inducción en $\sharp G$

$G = \{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n\}$

Prueba: Inducción en $\#G$.

$P(k)$: $\#G = K \Rightarrow \exists\ G'$ independiente $/\ G \subset C(G')$ y $G' \subset C(G)$

CB) qvq $P(0)$ es V: $\#G = 0 \Rightarrow G = \emptyset \Rightarrow C(G) = TAUT$ TEORÍA

Defino $G' = \emptyset \Rightarrow G'$ es ind. y $\emptyset \subset C(\emptyset)$ ✓

PRÁCTICA.

$\hookrightarrow \forall \alpha \in \Gamma, \alpha \notin C(\Gamma - \{\alpha\})$ (pues $\nexists\ \alpha \in \emptyset$).

HI) $P(k)$ es V

TI) qvq $P(k+1)$ es V

Sea G cjto fórmulas $/ \#G = k+1$

C1) Si G es independiente, listo pues es equivalente a sí mismo.

C2) Si G es dependiente $\Rightarrow \exists\ \alpha \in G / \alpha \in C(G - \{\alpha\})$

Sea $G' = G - \{\alpha\} \Rightarrow \#G' = K \Rightarrow \exists\ S$ ind. $/\ S \subset C(G')$ y $G' \subset C(S)$

1) $G' \subset C(S) \Rightarrow C(G') \subset C(C(S)) \Rightarrow C(G') \subset C(S) \Rightarrow G' \subset C(S)$ y $\alpha \in C(G) \subset C(S)$

$\Rightarrow G \subset C(S)$

2) $G' \subset G \Rightarrow C(G') \subset C(G) \Rightarrow S \subset C(G)$ pues $S \subset C(G')$.

2019 2C EJ5

domingo, 18 de abril de 2021 07:12 p. m.

Ejercicio 5. Sea Γ un conjunto consistente. Decidir si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas. Justificar.

1. Si $Var(\Gamma)$ es infinito, entonces $C(\Gamma)$ es mc.
2. Si $C(\Gamma)$ es mc, entonces $Var(\Gamma)$ es infinito.

siendo $Var(\Gamma) = \{p_j \in VAR : p_j$ aparece en alguna fórmula de $\Gamma\}$.

Γ consistente $\Rightarrow \nexists\, \varphi \in F \,/\, \Gamma \vdash \varphi$ y $\Gamma \vdash \neg\varphi$.

1) $\Gamma = TAUT \Rightarrow VAR(\Gamma)$ inf. y $C(\Gamma) = TAUT \Rightarrow p_1 \notin C(\Gamma)$ y $\neg p_1 \notin C(\Gamma) \Rightarrow C(\Gamma)$ no es m.c.

2) CONTRARRECIPROCO: $VAR(\Gamma)$ es finito. Sea $k = \max\{i \,/\, p_i \in VAR(\Gamma)\}$

Defino $S = \Gamma \cup \{p_{k+1}\}$. qvq S es consistente.

Γ consistente $\Rightarrow \Gamma$ satisfacible $\Rightarrow$ Sea v val $/\, v(\Gamma) = 1$

Defino $f: VAR \to \{0,1\} \,/\, f(p_j) = \begin{cases} 1 & \text{si } j = k+1 \\ v(p_j) & \text{si } j \neq k+1 \end{cases}$ Sea v_f la val que extiende a f.

$\Rightarrow v_f(p_j) = v(p_j) \quad j \neq k+1 \Rightarrow v_f(\Gamma) = v(\Gamma) = 1$ y $v_f(p_{k+1}) = f(p_{k+1}) = 1 \Rightarrow v_f(\Gamma \cup \{p_{k+1}\}) = 1$.

$\Gamma \cup \{p_{k+1}\}$ sat $\Rightarrow C(\Gamma \cup \{p_{k+1}\})$ sat $\Rightarrow C(\Gamma) \cup C(\{p_{k+1}\})$ sat $\Rightarrow C(\Gamma) \cup \{p_{k+1}\}$ sat

$\{p_{k+1}\} \subset C(\{p_{k+1}\})$

$\Rightarrow C(\Gamma) \cup \{p_{k+1}\}$ consistente.

qvq $p_{k+1} \notin C(\Gamma)$

Sea w val $/\, w(\Gamma) = 1$. Defino $g: VAR \to \{0,1\} \,/\, g(p_j) = \begin{cases} w(p_j) & \text{si } j \neq k+1 \\ 0 & \text{si } j = k+1. \end{cases}$

Sea v_g la val que extiende a g.

$\Rightarrow v_g(p_j) = w(p_j) \quad j \neq k+1 \Rightarrow v_g(\Gamma) = w(\Gamma) = 1$ y $v_g(p_{k+1}) = f(p_{k+1}) = 0 \Rightarrow p_{k+1} \notin C(\Gamma)$.

$\therefore C(\Gamma) \subset C(\Gamma) \cup \{p_{k+1}\} \Rightarrow C(\Gamma)$ no es mc pues $C(\Gamma) \cup \{p_{k+1}\}$ es consistente.

2019 R2C EJ1

domingo, 18 de abril de 2021 10:17 p. m.

Ejercicio 1. Sea $\alpha \in$ Form, tal que $\alpha = (p_1 \to ((p_2 \vee p_1) \wedge \neg p_3))$

1. Hallar una cadena de formación minimal de α. Demostrar que es minimal. Determinar si es única. Justificar.
2. Hallar una cadena de formación no minimal de α. Demostrar que no es minimal. Determinar si es única. Justificar.

1) Primero hallemos $S(\alpha)$:

$S(\alpha) = \{\alpha\} \cup \{p_1\} \cup S(((p_2 \vee p_1) \wedge \neg p_3)) = \{\alpha, p_1, ((p_2 \vee p_1) \wedge \neg p_3)\} \cup S((p_2 \vee p_1)) \cup S(\neg p_3)$

$= \{\alpha, p_1, ((p_2 \vee p_1) \wedge \neg p_3), (p_2 \vee p_1), \neg p_3, p_3, p_2\}$

$\Rightarrow \# S(\alpha) = 7$

__Propongo:__

$X_1 = p_1 \quad X_2 = p_2 \quad X_3 = p_3 \quad X_4 = \neg X_3 \quad X_5 = (X_2 \vee X_1) \quad X_6 = (X_5 \wedge X_4) \quad X_7 = (X_1 \to X_6)$

$X_1 X_2 X_3 X_4 X_5 X_6 X_7$ es c.f de α pues $X_7 = \alpha$. Toda subfórmula de α aparece en toda c.f. de α (PRÁCTICA). α tiene 7 subfórmulas $\Rightarrow$ la long. mínima de una c.f. de α es 7.

La que propuse tiene 7 eslabones $\Rightarrow$ es minimal.

__No es única:__

$X_1 = p_2 \quad X_2 = p_1 \quad X_3 = p_3 \quad X_4 = \neg X_3 \quad X_5 = (X_1 \vee X_2) \quad X_6 = (X_5 \wedge X_4) \quad X_7 = (X_2 \to X_6)$. También es mínima (misma justificación).

2) $X_1 = p_2 \quad X_2 = p_1 \quad X_3 = p_3 \quad X_4 = \neg X_3 \quad X_5 = (X_1 \vee X_2) \quad X_6 = (X_5 \wedge X_4) \quad X_7 = p_8 \quad X_7 = (X_2 \to X_6)$

No es minimal pues tiene más de 7 eslabones.

__No es única:__

$X_1 = p_2 \quad X_2 = p_1 \quad X_3 = p_3 \quad X_4 = \neg X_3 \quad X_5 = (X_1 \vee X_2) \quad X_6 = (X_5 \wedge X_4) \quad X_7 = p_{88} \quad X_7 = (X_2 \to X_6)$

No es minimal pues tiene más de 7 eslabones. (Notemos que son infinitas).

2019 R2C EJ2

domingo, 18 de abril de 2021 10:19 p. m.

Ejercicio 2. Sea $\Gamma \subset$ Form satisfacible, tal que para toda α una fórmula que no está en Γ, se verifica que $\Gamma \cup \{\alpha\}$ no es satisfacible.
Probar que $C(\Gamma) = \Gamma$.

1) $\Gamma \subset C(\Gamma)$ por prop. de la práctica.

2) qvq $C(\Gamma) \subset \Gamma$. Es decir que si $\alpha \in C(\Gamma) \Rightarrow \alpha \in \Gamma$

<u>Contrarrecíproco:</u>

$\alpha \notin \Gamma \Rightarrow \Gamma \cup \{\alpha\}$ no es sat

ABUSO DE NOT; CORRESPONDE A "ALGUNA FORMULA"

Como Γ es sat $\underset{\text{PRÁC}}{\Rightarrow}$ $C(\Gamma)$ es sat $\Rightarrow$ Sea v val / $v(C(\Gamma)) = 1$ $\underset{\Gamma \subset C(\Gamma)}{\Rightarrow}$ $v(\Gamma) = 1$ y $\underset{\text{HIP}}{v(\Gamma \cup \{\alpha\}) = 0}$

$\Rightarrow v(\alpha) = 0 \Rightarrow \alpha \notin C(\Gamma)$.

$\therefore C(\Gamma) \subset \Gamma \Rightarrow C(\Gamma) = \Gamma$

2019 R2C EJ3

martes, 6 de abril de 2021 03:19 p. m.

Ejercicio 3. Determinar si $\{\circ, *\}$ es adecuado siendo

$$(\alpha \circ \beta) = \neg\neg(\underbrace{\neg\alpha \to (\beta \to \neg\alpha)}_{\text{AX1}}), \quad (\alpha * \beta) = \neg(\alpha \vee (\beta \to \neg\alpha))$$

TAUT AX1 CONT.

Veamos que $\nexists\, \gamma \in F_c \,/\, \gamma \equiv \neg p_1$.

Sea $\gamma \in F_c$, llamamos $\tilde{c}(\gamma) =$ cant. de apariciones de $\circ$ y $*$ en γ

c1) Si $\gamma \in F_c \,/\, \tilde{c}(\gamma) = 0 \Rightarrow \gamma = p_i$, $i \in \mathbb{N}$.

Defino $f : VAR \to \{0,1\} \,/\, f(p_j) = 1 \;\; \forall j \in \mathbb{N}$ y V_f la val que extiende a f.

- $V_f(\neg p_1) = 1 - f(p_1) = 0$
- $V_f(\gamma) = f(p_i) = 1$

$\therefore \gamma \not\equiv \neg p_1$.

c2) Si $\gamma \in F_c \,/\, \tilde{c}(\gamma) > 0$

i- $\gamma = (\gamma_1 \circ \gamma_2)$ ó ii- $\gamma = (\gamma_1 * \gamma_2)$, $\gamma_1, \gamma_2 \in F_c$

i-
- $V_f(\gamma) = 1$ TAUT
- $V_f(\neg p_1) = 1 - f(p_i) = 0$

$\therefore \gamma \not\equiv \neg p_1$.

ii- Definimos $g : VAR \to \{0,1\} \,/\, g(p_i) = 0 \;\; \forall i \in \mathbb{N}$ y V_g la val que extiende a g.

- $V_g(\gamma) = 0$
- $V_-(\gamma) = 1 - f(p_i) = 1$

$\therefore \gamma \not\equiv \neg p_1$.

$\therefore \nexists\, \gamma \in F_c \,/\, \gamma \equiv \neg p_1 \Rightarrow c = \{\circ, *\}$ no es adecuado.

2019 R2C EJ4 T

domingo, 18 de abril de 2021 10:56 p. m.

Ejercicio 4. Decidir si el siguiente conjunto es base:

$$\Gamma = \{(p_{2n+1} \wedge \neg p_{2n} \wedge p_{2n+3}) : n \in \mathbb{N}\}$$

$\Gamma = \{ (p_1 \wedge \neg p_0 \wedge p_3), (p_3 \wedge \neg p_2 \wedge p_5), \dots \}$

ind) Sea $\alpha_i = (p_{2i+1} \wedge \neg p_{2i} \wedge p_{2i+3})$ que $\alpha \notin C(\Gamma - \{\alpha\})$

Defino $f_i : VAR \to \{0,1\} / f(p_j) = \begin{cases} 1 & \text{si } j = 2k+1 \\ 0 & \text{si } j = 2k \\ 1 & \text{si } j = 2i \end{cases}$ $\forall k \neq i$, $i, k \in \mathbb{N}$. Sea V_f la val que extiende a f.

$V_f(\Gamma - (p_{2i+1} \wedge \neg p_{2i} \wedge p_{2i+3})) = \min\{(p_1 \wedge \neg p_0 \wedge p_3), \dots, (p_{2n+1} \wedge \neg p_{2n} \wedge p_{2n+3})\} = 1.$

$V_f(\alpha_i) = \min\{\underbrace{V_f(p_{2i+1})}_{1}, 1 - \underbrace{V_f(p_{2i})}_{1}, \underbrace{V_f(p_{2i+3})}_{1}\} = 0 \quad \therefore \quad \alpha_i \notin C(\Gamma - \{\alpha_i\})$

$\Rightarrow \Gamma$ es independiente.

2019 R2C EJ5

lunes, 19 de abril de 2021 12:37 a. m.

Ejercicio 5. Hallar una prueba de

$$(((\alpha \to \neg\beta) \to \alpha) \to ((\neg\alpha \to \gamma) \to ((((\alpha \to \neg\beta) \to \alpha) \to \gamma) \to (\beta \to \gamma))))$$

- Por Teorema de la deducción (Versión axiomática) es equivalente a probar que:

$$\{(\alpha \to \neg\beta) \to \alpha), (\neg\alpha \to \gamma), (((\alpha \to \neg\beta) \to \alpha) \to \gamma)\} \vdash (\beta \to \gamma)$$

1) $((\alpha \to \neg\beta) \to \alpha) \to \gamma)$ DATO 3

2) $(\alpha \to \neg\beta) \to \alpha)$ DATO 1

3) γ MP 1 y 2

4) $(\gamma \to (\beta \to \gamma))$ AX1

5) $\beta \to \gamma$ MP 3 y 4

2018 2C EJ1 T

domingo, 18 de abril de 2021 08:26 p. m.

Ejercicio 1. Sea $X = \{Y \subset \text{Form} : Y \text{ es maximal consistente }\}$. Hallar el cardinal de X.

- $X \subseteq P(\text{Form}) \Rightarrow \#X \leq \#P(\text{Form}) = 2^{\aleph_0} = c \Rightarrow \#X \leq c$.
- Llamo $B = \{v : \text{Form} \to \{0,1\} / v \text{ es val}\} \Rightarrow \#B = \#\{0,1\}^{\#\text{Form}} = 2^{\aleph_0} = c \Rightarrow \#B = c$
- Defino $F : X \to B / F(Y) = V_Y$ siendo V_Y la val que extiende a Y. (es única)

iny) Si $F(Y_1) = F(Y_2) \Rightarrow V_{Y_1} = V_{Y_2}$

Supongo $Y_1 \neq Y_2 \Rightarrow \exists\, \alpha \in \text{Form} / \alpha \in Y_1$ y $\alpha \notin Y_2$

$\Rightarrow V_{Y_1}(\alpha) = 1$ y como Y_2 es m.c $\neg\alpha \in Y_2 \Rightarrow V_{Y_2}(\neg\alpha) = 0$ ABS!

$\Rightarrow Y_1 = Y_2 \Rightarrow F$ iny.

sobrey) Sea $v \in B$ y defino $Y = \{\alpha / v(\alpha) = 1\}$

Veamos que Y es m.c.

1) $v(Y) = 1 \Rightarrow Y$ sat $\Rightarrow Y$ consistente.

2) Veamos que Y es max. Supongo que no. $\Rightarrow \exists\, \beta \in F$ y $\beta \notin Y / Y \cup \{\beta\}$ es consistente.

C1) $v(\beta) = 1 \Rightarrow \beta \in Y$ ABS! pues $\beta \notin Y$.

2018 2C EJ2

domingo, 18 de abril de 2021 08:58 p. m.

Ejercicio 2. Sea $\gamma = (\neg\alpha \wedge \beta)$, siendo $\alpha, \beta \in Form$. Sabiendo que en γ cada variable aparece a lo sumo una vez, probar

$$\sharp s(\gamma) = 2 + \sharp s(\alpha) + \sharp s(\beta)$$

$$s(\gamma) = \{\neg\alpha \wedge \beta\} \cup s(\neg\alpha) \cup s(\beta) = \{\neg\alpha \wedge \beta\} \cup \{\neg\alpha\} \cup s(\alpha) \cup s(\beta)$$

$$\Rightarrow \#s(\gamma) = 2 + \#s(\alpha) + \#s(\beta)$$

Tenemos que asegurar que las uniones son disjuntas:

$s(\alpha) \cap s(\beta) = \emptyset$ pues γ no tiene var repetidas $\Rightarrow VAR(\alpha) \cap VAR(\beta) = \emptyset$.

2018 2C EJ3

domingo, 18 de abril de 2021 09:05 p. m.

Ejercicio 3. Decidir si $\beta \in C(\Gamma)$, siendo

$$\beta = \neg(p_1 \to (p_2 \to p_1)) \quad y \quad \Gamma = \{(p_n \wedge \neg p_{n+1}) : n \in \mathbb{N}\}$$

$\Gamma = \{(p_0 \wedge \neg p_1), (p_1 \wedge \neg p_2), (p_2 \wedge \neg p_3) \ldots\}$. Veamos que Γ es insat. Supongo Γ sat

$\Rightarrow \exists\ v$ val $/ v(\alpha) = 1\ \forall \alpha \in \Gamma \Rightarrow$ En particular $v(p_{8701} \wedge \neg p_{8702}) = 1$ y $v(p_{8702} \wedge \neg p_{8703}) = 1$

$\Rightarrow \min\{v(p_{8701}), 1 - v(p_{8702})\} = 1$ y $\min\{v(p_{8702}), 1 - v(p_{8703})\} = 1$

$\Rightarrow v(p_{8701}) = 1$, $\underline{v(p_{8702}) = 0}$ y $\underline{v(p_{8702}) = 1}$, $v(p_{8703}) = 0$

ABS!

$\therefore\ \Gamma$ insat. $\Rightarrow C(\Gamma) = \text{Form} \Rightarrow \beta \in C(\Gamma)$ pues $\beta \in F$.

TEÓRICA

2018 2C EJ4

domingo, 18 de abril de 2021 09:22 p. m.

Ejercicio 4. Decidir si $C = \{\circ, \Diamond\}$ es adecuado sabiendo que

$$\underbrace{(\alpha \circ \beta)) = ((\neg\alpha \to \neg\beta) \to ((\neg\alpha \to \beta) \to \alpha))}_{AX3 \Rightarrow TAUT} \quad y \quad \underbrace{(\alpha \Diamond \beta) = \neg(\alpha \circ \beta)}_{CONTR}$$

- Defino $\tilde{c}(\alpha)$ como la cantidad de conectivos $\circ$ ó $\Diamond$ que aparecen en α con $\alpha \in F_C$.
- Sea $\gamma = \neg p_1$.

C1) Sea $\alpha \in F_C \,/\, c(\alpha) = 0 \Rightarrow \alpha = p_i \quad i \in \mathbb{N}$.

Defino $f: VAR \to \{0,1\} \,/\, f(p_j) = 1$. Sea V_f la val que extiende a f.

$V_f(\alpha) = V_f(p_i) = f(p_i) = 1$

$\therefore \alpha \not\equiv \gamma$.

$V_f(\underbrace{\neg p_1}_{\gamma}) = 1 - V_f(p_1) = 1 - f(p_1) = 0$

C2) Sea $\alpha \in F_C \,/\, c(\alpha) \geq 1 \Rightarrow \alpha = \overbrace{(\beta_1 \circ \beta_2)}^{C1}$ ó $\alpha = \overbrace{(\beta_1 \Diamond \beta_2)}^{C2}$ $\quad \beta_1, \beta_2 \in F_C$.

C1) $V_f(\alpha) = 1$ pues es TAUT. y $V_f(\gamma) = 0 \quad \therefore \alpha \not\equiv \gamma$.

C2) Defino $g: VAR \to \{0,1\} \,/\, g(p_i) = 0$ Sea V_g la val que extiende a g.

$V_g(\alpha) = 0$ pues es CONTR.

$\therefore \alpha \not\equiv \gamma$.

$V_g(\neg p_1) = 1 - V_g(p_1) = 1 - g(p_1) = 1$

Probamos que $\nexists\, \alpha \in F_C \,/\, \alpha \equiv \neg p_1 \quad \therefore C$ no es adecuado.

2018 2C EJ5

domingo, 18 de abril de 2021 09:40 p. m.

Ejercicio 5. Sea $\mathcal{R}$ la relación definida en $Form/\equiv$ dada por

$$[\alpha]\mathcal{R}[\beta] \Leftrightarrow [(\alpha \to \beta)] = [(p_1 \vee \neg p_1)]$$

Probar que $\mathcal{R}$ es una relación de orden (reflexiva, antisimétrica y transitiva).

Equivalente a $[\alpha]R[\beta] \iff (\alpha \to \beta)$ es taut.

(R) Sea $\gamma = \alpha \to \alpha$ qvq γ es taut. Supongo que no $\Rightarrow \exists\, v$ val$/ v(\gamma) = 0$

$\Rightarrow v(\alpha \to \alpha) = 0 \iff \max\{1 - v(\alpha), v(\alpha)\} = 0$. C1) $v(\alpha) = 0 \Rightarrow \max\{1, 0\} = 0$
C2) $v(\alpha) = 1 \Rightarrow \max\{0, 1\} = 0$ } ABS!

$\therefore (\alpha \to \alpha)$ es taut $\Rightarrow [\alpha]R[\alpha] \Rightarrow R$ es reflexiva.

(T) Sean $\alpha, \beta, \gamma \in F / [\alpha]R[\beta]$ y $[\beta]R[\gamma] \Rightarrow (\alpha \to \beta)$ es taut, $(\beta \to \gamma)$ es taut.

Como $(\alpha \to \beta)$ es taut, si $v(\alpha) = 1 \Rightarrow v(\beta) = 1$
Como $(\beta \to \gamma)$ es taut, si $v(\beta) = 1 \Rightarrow v(\gamma) = 1$
} $\Rightarrow$ Si $v(\alpha) = 1 \Rightarrow v(\gamma) = 1 \Rightarrow (\alpha \to \gamma)$ es taut.
$\Rightarrow R$ es transitiva

(A) Si $[\alpha]R[\beta]$ y $[\beta]R[\alpha] \Rightarrow (\alpha \to \beta)$ es taut y $(\beta \to \alpha)$ es taut.

qvq $\alpha \equiv \beta$. ($v(\alpha) = v(\beta)\ \forall\, v$ val). Por el absurdo: Supongo que $\exists\, w$ val $/ w(\alpha) \neq w(\beta)$.

C1) supongo $w(\alpha) = 0 \Rightarrow w(\beta) = 1$ (C2) $w(\beta) = 0$ ANÁLOGO intercambiando α y β en la demo).

$\Rightarrow w(\beta \to \alpha) = \max\{\underbrace{1 - w(\beta)}_{0}, \underbrace{w(\alpha)}_{0}\} = 0$ ABS! pues $\beta \to \alpha$ es taut.

$\therefore v(\alpha) = v(\beta)\ \forall\, v$ val $\Rightarrow \alpha \equiv \beta \Rightarrow R$ es antisimétrica.

Como R es reflexiva, transitiva y antisimétrica. $\Rightarrow R$ es de orden.

2018 1C EJ1

lunes, 19 de abril de 2021 12:51 a. m.

Ejercicio 1. Sea $X = \{f : A \to \{0,1,2\}; f \text{ es función }\}$, siendo $A = ([0,1] \times [0,1]) \bigcap \mathbb{Q}^2$. Hallar el cardinal de X.

- $A = \{(x,y) \in \mathbb{Q}^2 / 0 \leq x, y \leq 1\} \subseteq \mathbb{Q}^2 \Rightarrow \#A \leq \#\mathbb{Q}^2 = \aleph_0.$

Defino $f: \mathbb{N}_{\geq 1} \to A / f(n) = \left(\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right)$ $\quad 0 < \frac{1}{n} \leq 1 \in \mathbb{Q}$

iny) Si $f(n) = f(m) \Rightarrow \left(\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right) = \left(\frac{1}{m}, \frac{1}{m}\right) \Rightarrow \frac{1}{n} = \frac{1}{m} \Rightarrow n = m \Rightarrow$ f es iny $\Rightarrow \aleph_0 = \#\mathbb{N}_{\geq 1} \leq \#A$

$\therefore \#A = \aleph_0$

$\Rightarrow \#X = 3^{\#A} = 3^{\aleph_0}.$

Alg. de card:

- Si $b \leq c \Rightarrow b^a \leq c^a$ $\Rightarrow$ $2 \leq 3 \Rightarrow c = 2^{\aleph_0} \leq 3^{\aleph_0} \leq c^{\aleph_0} = c$ $\qquad \therefore \#X = 3^{\aleph_0} = c.$

2018 1C EJ2

lunes, 19 de abril de 2021 01:27 a. m.

Ejercicio 2. Decidir si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas. Justificar.

1. Sea $\alpha \in F$. Si existe más de una cadena de formación minimal de α, entonces $\sharp Var(\alpha) \geq 2$. $\longrightarrow$ FALSO
2. Sean $\alpha, \beta \in F$. Si $Var(\alpha) \bigcap Var(\beta) = \emptyset$, entonces existe más de una cadena de formación minimal de $(\alpha \wedge \beta)$. $\longrightarrow$ VERDADERO

1) Sea $\alpha = ((p_1 \rightarrow p_1) \rightarrow \neg p_1) \Rightarrow S(\alpha) = \{((p_1 \rightarrow p_1) \rightarrow \neg p_1), (p_1 \rightarrow p_1), \neg p_1, p_1\} \Rightarrow \# S(\alpha) = 4$.

1) $X_1 = p_1 \quad X_2 = \neg X_1 \quad X_3 = (X_1 \rightarrow X_1) \quad X_4 = (X_3 \rightarrow X_2)$

2) $X_1 = p_1 \quad X_2 = (X_1 \rightarrow X_1) \quad X_3 = \neg X_1 \quad X_4 = (X_2 \rightarrow X_3)$

toda subfórmula de α aparece en toda c.f. de α.

1) y 2) son c.f. minimales pues tienen 4 eslabones y $\# S(\alpha) = 4$, además son distintos pues por ejemplo los eslabones X_2 de c/u son distintos.

2) Como α y β son fórmulas $\Rightarrow VAR(\alpha) \geq 1$ y $VAR(\beta) \geq 1$

$\Rightarrow$ Como $VAR(\alpha) \cap VAR(\beta) = \emptyset \Rightarrow VAR(\alpha \wedge \beta) \geq 2$

$(\alpha \wedge \beta) \in F \Rightarrow \exists\ X_1 X_2, \dots, X_n = (\alpha \wedge \beta)$ c.f. ①

Supongo $X_j = p_i \,/\, p_i \in VAR(\alpha)$ y $X_k = p_m \,/\, p_m \in VAR(\beta)$, $1 \leq j, k < n$

$\Rightarrow$ Puedo swapear / $X_k = p_i$ y $X_j = p_m \Rightarrow$ armé otra c.f diferente a ①

2018 1C EJ3

lunes, 19 de abril de 2021 02:19 a. m.

Ejercicio 3. Decidir si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas. Justificar.

1. $C(\{p_1\}) \bigcap C(\{p_2\}) = \{\alpha : \alpha \text{ es una tautología}\}$ **FALSO**
2. $C(\{p_1\}) \bigcap C(\{\neg p_1\}) = \{\alpha : \alpha \text{ es una tautología}\}$

1) Sea $\alpha = (p_1 \vee p_2)$

- $\{p_1\}$ sat pues p_1 es contingencia $\Rightarrow C(\{p_1\})$ sat $\Rightarrow$ Sea v val $/ v(C(\{p_1\})) = 1 \Rightarrow v(p_1) = 1$ $\quad \Gamma \subset C(\Gamma)$

$\Rightarrow v(p_1 \vee p_2) = \max\{\underbrace{v(p_1)}_{1}, v(p_2)\} = 1 \Rightarrow (p_1 \vee p_2) \in C(\{p_1\})$

- Análogo intercambiando p_1 con $p_2 \Rightarrow (p_1 \vee p_2) \in C(\{p_2\})$

$\therefore (p_1 \vee p_2) \in C(\{p_1\}) \cap C(\{p_2\})$ pero $(p_1 \vee p_2) \notin$ TAUT. ($f : VAR \to \{0,1\} / f(p_j) = 0$ y sea V_f la val que extiende a $f \Rightarrow V_f(p_1 \vee p_2) = 0$).

2) Sea $\alpha \in C(\{p_1\}) \cap C(\{\neg p_1\}) \Rightarrow \alpha \in C(\{p_1\})$ y $\alpha \in C(\{\neg p_1\})$

$$\Rightarrow \begin{cases} (w(p_1) = 1 \Rightarrow w(\alpha) = 1) \ \forall w \text{ val} \\ (\tilde{w}(\neg p_1) = 1 \Rightarrow \tilde{w}(\alpha) = 1) \ \forall \tilde{w} \text{ val} \Rightarrow (\tilde{w}(p_1) = 0 \Rightarrow \tilde{w}(\alpha) = 1) \ \forall \tilde{w} \text{ val.} \end{cases}$$

$\Rightarrow$ Sin importar el valor que le demos a p_1, $v(\alpha) = 1$ $\Rightarrow$ UNA GENÉRICA. $\Rightarrow$ Como en toda val hay que darle un valor a p_1 para que la val esté bien definida en su dominio (0 ó 1) $\Rightarrow$ en toda v val, $v(\alpha) = 1$.
$\Rightarrow \alpha$ es taut.

$\therefore C(\{p_1\}) \cap C(\{\neg p_1\}) \subset$ TAUT, y sabemos que TAUT $\subset C(\Gamma) \ \forall \Gamma$ cjto de fórm $\Rightarrow$ TAUT $\subset C(\Gamma) \cap C(\Gamma')$

$\therefore C(\{p_1\}) \cap C(\{\neg p_1\}) =$ TAUT

Ejercicio 4. Sea Γ un conjunto de fórmulas consistente y sea $Var(\Gamma)$ el conjunto de variables que aparecen en alguna fórmula de Γ. Probar que si $C(\Gamma)$ es maximal consistente entonces $Var(\Gamma)$ es infinito.

(Lo probé anteriormente, ahora de manera distinta).

CONTRARRECÍPROCO:

Sea Γ cjto de form. consistente / $VAR(\Gamma)$ finito $\Rightarrow \exists\, p_i \in VAR / p_i \notin VAR(\Gamma)$.

Γ consis $\Rightarrow \Gamma$ sat $\Rightarrow \exists\, v$ val / $v(\Gamma) = 1$

1) Defino $f: VAR \to \{0,1\} / f(p_j) = \begin{cases} v(p_j) & \text{si } j \neq i \\ 0 & \text{si } j = i \end{cases}$ Sea v_f la val que extiende a f.

Sea $\alpha \in \Gamma$, notemos que $v_f(\alpha) = v(\alpha)$ pues $v_f(p_j) = v(p_j)\ \forall\, j \neq i$ y seguro que $p_i \notin \alpha$ pues $p_i \in VAR(\Gamma)$.

$\Rightarrow v_f(\Gamma) = v(\Gamma) = 1$ y $v_f(p_i) = 0 \therefore p_i \notin C(\Gamma)$.

2) Defino $g: VAR \to \{0,1\} / g(p_j) = \begin{cases} v(p_j) & \text{si } j \neq i \\ 1 & \text{si } j = i \end{cases}$ Sea v_g la val que extiende a g.

Sea $\alpha \in \Gamma$, notemos que $v_f(\alpha) = v(\alpha)$ pues $v_f(p_j) = v(p_j)\ \forall\, j \neq i$ y seguro que $p_i \notin \alpha$ pues $p_i \notin VAR(\Gamma)$.

$\Rightarrow v_g(\Gamma) = v(\Gamma) = 1$ y $v_g(\neg p_1) = 0 \quad \therefore \neg p_i \notin C(\Gamma)$.

$\therefore p_1 \notin C(\Gamma)$ y $\neg p_1 \notin C(\Gamma) \Rightarrow C(\Gamma)$ no es m.c.

Ejercicio 5. Demostrar que si α fómula es una contradicción, entonces en α aparece el conectivo negación.

- Sea α una fórmula que no posee el conectivo $\neg \Rightarrow \alpha$ no es una contradicción

Defino $f: VAR \to \{0,1\} / f(p_j)=1 \ \forall j \in \mathbb{N}$, y sea v_f la val que extiende a f. qvq $v_f(\alpha)=1$.

Inducción en $c(\alpha)$:

$P(k)$: $\alpha \in F / \alpha$ no posee el conectivo $\neg$ y $c(\alpha)=k \Rightarrow v_f(\alpha)=1$

CB) $c(\alpha)=0 \Rightarrow \alpha \in VAR \Rightarrow v_f(\alpha)=1$

HI) $P(k) \ \forall k \leq n$

TI) $P(n+1)$

Sea $\alpha \in F$ sin "$\neg$" y $c(\alpha)=n+1$

$\Rightarrow \alpha = \beta_1 * \beta_2$, $* = \{\wedge, \vee, \to\}$, $\beta_1, \beta_2 \in F$

C1) $\alpha = \beta_1 \wedge \beta_2$

$\Rightarrow c(\beta_1) \leq n$, $c(\beta_2) \leq n \underset{HI}{\Rightarrow} v_f(\beta_1)=1$ y $v_f(\beta_2)=1 \Rightarrow v_f(\alpha) = v_f(\beta_1 \wedge \beta_2) = \min\{\overbrace{v_f(\beta_1)}^{1}, \overbrace{v_f(\beta_2)}^{1}\} = 1$

C2) $\alpha = \beta_1 \vee \beta_2$

$\Rightarrow c(\beta_1) \leq n$, $c(\beta_2) \leq n \underset{HI}{\Rightarrow} v_f(\beta_1)=1$ y $v_f(\beta_2)=1 \Rightarrow v_f(\alpha) = v_f(\beta_1 \vee \beta_2) = \max\{\overbrace{v_f(\beta_1)}^{1}, \overbrace{v_f(\beta_2)}^{1}\} = 1$

C3) $\alpha = \beta_1 \to \beta_2$

$\Rightarrow c(\beta_1) \leq n$, $c(\beta_2) \leq n \underset{HI}{\Rightarrow} v_f(\beta_1)=1$ y $v_f(\beta_2)=1 \Rightarrow v_f(\alpha) = v_f(\beta_1 \to \beta_2) = \max\{1-v_f(\beta_1), \overbrace{v_f(\beta_2)}^{1}\} = 1$

$\therefore v_f(\alpha)=1 \Rightarrow \alpha$ no es una contradicción

2018 R2C EJ1

lunes, 19 de abril de 2021 03:12 a. m.

Ejercicio 1. Decidir si el conjunto de conectivos $C = \{\circ, *\}$ es adecuado, siendo

$$\circ(\alpha,\beta,\gamma) = ((\neg\alpha \vee \beta) \to \neg\gamma), \quad *(\alpha,\beta,\gamma) = ((\alpha \wedge \neg\beta) \vee (\alpha \wedge \neg\gamma))$$

- Veamos que es adecuado:

$(\alpha \wedge \beta) \vee (\alpha \wedge$

$\beta \vee \beta = \beta$

- $\circ(\alpha,\alpha,\alpha) = ((\neg\alpha \vee \alpha) \to \neg\alpha) \equiv \boxed{\neg\alpha}$

1) $v((\neg\alpha \vee \alpha)) = \max\{1 - v(\alpha), v(\alpha)\} = 1$ TAUT.

$(\alpha \wedge (\neg\beta \vee \neg\gamma))$

2) $v(((\neg\alpha \vee \alpha) \to \neg\alpha)) = \max\{\underbrace{1 - v((\neg\alpha \vee \alpha))}_{0}, v(\neg\alpha)\} = v(\neg\alpha)$

$\alpha \wedge$

- $*(\alpha, \circ(\beta,\beta,\beta), \circ(\beta,\beta,\beta)) = ((\alpha \wedge \neg((\neg\beta \vee \beta) \to \neg\beta)) \vee (\alpha \wedge \neg((\neg\beta \vee \beta) \to \neg\beta)))$

$\overset{2)}{\equiv} ((\alpha \wedge \neg\neg\beta) \vee (\alpha \wedge \neg\neg\beta)) \overset{3)}{\equiv} ((\alpha \wedge \beta) \vee (\alpha \wedge \gamma)) \overset{4)}{\equiv} (\alpha \wedge (\beta \vee \beta)) \overset{5)}{\equiv} (\alpha \wedge \beta)$

3) $v(\neg\neg\beta) = 1 - (1 - v(\beta)) = v(\beta)$

4) DE MORGAN

5) Idempotencia $\therefore$ como $\tilde{C} = \{\wedge, \neg\}$ es adecuado y $\forall \alpha \in F_{\tilde{C}}\ \exists \beta \in F_C / \alpha \equiv \beta \Rightarrow C = \{\circ, *\}$ es adecuado.

2018 R2C EJ2 T

domingo, 11 de abril de 2021 05:29 p. m.

Ejercicio 2. Probar $\#Form = \aleph_0$.

- Defino $Form = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A^n$ donde $A^n = \{$fórmulas de longitud $n\}$.

Veamos el $\#A^n$:

2018 R2C EJ3

lunes, 19 de abril de 2021 04:48 p. m.

Ejercicio 3. Hallar una prueba de

$$(p_3 \to ((p_4 \to p_5) \to (p_1 \to ((p_1 \to (p_4 \to p_5)) \to p_3))))$$

Por teorema de la deducción es equiv a probar que:

$\{p_3, (p_4 \to p_5), p_1, (p_1 \to (p_4 \to p_5))\} \vdash p_3$

1) p_3 DATO

2018 R2C EJ4

lunes, 19 de abril de 2021 04:58 p. m.

Ejercicio 4. Decidir si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas:

1. $C(\{\neg(p_1 \to (p_2 \to p_1))\}) =$ α
   $C(\{\neg(\underbrace{(p_1 \to (p_2 \to p_3)) \to ((p_1 \to p_2) \to (p_1 \to p_3))}_{\alpha})\})$
2. $C(\{\alpha \to \beta\}) \subset C(\{\beta\})$

1) $(p_1 \to (p_2 \to p_1)) = AX1 \Rightarrow \neg(p_1 \to (p_2 \to p_1))$ CONTR $\Rightarrow C(\neg(p_1 \to (p_2 \to p_1))) = FORM$

$\alpha = AX2 \Rightarrow \neg\alpha$ CONTR $\Rightarrow C(\neg\alpha) = FORM$ $\therefore$ $C(\neg AX1) = C(\neg AX2)$ VERDADERO.

2) $C(\{\alpha \to \beta\}) \subset C(\{\beta\})$

Sea $\gamma \in C(\{\alpha \to \beta\})$ qvq $\gamma \in C(\{\beta\})$

1) Como $\gamma \in C(\{\alpha \to \beta\}) \Rightarrow (v(\alpha \to \beta) = 1 \Rightarrow v(\gamma) = 1)$ $\forall$ v val

2) Si $w(\beta) = 1 \Rightarrow w(\alpha \to \beta) = 1 \Rightarrow w(\alpha) = 1$ $\therefore$ $\alpha \in C(\{\beta\})$ VERDADERO.

2018 R2C EJ5

lunes, 19 de abril de 2021 05:09 p. m.

Ejercicio 5. Sean Γ_1 y Γ_2 dos conjuntos maximales consistentes. Si existen valuaciones v y w tales que $v \neq w$, $v(\Gamma_1) = 1$, $w(\Gamma_2) = 1$, probar que entonces $\Gamma_1 \neq \Gamma_2$.

CONTRARRECIPROCO:

Si $v \neq w \Rightarrow v(p_j) \neq w(p_j)$ para algún p_j. Supongo $\Gamma_1 = \Gamma_2$

- Si $p_j \in \Gamma_1 \Rightarrow v(p_j) = 1 \Rightarrow w(p_j) = 0 \Rightarrow p_j \notin \Gamma_2$ pues $w(\Gamma_2) = 1 \Rightarrow \Gamma_1 \neq \Gamma_2$.
- Si $p_j \notin \Gamma_1 \underset{m.c.}{\Rightarrow} \neg p_j \in \Gamma_1 \Rightarrow v(\neg p_j) = 1 \Rightarrow v(p_j) = 0 \Rightarrow w(p_j) = 1 \Rightarrow p_j \in \Gamma_2$ pues $\neg p_j \notin \Gamma_2 \Rightarrow \Gamma_1 \neq \Gamma_2$

ABS!

2018 R1C EJ1

lunes, 19 de abril de 2021 05:38 p. m.

Ejercicio 1. Sea $X = \{f : I_n \to I_{n+1} : n \in \mathbb{N}_{>0}$ y f es función $\}$. Hallar el cardinal de X.

- Podemos pensar a $\mathcal{X}$ como $\mathcal{X} = \bigcup_{i \in \mathbb{N}_{>0}} \mathcal{X}_i \;/\; \mathcal{X}_i = \{ f : I_i \to I_{i+1} \;/\; f$ es función $\}$

$\# \mathcal{X}_i = (i+1)^i \Rightarrow \mathcal{X}_i$ finito $\Rightarrow \mathcal{X}_i$ numerable

$\Rightarrow \mathcal{X}$ es unión numerable de cjtos numerables $\Rightarrow \mathcal{X}$ es numerable $\Rightarrow \# \mathcal{X} \leq \aleph_0$. (1)

- Veamos que es infinito: $\# \mathcal{X} \geq \aleph_0$ Defino $Y = \{ Y_n \in \mathcal{X} \;/\; Y_n : I_n \to I_{n+1}$ y $f(i) = i \;\forall i \leq n \} \subseteq \mathcal{X}$

Defino $f : \mathbb{N} \to Y \;/\; f(n) = Y_n$

iny) Sea n y $m \in \mathbb{N} \;/\; n \neq m \Rightarrow Y_n \neq Y_m$ pues tienen dominio diferente $(I_n \neq I_m) \Rightarrow f(n) \neq f(m)$

$\therefore f$ es iny $\Rightarrow \# \mathbb{N} \leq \# Y \Rightarrow \# Y \geq \aleph_0$ y $Y \subseteq \mathcal{X} \Rightarrow \# \mathcal{X} \geq \aleph_0$ (2)

Por 1) y 2) y T. de Bernstein $\# \mathcal{X} = \aleph_0$

2018 R1C EJ2

lunes, 19 de abril de 2021 06:27 p. m.

Ejercicio 2. Sean $\alpha, \beta \in \mathrm{F}$. Probar que

$$\alpha \in s(\beta) \Longrightarrow \alpha = \beta \ \vee \ c(\alpha) < c(\beta)$$

Inducción en $c(\beta)$: $P(k)$: $\alpha, \beta \in F$, $c(\beta) = k$, $\alpha \in s(\beta) \Rightarrow \alpha = \beta \ \vee \ c(\alpha) < c(\beta)$

CB) $c(\beta) = 0 \Rightarrow \beta \in VAR$ y $\alpha \in s(\beta) = \{p_j\} \Rightarrow \alpha = p_j = \beta$.

HI) $P(k) \ \forall k \leq n$

TI) $P(n+1)$

Sea $\alpha, \beta \in F \,/\, \alpha \in s(\beta)$ y $c(\beta) = n+1$.

c1) $\beta = \neg\gamma \Rightarrow$ Si $\alpha = \beta$ listo, sino $\alpha \in s(\gamma)$ pues $s(\beta) = \{\neg\gamma\} \cup s(\gamma) \underset{\substack{HI \\ c(\gamma)=n}}{\Rightarrow} \alpha = \gamma$ ó $c(\alpha) < c(\gamma)$

pero $c(\gamma) < c(\beta) \Rightarrow c(\alpha) < c(\beta)$ ✓.

c2) $\beta = (\gamma_1 * \gamma_2)$, con $* = \{\wedge, \vee, \rightarrow\} \Rightarrow c(\gamma_1) \leq n$ y $c(\gamma_2) \leq n$

Si $\alpha = \beta$ listo, sino $\alpha \in s(\gamma_1)$ ó $\alpha \in s(\gamma_2)$ pues $s(\beta) = \{\beta\} \cup s(\gamma_1) \cup s(\gamma_2) \underset{HI}{\Rightarrow} \alpha = \gamma_1$ ó $\alpha = \gamma_2$

ó $c(\alpha) < c(\gamma_1)$ ó $c(\alpha) < c(\gamma_2)$. En cualquier caso $c(\alpha) < c(\beta)$ ✓

2018 R1C EJ3

lunes, 19 de abril de 2021 08:01 p. m.

Ejercicio 3. Decidir si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas. Justificar.

1. Sean X e Y conjuntos de fórmulas independientes. Entonces $X \bigcup Y$ es independiente.
2. Sean X e Y conjuntos de fórmulas independientes. Entonces $X \bigcap Y$ es independiente.

1) Falso. Sea X base $\Rightarrow X$ es independiente y sea Y ind / $Y \not\subseteq X \Rightarrow X \cup Y$ es dependiente por def de base.

2) Verdadero.

X ind $\Rightarrow \alpha \in X, \alpha \notin C(X - \{\alpha\})$

Y ind $\Rightarrow \beta \in Y, \beta \notin C(Y - \{\beta\})$

Sea $\gamma \in X \cap Y \Rightarrow \gamma \notin C(X - \{\gamma\})$ y $\gamma \notin C(Y - \{\gamma\})$

$\Rightarrow \gamma \notin C(X - \{\gamma\}) \cap C(Y - \{\gamma\}) \Rightarrow \gamma \notin C(X \cap Y - \{\alpha\})$

$C(X \cap Y) \subset C(X) \cap C(Y)$

2018 R1C EJ4 T

lunes, 19 de abril de 2021 08:02 p. m.

Ejercicio 4. Decidir si el conjunto $C = \{\circ, *\}$ es adecuado siendo

$$(\alpha \circ \beta) = ((\alpha \wedge \beta) \rightarrow (\alpha \vee \beta)), \quad (\alpha * \beta) = ((\alpha \vee (\beta \rightarrow \alpha))$$

2018 R1C EJ5

lunes, 19 de abril de 2021 05:24 p. m.

Ejercicio 5. Demostrar mediante una prueba la siguiente afirmación:

$$\{\neg\neg\alpha\} \vdash \alpha$$

1) $(\neg\neg\alpha \to (\neg\alpha \to \neg\neg\alpha))$ AX1

2) $\neg\neg\alpha$ DATO

3) $(\neg\alpha \to \neg\neg\alpha))$ MP 1 Y 2

4) $((\neg\alpha \to \neg\neg\alpha) \to ((\neg\alpha \to \neg\alpha) \to \alpha))$ AX3

5) $((\neg\alpha \to \neg\alpha \to \alpha))$ MP 3 Y 4

6) $(\neg\alpha \to \neg\alpha)$ TEÓRICA

7) α MP 5 Y 6

2012 2C EJ1

lunes, 19 de abril de 2021 03:38 p. m.

Ejercicio 1. Sea Γ un conjunto insatisfactible de fórmulas proposicionales, tal que para todo par de fórmulas α y β que pertenecen a Γ se tiene que si $\delta \in C(\{\alpha, \beta\})$ entonces $\delta \in \Gamma$.

Probar que existe una fórmula γ en Γ que es una contradicción.

- Γ insat $\Rightarrow \exists\ \Gamma'$ finito insat $/ \Gamma' \subset \Gamma$, $\Gamma' = \{\gamma_1, \dots, \gamma_n\}$

$\varphi_1 = (\gamma_1 \wedge \gamma_2) \in C(\{\gamma_1, \gamma_2\}) \Rightarrow (\gamma_1 \wedge \gamma_2) \in \Gamma$

$\varphi_2 = (\gamma_3 \wedge \varphi_1) \in C(\{\gamma_3, \varphi_1\}) \Rightarrow \varphi_2 \in \Gamma$

$\vdots$

$\varphi_{n-1} = (\gamma_n \wedge \varphi_{n-2}) = \bigwedge_{i=1}^{n} \gamma_i \in C(\{\gamma_n, \varphi_{n-2}\}) \Rightarrow \varphi_{n-1} \in \Gamma.$

Supongo $\bigwedge_{i=1}^{n} \gamma_i$ no contr $\Rightarrow \exists\ v$ val $/ v(\gamma_1 \wedge \dots \wedge \gamma_n) = 1 \Rightarrow \min\{v(\gamma_1), \dots, v(\gamma_n)\} = 1 \Rightarrow v(\gamma_i) = 1 \quad \forall\ 1 \leq i \leq n$

$\Rightarrow v(\Gamma') = 1$ ABS! $\Rightarrow \bigwedge_{i=1}^{n} \gamma_1 \in \Gamma' \subseteq \Gamma$ y es contr.

2017 R1C EJ2

sábado, 17 de abril de 2021 04:55 p. m.

Ejercicio 2 Probar que si $(\alpha \to \beta)$ es una tautología entonces $C(\{\beta\}) \subseteq C(\{\alpha\})$.

- Sea $b \in c(\beta)$ q.u.q. $b \in c(\alpha)$

1) Como $b \in c(\beta) \Rightarrow (v(\beta) = 1 \Rightarrow v(b) = 1)\ \forall\, v$ val.

2) Como $(\alpha \to \beta)$ es tautología $\Rightarrow$ (Si $w(\alpha) = 1 \Rightarrow w(\beta) = 1)\ \forall\, w$ val.

Sea $\tilde{v}$ val / $\tilde{v}(\alpha) = 1 \Rightarrow \tilde{v}(\beta) = 1 \Rightarrow \tilde{v}(b) = 1 \Rightarrow b \in c(\alpha)$ ✓.

↳ UNA GENÉRICA. ↳ $\forall$ val 1) ↳ $\forall$ val 2)