Adicionales 1

domingo, 30 de mayo de 2021 07:43 p. m.

1) Hallar I ins $/ \#I = 15$

$15 = 2^a(2\cdot\langle b,c\rangle+1)-1 \Rightarrow 16 = 2^a(2\langle b+c\rangle+1) \Rightarrow a=4$ y $2\langle b+c\rangle+1=1 \Rightarrow b=0$ y $c=0$

$a=4 \quad A_1, B_1, C_1, \boxed{D_1}, \ldots$

$b=0 \quad V \leftarrow V \qquad\qquad \therefore \; I = [D_1] \; Y \leftarrow Y$

$c=0 \quad \boxed{Y}, X_1, Z_1, X_2, \ldots$

etiqueta

$\#I = \langle a, \langle b, c\rangle\rangle$ variable

tipo de instrucción

2) Hallar $P / \#P = 8$

$8 = [(\#I_1, \ldots, \#I_n)] - 1 \Rightarrow 2^0 \cdot 3^2 = [(\#I_1, \#I_2)]$

$\Rightarrow \#I_1 = 0$ y $\#I_2 = 2$

- Para I_1: $0 = \langle a, \langle b,c\rangle\rangle = 2^a(2\langle b,c\rangle+1)-1 \Rightarrow a=0 \;\wedge\; 1 = 2\langle b,c\rangle+1 \Rightarrow a=0 \;\; b=0 \;\; c=0$

$\therefore I_1 = \; Y \leftarrow Y$

- Para I_2: $2 = \langle a, \langle b,c\rangle\rangle = 2^a(2\langle b,c\rangle+1)-1 \Rightarrow 3 = 2^a(2\langle b,c\rangle+1)-1 \Rightarrow a=0 \;\wedge\; 3 = 2\langle b,c\rangle+1$

$\Rightarrow 1 = \langle b,c\rangle = 2^b(2c+1)-1 \Rightarrow 2 = 2^b(2c+1) \Rightarrow b=1$ y $c=0$

$\therefore I_1 = \; Y \leftarrow Y+1$

Luego $P: \begin{cases} Y \leftarrow Y \\ Y \leftarrow Y+1 \end{cases}$

3) Calcular el código del sig. prog. y decir que función computa.

```
      IF X1 ≠ 0 GOTO A1
[A1]  X1 ← X1 - 1
      Y ← Y + 1
      IF X1 ≠ 0 GOTO A1
```

Codificación:

I_1 y I_4: $a=0$, $b = 2+1 = 3$, $c = 2-1 = 1$

I_2: $a=1$, $b=2$, $c=1$

I_3: $a=0$, $b=1$, $c=1-1=0$

$\#I_1 = \#I_4 = \langle 0, \langle 3,1\rangle\rangle = 2^0\cdot(2\langle 3,1\rangle+1)-1 = 46$

$\langle 3,1\rangle = 2^3\cdot(2\cdot1+1)-1 = 23$

$\#I_2 = \langle 1, \langle 2,1\rangle\rangle = 2^1(2\cdot\langle 2,1\rangle+1)-1 = 45$

$\langle 2,1\rangle = 2^2\cdot(2\cdot1+1)-1 = 11$

$\#I_3 = \langle 0, \langle 1,0\rangle\rangle = 2^0 \cdot (2\langle 1,0\rangle + 1) - 1 = 2$

$\langle 1,0\rangle = 2^1(2\cdot 0+1) - 1 = 1$

Luego $\#P = [\#I_1, \dots, \#I_4] - 1 = 2^{46} \cdot 3^{45} \cdot 5^{2} \cdot 7^{46} - 1$

La función que computa es: $f: \mathbb{N} \to \mathbb{N} \,/\, f(x) = \begin{cases} x & \text{si } x \neq 0 \\ 1 & \text{si } x = 0 \end{cases}$

X_1	Y
0	0
0	1

X_1	Y
2	0
1	1
0	1

Adicionales 2

domingo, 30 de mayo de 2021 09:25 p. m.

1) Decidir si las sig. funciones son computables:

a- $f: \mathbb{N} \to \mathbb{N} / f(x) = \min_{t \leq x} Halt(t,t)$ ES COMPUTABLE

$Halt(0,0) = 1 \Rightarrow \min = 0 \Rightarrow f(x) = 0 \ \forall x \in \mathbb{N} \Rightarrow f = cero \Rightarrow f$ es computable.

$P / \#P = 0 \to P: Y \leftarrow Y \Rightarrow$ este prog. computa la función cero, $\psi_P(x) = 0$

b- $f: \mathbb{N} \to \mathbb{N} / f(x) = Halt(x,x) + 1$ NO ES COMPUTABLE

Supongo f computable. Defino $g: \mathbb{N} \to \mathbb{N} / g(x) = f(x) \dot{-} 1 \Rightarrow g = \dot{-} \circ (f \times h_1)$

$\Rightarrow g$ es computable por comp. de computables.

$g(x) = f(x) \dot{-} 1 = (Halt(x,x) + 1) \dot{-} 1$

Como $Halt(x,x) \geq 0 \Rightarrow Halt(x,x) + 1 \geq 1 \Rightarrow g(x) = (Halt(x,x) + 1) - 1 = Halt(x,x)$ ABS!

$\therefore f$ no es computable.

Adicionales 3

domingo, 30 de mayo de 2021 11:26 p. m.

Ej de parcial:

Decidir si $f: \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ es computable siendo $f(x) = Halt(x, \underbrace{\overbrace{23457991111222333}^{K}{}^{2} - 1}_{e})$

$\#P = K^2 - 1 = [\#I_1, \dots, \#I_n] - 1$ donde $n = |P|$

Sup $K = \prod_{i=1}^{n} p_i^{\alpha_i}$ donde $\alpha_n \neq 0 \Rightarrow K^2 = \prod_{i=1}^{n} p_i^{2\alpha_i}$ $2\alpha_i = \#I_i$

$\Rightarrow \#I_i$ es par $\forall i = 1, \dots, n$

$\langle a_i, \langle b_i, c_i \rangle\rangle = 2^{a_i}(2\langle b_i, c_i\rangle + 1) - 1 \Rightarrow \underbrace{\#I_i + 1}_{\text{IMPAR}} = 2^{a_i}(2\langle b_i, c_i\rangle + 1) \Rightarrow a_i = 0 \Rightarrow$ la instrucción I_i no tiene etiq.

$\therefore$ P no tiene etiq.

> Observar que si un prog. no tiene etiq $\Rightarrow$ para toda entrada el prog. termina en una cantidad finita de pasos.
>
> Si hay un salto a una etiqueta $\Rightarrow$ el prog. termina.
>
> En cualquier otro caso, se ejecuta la sig. instrucción.

$\therefore$ $Halt(x, \#P) = 1 \quad \forall x \in \mathbb{N} \Rightarrow f(x) = 1 \Rightarrow f = h_1 \Rightarrow f$ es RP $\Rightarrow f$ es computable.

Ejercicio 1

domingo, 30 de mayo de 2021 08:13 p. m.

Ejercicio 1. Calcular el código de los siguientes programas y decir qué función computan:

1. IF $X_1 \neq 0$ GOTO A_1
   $[A_1] X_1 \leftarrow X_1 + 1$
   IF $X_1 \neq 0$ GOTO A_1
   $[A_1] Y \leftarrow Y + 1$

¿Que f computa? $f: \mathbb{N} \to \mathbb{N} / f(n) = \uparrow$

Codificación:

$\#P = [(\#I_1, \#I_2, \#I_3, \#I_4)] - 1$

- I_1: $a=0$ $b=2+1=3$ $c=2-1=1$ $\Rightarrow \#I_1 = \langle 0, \langle 3,1\rangle\rangle$, $\langle 3,1\rangle = 2^3(2\cdot1+1)-1 = 23$, $\langle 0,23\rangle = 2^0(2\cdot23+1)-1 = 46$
- I_2: $a=1$ $b=1$ $c=2-1=1$ $\Rightarrow \#I_2 = \langle 1, \langle 1,1\rangle\rangle$, $\langle 1,1\rangle = 2^1(2\cdot1+1)-1 = 5$, $\langle 1,5\rangle = 2^1(2\cdot5+1)-1 = 21$
- I_3: $a=0$ $b=2+1=3$ $c=2-1=1$ $\Rightarrow \#I_3 = \#I_1$
- I_4: $a=1$ $b=1$ $c=1-1=0$ $\Rightarrow \#I_4 = \langle 1, \langle 1,0\rangle\rangle$, $\langle 1,0\rangle = 2^1(2\cdot0+1)-1 = 1$, $\langle 1,1\rangle = 5$

$\Rightarrow \#P = 2^{46}\cdot 3^{21}\cdot 5^{46}\cdot 7^{5} - 1$

$[B_1]$ IF $X_1 \neq 0$ GOTO A_1
$Z_1 \leftarrow Z_1 + 1$
IF $Z_1 \neq 0$ GOTO B_1
$[A_1] X_1 \leftarrow X_1$

¿Que f computa?

X_1	Z_1	Y
0	0	0
$\uparrow$	$\neq 0$	

X_1	Z_1	Y
$\neq 0$	0	0

$f: \mathbb{N} \to \mathbb{N} / f(n) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \neq 0 \\ \uparrow & \text{si } x = 0 \end{cases}$

Codificación:

$\#P = [(\#I_1, \#I_2, \#I_3, \#I_4)] - 1$

- I_1: $a=2$ $b=2+1=3$ $c=2-1=1$ $\Rightarrow \#I_1 = \langle 2, \langle 3,1\rangle\rangle$, $\langle 3,1\rangle = 23$, $\langle 2,23\rangle = 2^2(2\cdot23+1)-1 = 187$
- I_2: $a=0$ $b=1$ $c=3-1=2$ $\Rightarrow \#I_2 = \langle 0, \langle 1,2\rangle\rangle$, $\langle 1,2\rangle = 2^1(2\cdot2+1)-1 = 9$, $\langle 0,9\rangle = 2^0\cdot(2\cdot9+1)-1 = 18$
- I_3: $a=0$ $b=2+2=4$ $c=3-1=2$ $\Rightarrow \#I_3 = \langle 0, \langle 4,2\rangle\rangle$, $\langle 4,2\rangle = 2^4(2\cdot2+1)-1 = 79$, $\langle 0,79\rangle = 2^0(2\cdot79+1)-1 = 158$
- I_4: $a=1$ $b=0$ $c=2-1=1$ $\Rightarrow \#I_4 = \langle 1, \langle 0,1\rangle\rangle$, $\langle 0,1\rangle = 2^0(2\cdot1-1)-1 = 2$, $\langle 1,2\rangle = 2^1(2\cdot2+1)-1 = 9$

$\Rightarrow \#P = 2^{187}\cdot 3^{18}\cdot 5^{158}\cdot 7^{9} - 1$

3. $[A_1]$ IF $X_1 \neq 0$ GOTO B_1
   $Z_1 \leftarrow Z_1 + 1$
   IF $Z_1 \neq 0$ GOTO E_1
   $[B_1] X_1 \leftarrow X_1 - 1$
   $Y_1 \leftarrow Y_1 + 1$
   $Z_1 \leftarrow Z_1 + 1$
   IF $Z_1 \neq 0$ GOTO A_1
   $[E_1] Y_1 \leftarrow Y_1 + 1$
   $Y_1 \leftarrow Y_1 - 1$

¿Que f computa? $f: \mathbb{N} \to \mathbb{N} / f(n) = n$

X_1	Z_1	Y
0	0	0
0	1	0

X_1	Z_1	Y
1	0	0
0	1	1
0	2	1

X_1	Z_1	Y
2	0	0
1	1	1
0	2	2
0	3	2

Codificación:

$\#P = [(\#I_1, \dots, \#I_9)] - 1$

- I_1: $a = 1$ $b = 2+2 = 4$ $c = 1$ $\Rightarrow \#I_1 = \langle 1, \langle 4, 1 \rangle\rangle$, $\langle 4,1\rangle = 16\cdot(2+1) - 1 = 47$, $\langle 1, 47) = 2(2\cdot 47 + 1) - 1 = 189$
- I_2: $a = 0$ $b = 1$ $c = 2$ $\Rightarrow \#I_2 = \langle 0, \langle 1, 2\rangle\rangle$, $\langle 1,2\rangle = 2\cdot(4+1) - 1 = 9$, $\langle 0, 9\rangle = 18$
- I_3: $a = 0$ $b = 2+5 = 7$ $c = 2$ $\Rightarrow \#I_3 = \langle 0, \langle 7, 2\rangle\rangle$, $\langle 7,2\rangle = 128(4+1) - 1 = 639$, $\langle 0, 639\rangle = 1278$
- I_4: $a = 2$ $b = 2$ $c = 1$ $\Rightarrow \#I_4 = \langle 2, \langle 2, 1\rangle\rangle$, $\langle 2,1\rangle = 4\cdot(2+1) - 1 = 11$, $\langle 2, 11\rangle = 4(22+1) - 1 = 91$
- I_5: $a = 0$ $b = 1$ $c = 0$ $\Rightarrow \#I_5 = \langle 0, \langle 1, 0\rangle\rangle$, $\langle 1,0\rangle = 2\cdot(0+1) - 1 = 1$, $\langle 0, 1\rangle = 2$
- I_6: $a = 0$ $b = 1$ $c = 2$ $\Rightarrow \#I_6 = \langle 0, \langle 1, 2\rangle\rangle$, $\langle 1,2\rangle = 2\cdot(4+1) - 1 = 9$, $\langle 0, 9\rangle = 18$
- I_7: $a = 0$ $b = 2+1 = 3$ $c = 2$ $\Rightarrow \#I_7 = \langle 0, \langle 3, 2\rangle\rangle$, $\langle 3,2\rangle = 8(4+1) - 1 = 39$, $\langle 0, 39\rangle = 78$
- I_8: $a = 5$ $b = 1$ $c = 0$ $\Rightarrow \#I_8 = \langle 5, \langle 1, 0\rangle\rangle = \langle 5, 1\rangle = 32(2+1) - 1 = 95$
- I_9: $a = 0$ $b = 2$ $c = 0$ $\Rightarrow \#I_9 = \langle 0, \langle 2, 0\rangle\rangle$, $\langle 2,0\rangle = 4(0+1) - 1 = 3$, $\langle 0, 3\rangle = 6$

$\Rightarrow \#P = 2^{189} \cdot 3^{18} \cdot 5^{1278} \cdot 7^{91} \cdot 11^{2} \cdot 13^{18} \cdot 17^{78} \cdot 19^{95} \cdot 23^{6} - 1$

Ejercicio 2

domingo, 30 de mayo de 2021 09:04 p. m.

Ejercicio 2. Hallar el programa P de código:

1. 575

$\Rightarrow \#P = 575 = [(\#I_1, \dots, \#I_k)] - 1 \Rightarrow [(\#I_1, \dots, \#I_k)] = 576 = 2^6 \cdot 3^2$

$\Rightarrow \#I_1 = 6$ y $\#I_2 = 2$

- $\#I_1 = \langle a, \langle b, c\rangle\rangle = 6 \Rightarrow 2^a \cdot (2\langle b,c\rangle + 1) = 7 \Rightarrow a = 0$ y $\langle b, c\rangle = 3 \Rightarrow a = 0$ y $2^b \cdot (2c+1) = 4 \Rightarrow a=0,\ b=2,\ c=0.$

$\Rightarrow I_1 = \ Y \leftarrow Y - 1$

- $\#I_2 = \langle a, \langle b, c\rangle\rangle = 2 \Rightarrow 2^a (2\langle b,c\rangle + 1) = 3 \Rightarrow a = 0$ y $\langle b, c\rangle = 1 \Rightarrow a = 0$ y $2^b(2 \cdot c + 1) = 2 \Rightarrow a=0,\ b=1,\ c=0$

$\Rightarrow I_2 = \ Y \leftarrow Y + 1$

$\therefore \ P = \quad Y \leftarrow Y - 1$
$\qquad\qquad Y \leftarrow Y + 1$

2. 23

$\Rightarrow \#P = 23 = [(\#I_1, \dots, \#I_k)] - 1 \Rightarrow [(\#I_1, \dots, \#I_k)] = 24 = 2^3 \cdot 3^1$

$\Rightarrow \#I_1 = 3$ y $\#I_2 = 1$

- $\#I_1 = \langle a, \langle b, c\rangle\rangle = 3 \Rightarrow 2^a (2\langle b,c\rangle + 1) = 4 \Rightarrow a = 2,\ b = 0,\ c = 0$

$\Rightarrow I_1 = [B_1] \ Y \leftarrow Y$

- $\#I_2 = \langle a, \langle b, c\rangle\rangle = 1 \Rightarrow 2^a (2\langle b,c\rangle + 1) = 2 \Rightarrow a = 1,\ b = 0,\ c = 0$

$\Rightarrow I_2 = [A_1] \ Y \leftarrow Y$

$\therefore \ P = \quad [B_1] \ Y \leftarrow Y$
$\qquad\qquad [A_1] \ Y \leftarrow Y$

3. 17

$\Rightarrow \#P = 17 = [(\#I_1, \dots, \#I_k)] - 1 \Rightarrow [(\#I_1, \dots, \#I_k)] = 18 = 2^1 \cdot 3^2$

$\Rightarrow \#I_1 = 1$ y $\#I_2 = 2 \Rightarrow I_1 = [A_1] \ Y \leftarrow Y, \quad I_2 = Y \leftarrow Y + 1$

$\therefore \ P = \quad [A_1] \ Y \leftarrow Y$
$\qquad\qquad\qquad Y \leftarrow Y + 1$

4. 20

$\Rightarrow \#P = 20 = [(\#I_1, \dots, \#I_k)] - 1 \Rightarrow [(\#I_1, \dots, \#I_k)] = 21 = 2^0 \cdot 3^1 \cdot 5^0 \cdot 7^1$

$\therefore \ P = \qquad\quad Y \leftarrow Y$
$\qquad\qquad [A_1] \ Y \leftarrow Y$

$$\therefore\ P = \begin{array}{ll} & y \leftarrow y \\ [A_1] & y \leftarrow y \\ & y \leftarrow y \\ [A_1] & y \leftarrow y \end{array}$$

Ejercicio 3. Exhibir un programa de código P que cumpla:

1. Halt(x,P)=1 $\forall x$.
2. Halt(x,P)=0 $\forall x$.
3. Halt(x,P)=1 $\Longleftrightarrow$ x par.

P = $Y \leftarrow Y+1$

PARA CUALQUIER VALOR DE x EL PROG. TERMINA.

P = [A_1] $Z_1 \leftarrow Z_1+1$
IF $Z_1 \neq 0$ GOTO A_1

PARA CUALQUIER VALOR DE x EL PROG. SE CUELGA

P =
$X \leftarrow X+1$
$X \leftarrow X+1$ } PARA NO TENER PROBLEMAS CON EL CERO.
[C_1] $X \leftarrow X-1$
IF $X \neq 0$ GOTO A_1
[B_1] $Z_1 \leftarrow Z_1+1$
IF $Z_1 \neq 0$ GOTO B_1 } → NO TERMINA
[A_1] $X \leftarrow X-1$
IF $X=0$ GOTO E_1
GOTO C_1

$X=0 \to X+1=1 \to X+1=2 \to X-1=1 \to \neq 0\ A_1 \to X-1=0 \to E_1$ ✓
$X=1 \to X+1+1-1=2 \to \neq 0\ A_1 \to X-1=1 \to C_1 \to X-1=0 \to B_1$ ✓
$X=2 \to X+1+1-1=3 \to \neq 0\ A_1 \to X-1=2 \to C_1 \to X-1=1 \to \neq 0\ A_1 \to X-1=0 \to E_1$ ✓
$X=3 \to X+1+1-1=4 \to \neq 0\ A_1 \to X-1=3 \to C_1 \to X-1=2 \to \neq 0\ A_1 \to X-1=1 \to C_1$
$\to X-1=0 \to B_1$ ✓

Ejercicio 5

lunes, 31 de mayo de 2021 01:22 a. m.

Ejercicio 5. .

1. Sea $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ una función computable. Construir un programa que compute $h : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ tal que:
$h(x) = \begin{cases} f(x), & x \neq 0; \\ 1, & \text{x=0.} \end{cases}$

```
     IF X ≠ 0 GOTO A1
     Y ← Y+1
     GOTO E
[A1] Y ← f(X)
```

$\longrightarrow$ Como f es computable puedo hacer una macro que retorne f(x) y uso la macro de asignación para asignarle f(x) a y.

2. Deducir del item anterior, que $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ tal que:

$$f(x) = \begin{cases} Halt(x,x), & x \neq 0; \\ 2, & \text{x=0.} \end{cases} \quad \text{no es computable.}$$

Supongo que f es computable. Armo el sig. programa P:

$[A_1]$ IF $f(X) \neq 0$ GOTO A_1 $\Big\}$ $\Rightarrow \#P = n > 0$ (es igual a 0 si fuese sólo la ins $Y \leftarrow Y$)

Supongo $f(n) = 1 \overset{n \neq 0}{\iff} Halt(n,n) = 1 \iff P$ termina con $x = n \iff f(n) = 0$ ABS! $\therefore$ f no es computable.

Ejercicio 6. Sea P un predicado de una variable que no es computable. Construir a partir de P una función f de una variable, tal que f no sea computable pero $f \circ f$ si.

- $f: \mathbb{N} \to \mathbb{N} \,/\, f(n) = \begin{cases} P(x) & x \geq 2 \\ 1 & x \leq 1 \end{cases}$

- Si $x \leq 1$: $f(\underbrace{f(x)}_{1}) = f(1) = 1$
- Si $x \geq 2$: $f(\underbrace{f(x)}_{P(x)}) = f(\underbrace{P(x)}_{\leq 1}) = 1$

$\Rightarrow (f \circ f)(x) = 1 \quad \forall n \in \mathbb{N}$

$f \circ f = h_1 \Rightarrow RP \Rightarrow$ es comp.

- Supongamos f computable, entonces:

$P(x) = P(0) \cdot EQ(x,0) + P(1) \cdot EQ(x,1) + f(x) \alpha(EQ(x,0)) \cdot \alpha(EQ(x,1))$

Como P es comp. de funciones computables (cte, EQ, f, α, suma, prod, proy) $\Rightarrow$ P es computable. ABS!

$\therefore$ f no es computable.

Ejercicio 7. Decidir V o F. En caso de ser V demostrarlo, en caso contrario exhibir un contraejemplo.
Si $f+g$ y fg son funciones computables, entonces f y g son funciones computables

$$\left.\begin{array}{l} f: \mathbb{N} \to \mathbb{N} \,/\, f(x) = Halt(x,x) \\ g: \mathbb{N} \to \mathbb{N} \,/\, g(x) = -Halt(x,x) + 1 \end{array}\right\} \Rightarrow f(x) + g(x) = 1 \quad y \quad f(x) \cdot g(x) = 0$$

$Halt(x,x) - Halt(x,x) + 1 = 1$ $\qquad$ $-Halt(x,x)^2 + Halt(x,x) = 0$

$\Rightarrow$ Las dos computables pues son constantes (h_0 y h_1 RP's).

$\Downarrow$

por lo menos f no es comp.
(la otra no hace falta, ya es falso).

Ejercicio 8

lunes, 31 de mayo de 2021 02:32 a. m.

Ejercicio 8. Demostrar que $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ tal que f(x)=x+Halt(x,x) es una función creciente y no computable.

1) Computabilidad:

Supongo f computable. Defino $g : \mathbb{N} \to \mathbb{N} / g(x) = f(x) \dot{-} x = \underbrace{(Halt(x,x) + x)}_{\geq x} \dot{-} x = Halt(x,x)$.

$\Rightarrow$ g es comp de f y de $\dot{-}$, ambas computables $\Rightarrow$ g es computable $\Rightarrow$ Halt es computable. ABS!

$\therefore$ f no es comp.

2) Monotonia:

$x \geq y \iff f(x) \geq f(y)$

$\Rightarrow$) $x \geq y$

c1) $Halt(x,x) = Halt(y,y) = 0 \Rightarrow Halt(x,x) + x \geq Halt(y,y) + y \Rightarrow f(x) \geq f(y)$

c2) $Halt(x,x) = Halt(y,y) = 1 \Rightarrow Halt(x,x) + x \geq Halt(y,y) + y \Rightarrow f(x) \geq f(y)$

c3) $Halt(x,x) = 1 \quad Halt(y,y) = 0 \Rightarrow Halt(x,x) + x > Halt(y,y) + y \Rightarrow f(x) > f(y) \Rightarrow f(x) \geq f(y)$

$x \geq y$

c4) $Halt(x,x) = 0 \quad Halt(y,y) = 1 \Rightarrow Halt(x,x) + x > Halt(y,y) + y \Rightarrow f(x) > f(y) \Rightarrow f(x) \geq f(y)$

$\Leftarrow$) $f(x) \geq f(y) \Rightarrow Halt(x,x) + x \geq Halt(y,y) + y \Rightarrow x > y \Rightarrow x \geq y$

$0 \leq Halt(y,y) \leq 1$

Ejercicio 9

lunes, 31 de mayo de 2021 04:20 p. m.

Ejercicio 9. Decidir si $f : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$ es computable siendo

$$f(x,y) = Halt(x,y)^3 + 5Halt(x,y)^2$$

$f(x,y) = Halt(x,y)^3 + 5Halt(x,y)^2 = 6Halt(x,y)$ $\left(Halt(x,y)^t = Halt(x,y)\right)$

$\Rightarrow$ Supongo f computable $\Rightarrow$ Defino $g: \mathbb{N} \to \mathbb{N} / g(x) = Coc(f(x,x), 6) = \left\lfloor \frac{6Halt(x,x)}{6} \right\rfloor = Halt(x,x)$

$\therefore$ g es computable por comp. de funciones computables pero $g = Halt$ ABS!

$\therefore$ f no es computable.

Ejercicio 10

lunes, 31 de mayo de 2021 05:16 p. m.

Ejercicio 10. Decidir si $f : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$ es computable siendo

$$f(x,y) = 2^{Halt(x,y)^3} 5^{Halt(x,y)^2 + 10 Halt(y,x)}$$

$f(x,y)[0]$ $\quad\quad$ $p_0 = 2$

Supongo f computable $\Rightarrow$ Defino $g : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N} \,/\, g(x,y) = f[0](x,y) = V_{p_0}(f(x,y)) = Halt(x,y)^3 = Halt(x,y)$

$\Rightarrow$ g es computable por comp. de funciones computables ($g = \bullet[\bullet] \circ (f \times cero)$) pero $g = Halt$ ABS!

RR $\to$ comp $\quad$ comp (sup)

$\therefore$ f no es computable

Ejercicio 11

lunes, 31 de mayo de 2021 06:05 p. m.

Ejercicio 11. Decidir si $f : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$ es computable siendo

$$f(x,y) = 2Halt(x,y) \dot{-} 5Halt(x,y)^{Halt(x,y)+2}$$

- $Halt(x,y) \geq 0 \Rightarrow Halt(x,y) + 2 \geq 2 \Rightarrow Halt(x,y)^{Halt(x,y)+2} = Halt(x,y)$
- $2Halt(x,y) \leq 5Halt(x,y) \Rightarrow 2Halt(x,y) \dot{-} 5Halt(x,y) = 0$

$\therefore$ $f(x,y) = cero(x) \Rightarrow f = cero \circ \pi_1 \Rightarrow f$ es comp. por comp. de funciones comp (RP's).

Ejercicio 12. Decidir si $f : \mathbb{N}^3 \to \mathbb{N}$ es computable siendo

$$f(x,y,z) = \min_{t \leq y}(\alpha(Halt(x,t)) \wedge t > z)$$

Supongo f computable

1) Defino $g : \mathbb{N} \to \mathbb{N} / g(x) = f(x+1, x+1, x) \Rightarrow g = f \circ (suc \circ \pi_1 \times suc \circ \pi_1 \times \pi_1) \Rightarrow$ g es computable por comp. de funciones computables.

Reescribimos g:

$$g(x) = f(x+1,x+1,x) = \min_{t \leq x+1} (\underbrace{\alpha(Halt(x+1),t) \wedge t > x}_{Cp(x,t)}) = \begin{cases} \min t \leq x+1 & \text{si } \exists t \leq x+1 / Cp(x,t) = 1 \\ 0 & \text{si no} \end{cases}$$

$= \alpha(Halt(x+1, x+1)) \cdot (x+1)$ pues como $t \leq x+1$ y $t > x$, el único valor posible de t es $t = x+1$

$\therefore g = PROD \circ (\alpha \circ (Halt \circ (suc \circ \pi_1 \times suc \circ \pi_1)) \times suc \circ \pi_1)$

2) Defino $h : \mathbb{N} \to \mathbb{N} / h(x) = coc(g(x), x+1) = \alpha(Halt(x+1, x+1)) \Rightarrow h = coc \circ (g \times suc \circ \pi_1) \Rightarrow$ h es computable por comp. de funciones computables.

3) Defino $w : \mathbb{N} \to \mathbb{N} / w(x) = h(x \dot{-} 1) = \alpha(Halt(x,x)) \Rightarrow w = h \circ PRED \Rightarrow$ w es computable por comp. de funciones computables.

4) Armo el sig. programa

$[A_1]$ IF $w(X) = 0$ GOTO A_1

Supongamos $w(p_0) = 0 \iff Halt(p_0, p_0) = 1 \iff P$ termina si $x = p_0 \iff w(p_0) \neq 0$ ABS! $\therefore$ f no es computable (lo único que supuse).

Ejercicio 13. Demostrar que $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ tal que $f(x+2) = f(x+1) + f(x)$, $f(0) = 0$, $f(1) = 1$ es una función RP.

Necesito guardarme dos elementos anteriores. Defino $g : \mathbb{N} \to \mathbb{N} / g(x) = \langle f(x), f(x+1) \rangle$. Veamos que g es RP.

- $g(0) = \langle f(0), f(1) \rangle = \langle 0, 1 \rangle \in \mathbb{N}$ ✓
- $g(x+1) = \langle f(x+1), f(x+2) \rangle = H(x, g(x))$

- $f(x) = \ell(g(x))$
- $f(x+1) = r(g(x))$
- $f(x+2) = r(g(x)) + \ell(g(x))$

Defino $H : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N} / H(x,y) = \langle r(y), r(y) + \ell(y) \rangle \Rightarrow H = \langle , \rangle \circ (r \circ \pi_2 \times \text{SUMA} \circ (r \circ \pi_2 \times \ell \circ \pi_2))$

$\Rightarrow$ H es RP por comp. de funciones RP $\Rightarrow$ g es RP pues se obtuvo por un ERI a partir de H.

$\therefore$ como $f = \ell \circ g$, f es RP por comp. de RP's.

Ejercicio 14. Probar que las funciones $f, g : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ son RP siendo

$$f(n+1) = 2g(n), \quad g(n+1) = 3f(n), \quad f(0) = 1, \quad g(0) = 0$$

Defino $h : \mathbb{N} \to \mathbb{N} \,/\, h(x) = \langle f(x), g(x) \rangle$. Veamos que h es RP.

- $h(0) = \langle f(0), g(0) \rangle = \langle 1, 0 \rangle \in \mathbb{N}$ ✓
- $h(x+1) = \langle f(x+1), g(x+1) \rangle = H(x, h(x))$

Defino $H : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N} \,/\, H(x,y) = \langle 2 \cdot r(y), 3 \cdot \ell(y) \rangle \Rightarrow H = \langle , \rangle \circ (PROD \circ (h_2 \times r \circ \pi_2) \times PROD \circ (h_3 \times \ell \circ \pi_2))$

$\Rightarrow$ H es RP por comp. de funciones RP's $\Rightarrow$ h es RP pues se obtuvo por ERI a partir de H.

$\therefore$ Como $f = \ell \circ h$ y $g = r \circ h$, f y g son RP por comp. de funciones RP's

Ejercicio 15

domingo, 30 de mayo de 2021 11:02 p. m.

Ejercicio 15. Demostrar que $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ tal que $f(n) = a_n$, siendo $a_0 = 1$, $a_1 = 2$, $a_2 = 2$ y $a_{n+3} = a_n a_{n+1} + a_{n+2}^2$ es una función RP.

En este caso necesito 3 elementos anteriores, no puedo aplicar ERI asi nomás ya que eso me guarda solo el elemento anterior, y no los 3 anteriores, no me alcanza. Por eso defino g, para codificar los 3 elementos anteriores en un número, de esta manera me los "guardo" (por esto mismo es que está en la práctica 8 y no en la 7).

Defino $g(n) = \langle f(n), \langle f(n+1), f(n+2) \rangle\rangle$. Veamos que g es RP:

- $g(0) = \langle f(0), \langle f(1), f(2) \rangle\rangle = \langle 1, \langle 2, 2 \rangle\rangle = 79 \in \mathbb{N}$
- $g(n+1) = \langle f(n+1), \langle f(n+2), f(n+3) \rangle\rangle$

Notar que $f(n) = \ell(g(n))$

$\Rightarrow f(n+1) = \ell(\pi(g(n)))$, $f(n+2) = \pi^2(g(n))$, $f(n+3) = f(n) \cdot f(n+1) + f(n+2)^2 = \ell(g(n)) \cdot \ell(\pi(g(n))) + (\pi^2(g(n)))^2$

$\therefore g(n+1) = \langle \ell(\pi(g(n))), \langle \pi^2(g(n)), \ell(g(n)) \cdot \ell(\pi(g(n))) + (\pi^2(g(n)))^2 \rangle\rangle = H(n, g(n))$

donde $H: \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N} \,/\, H(x,y) = \langle \ell(\pi(y)), \langle \pi^2(y), \ell(y) \cdot \ell(\pi(y)) + (\pi^2(y))^2 \rangle\rangle$

$\Rightarrow H = \langle , \rangle \circ (\ell \circ \pi \circ \Pi_2 \times \langle , \rangle \circ (\pi^2 \circ \Pi_2 \times \text{SUMA} \circ (\text{PROD} \circ (\ell \circ \Pi_2 \times \ell \circ \pi \circ \Pi_2) \times \text{PROD} \circ (\pi^2 \circ \Pi_2 \times \pi^2 \circ \Pi_2))))$

H es RP por comp. de funciones RP $\Rightarrow$ g es RP pues la escribimos como un ERI a partir de H.

$\therefore$ Como $f(n) = \ell(g(n)) \Rightarrow f = \ell \circ g \Rightarrow$ f es RP por comp. de funciones RP.

Ejercicio 16. Demostrar que existe $n \in \mathbb{N}$, tal que f es no computable, siendo $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ tal que f(x)=Halt(x,n).
Sugerencia: Elegir n igual al código de programa que computa la función $g(x) = \Phi(x, x)$.

- Para cada $n>0$, se definió $\Phi^n : \mathbb{N}^{n+1} \to \mathbb{N} \,/\, \Phi^n(x_1, \dots, x_n, e) = \Psi_P^n(x_1, \dots, x_n)$, $\#P = e$. Con Φ^n parcialmente computable $\forall n>0$.

- Sea $g(x) = \Phi(x,x)$ y $n = \#P \,/\, P$ computa g. $g(x) = \Phi(x,x) = \Psi_P(x)$ $\#P = x$

  qvq $f(x) = \text{Halt}(x,n)$ no es computable.