Teoría Axiomática

Adicional 1

Demostrar que $\Gamma \vdash \gamma$ dnd $\Gamma = \{((P_3 \to (P_4 \to P_3)) \to ((P_1 \to P_6) \to P_7)), ((P_3 \wedge P_4) \to (P_1 \to P_6))\}$ y $\gamma = ((P_3 \wedge P_4) \to P_7)$

Por T. de deduccion, es eq a probar q $\Gamma \cup \{(P_3 \wedge P_4)\} \vdash P_7$.

1. $((P_3 \to (P_4 \to P_3)) \to ((P_1 \to P_6) \to P_7))$ = dato
2. $(P_3 \to (P_4 \to P_3))$ = AX1
3. $((P_1 \to P_6) \to P_7)$ = MP entre α_1 y α_2
4. $((P_3 \wedge P_4) \to (P_1 \to P_6))$ = dato
5. $(P_3 \wedge P_4)$ = dato
6. $(P_1 \to P_6)$ = MP entre α_4 y α_5
7. P_7 = MP entre α_3 y α_6

Adicional 2

Probar que $((\neg\alpha \to \alpha) \to \alpha)$ es demostrable ⇒ qvq $\emptyset \vdash \alpha$

1. $((\neg\alpha \to \neg\alpha) \to ((\neg\alpha \to \alpha) \to \alpha))$ = AX3
2. $(\neg\alpha \to \neg\alpha)$ = visto en clase q $(\alpha \to \alpha)$ es demostrable
3. $((\neg\alpha \to \alpha) \to \alpha)$ = MP entre α_1 y α_2

Adicional 3

Probar que $\emptyset \vdash (\alpha \to (\neg\alpha \to \beta))$ ⇒ por el T. de deduccion, es eq a probar que $\{\alpha, \neg\alpha\} \vdash \beta$

1. $((\neg\beta \to \neg\alpha) \to ((\neg\beta \to \alpha) \to \beta))$ = AX3
2. $(\neg\alpha \to (\neg\beta \to \neg\alpha))$ = AX1
3. $\neg\alpha$ = dato
4. $(\neg\beta \to \neg\alpha)$ = MP entre α_2 y α_3
5. $((\neg\beta \to \alpha) \to \beta)$ = MP entre α_1 y α_4
6. $(\alpha \to (\neg\beta \to \alpha))$ = AX1
7. α = dato
8. $(\neg\beta \to \alpha)$ = MP entre α_6 y α_7
9. β = MP entre α_5 y α_8

Adicional 4

Probar que $\{\neg\neg\alpha\} \vdash \alpha$

1. $(\neg\neg\alpha \to (\neg\alpha \to \neg\neg\alpha))$ = AX1
2. $\neg\neg\alpha$ = dato
3. $(\neg\alpha \to \neg\neg\alpha)$ = MP entre α_1 y α_2
4. $((\neg\alpha \to \neg\neg\alpha) \to ((\neg\alpha \to \neg\alpha) \to \alpha))$
5. $((\neg\alpha \to \neg\alpha) \to \alpha)$ = MP entre α_3 y α_4
6. $(\neg\alpha \to \neg\alpha)$ pues $\emptyset \vdash (\alpha \to \alpha)$
7. α = MP entre α_5 y α_6

Adicional 5

Probar que $\{\alpha \to \beta\} \vdash \{\neg\neg\alpha \to \neg\neg\beta\}$ ⇒ por T. de deduccion, es eq a $\{(\alpha \to \beta), \neg\neg\alpha\} \vdash \neg\neg\beta$

1. $\neg\neg\alpha$ = dato
2. $(\neg\neg\alpha \to \alpha)$ por T. de deduccion i.e. $\emptyset \vdash (\neg\neg\alpha \to \alpha)$ ⇒ ver hoja de ejs
3. α = MP entre α_1 y α_2
4. $(\alpha \to \beta)$ = dato
5. β = MP entre α_3 y α_4
6. $(\beta \to \neg\neg\beta)$ = teorema (a probar)
7. $\neg\neg\beta$ = MP entre α_5 y α_6

Ejercicio 17

1. $((P_1 \to \neg P_1) \to (P_1 \to P_1))$

α_1: $((P_1 \to (\neg P_1 \to P_1)) \to ((P_1 \to \neg P_1) \to (P_1 \to P_1)))$ = AX2

α_2: $(P_1 \to (\neg P_1 \to P_1))$ = AX1

α_3: $((P_1 \to \neg P_1) \to (P_1 \to P_1))$ = MP entre α_1 y α_2

2. $(((P_1 \to P_2) \to (P_2 \to P_1)) \to (P_2 \to P_1))$ ⇒ por el T. de deducción, es eq a probar $\{((P_1 \to P_2) \to (P_2 \to P_1)), P_2\} \vdash P_1$

α_1: $((P_1 \to P_2) \to (P_2 \to P_1))$ = dato

α_2: $(P_2 \to (P_1 \to P_2))$ = AX1

α_3: P_2 = dato

α_4: $(P_1 \to P_2)$ = MP entre α_2 y α_3

α_5: $(P_2 \to P_1)$ = MP entre α_1 y α_4

α_6: P_1 = MP entre α_3 y α_5

3. $((P_1 \to P_3) \to (\neg\neg P_1 \to P_3))$ ⇒ por T. de deducción, es eq a probar $\{(P_1 \to P_3), \neg\neg P_1\} \vdash P_3$

α_1: $(\neg\neg P_1 \to P_1)$ = hoja de ejs

α_2: $\neg\neg P_1$ = dato

α_3: P_1 = MP entre α_1 y α_2

α_4: $(P_1 \to P_3)$ = dato

α_5: P_3 = MP entre α_3 y α_4

4. $((\alpha \to \beta) \to (\alpha \to ((\alpha \to \beta) \to \beta)))$ ⇒ por T. de la deducción es eq a probar $\{(\alpha \to \beta), \alpha\} \vdash \beta$

α_1: $(\alpha \to \beta)$ = dato

α_2: α = dato

α_3: β = MP entre α_1 y α_2

5. $((\alpha \to \beta) \to (\neg\beta \to \neg\alpha))$ ⇒ por T. de deducción, es eq a probar $\{(\alpha \to \beta), \neg\beta\} \vdash \neg\alpha$

α_1: $((\neg\neg\alpha \to \neg\neg\beta) \to ((\neg\neg\alpha \to \neg\beta) \to \neg\alpha))$ = AX3

α_2: $((\alpha \to \beta) \to (\neg\neg\alpha \to \neg\neg\beta))$ = ver hoja de ejs

α_3: $(\alpha \to \beta)$ = dato

α_4: $(\neg\neg\alpha \to \neg\neg\beta)$ = MP entre α_2 y α_3

α_5: $((\neg\neg\alpha \to \neg\beta) \to \neg\alpha)$ = MP entre α_1 y α_4

α_6: $(\neg\beta \to (\neg\neg\alpha \to \neg\beta))$ = AX1

α_7: $\neg\beta$ = dato

α_8: $(\neg\neg\alpha \to \neg\beta)$ = MP entre α_6 y α_7

α_9: $\neg\alpha$ = MP entre α_5 y α_8

Ejercicio 18

1. $\Gamma = \{(P_1 \to \neg P_2), P_2\}$ y $\alpha = (P_1 \to P_2)$ ⇒ por T. de deducción, es eq a probar $\{(P_1 \to \neg P_2), P_2, P_1\} = \Gamma' \vdash P_2$ ⇒ $\alpha_1 = P_2$ es una prueba de P_2 a partir de Γ' pues P_2 es dato ⇒ α es deducible a partir de Γ

2. $\Gamma = \{P_1, P_2, (P_2 \to P_1)\}$, $\alpha = (P_1 \to P_2)$ ⇒ α es deducible a partir de Γ

α_1: $(P_2 \to (P_1 \to P_2))$ = AX1

α_2: P_2 = dato

α_3: $(P_1 \to P_2)$ = MP entre α_1 y α_2

3. $\Gamma = \{(P_1 \to (P_2 \to \neg P_3)), (P_1 \to (\neg P_2 \to P_3)), (P_2 \to (\neg P_1 \to P_3))\}$, $\alpha = P_1$ ⇒ α no es deducible a partir de Γ

T. de Correctitud: $\Gamma \vdash \alpha$ ⇒ $\alpha \in C(\Gamma)$

Defino $f: VAR \to \{0,1\} / f(P_j) = 0$ y sea v_f la val q extiende a f.

- $v_f(P_1 \to (P_2 \to \neg P_3)) = \max\{1 - v_f(P_1), \max\{1 - v_f(P_2), 1 - v_f(P_3)\}\} = \max\{1, 1\} = 1$
- $v_f(P_1 \to (\neg P_2 \to P_3)) = \max\{1 - v_f(P_1), \max\{v_f(P_2), v_f(P_3)\}\} = \max\{1, 0\} = 1$
- $v_f(P_2 \to (\neg P_1 \to P_3)) = \max\{1 - v_f(P_2), \max\{v_f(P_1), v_f(P_3)\}\} = \max\{1, 0\} = 1$

↳ $\exists$ v_f val / $v_f(\Gamma) = 1$ PERO $v_f(P_1) = 0$ ⇒ $P_1 \notin C(\Gamma)$ ⇒ por el T. de Correctitud, α no es deducible a partir de Γ (por contrarrecíproco)

Ejercicio 19

1. $\Gamma \cup \{\neg\varphi\}$ inconsistente ⇔ $\Gamma \vdash \varphi$

(⇐) $\Gamma \vdash \varphi$ ⇒ $\Gamma \cup \{\neg\varphi\} \vdash \varphi$ y $\Gamma \cup \{\neg\varphi\} \vdash \neg\varphi$ ⇒ $\Gamma \cup \{\neg\varphi\}$ es inconsistente

⇒) $\Gamma\cup\{\neg\varphi\}$ es inconsistente ⇒ $\exists\alpha\in F/\ \Gamma\cup\{\neg\varphi\}\vdash\alpha$ y $\Gamma\cup\{\neg\varphi\}\vdash\neg\alpha$ ⇒ por el T. de deducción, $\Gamma\vdash(\neg\varphi\to\alpha)$ y $\Gamma\vdash(\neg\varphi\to\neg\alpha)$

1. $((\neg\neg\neg\varphi\to\neg\neg\alpha)\to((\neg\neg\neg\varphi\to\neg\alpha)\to\neg\neg\varphi))$ = AX3 dnd $\alpha=\neg\neg\varphi$ y $\beta=\neg\alpha$
2. $(\neg\varphi\to\alpha)\to(\neg\neg\neg\varphi\to\neg\neg\alpha)$
3. $(\neg\varphi\to\alpha)$ pues $\Gamma\vdash(\neg\varphi\to\alpha)$
4. $(\neg\neg\neg\varphi\to\neg\neg\alpha)$ = MP entre α_2 y α_3
5. $((\neg\neg\neg\varphi\to\neg\alpha)\to\neg\neg\varphi)$ = MP entre α_1 y α_4
6. $((\neg\varphi\to\neg\alpha)\to(\neg\neg\neg\varphi\to\neg\alpha))$
7. $(\neg\varphi\to\neg\alpha)$ pues $\Gamma\vdash(\neg\varphi\to\neg\alpha)$
8. $(\neg\neg\neg\varphi\to\neg\alpha)$ = MP entre α_6 y α_7
9. $\neg\neg\varphi$ = MP entre α_5 y α_8
10. $(\neg\neg\varphi\to\varphi)$ ⇒ Ver ej 1 de los ejs de pruebas
11. φ = MP entre α_9 y α_{10}

2. $\Gamma\cup\{\varphi\}$ inconsistente ⇔ $\Gamma\vdash\neg\varphi$

⇐) $\Gamma\vdash\neg\varphi$ ⇒ $\Gamma\cup\{\varphi\}\vdash\neg\varphi$ y $\Gamma\cup\{\varphi\}\vdash\varphi$ ⇒ $\Gamma\cup\{\varphi\}$ es inconsistente

⇒) $\Gamma\cup\{\varphi\}$ es inconsistente ⇒ $\exists\alpha\in F/\Gamma\cup\{\varphi\}\vdash\alpha$ y $\Gamma\cup\{\varphi\}\vdash\neg\alpha$ ⇒ por T. de deducción, $\Gamma\vdash(\varphi\to\alpha)$ y $\Gamma\vdash(\varphi\to\neg\alpha)$.

Quiero probar que $\Gamma\vdash\neg\varphi$.

1. $((\neg\neg\varphi\to\neg\neg\alpha)\to((\neg\neg\varphi\to\neg\alpha)\to\neg\varphi))$ = AX3 dnd $\alpha=\neg\varphi$ y $\beta=\neg\alpha$
2. $((\varphi\to\alpha)\to(\neg\neg\varphi\to\neg\neg\alpha))$
3. $(\varphi\to\alpha)$ pues $\Gamma\vdash(\varphi\to\alpha)$
4. $(\neg\neg\varphi\to\neg\neg\alpha)$ = MP entre α_2 y α_3
5. $((\neg\neg\varphi\to\neg\alpha)\to\neg\varphi)$ = MP entre α_1 y α_4
6. $((\varphi\to\neg\alpha)\to(\neg\neg\varphi\to\neg\alpha))$
7. $(\varphi\to\neg\alpha)$ pues $\Gamma\vdash(\varphi\to\neg\alpha)$
8. $(\neg\neg\varphi\to\neg\alpha)$ = MP entre α_6 y α_7
9. $\neg\varphi$ = MP entre α_5 y α_8

Ejercicio 20

Sea $\Gamma\subseteq F$ mc y $\alpha,\beta\in F$ ⇒ $(\alpha\to\beta)\in\Gamma$ ó $(\beta\to\alpha)\in\Gamma$.

- Si $(\alpha\to\beta)\in\Gamma$ ⇒ no hay nada probar
- Si $(\alpha\to\beta)\notin\Gamma$, como Γ es m.c ⇒ $\neg(\alpha\to\beta)\in\Gamma$ por mc ⇒ $\Gamma\vdash\neg(\alpha\to\beta)$ ⇒ $\neg(\alpha\to\beta)\in C(\Gamma)$ por correctitud

Sea v val/$v(\Gamma)=1$ ⇒ $v(\neg(\alpha\to\beta))=1$ ⇒ $v(\alpha\to\beta)=0$ ⇒ $\max\{1-v(\alpha),v(\beta)\}=0$ ⇒ $v(\alpha)=1$ y $v(\beta)=0$ ⇒ $v(\beta\to\alpha)=\max\{1-v(\beta),v(\alpha)\}=1$ ⇒ $(\beta\to\alpha)\in\Gamma$

Obs: de manera analoga se prueba p/ los casos de $(\beta\to\alpha)$

Ejercicio 21

Sea $\Gamma\subset F/\Gamma$ mc ⇒ $\exists!$ val que lo satisface.

Sup q $\exists\ \omega$ val $/\omega\neq v$ y $\omega(\Gamma)=1$ ⇒ $\exists\ P_j\in VAR/\ \omega(P_j)\neq v(P_j)$.

- Si $P_j\in\Gamma$ ⇒ $v(P_j)=\omega(P_j)=1$ ABS!
- Si $P_j\notin\Gamma$ ⇒ $v(P_j)=\omega(P_j)=0$ ABS!

Conclusion: lo abs vino de sup q la val no es unica ⇒ $\exists!$ val q satisface Γ mc

La vuelta NO vale:

Sea $\Gamma=VAR$, $\exists!$ val q la satisface.

Defino $f:VAR\to\{0;1\}/f(P_j)=0$ y sea v_f la val q extiende a f ⇒ v_f es la ! val q satisface a $\Gamma=VAR$ PERO no es mc pues $\Gamma'=\Gamma\cup\{P_1\wedge P_2\}$ es satisfacible por v_f ⇒ $\Gamma\subset\Gamma'$ y Γ' consistente ⇒ Γ NO es mc.

Ejercicio 22

1. Sea $\Gamma\subseteq F$. Si $\Gamma=C(\Gamma)$ ⇒ Γ es mc. FALSO

Tomo $\Gamma=F$ ⇒ Γ insatisfacible pues $\{P_1,\neg P_1\}\in\Gamma$ ⇒ $F=C(F)$ PERO es inconsistente pues es insatisfacible ⇒ Γ no es mc.

2. Sea $\Gamma\subseteq F$. Si Γ es mc ⇒ $\Gamma=C(\Gamma)$. VERDADERO

Sabemos q $\Gamma\subseteq C(\Gamma)$ ⇒ qvq $C(\Gamma)\subseteq\Gamma$.

Sup q $\exists\alpha\in C(\Gamma)/\alpha\notin\Gamma$ ⇒ $\neg\alpha\in\Gamma$ por def de mc. Luego, $\exists$ v val$/v(\Gamma)=1$ pues Γ satisfacible ⇒ $v(\alpha)=1$ xq $\alpha\in C(\Gamma)$ y $v(\neg\alpha)=1$ xq $\neg\alpha\in\Gamma$ ABS!

↳ $C(\Gamma)\subseteq\Gamma$ y $\Gamma\subseteq C(\Gamma)$ ⇒ $\Gamma=C(\Gamma)$

3. Sea $\Gamma\subseteq F$. Si Γ es consistente, entonces $\exists$ un unico Σ mc tal que $\Gamma\subset\Sigma$. FALSO

Sea $\Gamma=\{P_1\}$ ⇒ Γ satisfacible ⇒ Γ consistente.

- Sea $\Gamma_1=\{P_1,P_2\}$ ⇒ $\Gamma\subset\Gamma_1$ y Γ_1 satisfacible ⇒ Γ_1 consistente ⇒ por el L. de Lindenbaum, $\exists\ \Gamma_1'$ mc$/\Gamma_1\subset\Gamma_1'$ ⇒ $\Gamma\subset\Gamma_1\subset\Gamma_1'$

- Sea $\Gamma_2 = \{P_1, \neg P_2\}$ $\Rightarrow$ $\Gamma \subset \Gamma_2$ y Γ_2 satisfacible $\Rightarrow$ Γ_2 consistente $\Rightarrow$ por el L. de Lindembaum, $\exists\, \Gamma_2'$ mcl $\Gamma_2 \subset \Gamma_2'$ $\Rightarrow$ $\Gamma \subset \Gamma_2 \subset \Gamma_2'$

Veamos que $\Gamma_1' \neq \Gamma_2'$:

Sup q son iguales $\Rightarrow$ $P_2 \in \Gamma_2'$ pues $P_2 \in \Gamma_1'$ $\Rightarrow$ $\Gamma_2' \vdash P_2$ y $\Gamma_2' \vdash \neg P_2$ $\Rightarrow$ Γ_2' inconsistente ABS!