Funciones recursivas primitivas

TEOREMA 1

Composición de funciones computables es computable:

Obs: si una es parcial⁺ computable ⇒ h va ser parcial⁺ computable

Sean $f: \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}$, $g_1, g_2, \dots, g_k: \mathbb{N}^m \to \mathbb{N}$ y $h: \mathbb{N}^m \to \mathbb{N}$ tales que $h(x_1,\dots,x_m) = f(g_1(x_1,\dots,x_m),\dots,g_k(x_1,\dots,x_m))$

⇒ $h = f \circ (g_1 \times g_2 \times \dots \times g_k)$. Si $f, g_1, \dots, g_k$ son (parcialmente) computables entonces h es (parcialmente) computable.

DEMOSTRACION

Como f es (parcial.) comp ⇒ ∃ P_f que la computa ⇒ podemos armar una macro.

Como g_k es (parcial.) comp ⇒ ∃ P_{g_k} que la computa ⇒ podemos armar una macro.

Armo el sig. programa p/ probar que h es (parcial.) computable.

$Z_1 \leftarrow g_1(X_1,\dots,X_m)$

$Z_2 \leftarrow g_2(X_1,\dots,X_m)$

$Z_k \leftarrow g_k(X_1,\dots,X_m)$

$Y \leftarrow f(Z_1,\dots,Z_k)$

DEFINICION 1: Esquema recursivo de tipo I (ERI)

Sean $h: \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ y $g: \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$ funciones. Decimos q h se obtiene a partir de g por un ERI si se puede escribir de la sig. forma: $h(0) = k \in \mathbb{N}$ y $h(n+1) = g(n, h(n))$.

TEOREMA 2

Si h se obtiene a partir de g por un ERI y g es computable ⇒ h es computable.

DEMOSTRACION

```
      Y ← k
[A1]  IF X1 = 0 GOTO E1
      Y ← g(Z1, Y)
      Z1 ← Z1 + 1
      X1 ← X1 - 1
      GOTO A1
```

X_1	Z_1	Y
2	0	$h(0)$
1	1	$g(0, h(0)) = h(1)$
0	2	$g(1, g(0,k)) = h(2)$

EJEMPLO

Probar que $f: \mathbb{N} \to \mathbb{N} / f(n) = n!$ es computable mediante un ERI.

- $f(0) = 1$
- $f(n+1) = (n+1)! = (n+1).n! = (n+1).f(n)$ ⇒ quiero que $f(n+1) = g(n, f(n))$

Defino $g: \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N} / g(x,y) = PROD(SUC(x), Y)$ ⇒ veamos que g es computable.

⇒ $\pi_1(x,y) = x$ y $\pi_2(x,y) = y$

$g(x,y) = PROD(SUC(\pi_1(x,y)), \pi_2(x,y)) = PROD \circ (SUC \circ \pi_1 \times \pi_2)$

Luego, g es composición de funciones computables (producto, sucesión y proyección) ⇒ g computable.

Conclusión: f es computable pues se obtiene a partir de g computable por un ERI.

DEFINICION 2: Esquema recursivo de tipo II (ERII)

Sean $h: \mathbb{N}^{k+1} \to \mathbb{N}$, $g: \mathbb{N}^{k+2} \to \mathbb{N}$ y $f: \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}$ c/ $k \in \mathbb{N}_{\geq 1}$. Decimos que h se obtiene a partir de g y f por un ERII si:

⇒ h está escrita a partir de un ERII

1. $h(x_1,\dots,x_k,0) = f(x_1,\dots,x_k)$
2. $h(x_1,\dots,x_k,y+1) = g(x_1,\dots,x_k,y,h(x_1,\dots,x_k,y))$

TEOREMA 3

Sea h una función escrita a partir de f y g computables mediante un ERII ⇒ h computable.

DEMOSTRACION

```
      Y ← f(X1,...,Xk)
[A1]  IF Xk+1 = 0 GOTO E1
      Y ← g(X1,...,Xk,Z1,Y)
      Z1 ← Z1 + 1
      Xk+1 ← Xk+1 - 1
      GOTO A1
```

DEFINICION 3: Funciones iniciales

Las sig funciones se llaman funciones iniciales:

Obs: las funciones iniciales son computables (ya lo demostramos)

1. $CERO: \mathbb{N} \to \mathbb{N} / f(x) = 0$
2. $SUC: \mathbb{N} \to \mathbb{N} / f(x) = x+1$
3. $\pi_j^n: \mathbb{N}^n \to \mathbb{N} / \pi_j^n(x_1,\dots,x_n) = x_j$ c/ $1 \leq j \leq n$ ⇒ proyección

DEFINICION 4: Funciones recursivas primitivas (RP)

Una función $f: \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}$, $k \in \mathbb{N}_{\geq 1}$, es RP si es función inicial o se obtiene aplicando finitas veces las siguientes operaciones a funciones iniciales: composición, ERI y ERII.

EJEMPLO

$SUM: \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N} / SUM(x,y) = x+y$ ⇒ probar que SUM es RP

- $SUM(x,0) = x$ ⇒ quiero que $x = f(x)$

• $SUM(x, y+1) = x + (y+1) = (x+y) + 1 = SUM(x,y) + 1 = SUC(SUM(x,y)) \Rightarrow$ quiero que $SUC(SUM(x,y)) = g(x,y,SUM(x,y))$.

Defino $f: \mathbb{N} \to \mathbb{N} / f(x) = \pi_1(x) \Rightarrow f$ es función inicial.

Defino $g: \mathbb{N}^3 \to \mathbb{N} / g(x,y,z) = z + 1 = SUC(\pi_3(x,y,z)) \Rightarrow g = SUC \circ \pi_3 \Rightarrow$ es composición de funciones iniciales

Conclusión: SUM es RP pues se obtiene a partir de f inicial y g composición de iniciales mediante un ERII

TEOREMA 4

Si $f: \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}$ es RP $\Rightarrow f$ es computable.

DEMOSTRACIÓN

1. Función inicial es computable
2. Composición de computables es computable
3. ERI ó ERII de computables es computable

Como una función RP se obtiene aplicando finitas composiciones, ERI y ERII a f. iniciales q son computables $\Rightarrow f$ es computable.

OBSERVACIONES

1. Si f no es total $\Rightarrow$ NO es RP pues las iniciales son totales.

Si una función es composición de totales o se obtiene mediante ERI ó ERII de totales $\Rightarrow$ es total.

2. $\exists$ funciones computables que NO son RP i.e. f computable $\not\Rightarrow f$ RP

Ej. Función de Ackermann $A: \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N} / A(0,y) = y+1$; $A(x+1,0) = A(x+1)$ y $A(x+1,y+1) = A(x, A(x+1,y))$

TEOREMA 5

1. Composición de funciones RP es RP.
2. Esquemas recursivos (ERI ó ERII) de funciones RP es RP.

DEMOSTRACIÓN

1. $f: \mathbb{N}^k \to \mathbb{N} / f = h \circ (g_1 \times \dots \times g_n)$ dnd $g_1, \dots, g_n: \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}$ y $h: \mathbb{N}^n \to \mathbb{N}$ son RP

Como g_j es RP $\forall 1 \leq j \leq n \Rightarrow$ se obtiene aplicando m_j operaciones permitidas a funciones iniciales.

Como h es RP $\Rightarrow$ se obtiene aplicando m operaciones permitidas a funciones iniciales.

$\Rightarrow f$ se obtiene aplicando $1 + m + m_1 + \dots + m_n \in \mathbb{N}$ operaciones permitidas a funciones iniciales

↳ f es RP por definición

2. Esquemas recursivos (ERI ó ERII) de funciones RP

Caso 1: $f: \mathbb{N} \to \mathbb{N} / f(0) = k$ y $f(n+1) = h(n, f(n))$ dnd $h: \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$ es RP $\Rightarrow h$ se obtuvo aplicando m operaciones permitidas a f. iniciales $\Rightarrow f$ se obtuvo aplicando $1 + m \in \mathbb{N}$ operaciones permitidas a f. iniciales $\Rightarrow f$ es RP

Caso 2: $f: \mathbb{N}^{k+1} \to \mathbb{N} / f(x_1, \dots, x_k, 0) = g(x_1, \dots, x_k)$ y $f(x_1, \dots, x_k, y+1) = h(x_1, \dots, x_k, y, f(x_1, \dots, x_k, y))$ siendo $g: \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}$ y $h: \mathbb{N}^{k+2} \to \mathbb{N}$ funciones RP $\Rightarrow g$ y h se obtienen aplicando m_g y m_h operaciones permitidas a f. iniciales respectivamente $\Rightarrow f$ se obtuvo aplicando $1 + m_g + m_h \in \mathbb{N}$ operaciones permitidas a f. iniciales $\Rightarrow f$ es RP

DEFINICIÓN 5: Predicados RP

Un predicado P de k variables es una relación k-aria en $\mathbb{N}$ i.e. $P^k \subseteq \mathbb{N}^k$ que tiene asociado una función característica $C_{P^k}: \mathbb{N}^k \to \mathbb{N} / C_{P^k}(x_1, \dots, x_k) = \begin{cases} 1 & \text{si } (x_1, \dots, x_k) \in P^k \\ 0 & \text{sino} \end{cases}$

Notación: $C_{P^k} = \chi_{P^k}$

Obs: el ! objeto que puede ser RP ó computable es la fución

1. Decimos que "P es predicado RP" si C_P es función RP.
2. Decimos que "P es computable" si C_P es computable.

EJEMPLO

$P = \{(x,y) \in \mathbb{N}^2 / x \leq y\} \Rightarrow$ probar que P es RP

$C_P: \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N} / C_P(x,y) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \leq y \\ 0 & \text{sino} \end{cases} \Rightarrow C_P(x,y) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \dot{-} y = 0 \\ 0 & \text{si } x \dot{-} y \neq 0 \end{cases} \Rightarrow C_P(x,y) = \alpha(x \dot{-} y) = \alpha \circ \dot{-} \circ (\pi_1 \times \pi_2)$

Conclusión: C_P es composición de RPs $\Rightarrow C_P$ es RP $\Rightarrow$ P es RP

TEOREMA 6

1. Sean P^k y Q^k predicados RP $\Rightarrow \neg P$ y $(P \wedge Q)$ son RP.
2. Sean P^k y Q^k computables $\Rightarrow \neg P$ y $(P \wedge Q)$ son computables.

DEMOSTRACIÓN

1. P^k y Q^k son RP $\Rightarrow C_{P^k}: \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}$ y $C_{Q^k}: \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}$ son RP

Caso 1: $C_{\neg P^k}: \mathbb{N}^k \to \mathbb{N} / C_{\neg P^k} = \alpha \circ C_{P^k}$ es RP por ser composición de RP

Caso 2: $C_{P^k \wedge Q^k}: \mathbb{N}^k \to \mathbb{N} / C_{P^k \wedge Q^k}(\vec{x}) = \begin{cases} 1 & \text{si } \vec{x} \in P^k \cap Q^k \\ 0 & \text{sino} \end{cases} \Rightarrow C_{P^k \wedge Q^k} = PROD \circ (C_{P^k} \times C_{Q^k})$ es RP por composición de RP

2. P^k y Q^k computables $\Rightarrow C_{P^k}: \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}$ y $C_{Q^k}: \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}$ son computables

Caso 1: $C_{\neg P^k}: \mathbb{N}^k \to \mathbb{N} / C_{\neg P^k} = \alpha \circ C_{P^k}$ computable por ser composición de computables

Caso 2: $C_{P^k \wedge Q^k}: \mathbb{N}^k \to \mathbb{N} / C_{P^k \wedge Q^k} = PROD \circ (C_{P^k} \times C_{Q^k})$ computable por ser composición de computables

COROLARIO 1

1. Sean P^k y Q^k RP $\Rightarrow (P^k \vee Q^k)$ y $(P^k \to Q^k)$ son RP.
2. Sean P^k y Q^k computables $\Rightarrow (P^k \vee Q^k)$ y $(P^k \to Q^k)$ computables.

Demo: tarea

TEOREMA 7

1. Sean $h, g: \mathbb{N}^n \to \mathbb{N}$ funciones RP y $C_P: \mathbb{N} \to \{0,1\}$ función característica de un predicado P^n RP, entonces:

$f: \mathbb{N}^n \to \mathbb{N} / f(\vec{x}) = \begin{cases} h(\vec{x}) & \text{si } \vec{x} \in P^n \\ g(\vec{x}) & \text{sino} \end{cases}$ es RP

2. Idem pero h, g y P son computables $\Rightarrow f$ es computable

DEMOSTRACION

1. $f(\vec{x}) = h(\vec{x}).C_P(\vec{x}) + g(\vec{x}).\alpha(C_P(\vec{x})) \Rightarrow f$ es composicion de funciones RP (PROD, SUM, α, h, g, C_P) $\Rightarrow f$ es RP
2. $f(\vec{x}) = h(\vec{x}).C_P(\vec{x}) + g(\vec{x}).\alpha(C_P(\vec{x})) = SUM \circ (PROD \circ (h \times C_P) \times PROD(g \times C_P)) \Rightarrow f$ es composicion de computables pues es composicion de RP (si una funcion es RP $\Rightarrow$ es computable) $\Rightarrow f$ es computable

EJEMPLO

Sea $F: \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N} / F(x,y) = \begin{cases} SUM(x,y) & \text{si } x \leq y \\ PROD(x,y) & \text{sino} \end{cases} \Rightarrow$ probar que F es RP

$F: \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N} / F(x,y) = \begin{cases} g(x,y) & \text{si } (x,y) \in P \\ h(x,y) & \text{sino} \end{cases}$ and $g = SUM$, $h = PROD$ y $P = \{(x,y) / x \leq y\}$

Como g, h y P son RP $\Rightarrow$ por el teorema anterior, F es RP.

TEOREMA 8

$\Rightarrow$ lo mismo para computable

Obs: f esta bien definida porque $P_j \cap P_k = \emptyset$ si $j \neq k$

Sean $g_1, g_2, \dots g_m, h: \mathbb{N}^n \to \mathbb{N}$ funciones RP y $P_1, \dots, P_m$ predicados n-arios RP siendo $P_j \cap P_k = \emptyset$ si $j \neq k$.

Sea $f: \mathbb{N}^n \to \mathbb{N} / f(\vec{x}) = \begin{cases} g_1(\vec{x}) & \text{si } \vec{x} \in P_1 \\ g_2(\vec{x}) & \text{si } \vec{x} \in P_2 \\ \vdots \\ g_m(\vec{x}) & \text{si } \vec{x} \in P_m \\ h(\vec{x}) & \text{sino} \end{cases} \Rightarrow f$ es RP

DEMOSTRACION

$f(\vec{x}) = g_1(\vec{x}).C_{P_1}(\vec{x}) + g_2(\vec{x}).C_{P_2}(\vec{x}) + g_m(\vec{x}).C_{P_m}(\vec{x}) + h(\vec{x}).\alpha(C_{P_1}(\vec{x})).\alpha(C_{P_2}(\vec{x})).\dots.\alpha(C_{P_m}(\vec{x}))$

$\Rightarrow f(\vec{x})$ es composicion de funciones RP (computables) $\Rightarrow f$ es RP (computable)

Obs: $f(\vec{x}) = \sum_{k=1}^{m} g_k(\vec{x}).C_{P_k}(\vec{x}) + h(\vec{x}).\prod_{k=1}^{m} \alpha(C_{P_k}(\vec{x}))$

TEOREMA 9: Sumatoria acotada

Obs: si $n=0 \Rightarrow SAf(y) = \sum_{j=0}^{y} f(j)$

Sean $f: \mathbb{N}^{n+1} \to \mathbb{N}$ una funcion y $SAf: \mathbb{N}^{n+1} \to \mathbb{N} / SAf(x_1, \dots, x_n, y) = \sum_{j=0}^{y} f(x_1, \dots, x_n, j)$ la suma acotada.

1. Si f es RP $\Rightarrow$ SAf es RP.
2. Si f es computable $\Rightarrow$ SAf es computable.

DEMOSTRACION

$\Rightarrow$ de manera analoga se prueba si f es computable pues f y SUMA son computables y π_j, SUC y CERO son f. iniciales i.e. computables $\Rightarrow$ SAf computable xq se obtiene por ERII aplicado a f. computables

Sea $\vec{x} = (x_1, \dots, x_n)$.

- $SAf(\vec{x}, 0) = \sum_{j=0}^{0} f(\vec{x}, j) = f(\vec{x}, 0) \Rightarrow$ quiero $h(\vec{x})$
- $SAf(\vec{x}, y+1) = \sum_{j=0}^{y+1} f(\vec{x}, j) = \sum_{j=0}^{y} f(\vec{x}, j) + f(\vec{x}, y+1) = SAf(\vec{x}, y) + f(\vec{x}, y+1) \Rightarrow$ quiero $H(\vec{x}, y, SAf(\vec{x}, y))$

Defino $h: \mathbb{N}^n \to \mathbb{N} / h(\vec{x}) = f(\vec{x}, 0) = f \circ (\pi_1 \times \pi_2 \times \dots \times \pi_n \times CERO \circ \pi_1) \Rightarrow$ h es composicion de funcion f y f. iniciales que son RP $\Rightarrow$ h es RP.

Defino $H: \mathbb{N}^{n+2} \to \mathbb{N} / H(\vec{x}, y, z) = z + f(\vec{x}, suc(y)) = SUMA \circ (\pi_{n+2} \times f \circ (\pi_1 \times \dots \times \pi_n \times SUC \circ \pi_{n+1})) \Rightarrow$ H es composicion de funcion SUMA y f. iniciales (π_j, suc) que son RP $\Rightarrow$ H es RP.

Conclusion: SAf es RP pues se obtiene mediante un ERII aplicado a funciones RP

TEOREMA 10: Productoria acotada

Sea $f: \mathbb{N}^{n+1} \to \mathbb{N}$ funcion y sea $PAf: \mathbb{N}^{n+1} \to \mathbb{N} / PAf(\vec{x}) = \prod_{j=0}^{y} f(\vec{x}, j)$ la productoria acotada.

1. Si f es RP $\Rightarrow$ PAf es RP.
2. Si f es computable $\Rightarrow$ PAf es computable.

DEMOSTRACION

$\Rightarrow$ de manera analoga se prueba para f computable

- $PAf(\vec{x}, 0) = \prod_{j=0}^{0} f(\vec{x}, j) = f(\vec{x}, 0) \Rightarrow$ quiero $h(\vec{x})$
- $PAf(\vec{x}, y+1) = \prod_{j=0}^{y+1} f(\vec{x}, j) = PAf(\vec{x}, y) . f(\vec{x}, y+1) \Rightarrow$ quiero $H(\vec{x}, y, PAf(\vec{x}, y))$

Defino $h: \mathbb{N}^n \to \mathbb{N} / h(\vec{x}) = f \circ (\pi_1 \times \dots \times \pi_n \times CERO \circ \pi_1) \Rightarrow$ h es RP por ser composicion de RP.

Defino $H: \mathbb{N}^{n+2} \to \mathbb{N} / h(\vec{x}, y, z) = PROD \circ (\pi_{n+2} \times f \circ (\pi_1 \times \dots \times \pi_n \times SUC \circ \pi_{n+1})) \Rightarrow$ H es RP por ser composicion de RP.

Conclusion: PAf es RP pues se obtiene mediante un ERII aplicado a funciones RP

¿Que pasa cuando n = 0?

Caso 1: suma acotada $\Rightarrow SAf(y) = \sum_{j=0}^{y} f(j)$

- $SAf(0) = \sum_{j=0}^{0} f(j) = f(0) \in \mathbb{N} \Rightarrow$ ya esta
- $SAf(y+1) = \sum_{j=0}^{y+1} f(j) = SAf(y) + f(y+1) \Rightarrow$ quiero $H(y, SAf(y))$

Defino $H: \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N} / H(u, w) = w + f(u+1) = SUM \circ (\pi_2 \times (f \circ SUC \circ \pi_1)) \Rightarrow$ H es RP por ser composicion de funciones RP.

$\Rightarrow$ SAf(y) es RP pues se obtiene mediante un ERI aplicado a una funcion RP

Caso 2: productoria acotada $\Rightarrow PAf(y) = \prod_{j=0}^{y} f(j)$

- $PAf(0) = \prod_{j=0}^{0} f(j) = f(0) \in \mathbb{N} \Rightarrow$ ya esta
- $PAf(y+1) = \prod_{j=0}^{y+1} f(j) = PAf(y).f(y+1) \Rightarrow$ quiero $H(y, PAf(y))$

Defino $H: \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N} / H(u, w) = f(u+1) + w = PROD \circ ((f \circ SUC \circ \pi_1) \times \pi_2) \Rightarrow$ H es RP por ser composicion de funciones RP.

Conclusion: PAf(y) es RP pues se obtiene mediante un ERI aplicado a una funcion RP

EJEMPLO

$\Rightarrow q(n) = \sum_{j=0}^{n-1} 2j$

Sea $q: \mathbb{N} \to \mathbb{N} / q(n) =$ suma de los primeros n numeros pares $\Rightarrow$ probar que q es RP.

- $q(0) = \sum_{j=0}^{-1} 2j \Rightarrow$ NO tiene sentido PERO $\sum_{j=0}^{0 \dot{-} 1} 2j = \sum_{j=0}^{0} 2j = 0$
- $q(n) = \sum_{j=0}^{n-1} 2j = \sum_{j=0}^{n \dot{-} 1} 2j = \sum_{j=0}^{n \dot{-} 1} PROD(2, j)$

Defino $f: \mathbb{N} \to \mathbb{N} / f(n) = PROD(h_2, \pi_1) \Rightarrow f$ es RP por ser composicion de funciones RP.

$\Rightarrow q(n) = \sum_{j=0}^{n \dot{-} 1} f(j) = SAf(n \dot{-} 1) = SAf \circ \dot{-} \circ (\pi_1 \times h_1)$

Conclusion: g es RP por ser composicion de funciones RP $(SAF, \dot{-}, \pi_1, h_1)$

TEOREMA 11: Cuantificadores acotados $\leq$

- ⇒ existencial acotado
- ⇒ universal acotado

Sea $C_P: \mathbb{N}^{k+1} \to \{0,1\}$ la fun° caracteristica del predicado P RP (computable), entonces:

1. $EA_P: \mathbb{N}^{k+1} \to \{0,1\} / EA_P(\vec{x}, y) = \exists t \leq y \;\; C_P(\vec{x}, t)$ es RP (computable)

⇒ Este predicado es verdadero ⇔ $C_P(\vec{x},0) = 1 \lor C_P(\vec{x},1) = 1 \lor \dots \lor C_P(\vec{x},y) = 1$

2. $UA_P: \mathbb{N}^{k+1} \to \{0,1\} / UA_P(\vec{x}, y) = \forall t \leq y \;\; C_P(\vec{x}, t)$ es RP (computable)

⇒ Este predicado es verdadero ⇔ $C_P(\vec{x},0) = 1 \land C_P(\vec{x},1) = 1 \land \dots \land C_P(\vec{x},y) = 1$

DEMOSTRACION

⇒ de la misma manera se prueba para el caso P computable

__Caso 1:__ $k = 0$

- $EA_P(y) = \exists t \leq y \;\; C_P(t) = \alpha(\alpha(\Sigma_{t=0}^{y} C_P(t)))$ ⇒ EA_P es RP por ser composicion de funciones RP (SUM, C_P y α)
- $UA_P(y) = \forall t \leq y \;\; C_P(t) = \Pi_{t=0}^{y} C_P(t)$ ⇒ UA_P es RP por ser composicion de funciones RP (PROD y C_P)

__Caso 2:__ $k \neq 0$

- $EA_P(\vec{x}, y) = \alpha(\alpha(\Sigma_{t=0}^{y} C_P(\vec{x}, t)))$ ⇒ EA_P es RP por ser composicion de funciones RP (SUM, α y C_P)
- $UA_P(\vec{x}, y) = \Pi_{t=0}^{y} C_P(\vec{x}, t)$ ⇒ UA_P es RP por ser composicion de funciones RP (PROD y C_P)

Obs: SA_{C_P} y PA_{C_P} son funciones RP xq C_P es RP (tmb computables)

EJEMPLO

Probar que $DIV: \mathbb{N}^2 \to \{0,1\} / DIV(x,y) = \begin{cases} 1 & \text{si } x | y \\ 0 & \text{sino} \end{cases}$ es RP

Obs: $EA_P(\vec{x}, y) = \exists t \leq y \;\; C_P(\vec{x}, t)$ ⇒ NO tiene la ultima variable

__Caso 1:__ $x = 0$ ⇒ $DIV(0,y) = 0$

__Caso 2:__ $x \neq 0$ ⇒ $DIV(x,y) = 1$ ⇔ $\exists k / y = xk \land x \neq 0$ ⇔ $\exists k \leq y \;\; EQ(PROD(x,k), y) \land \alpha(\alpha(x))$

Defino $C_P(x_1, x_2, y) = EQ(PROD(x_1, y), x_2)$ ⇒ $EA_P(x_1, x_2, y) = \exists z \leq y \;\; C_P(x_1, x_2, z)$

⇒ la ultima variable NO aparece en el EA_P

↳ $DIV(x,y) = EA_P(x,y,y) \land \alpha(\alpha(x))$ pues $EA_P(x,y,y) = \exists z \leq y \;\; C_P(x,y,z) = \exists z \leq y \;\; EQ(PROD(x,z), y)$

Conclusion: $DIV(x,y) = AND \circ (EA_P \circ (\pi_1 \times \pi_2 \times \pi_2) \times \alpha \circ \alpha \circ \pi_1)$ ⇒ es RP por ser composicion de funciones RP

TEOREMA 12: Cuantificadores acotados $<$

- ⇒ existencial acotado estricto
- ⇒ universal acotado estricto

Sea $C_P: \mathbb{N}^{k+1} \to \{0,1\}$ la fun° caracteristica del predicado P RP (computable), entonces:

1. $EAE_P: \mathbb{N}^{k+1} \to \{0,1\} / EAE_P(\vec{x}, y) = \exists t < y \;\; C_P(\vec{x}, t)$ es RP (computable)

⇒ Este predicado es verdadero ⇔ $C_P(\vec{x},0) = 1 \lor C_P(\vec{x},1) = 1 \lor \dots \lor C_P(\vec{x},y-1) = 1$

2. $UAE_P: \mathbb{N}^{k+1} \to \{0,1\} / UAE_P(\vec{x}, y) = \forall t < y \;\; C_P(\vec{x}, t)$ es RP (computable)

⇒ Este predicado es verdadero ⇔ $C_P(\vec{x},0) = 1 \land C_P(\vec{x},1) = 1 \land \dots \land C_P(\vec{x},y-1) = 1$

DEMOSTRACION

1. $EAE_P(\vec{x}, t) = \exists t \leq y \;\; (C_P(\vec{x}, t) \land t \neq y)$ ⇒ nuevamente aparece la ultima variable en EAE_P

Defino $C_Q(x_1, x_2, y) = C_P(x_1, y) \land x_2 \neq y = AND \circ (C_P \circ (\pi_1 \times \pi_3) \times \alpha \circ EQ \circ (\pi_2 \times \pi_3))$ ⇒ C_Q es RP pues es composicion de RP ⇒ $EAE_P(\vec{x}, y) = EA_Q(\vec{x}, y, y) = \exists t \leq y \;\; C_Q(\vec{x}, y, t) = \exists t \leq y \;\; C_P(x, t) \land t \neq y$ ⇒ la ultima variable no aparece.

Conclusion: EAE_P es RP pues es un existencial acotado de un predicado Q RP (C_Q es RP)

2. $UAE_P(\vec{x}, y) = \forall t \leq y \;\; (C_P(\vec{x}, t) \lor t = y)$

Defino $C_Q(x_1, x_2, y) = C_P(x_1, y) \lor EQ(x_2, y) = OR \circ (C_P \circ (\pi_1 \times \pi_3) \times EQ \circ (\pi_2 \times \pi_3))$ ⇒ C_Q es RP por ser composicion de funciones RP ⇒ $UAE_P = UA_Q(\vec{x}, y, y) = \forall t \leq y \;\; (C_P(\vec{x}, t) \lor t = y)$ ⇒ NO aparece la ultima variable.

Conclusion: UAE_P es RP por ser universal acotado de un predicado Q RP

__Probamos para $k=0$:__

1. $EAE_P(y) = \exists t \leq y \;\; (C_P(t) \land t \neq y)$

Defino $C_Q(x,y) = AND \circ (C_P \circ \pi_2 \times \alpha \circ EQ \circ (\pi_1 \times \pi_2))$ ⇒ C_Q es RP por ser composicion de funciones RP.

Luego, $EAE_P(y) = EA_Q(y,y) = \exists t \leq y \;\; C_Q(y,t) = \exists t \leq y \;\; (C_P(t) \land \alpha(EQ(y,t)))$ ⇒ EAE_P es RP por ser EA de un predicado Q RP.

2. $UAE_P(y) = \forall t \leq y \;\; (C_P(t) \lor y = t)$

Defino $C_Q(x,y) = OR \circ (C_P \circ \pi_2 \times EQ \circ (\pi_1 \times \pi_2))$ ⇒ C_Q es RP por ser composicion de funciones RP.

Luego, $UAE_P(y) = UA_Q(y,y) = \forall t \leq y \;\; (C_P(t) \lor EQ(y,t))$ ⇒ UAE_P es RP por ser UA de un predicado Q RP.

TEOREMA 13: Minimizacion acotada

Sea P^{n+1} un predicado RP (computable).

Sea $MA_P: \mathbb{N}^{n+1} \to \mathbb{N} / MA_P(\vec{x}, y) = \begin{cases} \min_{t \leq y} C_P(\vec{x}, t) & \text{si } \exists t \leq y / C_P(\vec{x}, t) = 1 \\ 0 & \text{sino} \end{cases} = \begin{cases} \min\{t \leq y / C_P(\vec{x}, t) = 1\} & \text{si } \{\} \neq \emptyset \\ 0 & \text{sino} \end{cases}$

Obs: en C_P NO aparece la ultima variable (NO debe aparecer)

⇒ MA_P es RP (computable)

DEMOSTRACION

$\widetilde{MA}_P(\vec{x}, y) = \Sigma_{j=0}^{y} \Pi_{k=0}^{j} \alpha(C_P(\vec{x}, k)) = \alpha(C_P(\vec{x},0)) + \alpha(C_P(\vec{x},0)) . \alpha(C_P(\vec{x},1)) + \dots + \alpha(C_P(\vec{x},0)) . \alpha(C_P(\vec{x},1)) \dots \alpha(C_P(\vec{x},y))$

PERO notemos que $\widetilde{MA}_P(\vec{x}, y) = \begin{cases} \min\{t \leq y / C_P(\vec{x}, t) = 1\} & \text{si } \{\} \neq \emptyset \\ y+1 & \text{sino} \end{cases}$

- Si $C_P(\vec{x},0) = 1$ ⇒ $\widetilde{MA}_P(\vec{x},3) = 0 + 0 + 0 + 0 = 0$ pues $\alpha(C_P(\vec{x},0)) = 0$
- Si $C_P(\vec{x},0) = 0$ y $C_P(\vec{x},1) = 1$ ⇒ $\widetilde{MA}_P(\vec{x},3) = 1 + 0 + 0 + 0 = 1$ pues $\alpha(C_P(\vec{x},0)) = 1$ y $\alpha(C_P(\vec{x},1)) = 0$
- Si $C_P(\vec{x},0) = C_P(\vec{x},1) = 0$ y $C_P(\vec{x},2) = 1$ ⇒ $\widetilde{MA}_P(\vec{x},3) = 1 + 1 + 0 + 0 = 2$
- Si $C_P(\vec{x},0) = C_P(\vec{x},1) = C_P(\vec{x},2) = 0$ y $C_P(\vec{x},3) = 1$ ⇒ $\widetilde{MA}_P(\vec{x},3) = 1 + 1 + 1 + 0 = 3$
- Si $C_P(\vec{x},0) = C_P(\vec{x},1) = C_P(\vec{x},2) = C_P(\vec{x},3) = 0$ ⇒ $\widetilde{MA}_P(\vec{x},3) = 1 + 1 + 1 + 1 = 3$

⇒ $\tilde{M}A_p$ es RP por ser SA de PA de $\alpha \circ C_p$ (funciones RP)

Luego, $MA_p(\vec{x},y) = \tilde{M}A_p(\vec{x},y) \cdot \alpha(EQ(\tilde{M}A_p(\vec{x},y), y+1)) = PROD \circ (\tilde{M}A_p \times (\alpha \circ EQ \circ (\tilde{M}A_p \times SUC \circ \pi_{n+1})))$

Conclusion: MA_p es RP por ser composicion de funciones RP (PROD, $\tilde{M}A_p$, α, EQ, SUC y π)

TEOREMA 14: Maximizacion acotada

Sea P^{n+1} un predicado RP (computable).

Sea $MaxA_p : \mathbb{N}^{n+1} \to \mathbb{N} / MaxA_p(\vec{x},y) = \begin{cases} \max_{t \leq y} C_p(\vec{x},t) & \text{si } \exists t \leq y \ C_p(\vec{x},t) = 1 \\ 0 & \text{sino} \end{cases} = \begin{cases} \max \{t \leq y / C_p(\vec{x},t) = 1\} & \text{si } \{\} \neq \emptyset \\ 0 & \text{sino} \end{cases}$

⇒ $MaxA_p$ es RP (computable)

DEMOSTRACION

En la practica ⇒ usando MA_p

⇒ sin usar MA_p

EJEMPLO

Probar que $h: \mathbb{N} \to \mathbb{N} / h(x) = \left[\sqrt{\frac{3x}{2}}\right]$ es RP.

Recordemos: $\forall x \in \mathbb{R}$, $[x] = t \in \mathbb{Z} / t \leq x < t+1$ i.e. $[x] = \min_{t \leq x} x < t+1 = \max_{t \leq x} x < t+1$ porque $\exists! t \in \mathbb{Z} / t \leq x < t+1$

⇒ es equivalente decir que es el min o el max

Luego, $h(x) = \min_{t \leq \sqrt{\frac{3}{2}x}} \sqrt{\frac{3}{2}x} < t+1$ ⇒ busco una cota ⇒ $h(x) = \min_{t \leq 10x} \sqrt{\frac{3}{2}x} < t+1$ PERO ahora no puedo poner el max porque cambie la cota.

Obs: $0 \leq \sqrt{\frac{3x}{2}} < t+1 \Leftrightarrow \frac{3}{2}x < (t+1)^2 \Leftrightarrow 3x < 2(t+1)^2$

Notemos que la ultima variable aparece i.e. C_p deberia estar definido en t.

↳ $h(x) = \min_{t \leq 10x} MENOR(PROD(h_3(x), x), PROD(h_2(x), POT(t,2))) = \min_{t \leq 10x} C_p(x,t)$ dnd C_p es RP por ser composicion de funciones RP (MENOR, PROD, π, h_3, h_2 y POT) ⇒ $h(x) = MAP(10x) = MAP \circ (PROD \circ (h_{10} \times \pi_1))$

Conclusion: h es RP por ser composicion de funciones RP (MAP, h_{10}, PROD y π_1)

⚠⚠ P/ que SA, PA, EA, UA, MA y MaxA sean RP, lo que esta adentro y la cota tienen que ser RP.

TEOREMA 15: Minimizacion no acotada

Sea P^{n+1} un predicado computable.

Sea $H: \mathbb{N}^n \to \mathbb{N} / H(\vec{x}) = \min_t C_p(\vec{x},t) = \begin{cases} \min \{t \in \mathbb{N} / C_p(\vec{x},t) = 1\} & \text{si } \{\} \neq \emptyset \\ \uparrow & \text{sino} \end{cases}$

⇒ H es parcialmente computable

DEMOSTRACION

```
[A1] IF Cp(x⃗,y) ≠ 0 GOTO E1
     Y ← Y+1
     GOTO A1
```