Demostraciones de Lógica Computacional

Luciano Boccardi

5 de junio de 2020

Índice

Parte I
Cardinalidad

Observación: La relación de coordinabilidad $\sim$ es de equivalencia

Demostración:

Definimos $f\colon A \to A / f(x) = x$ que resulta biyectiva. Entonces $A \sim A$. Es decir $A \sim A$ es reflexiva

Si $A \sim B \Rightarrow \exists f\colon A \to B$ biyectiva $\Rightarrow \exists f^{-1}\colon B \to A$ biyectiva. Entonces $B \sim A$. Es decir, $\sim$ es simétrica

Si $A \sim B$ y $B \sim C \Rightarrow \exists f\colon A \to B$ y $\exists g\colon B \to C$ biyectivas. Definimos $h\colon A \to C/$ $h(x) = g \circ f(x)$ que resulta biyectiva por ser composición de biyectivas. Entonces $A \sim C$, es decir $\sim$ es transitiva

$\therefore$ La relación $\sim$ es de equivalencia

$\blacksquare$

Observación: $I_n \sim I_m \Leftrightarrow n = m$

Demostración:

$\Rightarrow$)

Si $I_n \sim I_m \Rightarrow \exists f\colon I_n \to I_m$ biyectiva. Se tiene que $Im(f) = \{f(1), f(2), ..., f(m)\} = I_m$. Notemos que hay n elementos pues f es inyectiva

Luego $m = n$

$\Leftarrow$)

Si $n = m$, definimos $f\colon I_n \to I_m / f(x) = x$, que es biyectiva $\Rightarrow I_n = I_m$

$\blacksquare$

Observación: $\mathbb{N}$ es infinito

Demostración:

Supongamos que $\mathbb{N}$ es finito

$\mathbb{N} \neq \phi$ pues, por ejemplo, $0 \in \mathbb{N}$

Supongamos entonces que $\exists n \in \mathbb{N}_{\geq 1} / \mathbb{N} \sim I_n$

Entonces $\exists f\colon I_n \to \mathbb{N}$ biyectiva

$Im(f) = \{f(1), f(2), ..., f(n)\}$

Llamemos $M = max\{f(1), f(2), ..., f(n)\}$ $M \in \mathbb{N}$

Resulta que $M+1 \in \mathbb{N}$ pero $M+1 \notin Im(f)$. Entonces $Im(f) \neq \mathbb{N} \Rightarrow$ f no es sobreyectiva $\Leftrightarrow$ f no es biyectiva. **ABS!** por hipótesis

$\therefore \mathbb{N}$ es infinito

$\blacksquare$

Observación: Si $A \subset I_n \Rightarrow A$ es finito

Demostración:

Si $A = \phi \Rightarrow A$ es finito

Si $A \neq \phi \Rightarrow \exists\ i_1, i_2, ..., i_r \in I_n$ para algún $r \leq n/\ A = \{i_1, i_2, ..., i_r\}$

Definimos: $f\colon A \to I_n /\ f(i_j) = j$

Si $f(i_j) = f(i_t) \Rightarrow j = t \Rightarrow i_j = i_t \Rightarrow$ f es inyectiva

Sea $t \in I_t \Rightarrow i_t \in A$ y resulta que $f(i_t) = t \Rightarrow$ f es sobreyectiva

Como f es sobreyectiva $\Rightarrow A \sim I_t \Rightarrow A$ es finito

$\blacksquare$

Observación: Si $B \subset A$ y B es infinito $\Rightarrow$ A es infinito

Demostración:

Supongamos que A es finito

Si $A = \phi \Rightarrow B = \phi \Rightarrow B$ es finito. **ABS!** por hipótesis

Si $A \neq \phi \Rightarrow \exists f\colon A \to I_n$ para algún $n \in \mathbb{N}_{\geq 1}/$ f sea biyectiva

Como $B \subset A$, podemos definir $g\colon B \to A\ /g(x) = x$ que resulta inyectiva

Si consideramos:

$f \circ g\colon B \to I_n$ resulta inyectiva por composición de inyectivas, entonces

$f \circ g\colon B \to Im(f \circ g)$ resulta biyectiva

Luego $B \sim Im(f \circ g)$

Como $Im(f \circ g) \subseteq I_n \Rightarrow$ (por proposición anterior) es finita

$\Rightarrow B$ es finito. **ABS!** por hipótesis

Por lo tanto, A es infinito

$\blacksquare$

Teorema de Bernstein:

$$Si\ \#A \leq \#B\ y\ \#A \geq \#B \Rightarrow \#A = \#B$$

Demostración: No se ve.

Proposición: $\#A \leq \#B \Rightarrow \#B \geq \#A$

Demostración:

$\Rightarrow)$

Sabemos que $\exists f\colon A \to B$ inyectiva

Definimos $g\colon B \to A\ /g(b) = f^{-1}(b),\ b \in Im(f)$

$g(b) = \begin{cases} f^{-1}(b) & b \in Im(f) \\ a_0 & b \notin Im(f) \end{cases}$ siendo a_0 un elemento cualquiera de A

g está bien definida pues $f^{-1}(b)$ es única por ser f inyectiva

Veamos que g es sobreyectiva

Sea $a \in A \Rightarrow f(a)\,(\in B) \in Im(f)$ y resulta que

$g(f(a)) = f^{-1}(f(a)) = a$

Por tanto $\#B \geq \#A$

$\Leftarrow)$

Sabemos que $\exists f\colon B \to A$ sobreyectiva

Definimos $g\colon B \to A\ /g(a) = x_a,\ x_a \in f^{-1}(a)$

$f^{-1}(a) \neq \phi$, pues f es sobreyectiva

Veamos que g es inyectiva

Si $a_1 \neq a_2\ \ a_1, a_2 \in A \Rightarrow f^{-1}(a_1) \cap f^{-1}(a_2) = \phi$

Como $x_{a_1} \in f^{-1}(a_1)$ y $x_{a_2} \in f^{-1}(a_2) \Rightarrow x_{a_1} \neq x_{a_2}$

Por lo tanto, $\#A \leq \#B$

$\blacksquare$

Observación: $\leq$ y $\geq$ son relaciones de orden

Demostración: (La segunda es análoga a la primera)

$\#A \leq \#A$ pues $\exists f\colon A \to A\ /f(x) = x$ con f inyectiva

Entonces $\leq$ es reflexiva (1)

Si $\#A \leq \#B$ y $\#B \leq \#A \Rightarrow \#A = \#B$ (Por Teo. de Bernstein)

Entonces $\leq$ es antisimétrica (2)

Si $\#A \leq \#B$ y $\#B \leq \#C \Rightarrow \exists\ f\colon A \to B$ y $\exists\ g\colon B \to C$ inyectivas. Entonces, $g \circ f\colon A \to C$ es inyectiva por composición de inyectivas $\Rightarrow \#A \leq \#C$

Luego $\leq$ es transitiva (3)

$\therefore$ (Por 1, 2 y 3) La relación es de orden

$\blacksquare$

Observación: Si X es infinito $\Rightarrow \exists f\colon \mathbb{N} \to X$ inyectiva

Demostración:

$\aleph_0 \leq \#X$ para cualquier conjunto infinito. Es decir, $\aleph_0$ es el menor cardinal asociado a conjuntos finitos

Como $X \neq \phi \Rightarrow \exists x_0 \in X$. Definimos $f(0) = x_0$

$X \backslash \{x_0\} \neq \phi$, pues si $X \backslash \{x_0\} = \phi \Rightarrow X = \{x_0\} \Rightarrow X \sim I_1 \Rightarrow X$ es finito **ABS!** por hipótesis (1)

$\Rightarrow \exists x_1 \in X \backslash \{x_0\}$. Definimos $f(1) = x_1$. con $x_1 \neq x_0$

Supongamos que definimos $f(n) = x_n$, con $x_n \in X \backslash \{x_0, x_1, ..., x_{n-1}\}$

$X \backslash \{x_0, x_1, ..., x_{n-1}\} \neq \phi$ (por razonamiento similar a (1))

$\Rightarrow x_{n+1} \in X \backslash \{x_0, x_1, ..., x_n\}$. Definimos $f(n+1) = x_{n+1}$, con $x_{n+1} \neq x_i \quad 0 \leq i \leq n$

La f construida resulta inyectiva

$\blacksquare$

Observación: Si $\exists f\colon \mathbb{N} \to X$ inyectiva $\Rightarrow X$ es infinito

Demostración:

Si $f\colon \mathbb{N} \to X$ es inyectiva $\Rightarrow f\colon \mathbb{N} \to Im(f)$ es biyectiva $\Rightarrow \mathbb{N} \sim Im(f)$ Como $\mathbb{N}$ es infinito $\Rightarrow Im(f)$ es infinito. Y como $Im(f) \subseteq X \Rightarrow$ (por Prop. vista anteriormente) X es infinito

$\blacksquare$

Observación: Sea $A \neq \phi$. Si A es numerable $\Rightarrow \exists\colon \mathbb{N} \to A$ sobreyectiva

Demostración:

Caso 1) Supongamos $A \sim I_p$ para algún $p \in \mathbb{N}_{\geq \mathbb{1}}$ Entonces $A = \{a_1, a_2, ..., a_p\}$

Definimos $f \colon \mathbb{N} \to A$ /

$$f(n) = \begin{cases} a_{n+1} & 0 \leq n \leq p-1 \\ a_1 & n \geq p \end{cases}$$

$Im(f) = A \Rightarrow$ f es sobreyectiva

Caso 2) Si $A \sim \mathbb{N} \Rightarrow \exists f \colon \mathbb{N} \to A$ biyectiva y, particularmente, f es sobreyectiva

■

Observación: Si $\exists f \colon \mathbb{N} \to A$ sobreyectiva $\Rightarrow$ A es numerable $(A \neq \phi)$

Demostración:

Si $f \colon \mathbb{N} \to A$ sobreyectiva $\Rightarrow \#\mathbb{N} \geq \#A \Rightarrow \#A \leq \aleph_0$

Entonces $\#A < \aleph_0$ o $\#A = \aleph_0 \Rightarrow$ A es finito o $A \sim \mathbb{N} \Rightarrow A$ es numerable

■

Observación: Si $A \subseteq \mathbb{N} \Rightarrow A$ es numerable

Demostración:

Si $A = \phi \Rightarrow A$ es finito $\Rightarrow A$ es numerable

Si $A \neq \phi$, podemos definir $f \colon A \to \mathbb{N} \,/ f(x) = x$ inyectiva $\Rightarrow \#A \leq \aleph_0 \Rightarrow A$ es numerable

■

Proposición: $U = [0, 1]$ no es numerable

Demostración:

Definimos $f \colon \mathbb{N} \to U \,/ f(n) = \dfrac{1}{n+1}$

Si $f(n) = f(m) \Rightarrow \dfrac{1}{n+1} = \dfrac{1}{m+1} \Rightarrow n+1 = m+1 \Rightarrow n = m \Rightarrow$ f es inyectiva

$\Rightarrow \#\mathbb{N} \leq \#U \Rightarrow \#U \geq \aleph_0 \Rightarrow U$ es infinito

Supongamos que U es numerable $\Rightarrow U \sim \mathbb{N}$. Entonces, podemos escribir $U = \{u_1, u_2, ...,\}$ donde

$u_1 = 0, u_{11}u_{12}u_{13}...$ con $0 \leq u_{ij} \leq 9$
$u_2 = 0, u_{21}u_{22}u_{23}...$
...
$u_n = 0, u_{n1}u_{n2}u_{n3}...$

Consideremos $X = 0, x_1x_2x_3...\;\; 0 \leq x_i \leq 9 \; \forall i \in \mathbb{N}_{\geq 1}$, y $x_i \neq u_{ii} \; \forall i \in \mathbb{N}_{\geq 1}$

$0 < x_i < 9$, eligiendo así garantizamos la escritura única de X.

Resulta que $x \in U$, pero $x \neq u_i \; \forall i \in \mathbb{N}_{\geq 1}$ **ABS!** que vino de suponer que U es numerable. (Encontramos un número que pertenece al intervalo pero no está en la representación de U que describimos).

Por lo tanto, U es infinito no numerable.

■

Proposición: Si X es un conjunto infinito no numerable y a es un conjunto numerable, entonces $X \cup A \sim X$

Demostración:

Si $A \subseteq X, X \cup A = X \Rightarrow X \sim X$ (Reflexividad de $\sim$)

Si $A \nsubseteq X$, podemos escribir $A = A_1 \cup A_2$ con $A_1 \subseteq X$ y $A_2 \cap X \neq \phi \Rightarrow X \cup A = X \cup (A_1 \cup A_2) = X \cup A_2$

Sin pérdida de generalidad, supongamos que $X \cap A \neq \phi$

Como X es infinito $\Rightarrow \exists f : \mathbb{N} \to X$ inyectiva $\Rightarrow f : \mathbb{N} \to Im(f) = Y$ es biyectiva $\Rightarrow \mathbb{N} \sim Y$, $Y \subseteq X$

A es numerable $\Rightarrow$ (por ejer. de la práctica) $Y \cup A$ es numerable. Además $Y \subseteq Y(infinito) \cup A \Rightarrow Y \cup A$ es infinito y numerable $\Rightarrow Y \cup A \sim \mathbb{N}$ y $\mathbb{N} \sim Y \Rightarrow Y \cup A \sim Y$ (transitividad de $\sim$)

Entonces $\exists g : Y \cup A \Rightarrow Y$ es biyectiva

Definimos $H : X \cup A \to X \; / H(t) = \begin{cases} t & t \in X - Y \\ g(t) & t \in Y \cup A \end{cases}$

La cual está bien definida pues $(X - Y) \cap (Y \cup A) = \phi$

Sea $t_1 \neq t_2, \;\; t_1, t_2 \in X - Y \Rightarrow H(t_1) \neq H(t_2)$ (por definición de H)

Sea $t_1 \neq t_2, \;\; t_1, t_2 \in Y \cup A \Rightarrow H(t_1) = g(t_1)$ y $H(t_2) = g(t_2)$, y $H(t_1) \neq H(t_2)$ (por inyectividad de g)

Sea $t_1 \in X - Y$ y $t_2 \in Y \cup A$, $t_1 \neq t_2 \Rightarrow H(t_1) \in X - Y$ y $H(t_2) \in Y$, y además $H(t_1) \neq H(t_2)$ pues $X - Y \cap Y = \phi$

Entonces, H es inyectiva (1)

Sea $y \in X$:
Si $y \in X - Y \Rightarrow H(y) = y$

Si $y \in Y \Rightarrow \exists \; t \in Y \cup A \subseteq X \; / g(t) = y$, con g sobreyectiva

$\Rightarrow H(t) = g(t) = y$

Luego, H es sobreyectiva (2)

Luego, por (1) y (2), H es biyectiva $\Rightarrow X \cup A \sim X$

$\blacksquare$

Proposición: Si X es infinito no numerable y A es numerables, entonces $X \backslash A \sim X$

Demostración: El truco es pensar a X como $(X \backslash A) \cup A$

Sin pérdida de generalidad, supongamos $A \subseteq X$

Si $A \cap X = \phi \Rightarrow X \backslash A = X \sim X$ por reflexividad de $\sim$

Si $A \cap X \neq \phi$, podemos escribir $A = A_1 \cup A_2, A_1 \subseteq X, X \cap A_2 = \phi$

En este caso $X \backslash A = X \backslash (A_1 \cup A_2) = X \backslash A_1$

Entonces, suponiendo $A \subseteq X$, podemos escribir $X = (X \backslash A) \cup A$ (1)

Si $X \backslash A$ es numerable $\Rightarrow$ (por ejer. de la práctica) X es numerable, por ser unión de conjuntos numerables **ABS!** por hipótesis.

Entonces $X \backslash A$ es infinito no numerable, por lo que acabamos de probar: $(X \backslash A) \cup A \sim X \backslash A$, teniendo en cuenta (1), finalmente queda que $X \backslash A \sim X$

$\blacksquare$

Teorema de Cantor:

$$\#X < \#\mathcal{P}(x)$$

Demostración:

Definimos $f \colon X \to \mathcal{P}(x) \ / \ f(a) = \{a\} \in \mathcal{P}(x)$

Si $a \neq b \Rightarrow f(a) \neq f(b) \Rightarrow f$ es inyectiva $\#X \leq \#\mathcal{P}(x)$

Supongamos que $\exists \ g \colon X \to \mathcal{P}(x)$ sobreyectiva

Y, consideremos $B \colon \{t \in X \ / \ t \notin g(t)\} \in \mathcal{P}(x)$

Como g es sobreyectiva $\Rightarrow \ \exists b \in X \ / \ g(b) = B$

Supongamos que $b \in B = g(b) \Rightarrow b \in g(b) \Rightarrow b \notin B$ **ABS!** pues $b \in B$

Supongamos que $b \notin B = g(b) \Rightarrow b \notin g(b) \Rightarrow b \in B$ **ABS!** pues $b \notin B$

$\Rightarrow g$ no es sobreyectiva $\Rightarrow \#X \neq \#\mathcal{P}(x)$

Luego, $\#X < \#\mathcal{P}(x)$

$\blacksquare$

Parte II

Lenguajes

Proposición: Sea A alfabeto, $E, F, G, H \in A^* \ / \ EF = GH$ y $long(E) \geq long(G) \Rightarrow \exists \ H' \in A^* \ / \ E = GH'$

Demostración: Por inducción en la longitud de E.

C.B) $long(E) = 0 \Rightarrow E = \lambda$

$long(E) \geq long(G) = 0 \Rightarrow long(G) = 0 \Rightarrow G = \lambda$

Tomo $H' = \lambda$

$\therefore E = GH' \ (\lambda = \lambda\lambda)$

$P(k) =$ Sea A alfabeto, $E, F, G, H \in A^* \ / \ EF = GH$ y $long(E) \geq long(G) \Rightarrow \ \exists \ H' \in A^* \ / \ E = GH'$

H.I) P(n)

T.I) P(n+1)

Sean $E, F, G, H \in A^* long(E) = n + 1 > 0$, y $long(E) \geq long(G)$, siendo $E = e_0 e_1 ... e_n$

C.1) $long(G) > 0 \Rightarrow G = g_0 g_1 ... g_t$

Como $EF = GH \Rightarrow$ (Saco e_0 y g_0 por ser iguales) $e_1 ... e_n F = g_1 ... g_t H$

Llamo $\tilde{E} = e_1 ... e_n$ y $\tilde{G} = g_1 ... g_t$

$long(E) \geq long(G) \Rightarrow long(E) - 1 \geq long(G) - 1 \Rightarrow long(\tilde{E}) \geq long(\tilde{G})$ y $\tilde{E}F = \tilde{G}H$

$\Rightarrow$ por H.I. $\exists \ H' \in A^* \ / \ \tilde{E} = \tilde{G}H' \Rightarrow e_0\tilde{E} = g_0\tilde{G}H' \Rightarrow E = GH'$

C.2) $long(G) = 0 \Rightarrow G = \lambda$

$EF = GH \Rightarrow EF = \lambda H$

Tomo $H' = E \Rightarrow E = GH' = \lambda H'$

■

Corolario: A alfabeto, $E, F, G, H \in A^*$, $EF = GH$, $long(E) = long(G) \Rightarrow E = G$ y $F = H$

Demostración:

$long(E) = long(G) \Rightarrow long(E) \geq long(G)$ y $EF = GH$

$\Rightarrow$ (por Teo. anterior) $E = GH'$, pero $long(E) = long(G) + (long(H') = 0)$ pues $E = G$ $\Rightarrow H' = \lambda \Rightarrow E = G \Rightarrow EF = GH$ y como E y G son iguales, los puedo cancelar a ambos lados

$$\therefore F = G$$

$\blacksquare$

Parte III
Sintaxis de Lógica Proposicional

Teorema: $\alpha \in FORM \Leftrightarrow X_1X_2...X_n = \alpha$ cadena de formación (c.f)

Demostración: Ida por inducción en $long(\alpha)$ y vuelta por inducción en el elemento X_n

$\Rightarrow$)

C.B) $long(\alpha) = 1 \Rightarrow \alpha = p_j \in VAR$. Luego, $X_1 = p_j$ es una c.f. de α

H.I) $\alpha \in FORM$, $long(\alpha) = k \leq n \Rightarrow \exists\ X_1X_2...X_k = \alpha$ c.f.

T.I) $\alpha \in FORM$, $long(\alpha) = n+1 \Rightarrow \exists\ X_1X_2...X_j = \alpha$ c.f.

Sea $\alpha \in FORM\ /\ long(\alpha) = n+1 > 0$

Caso 1) $\alpha = p_j \in VAR \Rightarrow definoX_1 = p_j$ que es c.f. de α

Caso 2) $\alpha = \neg\beta$ con $\beta \in FORM$
$long(\alpha) = long(\beta) + 1 = n+1 \Rightarrow long(\beta) = n \Rightarrow$ por H.I. $\exists\ X_1X_2...X_k = \beta$ c.f.

Defino $\{Y_1 = X_1, Y_2 = X_2, ..., Y_k = X_k, Y_{k+1} = \neg Y_k\} = \alpha$ es una c.f. de α

Caso 3) $\alpha = (\beta_1 * \beta_2)$ $\beta_1, \beta_2 \in FORM$, $* \in \{\wedge, \vee, \rightarrow\}$
$n+1 = long(\alpha) = 3 + long(\beta_1) + long(\beta_2) \Rightarrow long(\beta_1) + long(\beta_2) = n-2$

$\Rightarrow long(\beta_1) < n$ y $long(\beta_2) < n \Rightarrow$ por H.I:

$\exists X_1X_2...X_k = \beta_1$ c. f y $\exists Y_1Y_2...Y_t = \beta_2$ c.f.

Defino $Z = \{Z_1 = X_1, ..., Z_k = X_k, Z_{k+1} = Y_1, ..., Z_{k+t} = Y_t, Z_{k+t+1} = (Z_k * Z_{k+t})\} = \alpha$ que es una c.f. de α

$\Leftarrow$)

Sea $X_1X_2...X_n$ c.f. Vamos a probar por inducción en n que $X_j \in FORM$ $1 \leq j \leq n$

C.B) $n = 1 \Rightarrow X_1$ es una c.f. $\Rightarrow X_1 \in VAR \Rightarrow X_1 \in FORM$

H.I) $X_1X_2...X_n$ c.f $\Rightarrow X_j \in FORM$ $1 \leq j \leq n$

T.I) $X_1X_2...X_{n+1}$ c.f $\Rightarrow X_j \in FORM$ $1 \leq j \leq n$

Sea $X_1X_2...X_{n+1}$ c.f

Por observación anterior $X_1X_2...X_n$ es c.f. $\Rightarrow$ por $H.I.X_j \in FORM$ $1 \leq j \leq n$

Caso 1) $X_{n+1} \in VAR \Rightarrow X_{n+1} \in FORM$

Caso 2) $\exists j \leq n \ / \ X_{n+1} = \neg X_j$

$X_j \in FORM$ por H.I. $\Rightarrow \neg X_j \in FORM$

Caso 3) $\exists j, i \leq n \ / \ X_{n+1} = (X_j * X_i)$, $* \in \{\wedge, \vee, \rightarrow\}$

$X_j, X_i \in FORM$ por H.I. $\Rightarrow (X_j * X_i) \in FORM$

$\blacksquare$

Teorema: Sea $\alpha \in FORM$

Si $c(\alpha) = 0 \Rightarrow \alpha = p_j \in VAR$

Si $c(\alpha) > 0 \Rightarrow \alpha = \neg\beta, \beta \in FORM$ o $\alpha = (\beta_1 * \beta_2)$ $\beta_1, \beta_2 \in FORM$, $* \in \{\wedge, \vee, \rightarrow\}$

Demostración: Utilizando teorema anterior.

$\alpha \in FORM \Leftrightarrow X_1 X_2 ... X_n = \alpha$

Si $c(\alpha) = 0 \Rightarrow X_n \in VAR$

Si $c(\alpha) > 0 \Rightarrow \ \exists\ j < n \ / \ X_n = \neg X_j$ o $\exists\ j, i \leq n \ / \ X_n = (X_j * X_i)$

$\blacksquare$

Teorema: Sea $\alpha \in FORM$

1) $p(\alpha) = 0$

2) Si $\bullet$ es un conectivo binario (c.b.) que aparece en α y E es la expresión a la izquierda de $\bullet$ en $\alpha \Rightarrow p(E) > 0$

Demostración: Por inducción en $c(\alpha)$

C.B) $c(\alpha) = 0 \Rightarrow \alpha = p_j$, $p_j \in VAR$

1) $p(\alpha) = 0 - 0 = 0$

2) Se cumple por antecedente falso (no hay conectivos binarios)

$P(k) =$ Sea $\alpha \in FORM \ / \ c(\alpha) = k$

1) $p(\alpha) = 0$

2) Si $\bullet$ es un conectivo binario (c.b.) que aparece en α y E es la expresión a la izquierda de $\bullet$ en $\alpha \Rightarrow p(E) > 0$

H.I) $P(k)$, $k \leq n$

T.I) $P(n+1)$

Sea $\alpha \in Form \ / \ c(\alpha) = n+1 > 0$

Caso 1) $\alpha = \neg\beta$, $\beta \in FORM$

$c(\alpha) = 1 + c(\beta) = n+1 \Rightarrow c(\beta) = n$

1) Por H.I. $p(\beta) = 0 \Rightarrow p(\alpha) = p(\neg) + p(\beta) = 0 + 0 = 0$

2) Sea $\bullet$ es un conectivo binario (c.b.) que aparece en $\alpha \Rightarrow \bullet$ aparece en $\beta \Rightarrow$ por H.I. la expresión a la izquierda de $\bullet$ en β tiene peso > 0

Sea $E' = \neg E$ la expresión a la izquierda de $\bullet$ en α

$p(E') = p(\neg) + p(E) = 0 + p(E) > 0$

Caso 2) $\alpha = (\beta_1 * \beta_2)$, $\beta_1, \beta_2 \in FORM$, $* \in \{\wedge, \vee, \rightarrow\}$
$c(\alpha) = 1 + c(\beta_1) + c(\beta_2) = n+1$

$c(\beta_1) \leq n \Rightarrow$ por H.I. $p(\beta_1) = 0$ y si $\bullet$ es un c.b. que aparece en β_1 y E es la expresión a la izquierda de $\bullet$ en $\beta_1 \Rightarrow p(E) > 0$

$c(\beta_2) \leq n \Rightarrow$ por H.I. $p(\beta_2) = 0$ y si $\bullet$ es un c.b. que aparece en β_2 y E es la expresión a la izquierda de $\bullet$ en $\beta_2 \Rightarrow p(E) > 0$

1) $p(\alpha) = 1 + p(\beta_1) + p(*) + p(\beta_2) - 1 = 1 + 0 + 0 + 0 - 1 = 0$

2) Sea $\bullet$ un c.b. que aparece en α:

I. $\bullet$ aparece en β_1

Sea E' la expresión a la izquierda de $\bullet$ en $\alpha \Rightarrow E' = (E \Rightarrow p(E') = p(\text{"("}) + p(E) = 1 + p(E) > 0$

II. $\bullet$ es $*$

La expresión a la izquierda de $\bullet$ en α es

$E = (\beta_1 \Rightarrow p(E) = p(\text{"("}) + p(\beta_1) = 1 + 0 > 0$

III. $\bullet$ aparece en β_2

Sea E' la expresión a la izquierda de $\bullet$ en $\alpha \Rightarrow E' = (E \Rightarrow p(E') = p(\text{"("}) +$
$+ p(\beta_1) + p(*) + p(E) = 1 + 0 + 0 + p(E) > 0$

$\blacksquare$

Corolario (Unicidad de Escritura): Sea $\alpha \in FORM \ / \ c(\alpha) > 0$

$\Rightarrow \ \exists \beta \in FORM \ / \ \alpha = \neg\beta$ o $\exists * \in \{\wedge, \vee, \rightarrow\}$ y únicos $\beta_1, \beta_2 \in FORM \ / \ \alpha = (\beta_1 * \beta_2)$

Demostración: Utilizando teorema anterior.

Caso 1) $\alpha = \neg\beta_1 = \neg\beta_2 \Rightarrow \beta_1 = \beta_2$

Caso 2) $\alpha = (\beta_1 * \beta_2) = (\gamma_1 \bullet \gamma_2)$

I. Supongo que $long(\beta_1) > long(\gamma_1)$

   $\Rightarrow \exists \ H'$ expresión $/\beta_1 = \gamma_1 H'$ H' empieza con $\bullet$

   $\Rightarrow \beta_1 \in FORM$ por Teo. anterior la expresión a la izquierda de $\bullet$ en β_1 tiene peso $> 0 \Rightarrow p(\gamma_1) > 0$ **ABS!** porque $\gamma_1 \in FORM$

II. Supongo que $long(\beta_1) < long(\gamma_1)$ (Análogo al primer caso)

III. $long(\beta_1) = long(\gamma_1)$

   Como $(\beta_1 * \beta_2) = (\gamma_1 \bullet \gamma_2) \Rightarrow \beta_1 = \gamma_1$, $* = \bullet$ y $\beta_2 = \gamma_2$

Caso 3) $\alpha = \neg\beta = (\gamma_1 \bullet \gamma_2)$ **ABS!** pues no empiezan con el mismo símbolo

$\blacksquare$

Parte IV
Semántica de Lógica Proposicional

Teorema: Sea $f\colon VAR \to \{0,1\}$ función $\Rightarrow \exists!$ valuación $v\colon FORM \to \{0,1\}$ / v extiende a f

Es decir, sean v y w valuaciones tales que

$$v|_{VAR} = w|_{VAR} \Rightarrow v = w$$

Demostración: Por inducción en m. El truco es definir una unión infinita de conjuntos de fórmulas, y luego definir la valuación en función a las anteriores

Defino $F_n = \{\alpha \in FORM \ / \ c(\alpha) \leq n\}$

Donde, por ejemplo $F_0 = VAR$, $F_1 = VAR \cup \{\alpha \in FORM \ / \ c(\alpha) = 1\}$

Vemos también que $F_0 \subseteq F_1 \subseteq ...$ y que $FORM = \bigcup\limits_{n=0}^{\infty}$

$P(n) =$ Existe una única función $v_n\colon F_n \to \{0,1\}$ / v_n extienda a F_n y que v_n cumpla la definición de valuación

C.B) $n = 0$

$v_0 = F_0(= VAR) \to \{0,1\}$, defino $v_0 = f$

v_0 extiende a f de forma única y cumple la definición de valuación porque no hay conectivos

H.I) $P(k) k \leq n$

T.I) $P(n+1)$

Defino $v_{n+1} = F_{n+1} \to \{0,1\}$

Caso 1) $c(\alpha) \leq n$, $\alpha \in F_{n+1}$, defino $v_{n+1}(\alpha) = v_n(\alpha)$

Caso 2) $\alpha \in F_{n+1}$, $c(\alpha) = n+1$

I. $\alpha = \neg\beta$

   $c(\alpha) = 1 + c(\beta) = n + 1 \Rightarrow c(\beta) = n \Rightarrow$ por H.I existe una única $v_n(\beta)$ valuación que entienda a f

   Defino $v_{n+1}(\alpha) = 1 - v_{n+1}(\beta) = 1 - v_n(\beta)$

II. $\alpha = (\beta_1 * \beta_2)$, $\beta_1, \beta_2 \in FORM$, $* \in \{\wedge, \vee, \to\}$

   $c(\alpha) = 1 + c(\beta_1) + c(\beta_2) = n + 1 \Rightarrow c(\beta_1) + c(\beta_2) = n$

$c(\beta_1) \leq n \Rightarrow$ por H.I existe una única $v_n(\beta_1)$ valuación que entienda a f

$c(\beta_2) \leq n \Rightarrow$ por H.I existe una única $v_n(\beta_2)$ valuación que entienda a f

Subcaso 1. $\alpha = (\beta_1 \wedge \beta_2)$, $\beta_1, \beta_2 \in FORM$

Defino $v_{n+1}(\alpha) = \text{mín}\{v_{n+1}(\beta_1), v_{n+1}(\beta_2)\} = \text{mín}\{v_n(\beta_1), v_n(\beta_2)\}$

Subcaso 2. $\alpha = (\beta_1 \vee \beta_2)$, $\beta_1, \beta_2 \in FORM$

Defino $v_{n+1}(\alpha) = \text{máx}\{v_{n+1}(\beta_1), v_{n+1}(\beta_2)\} = \text{máx}\{v_n(\beta_1), v_n(\beta_2)\}$

Subcaso 3. $\alpha = (\beta_1 \rightarrow \beta_2)$, $\beta_1, \beta_2 \in FORM$

Defino $v_{n+1}(\alpha) = \text{máx}\{1 - v_{n+1}(\beta_1), v_{n+1}(\beta_2)\} = \text{máx}\{1 - v_n(\beta_1), v_n(\beta_2)\}$

$\therefore$ defino $v\colon FORM \rightarrow \{0, 1\}$ / $v(\alpha) = v_n(\alpha)$ siendo $c(\alpha) = n$

■

Teorema: Sea $\alpha \in FORM$. Sean v, w valuaciones tal que $v|_{VAR(\alpha)} = w|_{VAR(\alpha)}$, es decir, $v(p_j) = w(p_j)\ \forall\ p_j \in VAR(\alpha) \Rightarrow v(\alpha) = w(\alpha)$

Demostración: Por inducción en $c(\alpha)$

C.B) $c(\alpha) = 0 \Rightarrow \alpha = p_i \in VAR$

Sean v, w valuaciones tal que $v|_{VAR(\alpha)} = w|_{VAR(\alpha)} \Rightarrow$ como $\alpha = p_j \Rightarrow v(\alpha) = w(\alpha)$

H.I) Sea $\alpha \in FORM$ / $c(\alpha) \leq n$. Sean v, w valuaciones tal que $v|_{VAR(\alpha)} = w|_{VAR(\alpha)} \Rightarrow v(\alpha) = w(\alpha)$

T.I) Sea $\alpha \in FORM$ / $c(\alpha) = n + 1$. Sean v, w valuaciones tal que $v|_{VAR(\alpha)} = w|_{VAR(\alpha)} \Rightarrow v(\alpha) = w(\alpha)$

Caso 1) $\alpha = \neg\beta$, $\beta \in FORM$

$c(\alpha) = 1 + c(\beta) = n + 1 \Rightarrow c(\beta) = n \Rightarrow$ por H.I $v(\beta) = w(\beta)$

Como $VAR(\alpha) = VAR(\beta) \Rightarrow v|_{VAR(\alpha)} = v|_{VAR(\beta)} = w|_{VAR(\beta)} = w|_{VAR(\alpha)}$

$\Rightarrow v(\alpha) = 1 - v(\beta) = 1 - w(\beta) = w(\alpha)$

Caso 2) $\alpha = (\beta_1 * \beta_2)$, $\beta_1, \beta_2 \in FORM$, $* \in \{\wedge, \vee, \rightarrow\}$

$c(\alpha) = 1 + c(\beta_1) + c(\beta_2) = n + 1 \Rightarrow c(\beta_1) + c(\beta_2) = n$

$c(\beta_1) \leq n$ y $c(\beta_2) \leq n$

$VAR(\alpha) = VAR(\beta_1) \cup VAR(\beta_2)$

Como $v|_{VAR(\alpha)} = w|_{VAR(\alpha)}$

$\Rightarrow v|_{VAR(\beta_1)} = w|_{VAR(\beta_1)} \Rightarrow$ por H.I. $v(\beta_1) = w(\beta_1)$

$\Rightarrow v|_{VAR(\beta_2)} = w|_{VAR(\beta_2)} \Rightarrow$ por H.I. $v(\beta_2) = w(\beta_2)$

Subcaso 1. $\alpha = (\beta_1 \wedge \beta_2)$, $\beta_1, \beta_2 \in FORM$

$$v(\alpha) = \text{mín}\{v(\beta_1), v(\beta_2)\} = \text{mín}\{w(\beta_1), w(\beta_2)\} = w(\alpha)$$

Subcaso 2. $\alpha = (\beta_1 \vee \beta_2)$, $\beta_1, \beta_2 \in FORM$

$$v(\alpha) = \text{máx}\{v(\beta_1), v(\beta_2)\} = \text{máx}\{w(\beta_1), w(\beta_2)\} = w(\alpha)$$

Subcaso 3. $\alpha = (\beta_1 \rightarrow \beta_2)$, $\beta_1, \beta_2 \in FORM$

$$v(\alpha) = \text{máx}\{1 - v(\beta_1), v(\beta_2)\} = \text{máx}\{1 - w(\beta_1), w(\beta_2)\} = w(\alpha)$$

■

Proposición: Sean $\alpha \in FORM$ y $(p_1 \rightarrow \alpha)$ tautología. Si $p_1 \notin VAR(\alpha) \Rightarrow \alpha$ es tautología

Demostración:

Sea v valuación, queremos ver que $v(\alpha) = 1$

Defino $f\colon VAR \rightarrow \{0,1\}$ / $f(p_j) = \begin{cases} v(p_j) & p_j \in VAR(\alpha) \\ 1 & \text{otro caso} \end{cases}$

Sea v_f la única valuación que extiende a f

$v_f(p_1 \rightarrow \alpha) = 1$ (tautología)

$\text{máx}\{1 - v_f(p_1), v_f(\alpha)\} = \text{máx}\{1 - f(p_1), v_f(\alpha)\}$ como $p_1 \notin VAR(\alpha), f(p_1) = 1 \Rightarrow$

$\text{máx}\{1 - f(p_1), v_f(\alpha)\} = \text{máx}\{0, v_f(\alpha)\} = v_f(\alpha) \Rightarrow v_f(\alpha) = 1$

Notemos que $v_f|_{VAR(\alpha)} = v|_{VAR(\alpha)} \Rightarrow$ por Teo. anterior $v_f(\alpha) = v(\alpha)$

$\therefore v(\alpha) = 1\ \forall v \Rightarrow \alpha$ es tautología

■

Teorema: Sean $\Gamma \subseteq FORM$, $\alpha \in FORM$

$$\alpha \in C(\Gamma) \Leftrightarrow \Gamma \cup \{\neg\alpha\}\ es\ insatisfacible$$

Demostración: Por el contrarrecíproco tanto en la ida como en la vuelta

$\Rightarrow$)

Supongo que $\Gamma \cup \{\alpha\}$ es satisfacible

$\Rightarrow \exists\ v$ val. / $v(\Gamma) = 1$ y $v(\neg\alpha) = 1 \Rightarrow v(\alpha) = 0 \Rightarrow \alpha \notin C(\Gamma)$. Queda demostrado por contrarrecíproco

$\Leftarrow$)

Supongo que $\alpha \notin C(\Gamma) \Rightarrow \exists\ v$ val. $v(\Gamma) = 1$ y $v(\alpha) = 0$

$\Rightarrow v(\Gamma) = 1$ y $v(\neg\alpha) = 1 \Rightarrow v$ satisface a $\Gamma \cup \{\neg\alpha\} \Rightarrow \Gamma \cup \{\neg\alpha\}$ es satisfacible. Queda demostrado por contrarrecíproco

■

Teorema: Sean $\Gamma = \{\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_n\} \subseteq FORM$, $\alpha \in FORM$

$$\alpha \in C(\Gamma) \Leftrightarrow ((\gamma_1 \wedge \gamma_2 \wedge \cdots \wedge \gamma_n) \to \alpha)\ es\ tautologia$$

Demostración:
$\Leftarrow$)

Sea v val / $v(\Gamma) = 1$, queremos probar que $v(\alpha) = 1$

$v(\gamma_i) = 1,\ \ 1 \leq i \leq n \Rightarrow v(\gamma_1 \wedge \gamma_2 \wedge \cdots \wedge \gamma_n) = \text{mín}\{v(\gamma_1), v(\gamma_2), \ldots, v(\gamma_n)\} = 1$

Por dato, sabemos que $v((\gamma_1 \wedge \gamma_2 \wedge \cdots \wedge \gamma_n) \to \alpha) = 1\ \forall v$

$\Rightarrow \text{máx}\{1 - v(\gamma_1 \wedge \gamma_2 \wedge \cdots \wedge \gamma_n), v(\alpha)\} = \text{máx}\{0, v(\alpha)\} = v(\alpha)$

$\therefore v(\alpha) = 1 \Rightarrow \alpha \in C(\Gamma)$, como queríamos demostrar

$\Rightarrow$)

Sabemos por dato que $\alpha \in C(\Gamma)$

Queremos ver que $\sigma = ((\gamma_1 \wedge \gamma_2 \wedge \cdots \wedge \gamma_n) \to \alpha)$ es tautología

Caso 1) Si $v(\gamma_1 \wedge \gamma_2 \wedge \cdots \wedge \gamma_n) = 0$

$\Rightarrow v(\sigma) = \text{máx}\{1 - v(\gamma_1 \wedge \gamma_2 \wedge \cdots \wedge \gamma_n), v(\alpha)\} = \text{máx}\{1 - 0, v(\alpha)\} = 1$

Caso 2) Si $v(\gamma_1 \wedge \gamma_2 \wedge \cdots \wedge \gamma_n) = 1$

$\Rightarrow \text{mín}\{v(\gamma_1), v(\gamma_2), \ldots, v(\gamma_n)\} = 1 \Rightarrow$

$v(\gamma_i) = 1,\ \ 1 \leq i \leq n \Rightarrow v(\Gamma) = 1 \Rightarrow$ por dato $v(\alpha) = 1$

$\Rightarrow v(\sigma) = \text{máx}\{1 - v(\gamma_1 \wedge \gamma_2 \wedge \cdots \wedge \gamma_n), v(\alpha)\} = \text{máx}\{0, 1\} = 1$

$\therefore v(\sigma) = 1 \; \forall v$ val. $\Rightarrow \sigma$ es tautología

$\blacksquare$

Teorema de la Deducción (versión semántica): Sean $\alpha \in FORM$, $\Gamma \subseteq FORM$

$$(\alpha \to \beta) \in C(\Gamma) \Rightarrow \beta \in C(\Gamma \cup \{\alpha\})$$

Demostración:

$\Rightarrow$)

Sea v val. / $v(\Gamma \cup \{\alpha\}) = 1 \Rightarrow v(\Gamma) = 1$ y $v(\alpha) = 1$

Como $(\alpha \to \beta) \in C(\Gamma) \Rightarrow v(\alpha \to \beta) = 1 \Rightarrow \text{máx}\{1 - v(\alpha), v(\beta)\} = 1 \Rightarrow \text{máx}\{0, v(\beta)\} = 1 \Rightarrow v(\beta) = 1$

$\therefore \beta \in C(\Gamma \cup \{\alpha\})$

$\Leftarrow$)

Sea v val. / $v(\Gamma) = 1$

Si $v(\alpha) = 0 \Rightarrow v(\alpha \to \beta) = \text{máx}\{1 - v(\alpha), v(\beta)\} = \text{máx}\{1, v(\beta)\} = 1$

Si $v(\alpha) = 1 \Rightarrow v(\Gamma \cup \{\alpha\}) = 1 \Rightarrow$ (como $\beta \in C(\Gamma \cup \{\alpha\})$ por dato) $v(\beta) = 1$

$\Rightarrow v(\alpha \to \beta) = \text{máx}\{1 - v(\alpha), v(\beta)\} = \text{máx}\{0, 1\} = 1$

$\therefore v(\alpha \to \beta) = 1 \Rightarrow (\alpha \to \beta) \in C(\Gamma)$

$\blacksquare$

Lema: Sea $\Gamma \subseteq FORM$, Γ finitamente satisfacible, $p_j \in VAR$

$\Rightarrow \Gamma \cup \{p_j\}$ es finitamente satisfacible o $\Gamma \cup \{\neg p_j\}$ es finitamente satisfacible

Demostración:

Supongamos que $\Gamma \cup \{p_j\}$ no es f.s. y $\Gamma \cup \{\neg p_j\}$ no es f.s.

$\Rightarrow \exists \; \Gamma_1 \subseteq \Gamma \cup \{p_j\}$ finito e insatisfacible

$\Rightarrow \exists \; \Gamma_2 \subseteq \Gamma \cup \{\neg p_j\}$ finito e insatisfacible

Notemos que $\Gamma_1 \not\subseteq \Gamma$ y $\Gamma_2 \not\subseteq \Gamma$ pues Γ es f.s.

$\Rightarrow \Gamma_1 = \tilde{\Gamma}_1 \cup \{p_j\}$ / $\tilde{\Gamma}_1 \subseteq \Gamma$

$\Rightarrow \Gamma_1 = \tilde{\Gamma}_2 \cup \{\neg p_j\}$ / $\tilde{\Gamma}_2 \subseteq \Gamma$

Defino $\tilde{\Gamma} = \tilde{\Gamma_1} \cup \tilde{\Gamma_2}$ con $\tilde{\Gamma_1}$ y $\tilde{\Gamma_2}$ finitos $\Rightarrow \tilde{\Gamma}$ es finito

Como $\tilde{\Gamma}_1 \subseteq \Gamma$ y $\tilde{\Gamma}_1 \subseteq \Gamma \Rightarrow \tilde{\Gamma} \subseteq \Gamma$

Como $\tilde{\Gamma}$ es finito, $\tilde{\Gamma} \subseteq \Gamma$ y Γ es f.s. $\Rightarrow \tilde{\Gamma}$ es satisfacible $\Rightarrow \exists\ v$ val. $/\ v(\tilde{\Gamma}) = 1$

Caso 1) $v(p_j) = 1 \Rightarrow v(\tilde{\Gamma}_1 \cup \{p_j\}) = 1$ **ABS!** pues $\tilde{\Gamma}_1 \cup \{p_j\} = \Gamma_1$, y Γ_1 es insatisfacible

Caso 2) $v(\neg p_j) = 1 \Rightarrow v(\tilde{\Gamma}_2 \cup \{\neg p_j\}) = 1$ **ABS!** pues $\tilde{\Gamma}_2 \cup \{\neg p_j\} = \Gamma_2$, y Γ_2 es insatisfacible

$\therefore$ (Ley de De Morgan) $\Gamma \cup \{p_j\}$ es finitamente satisfacible o $\Gamma \cup \{\neg p_j\}$ es finitamente satisfacible

$\blacksquare$

Teorema de Compacidad:

$$\Gamma\ es\ satisfacible \Leftrightarrow \Gamma\ es\ finitamente\ satisfacible$$

Demostración: La ida es intuitiva, para la vuelta se define una sucesión creciente de conjuntos utilizando el lema anterior. Vamos construyendo el nuevo conjunto agregando variables proposicionales

$\Rightarrow$)

Γ es satisfacible $\Rightarrow \exists\ v$ val $/\ v(\Gamma) = 1$

Sea $\Gamma_1 = \{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n\} \subseteq \Gamma \Rightarrow$ como $v(\alpha) = 1\ \forall\ \alpha \in \Gamma$, en particular, $v(\Gamma_1) = 1$

$\Leftarrow$)

Defino una sucesión creciente de conjuntos $\Delta_0 \subseteq \Delta_1 \subseteq \cdots \subseteq \Delta_n$ que van a contener literales

Defino:

$\Delta_0 = \phi$

$$\Delta_{n+1} = \begin{cases} \Delta_n \cup \{p_n\} & si\ \Gamma \cup \Delta_n \cup \{p_n\}\ es\ f.s. \\ \Delta_n \cup \{\neg p_n\} & si\ \Gamma \cup \Delta_n \cup \{\neg p_n\}\ es\ f.s. \end{cases}$$

El n-ésimo elemento del conjunto está bien definido por lema anterior

$$\Delta = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \Delta_n$$

Defino $f \colon VAR \to \{0,1\}\ /\ f(p_j) = \begin{cases} 1 & p_j \in \Delta \\ 0 & \neg p_j \in \Delta \end{cases}$

Sea v_f la valuación que extiende a f

Notemos que $v_f(\Delta) = 1$

Veamos que $v_f(\Gamma) = 1$

Supongamos que v_f no satisface a $\Gamma \Rightarrow \exists\ \alpha \in \Gamma\ /\ v_f(\alpha) = 0$

Sea $k = \max\{j\ /\ p_j apareceen\alpha\}$

Caso 1) $v_f(p_k) = 1 \Rightarrow$

$\Rightarrow \Sigma = \{\alpha\} \cup \Delta_k \cup \{p_j\}$ es insatisfacible. $\Delta_k \cup \{p_j\} = \Delta_{k+1}$ por definición

Σ es finito e insatisfacible, $\Sigma \subseteq \Gamma \cup \Delta_{k+1}$ $f.s. \Rightarrow \Sigma$ es satisfacible. **ABS!** pues en la línea anterior vimos que es insatisfacible

Veamos que Σ es insatisfacible

Supongamos que lo es $\Rightarrow \exists w$ val / $w(\Sigma) = 1 \Rightarrow w(\alpha) = 1$ y $w(\Delta_{k+1}) = 1$

Notemos que si $p_j \in VAR(\alpha) \Rightarrow p_j \in \Delta_{k+1}$ o $\neg p_j \in \Delta_{k+1}$

$\therefore v_f|_{VAR(\alpha)} = w|_{VAR(\alpha)} \Rightarrow v_f(\alpha) = w(\alpha) \Rightarrow 0 = 1$ **ABS!**

Caso 2) $v_f(p_k) = 0$

$\Rightarrow \Sigma = \{\alpha\} \cup \Delta_k \cup \{\neg p_j\}$ es insatisfacible. $\Delta_k \cup \{\neg p_j\} = \Delta_{k+1}$ por definición

Σ es finito e insatisfacible, $\Sigma \subseteq \Gamma \cup \Delta_{k+1}$ $f.s. \Rightarrow \Sigma$ es satisfacible. **ABS!** pues en la línea anterior vimos que es insatisfacible

El resto es análogo al primer caso

$\therefore v_f(\Gamma) = 1 \Rightarrow \Gamma$ es satisfacible

■

Teorema de Equivalencias: Los siguientes enunciados son equivalentes.

1)
$$\Gamma\ es\ satisfacible \Leftrightarrow \Gamma\ es\ finitamente\ satisfacible$$

2)
$$\Gamma\ es\ insatisfacible \Leftrightarrow \Gamma\ no\ es\ finitamente\ satisfacible$$

3)
$$\alpha \in C(\Gamma) \Leftrightarrow \exists\ \Gamma'\ finito\ /\ \alpha \in C(\Gamma'),\ \Gamma' \subseteq \Gamma$$

Demostración: Solamente hay que demostrar que ("1" $\Leftrightarrow$ "2") $\Leftrightarrow$ "3"

El enunciado "1" es el Teorema de Compacidad, y el "2" es su contrarrecíproco $\Rightarrow$ "1" $\Leftrightarrow$ "2"

"2" = "1" $\Rightarrow$ "3")

$\alpha \in C(\Gamma) \Rightarrow \Gamma \cup \{\neg\alpha\}$ es insatisfacible $\Rightarrow$ por Teo. de Compacidad $\Gamma \cup \{\neg\alpha\}$ no es finitamente satisfacible $\Rightarrow \exists\ \Gamma' \subseteq \Gamma \cup \{\neg\alpha\}$ / Γ' es finito e insatisfacible

Caso 1) $\Gamma' \subseteq \Gamma$. Como Γ' es insatisfacible $\Rightarrow C(\Gamma') = FORM \Rightarrow \alpha \in C(\Gamma')$

Caso 2) $\Gamma' \nsubseteq \Gamma \Rightarrow \Gamma' = \Gamma'' \cup \{\neg\alpha\}$ / $\Gamma'' \subseteq \Gamma$

Queremos ver que $\alpha \in C(\Gamma'')$. Supongamos que no.

$\Rightarrow \exists\, v$ valuación / $v(\Gamma'') = 1$ y $v(\alpha) = 0 \Rightarrow v(\Gamma'') = 1$ y $v(\neg\alpha) = 1 \Rightarrow$ por definición $v(\Gamma') = 1$ **ABS!** pues Γ' es insatisfacible

$\therefore \alpha \in C(\Gamma'')$

"3" $\Rightarrow$ "2" = "1")

$\Rightarrow$) Sea Γ satisfacible $\Rightarrow \exists\, v$ valuación / $v(\Gamma) = 1$ Sea $\Gamma' \subseteq \Gamma$ finito $\Rightarrow v(\Gamma') = 1 \Rightarrow \Gamma'$ es finitamente satisfacible

$\Leftarrow$) Contrarrecíproco. Queremos ver que Γ insatisfacible $\Rightarrow \Gamma$ no es finitamente satisfacible

Sea Γ insatisfacible $\Rightarrow C(\Gamma) = FORM \Rightarrow (p_1 \wedge \neg p_1) \in C(\Gamma) \Rightarrow$ por "3"$\exists \Gamma' \subseteq \Gamma$ finito / $(p_1 \wedge \neg p_1) \in C(\Gamma') \Rightarrow \Gamma'$ es insatisfacible $\Rightarrow \Gamma'$ no es finitamente satisfacible

$\blacksquare$

Parte V
Teoría Axiomática

Teorema: α es demostrable $\Rightarrow \alpha$ es tautología

Demostración: Inducción en la longitud de la prueba

C.B) Sea $\alpha_1 = \alpha$ una prueba de $\alpha \Rightarrow \alpha_1$ es axioma $\Rightarrow \alpha_1$ es tautología

H.I) Sea $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ una prueba de α

T.I) Sea $\alpha_1, \dots, \alpha_{n+1}$ una prueba de α

Caso 1) α_{n+1} es un axioma $\Rightarrow \alpha_{n+1} = \alpha$ es tautología

Caso 2) $\exists\ j, k \leq n \ /\ \alpha_j = (\alpha_k \to \alpha_{n+1})$

1. $\alpha_k \to \alpha_{n+1}$ dato
2. α_k dato
3. α_{n+1} M.P. 1 y 2

$\alpha_1, \dots, \alpha_k$ es una prueba de α_k porque cada α_i es un axioma o se obtiene por M.P. de dos anteriores, dado que $\alpha_1, \dots, \alpha_k, \alpha_{k+1}, \dots, \alpha_{n+1}$ es una prueba

Como $k \leq n \Rightarrow$ por H.I. α_k es una tautología

Análogamente, $\alpha_1, \dots, \alpha_j$ es una prueba de α_j y $j \leq n \Rightarrow$ por H.I. α_j es una tautología

Queremos ver que α_{n+1} es una tautología

Sea v valuación. $v(\alpha_j) = v(\alpha_k) = 1$ pues son tautologías

$1 = v(\alpha_j) = v(\alpha_k \to \alpha_{n+1}) = \text{máx}\{1 - v(\alpha_k), v(\alpha_{n+1})\} = \text{máx}\{0, v(\alpha_{n+1})\} \Rightarrow v(\alpha_{n+1}) = 1$

$\therefore \alpha_{n+1}$ es tautología

$\blacksquare$

Teorema de la deducción (versión axiomática):

$$\Gamma \vdash (\alpha \to \beta) \Leftrightarrow \Gamma \cup \alpha \vdash \beta$$

Demostración: La ida es trivial, la vuelta por inducción en la longitud de la prueba.

$\Rightarrow$)

Sabemos que $\Gamma \vdash (\alpha \to \beta) \Rightarrow \Gamma \cup \{\alpha\} \vdash (\alpha \to \beta)$ pues $\Gamma \subseteq \Gamma \cup \{\alpha\}$ y $\Gamma \cup \{\alpha\} \vdash \alpha$ pues $\alpha \in \Gamma \cup \{\alpha\}$

$\Rightarrow \Gamma \cup \{\alpha\} \vdash \beta$ por M.P. entre ambos datos

$\Leftarrow$)

Dato: $\Gamma \cup \alpha \vdash \beta$

Queremos ver por inducción en la longitud de la prueba que $\Gamma \cup \alpha \vdash (\alpha \to \beta)$

C.B. Sea $\alpha_1 = \beta$ prueba a partir de $\Gamma \cup \alpha \Rightarrow$

1. β es un axioma

   1. β Axioma
   2. $\beta \to (\alpha \to \beta)$ Axioma 1
   3. $\alpha \to \beta$ M.P. 1 y 2

   Como $\phi \vdash (\alpha \to \beta) \Rightarrow$ particularmente $\Gamma \vdash (\alpha \to \beta)$

2. $\beta \subseteq \Gamma$

   1. β Dato
   2. $\beta \to (\alpha \to \beta)$ Axioma 1
   3. $\alpha \to \beta$ M.P. 1 y 2

3. $\beta = \alpha$
   En la teoría vimos que $\phi \vdash (\alpha \to \alpha) \Rightarrow$ particularmente $\Gamma \vdash (\alpha \to \alpha)$

H.I) Sea $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$ $k \leq n$, una prueba de β a partir de $\Gamma \cup \{\alpha\} \Rightarrow \Gamma \vdash (\alpha \to \beta)$

T.I) Sea $\alpha_1, \ldots, \alpha_{n+1}$ una prueba de β a partir de $\Gamma \cup \{\alpha\} \Rightarrow \Gamma \vdash (\alpha \to \beta)$

Sea $\alpha_1, \ldots, \alpha_{n+1}$ una prueba de β a partir de $\Gamma \cup \{\alpha\} \Rightarrow \beta$ es axioma o $\beta \in \Gamma$ o $\beta = \alpha$ o β se obtiene por M.P. a partir de anteriores

Los primeros tres casos son análogos al caso baso. Resta ver el último caso donde β se obtiene por M.P.

$\exists\ j, k \leq n\ /\ \alpha_j = (\alpha_k \to \alpha_{n+1}),\ \alpha_{n+1} = \beta$

$\alpha_1, \ldots, \alpha_k$ $k \leq n$, una prueba a partir de $\Gamma \cup \{\alpha\} \Rightarrow \Gamma \vdash (\alpha \to \alpha_k)$

$\alpha_1, \ldots, \alpha_j$ $j \leq n$, una prueba a partir de $\Gamma \cup \{\alpha\} \Rightarrow \Gamma \vdash (\alpha \to \alpha_j)$, $\alpha_j = (\alpha_k \to \beta)$

Queremos ver que $\Gamma \vdash (\alpha \to \beta)$

1. $(\alpha \to (\alpha_k \to \beta)) \to ((\alpha \to \alpha_k) \to (\alpha \to \beta))$ Axioma 2
2. $(\alpha \to (\alpha_k \to \beta))$ pues $\Gamma \vdash (\alpha \to (\alpha_k \to \beta)$

3. $(\alpha \to \alpha_k) \to (\alpha \to \beta)$ M.P. 1 y 2
4. $(\alpha \to \alpha_k)$ pues $\Gamma \vdash (\alpha \to \alpha_k)$
5. $(\alpha \to \beta)$ M.P. 3 y 4

$\therefore \Gamma \vdash (\alpha \to \beta)$

$\blacksquare$

Teorema de Correctitud:

$$\Gamma \vdash \alpha \to \alpha \in C(\Gamma)$$

Demostración:

Caso 1) $\Gamma = \phi$

Queremos ver que $\phi \vdash \alpha \Rightarrow \alpha \in C(\phi)$

Por definición, si $\phi \vdash \alpha$, α es demostrable "1"

Si $\alpha \in C(\phi) = Tautologias \ \Rightarrow \alpha \in Tautologias$ "2"

"1" $\Rightarrow$ "2" por Teorema visto anteriormente

Caso 2) $\Gamma \neq \phi$

Por dato $\exists\ \alpha_1, \dots \alpha_n$ prueba de α a partir de Γ

Caso 1) α es un axioma $\Rightarrow v(\alpha) = 1$

Caso 2) $\alpha \in \Gamma \Rightarrow$ si $v(\Gamma) = 1 \Rightarrow v(\alpha) = 1$

Caso 3) α se obtiene por M.P. de anteriores

$\Rightarrow \exists\ \alpha_j\ j \leq n\ /\ \alpha_j = (\alpha_i \to \alpha)$

Supongamos que $\exists\ v$ valuación $/\ v(\alpha) = 0$

$v(\alpha_k) = 1\ k \leq n$ pues forman parte de la prueba (visto en Teorema anterior)

$v(\alpha_j) = 1 \Rightarrow \text{máx}\{1 - v(\alpha_i), v(\alpha)\} = 1 \Rightarrow \text{máx}\{1 - 1, 0\} = 1 \Rightarrow 0 = 1$ **ABS!** que vino de suponer que $v(\alpha) = 0 \Rightarrow v(\alpha) = 1$

$\therefore v(\alpha) = 1 \Rightarrow \alpha \in C(\Gamma)$

$\blacksquare$

Observación: $\Gamma\ satisfacible \Rightarrow \Gamma\ consistente$

Demostración: Por el absurdo mediante Teorema de Correctitud

Supongamos que Γ no es consistente $\Rightarrow \exists\ \alpha \in FORM\ /\ \Gamma \vdash \alpha$ Y $\Gamma \vdash \neg\alpha \Rightarrow$ por Teo. de Correctitud $\alpha \in C(\Gamma)$ y $\neg\alpha \in C(\Gamma)$

Como Γ es satisfacible $\Rightarrow \exists\ v$ val. $/\ v(\Gamma) = 1 \Rightarrow$ como α y $\neg\alpha \in C(\Gamma) \Rightarrow v(\alpha) = 1$ y $v(\neg\alpha) = 1$ **ABS!**

$\therefore \Gamma$ es consistente

$\blacksquare$

Lema de Lindenbaum: Sea Γ consistente $\Rightarrow \exists\ \Gamma'$ maximal consistente $\ /\ \Gamma \subseteq \Gamma'$

Demostración:

$\#FORM = \aleph_0 \Rightarrow \exists\ f\colon \mathbb{N} \to FORM$ biyectiva

$Form = Im(f) = \{\gamma_0, \ldots, \gamma_n\}$

$\Gamma_0 = \Gamma$

$$\Gamma_{n+1} = \begin{cases} \Gamma_n \cup \{\gamma_n\} & si\ \Gamma_n \cup \{\gamma_n\}\ es\ consistente \\ \Gamma_n & sino \end{cases}$$

$$\Gamma' = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \Gamma_n$$

Queremos ver que Γ' es m.c. y $\Gamma \subseteq \Gamma'$

1. $\Gamma = \Gamma_0 \subseteq \Gamma'$

2. Veamos que Γ' es consistente

   Supongamos que no lo es $\Rightarrow \exists\ \alpha\ /\ \Gamma' \vdash \alpha$ y $\Gamma' \vdash \neg\alpha$

   $\exists \alpha_1, \ldots, \alpha_n$ prueba a partir de Γ'

   $\exists \beta_1, \ldots, \beta_k$ prueba a partir de Γ'

   $X = \{\alpha_j\ /\ 1 \le j \le n$ y $\alpha_j \in \Gamma'\} \cup \{\beta_i\ /\ 1 \le i \le n$ y $\beta_i \in \Gamma'\}$ Datos utilizados en ambas pruebas

   $M = \text{máx}\{r\ /\ \gamma_r \in X\}$

   $\Rightarrow X \subseteq \Gamma_{M+1}$ Como es el maximal, contiene a todos

   $\therefore \Gamma_{M+1} \vdash \alpha$ y $\Gamma_{M+1} \vdash \neg\beta$

   ABS! porque Γ_{M+1} es consistente

3. Veamos que Γ_n es consistente $\forall n \ \in \mathbb{N}$

   C.B) $\Gamma_0 = \Gamma$ es consisntente (Dato)

   H.I) Γ_n es consistente

   T.I) Γ_{n+1} es consistente

   $$\Gamma_{n+1} = \begin{cases} rcl\Gamma_n \cup \{\gamma_n\} & si\ \Gamma_n \cup \{\gamma_n\}\ es\ consistente \Rightarrow \Gamma_{n+1}\ es\ consistente \\ \Gamma_n & sino \Rightarrow \Gamma_{n+1} = \Gamma_n\ es\ consistente\ por\ H.I. \end{cases}$$

   Vemos que Γ' es maximal

   Supongo que $\exists\ \beta \in FORM,\ \beta \notin \Gamma'\ /\ \Gamma' \cup \{\beta\}$ es consistente

   $\Rightarrow \exists\ N\ /\ \beta = \gamma_N$

   $$\Gamma_{N+1} = \begin{cases} \Gamma_N \cup \{\gamma_N\} & si\ \Gamma_N \cup \{\gamma_N\}\ es\ consistente \\ \Gamma_N & sino \end{cases}$$

   Como $\gamma_N \notin \Gamma' \Rightarrow \Gamma_N \cup \{\gamma_N\}$ es inconsistente

   $\Rightarrow \exists\ \xi \in FORM\ /\ \Gamma_N \cup \{\gamma_N\} \vdash \xi$ y $\Gamma_N \cup \{\gamma_N\} \vdash \neg\xi$

   $\Rightarrow \Gamma' \cup \{\gamma_n\} \vdash \xi$ y $\Gamma' \cup \{\gamma_n\} \vdash \neg\xi$ **ABS!** pues supusimos que es consistente

   $\therefore \Gamma'$ es maximal consistente

$\blacksquare$

Observación:

1. $\Gamma \cup \{\neg\gamma\}$ es inconsistente $\Leftrightarrow \Gamma \vdash \gamma$

2. $\Gamma \cup \{\gamma\}$ es inconsistente $\Leftrightarrow \Gamma \vdash \neg\gamma$

Demostración: La ida se hace utilizando definición de consistente, teorema de la deducción y una prueba. La vuelta es sencilla.

1. $\Leftarrow$)

   $\Gamma \vdash \gamma \Rightarrow \Gamma \cup \{\neg\gamma\} \vdash \gamma$ y $\Gamma \cup \{\neg\gamma\} \vdash \neg\gamma \Rightarrow \Gamma \cup \{\neg\gamma\}$ es inconsistente

   $\Rightarrow$)

   $\Gamma \cup \{\neg\gamma\}$ es inconsistente $\Rightarrow \exists\ \alpha \in FORM\ /\ \Gamma \cup \{\neg\gamma\} \vdash \alpha$ y $\Gamma \cup \{\neg\gamma\} \vdash \neg\alpha$

   $\Rightarrow$ por Teo. de la Deducción $\Gamma \vdash (\neg\gamma \to \alpha)$ $(\circ)$ y $\Gamma \vdash (\neg\gamma \to \alpha)$ $(\star)$

   Hago una prueba de $\Gamma \vdash \gamma$:

1. $(\neg\gamma \to \neg\alpha) \to ((\neg\gamma \to \alpha) \to \gamma)$ Axioma 3
2. $\neg\gamma \to \alpha$ por dato $\star$
3. $(\neg\gamma \to \alpha) \to \gamma$ M.P. 1 y 2
4. $\neg\gamma \to \alpha$ por dato $\circ$
5. γ M.P. 3 y 4

$\Rightarrow \Gamma \vdash \gamma$

2. $\Leftarrow$)

$\Gamma \vdash \neg\gamma \Rightarrow \Gamma \cup \{\gamma\} \vdash \neg\gamma$ y $\Gamma \cup \{\gamma\} \vdash \gamma \Rightarrow \Gamma \cup \{\gamma\}$ es inconsistente

$\Rightarrow$)

$\Gamma \cup \{\gamma\}$ es inconsistente $\Rightarrow \exists\ \alpha \in FORM\ /\ \Gamma \cup \{\gamma\} \vdash \alpha$ y $\Gamma \cup \{\gamma\} \vdash \neg\alpha$
$\Rightarrow$ por Teo. de la Deducción $\Gamma \vdash (\gamma \to \alpha)$ ($\circ$) y $\Gamma \vdash (\gamma \to \alpha)$ ($\star$)

Hago una prueba de $\Gamma \vdash \neg\gamma$:

1. $(\neg\neg\gamma \to \neg\neg\alpha) \to ((\neg\neg\gamma \to \neg\alpha) \to \neg\gamma)$ Axioma 3
2. $(\gamma \to \alpha) \to (\neg\neg\gamma \to \neg\neg\alpha)$ Hecho en clase
3. $\gamma \to \alpha$ por dato $\star$
4. $\neg\neg\gamma \to \neg\neg\alpha$ M.P. 2 y 3
5. $(\neg\neg\gamma \to \neg\alpha) \to \neg\gamma$ M.P. 4 y 1
6. $(\gamma \to \neg\alpha) \to (\neg\neg\gamma \to \neg\alpha)$ Hecho en clase
7. $\gamma \to \neg\alpha$ por dato $\circ$
8. $\neg\neg\gamma \to \neg\alpha$ M.P. 6 y 7
9. $\neg\gamma$ M.P. 8 y 5

$\Rightarrow \Gamma \vdash \neg\gamma$

$\blacksquare$

Proposición: Γ es m.c. $\Rightarrow \gamma \in \Gamma$ ó $\neg\gamma \in \Gamma\ \forall\ \gamma \in FORM$

Demostración: Absurdo utilizando Ley de De Morgan para la negación

Supongamos que $\neg(\gamma \in \Gamma$ o $\neg\gamma \in \Gamma)$

Caso 1) $\gamma \notin \Gamma$ o $\neg\gamma \notin \Gamma$

Como $\gamma \notin \Gamma$ y Γ es m.c. $\Gamma \cup \{\gamma\}$ es inconsistente $\Rightarrow \Gamma \vdash \neg\gamma$ por lema anterior ("1")

Como $\neg\gamma \notin \Gamma$ y Γ es m.c. $\Gamma \cup \{\neg\gamma\}$ es inconsistente $\Rightarrow \Gamma \vdash \gamma$ por lema anterior ("2")

$\therefore$ por 1 y 2, Γ es inconsistente. **ABS!**

Caso 2) $\gamma \wedge \neg\gamma \in \Gamma$

$\Gamma \vdash \gamma$ y $\Gamma \vdash \neg\gamma \Rightarrow \Gamma$ es inconsistente. **ABS!**

$\therefore \gamma \in \Gamma$ ó $\neg\gamma \in \Gamma$

$\blacksquare$

Proposición: Sea Γ inconsistente, $\gamma \in \Gamma \Leftrightarrow \Gamma \vdash \gamma$

Demostración:

$\Rightarrow$)

Queremos ver que $\Gamma \vdash \gamma$. Realizo una prueba

1. γ Dato

$\therefore \Gamma \vdash \gamma$

$\Leftarrow$)

$\Gamma \vdash \gamma \Rightarrow$ (por Lema) $\Gamma \cup \{\neg\gamma\}$ es inconsistente $\Rightarrow \neg\gamma \notin \Gamma$ por Prop. anterior $\gamma \in Gamma$

$\blacksquare$

Teorema:

$$\Gamma \ es\ consistente \Rightarrow \Gamma \ es\ satisfacible$$

Demostración: Lema de Lindenbaum e inducción en la complejidad de α

Γ es consistente $\Rightarrow$ (por Lema de Lindenbaum) $\exists\ \Gamma'$ m.c. $\Gamma \subseteq \Gamma'$

Veamos que Γ' es satisfacible

Como Γ' es m.c. $\Rightarrow \alpha \in \Gamma'$ ó $\neg\alpha \in \Gamma' \forall\ \alpha \in FORM$ (por Prop. anteriormente vista)

En particular, $p_j \in \Gamma'$ ó$\neg p_j \in \Gamma'\ \forall\ p_j \in VAR$

Defino $f\colon VAR \to \{0,1\}\ /\ f(p_j) = \begin{cases} 1 & si\ p_j \in \Gamma' \\ 0 & si\ p_j \notin \Gamma',\ (\Rightarrow \neg p_j \in \Gamma') \end{cases}$

Sea v_f la valuación que extiende a f, queremos ver que $v_f(\Gamma) = 1$

Veamos por inducción en $c(\alpha)$ que $v_f(\alpha) = 1 \Leftrightarrow \alpha \in \Gamma'$

C.B) $c(\alpha) = 1$

$\alpha = p_j \Rightarrow$ si $p_j \in \Gamma' \Rightarrow v_f(p_j) = 1$

Notemos que si $p_j \notin \Gamma' \Rightarrow v_f(p_j) = 0$

H.I) $\alpha \in FORM\ /\ c(\alpha) = k\ k \leq n$

$v_f(\alpha) = 1 \Leftrightarrow \alpha \in \Gamma'$

T.I) $\alpha \in FORM \ / \ c(\alpha) = n+1$

$v_f(\alpha) = 1 \Leftrightarrow \alpha \in \Gamma'$

Sea $\alpha \in FORM \ / \ c(\alpha) = n+1$

Caso 1) $\alpha = \neg\beta \in FORM \Rightarrow c(\beta) = n$

$v_f(\alpha) = 1 \Leftrightarrow v_f(\beta) = 0 \Leftrightarrow$ por H.I. $\beta \notin \Gamma' \Leftrightarrow$ como Γ' es m.c. $\neg\beta \in \Gamma' \Leftrightarrow \alpha \in \Gamma'$

Caso 2) $\alpha = (\beta_1 \to \beta_2)$, $\beta_1, \beta_2 \in FORM$

$c(\alpha) = c(\beta_1) + c(\beta_2) + 1 = n+1$

$\Rightarrow 0 \leq c(\beta_1) \leq n$ y $0 \leq c(\beta_2) \leq n$

$v_f(\alpha) = 1 \Leftrightarrow v_f(\beta_1) = 0$ o $v_f(\beta_2) = 1$

$\Rightarrow$ por H.I: $\beta_1 \notin \Gamma' \Rightarrow$ como es m.c. $\neg\beta_1 \in \Gamma' \Rightarrow \Gamma \vdash (\beta_1 \to \beta_2)$

$\Rightarrow$ por H.I: $\beta_2 \in \Gamma' \Rightarrow$ como es m.c. $\neg\beta_2 \notin \Gamma' \Rightarrow \Gamma' \vdash \beta_2 \Rightarrow \Gamma' \vdash (\beta_2 \to (\beta_1 \to \beta_2))$ por (Axioma 1) $\Rightarrow (\beta_1 \to \beta_2)$ M.P. Dato y Axioma 2

$v_f(\alpha) = 0 \Leftrightarrow v_f(\beta_1) = 1$ y $v_f(\beta_2) = 0 \Rightarrow$ por H.I. $\beta_1 \in \Gamma'$ y $\beta_2 \notin \Gamma'$ ($\neg\beta_2 \in \Gamma'$ *pues es m.c.*)

$\phi \vdash (\beta_1 \to (\neg\beta_2 \to \neg(\beta_1 \to \beta_2))) \Rightarrow \phi \vdash \neg(\beta_1 \to \beta_2) \Rightarrow \Gamma' \vdash \neg(\beta_1 \to \beta_2) \Rightarrow$ como Γ' es m.c. $\Rightarrow (\beta_1 \to \beta_2) \notin \Gamma'$

$\therefore \alpha \in \Gamma'$

■

Teorema de Completitud:

$$\alpha \in C(\Gamma) \Leftrightarrow \Gamma \vdash \alpha$$

Demostración: Por proposición y lemas anteriores

$\alpha \in C(\Gamma) \Rightarrow \Gamma \cup \{\neg\alpha\}$ es insatifacible $\Rightarrow$ (contrarrecíproco de Satifacible $\Rightarrow$ Consistente) $\Gamma \cup \{\neg\alpha\}$ es inconsistente $\Rightarrow$ (por Lema) $\Gamma \vdash \alpha$

■

Teorema: El sistema axiomático AX.1, AX.2, AX.3 y M.P. es consistente

Demostración:

Supongamos que no lo es $\Rightarrow \exists\ \alpha \in FORM\ /\ \vdash \alpha$ y $\vdash \neg\alpha$

$\Rightarrow\ \alpha \in C(\phi)$ y $\neg\alpha \in C(\phi) \Rightarrow \alpha$ es tautología y $\neg\alpha$ es tautología $\Rightarrow\ \forall\ v$ valuación $v(\alpha) = 1$ y $v(\neg\alpha) = 1$ **ABS!**

$\therefore$ El sistema axiomático es consistente

$\blacksquare$

Parte VI
Lógica de Primer Orden

Lema: Sea $\mathcal{L}$ lenguaje de primer orden (LPO). $\mathcal{I}_1, \mathcal{I}_2$ interpretaciones isomorfas vía h. Senado $h\colon U_{\mathcal{I}_1} \to U_{\mathcal{I}_2}$ biyectiva. Sea v una valuación sobre $\mathcal{I}_1 \Rightarrow \overline{h \circ v} = h \circ \overline{v}$

Demostración: Por inducción en el tamaño de los términos $tam(t)$ (cantidad de funciones que aparecen en t)

$v\colon VAR \to U_1$, $\overline{v}\colon TERM \to U_1$, $h\colon U_1 \to U_2$

$h \circ \overline{v}\colon TERM \to U_2$

$h \circ v\colon VAR \to U_2$

$\overline{h \circ v}\colon TERM \to U_2$

Vamos a ver que se cumple por inducción en $tam(t)$

C.B) $tam(t) = 0 \Rightarrow t = x_i \in VAR$ o $t = c \in \mathcal{C}$

Caso 1) $h \circ \overline{v}(x_i) = h(\overline{v}(x_i)) = (\overline{v}|_{VAR} = v) \Rightarrow h(v(x_i))$

$= h \circ v(x_i) = (\overline{h \circ v}|_{VAR} = h \circ v) \Rightarrow \overline{h \circ v}(x_i)$

Caso 2) $h{\circ}\overline{v}(c) = h(\overline{v}(c)) =$ (por def. de $\overline{v}$) $h(\mathcal{C}_{\mathcal{I}_1}) =$ (por def. de isomorfismo) $\mathcal{C}_{\mathcal{I}_2} = \overline{h \circ v}(c)$

H.I) $tam(t) \leq n$, $t \in FORM \Rightarrow h \circ \overline{v}(t) = \overline{h \circ v}(t)$

T.I) $tam(t) = n + 1$, $t \in FORM \Rightarrow h \circ \overline{v}(t) = \overline{h \circ v}(t)$

Sea $t \in TERM \ / \ tam(t) = n + 1 > 0$

$t = f^k(t_1, \ldots, t_n)$, $t_1, \ldots, t_n \in TERM$

$h \circ \overline{v}(f^k(t_1, \ldots, t_k) = h(\overline{v}(f^k(t_1, \ldots, t_k)) =$ (por def. de $\overline{v}$) $h(f^k_{\mathcal{I}_1}(\overline{v}(t_1), \ldots, \overline{v}(t_k)))$

(por def. de isomorfismo) $f^k_{\mathcal{I}_2}(h{\circ}\overline{v}(t_1), \ldots, h{\circ}\overline{v}(t_k)) =$ (por H.I) $f^k_{\mathcal{I}_2}(\overline{h \circ v}(t_1), \ldots, \overline{h \circ v}(t_k)) = \overline{h \circ v}(f^k((t_1, \ldots, t_k))$

$\therefore \overline{h \circ v} = h \circ \overline{v}$

■

Teorema: Sea $\mathcal{L}$ LPO. Sean $\mathcal{I}_1, \mathcal{I}_2$ interpretaciones isomorfas vía h. Sea $v\colon VAR \Rightarrow U_1$ valuación, y $\alpha \in FORM$

$$\mathcal{I}_1 \vDash \alpha[v] \Leftrightarrow \mathcal{I}_2 \vDash \alpha[h \circ v]$$

Demostración: Por inducción en el tamaño de las fórmulas. Usamos que el conj $\{\neg, \wedge, \exists\}$ es adecuado

C.B) $tam(\alpha) = 0 \Rightarrow \alpha = p^k(t_1, \ldots, t_k) \in \mathcal{P}$, $t_1, \ldots, t_k \in TERM$

$V_{\mathcal{I}_1,v}(\alpha) = 1 \Leftrightarrow (\overline{v}(t_1), \ldots, \overline{v}(t_k)) \in \mathcal{P}^k_{\mathcal{I}_1} \Leftrightarrow$ (h es un iso.) $(h \circ \overline{v}(t_1), \ldots, h \circ \overline{v}(t_k)) \in \mathcal{P}^k_{\mathcal{I}_2}$

$\Leftrightarrow$ (por Lema anterior) $(\overline{h \circ v}(t_1), \ldots, \overline{h \circ v}(t_k)) \in \mathcal{P}^k_{\mathcal{I}_2} \Leftrightarrow V_{\mathcal{I}_2,h\circ v}(\mathcal{P}^k(t_1, \ldots, t_k)) = 1$

H.I) Sea $\alpha \in FORM$, $tam(\alpha) \leq n \Rightarrow (\mathcal{I}_1 \vDash \alpha[v] \Leftrightarrow \mathcal{I}_2 \vDash \alpha[h \circ v])$

T.I) Sea $\alpha \in FORM$, $tam(\alpha) = n + 1 \Rightarrow (\mathcal{I}_1 \vDash \alpha[v] \Leftrightarrow \mathcal{I}_2 \vDash \alpha[h \circ v])$

Sea $\alpha \in FORM \ / \ tam(\alpha) = n + 1 > 0 \Rightarrow$

Caso 1) $\alpha = \neg\beta$

$tam(\alpha) = 1 + tam(\beta) = n + 1 \Rightarrow tam(\beta) = n$

$\mathcal{I}_1 \vDash \alpha[v] \Leftrightarrow V_{\mathcal{I}_1,v}(\alpha) = 1 \Leftrightarrow V_{\mathcal{I}_1,v}(\beta) = 0 \Leftrightarrow$ (por H.I.) $V_{\mathcal{I}_2,h\circ v}(\beta) = 0$

$\Leftrightarrow V_{\mathcal{I}_2,h\circ v}(\alpha) = 1 \Leftrightarrow \mathcal{I}_2 \vDash \alpha[h \circ v]$

Caso 2) $\alpha = (\beta_1 \wedge \beta_2)$

$tam(\beta_1) + tam(\beta_2) + 1 = n + 1 \Rightarrow tam(\beta_1) \leq n$ y $tam(\beta_2) \leq n$

$\mathcal{I}_1 \vDash (\beta_1 \wedge \beta_2)[v] \Leftrightarrow V_{\mathcal{I}_1,v}(\beta_1 \wedge \beta_2) = 1 \Leftrightarrow \text{mín}\{V_{\mathcal{I}_1,v}(\beta_1), V_{\mathcal{I}_1,v}(\beta_2)\} = 1 \Leftrightarrow V_{\mathcal{I}_1,v}(\beta_1) = 1$ y $V_{\mathcal{I}_1,v}(\beta_2) = 1$

$\Leftrightarrow$ por H.I. $V_{\mathcal{I}_2,h\circ v}(\beta_1) = 1$ y $V_{\mathcal{I}_2,h\circ v}(\beta_2) = 1 \Leftrightarrow \text{mín}\{V_{\mathcal{I}_1,h\circ v}(\beta_2), V_{\mathcal{I}_2,h\circ v}(\beta_2)\} = 1 \Leftrightarrow V_{\mathcal{I}_2,v}(\beta_1 \wedge \beta_2) = 1 \Leftrightarrow \mathcal{I}_2 \vDash (\beta_1 \wedge \beta_2)[h \circ v]$

Caso 3) $\alpha = \exists x \ \beta$

$tam(\alpha) = tam(\beta) + 1 = n + 1 \Rightarrow tam(\beta) = n$

$\mathcal{I}_1 \vDash \exists x \ \beta[v] \Leftrightarrow V_{\mathcal{I}_1,v}(\exists x \ \beta) = 1 \Leftrightarrow \exists \alpha \in U_1 \ / \ V_{\mathcal{I}_1,v_{x=\alpha}}(\beta) = 1$

$\Leftrightarrow$ por H.I. $\exists \alpha \in U_1 \ / \ V_{\mathcal{I}_1,(h\circ v)_{x=\alpha}}(\beta) = 1 \Leftrightarrow \exists \alpha \in U_1 \ / \ V_{\mathcal{I}_1,(h\circ v)_{x=h(\alpha)}}(\beta) = 1$

$\Rightarrow$ (tomo $b = h(\alpha) \in U_2$) $\exists b \in U_2 \ / \ V_{\mathcal{I}_1,(h\circ v)_{x=b}}(\beta) = 1$

$\Leftarrow$ Como h es biyectiva $\alpha = h^{-1}(b)$

$\Leftrightarrow V_{\mathcal{I}_2,h\circ v}(\exists x\beta) = 1 \Leftrightarrow \mathcal{I}_1 \vDash \exists x\beta[h \circ v]$

$\therefore \mathcal{I}_2 \vDash \alpha[h \circ v]$

$\blacksquare$

Corolario 1: Sean $\mathcal{L}$ LPO, α enunciado. $\mathcal{I}_1, \mathcal{I}_2$ interpretaciones isomorfas.

$$\alpha \textit{ es vedadera en } \mathcal{I}_1 \Leftrightarrow \alpha \textit{ es vedadera en } \mathcal{I}_2$$

Demostración:

$\mathcal{I}_1 \vDash \alpha \Leftrightarrow \mathcal{I}_1 \vDash \alpha[v]\ \forall v\colon VAR \to U_1$ val $\Leftrightarrow$ Teo. anterior $\mathcal{I}_2 \vDash \alpha[h \circ v]\ \forall v\colon VAR \to U_1$ val

$\Leftrightarrow \mathcal{I}_2 \vDash \alpha[w]\ \forall w\colon VAR \to U_2$ val

$\Rightarrow$ Sea $v\colon VAR \to U_1 \Rightarrow\ \exists w = h \circ v\colon VAR \to U_2$

$\Rightarrow$ Sea $w\colon VAR \to U_2 \Rightarrow\ \exists v = h^{-1} \circ w\colon VAR \to U_1$

$\Rightarrow \mathcal{I}_2 \vDash \alpha$

$\blacksquare$

Corolario 2: Sean $\mathcal{L}$ LPO. $\mathcal{I}$ interpretación con universo U. a $\in U$ elemento distinguible

$$F\colon U \to U_{iso} \Rightarrow F(a) = a$$

Demostración:

a es distinguible $\Rightarrow \exists \alpha(x) \in FORM$ que expresa a $\{a\}$

1. $\mathcal{I} \vDash \alpha[v_{x=a}]$

2. $\mathcal{I} \nvDash \alpha[v_{x=b}]\ b \neq a$

$\Rightarrow$ por Teo. anterior $\mathcal{I} \vDash \alpha[f \circ v_{x=a}]$, es decir, $\mathcal{I} \vDash \alpha[(f \circ v)_{x=f(a)}]$

$\therefore$ por "1" y "2" $F(a) = a$

$\blacksquare$

Corolario 3: Sean $\mathcal{L}$ LPO. $\mathcal{I}$ interpretación con universo U. $A \subseteq U$ expresable.

$$F\colon U \to U_{iso} \Rightarrow F(A) \subseteq A \quad (F(a) \in A\ \forall\ a \in A)$$

Demostración:

A es expresable $\Rightarrow\ \exists \alpha(x)$ que expresa a A

1. $\mathcal{I} \vDash \alpha[v_{x=a}]\ \forall\ a \in A$

2. $\mathcal{I} \nvDash \alpha[v_{x=b}]\ \forall\ b \notin A$

$\Rightarrow$ por Teo. anterior $\mathcal{I} \vDash \alpha[f \circ v_{x=a}]$, es decir, $\mathcal{I} \vDash \alpha[(f \circ v)_{x=f(a)}]$

$\Rightarrow F(a) \in A \ \forall \ a \in A$

$\therefore$ por "1" y "2" $F(A) \subseteq A$

$\blacksquare$

Corolario 4: Sean $\mathcal{L}$ LPO. $\mathcal{I}_1 \simeq \mathcal{I}_2$ vía h.

$$a \ es \ distintiguible \ en \ \mathcal{I}_1 \Leftrightarrow h(a) \ es \ distintiguible \ en \ \mathcal{I}_2$$

Demostración:

a es dintiguible en $\mathcal{I}_1 \Rightarrow \ \exists \ \alpha(x) queexpresa\{a\}$

1. $\mathcal{I} \vDash \alpha[v_{x=a}] \ \forall \ a \in A$

2. $\mathcal{I} \nvDash \alpha[v_{x=b}] \ \forall \ b \notin A$

Queremos ver que $\exists \ \beta$ que distingue $h(a)$ en $\mathcal{I}_2$

$\Rightarrow$ por Teo. anterior:

1. $\Rightarrow \mathcal{I}_2 \vDash \alpha(x)[h \circ v_{x=a}] \Rightarrow \mathcal{I}_2 \vDash \alpha(x)[(h \circ v)_{x=h(a)}]$
2. $\Rightarrow \mathcal{I}_2 \nvDash \alpha(x)[h \circ v_{x=b}] \Rightarrow \mathcal{I}_2 \vDash \alpha(x)[(h \circ v)_{x=h(b)}]$ Notemos que $h(b) \neq h(a)$

Queremos ver que $V_{\mathcal{I}_2, v_{x=c}} = 1 \Leftrightarrow c = h(a)$

$\Leftarrow$) por "1", como $c = h(a)$, $\mathcal{I}_2 \vDash \alpha(x)[w_{x=h(a)=c)}] \Rightarrow V_{\mathcal{I}_2, w_{x=c}}(\alpha(x)) = 1$

$\Rightarrow$ por contrarrecíproco, si $c \neq h(a) \Rightarrow$ por "2" $\mathcal{I}_2 \vDash \alpha(x)[(w)_{x=c\neq h(a)}] \Rightarrow V_{\mathcal{I}_2, w_{x=c}}(\alpha(x)) =$
0

$\therefore \alpha(x)$ distingue a $h(a) \Rightarrow h(a)$ es distinguible

$\blacksquare$

Parte VII
Computabilidad

Teorema (Composición de funciones computables es computable): Sean $f_1, \ldots, f_k \colon \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}$ (parcialmente) computable. $g \colon \mathbb{N}^n \to \mathbb{N}$ (parc.) computable $\Rightarrow h = g \circ (f_1, \ldots, f_n)$, $h \colon \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}$ es (parc.) computable

Demostración:

Como f_j es (parc) comp. existe P_j programa que lo computa $\Rightarrow$ puedo reemplazarlo con una macro

Como g es (parc) comp. existe P_g programa que lo computa $\Rightarrow$ puedo reemplazarlo con una macro

Defino el siguiente programa:

$Z_1 \leftarrow f_1(x_1, \ldots, x_k)$
$\ldots$
$Z_n \leftarrow f_n(x_1, \ldots, x_k)$
$Y \leftarrow g(Z_1, \ldots, Z_n)$

$\therefore$ como existe programa que lo computa $\Rightarrow h$ es (parc.) computable

∎

Teorema: Si h se obtiene a partir de g con un ERI y g es (parc.) computable $\Rightarrow$ h es (parc.) computable

Demostración:

Como $g \colon \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$ es (parc) comp. existe P_g programa que lo computa $\Rightarrow$ puedo reemplazarlo con una macro

Defino el siguiente programa

$Y \leftarrow K$
$[A_1]\ IF\ X_1 = 0\ GOTO\ E_1$
$Y \leftarrow g(Z_1, Y)$
$Z \leftarrow Z + 1$
$X_1 \leftarrow X_1 - 1$
$GOTO\ A_1$
$\therefore$ como existe programa que lo computa $\Rightarrow h$ es (parc.) computable

∎

Teorema: Si h se obtiene a partir de f y g con un ERII, f y g son (parc.) computable $\Rightarrow$ h es (parc.) computable

Demostración:

Como $g \colon \mathbb{N}^{k+1} \to \mathbb{N}$ es (parc) comp. existe P_g programa que lo computa $\Rightarrow$ puedo reemplazarlo con una macro

Como $f\colon \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}$ es (parc) comp. existe P_f programa que lo computa $\Rightarrow$ puedo reemplazarlo con una macro

Defino el siguiente programa

$Y \leftarrow f(X_1, \ldots, X_k)$
$[A_1]$ $IF\ X_{k+1} = 0\ GOTO\ E_1$
$Y \leftarrow g(X_1, \ldots, X_k, Z_1 + Y)$
$Z \leftarrow Z + 1$
$X_{k+1} \leftarrow X_{k+1} - 1$
$GOTO\ A_1$

$\therefore$ como existe programa que lo computa $\Rightarrow$ h es (parc.) computable

■

Teorema:

1. Comp. de funciones RP son RP

2. ERI y ERII de funciones RP son RP

Demostración:

$f = g \circ (h_1, \ldots, h_k)$

$(h_1, \ldots, h_k)\colon \mathbb{N}^n \to \mathbb{N}$ es RP

$g\colon \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}$ es RP

Queremos ver que $\Rightarrow$ $f\colon \mathbb{N}^n \to \mathbb{N}$ es RP

$h_i esRP$ $\Rightarrow$ se obtiene aplicando $n_j \in \mathbb{N}$ operaciones permitidas o funciones iniciales

$gesRP$ $\Rightarrow$ se obtiene aplicando $n_g \in \mathbb{N}$ operaciones permitidas o funciones iniciales

$\Rightarrow$ f se obtiene aplicando $n_1 + \cdots + n_k + n_g + 1$ operaciones permitidas o funciones iniciales

$\Rightarrow$ f es RP

■

Teorema: *f es RP $\Rightarrow$ f es computable*

Demostración:

f es RP $\Rightarrow$ f se obtiene aplicando finitas operaciones permitidas o funciones iniciales $\Rightarrow$ f es finita computable, ERI o ERII de funciones computables $\Rightarrow$ f es computable.

■

Teorema:

1. P^k y Q^k predicados RP $\Rightarrow$ $\neg P^k$, $P^k \wedge Q^k$ son RP

2. P^k y Q^k predicados computables $\Rightarrow \neg P^k$, $P^k \wedge Q^k$ son computables

Demostración:

1. $P^k, Q^k RP \Rightarrow C_{p^k}$ y $C_{q^k} : \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}$ son RP
   $C_{\neg p_k} : \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}$ / $C_{\neg p_k} = \alpha \circ C_{\neg p_k}$ RP por composición de RP

   $$C_{p_k \cap q_k} : \mathbb{N}^k \to \mathbb{N} \;/\; C_{p_k \cap q_k}(\vec{x}) = \begin{cases} 1 & si\ \vec{x} \in p_k \cap q_k \\ 0 & sino \end{cases}$$

   $C_{p_k \cap q_k} = PROD \circ (C_{p_k} X C_{q_k})$ RP por comp. de RP

2. P^k es computable $\Rightarrow C_{p^k} : \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}$ es computable

   $C_{\neg p^k} : \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}$ / $C_{\neg p^k} = \alpha \circ C_{p^k}$ es computable por composición de computables
   Q^k es computable $\Rightarrow C_{p^k} : \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}$ es computable

   $$C_{p_k \cap q_k} : \mathbb{N}^k \to \mathbb{N} \;/\; C_{p_k \cap q_k}(\vec{x}) = \begin{cases} 1 & si\ \vec{x} \in p_k \cap q_k \\ 0 & sino \end{cases}$$

   $C_{p_k \cap q_k} = PROD \circ (C_{p_k} X C_{q_k})$ Computable por comp. de computables

■

Corolario:

1. P^k y Q^k predicados RP $\Rightarrow P^k \vee Q^k$, $P^k \to Q^k$ son RP

2. P^k y Q^k predicados computables $\Rightarrow P^k \vee Q^k$, $P^k \to Q^k$ son computables

Demostración:

■

Teorema:

1) Sean $h, g : \mathbb{N}^n \to \mathbb{N}$ funciones RP y $C_P : \mathbb{N}^n \to \{0, 1\}$ función característica de un predicado RP $\Rightarrow f : \mathbb{N}^m \to \mathbb{N}$ /

   $$f(x_1, \ldots, x_n) = \begin{cases} h(x_1, \ldots, x_n) & si\ (x_1, \ldots, x_n) \in P \\ g(x_1, \ldots, x_n) & sino \end{cases}$$

   es RP

2) Igual que el anterior pero en lugar de RP, h, g y P computables $\Rightarrow$ f es computable

   Demostración:

1) $f(\vec{x}) = h(\vec{x}) * C_P(\vec{x}) + g(\vec{x}) * \alpha(C_P(\vec{x}))$

$f = SUMA(PROD(h, C_P), PROD(g, \alpha \circ C_P))$, por lo tanto f es composición de PROD, SUMA, α, h, g y C_P, todas RP $\Rightarrow$ f es RP

2) $f(\vec{x}) = h(\vec{x}) * C_P(\vec{x}) + g(\vec{x}) * \alpha(C_P(\vec{x}))$

$f = SUMA(PROD(h, C_P), PROD(g, \alpha \circ C_P))$, por lo tanto f es composición de PROD, SUMA, α, h, g y C_P, todas computables $\Rightarrow$ f es computable

■

Teorema: Sean $g_1, \ldots, g_n, h \colon \mathbb{N}^n \to \mathbb{N}$ funciones RP y $P_1, \ldots, P_n$ predicados n-arios RP $\Rightarrow f \colon \mathbb{N}^m \to \mathbb{N}$ /

$$f(\vec{x}) = \begin{cases} g_1(\vec{x}) & si\ \vec{x} \in P_1 \\ \ldots & \\ g_n(\vec{x}) & si\ \vec{x} \in P_n \\ h(\vec{x}) & sino \end{cases}$$

es RP siendo $P_j \cap P_k = \phi$ si $j \neq k$

Demostración: Similar a tabulaciones

■

Teorema (Suma Acotada): Sea $Sa_f \colon \mathbb{N}^{k+1} \to \mathbb{N}$ /

$$Sa_f(x_1, \ldots, x_k, y) = \sum_{j=0}^{y} f(x_1, \ldots, x_k, j)$$

1) Si f es RP $\Rightarrow Sa_f$ es RP

2) Si f es computable $\Rightarrow Sa_f$ es computable

Demostración:

1) $\vec{x} = (x_1, \ldots, x_k)$

$Sa_f(\vec{x}, 0) = \sum\limits_{j=0}^{0} f(\vec{x}, j) = f(\vec{x}, 0) =$ quiero $h(\vec{x})$

$Sa_f(\vec{x}, y{+}1) = \sum\limits_{j=0}^{y+1} f(\vec{x}, j) = \sum\limits_{j=0}^{y} f(\vec{x}, j)\ (\rightarrow Sa_f(\vec{x}, y)) + f(\vec{x}, y{+}1) =$ quiero $H(\vec{x}, y, Sa_f(\vec{x}, y))$

Defino $h \colon \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}$ / $h(\vec{x}) = f(\vec{x}, 0)$

$h = f \circ ((\Pi_1 \times \cdots \times \Pi_k) \times (CERO \circ \Pi_1)$

h es RP por ser composición de f, proyecciones y CERO, todas funciones RP

Defino $H\colon \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$ /

$H(\vec{x}, y, z) = z + f(\vec{x},\ SUC(y)) = SUMA(\Pi_{k+2}, f \circ ((\Pi_1, \dots, \Pi_k),\ SUC(\Pi_{k+1}))$

f y SUMA son RP. Π_j y SUC son funciones iniciales $\Rightarrow$ son RP $\Rightarrow$ H es RP por composición de RP

$\therefore Sa_f$ es RP por ser ERII a partir de h y de H que son RP

2) Análogo al primer caso

$\blacksquare$

Teorema (Productoria Acotada): Sea $Sa_f\colon \mathbb{N}^{k+1} \to \mathbb{N}$ /

$$Pa_f(x_1, \dots, x_k, y) = \prod_{j=0}^{y} f(x_1, \dots, x_k, j)$$

1) Si f es RP $\Rightarrow Pa_f$ es RP

2) Si f es computable $\Rightarrow Pa_f$ es computable

Demostración:

1) $\vec{x} = (x_1, \dots, x_k)$

$Pa_f(\vec{x}, 0) = \prod\limits_{j=0}^{0} f(\vec{x}, j) = f(\vec{x}, 0) =$ quiero $h(\vec{x})$

$Pa_f(\vec{x}, y{+}1) = \prod\limits_{j=0}^{y+1} f(\vec{x}, j) = \prod\limits_{j=0}^{y} f(\vec{x}, j)\ (\to Pa_f(\vec{x}, y)) * f(\vec{x}, y{+}1) =$ quiero $H(\vec{x}, y, Pa_f(\vec{x}, y))$

Defino $h\colon \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}$ / $h(\vec{x}) = f(\vec{x}, 0)$

$h = f \circ ((\Pi_1 \times \cdots \times \Pi_k) \times (CERO \circ \Pi_1)$

h es RP por ser composición de f, proyecciones y CERO, todas funciones RP

Defino $H\colon \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$ /

$H(\vec{x}, y, z) = z * f(\vec{x},\ SUC(y)) = PROD(\Pi_{k+2}, f \circ ((\Pi_1, \dots, \Pi_k),\ SUC(\Pi_{k+1}))$

f y SUMA son RP. Π_j y SUC son funciones iniciales $\Rightarrow$ son RP $\Rightarrow$ H es RP por composición de RP

$\therefore Pa_f$ es RP por ser ERII a partir de h y de H que son RP

2) Análogo al primer caso

$\blacksquare$

Teorema (Cuantificadores Acotados): Sea $C_P\colon \mathbb{N}n+1 \to \{0,1\}$ la función característica del predicado P RP $\Rightarrow$ los siguientes predicados son RP:

1. $Ua(\vec{x}, y) = \forall\ t \leq y\ C_P(\vec{x}, t)$
2. $Ea(\vec{x}, y) = \exists\ t \leq y\ C_P(\vec{x}, t)$

Demostración:

1. $Ua(\vec{x}, y) = \prod_{t=0}^{y} C_P(\vec{x}, t) = Pa_{C_P}(\vec{x}, y)$

   Ua es RP por ser productoria acotada de una función RP

2. $Ea(\vec{x}, y) = \alpha(\alpha(\sum_{t=0}^{y} C_P(\vec{x}, t)))$

   $Ea = \alpha \circ \alpha \circ Sa_{C_P}$

   Ea es RP por ser composición de α que es RP por ser función inicial, y sumatoria acotada (que es RP)

$\blacksquare$

Teorema (Minimización acotada): Sean P^{n+1} un predicado RP. $MinA_P\colon \mathbb{N}^{n+1} \to \mathbb{N}$

$$MinA_p(\vec{x}, y) = \min_{t \leq y}\ C_P(\vec{x}, t) = \begin{cases} \min\{t \leq y\ C_P(\vec{x}, t) = 1\} & si\ A \neq 0 \\ 0 & sino \end{cases}$$

$MinA_P$ es RP

Demostración: Definimos un $MinA'_P$ y luego lo emparchamos en los casos que fallan

Sea $MinA'_P\colon \mathbb{N}^{n+1} \to \mathbb{N}$. Veamos que $MinA'_P$ es RP

$$MinA'_P = \sum_{j=0}^{y} \prod_{k=0}^{j} \alpha(C_p(\vec{x}, t))$$

$MinA'_P$ es RP por ser composición de sumatoria acotada, productoria acotada, α, función característica de un predicado RP y proyecciones, todas funciones RP

(La definición parece engorrosa pero la idea es la siguiente: $\alpha(C_p(\vec{x}, 0)) + \alpha(C_p(\vec{x}, 0)) * \alpha(C_p(\vec{x}, 1)) + \dots)$

Vemos que tiene una falla en la condición del "sino", lo arreglamos:

$$MinA_P = MinA'_P(\vec{x}, y) * (\alpha(EQ\ (MinA'_P(\vec{x}, y), SUC\ (Y))))$$

$MinA_P$ es RP por ser composición de $MinA'_P$, α, EQ, SUC y proyecciones, todas funciones RP

$\blacksquare$

Teorema (Maximización acotada): Sean P^{n+1} un predicado RP. $MaxA_P\colon \mathbb{N}^{n+1} \to \mathbb{N}$

$$MaxA_p(\vec{x}, y) = \max_{t \leq y}\ C_P(\vec{x}, t) = \begin{cases} \text{máx}\{t \leq y\ C_P(\vec{x}, t) = 1\} & si\ A \neq 0 \\ 0 & sino \end{cases}$$

$MaxA_P$ es RP

Demostración: Utilizando la minimización acotada, y utilizando un predicado auxiliar

$$MaxA(\vec{x}, y) = \min_{t \leq y} Q(\vec{x}, t)$$

$$Q(\vec{x}, t) = P(\vec{x}, t) \wedge\ \forall t'\ t \leq t' \leq y\ \neg P(\vec{x}, t')$$

Q es RP por ser composición de $\wedge$, $\neg$, predicado RP y universal acotado

$MaxA$ es RP por ser minimización acotada con predicado RP

$\blacksquare$

Parte VIII
Numeración de Gödel y Programas Universales

Teorema:

$$Halt\colon \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N} \textit{ no es computable}$$

Demostración: Por al absurdo

Supongamos que $Halt$ es computable $\Rightarrow\ \exists\ f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}\ /\ f(x) = Halt(x,x)$, es decir, $f = Halt \circ (\Pi_1 \circ \Pi_1)$ que es computable por composición de computables $\Rightarrow \exists$ un programa que compute a f y podemos reemplazarlo por una macro

Definimos el siguiente programa: $[A_1]\ IF\ HALT(X,X) = 1\ GOTO\ A_1$, el cual tiene un código asignado que llamamo $\#P = n$

$f(n) = Halt(n,n)$

$f(n) = 1 \Leftrightarrow$ el programa de código n ante la entrada n termina $\Leftrightarrow$ (mirando el programa que escribimos) $Halt(n,n) = 0$, pero $Halt(n,n) = f(n) = 1$ **ABS!** que vino de suponer que $Halt$ es computable

$\therefore Halt$ no es computable

■