Ejercicio 1

martes, 20 de abril de 2021 07:33 a. m.

MARENGO TOMAS 61587

Sea α una fórmula con una única variable. Entonces solo existe una cadena de formación minimal de α

- Sea $\alpha = ((p_1 \wedge p_1) \to \neg p_1)$ donde α tiene una sola variable (p_1).

1) Calculemos $S(\alpha)$: (subfórmulas de α).

$S(\alpha) = \{((p_1 \wedge p_1) \to \neg p_1), (p_1 \wedge p_1), \neg p_1, p_1\} \Rightarrow \#S(\alpha) = 4$.

Por prop. vista en clase sabemos que toda subfórmula de $\alpha \in F$ aparece en toda c.f de α

Por lo tanto una cadena es minimal cuando tiene cantidad de eslabones igual a la cantidad de sus subfórmulas. En particular para α serían 4 eslabones pues $\#S(\alpha)=4$.

2) Propongo dos c.f. de α:

- $X_1 = p_1$ $X_2 = (X_1 \wedge X_1)$ $X_3 = \neg X_1$ $X_4 = (X_2 \to X_3)$
- $X_1' = p_1$ $X_2' = \neg X_1$ $X_3' = (X_1 \wedge X_1)$ $X_4' = (X_3 \to X_2)$

1) Se puede observar que son c.f. pues son una sucesión finita de eslabones y respetan la definición de c.f ($X_i \in VAR$ ó $\exists\, j<i / X_i = \neg X_j$ ó $\exists\, k,j<i / X_i \in (X_k * X_j)$ con $* = \{\wedge, \vee, \to\}$)

2) Son c.f de α pues $X_4 = \alpha$ y $X_4' = \alpha$

3) Son distintas pues por ejemplo $X_2 \neq X_2'$

4) Son minimales por lo dicho anteriormente: cant eslabones $= \#S(\alpha)$

$\therefore$ EL ENUNCIADO ES FALSO.

Ejercicio 2

martes, 20 de abril de 2021 07:34 a. m.

MARENGO TOMAS 61587

Decidir si $C = \{ \circ, \square \}$ es un conjunto de conectivos adecuados siendo

$(\alpha \circ \beta) = \neg((\neg\beta \to \alpha) \to \neg\alpha)$

$(\alpha \square \beta) = ((\neg\alpha \vee \beta) \to \beta)$

Sea $\alpha \in F_c$:

- Defino la complejidad de α : $\tilde{c}(\alpha)$, como la cantidad de conectivos $\{\circ, \square\}$ que aparecen en α.
- Defino $f: VAR \to \{0,1\} \,/\, f(p_j) = 0 \quad \forall\, j \in \mathbb{N}$. Sea V_f la val que extiende a f. Veamos que $V_f(\alpha) = 0$.

Inducción en $\tilde{c}(\alpha)$:

P(k): Sea $\alpha \in F_c \,/\, \tilde{c}(\alpha) = k \Rightarrow V_f(\alpha) = 0$.

CB) Sea $\alpha \in F_c / \tilde{c}(\alpha) = 0 \Rightarrow \alpha \in VAR \Rightarrow \alpha = p_j \Rightarrow V_f(\alpha) = f(\alpha) = 0$.

HI) $P(k)$ es V $\forall\, k \leq n$.

TI) $P(n+1)$

—o—

Sea $\alpha \in F_c \,/\, \tilde{c}(\alpha) = n+1 \Rightarrow$ i) $\alpha = (\beta_1 \circ \beta_2)$ ó ii) $\alpha = (\beta_1 \square \beta_2)$ con $\beta_1, \beta_2 \in F_c$.

i) $\alpha = (\beta_1 \circ \beta_2) \Rightarrow \tilde{c}(\alpha) = 1 + \tilde{c}(\beta_1) + \tilde{c}(\beta_2) = n+1 \Rightarrow \underbrace{\tilde{c}(\beta_1)}_{\geq 0} + \underbrace{\tilde{c}(\beta_2)}_{\geq 0} = n \Rightarrow \tilde{c}(\beta_1) \leq n$ y $\tilde{c}(\beta_2) \leq n$

$\underset{HI}{\Rightarrow} V_f(\beta_1) = 0$ y $V_f(\beta_2) = 0$

$V_f(\alpha) = V_f(\neg((\neg\beta_2 \to \beta_1) \to \neg\beta_1)) = 1 - \max\{1 - V_f(\neg\beta_2 \to \beta_1),\ \overbrace{1 - \underbrace{V_f(\beta_1)}_{0}}^{1}\} = 1 - \max\{*, 1\} = 1 - 1 = 0$ ✓

ii) $\alpha = (\beta_1 \square \beta_2) \Rightarrow \tilde{c}(\alpha) = 1 + \tilde{c}(\beta_1) + \tilde{c}(\beta_2) = n+1 \Rightarrow \underbrace{\tilde{c}(\beta_1)}_{\geq 0} + \underbrace{\tilde{c}(\beta_2)}_{\geq 0} = n \Rightarrow \tilde{c}(\beta_1) \leq n$ y $\tilde{c}(\beta_2) \leq n$

$\underset{HI}{\Rightarrow} V_f(\beta_1) = 0$ y $V_f(\beta_2) = 0$

$V_f(\alpha) = V_f(((\neg\beta_1 \vee \beta_2) \to \beta_2)) = \max\{1 - V_f(\neg\beta_1 \vee \beta_2),\ \overbrace{V_f(\beta_2)}^{0}\} = \max\{1 - \max\{\overbrace{1 - \underbrace{V_f(\beta_1)}_{0}}^{1}, \overbrace{V_f(\beta_2)}^{0}\}, 0\}$

$= \max\{0, 0\} = 0$ ✓

Probé que $\forall\, \alpha \in F_c$, $V_f(\alpha) = 0$. Propongo ahora $\gamma = \neg p_1 \Rightarrow V_f(\gamma) = V_f(\neg p_1) = 1 - f(p_1) = 1$

$\therefore \nexists\, \alpha \in F_c \,/\, \alpha \equiv \neg p_1 \Rightarrow C = \{\circ, \square\}$ no es adecuado.

Ejercicio 3

martes, 20 de abril de 2021 07:34 a. m.

MARENGO TOMAS 61587

Existe Γ conjunto de fórmulas consistente, que no es maximal consistente, que no es el conjunto de las tautologías y que verifica ser igual al conjunto de sus consecuencias

Sea $\Gamma = C(\{p_1\})$

1) $\{p_1\}$ es un cjto satisfacible (Basta definir $f: VAR \to \{0,1\} / f(p_j) = 1 \ \forall j \in \mathbb{N}$) $\overset{①}{\Longrightarrow}$ $C(\{p_1\})$ es satisfacible.
$\overset{②}{\Longrightarrow}$ $C(\{p_1\})$ es consistente ✓.

2) $C(\{p_1\})$ no es el conjunto de las tautologías pues $\{p_1\} \overset{③}{\subset} C(\{p_1\})$ y p_1 es una contingencia (todas las variables lo son (Basta definir $g: VAR \to \{0,1\} / f(p_j) = 0 \ \forall j \in \mathbb{N}$ habiendo definido f)

3) $C(\{p_1\}) = C(C(\{p_1\}))$ ④

4) $C(\{p_1\})$ no es maximal consistente. Usemos alguna propiedad de los conjuntos maximales consistentes:
Γ' m.c. $\Rightarrow \varphi \in \Gamma'$ ó $\neg\varphi \notin \Gamma'$, $\varphi \in F$. ⑤

Propongo las fórmulas p_2 y $\neg p_2$, veamos que no están en $\Gamma = C(\{p_1\})$.

1) $p_2 \in C(\{p_1\}) \iff (v(p_1) = 1 \Rightarrow v(p_2) = 1) \ \forall v$ val.

Defino $\tilde{f}: VAR \to \{0,1\} / f(p_j) = \begin{cases} 1 & \text{si } j \neq 2 \\ 0 & \text{si } j = 2 \end{cases}$. Sea $v_{\tilde{f}}$ la val que extiende a $\tilde{f}$.

$v_f(p_1) = f(p_1) = 1$ y $v_f(p_2) = f(p_2) = 0 \quad \therefore \quad p_2 \notin C(\{p_1\})$

2) $\neg p_2 \in C(\{p_1\}) \iff (v(p_1) = 1 \Rightarrow v(\neg p_2) = 1) \ \forall v$ val.

Defino $g: VAR \to \{0,1\} / g(p_j) = 1$. Sea v_g la val que extiende a g.

$v_g(p_1) = g(p_1) = 1$ y $v(\neg p_2) = 1 - f(p_2) = 0 \quad \therefore \quad \neg p_2 \notin C(\{p_1\})$

Recapitulando: si $C(\{p_1\})$ fuese m.c $\Rightarrow p_2 \in C(\{p_1\})$ ó $\neg p_2 \in C(\{p_1\})$. Como eso no pasa entonces mi conjunto no es m.c y cumple todo lo otro pedido $\Rightarrow$ EL ENUNCIADO ES VERDADERO.

① Ej de la práctica: Γ sat $\Rightarrow C(\Gamma)$ sat.

② Teorema de C. (¿Cuál será?)

③ Ej de la práctica: $\Gamma \subset C(\Gamma)$

4. Ej de la práctica: $C(\Gamma) = C(C(\Gamma))$

5. Una propiedad de m.c. vista en la teórica.

Ejercicio 4

martes, 20 de abril de 2021 07:34 a. m.

$X = \{ \Gamma \subseteq Form / \Gamma \text{ no es base y es finito} \}$

Este lo hice mal, que tema de mierda cardinalidad…

Ejercicio 5

martes, 20 de abril de 2021 07:34 a. m.

MARENGO TOMAS 61587

Defino $VAR(\Gamma) = \{p_j \in VAR: p_j$ aparece en alguna fórmula de $\Gamma\}$

Sea $(\Gamma_n)_{n \in \mathbb{N}}$ una sucesión de conjuntos satisfacibles tal que $VAR(\Gamma_i) \cap VAR(\Gamma_j) = \emptyset$ si $i \neq j$.

Probar que $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} \Gamma_n$ es satisfacible.

Justificar cada paso

- Sean Γ_i $i \in \mathbb{N}$ cada conjunto satisfacible $\Rightarrow \exists\, V_i$ val $/ V_i(\Gamma_i) = 1$ por ser satisfacibles.

Defino $F: VAR \to \{0,1\} / F = \begin{cases} V_i(p_j) & \text{si } p_j \in VAR(\Gamma_i) \\ 1 & \text{si no} \end{cases}$ ①. Sea V_F la val que extiende a F.

① La función F está bien definida pues se definió $VAR(\Gamma)$ con antelación y $VAR(\Gamma_i) \cap VAR(\Gamma_j) = \emptyset$ si $i \neq j$. Además en caso que no apareciera una variable en Γ_i $\forall i$, lo 'mando' al 1.

- Veamos que V_F satisface a $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} \Gamma_n$: Podemos aplicar compacidad y ver la satisfacibilidad para un conjunto genérico $\Gamma' \subset \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \Gamma_n$ / Γ' finito.

$\Gamma' = \{\gamma_1, \ldots, \gamma_n\} \Rightarrow V_F(\Gamma') = V_F(\{\gamma_1, \ldots, \gamma_n\}) \overset{③}{=} V_i(\gamma_j)$ si $\gamma_j \in \Gamma_i \Rightarrow$ Como $V_i(\Gamma_i) = 1$ en particular $V_i(\gamma_j) = 1$ $\forall \gamma_j \in \Gamma'$ $\therefore V_F(\Gamma') = 1 \Rightarrow \Gamma'$ es sat. $\Rightarrow \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \Gamma_n$ es f.s. $\overset{②}{\Rightarrow} \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \Gamma_n$ es satisfacible.

$\gamma_j \in \Gamma'$ y $\gamma_j \in \Gamma_i$

② Teorema de compacidad.

③ Esto se puede hacer pues sabemos que un γ_j $1 \leq j \leq n$ no pertenece a más de un conjunto Γ_i, pues si $VAR(\Gamma_i) \cap VAR(\Gamma_k) = \emptyset$ si $i \neq k$, en particular $VAR(\gamma_i) \cap VAR(\gamma_k) = \emptyset$, $\gamma_i \in \Gamma_i$, $\gamma_k \in \Gamma_k$.

$\Rightarrow V_F\big|_{VAR(\gamma_j)} = V_i\big|_{VAR(\gamma_j)} \Rightarrow V_F(\gamma_j) = V_i(\gamma_j)$ si $\gamma_j \in \Gamma_i$.