Lógica de primer orden

DEFINICION 1: Conjuntos Expresables

Sean $\mathcal{L}$ un lenguaje de 1er orden, I una interpretacion de $\mathcal{L}$ c/ universo U y $A \subseteq U$. Decimos que A es expresable si $\exists\ \alpha \in FORM$ c/ una ! variable libre x y todas las demas ligadas tal q $V_{I,\sigma_{x=a}}(\alpha(x)) = 1 \Leftrightarrow x \in A$.

$\Rightarrow A = \{a \in U / V_{I,\sigma_{x=a}}(\alpha(x)) = 1\}$ i.e. si $x \in A$, $V_{I,\sigma_{x=a}}(\alpha(x)) = 1$ y si $x \notin A$, $V_{I,\sigma_{x=a}}(\alpha(x)) = 1 \Rightarrow \alpha(x)$ expresa A

Notacion: A es expresable por $\alpha(x)$ dnd x es la variable libre

EJEMPLOS

Obs: 1 es neutro y 0 es absorbente en el producto

Ejercicio 1 Sean $\mathcal{L}$ de 1er orden c/ $=$ y f^2, $I = (\mathbb{R}, \cdot, =)$ y $A = \{1, -1, 0\} \Rightarrow$ expresar A

- Defino $\alpha_1(x) = \forall y\ f^2(x,y) = y$.

Interpreto $\alpha_1(x)$: $\forall y \in \mathbb{R}\ x.y = y \Leftrightarrow \forall y \in \mathbb{R}\ (x-1).y = 0$

$\Rightarrow$) En particular, si $y = 3 \Rightarrow 3(x-1) = 0 \Rightarrow x = 1$

$\Leftarrow$) Si $x = 1 \Rightarrow (1-1).y = 0, \forall y \in \mathbb{R}$

$V_{I,\sigma_{x=1}}(\alpha_1(x)) = 1 \Leftrightarrow x = 1$

$\Rightarrow \alpha_1(x)$ expresa $B = \{1\}$ i.e. B es expresable en I

- Defino $\alpha_0(x) = \forall y\ f^2(x,y) = x$

Interpreto $\alpha_0(x)$: $\forall y \in \mathbb{R}\ x.y = x \Leftrightarrow \forall y \in \mathbb{R}\ x.(y-1) = 0$

$\Rightarrow$) En particular tomo $y = 2 \Rightarrow x = 0$

$\Leftarrow$) Si $x = 0 \Rightarrow 0.(y-1) = 0, \forall y \in \mathbb{R}$

$V_{I,\sigma_{x=0}}(\alpha_0(x)) = 1 \Leftrightarrow x = 0$

$\Rightarrow \alpha_0(x)$ expresa $C = \{0\}$ i.e. C es expresable en I

- Defino $\alpha_A(x) = f^2(x, f^2(x,x)) = x \Rightarrow x.x.x = x \Leftrightarrow x(x^2-1) = 0 \Leftrightarrow x = 0$ ó $x = 1$ ó $x = -1$

$\Rightarrow \alpha_A(x)$ expresa $A = \{1, -1, 0\}$

- Defino $\alpha_{-1}(x) = \alpha_A(x) \wedge \neg\alpha_1(x) \wedge \neg\alpha_0(x)$

$V_I(\alpha_{-1}(x)) = 1 \Leftrightarrow V_I(\alpha_A(x)) = 1$ y $V_I(\neg\alpha_1(x)) = 1$ y $V_I(\neg\alpha_0(x)) = 1 \Leftrightarrow x \in A$ y $V_I(\alpha_1(x)) = 0$ y $V_I(\alpha_0(x)) = 0 \Leftrightarrow x \in A$ y $x \neq 1$ y $x \neq 0 \Leftrightarrow x = -1$

$\Rightarrow \alpha_{-1}(x)$ expresa $D = \{-1\}$ i.e. D es expresable en I

Ejercicio 2 Sean $\mathcal{L}$ de 1er orden c/ $=$ y f^2, $I = (\mathbb{N}, +, =)$ y $A = \{n \in \mathbb{N} / n \text{ par}\} \Rightarrow$ demostrar q A es expresable en I.

n es par $\Leftrightarrow \exists q / n = 2q = q + q \Rightarrow \alpha(x) = \exists q\ f^2(q,q) = x$

$V_I(\alpha) = 1 \Leftrightarrow \exists q \in \mathbb{N}\ q+q = n \Leftrightarrow \exists q \in \mathbb{N}\ 2q = n \Leftrightarrow x$ es par $\Rightarrow \alpha(x)$ expresa A

Ejercicio 3 Sean $\mathcal{L}$ de 1er orden c/ $=$ y f^2 y $\alpha(x) = \forall y\ f^2(x,y) = f^2(y,x) \Rightarrow$ que expresa α en I?

1. $I = (\mathbb{R}^{2\times2}, \cdot) \Rightarrow V_I(\alpha) = 1 \Leftrightarrow \forall y \in \mathbb{R}^{2\times2}\ xy = yx$

Obs: tomo algun y pues debe valer p/ todo $y \in \mathbb{R}^{2\times2}$

$\Rightarrow$) En particular $\begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} \\ x_{21} & x_{22} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} \\ x_{21} & x_{22} \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} x_{11} & 0 \\ x_{21} & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow x_{12} = x_{21} = 0$

$\Rightarrow x$ me queda $\begin{pmatrix} x_{11} & 0 \\ 0 & x_{22} \end{pmatrix}$

Luego, $\begin{pmatrix} x_{11} & 0 \\ 0 & x_{22} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_{11} & 0 \\ 0 & x_{22} \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ x_{22} & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ x_{11} & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow x_{11} = x_{22}$

$\Rightarrow V_I(\alpha) = 1 \Leftrightarrow x = \begin{pmatrix} x_{11} & 0 \\ 0 & x_{11} \end{pmatrix} = x_{11}.\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = x_{11}.Id$

$\Leftarrow$) Si $x = x_{11}.Id \Rightarrow x_{11}.Id\ y = x_{11}.y = y.x_{11}$ pues x_{11} es escalar $\Rightarrow y.x_{11} = y.Id.x_{11} = y.(Id.x_{11}) = y.(x_{11}.Id) = y.x$

Conclusion: α expresa $A = \{M \in \mathbb{R}^{2\times2} / M = m.Id, m \in \mathbb{R}\}$

2. $I = (\mathbb{Z}, -) \Rightarrow V_I(\alpha) = 1 \Leftrightarrow \forall y \in \mathbb{Z}\ x - y = y - x$

Sup q $\exists\ x \in \mathbb{Z} / x - y = y - x, \forall y \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow 2x = 2y, \forall y \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow x = y, \forall y \in \mathbb{Z}$

$\Rightarrow$ En particular $x = 2$ y $x = 3$ ABS!

Conclusion: α expresa $\emptyset$

DEFINICION 2: elementos distinguibles

Sean $\mathcal{L}$ un lenguaje de primer orden, I una interpretacion de $\mathcal{L}$ c/ universo U y $\alpha \in U$. Decimos q α es distinguible si $\{\alpha\}$ es expresable.

EJEMPLOS

1. 0 es distinguible en $I = (\mathbb{N}, \cdot, =)$
2. 1 es distinguible en $I = (\mathbb{N}, \cdot, =)$

probado en ej 1 del ejemplo anterior

3. Sea $\mathcal{L}$ un lenguaje de 1er orden c/ $=$, f^2 y $I = (\mathbb{N}, +) \Rightarrow$ probar q todo $n \in \mathbb{N}$ es distinguible

Para $n = 0$: $\alpha_0(x) = \forall y\ f^2(x,y) = y \Rightarrow V_I(\alpha_0(x)) = 1 \Leftrightarrow \forall y\ x + y = y \Leftrightarrow x = 0 \Rightarrow 0$ es distinguible

Para $n = 1$:

Defino $\alpha_1(x) = (\forall y \forall z\ ((\neg\alpha_0(y) \wedge \neg\alpha_0(z)) \to \neg x = f^2(y,z))) \wedge \neg\alpha_0(x) \Rightarrow V_I(\alpha_1(x)) = 1 \Leftrightarrow (\forall y \forall z\ (y \neq 0 \wedge z \neq 0 \to x \neq y + z)) \wedge x \neq 0$

Notemos que $y + z \geq 2 \Rightarrow (\forall y \forall z\ (y \neq 0 \wedge z \neq 0 \to x \neq y + z)) \wedge x \neq 0 \Leftrightarrow x = 1$ pues $x < 2$ y $x \neq 0$

Para $n=2$: $\alpha_2(x) = \exists y\ (\alpha_1(y) \wedge x = f^2(y,y)) \Rightarrow V_I(\alpha_2(x)) = 1 \Leftrightarrow \exists y\ (y = 1 \wedge x = y+y) \Leftrightarrow \exists y\ (y=1 \wedge x = 2) \Leftrightarrow x = 2$

$\Rightarrow$ caso base ya lo probamos

H) n es distinguible en I

T) $n+1$ es distinguible en I

$\alpha_{n+1}(x) = \exists y \exists z\ (\alpha_1(y) \wedge \alpha_n(z) \wedge x = f^2(y,z)) \Rightarrow \alpha_n(x)$ existe por H) $\Rightarrow V_I(\alpha_{n+1}(x)) = 1 \Leftrightarrow \exists y \exists z\ (y = 1 \wedge z = n \wedge x = y+z)$

$\Leftrightarrow x = n+1 \Rightarrow n+1$ es distinguible en I

OBSERVACION

$A = \{a_1, a_2, a_3\}$ es expresable en $I \not\Rightarrow a_1$ es distinguible en I

DEFINICION 3 : isomorfismo

Sea $\mathcal{L}$ un lenguaje de 1er orden y sean I_1, I_2 dos interpretaciones de $\mathcal{L}$ c/ universo U_1, U_2 respectivamente.

Una funcion $F: U_1 \to U_2$ se llama isomorfismo si:

1. F biyectiva
2. Si $c \in \mathcal{C} \Rightarrow F(c_{I_1}) = c_{I_2} / c_{I_1} \in U_1$ y $c_{I_2} \in U_2$
3. Si $f^k \in \mathcal{F}$ y $u_1, u_2, \dots, u_k \in U_1 \Rightarrow F(f^k_{I_1}(u_1, u_2, \dots, u_k)) = f^k_{I_2}(F(u_1), \dots, F(u_k))$
4. Si $P^k \in \mathcal{P}$ y $u_1, \dots, u_k \in U_1 \Rightarrow (u_1, \dots, u_k) \in P^k_{I_1} \Leftrightarrow (F(u_1), \dots, F(u_k)) \in P^k_{I_2}$

$\Rightarrow$ decimos q I_1 es isomorfo a $I_2 \Rightarrow I_1 \approx I_2$

Obs: la relacion de isomorfismo es de equivalencia (Probar)

EJEMPLOS

Ejemplo 1 Probar que $I_1 \approx I_2$

Sea $\mathcal{L}$ c/ $=$ y $f^2 \Rightarrow I_1 = (\mathbb{R}_{>0}, +)$ y $I_2 = (\mathbb{R}_{<0}, +)$

Defino $F: \mathbb{R}_{>0} \to \mathbb{R}_{<0} / F(x) = -x$.

$$\begin{cases} F(x) = F(y) \Rightarrow -x = -y \Rightarrow x = y \\ \text{Sea } z \in \mathbb{R}_{<0} \Rightarrow -z \in \mathbb{R}_{>0} \Rightarrow F(-z) = -(-z) = z \end{cases}$$

1. F es biyectiva
2. $F(f^2_{I_1}(a,b)) = f^2_{I_2}(F(a), F(b)) \Rightarrow F(a+b) = F(a) + F(b) \Rightarrow$ esto es lo que quiero probar

$\Rightarrow F(a+b) = -(a+b) = (-a) + (-b) = F(a) + F(b)$

3. Qvq $a = b \Leftrightarrow F(a) = F(b)$

$\Rightarrow$) Vale pues F es funcion i.e. si $a = b \Rightarrow F(a) = F(b)$

$\Leftarrow$) Vale pues F es inyectiva i.e. si $F(a) = F(b) \Rightarrow -a = -b \Rightarrow a = b$

Conclusion: F es un isomorfismo $\Rightarrow I_1 \approx I_2$

Ejemplo 2 Probar que $I_1 \not\approx I_2$

Sea $\mathcal{L}$ c/ $=$ y $P^2 \Rightarrow I_1 = (\mathbb{N}, \leq)$ y $I_2 = (\mathbb{Z}, \leq)$

Sup q $I_1 \approx I_2 \Rightarrow \exists F: \mathbb{N} \to \mathbb{Z}$ isomorfismo $\Rightarrow F$ biyectiva y $a \leq b \Leftrightarrow F(a) \leq F(b)$ i.e. $(a,b) \in P_{I_1} \Leftrightarrow (F(a), F(b)) \in P_{I_2}$

Como $0 \leq b, \forall b \in \mathbb{N} \Rightarrow F(0) \leq F(b), \forall b \in \mathbb{N} \Rightarrow F(0) \leq z, \forall z \in \mathbb{Z}$ pues $F(b) \in \mathbb{Z} \Rightarrow \mathbb{Z}$ tiene minimo ABS!

Ejemplo 3 Probar que $I_1 \not\approx I_2$

Sea $\mathcal{L}$ c/ $=$ y $f^2 \Rightarrow I_1 = (\mathbb{N}, +)$ y $I_2 = (\mathbb{N}, \cdot)$

Sup q $I_1 \approx I_2 \Rightarrow \exists F: \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ isomorfismo $\Rightarrow F$ biyectiva y $F(a+b) = F(a).F(b)$ i.e. $F(f_{I_1}(a,b)) = f_{I_2}(F(a), F(b))$

- $F(0) = F(0+0) = F(0).F(0) \Rightarrow F(0).(1 - F(0)) = 0 \Rightarrow F(0) = 0 \vee F(0) = 1$
- $F(n) = F(n+0) = F(n).F(0) = \begin{cases} 0 & \text{si } F(0) = 0 \\ F(n) & \text{si } F(0) = 1 \end{cases}$ PERO F inyectiva $\Rightarrow$ no puede pasar $F(n) = 0, \forall n \in \mathbb{N} \Rightarrow F(0) = 1$

Otra forma:

Sup q $\exists F: \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ isomorfismo.

Notemos q $F(0) = F(0.n) = F(0) + F(n)$

- $F(0) = F(0) + F(1) \Rightarrow F(1) = 0$
- $F(0) = F(0) + F(2) \Rightarrow F(2) = 0$

ABS! pues F inyectiva $\Rightarrow \nexists F$ isomorfismo

- $F(2) = F(1+1) = F(1).F(1) = F(1)^2$
- $F(3) = F(2+1) = F(2).F(1) = F(1)^3$

H) $F(n) = F(1)^n$

T) $F(n+1) = F(1)^{n+1}$

$F(n+1) = F(n).F(1)$ y por H) $F(n) = F(1)^n \Rightarrow F(n+1) = F(1)^n F(1) = F(1)^{n+1}$

$\Rightarrow F: \mathbb{N} \to \mathbb{N} / F(n) = F(1)^n$ y $F(0) = 1$

- Si $F(1) = 0 \Rightarrow F(n) = 0, \forall n \in \mathbb{N}_{\geq 1}$ ABS! pues F inyectiva
- Si $F(1) = k / k \in \mathbb{N}_{>1} \Rightarrow F(n) = k^n \Rightarrow k+1 \notin \operatorname{Im} F$ pues $k+1 \perp k \Rightarrow k+1 \perp k^n$ ABS! pues F sobreyectiva

Obs: 0 tmp pertenece a $\operatorname{Im}(F)$ ABS!

Conclusion: $\nexists F$ isomorfismo $\Rightarrow I_1 \not\approx I_2$

LEMA

Sea $\mathcal{L}$ de 1er orden. Sean I_1 e I_2 interpretaciones de $\mathcal{L}$. Sea h un isomorfismo de I_1 a I_2. Sea v una valuacion en I_1.

Entonces $\overline{h \circ v} = h \circ \bar{v}$.

DEMOSTRACION

- $v: VAR \to U_1$ y $\bar{v}: TERM \to U_1$
- $h: U_1 \to U_2$
- $h \circ v: VAR \to U_2$
- $h \circ \bar{v}: TERM \to U_2$
- $\overline{h \circ v}: TERM \to U_2$

Hago la demo por induccion en el tamaño de los terminos.

Defino $tam(t)$ = cant de funciones en t.

Caso base: $tam(t) = 0 \Rightarrow t = x_i \in VAR$ ó $t = c \in \mathcal{C}$

1. $t = c \in \mathcal{C} \Rightarrow h \circ \bar{v}(c) = h(\bar{v}(c)) = h(c_{I_1}) = c_{I_2} = h \circ v\,(c) = \overline{h \circ v}(c)$
2. $t = x_i \in VAR \Rightarrow h \circ \bar{v}(x_i) = h(\bar{v}(x_i)) = h(v(x_i)) = h \circ v(x_i) = \overline{h \circ v}(x_i)$

Paso recursivo:

H) Sea $t \in TERM / tam(t) \leq n \Rightarrow h \circ \bar{v}(t) = \overline{h \circ v}(t)$

T) Sea $t \in TERM / tam(t) = n+1 \Rightarrow h \circ \bar{v}(t) = \overline{h \circ v}(t)$

Sea $t \in TERM / tam(t) = n+1 \Rightarrow t = f^k(t_1, \dots, t_k) / t_j \in FORM$ y $f^k \in \mathcal{F}$.

Obs: $\bar{v}(f^k(t_1,\dots,t_k)) = f^k_I(\bar{v}(t_1),\dots,\bar{v}(t_k))$ y en este caso $\bar{v} = \overline{h \circ v}$

$h \circ \bar{v}\,(f^k(t_1,\dots,t_k)) = h(\bar{v}\,(f^k(t_1,\dots,t_k))) = h\,(f^k_{I_1}(\bar{v}(t_1),\dots,\bar{v}(t_k))) = f^k_{I_2}\,(h \circ \bar{v}(t_1),\dots,h \circ \bar{v}(t_k)) = f^k_{I_2}\,(\overline{h \circ v}(t_1),\dots,\overline{h \circ v}(t_k))$ pues por H), $tam(t) = n+1 = 1 + tam(t_1) + \dots + tam(t_k) \Rightarrow tam(t_j) \leq n \Rightarrow f^k_{I_2}\,(\overline{h \circ v}(t_1),\dots,\overline{h \circ v}(t_k)) = \overline{h \circ v}\,(f^k(t_1,\dots,t_k))$ por definicion de $\bar{v}$

TEOREMA

Sea $\mathcal{L}$ de 1er orden. Sean I_1 e I_2 interpretaciones de $\mathcal{L}$. Sea h un isomorfismo de I_1 a I_2. Sea v valuacion en I_1 y sea $\alpha \in FORM$. Entonces, $I_1 \models \alpha[v] \Leftrightarrow I_2 \models [h \circ v]$.

DEMOSTRACION

Por induccion en el tamaño de las formulas $\Rightarrow tam(\alpha) =$ cant. de conectivos $\{\wedge, \vee, \rightarrow, \neg, \forall, \exists\}$ q aparecen en α.

Caso base: $tam(\alpha) = 0 \Rightarrow \alpha = P^k(t_1,\dots,t_k) / t_j \in TERM$ y $P^k \in \mathcal{P}$

$I_1 \models \alpha[v] \Leftrightarrow (\bar{v}(t_1),\dots,\bar{v}(t_k)) \in P^k_{I_1} \overset{1}{\Leftrightarrow} (h \circ \bar{v}(t_1),\dots,h \circ \bar{v}(t_k)) \in P^k_{I_2} \overset{2}{\Leftrightarrow} (\overline{h \circ v}(t_1),\dots,\overline{h \circ v}(t_k)) \in P^k_{I_2} \Leftrightarrow I_2 \models \alpha[\overline{h \circ v}] \Leftrightarrow I_2 \models \alpha[h \circ v]$

[1] Por def de iso $\Rightarrow h: U_1 \rightarrow U_2$ y $\bar{v}: TERM \rightarrow U_1$

[2] Por lema 1

Paso recursivo:

H) Sea $\alpha \in F / tam(\alpha) \leq n \Rightarrow I_1 \models \alpha[v] \Leftrightarrow I_2 \models \alpha[h \circ v]$

T) Sea $\alpha \in F / tam(\alpha) = n+1 \Rightarrow I_1 \models \alpha[v] \Leftrightarrow I_2 \models \alpha[h \circ v]$

Sea $\alpha \in F / tam(\alpha) = n+1 > 0$.

1. $\alpha = \neg\beta / \beta \in F \Rightarrow tam(\alpha) = n+1 = tam(\beta) = 1 \Rightarrow tam(\beta) = n$

$I_1 \models \alpha[v] \Leftrightarrow V_{I_1,v}(\alpha) = 1 \Leftrightarrow V_{I_1,v}(\beta) = 0 \Leftrightarrow$ por H), $V_{I_2,h \circ v}(\beta) = 0 \Leftrightarrow V_{I_2,h \circ v}(\alpha) = 1 \Leftrightarrow I_2 \models \alpha[h \circ v]$

2. $\alpha = (\beta_1 \wedge \beta_2) / \beta_1$ y $\beta_2 \in F \Rightarrow tam(\alpha) = n+1 = tam(\beta_1) + tam(\beta_2) + 1 \Rightarrow tam(\beta_1) \leq n$ y $tam(\beta_2) \leq n$

$I_1 \models (\beta_1 \wedge \beta_2)[v] \Leftrightarrow V_{I_1,v}(\beta_1 \wedge \beta_2) = 1 \Leftrightarrow \min\{V_{I_1,v}(\beta_1), V_{I_1,v}(\beta_2)\} = 1 \Leftrightarrow V_{I_1,v}(\beta_1) = V_{I_1,v}(\beta_2) = 1 \Leftrightarrow V_{I_2,h \circ v}(\beta_1) = V_{I_2,h \circ v}(\beta_2) = 1$ por H) $\Leftrightarrow \min\{V_{I_2,h \circ v}(\beta_1), V_{I_2,h \circ v}(\beta_2)\} = 1 \Leftrightarrow V_{I_2,h \circ v}(\beta_1 \wedge \beta_2) = 1 \Leftrightarrow I_2 \models (\beta_1 \wedge \beta_2)[h \circ v]$

3. $\alpha = \exists x\ \beta / \beta \in F \Rightarrow tam(\alpha) = n+1 = tam(\beta) + 1 \Rightarrow tam(\beta) = n$

$I_1 \models \exists x\, \beta[v] \Leftrightarrow V_{I_1,v}(\exists x\, \beta) = 1 \Leftrightarrow \exists a \in U_1 / V_{I_1, v_{x=a}}(\beta) = 1 \Leftrightarrow \exists a \in U_1 / V_{I_2, h \circ v_{x=a}}(\beta) = 1$ por H) $\overset{1}{\Leftrightarrow} \exists a \in U_1 / V_{I_2, (h \circ v)_{x=h(a)}}(\beta) = 1 \overset{2}{\Leftrightarrow} \exists\ h(a) = b \in U_2 / V_{I_2, (h \circ v)_{x=b}}(\beta) = 1 \Leftrightarrow V_{I_2, h \circ v}(\exists x\, \beta) = 1 \Leftrightarrow I_2 \models \exists x\, \beta[h \circ v]$

Tarea: probar

1. $(\alpha \vee \beta) \equiv (\neg\alpha \wedge \neg\beta)$
2. $(\alpha \rightarrow \beta) \equiv (\neg\alpha \vee \beta) \equiv \neg(\alpha \wedge \neg\beta)$
3. $\exists x\ \alpha \equiv \neg\forall x\ \neg\alpha$
4. $\forall x\ \alpha \equiv \neg\exists x\ \neg\alpha$

$\rightarrow \{\neg, \wedge, \exists\}$ es adecuado

[1] $h(v(x)) = h(a)$ pues $v(x) = a$

[2] $\Rightarrow$) $h(a) = b \in U_2$ pues $h: U_1 \rightarrow U_2$

$\Leftarrow$) como h es biy $\Rightarrow h^{-1}(b) = a$

OBSERVACION

Sea $\mathcal{L}$ de 1er orden.

- $\alpha \equiv \beta \Leftrightarrow V_{I,v}(\alpha) = V_{I,v}(\beta)$ $\forall v$ valuacion, $\forall I$ interpretacion
- C es adecuado si $\forall \alpha \in F(\mathcal{L}), \exists\ \beta \in F_C(\mathcal{L})$ tal que $\beta \equiv \alpha$

COROLARIO 1

Recordemos: α enunciado = var. ligadas

Sea $\mathcal{L}$ de 1er orden. Sean I_1 e I_2 interpretaciones de $\mathcal{L} / I_1 \overset{h}{\approx} I_2$ i.e. I_1 e I_2 son isomorfos via h. Sea α un enunciado de $\mathcal{L}$. Entonces, I_1 es un modelo de α i.e. $I_1 \models \alpha \Leftrightarrow I_2$ es modelo de α i.e. $I_2 \models \alpha$.

¿Para que sirve? Para probar que $I_1 \not\approx I_2$

DEMOSTRACION

$$\begin{tikzcd} VAR \arrow[r, "v = h^{-1} \circ w"] \arrow[dr, "h \circ v = w"'] & U_1 \arrow[d, "h \text{ iso}"] \\ & U_2 \end{tikzcd}$$

$I_1 \models \alpha[v]\ \forall v$ valuacion en I_1 i.e. $\forall v: VAR \rightarrow U_1$ val $\overset{1}{\Leftrightarrow} I_2 \models \alpha[h \circ v]\ \forall v: VAR \rightarrow U_1$ val $\overset{2}{\Leftrightarrow} I_2 \models \alpha[w]\ \forall w: VAR \rightarrow U_2$ val $\Leftrightarrow I_2 \models \alpha$

[1] Esto vale por el teorema anterior

[2] $\Rightarrow$) Sea $v: VAR \rightarrow U_1 \Rightarrow$ existe $w = h \circ v: VAR \rightarrow U_2$

$\Leftarrow$) Sea $w: VAR \rightarrow U_2 \Rightarrow$ existe $v = h^{-1} \circ w: VAR \rightarrow U_1$

EJEMPLO

Sea $\mathcal{L}$ c/ $=$ y f^2. Probar que $I_1 = (\mathbb{N}, +) \not\approx I_2 = (\mathbb{N}, \cdot)$.

Defino $\alpha = \exists x \forall y\ \ f^2(x,y) = x \Rightarrow$ es enunciada pues todas las variables estan ligadas.

En I_1: $\exists x\, \forall y\ \ x + y = x \Leftrightarrow \exists x\, \forall y\ \ y = 0$ FALSO pues tomo $y = 2 \Rightarrow V_{I_1}(\alpha) = 0$

En I_2: $\exists x\, \forall y\ \ x.y = x \Leftrightarrow \exists x\ \forall y\ \ x(y-1) = 0 \Rightarrow$ tomo $x = 0$, $\forall y\ \ 0.y = 0$ VERDADERO $\Rightarrow V_{I_2}(\alpha) = 1$

Luego, $V_{I_1}(\alpha) \neq V_{I_2}(\alpha)$ pues I_1 no es modelo de α e I_2 es modelo de $\alpha \Rightarrow I_1 \not\approx I_2$

COROLARIO 2

Sea $\mathcal{L}$ de 1er orden. Sean I interpretacion de $\mathcal{L}$ c/ universo U y $F: U \rightarrow U$ iso. Si $a \in U$ elmto distinguible $\Rightarrow F(a) = a$.

¿Para que sirve? Para probar que un elmto no es distinguible.

DEMOSTRACION

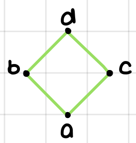
Sea $a \in U$ distinguible $\Rightarrow \exists\ \alpha(x) / V_{I, v_{x=a}}(\alpha) \overset{1}{=} 1$ y $V_{I, v_{x=b}}(\alpha) \overset{2}{=} 0$ si $a \neq b$ i.e. $\alpha(x)$ distingue "a".

$\Rightarrow$ por el teorema, $I \models \alpha[F \circ v_{x=a}] \Leftrightarrow I \models \alpha\,[(F \circ v)_{x=F(a)}] \Rightarrow$ por 1 y 2, $F(a) = a$

EJEMPLO

Sea $\mathcal{L}$ de 1er orden c/ $=$ y P^2. Sea $I = (\{a,b,c,d\}, \leq)$. Hallar los elementos distinguibles.

Relacion de orden:



1. a es distinguible pues $\alpha(x) = \forall y\ \ P(x,y)$ distingue "a"

$\Rightarrow$) Si $V_I(x) = 1 \Rightarrow \forall y\ \ x \leq y \Rightarrow$ en particular si $y = a$, tenemos que $x \leq a \Rightarrow x = a$

$\Leftarrow$) Si $x = a \Rightarrow a \leq y, \forall y \Rightarrow V_I(\alpha(x)) = 1$

2. d es distinguible pues $\beta(x) = \forall y\ \ P(y,x)$ distingue "d"

$\Rightarrow$) Si $V_I(\beta(x)) = 1 \Rightarrow \forall y\ \ y \leq x \Rightarrow$ en particulas si $y = d$, tenemos que $d \leq x \Rightarrow x = d$

$\Leftarrow$) Si $x = d \Rightarrow y \leq d, \forall y \Rightarrow V_I(\beta(x)) = 1$

Defino $F: U \rightarrow U / F(a) = a,\ F(b) = c,\ F(c) = b,\ F(d) = d \Rightarrow F$ biyectiva.

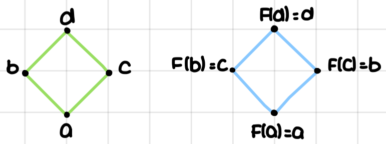
Veamos que cumple la condicion de predicado: $(a,b) \in P_I \Leftrightarrow (F(a), F(b)) \in P_I$ i.e. $a \leq b \Leftrightarrow F(a) \leq F(b)$

- $a \leq a \Leftrightarrow F(a) \leq F(a)$ es V

Obs: habrá que escribir 8 renglones

- $a \leq b \Leftrightarrow F(a) \leq F(b)$ es V
- $a \leq d \Leftrightarrow F(a) \leq F(d)$ es V

Una forma más corta:



$\Rightarrow$ Se cumple $x \leq y \Leftrightarrow F(x) \leq F(y)$

⚠ NO sirve p/ demostrar que a y d son distinguibles pues no vale la vuelta

Conclusion: F iso PERO $F(b) \neq b$ y $F(c) \neq c \Rightarrow$ b y c NO son distinguibles

COROLARIO 3

Sean $\mathcal{L}$ de 1er orden, $\mathcal{I}$ interpretación de $\mathcal{L}$ c/ universo U y $A \subseteq U$ expresable. Si $F: U \to U$ iso $\Rightarrow F(A) \subseteq A$ es decir $F(a) \in A \ \forall a \in A$.

DEMOSTRACION

¿Para qué sirve? Para probar que un conjunto no es expresable.

Notemos q el corolario 2 es un caso particular del corolario 3.

$A \subseteq U$ expresable $\Rightarrow \exists \alpha(x)$ tal que (1) $\mathcal{I} \models \alpha[v_{x=a}]$ c/ $a \in A$ y (2) $\mathcal{I} \not\models \alpha[v_{x=b}]$ c/ $b \notin A$

$\Rightarrow$ por el teorema, $\mathcal{I} \models \alpha[F \circ v_{x=a}] \Leftrightarrow \mathcal{I} \models \alpha[(F \circ v)_{x=F(a)}] \Rightarrow$ por (1) y (2), $F(a) \in A$

EJEMPLO

Sea $\mathcal{L}$ de 1er orden c/ $=$ y f^2. Sea $\mathcal{I} = (\mathbb{Z}, +)$. Decidir si $A = \mathbb{N}$ es expresable.

Defino $F: \mathbb{Z} \to \mathbb{Z} \,/\, F(x) = -x \Rightarrow F$ biyectiva.

Veamos que cumple la condición de función: $F(f_{\mathcal{I}}(x,y)) = f_{\mathcal{I}}(F(x), F(y))$ i.e. $F(x+y) = F(x) + F(y)$

$F(x+y) = -(x+y) = (-x) + (-y) = F(x) + F(y) \Rightarrow$ cumple

Veamos que cumple la condición de predicado: $x = y \Leftrightarrow F(x) = F(y)$

$\Rightarrow)$ $x = y \Rightarrow F(x) = F(y)$ pues F función

$\Leftarrow)$ $F(x) = F(y) \Rightarrow x = y$ pues F inyectiva

Sup $\mathbb{N}$ expresable $\Rightarrow F(\mathbb{N}) \subseteq \mathbb{N}$ PERO $F(2) = -2 \notin \mathbb{N}$ ABS! $\Rightarrow A = \mathbb{N}$ NO es expresable en $\mathcal{I}$.

COROLARIO 4

Sean $\mathcal{L}$ de 1er orden, $\mathcal{I}_1 \overset{h}{\approx} \mathcal{I}_2$. Si a es distinguible en $\mathcal{I}_1 \Rightarrow h(a)$ es distinguible en $\mathcal{I}_2$.

Obs: $a \in U_1$ y $h(a) \in U_2$

¿Para qué sirve? Para armar un isomorfismo.

DEMOSTRACION

Sabemos q $\mathcal{I}_1 \models \alpha[v] \Leftrightarrow \mathcal{I}_2 \models \alpha[h \circ v]$. Si $a \in U_1$ es distinguible $\Rightarrow \exists \alpha(x) \,/\, \mathcal{I}_1 \models \alpha(x)[v_{x=a}]$ y $\mathcal{I}_1 \models \alpha(x)[v_{x=b}]$ c/ $b \neq a$.

Obs: $h \circ v : VAR \to U_2$

$\Rightarrow \mathcal{I}_2 \models \alpha(x)[h \circ v_{x=a}]$ y $\mathcal{I}_2 \not\models [h \circ v_{x=b}]$ c/ $b \neq a \Rightarrow \mathcal{I}_2 \models \alpha(x)[(h \circ v)_{x=h(a)}]$ y $\mathcal{I}_2 \not\models \alpha(x)[(h \circ v)_{x=h(b)}]$ c/ $h(a) \neq h(b)$ pues F inyectiva

$\Rightarrow h(a)$ es distinguible en $\mathcal{I}_2$