Lógica Proposicional: Lenguajes

DEFINICION 1 Un conj A no vacio se denomina alfabeto (Ej. $A=\{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$; $A=\mathbb{R}$)

DEFINICION 2 Una expresion es una suce° finita de elmtos de A o una cadena vacia q denotamos λ

Ej. Si $A=\{1,2,3\} \Rightarrow E_1=123$; $E_2=13332$; $E_3=\lambda$; $E_4=2$

DEFINICION 3 Dada una expre° $E=e_0e_1\ldots e_{n-1}/e_j\in A,\ 0\leq j\leq n-1$. Se define longitud de la misma como $long(E)=n$ y $long(\lambda)=0$

DEFINICION 4 $A^*=\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A^n=\lim_{N\to+\infty}(\bigcup_{n=0}^{N}A^n)$ dnd $A^0=\{\lambda\}$, $A^1=A$, $A^2=\{ab/a,b\in A\}$ y $A^n=\{E$ expresion en $A/long(E)=n\}$

$\Rightarrow$ Son todas las expresiones q se pueden definir sobre A

Ej. Sea $A=\{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9\} \Rightarrow A^*=\{\lambda\}\cup\mathbb{N}\cup\{0\ldots0n/n\in\mathbb{N}\}$ (Obs: la cant de 0's es finita)

DEFINICION 5 A alfabeto. Un lenguaje sobre A es un subconj $\Sigma\subseteq A^*/\Sigma\neq\emptyset \Rightarrow \Sigma\in P(A^*)$

Ej. $A=\{a,b,\ldots,z\}/\#A=26 \Rightarrow \Sigma\subseteq A^*/\Sigma=\{e\in A^*/e$ es una palabra q esta en el diccionario RAE de la ultima edicion$\}$

DEFINICION 6 "Igualdad de expresiones"

1. Sean $E=e_0e_1\ldots e_n\neq\lambda$ y $F=f_0f_1\ldots f_j\neq\lambda$. Entonces, $E=F \Leftrightarrow n=j \wedge e_i=f_i,\ 0\leq i\leq n$
2. Sean $E=\lambda$, $F\in A^*$. Entonces, $E=F\Leftrightarrow F=\lambda$

DEFINICION 7 "Concatenacion de expresiones"

1. Sean $E=e_0e_1\ldots e_n\neq\lambda$ y $F=f_0f_1\ldots f_j\neq\lambda/E,F\in A^* \Rightarrow EF=e_0e_1\ldots e_nf_0f_1\ldots f_j \Rightarrow long(EF)=long(E)+long(F)=n+1+j+1$
2. Si $F=\lambda\Rightarrow EF=E$
3. Si $E=\lambda\Rightarrow EF=F$
4. Si $E=F=\lambda\Rightarrow EF=\lambda$

Obs: cdo escribo $E\in A^*$ digo q E es un expresion de elmtos de A

⚠ $EF\neq FE$ salvo que $E=F$ PERO $long(EF)=long(FE)$

PROPOSICION A alfabeto y $E,F,G,H\in A^*/EF=GH$ y $long(E)\geq long(G)\Rightarrow\exists H'\in A^*/E=GH'$

DEMOSTRACION Induccion en $n=long(E)$

Caso base:

Si $n=0\Rightarrow E=\lambda\Rightarrow long(E)=0\geq long(G)\geq0\Rightarrow long(G)=0\Rightarrow G=\lambda$. Luego, tomo $H'=\lambda\Rightarrow E=GH'=\lambda$

Paso recursivo:

⚠⚠ Escribir bien la proposicion, la hipotesis y la tesis $\Rightarrow$ si defino bien la proposicion, H y T quedan bien definidas

$P(k)$: A alfabeto, $E,F,G,H\in A^*/EF=GH$ y $long(E)=k\geq long(G)\Rightarrow\exists H'\in A^*/E=GH'$

H) $P(n)$

T) $P(n+1)$

Sean $E,F,G,H\in A^*/EF=GH$ y $long(E)=n+1\geq long(G)\Rightarrow E=e_0e_1\ldots e_n$ y $n+1\geq1$

1. Sup q $G\neq\lambda$ i.e. $long(G)>0\Rightarrow G=g_0g_1\ldots g_j$. Tomo $\tilde{E}=e_1\ldots e_n$ y $\tilde{G}=g_1\ldots g_j$ y como $EF=GH\Rightarrow\tilde{E}F=\tilde{G}H$ y $e_0=g_0$

Luego, $long(\tilde{E})=long(E)-1\geq long(G)-1=long(\tilde{G})\Rightarrow long(\tilde{E})=n\geq long(\tilde{G})$

Tenemos q $long(\tilde{E})=n\geq long(\tilde{G})$ y $\tilde{E}F=\tilde{G}H\Rightarrow$ por H), $\exists H'\in A^*/\tilde{E}=\tilde{G}H'$

Finalmente, $e_0\tilde{E}=e_0\tilde{G}H'\Rightarrow$ como $e_0=g_0$, $E=g_0\tilde{G}H'\Rightarrow E=GH'$

2. $long(G)=0$ i.e. $G=\lambda\Rightarrow$ tomo $H'=E\Rightarrow E=GH'=\lambda E=E$

COROLARIO A alfabeto y $E,F,G,H\in A^*/EF=GH$ y $long(E)=long(G)\Rightarrow E=G$ y $F=H$

DEMOSTRACION $long(E)=long(G)\Rightarrow long(E)\geq long(G)$ y $EF=GH\Rightarrow$ por la prop° anterior, $\exists H'\in A^*/E=GH'$

Entonces, $long(E)=long(G)+long(H')\Rightarrow$ como $long(E)=long(G)$, $long(H')=0$ i.e. $H'=\lambda\Rightarrow E=GH'=G\lambda=G$

Luego, $EF=GH\Rightarrow F=H$