FUNCIONES RECURSIVAS PRIMITIVAS

Ejercicio 11

6. $f:\mathbb{N}\to\mathbb{N} / f(x) = \lfloor (1+\sqrt{2})x \rfloor$

$\Rightarrow t = \lfloor (1+\sqrt{2})x \rfloor \Rightarrow t \leq (1+\sqrt{2})x < t+1 \Rightarrow f(x) = \min_{t \leq (1+\sqrt{2})x} \; (1+\sqrt{2})x < t+1$

1. $t \leq (1+\sqrt{2})x$ y $(1+\sqrt{2}) \leq 3 \Rightarrow t \leq 3x$

2. $(1+\sqrt{2})x < t+1 \Leftrightarrow x + \sqrt{2}x < t+1 \Leftrightarrow 2x^2 < (t+1-x)^2 \Leftrightarrow 2x^2 < (t+1 \dot{-} x)^2$ pues $t+1 > (1+\sqrt{2})x > x$

$\Rightarrow f(x) = \min_{t \leq 3x}$ MENOR(PROD(h_2, PROD(x, x)), POT(PRED(SUC(t) $\dot{-}$ x), h_2))

$\Rightarrow Cp(x,y) =$ MENOR $\circ$ (PROD $\circ$ ($h_2 \times$ PROD $\circ$ $(\pi_1 \times \pi_1)$) $\times$ POT $\circ$ (PRED $\circ$ $\dot{-}$ $\circ$ (SUC $\circ\, \pi_2 \times \pi_1$) $\times\, h_2$)) $\Rightarrow Cp$ es RP por composicion de funciones RP

Conclusion: $f(x) =$ MAp(x, PROD(h_3, x)) $=$ MAP $\circ$ ($\pi_1 \times$ PROD $\circ$ ($h_3 \times \pi_1$)) $\Rightarrow f$ es RP por composicion de funciones RP (MAp, PROD, h_3 y π_1)

9. $f:\mathbb{N}\to\mathbb{N} / f(x) = \lfloor \log_2(x) \rfloor \Rightarrow t \leq \log_2(x) < t+1 \Rightarrow f(x) = \min_{t \leq \log_2(x)} \; \log_2(x) < t+1$

1. $t \leq \log_2(x) \leq 3x$

2. $\log_2(x) < t+1 \Leftrightarrow x < 2^{t+1}$

$\Rightarrow f(x) = \min_{t \leq 3x} \; x < 2^{t+1}$

$\Rightarrow Cp(x,y) =$ MENOR $\circ$ ($\pi_1 \times$ POT $\circ$ ($h_1 \times$ SUC $\circ\, \pi_2$)) $\Rightarrow Cp$ es RP por composicion de funciones RP (MENOR, POT, h_1, SUC y π_j)

Conclusion: $f(x) =$ MAp $\circ$ ($\pi_1 \times$ PROD $\circ$ ($h_3 \times \pi_1$)) $\Rightarrow f$ es RP por composicion de funciones RP (MAp, PROD, h_3 y π_1)

10. Sea P un predicado RP y sea $g:\mathbb{N}^2\to\mathbb{N} / g(x,y) = \max_{t \leq y} Cp(x,t)$.

$$\Rightarrow g(x,y) = \begin{cases} \max\{t \leq y / Cp(x,t) = 1\} = A & \text{si } A \neq \emptyset \\ 0 & \text{sino} \end{cases} \Rightarrow g(x,y) = y \dot{-} \sum_{j=0}^{y} \prod_{k=0}^{j} \alpha(Cp(x, y \dot{-} k)) = y \dot{-} [\alpha(Cp(x,y)) + \alpha(Cp(x,y)).\alpha(Cp(x,y \dot{-} 1)) + \ldots + \alpha(Cp(x,y)).\ldots.\alpha(Cp(x,0))]$$

Prueba con $g(x,3)$:

1. Si max $= 0 \Rightarrow g(x,3) = 3 \dot{-} (1+1+1+0) = 3 \dot{-} 3 = 0$
2. Si max $= 1 \Rightarrow g(x,3) = 3 \dot{-} (1+1+0+0) = 3 \dot{-} 2 = 1$
3. Si max $= 2 \Rightarrow g(x,3) = 3 \dot{-} (1+0+0+0) = 3 \dot{-} 1 = 2$
4. Si max $= 3 \Rightarrow g(x,3) = 3 \dot{-} (0+0+0+0) = 3 \dot{-} 0 = 3$
5. Si no hay max $\Rightarrow g(x,3) = 3 \dot{-} (1+1+1+1) = 3 \dot{-} 4 = 0$ pues $4 > 3$

Defino $f:\mathbb{N}^3\to\mathbb{N} / f(x,y,z) = \alpha \circ Cp \circ (\pi_1 \times \dot{-} \circ (\pi_2 \times \pi_3)) \Rightarrow f$ es RP por composicion de funciones RP (α, Cp, π_j).

Defino $h:\mathbb{N}^3\to\mathbb{N} / h(x,y,z) = \prod_{k=0}^{z} f(x,y,k) = PAf(x,y,z) \Rightarrow h$ es RP pues es productoria acotada aplicada a una funcion f RP.

Defino $t:\mathbb{N}^3\to\mathbb{N} / t(x,y,z) = \sum_{j=0}^{z} h(x,y,j) = SAh(x,y,z) \Rightarrow t$ es RP pues es sumatoria acotada aplicada a una funcion h RP.

$\Rightarrow g(x,y) = \dot{-} \circ (\pi_2 \times t \circ (\pi_1 \times \pi_2 \times \pi_2)) = y \dot{-} t(x,y,y) = y \dot{-} \sum_{j=0}^{y} h(x,y,j) = y \dot{-} \sum_{j=0}^{y} \prod_{k=0}^{j} f(x,y,k) = y \dot{-} \sum_{j=0}^{y} \prod_{k=0}^{j} \alpha(Cp(x, y \dot{-} k))$

Conclusion: g es RP por composicion de funciones RP ($\dot{-}$, π_j, t)

LOGICA DE PRIMER ORDEN (PARTE 2)

Ejercicio 14

5. $I = (\mathbb{Z}_6, +)$ y $J = (\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_3, +)$

Defino $F: \mathbb{Z}_6 \to \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_3 / F(\bar{n}) = (\bar{n}, \bar{n}) \Rightarrow$ veamos que es isomorfismo.

Veamos que es biyectiva:

1. $F(\bar{n}) = F(\bar{m}) \Rightarrow (\bar{n}, \bar{n}) = (\bar{m}, \bar{m}) \Rightarrow \bar{n} = \bar{m}$ en $\mathbb{Z}_2$ y $\bar{n} = \bar{m}$ en $\mathbb{Z}_6$ $\Rightarrow n \equiv m(2)$ y $n \equiv m(3) \Rightarrow n \equiv m(6)$ pues $2 \perp 3 \Rightarrow \bar{n} = \bar{m}$ en $\mathbb{Z}_6 \Rightarrow$ F inyectiva
2. Como $\#\mathbb{Z}_6 = \#(\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_3) = 6$ y F inyectiva $\Rightarrow$ F sobreyectiva

Veamos que $\forall \bar{n}, \bar{m} \in \mathbb{Z}_6$ se cumple $F(\bar{n} + \bar{m}) = F(\bar{n}) + F(\bar{m})$:

$F(\bar{n} + \bar{m}) = F(\overline{n+m}) = (\overline{n+m}, \overline{n+m}) = (\bar{n} + \bar{m}, \bar{n} + \bar{m}) = (\bar{n}, \bar{n}) + (\bar{m}, \bar{m}) = F(\bar{n}) + F(\bar{m})$

Veamos que $\forall \bar{n}, \bar{m} \in \mathbb{Z}_6$ se cumple $\bar{n} = \bar{m} \Leftrightarrow F(\bar{n}) = F(\bar{m})$:

$\Rightarrow)$ $\bar{n} = \bar{m} \Rightarrow F(\bar{n}) = F(\bar{m})$ pues F funcion

$\Leftarrow)$ $F(\bar{n}) = F(\bar{m}) \Rightarrow \bar{n} = \bar{m}$ pues F inyectiva

Conclusion: $\exists F: \mathbb{Z}_6 \to \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_3$ isomorfismo $\Rightarrow I \approx J$

6. $I = (\mathbb{Z}_{16}, +)$ y $J = (\mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_4, +)$

Supongamos $I \approx J \Rightarrow \exists F: \mathbb{Z}_{16} \to \mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_4$ isomorfismo.

- $F(\bar{0} + \bar{0}) = F(\bar{0}) = F(\bar{0}) + F(\bar{0}) \Rightarrow F(\bar{0}) = (\bar{0}, \bar{0})$ pues $F(x) \in \mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_4$
- $F(\bar{2} + \bar{2}) = F(\bar{4}) = F(\bar{2}) + F(\bar{2}) = F(\bar{1}) + F(\bar{1}) + F(\bar{1}) + F(\bar{1}) \Rightarrow F(\bar{4}) = 4.F(\bar{1})$ y $F(\bar{1}) = (\bar{a}, \bar{b}) \Rightarrow F(\bar{4}) = (4\bar{a}, 4\bar{b}) = (\bar{0}, \bar{0})$

$\Rightarrow F(\bar{0}) = F(\bar{4}) = (\bar{0}, \bar{0})$ ABS! pues F inyectiva

Conclusion: lo absurdo vino de suponer $I \approx J \Rightarrow I \not\approx J$

9. $I = (\mathbb{Z}_n, +)$ y $J = (G_n, \cdot)$ c/ $n \in \mathbb{N} \Rightarrow G_n = \{z \in \mathbb{C} / z_k = e^{2k\pi/n\, i}\ 0 \leq k < n\} = \{z_0, z_1, \ldots, z_n\}$

Defino $F: G_3 \to \mathbb{Z}_3 / F(e^{2k\pi/n\, i}) = \bar{k} \Rightarrow$ veamos que F es isomorfismo.

Veamos que F biyectiva:

1. $F(e^{2\pi k/n\, i}) = F(e^{2k'\pi/n\, i}) \Rightarrow \bar{k} = \bar{k'} \Rightarrow k = k' \Rightarrow e^{2k\pi/n\, i} = e^{2k'\pi/n\, i} \Rightarrow$ F inyectiva
2. Sea $\bar{k} \in \mathbb{Z}_n \Rightarrow 0 \leq k < n \Rightarrow e^{2k\pi/n\, i} \in G_n \Rightarrow F(e^{2k\pi/n\, i}) = \bar{k} \Rightarrow$ F sobreyectiva

Veamos que $\forall z_k, z_{k'} \in G_n$ se cumple $F(z_k . z_{k'}) = F(z_k) + F(z_{k'})$:

$F(z_k . z_{k'}) = F(e^{2k\pi/n\, i + 2k'\pi/n\, i}) = F(e^{(k+k')2\pi/n\, i}) = \overline{k+k'} = \bar{k} + \bar{k'} = F(e^{2k\pi/n\, i}) + F(e^{2k'\pi/n\, i})$

Veamos que $\forall z_k, z_{k'} \in G_n$ se cumple $z_k = z_{k'} \Leftrightarrow F(z_k) = F(z_{k'})$:

$\Rightarrow)$ $z_k = z_{k'} \Rightarrow F(z_k) = F(z_{k'})$ pues F funcion

$\Leftarrow)$ $F(z_k) = F(z_{k'}) \Rightarrow z_k = z_{k'}$ pues F inyectiva

Conclusion: $\exists F: G_n \to \mathbb{Z}_n$ isomorfismo $\Rightarrow I \approx J$

8. $I = (\mathbb{Z}_3, +)$ y $J = (G_3, \cdot) \Rightarrow$ es un caso particular del punto 9 $\Rightarrow I \approx J$

7. $I = (\mathbb{R}, +)$ y $J = (\mathbb{R}, +_a)$ dnd $x +_a y = x + y - a$

Defino $F: \mathbb{R} \to \mathbb{R} / F(x) = x + a \Rightarrow$ veamos que F es un isomorfismo.

Veamos que F biyectiva:

Defino $F^{-1}: \mathbb{R} \to \mathbb{R} / F^{-1}(x) = x - a \Rightarrow F^{-1} \circ F(x) = F^{-1}(F(x)) = F^{-1}(x + a) = x + a - a = x \Rightarrow \exists F^{-1} / F^{-1} \circ F(x) = Id(x) \Rightarrow$ F biyectiva

Veamos que cumple la condicion para la funcion:

$\forall x, y \in \mathbb{R}$, $F(x+y) = x + y + a = x + a + y + a - a = F(x) + F(y) - a = f_{+}^{a}(F(x), F(y))$

Veamos que cumple la condicion para la igualdad:

$\Rightarrow)$ $x = y \Rightarrow F(x) = F(y)$ pues F funcion

$\Leftarrow)$ $F(x) = F(y) \Rightarrow x = y$ pues F inyectiva

Conclusion: $\exists F: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ isomorfismo $\Rightarrow I \approx J$