Cardinalidad

DEFINICION 1

Decimos q 2 conj no vacios, A y B, son <u>coordinables</u> si $\exists f: A \to B$ biyectiva i.e. $\exists$ una rela° uno a uno.

Notacion: A coordinable c/ B $\Rightarrow A \sim B$

Obs: la relacion de coordinobilidad es una rela° de equivalencia $\Rightarrow$ ARB si A es coordinable con B

Obs: si A y B son conj finitos $\Rightarrow$ son coordinables si tienen la misma cant de elmtos i.e. si $\#A = \#B$

DEMOSTRACION

1. Sea $f: A \to A / f(x) = x$ biyectiva $\Rightarrow A \sim A \Rightarrow$ "$\sim$" es reflexiva
2. Si $A \sim B$, entonces $\exists f: A \to B$ biyectiva $\Rightarrow \exists f^{-1}: B \to A$ biyectiva $\Rightarrow B \sim A \Rightarrow$ "$\sim$" es simetrica

Obs: f^{-1} es biy pues la inversa de f^{-1} es $f \Rightarrow f^{-1}$ debe ser biy

3. Sean $A \sim B$ y $B \sim C / \exists f: A \to B$ y $g: B \to C$ ambas biyectivas. Defino $h: A \to C / h(x) = g \circ f(x)$ q resulta biyectiva x ser composicion de biyectivas $\Rightarrow A \sim C \Rightarrow$ "$\sim$" es transitiva

DEFINICION 2

Al conj $I_n = \{1, 2, \dots, n\} / n \in \mathbb{N} \geq 1$ se lo llama <u>seccion inicial</u>

Ej. $I_1 = \{1\}$; $I_4 = \{1, 2, 3, 4\}$

Obs: $I_n \sim I_k \Leftrightarrow n = k$

DEMOSTRACION

$\Rightarrow$) Si $I_n \sim I_k$, entonces $\exists f: I_n \to I_k$ biy $\Rightarrow Im(f) = \{f(1), f(2), \dots, f(n)\} = \{1, 2, \dots, k\} = I_k \Rightarrow Im(f)$ tiene n elmtos pues f es iny y tiene k elmtos pues f es sobrey $\Rightarrow n = k$

$\Leftarrow$) Si $n = k$ puedo definir $f: I_n \to I_k / f(x) = x$ que resulta biy $\Rightarrow I_n \sim I_k$

DEFINICION 3

Decimos q un conj A es finito si $A = \emptyset$ ó $A \sim I_n$ p/ algun $n \in \mathbb{N} \geq 1$

Obs: si $A \sim I_n \Rightarrow \#A = n$

Ej. Sea $A = \{x, y, z\}$. Defino $f: A \to I_3 / f(x) = 1, f(y) = 2, f(z) = 3 \Rightarrow A \sim I_3 \Rightarrow A$ es un conj finito

DEFINICION 4

Todo conj q no sea finito se dice q es <u>infinito</u>

Ej. $\mathbb{N}$ es infinito

DEMOSTRACION

Sup q $\mathbb{N}$ es finito

1. $\mathbb{N} = \emptyset$ ABS! pues $0 \in \mathbb{N}$
2. Sup q $\exists n \in \mathbb{N} \geq 1 / \mathbb{N} \sim I_n$ i.e. $\exists f: I_n \to \mathbb{N}$ biy $\Rightarrow Im(f) = \{f(1), f(2), \dots, f(n)\} \subseteq \mathbb{N}$. Llamemos $M = max\{f(1), \dots, f(n)\}$ tal q $M \in \mathbb{N} \Rightarrow M + 1 \in \mathbb{N}$ pero $M + 1 \notin Im(f) \Rightarrow Im(f) \neq \mathbb{N} \Rightarrow f$ no es sobrey $\Rightarrow f$ no es biy ABS!

Conclusion: el absurdo vino de suponer q $\mathbb{N}$ es finito $\Rightarrow \mathbb{N}$ es infinito

DEFINICION 5

[Cardinalidad] = cant de elmtos q contiene un conj

Notacion: $card(A) = \#A = |A|$

$\Rightarrow \#\emptyset = 0$ (NO es el nro cero) ; $\#I_n = n$; $\#\mathbb{N} = \aleph_0$ (aleph cero)

PROPOSICION 1

Sea A un conj. Si $A \subseteq I_n \Rightarrow A$ es finito i.e. todo subconj de una seccion inicial es finito

DEMOSTRACION

Caso 1: si $A = \emptyset \Rightarrow A$ es finito

Caso 2: si $A \neq \emptyset$, entonces $\exists i_1, i_2, \dots, i_r \in I_n$ p/ algun $r \leq n / A = \{i_1, i_2, \dots, i_r\} \Rightarrow$ defino $f: A \to I_r / f(i_j) = j$

- Si $f(i_j) = f(i_t) \Rightarrow j = t \Rightarrow f$ es iny
- Sea $t \in I_r$, entonces $i_t \in A$ y resulta q $f(i_t) = t \Rightarrow f$ es sobrey

$\hookrightarrow f$ es biy $\Rightarrow A \sim I_r \Rightarrow A$ es finito

PROPOSICION 2

Sean A, B conj. Si $A \subseteq B$ y A es infinito $\Rightarrow$ B es infinito i.e. todo conj q admite un subconj ∞ es ∞

DEMOSTRACION

Sup q B es conj finito.

Obs: si $A \subseteq B$ y B finito $\Rightarrow$ A finito

1. Si $B = \emptyset$, entonces $A = \emptyset$ pues $A \subseteq B \Rightarrow A$ es finito ABS!
2. Si $B \neq \emptyset$, $\exists f: B \to I_n$ biy p/ algun $n \in \mathbb{N} \geq 1$. Como $A \subseteq B$ podemos definir $g: A \to B / g(x) = x$ q resulta iny. Considero $f \circ g: A \to I_n$ iny x ser composi° de iny $\Rightarrow Im(f \circ g) = \{i_1, i_2, \dots, i_t\} \subseteq I_n \Rightarrow f \circ g: A \to Im(f \circ g)$ resulta biy $\Rightarrow A \sim Im(f \circ g)$ y como $Im(f \circ g) \subseteq I_n$, entonces $Im(f \circ g) = I_t$ es finito $\Rightarrow A \sim I_t \Rightarrow A$ es finito ABS!

Conclusion: lo absurdo vino de suponer q B es finito $\Rightarrow$ B es infinito

DEFINICION 6

"Comparacion de cardinales"

Sean A y B conj no vacios / $\#A = n$ y $\#B = k$.

1. $n \leq k \Leftrightarrow \exists f: A \to B$ inyectiva
2. $n \geq k \Leftrightarrow \exists f: A \to B$ sobreyectiva
3. $n = k \Leftrightarrow \exists f: A \to B$ biyectiva
4. $n < k \Leftrightarrow n \leq k \wedge n \neq k$ i.e. $\exists$ inyectiva pero no biyectiva
5. $n > k \Leftrightarrow n \geq k \wedge n \neq k$ i.e. $\exists$ sobreyectiva pero no biyectiva

TEOREMA DE BERNSTEIN

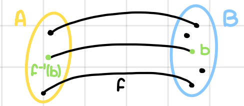
Sean A, B conj. Si $\#A \leq \#B$ y $\#B \leq \#A \Rightarrow \#A = \#B$

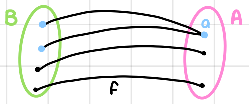
<u>En otras palabras</u>: si $\exists f: A \to B$ y $g: B \to A$ inyectivas $\Rightarrow \exists h: A \to B$ biyectiva

PROPOSICION 3

$\#A \leq \#B \Leftrightarrow \#B \geq \#A$

DEMOSTRACION





⇒) Sabemos q $\exists\, f: A \to B$ iny. Defino $g: B \to A \,/\, g(b) = \begin{cases} f^{-1}(b) & \text{si } b \in Im(f) \\ a_0 & \text{si } b \notin Im(f) \end{cases}$ siendo a_0 un elmto cualquiera de A

Obs: g esta bien definida pues $f^{-1}(b)$ es unica ya q f es iny

Sea $a \in A \Rightarrow f(a) \in Im(f)$ y $\in B \Rightarrow g(f(a)) = f^{-1}(f(a)) = a \Rightarrow$ g es sobrey $\Rightarrow \#B \geq \#A$

⇐) Sabemos q $\exists\, f: B \to A$ sobrey. Defino $g: A \to B \,/\, g(a) = x_a$ dnd $x_a \in f^{-1}(a)$

Obs: $f^{-1}(a) \neq \emptyset$ pues f es sobrey

Si $a_1 \neq a_2$ y $a_1, a_2 \in A \Rightarrow f^{-1}(a_1) \cap f^{-1}(a_2) = \emptyset$ por definicion de funcion. Como $x_{a_1} \in f^{-1}(a_1)$ y $x_{a_2} \in f^{-1}(a_2)$, entonces $x_{a_1} = g(a_1) \neq x_{a_2} = g(a_2) \Rightarrow$ g es iny $\Rightarrow \#A \leq \#B$

PROPOSICION 4

1. "$\leq$" es una relacion de orden
2. "$\geq$" es una relacion de orden

DEMOSTRACION

1. Probemos q "$\leq$" es de orden
- $\#A \leq \#A$ pues $\exists\, f: A \to A \,/\, f(x) = x$ iny $\Rightarrow$ "$\leq$" es reflexiva
- Si $\#A \leq \#B \wedge \#B \leq \#A \Rightarrow$ x el T. de Bernstein, $\#A = \#B \Rightarrow$ "$\leq$" es antisimetrica
- Si $\#A \leq \#B \wedge \#B \leq \#C \Rightarrow \exists\, f: A \to B$ y $\exists\, g: B \to C$ inyectivas. Luego, $g \circ f: A \to C$ es iny x ser composi° de iny $\Rightarrow$ "$\leq$" es transitiva

2. Probemos q "$\geq$" es de orden
- $\#A \geq \#A$ pues $\exists\, f: A \to A \,/\, f(x) = x$ sobrey $\Rightarrow$ "$\geq$" es reflexiva
- Si $\#A \geq \#B \wedge \#B \geq \#A \Rightarrow$ x el T. de Bernstein, $\#A = \#B \Rightarrow$ "$\geq$" es antisimetrica
- Si $\#A \geq \#B \wedge \#B \geq \#C$, $\exists\, f: A \to B$ y $g: B \to C$ sobrey $\Rightarrow g \circ f: A \to C$ es sobrey x ser composi° de sobrey $\Rightarrow$ "$\geq$" es transitiva

TEOREMA 1

Sea X conj. Si X infinito $\Rightarrow \exists\, f: \mathbb{N} \to X$ inyectiva

Obs: si $f: A \to B$ iny dnd B(codominio) $\neq Im(f) \Rightarrow f: A \to Im(f)$ es biyectiva

Axioma de eleccion:

Dada una familia de conj no vacios $A_i\,(i \in I)$, $\exists$ una funcion $e: I \to \cup A_i\,(i \in I) \,/\, e$ elije un elmto de cada conj i.e. $\exists$ un conj $D \,/\, D \cap A_i = \{a_i\}, \forall i \in I$. Esto implica q $\exists$ una fun°/ $f(i) \in A_i, \forall i \in I$.

Obs: los conjuntos son disjuntos dos a dos i.e. si $i \neq j \Rightarrow A_i \cap A_j = \emptyset$, $i, j \in I$

DEMOSTRACION

Sabemos q X es infinito $\Rightarrow X \neq \emptyset$ i.e. $\exists\, x_0 \in X$ y defino $f(0) = x_0$. Luego, $X - \{x_0\} \neq \emptyset$ pues si lo fuera $X \subseteq \{x_0\} \Rightarrow$ X seria finito ABS! Entonces puedo definir $f(1) = x_1 \in (X - \{x_0\})$ y asi sucesivamente $\Rightarrow f(n) = x_n \in X - \{f(0), \ldots, f(n-1)\}$

$\Rightarrow f: \mathbb{N} \to X$ es iny $\Rightarrow \#\mathbb{N} = \aleph_0 \leq \#X$

⚠ El teorema nos dice q $\aleph_0$ es el cardinal mas chico entre los cardinales de conj infinitos.

TEOREMA 2

Si $\exists\, f: \mathbb{N} \to X$ iny $\Rightarrow$ X es infinito

DEMOSTRACION

Si $f: \mathbb{N} \to X$ es iny $\Rightarrow f: \mathbb{N} \to Im(f)$ es biy $\Rightarrow \mathbb{N} \sim Im(f)$. Luego, como $\mathbb{N}$ es infinito, entonces $Im(f)$ es infinito. Ademas, $Im(f) \subseteq X \Rightarrow$ X es infinito

DEFINICION 7

Decimos q A es <u>numerable</u> si A es finito o coordinable c/ $\mathbb{N}$.

PROPOSICION 5

Sea $A \neq 0$. Si A es numerable $\Rightarrow \exists\, f: \mathbb{N} \to A$ sobreyectiva

DEMOSTRACION

<u>Caso 1:</u> A finito $\Rightarrow$ sup q $A \sim I_p$, p/ algun $p \in \mathbb{N}_{\geq 1} \Rightarrow A = \{a_1, \ldots, a_p\}$

Defino $f: \mathbb{N} \to A \,/\, f(n) = \begin{cases} a_{n+1} & \text{si } 0 \leq n \leq p-1 \\ a_n & \text{si } n \geq p \end{cases} \Rightarrow Im(f) = A \Rightarrow$ f es sobreyectiva

<u>Caso 2:</u> $A \sim \mathbb{N} \Rightarrow \exists\, f: \mathbb{N} \to A$ biy $\Rightarrow$ f es sobreyectiva

PROPOSICION 6

Sea $A \neq \emptyset$. Si $\exists\, f: \mathbb{N} \to A$ sobrey $\Rightarrow$ A es numerable

DEMOSTRACION

Si $f: \mathbb{N} \to A$ sobrey, entonces $\#\mathbb{N} \geq \#A \Rightarrow \#A \leq \aleph_0 \Rightarrow \#A < \aleph_0$ o $\#A = \aleph_0 \Rightarrow$ A es finito ó $A \sim \mathbb{N} \Rightarrow$ A es numerable

PROPOSICION 7

Si $A \subseteq \mathbb{N} \Rightarrow$ A es numerable

DEMOSTRACION

1. Si $A = \emptyset$, entonces es finito $\Rightarrow$ A es nble
2. Si $A \neq \emptyset$, podemos definir $f: A \to \mathbb{N} \,/\, f(x) = x$ iny $\Rightarrow \#A \leq \#\mathbb{N} \Rightarrow \#A < \aleph_0$ ó $\#A = \aleph_0 \Rightarrow$ A finito ó $A \sim \mathbb{N} \Rightarrow$ A es nble

PROPOSICION 8

$[0,1]$ es infinito y no numerable

DEMOSTRACION

<u>Veamos que es infinito:</u>

$f: \mathbb{N} \to [0,1] \,/\, f(n) = 1/(n+1)$ es iny $\Rightarrow \#\mathbb{N} \leq \#[0,1] \Rightarrow \aleph_0 \leq \#[0,1]$

Notacion: $\#[0,1] = C$

<u>Veamos que es no numerable:</u>

Sup q $[0,1] \sim \mathbb{N}$ i.e. $\exists\, g: \mathbb{N} \to [0,1]$ biy $\Rightarrow Im(g) = [0,1] = \{g(0), g(1), \ldots\}$

- $g(0) = 0{,}g_{00}g_{01}g_{02}\ldots$
- $g(1) = 0{,}g_{10}g_{11}g_{12}\ldots$
- $g(2) = 0{,}g_{20}g_{21}g_{22}\ldots$

$g_{ij} \in \{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$

[1] Ver explicacion en nota

Defino $d = 0,d_0d_1d_2\ldots \,/\, d_0 \neq g_{00}, d_1 \neq g_{11}, \ldots, d_n \neq g_{nn}$ y $d_i \in [1,\ldots,8]$[1] $\Rightarrow d \in [0,1]$ PERO $d \notin Im(G)$ xq $d \neq g(k)$ pues $d_k \neq g_{kk}$ ABS!

Conclusion: $\mathbb{N} < \#[0,1]$ i.e. $[0,1]$ no es numerable $\Rightarrow$ esto nos dice q hay infinitos distintos

> **Nota**
> Veamos que $0,\hat{9} = 1$:
> $a = 0,\hat{9} \Rightarrow 10a = 10.0,\hat{9} \Rightarrow 10a = 9,\hat{9} \Rightarrow 10a - a = 9,\hat{9} - a \Rightarrow 9a = 9 \Rightarrow a = 1$
> Esto implica q $0,2 = 0,1\hat{9}$ i.e. todo nro tiene escritura unica salvo q tenga cola de 9 ó 0.

PROPOSICION 9

Si X es un conj infinito no nble y A es un conj nble $\Rightarrow X \cup A \sim X$

DEMOSTRACION

Dado A, podemos escribir $A = A_1 \cup A_2$ c/ $A_1 \subseteq X$ y $A_2 \cap X = \emptyset \Rightarrow X \cup A = X \cup (A_1 \cup A_2) = X \cup A_2$

SPG, sup q $X \cap A = \emptyset$. Como X es infinito, $\exists\, f: \mathbb{N} \to X$ iny $\Rightarrow f: \mathbb{N} \to Im(f) = Y$ es biy $\Rightarrow \mathbb{N} \sim Y$, $Y \subseteq X$.

Obs: x ej. 3, (nble)$\cup$(nble) = nble

Luego, como A es nble $\Rightarrow Y \cup A$ es nble. Ademas, $Y \subseteq Y \cup A \Rightarrow$ x la prop 2, $Y \cup A$ es infinito $\Rightarrow Y \cup A \sim \mathbb{N}$.

Tengo q $Y \cup A \sim \mathbb{N}$ y $\mathbb{N} \sim Y \Rightarrow$ por transitividad, $Y \cup A \sim Y \Rightarrow \exists\, g: Y \cup A \to Y$ biy

Ahora, defino $H: X \cup A \to X \,/\, H(t) = \begin{cases} t & \text{si } t \in X \setminus Y \\ g(t) & \text{si } t \in Y \cup A \end{cases}$ Obs: esta bien definida pues $(X \setminus Y) \cap (Y \cup A) = \emptyset$

Veamos que es inyectiva:

1. Sean $t_1, t_2 \in X \setminus Y \Rightarrow H(t_1) = H(t_2) \Rightarrow t_1 = t_2$
2. Sean $t_1, t_2 \in Y \cup A \Rightarrow H(t_1) = H(t_2) \Rightarrow g(t_1) = g(t_2) \Rightarrow t_1 = t_2$ pues g es iny
3. Sean $t_1 \in X \setminus Y$ y $t_2 \in Y \cup A$ i.e. $t_1 \neq t_2 \Rightarrow H(t_1) \in X \setminus Y$ y $H(t_2) \in Y$. Como $(X \setminus Y) \cap Y = \emptyset \Rightarrow H(t_1) \neq H(t_2)$

Veamos que es sobreyectiva:

Sea $y \in X$.

- Si $y \in X \setminus Y \Rightarrow H(y) = y$
- Si $y \in Y \Rightarrow \exists\, t \in Y \cup A \subseteq X \cup A \,/\, g(t) = y$ pues g es sobreyectiva $\Rightarrow H(t) = g(t) = y$

Conclusion: $\exists\, H: X \cup A \to X$ biy $\Rightarrow X \cup A \sim X$

PROPOSICION 10

Si X es infinito no nble y A es nble $\Rightarrow X \setminus A \sim X$

DEMOSTRACION

SPG, sup q $A \subseteq X$.

- Si $X \cap A = \emptyset \Rightarrow X \setminus A = X \sim X \Rightarrow$ no hay nada que probar
- Si $X \cap A \neq \emptyset \Rightarrow$ podemos escribir $A = A_1 \cup A_2 \,/\, A_1 \subseteq X$ y $A_2 \cap X = \emptyset \Rightarrow X \setminus A = X \setminus (A_1 \cap A_2) = X \setminus A_1$

$\Rightarrow$ suponiendo $A \subseteq X$, podemos escribir $X = (X \setminus A) \cup A$

Si $X \setminus A$ es nble $\Rightarrow X$ es nble por union de nbles ABS! $\Rightarrow X \setminus A$ es infinito y no nble

Luego, por la prop 9, $(X \setminus A) \cup A \sim (X \setminus A) \Rightarrow X \sim X \setminus A$

EJEMPLOS

1. $[0,1] \sim (0,1)$ pues $(0,1) = [0,1] - \{0,1\} \,/\, [0,1]$ es inf no nble y $\{0,1\}$ es nble
   $\Rightarrow$ por la prop 10, $[0,1] - \{0,1\} = (0,1) \sim [0,1]$
2. $(a,b) \sim (0,1) \,/\, a,b \in \mathbb{R}$ y $a < b$ pues defino $F: (0,1) \to (a,b) \,/\, F(x) = (b-a)x + a$ q resulta biyectiva
3. $\mathbb{R} \sim (0,1)$ pues $tg: (-\pi/2 \,;\, \pi/2) \to \mathbb{R}$ es biy $\Rightarrow \mathbb{R} \sim (-\pi/2, \pi/2) \overset{2}{\sim} (0,1)$

Otra forma:

Defino $G: \mathbb{R} \to (-1,1) \,/\, G(x) = \dfrac{x}{1+|x|}$ q resulta biy $\Rightarrow \mathbb{R} \sim (-1,1) \overset{2}{\sim} (0,1)$

Obs: $\#\mathbb{R} = \#[0,1] = C$

TEOREMA DE CANTOR

$\#X < \#P(X) \Rightarrow$ notemos q $\#X < \#P(X) < \#P(P(X)) \ldots$ i.e. hay ∞ cardinales infinitos

DEMOSTRACION

Veamos que $\#X \leq \#P(X)$:

Defino $F: X \to P(X) \,/\, F(a) = \{a\} \in P(X) \Rightarrow F(a) = F(b) \Rightarrow \{a\} = \{b\} \Rightarrow a = b \Rightarrow F$ es iny $\Rightarrow \#X \leq \#P(X)$

Veamos que $\#X \not\geq \#P(X)$: quiero ver q $\nexists\, g: X \to P(X)$ sobreyectiva

Sup q $\exists\, g: X \to P(X)$ sobrey y defino $B = \{x \in X \,/\, x \notin g(x)\} \in P(X)$.

Como g es sobrey, $\exists\, b \in X \,/\, g(b) = B$

- Si $b \in B \overset{1}{\Rightarrow} b \notin g(b) \Rightarrow b \notin B$ ABS!
- Si $b \notin B \Rightarrow b \in g(b) \Rightarrow b \in B$ ABS!

$\Rightarrow \nexists\, g: X \to P(X)$ sobrey $\Rightarrow \#X \not\geq P(X)$

Conclusion: $\exists\, f: X \to P(X)$ iny PERO $\nexists\, g: X \to P(X)$ biyectiva $\Rightarrow \#X < \#P(X)$

Ej. Si $g(2) = \{1,3\}$ y $g(6) = \{4,5,6\} \Rightarrow$ $2 \in B$ pues $2 \notin g(2)$ y $6 \notin B$ pues $6 \in g(6)$

[1] pues $B = g(b)$

ALGEBRA DE CARDINALES

Sea $a = \#A$ y $b = \#B$

1. $a + b = \#(A \cup B)$ si $A \cap B = \emptyset$ i.e. A, B disjuntos

$\Rightarrow$ Probar q si $A \sim X$, $B \sim Y$ y $X \cap Y = \emptyset$ $\Rightarrow$ $A \cup B \sim X \cup Y$

2. $a.b = \#(A \times B)$

$\Rightarrow$ Probar q si $A \sim X$, $B \sim Y$ $\Rightarrow$ $A \times B \sim X \times Y$

3. $b^a = \#(B^A) = \#\{f : A \to B / f \text{ es funcion}\}$

$\Rightarrow$ Probar q si $A \sim X$, $B \sim Y$ $\Rightarrow$ $B^A \sim Y^X$

EN GENERAL

Sea $F = \{X_i\}_{i \in I}$ una familia de conj.

1. Si $m_i = \# X_i$, $X_i \cap X_j = \emptyset$, $i \neq j$ $\Rightarrow$ $\sum_{i \in I}(m_i) = \# \bigcup_{i \in I}(X_i)$
2. Si $m_i = \# X_i$ $\Rightarrow$ $\prod_{i \in I}(m_i) = \# \prod_{i \in I}(X_i)$