Funciones recursivas primitivas

Adicional 1

Probar que las sig. funciones son RP.

1. Sea $k \in \mathbb{N}$, se define $h_k : \mathbb{N} \to \mathbb{N} / h_k(x) = k$ ⇒ funcion constante.

- Si $k = 0$ ⇒ $h_k(x) = CERO(x)$ ⇒ es RP pues h_k es f. inicial
- Si $k \neq 0$ ⇒ $h_k(x) = SUC \circ SUC \circ \ldots \circ SUC \circ CERO(\pi_1(x))$ k veces SUC ⇒ como h_k es composicion de f. iniciales ⇒ f es RP.

<u>Otra forma:</u>

Notemos que $h_k(0) = k$ y $h_k(n+1) = k$ PERO $k = h_k(n)$ ⇒ quiero que $f(n, h_k(n)) = k$.

Defino $f : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N} / f(x,y) = y$ ⇒ $f(x,y) = \pi_2(x,y)$ ⇒ f es inicial.

Como h_k se obtiene a partir de ERI aplicado a una funcion inicial ⇒ h_k es RP.

2. Sea $i \in \mathbb{N}$, definimos $k_i : \mathbb{N} \to \mathbb{N} / k_i(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x = i \\ 0 & \text{si } x \neq i \end{cases}$

Notemos que $k_i(x) = EQ(x, i)$ ⇒ podriamos pensar $h_i(x) = i$ ⇒ $k_i(x) = EQ(x, h_i(x)) = EQ(\pi_1(x), h_i(x)) = EQ \circ (\pi_1 \times h_i)$.

↳ k_i es RR por ser composicion de funciones RP (EQ, h_i) y una f. inicial π_1

3. Sea $A \subseteq \mathbb{N}$, A finito, definimos la funcion caracteristica de A $C_A : \mathbb{N} \to \mathbb{N} / C_A(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in A \\ 0 & \text{si } x \notin A \end{cases}$ ⇒ Notemos que $k_i = C_{\{i\}}$

<u>Caso 1:</u> $A = \emptyset$ ⇒ $C_A(x) = 0, \forall x \in \mathbb{N}$ ⇒ $C_A(x) = CERO(x)$ ⇒ $C_\emptyset$ es RP x ser f. inicial

<u>Caso 2:</u> A finito, $A \neq 0$ ⇒ $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ ⇒ $C_A(x) = k_{a_1}(x) + k_{a_2}(x) + \ldots + k_{a_n}(x)$

Obs: si $x \notin A$ ⇒ $k_{a_j} = 0, \forall 1 \leq j \leq n$ ⇒ $C_A(x) = 0$ y si $x \in A$ ⇒ $\exists a_j \in A / x = a_j$ ⇒ $k_{a_j} = 1$ y $k_{a_i} = 0, \forall 1 \leq i \leq n, i \neq j$ ⇒ $C_A(x) = 1$

Obs: $k_{a_1}(x) + k_{a_2}(x) + k_{a_3}(x) = SUM(SUM(k_{a_1}, k_{a_2}), k_{a_3})$ PERO tenemos a_n ⇒ muy largo, lo dejamos como suma

↳ C_A es RP por ser composicion de funciones RP (SUM, k_{a_j})

4. Sea $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N} / f(x) = \begin{cases} a_1 & \text{si } x = b_1 \\ a_2 & \text{si } x = b_2 \\ \vdots & \\ a_{k-1} & \text{si } x = b_{k-1} \\ a_k & \text{en otro caso} \end{cases}$ c/ $b_i \neq b_j$ si $i \neq j$

Ej. $f(x) = \begin{cases} 3 & \text{si } x = 0 \\ 5 & \text{si } x = 4 \\ 7 & \text{en otro caso} \end{cases}$ ⇒ $f(x) = 3 . k_0(x) + 5 . k_4(x) + 7 . \alpha(k_0(x)) . \alpha(k_4(x))$

Obs: probar que $PROD : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N} / PROD(x,y) = x.y$ es RP (item 6)

En gral. $f(x) = h_{a_1}(x) . k_{b_1}(x) + \ldots + h_{a_{k-1}}(x) . k_{a_{k-1}}(x) + h_{a_k}(x) . \alpha(k_{a_1}(x)) \ldots \alpha(k_{a_{k-1}}(x)) = \sum_{j=1}^{k-1} h_{a_j}(x) . k_{b_j}(x) + h_{a_k}(x) . \prod_{j=1}^{k-1} \alpha(k_{b_j}(x))$.

↳ f es RP por ser composicion de funciones RP (SUM, PROD, h_{a_j}, k_{b_j})

5. $MENOR : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N} / MENOR(x,y) = \begin{cases} 1 & \text{si } x < y \\ 0 & \text{si } x \geq y \end{cases}$ ⇒ $MENOR(x,y) = \alpha(x \dot{-} y) \dot{-} EQ(x,y) = \dot{-} \circ ((\alpha \circ \dot{-}) \times EQ)$

- Si $x < y$ ⇒ $\alpha(x \dot{-} y) \dot{-} EQ(x,y) = \alpha(0) \dot{-} 0 = 1 \dot{-} 0 = 1 - 0 = 1$ ⇒ esta bien
- Si $x > y$ ⇒ $\alpha(x \dot{-} y) \dot{-} EQ(x,y) = \alpha(\overset{\neq 0}{x - y}) \dot{-} 0 = 0 \dot{-} 0 = 0 - 0 = 0$ ⇒ esta bien
- Si $x = y$ ⇒ $\alpha(x \dot{-} y) \dot{-} EQ(x,y) = \alpha(0) \dot{-} 1 = 1 \dot{-} 1 = 1 - 1 = 0$ ⇒ esta bien

↳ MENOR es RP por ser composicion de funciones RP (α, $\dot{-}$, EQ)

6. $PROD : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N} / PROD(x,y) = x.y$

- $PROD(x, 0) = CERO(x)$
- $PROD(x, y+1) = PROD(x,y) + x = SUM(x, PROD(x,y))$ ⇒ quiero $PROD(x, y+1) = f(x, y, PROD(x,y))$

Defino $f : \mathbb{N}^3 \to \mathbb{N} / f(x,y,z) = x + z = SUM(\pi_1(x,y,z), \pi_3(x,y,z)) = SUM \circ (\pi_1 \times \pi_3)$ ⇒ f es funcion RP por ser composicion de funciones RP (SUM, π_1, π_3)

↳ PROD es RP porque se obtiene mediante un ERII aplicado a funciones RP

7. Recursion en otra variable que no sea la ultima.

Sea $g : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N} / \begin{cases} g(0,y) = h(y) \\ g(x+1, y) = G(x, y, g(x,y)) \end{cases}$ dnd $h : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ y $G : \mathbb{N}^3 \to \mathbb{N}$ son funciones RP

Defino $f : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N} / f(x,y) = g(y,x)$ ⇒ $\begin{cases} f(x,0) = g(0,x) = h(x) \\ f(x, y+1) = g(y+1, x) = G(y, x, g(y,x)) = G(y, x, f(x,y)) \end{cases}$ ⇒ queremos $F(x, y, f(x,y))$

Defino $F : \mathbb{N}^3 \to \mathbb{N} / F(x,y,z) = G(y,x,z) = G \circ (\pi_2 \times \pi_1 \times \pi_3)$ ⇒ F es RP por ser composicion de funciones RP.

Luego, f es RP pues obtien mediante un ERII aplicado a funciones RP (h y F).

Conclusión: g es RP pues $g = f \circ (\pi_2 \times \pi_1)$ i.e. es composición de funciones RP (Ej. 2.1)

8. Sea $COC: \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N} / COC(x,y) = \begin{cases} \lfloor x/y \rfloor & y \neq 0 \\ 0 & y = 0 \end{cases}$

Idea:

- $x = y.z + r \Rightarrow 0 \leq r < y$
- $x+1 = y.z + r + 1 \Rightarrow 1 \leq r+1 < y+1$

Caso 1: $r+1 = y \Rightarrow x+1 = y.z + y = y(z+1) \Rightarrow COC(x+1,y) = COC(x,y)+1$

Caso 2: $r+1 \neq y \Rightarrow COC(x+1,y) = COC(x,y)$

$\Rightarrow COC(x+1,y) = \begin{cases} COC(x,y)+1 & r+1 = y \text{ i.e. cdo } x+1 = y.(COC(x,y)+1) \\ COC(x,y) & r+1 \neq y \text{ i.e. cdo } x+1 \neq y.(COC(x,y)+1) \end{cases}$

- $COC(0,y) = 0 \Rightarrow$ queremos $h(y)$ RP
- $COC(x+1,y) = \begin{cases} COC(x,y)+1 & \text{si } EQ(x+1, y.(COC(x,y)+1)) = 1 \\ COC(x,y) & \text{si } EQ(x+1, y.(COC(x,y)+1)) = 0 \end{cases} \Rightarrow COC(x,y) + EQ(x+1, y.(COC(x,y)+1)) = COC(x+1,y) \Rightarrow$ quiero $F(x,y,COC(x,y))$ RP

Defino $h: \mathbb{N} \to \mathbb{N} / h(x) = CERO(x) \Rightarrow h$ es RP pues es una función inicial.

Defino $F: \mathbb{N}^3 \to \mathbb{N} / F(x,y,z) = SUM \circ (\pi_3 \times EQ \circ ((SUC \circ \pi_1) \times (PROD \circ (\pi_2 \times SUC \circ \pi_3)))) \Rightarrow F$ es RP por ser composición de funciones RP.

Conclusión: COC es RP pues se obtiene mediante un ERII aplicado a funciones RP (h y F)

Veamos que $COC(n,0) = 0, \forall n \in \mathbb{N}$:

CB: $COC(0,0) = 0$ por definición

PR: H) $COC(n,0) = 0$

T) $COC(n+1,0) = 0$

$COC(n+1,0) = COC(n,0) + EQ(n+1, 0.(COC(n,0)+1)) = 0 + EQ(n+1,0)$ y como $n+1 \neq 0 \Rightarrow EQ(n+1,0) = 0$

9. Sea $RESTO: \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N} / RESTO(x,y) = \begin{cases} r_y(x) & y \neq 0 \\ 0 & y = 0 \end{cases}$

Primera forma: $x = y.z + r \Rightarrow r = x - y.z = x - y.COC(x,y)$

Como $r \geq 0 \Rightarrow y.z + r \geq y.z \Rightarrow x \geq y.z \Rightarrow x - y.COC(x,y) = x \dot{-} y.COC(x,y) \Rightarrow r = x \dot{-} y.COC(x,y)$

Luego, si $y=0$, quiero que $RESTO(x,0) = 0 \Rightarrow RESTO(x,y) = (x \dot{-} y.COC(x,y)).\alpha(\alpha(y)) \Rightarrow RESTO(x,y) = PROD \circ ((\dot{-} \circ (\pi_1 \times PROD \circ (\pi_2 \times COC \circ (\pi_1 \times \pi_2)))) \times (\alpha \circ \alpha \circ \pi_2))$

Conclusión: RESTO es RP por ser composición de funciones RP

Segunda forma:

$x = y.z + r$ cdo $0 \leq r < y \Rightarrow x+1 = y.z + r + 1$ cdo $1 \leq r+1 < y+1$

1. Si $r+1 = y \Rightarrow x+1 = y(z+1) \Rightarrow RESTO(x+1,y) = 0$
2. Si $r+1 \neq y \Rightarrow RESTO(x+1,y) = RESTO(x,y)+1$

$\Rightarrow RESTO(x+1,y) = \begin{cases} 0 & \text{si } EQ(RESTO(x,y)+1, y) = 1 \\ RESTO(x,y)+1 & \text{si } EQ(RESTO(x,y)+1, y) = 0 \end{cases} \Rightarrow RESTO(x+1,y) = (RESTO(x,y)+1).\alpha(EQ(RESTO(x,y)+1, y))$

- $RESTO(0,y) = 0 \Rightarrow$ queremos $h(y)$ RP
- $RESTO(x+1,y) = (RESTO(x,y)+1).\alpha(EQ(RESTO(x,y)+1, y)) \Rightarrow$ queremos $H(x,y,RESTO(x,y))$ RP

Defino $h: \mathbb{N} \to \mathbb{N} / h(x) = CERO(x) \Rightarrow h$ es RP por ser función inicial.

Defino $F: \mathbb{N}^3 \to \mathbb{N} / F(x,y,z) = PROD(z+1, \alpha(EQ(z+1,y))) = PROD \circ ((SUC \circ \pi_3) \times (\alpha \circ EQ \circ (SUC \circ \pi_3 \times \pi_2))) \Rightarrow F$ es RP por ser composición de funciones RP

Notemos que cdo $y=0$, no se cumple $RESTO(x,0) = 0 \Rightarrow$ defino $H: \mathbb{N}^3 \to \mathbb{N} / H(x,y,z) = F(x,y,z).\alpha(\alpha(y)) \Rightarrow H$ es RP por ser composición de funciones RP.

Conclusión: RESTO es RP pues se obtiene mediante un ERII aplicado a funciones RP (h y H)

10. Sea $DIV: \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N} / DIV(x,y) = \begin{cases} 1 & \text{si } y | x \Leftrightarrow r_y(x) = 0 \wedge y \neq 0 \\ 0 & \text{sino} \end{cases} \Rightarrow DIV(x,y) = \begin{cases} 1 & \text{si } RESTO(x,y) = 0 \wedge y \neq 0 \\ 0 & \text{si } RESTO(x,y) \neq 0 \vee y = 0 \end{cases}$

$\Rightarrow DIV(x,y) = \alpha(RESTO(x,y)).\alpha(\alpha(y)) = PROD \circ ((\alpha \circ RESTO) \times (\alpha \circ \alpha \circ \pi_2)) \Rightarrow DIV$ es RP por ser composición de funciones RP

11. Sea $f: \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N} / f(x,y) = \begin{cases} 3x & \text{si } xy \text{ es cubo perfecto} \\ x \dot{-} y & \text{sino} \end{cases}$

Recordemos: $z \in \mathbb{N}$ es cubo perfecto si $\exists t \in \mathbb{N} / z = t^3$

Defino $g_1: \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N} / g_1(x,y) = 3x = h_3(x).x = PROD \circ (h_3 \circ \pi_1 \times \pi_1) \Rightarrow g_1$ es RP pues es composición de funciones RP.

Defino $g_2: \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N} / g_2(x,y) = x \dot{-} y \Rightarrow g_2 = \dot{-}$ que es RP.

Sea $P = \{(x,y) / x.y \text{ es cubo perfecto}\} = \{(x,y) \in \mathbb{N}^2 / \exists t \in \mathbb{N}, xy = t^3\}$.

$\Rightarrow f(x,y) = \begin{cases} g_1(x,y) & \text{si } (x,y) \in P \\ g_2(x,y) & \text{sino} \end{cases} \Rightarrow$ veamos que P es RP i.e. C_P es RP

Defino $C_P : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N} / C_P(x,y) = \begin{cases} 1 & \text{si } (x,y) \in P \\ 0 & \text{sino} \end{cases}$

$(x,y) \in P \Leftrightarrow \exists t / xy = t^3 \Leftrightarrow \exists t \leq xy / xy = t^3 \Rightarrow C_P(x,y) = \exists t \leq xy \ \ EQ(xy, POT(PRED(t), h_3(x)).\alpha(\alpha(t)))$

Defino $C_Q(x_1, x_2, y) = EQ(x_1.x_2, POT(PRED(y).h_3(x_1)).\alpha(\alpha(y))) \Rightarrow C_P(x,y) = \exists t \leq xy \ \ C_Q(x,y,t) = EAQ(x,y,xy) = EAQ \circ (\pi_1 \times \pi_2 \times PROD \circ (\pi_1 \times \pi_2))$ dnd C_Q es RP pues es composicion de funciones RP (EQ, PROD, PRED, POT, h_3, α y π) $\Rightarrow C_P$ es RP pues es composicion de funciones RP (EAQ, PROD y π).

Conclusion: f es RP pues es una funcion partida de funciones RP y predicado P RP

12. Sea $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N} / f(x)$ = cant de n° pares menores o iguales a x

Defino $PAR(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \text{ es par} \\ 0 & \text{sino} \end{cases} \Rightarrow PAR(x) = \alpha \circ IMPAR(x) \Rightarrow PAR$ es RP por ser composicion de funciones RP

$\Rightarrow f(x) = \sum_{i=0}^{x} PAR(i) \Rightarrow f$ es RP pues es SA de una funcion RP (PAR)

13. Sea $PRIMO : \mathbb{N} \to \mathbb{N} / PRIMO(n) = \begin{cases} 1 & \text{si } n \text{ es primo} \\ 0 & \text{sino} \end{cases}$

$x \in \mathbb{N}$ es primo $\Leftrightarrow x > 1 \wedge$ los unicos divisores de x son 1 y $x \Leftrightarrow x > 1 \wedge \nexists t < x / t | x \wedge t \neq 1$

$\Rightarrow PRIMO(x) = MAYOR(x, h_1(x)) \wedge \neg(\exists t < x \ (DIV(x,t) \wedge \neg EQ(t, h_1(x))))$

Obs: P es RP pues C_P es composicion de funciones RP (DIV, h_1, EQ, NOT, AND y π) $\Rightarrow EAE_P$ es RP

Conclusion: PRIMO es RP pues es composicion de funciones RP (MAYOR, h_1, AND, NOT, EAE_P y π)

Notemos que $C_P : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N} \Rightarrow PRIMO(x) = MAYOR(x, h_1(x)) \wedge \neg EAE_P(x,x) \Rightarrow$ NO aparece la ultima variable en C_P pues $EAE_P(x,x) = \exists t < x \ \ C_P(x,t)$

14. Sea $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N} / f(n) = \begin{cases} P_n & \text{si } n \neq 0 \\ 1 & \text{sino} \end{cases}$ dnd P_n es el n-esimo numero primo i.e. $P_1 = 2, P_2 = 3, P_3 = 5 \ldots$

P_{n+1} es el menor primo mayor a $P_n \Rightarrow f(n+1) = \min\{t \in \mathbb{N} / t > f(n) \wedge t \text{ es primo}\} \Rightarrow$ hay que buscar una cota para el minimo

<u>Veamos que $P_{n+1} \leq P_n! + 1$:</u>

1. Si $P_n! + 1$ es primo $\Rightarrow$ como $P(n) < P_n! + 1$, $P_{n+1} \leq P_n! + 1$
2. Si $P_n! + 1$ es compuesto $\Rightarrow \exists q \in \mathbb{N} / q$ es primo y $q | P_n! + 1 \Rightarrow q \leq P_n! + 1$

Sup que $q = P_i$ para algun $1 \leq i \leq n \Rightarrow P_i | P_n!$ pues $P_i \leq P_n$ y $P_i | P_n! + 1 \Rightarrow P_i | (P_n! + 1) - P_n! = 1 \Rightarrow P_i | 1$ ABS! pues P_i es primo

$\Rightarrow q \neq P_i \ \ \forall 1 \leq i \leq n \Rightarrow q > P_n$

Luego, $P_{n+1} \leq q \leq P_n! + 1 \Rightarrow P_{n+1} \leq P_n! + 1 \Rightarrow$ cota RP pues es composicion de funciones RP.

$\Rightarrow P_{n+1} = \min_{t \leq P_n! + 1} (t > P_n \wedge PRIMO(t))$

- $f(0) = 1 \in \mathbb{N}$
- $f(n+1) = \min_{t \leq f(n)! + 1} (t > f(n) \wedge PRIMO(t)) \Rightarrow$ quiero $H(n, f(n))$

Defino $H(x,y) = \min_{t \leq SUC \circ FACT \circ \pi_2} (t > y \wedge PRIMO(t)) = MA_P(y, SUC(FACT(y))) \Rightarrow H$ es RP pues es composicion de funciones RP (MAP, SUC, FACT y π)

Luego, P es RP pues C_P es composicion de funciones RP (MAYOR, AND, PRIMO y π).

Conclusion: f es RP porque se obtiene mediante un ERI aplicado a una funcion H RP

15. Sea $DIG_x : \mathbb{N} \to \mathbb{N} / DIG_x(n) = \begin{cases} a_n & \text{si } n \neq 0 \\ 0 & \text{sino} \end{cases}$ dnd $x = \frac{\sqrt{2}}{2} = 0,a_1a_2a_3\ldots \Rightarrow a_n$ es el n-esimo digito de x dsp de la coma

Notemos que $10x = a_1,a_2a_3\ldots \Rightarrow [10x] = a_1$ PERO $[100x] = a_1a_2 \Rightarrow$ tomo $r_{10}[100x]$ i.e. resto de dividir $[100x]$ por 10

$\Rightarrow DIG_x(n) = r_{10}([10^n x])$ PERO $10^n x \notin \mathbb{N} \Rightarrow r_{10}(\min_{t \leq 10^n x} \ 10^n x < t+1)$

Obs: $t \leq 10^n . \frac{\sqrt{2}}{2}$ y $\frac{\sqrt{2}}{2} \leq 1 \Rightarrow t \leq 10^n$ y $10^n \frac{\sqrt{2}}{2} < t+1 \Rightarrow 10^n \sqrt{2} < 2(t+1) \Rightarrow (10^n . \sqrt{2})^2 = 10^{2n} . 2 < 4.(t+1)^2$

$\Rightarrow DIG_x(n) = r_{10}(\min_{t \leq 10^n} \ 10^{2n} . 2 < 4(t+1)^2) \Rightarrow C_P(n,t)$ es RP $\Rightarrow MA_P$ es RP $\Rightarrow DIG_x(n)$ es RP

EJERCICIOS DE LA GUIA

Ejercicio 1

Sean $f, g : \mathbb{N}^n \to \mathbb{N}$ funciones RP $\Rightarrow$ probar que $f+g$ y $f.g$ son RP.

1. Sea $h : \mathbb{N}^n \to \mathbb{N} / h(\vec{x}) = f(\vec{x}) + g(\vec{x}) = SUM \circ (f \times g) \Rightarrow h$ es RP por ser composicion de funciones RP (SUM, f y g)
2. Sea $t : \mathbb{N}^n \to \mathbb{N} / t(\vec{x}) = f(\vec{x}).g(\vec{x}) = PROD \circ (f \times g) \Rightarrow t$ es RP por ser composicion de funciones RP (PROD, f y g)

Ejercicio 2

Sea f una funcion RP.

1. $g(x,y,z) = f(z,y,x) = f \circ (\pi_3 \times \pi_2 \times \pi_1) \Rightarrow g$ es RP por ser composicion de funciones RP (f y π_j)
2. $h(x,0) = z$ y $h(x,y+1) = f(x,x,x).y = f(x,x,x)(y-1) + f(x,x,x) = h(x,y) + f(x,x,x)$

- Defino $f(x) = h_2(x) \Rightarrow h(x,0) = f(x)$ dnd f es RP pues es la funcion constante

- Defino $g(x,y,z) = f(x,x,x) + z = SUM \circ (f \circ (\pi_1 \times \pi_1 \times \pi_1) \times \pi_3) \Rightarrow h(x,y+1) = g(x,y,h(x,y)) \Rightarrow g$ es RP por ser composición de funciones RP

i.e. SUM, f y π_j

Conclusión: h es RP pues se obtiene mediante un ERII aplicado a funciones RP (f y g)

Ejercicio 3

Sea $f: \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}$ una función RP y $\sigma: I_k \to I_k$ una permutación.

Se define $h: \mathbb{N}^k \to \mathbb{N} / h(x_1, \dots, x_k) = f(x_{\sigma(1)}, \dots, x_{\sigma(k)}) = f \circ (\pi_{\sigma(1)} \times \dots \times \pi_{\sigma(k)}) \Rightarrow h$ es RP por ser composición de funciones RP (π_j = inicial y f).

Obs: $\sigma(1) \dots \sigma(k) \in \mathbb{N} \Rightarrow$ a cada $i \in \mathbb{N}$ le asigno un valor $\sigma(i) \in \mathbb{N}$

Ej. Sea $k=1$ y $\sigma(1)=2$, $\sigma(2)=1 \Rightarrow h(x_1,x_2) = f(x_2,x_1) = f \circ (\pi_2 \times \pi_1)$

Ejercicio 4

1. $FACT: \mathbb{N} \to \mathbb{N} / FACT(x) = x!$

- $FACT(0) = 1 \in \mathbb{N} \Rightarrow$ ya está
- $FACT(x+1) = FACT(x).(x+1) \Rightarrow$ defino $g(x,y) = (x+1).y = PROD \circ (SUC \circ \pi_1 \times \pi_2) \Rightarrow g$ es RP por ser composición de funciones RP (PROD, SUC y π_j)

Conclusión: FACT es RP pues se obtiene mediante un ERI aplicado a una función g RP

2. $POT: \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N} / POT(x,y) = (x+1)^y$

- $POT(x,0) = 1 \Rightarrow$ defino $f(x) = h_1(x) \Rightarrow f$ es RP pues es la función constante
- $POT(x,y+1) = POT(x,y).x \Rightarrow$ defino $g(x,y,z) = PROD \circ (\pi_1 \times \pi_3) \Rightarrow g$ es RP por ser composición de funciones RP (PROD y π_j)

Conclusión: POT es RP pues se obtiene mediante un ERII aplicado a funciones RP (f y g)

3. $PRED: \mathbb{N} \to \mathbb{N} / PRED(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x=0 \\ x-1 & \text{si } x \neq 0 \end{cases}$

- $PRED(0) = 0 \in \mathbb{N} \Rightarrow$ ya está
- $PRED(x+1) = \begin{cases} 0 & \text{si } x=0 \\ PRED(x)+1 & \text{si } x \neq 0 \end{cases} \Rightarrow PRED(x+1) = \alpha(EQ(x,0))(PRED(x)+1) \Rightarrow$ quiero $g(x, PRED(x))$

$\Rightarrow$ defino $g(x,y) = \alpha(EQ(x,0)).(y+1) = PROD \circ (\alpha \circ EQ \circ (\pi_1 \times CERO) \times SUC \circ \pi_2) \Rightarrow g$ es RP por ser composición de funciones RP (PROD, α, EQ, SUC, CERO y π_j)

Obs: si $x=0 \Rightarrow PRED(1) = \alpha(EQ(0,0)).(PRED(0)+1) = \alpha(1).1 = 0$

Obs: si $x \neq 0 \Rightarrow PRED(x+1) = \alpha(EQ(x,0))(PRED(x)+1) = \alpha(0).(x-1+1) = 1.x = x$

Conclusión: PRED es RP pues se obtiene mediante un ERI aplicado a una función g RP

4. RESTA TRUNCADA $\dot{-}: \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N} / x \dot{-} y = \begin{cases} x-y & \text{si } x \geq y \\ 0 & \text{si } x < y \end{cases}$

- $\dot{-}(x,0) = x \Rightarrow$ defino $f(x) = \pi_1(x) \Rightarrow f$ es RP pues es una función inicial
- $\dot{-}(x,y+1) = PRED(\dot{-}(x,y)) \Rightarrow$ quiero $g(x,y,\dot{-}(x,y))$

$\Rightarrow$ defino $g(x,y,z) = PRED \circ \pi_3 \Rightarrow g$ es RP por ser composición de funciones RP (PRED y π_3)

Conclusión: $\dot{-}$ es RP pues se obtiene mediante un ERII aplicado a funciones RP (f y g)

5. $DIST: \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N} / DIST(x,y) = |x-y|$

Tomamos la RESTA TRUNCADA que es RP (Ej. 4.4) $\Rightarrow DIST(x,y) = \begin{cases} x-y & x \geq y \\ y-x & x < y \end{cases} \Rightarrow DIST(x,y) = \begin{cases} x \dot{-} y & x \geq y \\ y \dot{-} x & x < y \end{cases}$

Entonces, $DIST(x,y) = (x \dot{-} y) + (y \dot{-} x)$ pues si $x > y$, $y \dot{-} x = 0$ y $x \dot{-} y = x-y$ PERO si $x<y$, $x \dot{-} y = 0$ y $y \dot{-} x = y-x$.

$\Rightarrow DIST(x,y) = SUM(\dot{-}(x,y), \dot{-}(y,x)) = SUM \circ (\dot{-} \times \dot{-} \circ (\pi_2 \times \pi_1))$

Conclusión: DIST es composición de funciones RP (SUM, $\dot{-}$) y funciones iniciales (π_1, π_2) $\Rightarrow$ DIST es RP

6. $\alpha: \mathbb{N} \to \mathbb{N} / \alpha(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x=0 \\ 0 & \text{si } x \neq 0 \end{cases}$

- $\alpha(0) = 1$
- $\alpha(n+1) = 0 \Rightarrow$ quiero que $\alpha(n+1) = f(n, \alpha(n)) \Rightarrow$ defino $f: \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N} / f(x,y) = 0 = CERO(\pi_1(x,y)) \Rightarrow f$ es composición de iniciales $\Rightarrow f$ es RP.

$\Rightarrow$ α se obtiene mediante un ERI aplicado a una función RP $\Rightarrow \alpha$ es RP

8. $IMP: \mathbb{N} \to \mathbb{N} / IMP(n) = \begin{cases} 1 & \text{si } n \text{ impar} \\ 0 & \text{si } n \text{ par} \end{cases}$

- $IMP(0) = 0$
- $IMP(n+1) = \begin{cases} 1 & \text{si } n+1 \text{ impar} \\ 0 & \text{si } n+1 \text{ es par} \end{cases} = \begin{cases} 1 & \text{si } n \text{ par i.e. } IMP(n)=0 \\ 0 & \text{si } n \text{ impar i.e. } IMP(n)=1 \end{cases} \Rightarrow IMP(n+1) = \alpha(IMP(n)) \Rightarrow$ quiero $f(n, IMP(n)) = \alpha(IMP(n))$

Luego, defino $f: \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N} / f(x,y) = \alpha(y) = \alpha(\pi_2(x,y)) \Rightarrow f$ es RP por ser composición de funciones RP (α, π_2).

$\Rightarrow$ IMP es RP porque se obtiene mediante un ERI aplicado una función RP

9. $g: \mathbb{N} \to \mathbb{N} / g(x) = \begin{cases} x/2 & \text{si } x \text{ par} \\ (x-1)/2 & \text{si } x \text{ impar} \end{cases}$

Defino $P = \{x \in \mathbb{N} / x \text{ impar}\} \Rightarrow C_P : \mathbb{N} \to \mathbb{N} / C_P(x) = \mathrm{IMP}(x) \Rightarrow P$ es RP pues C_P es la funcion IMP.

Luego, $g(x) = \begin{cases} \mathrm{COC}(x-1,2) & \text{si } x \in P \\ \mathrm{COC}(x,2) & \text{sino} \end{cases} \Rightarrow g(x) = \begin{cases} h(x) & \text{si } x \in P \\ f(x) & \text{sino} \end{cases}$

Defino $h : \mathbb{N} \to \mathbb{N} / h(x) = \mathrm{COC} \circ (\mathrm{PRED} \circ \pi_1 \times h_2) \Rightarrow h$ es RP por composicion de funciones RP (PRED, COC, π_1 y h_2).

Defino $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N} / f(x) = \mathrm{COC} \circ (\pi_1 \times h_2) \Rightarrow f$ es RP por ser composicion de funciones RP (COC, π_1 y h_2).

Conclusion: g es RP pues es una funcion partida en 2 funciones RP (h y f) y dnd la condicion es un predicado P RP (teorica y ej 10)

10. $\mathrm{EQ} : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N} / \mathrm{EQ}(x,y) = \begin{cases} 1 & \text{si } x = y \\ 0 & \text{si } x \neq y \end{cases} \Rightarrow \mathrm{EQ}(x,y) = \alpha(|x-y|) = \alpha(\mathrm{DIST}(\pi_1(x,y), \pi_2(x,y)) = \alpha \circ \mathrm{DIST} \circ (\pi_1 \times \pi_2)$

Conclusion: EQ es RP por ser composicion de funciones RP (α, DIST) y f. iniciales (π_1, π_2)

11. $\max : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N} / \max(x,y) = \begin{cases} x & \text{si } x \geq y \\ y & \text{sino} \end{cases}$

$\Rightarrow \max(x,y) = x.\alpha(\alpha(x \dot{-} y)) + y.\alpha(x \dot{-} y) = \mathrm{SUM} \circ (\mathrm{PROD} \circ (\pi_1 \times \alpha \circ \alpha \circ \dot{-} \circ (\pi_1 \times \pi_2)) \times \mathrm{PROD} \circ (\pi_2 \times \alpha \circ \dot{-} \circ (\pi_1 \times \pi_2)))$

Caso 1: $x < y \Rightarrow \max(x,y) = x.\alpha(\alpha(0)) + y.\alpha(0) = x.\alpha(1) + y.1 = 0 + y = y$

Caso 2: $x = y \Rightarrow \max(x,y) = x.\alpha(\alpha(0)) + y.\alpha(0) = x.\alpha(1) + y.1 = 0 + y = y = x$

Caso 3: $x > y \Rightarrow \max(x,y) = x.\alpha(0) + y.0 = x + 0 = x$ porque $x \dot{-} y \neq 0$

Conclusion: max es RP por composicion de funciones RP (SUM, PROD, α y π_j)

7. Funcion constante $h_k : \mathbb{N} \to \mathbb{N} / h_k(x) = k$, $k \in \mathbb{N}$

- $h_k(0) = k \in \mathbb{N} \Rightarrow$ ya esta
- $h_k(n+1) = k = h_k(n) \Rightarrow$ quiero $g(n, h_k(n)) = h_k(n) \Rightarrow$ defino $g(x,y) = \pi_2(x,y) \Rightarrow g$ es RP pues es funcion inicial

Conclusion: h_k es RP pues se obtiene mediante un ERI aplicado a una funcion g RP

Ejercicio 5

Sea $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ RP. Si $f^n = f \circ \ldots \circ f$ es la composicion de f n veces, probar que $I_f : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N} / I_f(n,x) = f^n(x)$ es RP.

Notemos que $I_f(3,x) = f(f(f(x))) = f(f^2(x)) \Rightarrow f(n+1,x) = f(f^n(x))$.

- $I_f(0,x) = x$ pues $I_f(1,x) = f(x) = f(I_f(0,x)) \Rightarrow I_f(0,x) = x \Rightarrow$ queremos $h(x)$ RP
- $I_f(n+1,x) = f(f^n(x)) = f(I_f(n,x)) \Rightarrow$ queremos $H(n,x,I_f(n,x))$ RP

Defino $h : \mathbb{N} \to \mathbb{N} / h(x) = \pi_1(x) \Rightarrow h$ es RP por ser funcion inicial.

Defino $H : \mathbb{N}^3 \to \mathbb{N} / H(x,y,z) = f(\pi_3(x,y,z)) = f \circ \pi_3 \Rightarrow H$ es RP por ser composicion de funciones RP.

Conclusion: I_f es RP pues se obtiene mediante un ERII aplicado a funciones RP (h y H)

Ejercicio 6

Sea $g : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ una funcion RP. Sea $f : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N} / f(0,x) = g(x)$ y $f(n+1,x) = f(n, f(n,x))$

- $f(1,x) = f(0, f(0,x)) = f(0, g(x)) = g(g(x)) = g \circ g(x) = g^2(x)$
- $f(2,x) = f(1, f(1,x)) = f(1, g^2(x)) = g^4(x) = g^{2^2}(x)$
- $f(3,x) = f(2, f(2,x)) = f(2, g^4(x)) = g^8(x) = g^{2^3}(x)$

$\Rightarrow$ probemos por induccion que $f(n,x) = g^{2^n}(x)$

Caso base: $n = 0 \Rightarrow f(0,x) = g(x) = g^{2^0}(x)$ (por definicion de f)

Paso recursivo:

H) $f(n,x) = g^{2^n}(x)$

T) $f(n+1,x) = g^{2^{(n+1)}}(x)$

$f(n+1,x) = f(n, f(n,x)) = f(n, g^{2^n}(x)) = g^{2^n}(g^{2^n}(x)) = g^{2^n + 2^n}(x) = g^{2^{n+1}}(x)$

Luego, g es RP $\Rightarrow I_g(2^n, x) = g^{2^n}(x)$ es RP $\Rightarrow f(n,x) = I_g(2^n, x)$ es RP

Ejercicio 7

Sea $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N} / f(0) = 0$ y $f(n+1) = \begin{cases} n + f(n) & \text{si } n \text{ par} \\ n.f(n) & \text{sino} \end{cases} \Rightarrow f(n+1) = (n + f(n)).\alpha(\mathrm{IMP}(n)) + n.f(n).\mathrm{IMP}(n) \Rightarrow$ quiero $g(n, f(n))$

Defino $g : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N} / g(x,y) = \mathrm{SUM} \circ (\mathrm{PROD} \circ (\mathrm{SUM}(x,y) \times \alpha \circ \mathrm{IMP} \circ \pi_1) \times \mathrm{PROD} \circ (\mathrm{PROD} \circ (\pi_1 \times \pi_2) \times \mathrm{IMP} \circ \pi_1)) \Rightarrow g$ es RP por composicion de funciones RP (PROD, SUM, IMP, α y π_j).

Conclusion: f es RP pues se obtiene mediante un ERI aplicado a una funcion g RP

Ejercicio 8

Sea f una funcion de una variable que es constante a partir de un cierto numero natural $n_0 \Rightarrow$ probar que f es RP.

Se define $f:\mathbb{N}\to\mathbb{N}$ como $f(x)=\begin{cases} k & \text{si } x\geq n_0 \\ k_0 & \text{si } x=0 \\ k_1 & \text{si } x=1 \\ \vdots & \\ k_{n_0-1} & \text{si } x=n_0-1 \end{cases}$

$\Rightarrow f(x)=EQ(0,x)k_0+EQ(1,x)k_1+\ldots+EQ(n_0-1,x)k_{n_0-1}+\left(\prod_{j=0}^{n_0-1}\alpha(EQ(j,x))\right).k$

Conclusion: f es RP por composicion de funciones RP ($PROD$, SUM, EQ, π_i, α y funciones constantes h_{k_i}, $0\leq i\leq n_0-1$ y h_k)

Ejercicio 9

Sea a un numero racional positivo y sea $F:\mathbb{N}^2\to\mathbb{N}\,/\,F(n,m)=\begin{cases}1 & \text{si } n>ma \\ 0 & \text{sino}\end{cases}$

Notemos que $a=\frac{b}{c}$ c/ $b,c\in\mathbb{N}$ $\Rightarrow$ $n>ma\equiv n>m.\frac{b}{c}\equiv cn>bm$.

$\Rightarrow F(n,m)=\alpha(\alpha(nc\dot{-}mb))=\alpha\circ\alpha\circ\dot{-}\circ(PROD\circ(\pi_1\times h_c\circ\pi_1)\times PROD\circ(\pi_2\times h_b\circ\pi_2))$

Caso 1: $nc>mb\Rightarrow F(n,m)=\alpha(\alpha(\neq 0))=\alpha(0)=1$

Caso 2: $nc\leq mb\Rightarrow F(n,m)=\alpha(\alpha(0))=\alpha(1)=0$

Conclusion: F es RP por composicion de funciones RP (α, $PROD$, π_j y funciones constantes)

Ejercicio 10

$h(\vec{x})=\begin{cases}f(\vec{x}) & \text{si } \vec{x}\in P(\vec{x}) \\ g(\vec{x}) & \text{sino}\end{cases}$ $\Rightarrow h(\vec{x})=f(\vec{x}).C_P(\vec{x})+g(\vec{x}).\alpha(C_P(\vec{x}))=SUM\circ(PROD\circ(f\times C_P)\circ PROD\circ(g\times\alpha\circ C_P))$

$\Rightarrow$ h es RP por composicion de funciones RP (SUM, $PROD$, f, g, α y C_P)

Ejercicio 12

Probar que $HCD(x,y)$ = maximo comun divisor entre x e y es recursiva primitiva.

Defino $MCD(x,y)=\max_{t\leq\min(x,y)} R$ $\Rightarrow R=P\wedge Q$ = t divide a x $\wedge$ t divide a y.

Veamos que $\min(x,y)$ es RP:

$\min:\mathbb{N}^2\to\mathbb{N}\,/\,\min(x,y)=\begin{cases}x & x<y \\ y & x\geq y\end{cases}$ $\Rightarrow \min(x,y)=MENOR(x,y).x+y.\alpha(MENOR(x,y))=SUM\circ(PROD\circ(MENOR\times\pi_1)\times PROD\circ(\pi_2\times\alpha\circ MENOR))$

$\Rightarrow$ min es RP por ser composicion de funciones RP i.e. SUM, $MENOR$ (lo vimos en el pt 5 de los adicionales), π_j, $PROD$ y α

Veamos que P es RP: $P=\{t\in\mathbb{N}\,/\,t \text{ divide a } x\}$ $\Rightarrow C_P(x,t)=DIV(x,t)$ $\Rightarrow$ C_P es RP pues es la funcion DIV $\Rightarrow$ P es RP

Veamos que Q es RP: de manera analoga, $C_Q(y,t)=DIV(y,t)$ $\Rightarrow$ Q es RP

Luego, como P y Q son RP $\Rightarrow$ $R=P\wedge Q$ es RP $\Rightarrow C_R(x,y,t)=C_P(x,t).C_Q(y,t)=PROD\circ(C_P\circ(\pi_1\times\pi_3)\times C_Q(\pi_2\times\pi_3))$

$\Rightarrow MCD(x,y)=\max_{t\leq\min(x,y)} C_R(x,y,t)=MaxA_R(x,y,\min(x,y))=MaxA_R\circ(\pi_1\times\pi_2\times\min(x,y))$ $\Rightarrow$ MCD es RP por ser maximo acotado aplicado a un predicado R RP y c/ cota RP (min)

Obs: en C_R no aparece la ultima variable i.e. $\min(x,y)$

Ejercicio 14

Veamos que P es RP:

$C_P(x)=\begin{cases}1 & \text{si } x \text{ par} \\ 0 & \text{si } x \text{ impar}\end{cases}$ $\Rightarrow$ uso la funcion $INP(x)$ (0 si par, 1 si impar) $\Rightarrow C_P(x)=\alpha(INP(x))=\alpha\circ INP$

$\Rightarrow$ C_P es RP por composicion de funciones RP (α y INP) $\Rightarrow$ P es RP

Veamos que $f(x)$ es RP:

$f(x)$ es la cantidad de n° pares entre 1 y x $\Rightarrow f(x)=\sum_{j=0}^{x}C_P(x)\Rightarrow f(x)=g(PRED(x))=g\circ PRED(x)$

Defino $g(x)=\sum_{j=0}^{x}C_P(SUC(j))=\sum_{j=0}^{x}C_P\circ SUC(j)$ $\Rightarrow$ g es RP pues es sumatoria acotada aplicada a una funcion RP ($h=C_P\circ SUC$ $\Rightarrow$ composicion de RPs)

Ej. Si $x=5\Rightarrow f(5)=g(4)=\sum_{j=0}^{4}C_P(j+1)=C_P(1)+C_P(2)+C_P(3)+C_P(4)+C_P(5)=2$

Ej. Si $x=1\Rightarrow f(1)=g(0)=\sum_{j=0}^{0}C_P(j+1)=C_P(1)=0$

Conclusion: f es RP por ser composicion de funciones RP (g y $PRED$)

Ejercicio 15

Probar que $P(x,y)$ es RP siendo P verdadero si y solo si $x\leq y$.

$C_P(x,y)=\begin{cases}1 & \text{si } x\leq y \\ 0 & \text{si } x>y\end{cases}=\begin{cases}1 & \text{si } x\dot{-}y\neq 0 \\ 0 & \text{si } x\dot{-}y=0\end{cases}$ $\Rightarrow C_P(x,y)=\alpha(\alpha(\dot{-}(x,y)))$

PERO si $x=y$, $C_P(x,y)$ me daria 0 $\Rightarrow C_P(x,y)=\alpha(\alpha(\dot{-}(x,y)))+EQ(x,y)=SUM\circ(\alpha\circ\alpha\circ\dot{-}(x,y)\times EQ(x,y))$

Conclusion: C_P es RP por composicion de funciones RP (α, SUM, $\dot{-}$ y EQ) $\Rightarrow$ P es RP

Ejercicio 16

Sean P y Q predicados RP de n variables $\Rightarrow\exists\, C_P, C_Q:\mathbb{N}^n\to\{0,1\}\,/\,C_P$ y C_Q son RP.

Veamos que $(\neg P)$ es RP: $C_{\neg P}(\vec{x})=\alpha(C_P(\vec{x}))=\alpha\circ C_P(\vec{x})$ $\Rightarrow$ $C_{\neg P}$ es RP por composicion de funciones RP (α y C_P) $\Rightarrow$ $(\neg P)$ es predicado RP

Veamos que $(P \wedge Q)$ es RP:

$C_{(P\wedge Q)}(\vec{x}) = C_P(\vec{x}).C_Q(\vec{x}) = PROD \circ (C_P \times C_Q) \Rightarrow C_{(P\wedge Q)}$ es RP por composicion de funciones RP ($PROD$, C_P y C_Q) $\Rightarrow (P \wedge Q)$ es predicado RP

Veamos que $(P \vee Q)$ es RP:

$C_{(P\vee Q)}(\vec{x}) = \alpha(\alpha(C_P(\vec{x}) + C_Q(\vec{x}))) = \alpha \circ \alpha \circ SUM \circ (C_P \times C_Q) \Rightarrow C_{(P\vee Q)}$ es RP por composicion de funciones RP (α, SUM, C_P y C_Q) $\Rightarrow (P \vee Q)$ es predicado RP

Veamos que $(P \Rightarrow Q)$ es RP: notemos que $(P \Rightarrow Q) \equiv (\neg P \vee Q)$

$C_{(P \Rightarrow Q)}(\vec{x}) = \alpha(\alpha(\alpha(C_P(\vec{x})) + C_Q(\vec{x}))) = \alpha \circ \alpha \circ SUM \circ (\alpha \circ C_P \times C_Q) \Rightarrow C_{(P\Rightarrow Q)}$ es RP por composicion de funciones RP $\Rightarrow (P \Rightarrow Q)$ es predicado RP

Ejercicio 13

$MCM(x,y)$ = minimo comun multiplo entre x e y $\Rightarrow$ si t es el MCM $\Rightarrow$ t es el min / $x|t \wedge y|t$

Notemos que $t \leq xy$ pues $x|xy$ e $y|xy$ $\Rightarrow$ en caso de que no haya MCM menor a $x.y$, el MCM es xy.

Defino $MCM(x,y) = \min_{t \leq xy} C_R(x,y,t)$ dnd $R(x,y,t) = P(t,x) \wedge P(t,y)$ siendo $P(x,y)$ verdadero si $y|x$

$\Rightarrow C_P(x,y) = DIV(x,y) \Rightarrow C_P$ es RP pues es la funcion DIV $\Rightarrow P$ es RP

Recordemos: $DIV(x,y) = 1$ si $y|x$ $\wedge$ $DIV(x,y) = 0$ si $y \nmid x$

$\Rightarrow$ R es RP pues $C_R(x,y,t) = C_P(t,x).C_P(t,y) = PROD \circ (C_P \circ (\pi_3 \times \pi_1) \times C_P(\pi_3 \times \pi_2))$ es RP (composicion de RPs = $PROD$, C_P y π_j)

Luego, $MCM(x,y) = \min_{t \leq xy} C_P(t,x) \wedge C_P(t,y) = \min_{t\leq xy} C_P(x,y,t) = MAR(x,y,xy) = MAR \circ (\pi_1 \times \pi_2 \times PROD(x,y))$.

Conclusion: MCM es RP pues es un minimo acotado aplicado a un predicado R RP y el cota RP ($PROD$)

Obs: en C_R no aparece la ultima variable i.e. xy

Ejercicio 11

1. $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N} / f(x) = \begin{cases} 2x & \text{si } x \text{ es cuadrado perfecto} \\ 0 & \text{sino} \end{cases}$ $\Leftrightarrow x \in P$ dnd $P = \{x \in \mathbb{N} / x$ es un cuadrado perfecto$\}$

Recordemos: $z \in \mathbb{N}$ es un cuadrado perfecto si $\exists t \in \mathbb{N} / z = t^2$

Defino $g_1 : \mathbb{N} \to \mathbb{N} / g_1(x) = PROD \circ (h_2 \times \pi_1) \Rightarrow g_1$ es RP por composicion de funciones RP ($PROD$, h_2 y π_1)

Defino $g_2 : \mathbb{N} \to \mathbb{N} / g_2(x) = CERO(x) \Rightarrow g_2$ es RP por ser funcion inicial

Veamos que P es RP:

$x \in P \Leftrightarrow \exists t \leq x \;\; x = t^2 \Rightarrow C_P(x) = \exists t \leq x \;\; C_Q(x,t) \Rightarrow$ defino $C_Q(x,t) = EQ(x, POT(PRED(t), 2)).\alpha(\alpha(t))) = EQ \circ (\pi_1 \times PROD \circ (POT \circ (PRED \circ \pi_2 \times h_2) \times \alpha \circ \alpha \circ \pi_2)) \Rightarrow Q$ es RP pues C_Q es composicion de funciones RP ($PROD$, POT, α, h_2, π_j, EQ y $PRED$) $\Rightarrow C_P(x) = EAQ(x,x) \Rightarrow P$ es RP

$\Rightarrow f(x) = \begin{cases} g_1(x) & \text{si } x \in P \\ g_2(x) & \text{sino} \end{cases}$ $\Rightarrow f$ es RP por ser funcion partida de funciones RP y predicado P RP

2. $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N} / f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x = 0 \\ \text{suma de divisores de } x & \text{si } x \neq 0 \end{cases}$

$\Rightarrow f(x) = (\sum_{j=0}^{x} g(x,j)).EQ(x,0)$ dnd $g(x,y) = y.DIV(x,y) = PROD \circ (\pi_2 \times DIV(x,y)) \Rightarrow g$ es RP por composicion de funciones RP ($PROD$, π_2 y DIV)

Conclusion: $f(x) = PROD \circ (SAg \times EQ \circ (\pi_1 \times CERO)) \Rightarrow f$ es RP por composicion de funciones RP ($PROD$, SAg, EQ, π_1 y $CERO$)

3. $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N} / f(x)$ = cantidad de primos $\leq x$ $= \sum_{j=0}^{x} g(x,j)$ dnd $g(x,y) = PRIMO(y) = PRIMO \circ \pi_2 \Rightarrow g$ es RP por ser composicion de RPs ($PRIMO$ y π_2)

Recordemos que $PRIMO(x)$ devuelve 1 si x es primo y 0 sino.

Ej. Si $x = 5 \Rightarrow f(5) = \sum_{j=0}^{5} g(x,j) = \sum_{j=0}^{5} PRIMO(j) = 3$

Conclusion: f es RP pues es sumatoria acotada de una funcion g que es RP

8. Sea $DIG_x : \mathbb{N} \to \mathbb{N} / DIG_x(n) = \begin{cases} a_n & \text{si } n \neq 0 \\ 0 & \text{sino} \end{cases}$ dnd $x = \frac{\sqrt{2}}{2} = 0,a_1a_2a_3\ldots \Rightarrow a_n$ es el n-esimo digito de x dsp de la coma

Notemos que $10x = a_1,a_2a_3\ldots \Rightarrow [10x] = a_1$ PERO $[100x] = a_1a_2 \Rightarrow$ tomo $r_{10}[100x]$ i.e. resto de dividir $[100x]$ por 10

$\Rightarrow DIG_x(n) = r_{10}([10^n x])$ PERO $10^n x \notin \mathbb{N} \Rightarrow r_{10}(\min_{t \leq 10^n x} \;\; 10^n x < t+1)$

Obs: $t \leq 10^n . \frac{\sqrt{2}}{2}$ y $\frac{\sqrt{2}}{2} \leq 1 \Rightarrow t \leq 10^n$ y $10^n \frac{\sqrt{2}}{2} < t+1 \Rightarrow 10^n \sqrt{2} < 2(t+1) \Rightarrow (10^n.\sqrt{2})^2 = 10^{2n}.2 < 4.(t+1)^2$

$\Rightarrow DIG_x(n) = r_{10}(\min_{t \leq 10^n} \;\; 10^{2n}.2 < 4(t+1)^2) \Rightarrow C_P(n,t)$ es RP $\Rightarrow MAP$ es RP $\Rightarrow DIG_x(n)$ es RP

7. $f_a : \mathbb{N} \to \mathbb{N} / f_a(b) = \begin{cases} r_a(b) & \text{si } a \neq 0 \\ 0 & \text{si } a = 0 \end{cases}$ $\Rightarrow b = a.k + r \Rightarrow r = b - ak = b - a.COC(b,a)$

Como $r \geq 0 \Rightarrow r + ak \geq ak \Rightarrow b \geq ak \Rightarrow b - a.coc(b,a) = b \dot{-} a.coc(b,a) = r$

PERO si $a = 0 \Rightarrow r$ me tiene que dar 0 $\Rightarrow f_a(b) = (b \dot{-} a.coc(b,a)).\alpha(\alpha(h_a(b)))$

$\Rightarrow f_a(b) = PROD \circ (\dot{-} \circ (\pi_1 \times PROD \circ (h_a \times COC \circ (\pi_1 \times h_a))) \times \alpha \circ \alpha \circ h_a) \Rightarrow f_a$ es RP por composicion de RPs ($PROD$, $\dot{-}$, h_a, π_1, α y coc)

5. $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N} / f(x) = \lfloor \sqrt{2}x \rfloor \Rightarrow f(x) = \min_{t \leq \sqrt{2}x} \;\; \sqrt{2}x < t+1$

Luego, $\sqrt{2} \leq 2 \Rightarrow t \leq 2x$ y $\sqrt{2}x < t+1 \Rightarrow 2x^2 < (t+1)^2 \Rightarrow f(x) = \min_{t \leq 2x} \;\; 2x^2 < (t+1)^2$

Veamos que C_P es RP: $P(x,y)$ es verdadero si $2x^2 < (y+1)^2$

Defino $C_P(x,y) = \alpha(\dot{-}(PROD(h_2 \times PROD(\pi_1 \times \pi_1)) \times POT(\pi_2 \times h_2)).\alpha(EQ(PROD(h_2 \times PROD(\pi_1 \times \pi_1)) \times POT(\pi_2 \times h_2)) \Rightarrow C_P$ es RP por composicion de RPs

Conclusion: $f(x) = MAp(x, PROD(x, h_2)) = MAP \circ (\pi_1 \times PROD \circ (\pi_1 \times h_2)) \Rightarrow f$ es RP por composicion de funciones RP (MAp, $PROD$, h_2 y π_1)

4. $f: \mathbb{N} \to \mathbb{N} \,/\, f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \text{ es suma de dos cuadrados} \\ 0 & \text{sino} \end{cases}$

$\Rightarrow f(x) = \exists y \leq x \; (\exists z \leq x \quad x = y^2 + z^2)$

1. $C_Q(x, y, z) = EQ(x, y^2 + z^2) = EQ \circ (\pi_1 \times SUM \circ (PROD \circ (\pi_2 \times \pi_2) \times PROD \circ (\pi_3 \times \pi_3))) \Rightarrow C_Q$ es RP por composicion de funciones RP ($PROD$, SUM, EQ y π_j)
2. $C_P(x, y, z) = \exists t \leq z \; C_Q(x, y, t) = EAQ(x, y, z) \Rightarrow C_P$ es RP pues es un EA aplicado a un predicado Q RP

$\Rightarrow f(x) = EAp(x, x) = EAp \circ (\pi_1 \times \pi_1) = \exists y \leq x \; C_P(x, y, x) = \exists y \leq x \; (\exists z \leq x \; C_Q(x, y, z)) = \exists y \leq x \; (\exists z \leq x \quad x = y^2 + z^2)$

Conclusion: f es RP pues es composicion de funciones RP (EAp y π_i)

10. Sea P un predicado RP y sea $g: \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N} \,/\, g(x, y) = \max_{y \leq t} C_P(x, t) = \min_{t \leq y} C_P(x, t) \wedge y - 1 < t$

Defino $C_Q(x, y, t) = C_P \circ (\pi_1 \times \pi_3) \,.\, \alpha \circ \dot{-} \circ (PRED \circ \pi_2 \times \pi_3) \,.\, \alpha \circ EQ \circ (PRED \circ \pi_2 \times \pi_3) \Rightarrow C_Q$ es RP por composicion de RPs

$\Rightarrow g(x, y) = MAQ \circ (\pi_1 \times \pi_2 \times \pi_2) = MAQ(x, y, y) = \min_{t \leq y} C_Q(x, y, t)$ Obs: en C_Q no aparece la ultima variable

Conclusion: g es RP por composicion de funciones RP (MAQ y π_j)