Lógica de primer orden

DEFINICION 1: alfabeto de una logica de 1er orden

A es un alfabeto de una logica de 1er orden y se define $A = VAR \cup \{(,)\} \cup conectivos \cup \mathcal{C} \cup \mathcal{F} \cup \mathcal{P}$

- conectivos $= \{\wedge, \vee, \rightarrow, \neg\} \cup \{\forall, \exists\}$ dnd $\forall$ = cuantificador universal y $\exists$ = cuantificador existencial
- $\mathcal{C}$ = conjunto de simbolos de constantes
- $\mathcal{F}$ = conjunto de simbolos de funciones
- $\mathcal{P}$ = conjunto de simbolos de predicados $\Rightarrow \mathcal{P} \neq \emptyset$

Obs: $\mathcal{C}, \mathcal{F}, \mathcal{P}$ NO son fijos $\Rightarrow$ A tendria q escribirse $A_{\mathcal{C},\mathcal{P},\mathcal{F}}$ PERO lo simplificamos $\Rightarrow$ hay infinitos alfabetos $\Rightarrow$ k = aridad ; i = subindice

Notaciones: $VAR = x_i, y_i, z_i \dots$; $\mathcal{C} = c_i, d_i, k_i \dots$; $\mathcal{F} = f_i^k, g_i^k, h_i^k \dots$; $\mathcal{P} = P_i^k, Q_i^k, R_i^k \dots$

EJEMPLOS

1. A alfabeto c/ $\mathcal{C} = \{c, d\}$, $\mathcal{F} = \emptyset$ y $\mathcal{P} = \{P^2, Q^2\}$
2. A alfabeto c/ $\mathcal{C} = \emptyset$, $\mathcal{F} = \{f_1^3, f_2^5\}$ y $\mathcal{P} = \{P, Q\}$
3. A alfabeto c/ $\mathcal{C} = \emptyset$, $\mathcal{F} = \emptyset$ y $\mathcal{P} = \{P^3\}$

DEFINICION 2: termino sobre un alfabeto A

1. Toda variable es un termino.
2. Toda constante es un termino.
3. Si $t_1, t_2, \dots, t_k \in$ Terminos y $f^k \in \mathcal{F} \Rightarrow f^k(t_1, t_2, \dots, t_k)$ es un termino.
4. Cualquier expresion de A^* q se obtenga aplicando finitos veces 1, 2 y 3 es un termino.

Notacion: TERM

EJEMPLOS

Sea A c/ $\mathcal{C} = \{c, d\}$, $\mathcal{F} = \{f^3, g^1\}$ y $\mathcal{P} = \{P^1\}$

1. $c \in TERM$
2. $f^3(c, d, x) \in TERM$
3. $f^3(f^3(c, c, d), g(z), x) \in TERM$
4. $P(c) \notin TERM$

DEFINICION 3: formula sobre un alfabeto A

1. Si $t_1, t_2, \dots, t_k \in TERM$ y $P^k \in \mathcal{P} \Rightarrow P^k(t_1, t_2, \dots, t_k) \in FORM$ y se denomina formula atomica
2. $\alpha \in FORM \Rightarrow \neg\alpha \in FORM$
3. $\alpha, \beta \in FORM \Rightarrow (\alpha * \beta) \in FORM$ c/ $* = \{\wedge, \vee, \rightarrow\}$
4. $x \in VAR$ y $\alpha \in FORM \Rightarrow \forall x \ \alpha \in FORM$
5. $x \in VAR$ y $\alpha \in FORM \Rightarrow \exists x \ \alpha \in FORM$
6. Cualquier expresion de A^* q se obtenga aplicando finitos veces 1, 2, 3, 4 y 5 es una formula.

Obs: formula atomica = lo + chica q podemos tener

Notacion: FORM ó F

EJEMPLO

Decidir si las expresiones son terminos formulas o nada. Sea A c/ $\mathcal{C} = \{c, d\}$, $\mathcal{F} = \{f^3, g^1\}$ y $\mathcal{P} = \{P^1, Q^2\}$.

1. $\forall x \ P^1(f^3(x, y, z)) \Rightarrow f^3(x, y, z) \in TERM \Rightarrow P^1(f^3(x, y, z)) \in F$ y $x \in F \Rightarrow \forall x \ P^1(f^3(x, y, z))$ es formula
2. $\forall c \ P^1(x) \Rightarrow$ nada pues NO se puede cuantificar constantes
3. $Q^2(P^1(c), x) \Rightarrow$ nada pues $P^1(c) \notin TERM$
4. $\forall x \ \exists y \ (Q^2(x, y) \rightarrow \exists x \ Q^2(f^3(x, x, y), f^3(x, y, x))) \Rightarrow$ formula
5. $x \Rightarrow$ termino
6. $\neg x \Rightarrow$ nada
7. $(\forall x \ P^1(x) \rightarrow Q^2(x, x)) \Rightarrow$ formula
8. $\forall x \ (P^1(x) \rightarrow Q^2(x, x)) \Rightarrow$ formula

DEFINICION 4

Dado un alfabeto A, $\mathcal{L} \subseteq A^*$ es un lenguaje de 1er orden si $\mathcal{L} = FORM \cup TERM$.

DEFINICION 5

Un termino se llama cerrado si no tiene variables. (Ej. usando el anterior, $g^1(c, d)$ es cerrado)

DEFINICION 6: variables libres y ligadas

Sea $x \in VAR$ y $\beta \in F$, $\alpha = \forall x \ \beta$ es formula. El alcance c/ q cuantifique x el $\forall$ es en β i.e. si tengo $(\forall x \ \beta \rightarrow \gamma)$ el cuantificador tiene alcance sobre β PERO no sobre γ, ahora si tengo $\forall x \ (\beta \rightarrow \gamma)$, el cuantificador tiene alcance sobre β y γ.

$\Rightarrow \forall x \ \alpha$ ó $\exists x \ \alpha$, cualquier aparicion de x en α se dice q esta ligada y si en una aparicion de una variable la misma no esta ligada se dice q esta libre en dicha aparicion.

- Una aparicion de una variable x en una formula esta ligada si es alcanzada x un cuantificador.
- En caso contrario, decimos q la aparicion es libre.

Importante:

- P/ decir q una variable es libre en una formula tiene q ser libre en TODAS las apariciones.
- P/ decir q una variable es ligada en una formula, TODAS sus apariciones deben ser ligadas.

EJEMPLOS

1. $(\forall x \ P^1(x) \rightarrow Q^2(x, x)) \Rightarrow$ x no es ni libre ni ligada pues en $P^1(x)$ esta ligada y en $Q^2(x, x)$ esta libre
2. $\forall x \ (P^1(x) \rightarrow Q^2(x, x)) \Rightarrow$ x es ligada

3. $\forall x\,(P^1(x) \to Q^2(x,y)) \Rightarrow$ y es libre e x es ligada
4. $P(x_1, x_2) \Rightarrow$ x_1 y x_2 son libres

DEFINION 7: enunciado

Una formula se llama enunciado si todos sus variables estan ligadas

SEMANTICA

DEFINICION 1: interpretacion

Notacion: I se llama interpretacion de $\mathcal{L}$ ó $\mathcal{L}$-estructura

$\Rightarrow$ definir una interpretacion I de $\mathcal{L}$ es dar U y hacer 1, 2, 3

Dado un alfabeto A y un lenguaje $\mathcal{L}$ de 1er orden. Una interpretacion I de $\mathcal{L}$ consiste en un conjunto no vacio $U \neq \emptyset$ q se llama universo y se verifica:

1. $c \in \mathcal{C} \Rightarrow c$ se interpreta como $C_I \in U$
2. $f^k \in \mathcal{F} \Rightarrow f^k$ se interpreta como $f_I^k : U^k \to U$ i.e. $dom(f_I^k) = U^k$ y $codom(f_I^k) = U$
3. $P^k \in \mathcal{P} \Rightarrow P^k$ se interpreta como una relacion k-aria en U i.e. $P_I^k \subseteq U^k$

EJEMPLOS

Sea $\mathcal{L}$ lenguaje de 1er orden / $\mathcal{C} = \{c, d\}$, $\mathcal{F} = \{f^3, g^2\}$ y $\mathcal{P} = \{P^2\}$. Decidir si las estructuras son interpretaciones.

1. $I_1 = (U = \mathbb{Z}, C_{I_1} = 2, d_{I_1} = -1, f_{I_1}^3(x,y,z) = x+y-z, g_{I_1}^2(x,y) = x.y, P_{I_1}^2 = \{(x,y) / x \equiv y(3)\}) \Rightarrow$ veamos q $U \neq \emptyset$, $C_{I_1} \in \mathbb{Z}$, $d_{I_1} \in \mathbb{Z}$, $f_{I_1}^3 : \mathbb{Z}^3 \to \mathbb{Z}$, $g_{I_1}^2 : \mathbb{Z}^2 \to \mathbb{Z}$ y $P_{I_1}^2 \subseteq \mathbb{Z}^2 \Rightarrow I_1$ es una interpretacion
2. $I_2 = (U = \mathbb{R}^{2x2}, C_{I_2} = Id, d_{I_2} = 0, f_{I_2}^3(x,y,z) = x+y, g_{I_2}^2(x,y) = x, P_{I_2}^2 = \{(x,y) / xy = yx\}) \Rightarrow U \neq \emptyset$, $C_{I_2} \in \mathbb{R}^{2x2}$, $d_{I_2} \in \mathbb{R}^{2x2}$, $f_{I_2}^3 : (\mathbb{R}^{2x2})^3 \to \mathbb{R}^{2x2}$, $g_{I_2}^2 : (\mathbb{R}^{2x2})^2 \to \mathbb{R}^{2x2}$ y $P_{I_2}^2 \in (\mathbb{R}^{2x2})^2 \Rightarrow I_2$ es interpretacion

Obs: $Id = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

3. $I_3 = (U = \mathbb{N}, C_{I_3} = 1, d_{I_3} = 2, f_{I_3}^3(x,y,z) = x+y+z, g_{I_3}^2(x,y) = x/y, P_{I_3}^2 = \{(x,y) / x = 1\}) \Rightarrow$ NO es interpretacion pues $g_{I_3}^2(3,0)$ NO esta definida

DEFINICION 2: valuacion

Dado un lenguaje de 1er orden $\mathcal{L}$ y una interpretacion I de $\mathcal{L}$. Se define una valuacion como $v : VAR \to U_I$.

¿Como interpretamos los terminos?

Dado v, $\bar{v} : TERM \to U_I$ una extension de v que verifica:

1. Sea $x \in VAR$, $\bar{v}(x) = v(x)$ pues $\bar{v}|_{VAR} = v$
2. Sea $c \in \mathcal{C}$, $\bar{v}(c) = C_I$
3. Sea $f^k \in \mathcal{F}$ y $t_1, \dots, t_k \in TERM$, $\bar{v}(f^k(t_1, \dots, t_k)) = f_I^k(\bar{v}(t_1), \dots, \bar{v}(t_k))$

EJEMPLOS

Sea $\mathcal{L}$ c/ $\mathcal{C} = \{c\}$, $\mathcal{P} = \{P^2\}$ y $\mathcal{F} = \{f^2\} \Rightarrow I = (U = \mathbb{Z}, C_I = 0, f^2(x,y) = x+y, P^2 = \{(x,y) / x \equiv y(2)\})$ es interpretacion de $\mathcal{L}$.

Obs: $I = \{\mathbb{Z}, 0, +, \{(x,y)/x \equiv y(2)\}\}$ es otra forma de escribirlo

Defino $v : VAR \to \mathbb{Z} / v(x_j) = 2j$. Hallar $\bar{v}(t)$.

1. Sea $t = f^2(x_1, x_3) \Rightarrow \bar{v}(t) = \bar{v}(f^2(x_1, x_3)) = f_I^2(\bar{v}(x_1), \bar{v}(x_3)) = f_I^2(v(x_1), v(x_3)) = f_I^2(2.1, 2.3) = 2+6 = 8$
2. Sea $t = f^2(x_5, c) \Rightarrow \bar{v}(t) = \bar{v}(f^2(x_5, c)) = f_I^2(\bar{v}(x_5), \bar{v}(c)) = f_I^2(v(x_5), 0) = f_I^2(10, 0) = 10 + 0 = 10$

DEFINICION 3: valuacion modificada

Sea $\mathcal{L}$ un lenguaje de 1er orden, I una interpretacion de $\mathcal{L}$ c/ universo U y $v : VAR \to U$ una valuacion.

Se define una valuacion modificada $V_{x=a} : VAR \to U / V_{x=a}(x_j) = \begin{cases} v(x_j) & \text{si } x_j \neq x \\ a & \text{si } x_j = x \end{cases}$

DEFINICION 4: valor de verdad

Notacion: α es verdadera en I con val $v \Rightarrow V_{I,v}(\alpha) = 1$ ó $I \models \alpha[v]$

Notacion: α es falsa en I con val $v \Rightarrow V_{I,v}(\alpha) = 0$ ó $I \not\models \alpha[v]$

Dado $\mathcal{L}$ un lenguaje de 1er orden, I interpretacion de $\mathcal{L}$ c/ universo U y $v : VAR \to U$ una valuacion.

Se define $V_{I,v} : FORM \to \{0, 1\}$ de la siguiente manera:

1. Sea $P^k \in \mathcal{P}$ y $t_1, \dots, t_k \in TERM / \alpha = P^k(t_1, \dots, t_k) \Rightarrow V_{I,v}(\alpha) = 1 \Leftrightarrow (\bar{v}(t_1), \bar{v}(t_2), \dots, \bar{v}(t_k)) \in P_I^k$

$\Rightarrow$ Obs: $\bar{v}(t_j) \in U, \forall 1 \leq j \leq k \Rightarrow$ queda bien definido

2. Sea $\alpha = \neg\beta / \beta \in FORM \Rightarrow V_{I,v}(\alpha) = 1 - V_{I,v}(\beta)$
3. Sea $\alpha = (\beta_1 \wedge \beta_2) / \beta_1, \beta_2 \in FORM \Rightarrow V_{I,v}(\alpha) = min\{V_{I,v}(\beta_1), V_{I,v}(\beta_2)\}$
4. Sea $\alpha = (\beta_1 \vee \beta_2) / \beta_1, \beta_2 \in FORM \Rightarrow V_{I,v}(\alpha) = max\{V_{I,v}(\beta_1), V_{I,v}(\beta_2)\}$
5. Sea $\alpha = (\beta_1 \to \beta_2) / \beta_1, \beta_2 \in FORM \Rightarrow V_{I,v}(\alpha) = max\{1 - V_{I,v}(\beta_1), V_{I,v}(\beta_2)\}$
6. Sea $\alpha = \forall x\ \beta \Rightarrow V_{I,v}(\alpha) = 1 \Leftrightarrow V_{I,V_{x=a}}(\beta) = 1$ para todo elemento $a \in U$
7. Sea $\alpha = \exists x\ \beta \Rightarrow V_{I,v}(\alpha) = 1 \Leftrightarrow V_{I,V_{x=a}}(\beta) = 1$ para algun valor $a \in U$

$\Rightarrow$ en 6 y 7, $\beta \in FORM$ y $x \in VAR$

EJEMPLOS

Sea $I = \{\mathbb{Z}, 0, x+y, \{(x,y)/x \equiv y(2)\}\}$, $v : VAR \to \mathbb{Z} / v(x_j) = 2j \Rightarrow$ Hallar $V_{I,v}(\alpha)$.

1. Sea $\alpha = P(x_1, x_4) \Rightarrow V_{I,v}(\alpha) = 1 \Leftrightarrow (\bar{v}(x_1), \bar{v}(x_4)) \in P_I \Leftrightarrow (v(x_1), v(x_4)) \in P_I \Leftrightarrow (2.1, 2.4) \in P_I \Leftrightarrow 2 \equiv 8(2) \Rightarrow I \models \alpha[v]$
2. Sea $\alpha = \forall x_1\ \forall x_2\ P(x_1, x_2)$.

$V_{I,v}(\alpha) = 1 \Leftrightarrow V_{I,v_{x_1=a}}(\forall x_2\ P(x_1, x_2)) = 1$ para todo $a \in U$

$\Leftrightarrow V_{I,v_{x_1=a,x_2=b}}(P(x_1, x_2)) = 1$ para todo $a \in U$ y $b \in U$

$\Leftrightarrow (\bar{V}_{x_1=a,x_2=b}(x_1), \bar{V}_{x_1=a,x_2=b}(x_2)) \in P_I$ para todo $a \in U$ y $b \in U$

$\Leftrightarrow (V_{x_1=a,x_2=b}(x_1), V_{x_1=a,x_2=b}(x_2)) \in P_I$ para todo $a \in U$ y $b \in U$

$\Leftrightarrow V_{x_1=a,x_2=b}(x_1) \equiv V_{x_1=a,x_2=b}(x_2)\ (2)$ para todo $a \in U$ y $b \in U$

$\Leftrightarrow a \equiv b\ (2)$ para todo $a \in U$ y $b \in U$

$\Rightarrow$ FALSO pues basta tomar $a = 1$ y $b = 0 \Rightarrow 1 \not\equiv 0\ (2) \Rightarrow I \not\models \alpha[v]$

3. Sea $\alpha = \exists x_1 \, \forall x_2 \, P(x_1, x_2)$.

$V_{I,v}(\alpha) = 1 \Leftrightarrow V_{I,v_{x_1=a}}(\forall x_2 \, P(x_1, x_2)) = 1$ para algun $a \in U$

$\Leftrightarrow V_{I,v_{x_2=b}}(P(a, x_2)) = 1$ fijando a en U para todo $b \in U$

$\Leftrightarrow a \equiv b(z)$

$\Rightarrow$ FALSO pues basta tomar $b = a+1 \Rightarrow I \not\models \alpha[v]$

4. Sea $\alpha = \forall y \, \exists x \, P(x, y)$.

$V_{I,v}(\alpha) = 1 \Leftrightarrow V_{I,v_{y=a}}(\exists x \, P(x,y))$ para todo $a \in U$

$\Leftrightarrow V_{I,v_{x=b}}(P(x,a)) = 1$ dado $a \in U$ i.e. fijo a en U

$\Leftrightarrow b \equiv a(z)$ para algun b

$\Rightarrow$ VERDADERO pues basta tomar $b = a \Rightarrow I \models \alpha[v]$

DEFINICION 5

Sea $\mathcal{L}$ de 1er orden.

1. Sea $\alpha \in F$, α es satisfacible si $\exists$ I interpretacion y v valuacion / $V_{I,v}(\alpha) = 1$ ó $I \models \alpha[v]$.

$\Rightarrow$ decimos que I es un modelo p/ α

2. Sea $\alpha \in F$, α es verdadera ó valida en I si $V_{I,v}(\alpha) = 1$, $\forall v$ valuacion $\Rightarrow I \models \alpha$.
3. Sea $\alpha \in F$, α es universalmente valida si $V_{I,v}(\alpha) = 1$, $\forall I$ interpretacion y $\forall v$ valuacion $\Rightarrow \models \alpha$.

DEFINICION 6 : lenguaje con igualdad

Sea $\mathcal{L}$ un lenguaje de 1er orden. Decimos que $\mathcal{L}$ es un lenguaje con $=$ si $\exists$ $P^2 \in \mathcal{P}$ / obligatoriamente se interpreta cl la igualdad i.e. $P_I^2 = \{(x,y) / x = y\}$.

EJEMPLO

Sea $\mathcal{L}$ un lenguaje c/ $=$, hallar $\alpha \in F$ / los modelos de α sean $\{I / \#U = 2\}$.

Defino $\alpha = \exists x \exists y \, (\neg x = y \wedge \forall z \, (z = x \vee z = y))$.

Veamos que α cumple con lo pedido:

1. Sea $I / \#U = 1 \Rightarrow U = \{a\} \Rightarrow$ el ! valor q puede tomar x es a y el ! valor q puede tomar y es $a \Rightarrow \neg a = a$ es falso $\Rightarrow V_I(\alpha) = 0$.
2. Sea $I / \#U \geq 3 \Rightarrow$ basta c/ elegir z distinto de x e $y \Rightarrow x = z \vee y = z$ es falso $\Rightarrow V_I(\alpha) = 0$.
3. Sea $I / \#U = 2 \Rightarrow U = \{a, b\} \Rightarrow$ tomo $x = a$, $y = b \Rightarrow \neg a = b \wedge \forall z \in U (z = a \vee z = b) \Rightarrow V_I(\alpha) = 1$.

OBSERVACION

Si α es un enunciado $\Rightarrow V_{I,v}(\alpha) = V_{I,w}(\alpha)$, $\forall v, w$ valuacion i.e. el valor de verdad es independiente de la valuacion.

EJEMPLOS

Sea $I = \{\mathbb{Z}, 0, x+y, \{(x,y) / x \equiv y(z)\}\}$.

Defino $\alpha = \exists x_1 \, \forall x_2 \, P(x_1, x_2) \Rightarrow \alpha$ es enunciado.

Sea v valuacion, $V_{I,v}(\alpha) = 1 \Leftrightarrow \exists a \, \forall b \;\, a \equiv b(z)$ FALSO pues basta tomar $b = a+1 \Rightarrow \forall v$ valuacion, $V_{I,v}(\alpha) = 0$.