Ejercicio 1

martes, 15 de junio de 2021 07:47 a. m.

Sea L un lenguaje de 1er orden con igualdad y un símbolo de función f^2. Dadas las interpretaciones:

$I_1 = (\mathbb{R}, \cdot)$, *siendo* $\cdot$ *el producto usual*

$I_2{}^a = (\mathbb{R}, \otimes_a)$, *siendo* $x \otimes_a y = axy$

Decidir para cada $a \in \mathbb{R}$, *si* $I_1 \simeq I_2{}^a$. *Justificar*

Supongo $g: U_{\mathcal{J}_1} \to U_{\mathcal{J}_2^a}$ iso $\Rightarrow$ g cumple biyectividad, $x=y \iff g(x)=g(y)$ y $g(x\cdot y) = g(x) \otimes g(y)$ $\forall x,y \in \mathbb{R}$.

- $g(0) = g(0\cdot 0) = g(0) \otimes g(0) = a\cdot g(0) g(0) \Rightarrow g(0)(1 - ag(0)) = 0 \Rightarrow g(0) = 0 \vee g(0) = \frac{1}{a}$
- $g(1) = g(1\cdot 1) = g(1) \otimes g(1) = ag(1)\cdot g(1) \Rightarrow g(1)(1 - ag(1)) = 0 \Rightarrow g(1) = 0 \vee g(1) = \frac{1}{a}$
- $g(0) = g(n\cdot 0) = g(n) \otimes g(0) = ag(n) g(0) \Rightarrow g(0)(1 - ag(n)) = 0 \Rightarrow g(0) = 0 \vee \underleftrightarrow{g(n) = \frac{1}{a}}$

ABS! $\forall n$ pues g es iny

$\left(\therefore g(0) = 0 \underset{\substack{g(1)\neq 0 \\ g \text{ iny}}}{\Rightarrow} g(1) = \frac{1}{a} \Rightarrow a \neq 0\right)$ si g es un iso

Obs: Si $a = 1$ entonces la función interpretada $\otimes_a$ es igual al producto usual de reales.

$\therefore \mathcal{J}_1 = \mathcal{J}_2^1 \Rightarrow \mathcal{J}_1 \approx \mathcal{J}_2^1$ pues es la misma interpretación y ser isomorfos es una relación de equivalencia y por tanto reflexiva.

—— o ——

- Si $a \neq 0 \wedge a \neq 1$ (notemos que en realidad es válido cuando $a = 1$ (id))

Propongo $F: \mathbb{R} \to \mathbb{R} / F(x) = \frac{x}{a}$. Veamos que F es un iso de $\mathcal{J}_1$ en $\mathcal{J}_2^a$

1) BIYECTIVIDAD:

iny_ Si $F(x) = F(y) \Rightarrow \frac{x}{a} = \frac{y}{a} \Rightarrow x = y$ $\therefore$ F es iny.

sobrey_ Sea $y \in \mathbb{R}$, tomo $ay \in \mathbb{R} \Rightarrow F(ay) = \frac{ay}{a} = y$ $\therefore$ F es sobrey.

$\therefore$ F es biy.

2) CONSTANTES: $\mathcal{C} = \emptyset$

3) FUNCIONES: qvq $F(x\cdot y) = F(x) \otimes F(y)$

- _ $F(xy) = \frac{xy}{a} = a \frac{x}{a} \frac{y}{a} = F(x) \otimes F(y)$ ✓

4) PREDICADOS: qvq $x = y \iff F(x) = F(y)$

$\Rightarrow$) Se cumple pues F es función.

$\Leftarrow$) Se cumple pues F es iny ✓

$\therefore$ F es un iso de $\mathcal{J}_1$ en $\mathcal{J}_2^a$ $\forall a \neq 0 \Rightarrow \mathcal{J}_1 \approx \mathcal{J}_2^a$ $\forall a \neq 0$. Si $a = 0$ llegamos a una división por cero.

EDIT: cualquier cosa hiciste acá Tomás! Te faltó analizar a=0 y te bajaron 1 punto! (para que los lectores de este pdf no se confundan)

Ejercicio 2

martes, 15 de junio de 2021 10:27 a. m.

PREGUNTA 2 **10 puntos** Guardado

Sea L un lenguaje de 1er orden con igualdad, dos símbolos de función f^2, g^2, un símbolo de constante y un símbolo de predicado P^1. Dada la siguiente fórmula

$$\alpha = \forall x\,(P^1(x) \to \exists y\,(P^1(y) \wedge f^2(x,y) = c \wedge g^2(x,c) = c))$$

Dar una interpretación que la haga verdadera y otra que la haga falsa. Ambas con universos infinitos. Se pide que las dos interpretaciones coincidan en todo salvo en el universo o en algún elemento. Justificar.

Para la barra de herramientas, presione ALT+F10 (PC) o ALT+FN+F10 (Mac).

Párrafo Arial 14px

Nombramos β_1 a P^1(X) y β_2 a todo lo que sigue después en la implicación, por comodidad.

1) Pensando en una interpretación que haga verdadera la fórmula, basta con que no exista ningún elemento que cumpla P^1(X), así pues el antecedente de la implicación es falso, resultando que esta sea verdadera.

Propongo entonces la interpretación I_1 = (Naturales, +, *, 0, {x / x es un natural que no tiene un número menor que el y x!=0}).

Así V_I_1(α) = 1 <-> min{1-V_I_1(β_1), V_I_1(β_2)} = 1 ∀x, pero V_I_1(β_1)=0 ∀x pues el 0 es el mínimo de los naturales pero x!=0 para que pertenezca al predicado <-> min{1-0, V_I(β_2)} = 1 ∀x es verdadero, y por tanto la interpretación I_1 hace verdadera a la fórmula, es un modelo.

2) Ahora necesito una interpretación que la haga falsa. Veamos:

Propongo ahora la interpretación I_2 = (Naturales, *, +, 3, {x / x es par})

Interpreto α: ∀x (Si x es par -> ∃y par / x*y=3 ∧ x+3=3)

V_I_2(α)=0 pues, si x es par, sabemos que existe un y par (otro o el mismo), pero par*par es par, entonces es absurdo que x*y=3 pues 3 es impar. Basta tomar por ejemplo x=2 entonces no existe y par tal que 2*y=3

P

231 PALABRAS PATROCINADO POR TINY

EDIT: Como la cagué en este ejercicio, me pusieron MAL directamente porque leí la consigna para el culo, tienen que coincidir en todo salvo en el universo o en algún elemento. Moraleja: lean bien las consignas…

Ejercicio 3

martes, 15 de junio de 2021 07:48 a. m.

Sea $f: \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ definida de la siguiente manera:

$$f(n+1) = \begin{cases} (f(n)+2)^2 & \text{si } n+1 \text{ es par} \\ f(n)^2(f(n)+1)^3 & \text{si } n+1 \text{ es impar} \end{cases}$$

$f(0) = 1$

Probar que f es recursiva primitica mediante un esquema recursivo. Pueden usar que las funciones producto, potencia y suma son RP. Las mismas si las usa debe definirlas. Y si usa otras tienen que demostrar que son RP aunque ya lo hayamos hecho en clase. Justificar

Definiciones:

- $suma: \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N} / suma(x,y) = x+y \to$ RP dato.
- $prod: \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N} / prod(x,y) = x \cdot y \to$ RP dato.
- $\alpha: \mathbb{N} \to \mathbb{N} / \alpha(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x=0 \\ 0 & \text{si } x \neq 0 \end{cases} \to$ Lo pruebo aparte.
- $suc: \mathbb{N} \to \mathbb{N} / suc(x) = x \to$ inicial $\to$ RP.
- $\pi_j^n: \mathbb{N}^n \to \mathbb{N} / \pi_j^n(x_1, \dots, x_n) = x_j \quad 1 \leq j \leq n. \to$ inicial $\to$ RP.
- $cero: \mathbb{N} \to \mathbb{N} / cero(x) = 0 \to$ inicial $\to$ RP.
- $par: \mathbb{N} \to \mathbb{N} / par(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \text{ es par} \\ 0 & \text{si no} \end{cases} \to$ Lo pruebo aparte.

— o —

Veamos que f es RP por medio de un ERI:

- $f(0) = 1 \in \mathbb{N}$ ✓
- $f(n+1) = \begin{cases} (f(n)+2)^2 & \text{si } n+1 \text{ es par} \\ f(n)^2(f(n)+1)^3 & \text{si } n+1 \text{ es impar} \end{cases} = H(n, f(n))$ quiero, con H RP.

Entonces defino $H: \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N} / H(x,y) = (y+2)^2 \cdot par(x+1) + y^2 \cdot (y+1)^3 \cdot par(x)$

$\Rightarrow H = suma \circ (prod \circ (prod \circ (suc \circ suc \circ \pi_2 \times suc \circ suc \circ \pi_2) \times par \circ suc \circ \pi_1) \times \dots$

$\dots prod \circ (prod \circ (prod \circ (prod \circ (suc \circ \pi_2 \times suc \circ \pi_2) \times suc \circ \pi_2) \times prod \circ (\pi_2 \times \pi_2)) \times par \circ \pi_1))$

$\therefore$ H es RP por comp. de funciones RP's (prod, suma, π_j, suc, par*)

Obs: no usé la potencia para no definir las funciones constantes h_j.

$\therefore$ f es RP pues se obtuvo por ERI a partir de H que es RP.

* Ahora probemos que la función par es RP para que lo anterior tenga validez:

- $par: \mathbb{N} \to \mathbb{N} / par(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \text{ es par} \\ 0 & \text{si no} \end{cases}$

- $par(0) = 0 \in \mathbb{N}$ ✓
- $par(x+1) = \begin{cases} 1 & \text{si } x+1 \text{ es par} \\ 0 & \text{si no} \end{cases} = \begin{cases} 1 & \text{si } x \text{ es impar} \\ 0 & \text{si } x \text{ es par} \end{cases} = H(x, par(x))$ quiero, con H RP.

Defino $H: \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N} / H(x,y) = \alpha(y) \Rightarrow H = \alpha \circ \pi_2 \Rightarrow$ H es RP por comp. de funciones RP's (α*, π_j)

$\therefore$ par es RP pues se obtuvo por ERI a partir de H que es RP.

* Ahora probemos que la función α es RP para que lo anterior tenga validez:

- $\alpha: \mathbb{N} \to \mathbb{N} / \alpha(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x=0 \\ 0 & \text{si } x \neq 0 \end{cases}$

Obs: para no seguir definiendo más funciones, en vez de hacerlo por comp. lo hago por ERI, queda raro pero bueno. se me ocurre así ahora mismo.

- $\alpha(0) = 1 \in \mathbb{N}$ ✓

- $\alpha(x+1) = H(x, \text{por}(x))$

quiero, con H RP. pero $H: \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N} / H(x,y) = \text{cero}(x) \Rightarrow H = \text{cero} \circ \pi_1$

$\Rightarrow H$ es RP por comp. de funciones RP's (iniciales).

$\therefore$ α es RP pues se obtuvo por ERI a partir de H que es RP.

Ejercicio 4

martes, 15 de junio de 2021 10:27 a. m.

PREGUNTA 4

10 puntos ✓ Guardado

Sea L un lenguaje de primer orden con la siguiente interpretación:

$I = (\mathbb{Z}, P_I = \{x: x \text{ es múltiplo de } 4\}, Q_I = \{x: x \text{ es par}\}, R_I = \{(x,y): x \perp y\})$

Decir que conjunto expresan las siguientes fórmulas:

1) $\alpha(x) = \forall y\,(P(x) \wedge Q(y) \wedge \neg R(x,y))$
2) $\beta(x) = \forall y\,((P(x) \wedge Q(y)) \rightarrow \neg R(x,y))$

Justificar

Para la barra de herramientas, presione ALT+F10 (PC) o ALT+FN+F10 (Mac).

Párrafo Arial 14px

1) Interpreto α(x): ∀y (x es múltiplo de 4 ∧ y es par ∧ x no es coprimo con y)

V_I(α(x))=1 <-> ∀y (x es múltiplo de 4 ∧ y es par ∧ x no es coprimo con y). Esto no se cumple para ningún x, pues es falso que ∀y, y es par. Por lo tanto la fórmula α(x) expresa al vacío ya que V_I(α(x))=0 ∀x.

2) Interpreto β(x): ∀y (si x es múltiplo de 4 ∧ y es par entonces x no es coprimo con y)

V_I(β(x))=1 <-> ∀y (si x es múltiplo de 4 ∧ y es par entonces x no es coprimo con y). Si el antecedente es falso entonces la implicación es verdadero, por tanto para cualquier x que no sea múltiplo de 4 se tiene que V_I(β(x))=1. Por otra parte, si el antecedente es verdadero entonces tenemos que x es múltiplo de 4, y es par, y esto debe implicar que x no es coprimo con y, esto también es cierto pues si x es múltiplo de 4 e y es par entonces comparten al 2 como divisor, entonces no son coprimos. Por lo tanto la fórmula β(x) expresa a Z.

Esto también se puede ver con los valores de verdad de las fórmulas, pero dadas las circunstancias se hace una sopa de letras.

P 238 PALABRAS PATROCINADO POR TINY

Ejercicio 5

martes, 15 de junio de 2021 10:27 a. m.

10 puntos ✓ Guardado

PREGUNTA 5

Dado el siguiente programa al que llamamos P:

$IF\ X_1 \neq 0\ GOTO\ A_1$
$Y \leftarrow Y + 1$
$GOTO\ E_1$
$[A_1]\ X_1 \leftarrow X_1 + 1$
$IF\ X_1 \neq 0\ GOTO\ A_1$

1) Decir qué función computa P.
2) Decir si la función que computa P es computable o parcialmente computable.
3) Decir si $g : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N},\ tal\ que\ g(x) = Halt(x,\ \#P)$ es computable.

Justificar

Para la barra de herramientas, presione ALT+F10 (PC) o ALT+FN+F10 (Mac).

Párrafo Arial 14px

1) Cuando la entrada es X1=0 entonces el programa termina retornando Y=1, si la entrada es distinto de 0, X1!=0 entonces la primera instrucción nos lleva a la etiqueta A1, manteniendo al programa en un loop infinito. Por lo tanto la función que computa P se define como f:N->N / f(x) = 1 si x=0
↑ si x!=0

2) Se observa que la función no está definida para todo su dominio por lo tanto es parcialmente computable.

3) Por definición de Halt, Halt(x, #P)=1 si el programa de código P termina ante la entrada x, y Halt(x, #P)=0 si el programa de código P no termina ante la entrada x. Sabemos que el programa termina sólo ante la entrada x=0, por lo que podemos reescribir a g como g(x) = 1 si x=0
0 si x!=0
Notamos entonces que g se comporta como la función α que sabemos que es RP pues ya fue probada en un ejercicio de la práctica. Entonces como g=α -> g es RP pues α es RP

P 181 PALABRAS PATROCINADO POR TINY