EJERCICIO 150 : 4)

Sea $\mathcal{L}$ de 1° orden con $=$ y un símbolo de función binaria (f^2).
Sea $\mathcal{I} = (\mathbb{R}, \cdot)$

A) Demostrar que $A = \mathbb{R} - \{1, -1, 0\}$ es expresable. $(B = \{1, -1, 0\})$.

- Propongo $\alpha_0(x) = \forall y \; f^2(x,y) = x$. Veamos que distingue al 0.

$V_{\mathcal{I}}(\alpha_0(x)) = 1 \iff \forall y \; x \cdot y = x \iff x = 0$.

- Propongo $\alpha_1(x) = \forall y \; f^2(x,y) = y$. Veamos que distingue al 1.

$V_{\mathcal{I}}(\alpha_1(x)) = 1 \iff \forall y \; x \cdot y = y \iff x = 1$.

- Propongo $\alpha_{-1}(x) = \forall y \left(f^2(x, f^2(x,y)) = y \wedge \neg \alpha_1(x) \right)$. Veamos que distingue al -1.

$V_{\mathcal{I}}(\alpha_{-1}(x)) = 1 \iff \forall y \; x \cdot x \cdot y = y \wedge x \neq 1 \iff x = -1$.

- Propongo $\alpha_B(x) = ((\alpha_0(x) \vee \alpha_1(x)) \vee \alpha_{-1}(x))$. Veamos que expresa a B.

$V_{\mathcal{I}}(\alpha_B(x)) = 1 \iff x = 0 \vee x = 1 \vee x = -1 \iff x \in B$.

Ahora bien, por ej. de la práctica sabemos que el universo U es expresable, y que si un conjunto X es expresable, entonces U - X también lo es.

$\therefore$ Como B es expresable $A = \mathbb{R} - B$ también lo es.

B) Exhibir infinitos isomorfismos de $\mathcal{I}$ en $\mathcal{I}$. Justificar.

Propongo $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \,/\, f_n(x) = x^n$. donde $n \in \{k \in \mathbb{N} \,/\, k \text{ es impar}\} = IMPAR$

Si estas funciones fuesen un isomorfismo listo, pues IMPAR es un conjunto infinito (esto creo que no hace falta demostrarlo pero sería verificar la biyectividad de $f: \mathbb{N} \to IMPAR \,/\, f(x) = 2x+1$).

Veamos que son isomorfismos:

1) BIYECTIVIDAD :

iny - Si $f_n(x) = f_n(y) \Rightarrow x^n = y^n \Rightarrow \sqrt[n]{x^n} = \sqrt[n]{y^n} \Rightarrow x = y$ ✓

sobrey - Sea $x \in \mathbb{R} \Rightarrow$ Basta tomar $\sqrt[n]{x} \in \mathbb{R} \Rightarrow f_n(\sqrt[n]{x}) = x$ ✓

$\therefore$ f_n es biy.

2) $\varphi = \emptyset$.

3) FUNCIONES:

qvq $f_n(x\cdot y) = f_n(x)\cdot f_n(y)$.

$f_n(x\cdot y) = (xy)^n = x^n\cdot y^n = f_n(x)\cdot f_n(y)$ ✓.

4) PREDICADOS:

qvq $x = y \iff f_n(x) = f_n(y)$ $x, y \in \mathbb{R}$.

$\Rightarrow$) Se cumple pues f_n es función. $\Leftarrow$) Se cumple pues f_n es iny ✓.

$\therefore$ f_n es un iso $\Rightarrow$ $\exists$ inf iso de $\mathcal{J}$ en $\mathcal{J}$.

EJERCICIO DEF: 2).1_

Función recursiva primitiva: (RP)

Una función es RP si es inicial o se obtiene aplicando finitas operaciones válidas a funciones iniciales (se muestran abajo).
Operaciones válidas: composición, ERI, ERII.

Funciones iniciales:

- cero: $\mathbb{N} \to \mathbb{N}$ / $cero(x) = 0$.
- suc: $\mathbb{N} \to \mathbb{N}$ / $suc(x) = x+1$.
- $\pi_i^j : \mathbb{N}^j \to \mathbb{N}$ / $\pi_i^j(x_1, \dots, x_j) = x_i$ $1 \le i \le j$ (proyección).

EJERCICIO DEF: 2).2_

Esquema recursivo tipo II: (ERII)

Sea $g: \mathbb{N}^n \to \mathbb{N}$, $h: \mathbb{N}^{n+1} \to \mathbb{N}$, $f: \mathbb{N}^{n+2} \to \mathbb{N}$ funciones.
Decimos que h se obtiene a partir de un ERII por g y f si h se puede escribir como:

$$\begin{cases} h(x_1, \dots, x_n, 0) = g(x_1, \dots, x_n) \\ h(x_1, \dots, x_n, y+1) = f(x_1, \dots, x_n, y, h(x_1, \dots, x_n, y)) \end{cases}$$

EJERCICIO DEMO: 1)

Teorema de la deducción (versión semántica):

$$(\alpha \to \beta) \in C(\Gamma) \iff \beta \in C(\Gamma \cup \{\alpha\}).$$

$\Rightarrow$) Si $(\alpha \to \beta) \in C(\Gamma) \Rightarrow (v(\Gamma) = 1 \Rightarrow v(\alpha \to \beta) = 1)\ \forall v$ val. ①

Supongo w val / $w(\Gamma \cup \{\alpha\}) = 1$, qpq $w(\beta) = 1$. (no me interesa si $w(\Gamma \cup \{\alpha\}) = 0$)

Si $w(\Gamma \cup \{\alpha\}) = 1 \Rightarrow w(\Gamma) = 1 \wedge w(\alpha) = 1 \overset{①}{\Rightarrow} w(\alpha \to \beta) = 1 \wedge w(\alpha) = 1.$

Pero $w(\alpha \to \beta) = \max\{\underbrace{1 - w(\alpha)}_{0}, w(\beta)\} = 1 \Rightarrow w(\beta) = 1$

$\therefore\ \beta \in C(\Gamma \cup \{\alpha\}).$

$\Leftarrow$) Si $\beta \in C(\Gamma \cup \{\alpha\}) \Rightarrow (v(\Gamma \cup \{\alpha\}) = 1 \Rightarrow v(\beta) = 1)\ \forall v$ val.

Supongo w val / $w(\Gamma) = 1$, qpq $w(\alpha \to \beta) = 1$ (no me interesa si $w(\Gamma) = 0$).

c1) $w(\alpha) = 0 \Rightarrow w(\alpha \to \beta) = \max\{\underbrace{1 - w(\alpha)}_{1}, w(\beta)\} = 1$ ✓

c2) $w(\alpha) = 1 \Rightarrow w(\Gamma \cup \{\alpha\}) = 1 \Rightarrow w(\beta) = 1$

$\Rightarrow w(\alpha \to \beta) = \max\{1 - w(\alpha), \underbrace{w(\beta)}_{1}\} = 1$ ✓

$\therefore\ (\alpha \to \beta) \in C(\Gamma).$

EJERCICIO CARDINALIDAD: 3)

¿$\#X$? $X = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} X_n$ / $X_n \sim (0,1) \Rightarrow \#X_n = c$ (conocemos $\#(0,1)$).

1) $X_i \subseteq X \Rightarrow \#X_i \leq \#X \Rightarrow \#X \geq c$ (para algún $i \in \mathbb{N}$, es decir con que uno esté contenido en X me basta para definir la cota inferior).

2) qvq $\#X \leq c$:

Como $X_n \sim (0,1) \Rightarrow \exists\ f_n : (0,1) \to X_n$ biy $\forall n \in \mathbb{N}$.

Defino $G : (0,1) \to X$ / $G(x) = f_n(x)$ y tomo n de tal manera que $f_n(x) \notin Im(G)$, de esta manera es sobrey. ✓ (todavía).

sobrey.

Sea $x \in X$ qvq $\exists\ y \in (0,1)$ / $G(y) = x$.

Tomo $y = f_n^{-1}(x) \Rightarrow G(f_n^{-1}(x)) = f_n(f_n^{-1}(x)) = x$ (f_n biy $\Rightarrow \exists\ f_n^{-1}$).

$\therefore\ \#X \leq c \Rightarrow$ Por t. de Bernstein y las anteriores conclusiones $\#X = c$.