1

Lógica Proposicional: Semántica

DEFINICION 1

⚠ 0 = FALSO y 1 = VERDADERO

Una función $v: FORM \to \{0;1\}$ se llama valuación si cumple:

1. $v(\neg\alpha) = 1 - v(\alpha)$
2. $v(\alpha \wedge \beta) = \min\{v(\alpha), v(\beta)\}$
3. $v(\alpha \vee \beta) = \max\{v(\alpha), v(\beta)\}$
4. $v(\alpha \to \beta) = \max\{1 - v(\alpha), v(\beta)\}$

EJEMPLO

$v: FORM \to \{0;1\} / v(\alpha) = 1$ NO es valuaº pues $v(p_i) = 1$ y $v(\neg p_i) = 1$ PERO no verifica $v(\neg p_i) = 1 - v(p_i)$

TEOREMA 1

Dada $f: VAR \to \{0;1\} \Rightarrow \exists!$ valuación $v: FORM \to \{0;1\} / v$ extiende a f i.e. $v(p_j) = f(p_j)$, $\forall p_j \in VAR$ ó $v|_{VAR} = f$

Otra forma: $v, \omega: FORM \to \{0;1\}$ son valuaciones / $v|_{VAR} = \omega|_{VAR} \Rightarrow v = \omega$

DEMOSTRACION

Defino $F_m = \{\alpha \in F / c(\alpha) \leq m\} \Rightarrow F_0 = VAR$, $F_1 = VAR \cup \{\alpha \in F / c(\alpha) = 1\} \Rightarrow F_0 \subseteq F_1 \subseteq F_2 \dots \Rightarrow FORM = \bigcup_{m=0}^{\infty} F_m$

⇒ Definimos la proposición $P(m)$

Vamos a probar x inducº en m q $\exists!$ función $v_m: F_m \to \{0;1\} / v_m$ extiende a f y v_m cumple 1, 2, 3 y 4 de la definiº de valuación.

Caso base:

$v_0: F_0 \to \{0;1\} / v_0(p_j) = f(p_j) \Rightarrow v_0$ extiende a f de forma única y cumple 1, 2, 3 y 4 de la definiº de valuación xq no hay conectivos.

Paso recursivo:

H) $P(k) / k \leq m$

T) $P(m+1)$

Defino $v_{m+1}: F_{m+1} \to \{0;1\}$

1. Sea $\alpha \in F_{m+1} / c(\alpha) \leq m$, defino $v_{m+1}(\alpha) = v_m(\alpha)$. Como $c(\alpha) \leq m \Rightarrow \alpha$ tmb $\in F_m$ y por H), v_m queda bien definida. Luego, tmb por H), v_m es la única función $v_m: F_m \to \{0;1\}$ q extiende a f y cumple las 4 condiciones de valuación ⇒ NO hay otra manera de definir $v_m \Rightarrow v_{m+1}$ es única.

2. Sea $\alpha \in F_{m+1} / c(\alpha) = m+1 \Rightarrow$ tenemos 4 posibilidades

i. $\alpha = \neg\beta \Rightarrow$ defino $v_{m+1}(\alpha) = 1 - v_{m+1}(\beta)$ p/ q cumpla la condiº 1. Luego, como $c(\beta) = c(\alpha) - 1 = m+1-1 = m \Rightarrow$ por H), $\exists!\, v_m(\beta) \Rightarrow v_{m+1}(\neg\beta) = 1 - v_m(\beta)$ extiende a f pues está definida por v_m q a su vez extiende a f, es única xq no hay otra forma de definirlo[1] y cumple las condiciones xq lo forzamos.

[1] $v_{m+1}(\neg\beta) = 1 - v_{m+1}(\beta)$ no se puede definir de otra manera xq tiene q cumplir c/ las condiciones de valuación. Luego, $v_{m+1}(\neg\beta) = 1 - v_m(\beta)$ tmp se puede def de otra manera xq sino v_m no sería única y por H), sabemos q es !.

ii. $\alpha = (\beta_1 \wedge \beta_2)$, $\beta_1, \beta_2 \in F \Rightarrow c(\alpha) = m+1 = c(\beta_1) + c(\beta_2) + 1 \Rightarrow c(\beta_1) + c(\beta_2) = m \Rightarrow c(\beta_1) \leq m$ y $c(\beta_2) \leq m$

Defino $v_{m+1}(\alpha) = \min\{v_{m+1}(\beta_1), v_{m+1}(\beta_2)\}$ p/ q cumpla la condiº 2. Como $\beta_1, \beta_2 \in F_m$, entonces, por H), $\exists\, v_m(\beta_1)$ y $v_m(\beta_2)$ ⇒ defino $v_{m+1}(\alpha) = v_{m+1}(\beta_1 \wedge \beta_2) = \min\{v_m(\beta_1), v_m(\beta_2)\}$ q extiende a f, es única y cumple las condiciones de valuaº x lo q explicamos en el caso anterior.

iii. $\alpha = (\beta_1 \vee \beta_2)$, $\beta_1, \beta_2 \in F \Rightarrow c(\alpha) = m+1 = c(\beta_1) + c(\beta_2) + 1 \Rightarrow c(\beta_1) + c(\beta_2) = m \Rightarrow c(\beta_1) \leq m$ y $c(\beta_2) \leq m$

Defino $v_{m+1}(\alpha) = v_{m+1}(\beta_1 \vee \beta_2) = \max\{v_{m+1}(\beta_1), v_{m+1}(\beta_2)\}$ p/ q cumpla las condiciones de valuaº. Como $\beta_1, \beta_2 \in F_m$, entonces, por H), $\exists\, v_m(\beta_1)$ y $v_m(\beta_2)$ ⇒ defino $v_{m+1}(\beta_1 \vee \beta_2) = \max\{v_m(\beta_1), v_m(\beta_2)\}$ q extiende a f, es única y cumple las condiciones de valuaº.

iv. $\alpha = (\beta_1 \to \beta_2)$, $\beta_1, \beta_2 \in F \Rightarrow c(\alpha) = m+1 = c(\beta_1) + c(\beta_2) + 1 \Rightarrow c(\beta_1) + c(\beta_2) = m \Rightarrow c(\beta_1) \leq m$ y $c(\beta_2) \leq m$

Defino $v_{m+1}(\alpha) = v_{m+1}(\beta_1 \to \beta_2) = \max\{1 - v_{m+1}(\beta_1), v_{m+1}(\beta_2)\}$ p/ q cumpla las condiciones de valuación. Luego, como $\beta_1, \beta_2 \in F_m \Rightarrow \exists\, v_m(\beta_1)$ y $v_m(\beta_2)$ ⇒ defino $v_{m+1}(\beta_1 \to \beta_2) = \max\{1 - v_m(\beta_1), v_m(\beta_2)\}$ q extiende a f, es única y cumple las condiciones de valuación.

CONCLUSION

Defino $v: FORM \to \{0;1\} / v(\alpha) = v_m(\alpha)$ c/ $c(\alpha) = m$ es una valuaº q extiende a f pues v_m extiende a f, cumple las condiciones de valuaº xq v_m tmb las cumple y es ! xq si no lo fuera, habría otra manera de definir v_m pero acabamos de probar q v_m es única.

EJEMPLO

Sea $f: VAR \to \{0;1\} / f(p_j) = \begin{cases} 1 & \text{si } j \text{ par} \\ 0 & \text{si } j \text{ impar} \end{cases}$ y sea v la valuaº q extiende a f

1. $v(p_1 \to (p_2 \vee p_4)) = \max\{1 - v(p_1), v(p_2 \vee p_4)\} = \max\{1 - f(p_1), \max\{v(p_2), v(p_4)\}\} = \max\{1 - f(p_1), \max\{f(p_2), f(p_4)\}\} = \max\{1, \max\{1, 1\}\} = \max\{1, 1\} = 1$

2. $v(p_1) = f(p_1) = 0$

DEFINICION 2

"Clasificacion semantica de formulas"

Obs: 2 no es lo opuesto de 1

Sea $\alpha \in F$.

1. Decimos q α es tautologia si $v(\alpha)=1$ $\forall v$ valuacion
2. Decimos q α es contradiccion si $v(\alpha)=0$ $\forall v$ valuacion
3. Decimos q α es una contingencia si no es contradic° ni tautologia i.e. $\exists$ v valuo°/ $v(\alpha)=1$ y $\exists$ ω valuo°/ $\omega(\alpha)=0$

EJEMPLO

Clasificar las siguientes formulas.

1. $\alpha = (p_1 \wedge \neg p_1)$ y sea v valuacion.

Caso 1: $v(p_1)=1 \Rightarrow v(\alpha) = \min\{v(p_1), 1-v(p_1)\} = 0$

Caso 2: $v(p_1)=0 \Rightarrow v(\alpha) = \min\{v(p_1), 1-v(p_1)\} = 0$

↳ $v(\alpha)=0$ $\forall v$ valuacion $\Rightarrow \alpha$ es contradiccion

2. $\alpha = (p_1 \wedge p_2)$

- Defino $f: VAR \to \{0;1\} / f(p_j) = 1$ $\forall j$ y sea v_f la ! valuo° q extiende a f $\Rightarrow v_f(\alpha) = \min\{v_f(p_1), v_f(p_2)\} = 1$
- Defino $g: VAR \to \{0;1\} / g(p_j) = \begin{cases} 1 & \text{si } j=1 \\ 0 & \text{sino} \end{cases}$ y sea v_g la ! valuo° q extiende a f $\Rightarrow v_g(\alpha) = \min\{v_g(p_1), v_g(p_2)\} = 0$

↳ $\exists$ v_f, v_g valuo°/ $v_f(\alpha)=1$ y $v_g(\alpha)=0 \Rightarrow \alpha$ es contingencia

TEOREMA 2

Sea $\alpha \in F$/ $var(\alpha) = \{p_j \in VAR / p_j$ aparece en $\alpha\}$. Sean v y ω valuaciones tales q $^{v}|_{var(\alpha)} = {}^{\omega}|_{var(\alpha)}$ i.e. $v(p_j) = \omega(p_j)$ $\Rightarrow v(\alpha) = \omega(\alpha)$

DEMOSTRACION

Por induccion es $c(\alpha)$.

Caso base:

$c(\alpha)=0 \Rightarrow \alpha = p_j \in VAR$. Sean v y ω valuaciones / $^{v}|_{var(\alpha)} = {}^{\omega}|_{var(\alpha)} \Rightarrow v(p_j) = \omega(p_j) \Rightarrow v(\alpha) = \omega(\alpha)$

Paso recursivo:

H) Sea $\alpha \in F / c(\alpha) \leq n$. Sean υ y ω valuaciones/ $^{v}|_{var(\alpha)} = {}^{\omega}|_{var(\alpha)} \Rightarrow \upsilon(\alpha) = \omega(\alpha)$

T) Sea $\alpha \in F / c(\alpha) = n+1$. Sean υ y ω valuaciones/ $^{v}|_{var(\alpha)} = {}^{\omega}|_{var(\alpha)} \Rightarrow \upsilon(\alpha) = \omega(\alpha)$

Sea $\alpha \in F / c(\alpha) = n+1 > 0$. Sean υ y ω val / $^{v}|_{var(\alpha)} = {}^{\omega}|_{var(\alpha)}$.

Caso 1

$\alpha = \neg\beta$, $\beta \in F \Rightarrow c(\beta) = c(\alpha) - 1 = n$. Luego, como $var(\alpha) = var(\beta) \Rightarrow {}^{v}|_{var(\beta)} = {}^{\omega}|_{var(\beta)}$ y como $c(\beta) = n \Rightarrow$ por H), $v(\beta) = \omega(\beta) \Rightarrow 1 - v(\beta) = 1 - \omega(\beta) \Rightarrow v(\alpha) = \omega(\alpha)$.

Caso 2

$\alpha = (\beta_1 \wedge \beta_2)$, $\beta_1, \beta_2 \in F \Rightarrow c(\beta_1) + c(\beta_2) + 1 = n+1 \Rightarrow c(\beta_1) + c(\beta_2) = n \Rightarrow 0 \leq c(\beta_1) \leq n$ y $0 \leq c(\beta_2) \leq n$ (1)

Luego, $^{v}|_{var(\alpha)} = {}^{\omega}|_{var(\alpha)}$ y $var(\alpha) = var(\beta_1) \cup var(\beta_2) \Rightarrow {}^{v}|_{var(\beta_1)} = {}^{\omega}|_{var(\beta_1)}$[1] y $^{v}|_{var(\beta_2)} = {}^{\omega}|_{var(\beta_2)}$[1] (2)

[1] Es valido pues $var(\beta_1)$ y $var(\beta_2) \subseteq var(\alpha)$

Con (1) y (2) puedo verificar, por H), q $v(\beta_1) = \omega(\beta_1)$ y $v(\beta_2) = \omega(\beta_2) \Rightarrow v(\alpha) = \min\{v(\beta_1), v(\beta_2)\} = \min\{\omega(\beta_1), \omega(\beta_2)\} = \omega(\alpha)$

Caso 3

$\alpha = (\beta_1 \vee \beta_2)$, $\beta_1, \beta_2 \in F \Rightarrow c(\beta_1) + c(\beta_2) + 1 = n+1 \Rightarrow c(\beta_1) + c(\beta_2) = n \Rightarrow 0 \leq c(\beta_1) \leq n$ y $0 \leq c(\beta_2) \leq n$ (1)

Luego, $var(\alpha) = var(\beta_1) \cup var(\beta_2)$ y $^{v}|_{var(\alpha)} = {}^{\omega}|_{var(\alpha)} \Rightarrow$ como $var(\beta_1) \subseteq var(\alpha)$ y $var(\beta_2) \subseteq var(\alpha)$ se cumple $^{v}|_{var(\beta_1)} = {}^{\omega}|_{var(\beta_1)}$ y $^{v}|_{var(\beta_2)} = {}^{\omega}|_{var(\beta_2)}$ (2)

Como se cumplen (1) y (2) $\Rightarrow$ por H), $v(\beta_1) = \omega(\beta_1)$ y $v(\beta_2) = \omega(\beta_2) \Rightarrow v(\alpha) = \max\{v(\beta_1), v(\beta_2)\} = \max\{\omega(\beta_1), \omega(\beta_2)\} = \omega(\alpha)$

Caso 4

$\alpha = (\beta_1 \Rightarrow \beta_2)$, $\beta_1, \beta_2 \in F \Rightarrow c(\beta_1) + c(\beta_2) + 1 = n+1 \Rightarrow c(\beta_1) + c(\beta_2) = n \Rightarrow 0 \leq c(\beta_1) \leq n$ y $0 \leq c(\beta_2) \leq n$ (1)

Luego, $var(\alpha) = var(\beta_1) \cup var(\beta_2)$ y $^{v}|_{var(\alpha)} = {}^{\omega}|_{var(\alpha)} \Rightarrow$ como $var(\beta_1) \subseteq var(\alpha)$ y $var(\beta_2) \subseteq var(\alpha)$ se cumple $^{v}|_{var(\beta_1)} = {}^{\omega}|_{var(\beta_1)}$ y $^{v}|_{var(\beta_2)} = {}^{\omega}|_{var(\beta_2)}$ (2)

Como se cumplen (1) y (2), entonces, por H), $v(\beta_1) = \omega(\beta_1)$ y $v(\beta_2) = \omega(\beta_2)$.

$\Rightarrow v(\alpha) = \max\{1 - v(\beta_1), v(\beta_2)\} = \max\{1 - \omega(\beta_1), \omega(\beta_2)\} = \omega(\alpha)$

PROPOSICION 1

$\alpha \in F / (p_1 \to \alpha)$ es tautologia. Si $p_1 \notin var(\alpha) \Rightarrow \alpha$ es tautologia

DEMOSTRACION

⚠ Demostracion muy importante

Obs: v es una val cualquiera

La hipotesis es imprescindible dado q si la saco, la prop es falsa. Basta tomar $\alpha = p_1 \Rightarrow (p_1 \Rightarrow p_1)$ es tautologia PERO α es contingencia.

Sea v val, quiero ver q $v(\alpha) = 1$.

Defino $f: VAR \to \{0;1\} / f(p_j) = \begin{cases} v(p_j) & \text{si } p_j \in var(\alpha) \\ 1 & \text{sino} \end{cases}$ y sea v_f la ! valuo° q extiende a f.

$v_f(p_1 \Rightarrow \alpha) = 1 = \max\{1 - v_f(p_1), v_f(\alpha)\} = \max\{1 - f(p_1), v_f(\alpha)\}$ y $p_1 \notin var(\alpha) \Rightarrow f(p_1) = 1 \Rightarrow \max\{1 - f(p_1), v_f(\alpha)\} = \max\{0, v_f(\alpha)\} = v_f(\alpha) = 1$

Luego, $^{v_f}|_{var(\alpha)} = {}^{v}|_{var(\alpha)}$ xq asi lo definimos $\Rightarrow$ por el teorema 2, $v_f(\alpha) = v(\alpha) \Rightarrow v(\alpha) = 1$

DEFINICION 3

"Equivalencia"

Sean $\alpha, \beta \in F$, decimos q α es equivalente a β i.e. $\alpha \equiv \beta$ si $v(\alpha) = v(\beta)$ $\forall v$ valuacion

Obs: definimos R en F/ $\alpha R \beta$ si $\alpha \equiv \beta$ es de equivalencia

1. $\alpha \equiv \alpha \Rightarrow \alpha R \alpha \Rightarrow$ es reflexiva
2. $\alpha R \beta \Rightarrow \alpha \equiv \beta$ i.e. $v(\alpha) = v(\beta)$ $\forall v$ val $\Rightarrow \beta \equiv \alpha \Rightarrow \beta R \alpha \Rightarrow$ es simetrica
3. $\alpha R \beta \wedge \beta R \gamma \Rightarrow \alpha \equiv \beta \wedge \beta \equiv \gamma \Rightarrow \alpha \equiv \gamma \Rightarrow \alpha R \gamma \Rightarrow$ es transitiva

¿Cuales son los clases de equivalencia?

1. $[(P_1 \wedge \neg P_1)] = \{\alpha \in F / \alpha$ es contradiccion$\}$ ⇒ una clase p/ las tautologias

2. $[(P_1 \vee \neg P_1)] = \{\alpha \in F / \alpha$ es tautologia$\}$ ⇒ una clase p/ las contingencias

3. Infinitas clases p/ las contingencias

EJEMPLO Probar que $P_1 = \neg\neg P_1$

Sea v valuacion ⇒ $v(\neg\neg P_1) = 1 - v(\neg P_1) = 1 - 1 + v(P_1) = v(P_1)$

⇒ $c(\alpha) \neq c(\beta)$ i.e. no son la misma formula — PERO NO son la misma formula pues $P_1 = \alpha$ es una formula de complejidad minima equivalente a $\neg\neg P_1 = \beta$

DEFINICION 4 Una funcion $f: \{0,1\}^n \to \{0,1\}$ se denomina funcion booleana

EJEMPLO Sea $f: \{0,1\}^3 \to \{0,1\} / f(x,y,z) = \begin{cases} 0 & \text{si } x = y \\ 1 & \text{sino} \end{cases}$ ⇒ $f(1,1,0) = 1$, $f(1,0,1) = 0$, $f(1,1,1) = 1$

TEOREMA 3 $\exists$ una funcion biyectiva $F: \{f / f$ es funcion booleana$\} \to FORM/\equiv$

NO vamos la demostracion

Obs: $FORM/\equiv$ es el conj cociente entre FORM y la relacion $\equiv$ en FORM ⇒ conj de clases de eq i.e. tautologia, contradiccion y las ∞ clases de contingencia.

Relacion entre formulas y f. booleanas

1. $\alpha = (P_1 \to P_2)$ ⇒ vincularla c/ una fun° booleana

Defino $f: \{0,1\}^2 \to \{0,1\} / f(0,0) = 1$, $f(0,1) = 1$, $f(1,0) = 0$, $f(1,1) = 1$ ⇒ $f: \{0,1\}^2 \to \{0,1\} / f(x,y) = \begin{cases} 0 & \text{si } x = 1 \wedge y = 0 \\ 1 & \text{sino} \end{cases}$

2. $\alpha = (P_1 \wedge \neg P_2) \to P_3$ ⇒ vincularla c/ una fun° booleana

P_1	0	0	0	1	0	1	1	1
P_2	0	0	1	0	1	0	1	1
P_3	0	1	0	0	1	1	0	1
α	1	1	1	0	1	1	1	1

⇒ $f: \{0,1\}^3 \to \{0,1\} / f(x,y,z) = \begin{cases} 0 & \text{si } x = 1, y = 0, z = 0 \\ 1 & \text{sino} \end{cases}$

3. $f: \{0,1\}^2 \to \{0,1\} / f(x,y) = \begin{cases} 1 & \text{si } x = y \\ 0 & \text{sino} \end{cases}$ ⇒ vincularla c/ una formula

Obs: la formula va ser la disyuncion de tantas formulas como renglones q vayan a parar al 1

x	0	0	1	1
y	0	1	0	1
f(x,y)	1	0	0	1

⇒ $\alpha = (\neg P_1 \wedge \neg P_2) \vee (P_1 \wedge P_2)$

4. $f: \{0,1\}^3 \to \{0,1\} / f(x,y,z) = \begin{cases} 1 & \text{si } x = 1 \\ 0 & \text{sino} \end{cases}$ ⇒ vincularla c/ una formula

x	0	0	0	1	0	1	1	1
y	0	0	1	0	1	0	1	1
z	0	1	0	0	1	1	0	1
f(x,y,z)	0	0	0	1	0	1	1	1

⇒ $\alpha = (P_1 \wedge \neg P_2 \wedge \neg P_3) \vee (P_1 \wedge \neg P_2 \wedge P_3) \vee (P_1 \wedge P_2 \wedge \neg P_3) \vee (P_1 \wedge P_2 \wedge P_3)$

Obs: $\beta = P_1$ ⇒ $\alpha = \beta$ i.e. α es equivalente a P_1

DEFINICION 5 "Conectivos adecuados"

Sea C un conj de conectivos. Sea F_C las formulas q se pueden escribir usando sola$^+$ los conectivos de C ⇒ $F_C = \{$formulas q tienen conectivos de C$\} \cup VAR$. Decimos q C es adecuado si $\forall \alpha \in F, \exists \beta \in F_C / \beta = \alpha$

EJEMPLOS

1. Probar que $C = \{\wedge, \neg\}$ es adecuado

- $(\alpha \vee \beta) \equiv \neg\neg(\alpha \vee \beta) \equiv \neg(\neg\alpha \wedge \neg\beta)$ por Ley de De Morgan
- $(\alpha \to \beta) \equiv (\neg\alpha \vee \beta) \equiv \neg(\neg\neg\alpha \wedge \neg\beta) \equiv \neg(\alpha \wedge \neg\beta)$

Obs: $\alpha \leftrightarrow \beta = (\alpha \to \beta) \wedge (\beta \to \alpha)$

⇒ si hay + conectivos, se entiende mejor PERO es mas facil trabajar c/ menos conectivos

2. $C = \{\wedge, \vee, \neg, \to, \leftrightarrow\}$ es adecuado y tiene + conectivos q el conj trivial

3. Probar que $C = \{\wedge, \to\}$ no es adecuado

Defino $f: VAR \to \{0,1\} / f(P_j) = 1$ y sea v_f la unica val q extiende a f ⇒ veamos q $v_f(\alpha) = 1$ $\forall \alpha \in F_C$

Defino $\tilde{c}(\alpha)$ la cant de apariciones de $\wedge, \to$ en α ⇒ probamos x induc° en $\tilde{c}(\alpha)$

<u>Caso base:</u>

Sea $\alpha \in F_C / \tilde{c}(\alpha) = 0$ ⇒ $\alpha = P_j \in VAR$ ⇒ $v_f(\alpha) = f(P_j) = 1$

<u>Paso recursivo:</u>

$P(k)$ = Sea $\alpha \in F_C / \tilde{c}(\alpha) = k$ ⇒ $v_f(\alpha) = 1$

H) $P(k)$, $k \leq n$

T) $P(n+1)$

Sea $\alpha \in F_C / \tilde{c}(\alpha) = n+1 > 0$

$\boxed{\text{Caso 1}}$ $\alpha = (\beta_1 \wedge \beta_2)$ c/ $\beta_1, \beta_2 \in F_C$ ⇒ $\tilde{c}(\alpha) = \tilde{c}(\beta_1) + \tilde{c}(\beta_2) + = n+1$ ⇒ $\tilde{c}(\beta_1) + \tilde{c}(\beta_2) = n$ ⇒ $0 \leq \tilde{c}(\beta_1) \leq n \wedge 0 \leq \tilde{c}(\beta_2) \leq n$

Por H), $v_f(\beta_1) = v_f(\beta_2) = 1$ ⇒ $v_f(\alpha) = \min\{v_f(\beta_1), v_f(\beta_2)\} = 1$

$\boxed{\text{Caso 2}}$ $\alpha = (\beta_1 \to \beta_2)$ c/ $\beta_1, \beta_2 \in F_C$ ⇒ $\tilde{c}(\alpha) = \tilde{c}(\beta_1) + \tilde{c}(\beta_2) + = n+1$ ⇒ $\tilde{c}(\beta_1) + \tilde{c}(\beta_2) = n$ ⇒ $0 \leq \tilde{c}(\beta_1) \leq n \wedge 0 \leq \tilde{c}(\beta_2) \leq n$

Por H), $Vf(\beta_1) = Vf(\beta_2) = 1 \Rightarrow Vf(\alpha) = \max\{1 - Vf(\beta_1), Vf(\beta_2)\} = \max\{0, 1\} = 1$

$\Rightarrow$ veamos que $Vf(\alpha) = 1 \ \forall \alpha \in Fc$

Ahora, sea $\alpha = (P_1 \wedge \neg P_1) \in F$. Sup q C es adecuado $\Rightarrow \exists \beta \in Fc / \beta \equiv \alpha \Rightarrow Vf(\alpha) = Vf(\beta) = 1$ ABS! pues α es una contradiccion. Lo absurdo vino de suponer q C es adecuado.

Conclusion: C no es adecuado

OBSERVACIONES

C_1, C_2 conjuntos de conectivos

1. C_2 no es adecuado y $C_1 \subseteq C_2 \Rightarrow C_1$ NO es adecuado
2. C_1 no es adecuado y $C_1 \subseteq C_2 \Rightarrow$ NO puedo decir nada acerca de C_2