Álgebra de Boole

DEFINICION : Algebra de Boole

Un algebra de Boole B es un conjunto B en el cual se pueden distinguir dos elementos notados 0 y 1, y hay 3 operaciones $(\vee, \wedge, \neg)$ que verifican las siguientes propiedades:

1. Conmutatividad: $x \wedge y = y \wedge x$; $x \vee y = y \vee x$
2. Asociatividad: $x \wedge (y \wedge z) = (x \wedge y) \wedge z$; $x \vee (y \vee z) = (x \vee y) \vee z$
3. Idempotencia: $x \vee x = x$; $x \wedge x = x$
4. Absorcion: $x \wedge (x \vee y) = x$; $x \vee (x \wedge y) = x$
5. Distributividad doble: $x \wedge (y \vee z) = (x \wedge y) \vee (x \wedge z)$; $x \vee (y \wedge z) = (x \vee y) \wedge (x \vee z)$
6. Elemento neutro: $x \vee 0 = x$; $x \wedge 1 = x$
7. Elemento absorbente: $x \wedge 0 = 0$; $x \vee 1 = 1$
8. Complementacion: $x \vee \neg x = 1$; $x \wedge \neg x = 0$

Ejemplos

1. Sea E un conjunto no vacio $\Rightarrow B = \langle P(E), \wedge = \cap, \vee = \cup, \neg = \text{complemento de conjuntos}, 0 = \emptyset, 1 = E \rangle$
2. $B = \langle \{0,1\}, \wedge, \vee, \neg, 0, 1 \rangle$

PROPIEDAD : Propiedad fundamental de un Algebra de Boole

Sea $B = \langle B, \wedge, \vee, \neg, 0, 1 \rangle$ un algebra de Boole cualquiera: $x \leq y \Leftrightarrow x \wedge y = x \Leftrightarrow x \vee y = y$

Observaciones

1. La relacion $\leq$ es reflexiva, antisimetrica y transitiva
2. $0 \leq x \leq 1$, $\forall x \in B$

DEFINICION: Algebra de Boole de Lindembaum para el calculo proposicional

Sea F = conjuntos de formulas de la logica proposicional $\Rightarrow \alpha R \beta \Leftrightarrow \alpha \equiv \beta$

Obs: R es una relacion de equivalencia

Algebra de Boole de Lindembaum:

$B = \langle F/R, \underline{\wedge}, \underline{\vee}, \underline{\neg}, 0 = [P_1 \wedge \neg P_1], 1 = [P_1 \vee \neg P_1] \rangle$ and $[\alpha]$ y $[\beta] \in F/R$ y $(\underline{\wedge}, \underline{\vee}, \underline{\neg})$ se definen de la siguiente manera:

1. $[\alpha] \underline{\wedge} [\beta] = [\alpha \wedge \beta]$
2. $[\alpha] \underline{\vee} [\beta] = [\alpha \vee \beta]$
3. $\underline{\neg} [\alpha] = [\neg \alpha]$

Obs: B es un algebra de Boole

Ejemplo de clase

$[P_1] = \{P_1, (P_1 \wedge P_1), (P_1 \vee P_1), \ldots\} = \{\alpha \in F / \alpha \equiv P_1\}$

EJERCICIOS DE LA GUIA

Ejercicio 23

Sea B un algebra de Boole. Sea $x \in B$.

1. Demostrar que existe un unico $a \in B / x \cup a = 1$ y $x \cap a = 0$.

Por complementacion: $x \cup \bar{x} = 1$ y $x \cap \bar{x} = 0$

Supongo que existe $b \in B$ y $b \neq \bar{x} / x \cup b = 1$ y $x \cap b = 0$.

$b \overset{1}{=} b \cup 0 \overset{2}{=} b \cup (x \cap \bar{x}) \overset{3}{=} (b \cup x) \cap (b \cup \bar{x}) \overset{4}{=} 1 \cap (b \cup \bar{x}) \overset{5}{=} (x \cup \bar{x}) \cap (b \cup \bar{x}) \overset{6}{=} \bar{x} \cup (x \cap b) \overset{7}{=} \bar{x} \cup 0 \overset{8}{=} \bar{x}$ ABS!

1. $b = b \cup 0$ pues 0 es elemento neutro
2. $b \cup 0 = b \cup (x \cap \bar{x})$ pues $x \cap \bar{x} = 0$ por complementacion
3. $b \cup (x \cap \bar{x}) = (b \cup x) \cap (b \cup \bar{x})$ por propiedad distributiva
4. $(b \cup x) \cap (b \cup \bar{x}) = 1 \cap (b \cup \bar{x})$ pues por hipotesis, $b \cup x = 1$
5. $1 \cap (b \cup \bar{x}) = (x \cup \bar{x}) \cap (b \cup \bar{x})$ pues por complementacion, $x \cup \bar{x} = 1$
6. $(x \cup \bar{x}) \cap (b \cup \bar{x}) = \bar{x} \cup (x \cap b)$ por propiedad distributiva
7. $\bar{x} \cup (x \cap b) = \bar{x} \cup 0$ pues por hipotesis, $\bar{x} \cap b = 0$

$\bar{x} \cup 0 = \bar{x}$ pues 0 es elemento neutro

Conclusion: lo absurdo vino de sup q a no es unico $\Rightarrow$ a es unico y $a = \bar{x}$

2. Demostrar que dados $x, y \in B$ se cumplen las leyes de De Morgan i.e. $\overline{(x \cap y)} = \bar{x} \cup \bar{y}$ y $\overline{(x \cup y)} = \bar{x} \cap \bar{y}$

Obs: $x = \bar{\bar{x}}$ i.e. x es equivalente al complemento de su complementario y $x \cup \bar{x} = 1$; $x \cap \bar{x} = 0$

Propiedad uno: quiero ver que $x \cap y$ es el complementario de $\bar{x} \cup \bar{y}$

1. $(x \cap y) \cup (\bar{x} \cup \bar{y}) = (\bar{x} \cup \bar{y} \cup x) \cap (\bar{x} \cup \bar{y} \cup y)$ por distributividad $= (\bar{y} \cup 1) \cap (\bar{x} \cup 1)$ por complementacion $= 1 \cap 1$ pues 1 es absorvente $= 1$
2. $(x \cap y) \cap (\bar{x} \cup \bar{y}) = (x \cap y \cap \bar{x}) \cup (x \cap y \cap \bar{y})$ por distributividad $= (y \cap 0) \cup (x \cap 0)$ por complementacion $= 0 \cup 0$ pues 0 es absorbente $= 0$

$\Rightarrow$ $x \cap y$ es complementario de $\bar{x} \cup \bar{y}$ $\Rightarrow$ $\bar{x} \cup \bar{y} = \overline{(x \cap y)}$

Propiedad dos: quiero ver que $x \cup y$ es complementario de $\bar{x} \cap \bar{y}$

1. $(x \cup y) \cup (\bar{x} \cap \bar{y}) = (x \cup y \cup \bar{x}) \cap (x \cup y \cup \bar{y})$ por distributividad $= (y \cup 1) \cap (x \cup 1)$ por complementacion $= 1 \cap 1$ pues 1 es absorbente $= 1$
2. $(x \cup y) \cap (\bar{x} \cap \bar{y}) = (\bar{x} \cap \bar{y} \cap x) \cup (\bar{x} \cap \bar{y} \cap y)$ por distributividad $= (\bar{y} \cap 0) \cup (\bar{x} \cap 0)$ por complementacion $= 0 \cup 0$ pues 0 es absorbente $= 0$

$\Rightarrow$ $x \cup y$ es complementario de $\bar{x} \cap \bar{y}$ $\Rightarrow$ $\bar{x} \cap \bar{y} = \overline{(x \cup y)}$

3. Demostrar que $x = \bar{\bar{x}}$

- $x \cup \bar{x} = 1$ y $x \cap \bar{x} = 0$ pues $\bar{x}$ es complementario de x
- $\bar{x} \cup \bar{\bar{x}} = 1$ y $\bar{x} \cap \bar{\bar{x}} = 0$ pues $\bar{\bar{x}}$ es complementario de $\bar{x}$

Luego, $\bar{x} \cup x = \bar{x} \cup \bar{\bar{x}} = 1$ y $\bar{x} \cap x = \bar{x} \cap \bar{\bar{x}} = 0$ $\Rightarrow$ $x = \bar{\bar{x}}$ por unicidad del punto 23.1

Ejercicio 24

Sea B un algebra de Boole. Se define la siguiente relacion sobre B : $x \leq y \Leftrightarrow x \cap y = x$.

1. Demostrar que $x \cap y = x \Leftrightarrow x \cup y = y$.

$\Rightarrow)$ $x \cup y = (x \cap y) \cup y$ por hipotesis $= (x \cup y) \cap (y \cup y)$ por distributividad $= y \cap (x \cup y)$ por idempotencia $= y$ por absorcion

$\Leftarrow)$ $x \cap y = x \cap (x \cup y)$ por hipotesis $= (x \cap x) \cup (x \cap y)$ por distributividad $= x \cup (x \cap y)$ por idempotencia $= x$ por absorcion

2. Demostrar que $\leq$ es

Reflexiva: $x \cup x = x$ $\Rightarrow$ $x \leq x$ $\Rightarrow$ xRx

Antisimetrica: $x \leq y$ e $y \leq x$ $\Rightarrow$ $x \cup y = y$ e $y \cup x = x$ $\Rightarrow$ $y = x \cup y = y \cup x = x$ por conmutatividad $\Rightarrow$ $x = y$

Transitiva: $x \leq y$ e $y \leq z$ $\Rightarrow$ $x \cup y = y$ e $y \cup z = z$ $\Rightarrow$ $z = y \cup z = (x \cup y) \cup z = x \cup (y \cup z)$ por asociatividad $= x \cup z$ $\Rightarrow$ $x \leq z$

3. Demostrar que $\forall x \in B$, $0 \leq x \leq 1$

Esto se debe a que 0 y 1 son elementos absorbentes para $\cap$ y $\cup$ respectivamente.

Ejercicio 25

Sea F el conjunto de formulas de la logica proposicional. Sea R la siguiente relacion sobre F : $\alpha R \beta \Leftrightarrow \alpha \equiv \beta$.

Sea $X = F/R$.

1. Demostrar que R es una relacion de equivalencia. Hallar 5 elementos de la clase de P_1 y 5 elementos de la clase de $(P_1 \vee P_2)$.

Reflexiva: sea $\alpha \in F$, $\alpha \equiv \alpha$ $\Rightarrow$ $\alpha R \alpha$

Simetrica: sean $\alpha, \beta \in F$ / $\alpha R \beta$ $\Rightarrow$ $\alpha \equiv \beta$ $\Rightarrow$ $\beta \equiv \alpha$ $\Rightarrow$ $\beta R \alpha$

Transitiva: sean $\alpha, \beta, \gamma \in F$ / $\alpha R \beta$ y $\beta R \gamma$ $\Rightarrow$ $\alpha \equiv \beta$ y $\beta \equiv \gamma$ $\Rightarrow$ $\alpha \equiv \gamma$ $\Rightarrow$ $\alpha R \gamma$

- $[P_1] = \{ P_1, (P_1 \vee P_1), (P_1 \wedge P_1), \neg\neg P_1, (P_1 \wedge (P_1 \vee P_1)) \}$
- $[P_1 \vee P_2] = \{ (P_1 \vee P_2), \neg\neg(P_1 \vee P_2), ((P_1 \wedge P_1) \vee P_2), (P_1 \vee (P_2 \wedge P_2)), ((P_1 \vee P_1) \vee P_2) \}$

2. Se definen las siguientes operaciones sobre X :

a. $[\alpha] \cup [\beta] = [\alpha \vee \beta]$

b. $[\alpha] \cap [\beta] = [\alpha \wedge \beta]$

c. $\overline{[\alpha]} = [\neg \alpha]$

Demostrar que $\cup$, $\cap$, $\bar{\ }$ estan bien definidos i.e. que no dependen del representante elegido.