2017 1C EJ1

sábado, 12 de junio de 2021 09:37 p. m.

Ejercicio 1. Sea $\mathcal{L}$ un lenguaje de primer orden con igualdad y dos símbolos de función binaria f^2 y g^2. Sea $\mathcal{I} = (\mathbb{Z}, \cdot, +)$. Decir cuántos isomorfismos de $\mathcal{I}$ en $\mathcal{I}$ existen y decidir si todo subconjunto de $\mathbb{Z}$ es expresable.

- $\alpha_0(x) = \forall y \;\; f^2(x,y) = x \implies$ Distingue al 0.
- $\alpha_1(x) = \forall y \;\; f^2(x,y) = y \implies$ Distingue al 1.
- $\alpha_{-1}(x) = \forall y \;\; f^2(y, f(x,x)) = y \;\wedge\; \neg\alpha_1(x) \implies$ Distingue al -1.

Inducción en $n \in \mathbb{N}$; son dos inducciones en una para ahorrar tiempo, una para positivos (+) y otra para negativos (−):

HI) $\pm n$ es distinguible en $\mathcal{I}$, $n \in \mathbb{N}$.

TI) $\pm(n+1)$ es distinguible en $\mathcal{I}$, $n \in \mathbb{N}$.

$\alpha_{\pm(n+1)}(x) = \exists y \exists w \left(\alpha_{\pm 1}(y) \;\wedge\; \alpha_{\pm n}(w) \;\wedge\; x = g(y,w) \right) \implies$ Distingue al $\pm(n+1)$.

$\therefore$ Todos los elementos son distinguibles $\implies$ por corolario 2, si existiera un iso $h: U_{\mathcal{I}} \to U_{\mathcal{I}}$ deberá cumplir que $h(n) = n$ $\forall n \in \mathbb{Z} \implies h = id$.

¿id es iso? Sí $\implies \exists!$ iso de $\mathcal{I}$ en $\mathcal{I}$.

Además no todos los subconjuntos de $\mathbb{Z}$ son expresables, si existiera una fórmula α_A para cualquier subconjunto $A \implies f: \underbrace{P(\mathbb{Z})}_{\# = 2^{\aleph_0}} \to \underbrace{\text{FORM}}_{\# = \aleph_0} \,/\, f(A) = \alpha_A$ sería inyectiva. ABS!

2017 1C EJ2

sábado, 12 de junio de 2021 10:39 p. m.

Ejercicio 2. Sea $\mathcal{L}$ un lenguaje de primer orden con igualdad y dos símbolos de función binaria f^2 y g^2. Sea $\mathcal{I} = (\mathbb{Z}, \cdot, +)$. Probar que -2 es distinguible.

Por el ejercicio anterior sabemos que cualquier entero es distinguible, por lo tanto el -2 lo es.

2017 1C EJ3

sábado, 12 de junio de 2021 10:39 p. m.

Ejercicio 3. Demostrar que $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ es una función recursiva primitiva, siendo $f(n)$ =cantidad de dígitos de n. Por ejemplo $f(9) = 1$, $f(548) = 3$.
Todas aquellas funciones que sepamos que son RP porque se probó en clase o porque es un ejercicio de la guía puede usarse. Solo se pide que al usarlas escriba la definición de la misma.

$$f(x) = \max_{t \le x} \left(10^t \le x \ \wedge \ 10^{t+1} > x \right) + 1$$

$Cp(x,t)$ RP por composición de RP's (POT, SUC, π_j, h_q, AND, menor y sus variantes)

$\Pi A_p(x,x)$ RP pues P es RP y su cota tambien (π_2)

$\Rightarrow f = \text{Suma} \circ (\Pi A_p \times h_1) \Rightarrow f$ es composición de RP's $\Rightarrow f$ es RP.

<u>Algunos ejemplos:</u>

$x = 0$

$t=0 \quad 1 \le 0 \quad \wedge \quad 10 > 0 \rightarrow 0 \rightarrow 1$

$x = 1$

$t=0 \quad 1 \le 1 \quad \wedge \quad 10 > 1 \rightarrow 0 \rightarrow 1$

$x = 9$

$t=0 \quad 1 \le 9 \quad \wedge \quad 10 > 9 \rightarrow 0 \rightarrow 1$

$x = 10$

$t=0 \quad 1 \le 10 \quad \wedge \quad 10 > 10$

$t=1 \quad 10 \le 10 \quad \wedge \quad 100 > 10 \rightarrow 1 \rightarrow 2$

$x = 99$

$t=0 \quad 1 \le 99 \quad \wedge \quad 10 > 99$

$t=1 \quad 10 \le 99 \quad \wedge \quad 100 > 99 \rightarrow 1 \rightarrow 2$

$x = 100$

$t=0 \quad 1 \le 100 \quad \wedge \quad 10 > 100$

$t=1 \quad 10 \le 100 \quad \wedge \quad 100 > 100$

$t=2 \quad 100 \le 100 \quad \wedge \quad 1000 > 100 \rightarrow 2 \rightarrow 3$

<u>Definiciones:</u>

- $\Pi A_p(\vec{x}, y) = \begin{cases} \max_{t \le y} Cp(\vec{x}, t) & \text{si } \exists\, t \le y / Cp(\vec{x}, t) = 1 \\ 0 & \text{si no.} \end{cases}$
- $h_j(x) = j$
- $suc(x) = x+1$
- $\pi_j^n(x_1, \dots, x_n) = x_j$
- $pot(x,y) = (x+1)^y$
- $menor(x,y) = \begin{cases} 1 & \text{si } x < y \\ 0 & \text{si } x \ge y \end{cases}$

Ejercicio 4. Sea $f : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$ tal que

$$f(x, y) = 2^{Halt(x,y)+1} 3^{4Halt(x,x+1)+1} 5^{2Halt(2x,y)+6}$$

Decidir si f es computable.

Supongo que f es computable.

- Defino $g : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N} \,/\, g(x,y) = f[0](x,y) = Halt(x,y) + 1 \implies g$ es computable por comp. de funciones computables. $(\cdot[\cdot], f)$
- Defino $h : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N} \,/\, h(x,y) = g(x,y) \dot{-} 1 = (\underbrace{Halt(x,y) + 1}_{\geq 1}) \dot{-} 1 = Halt(x,y) + 1 - 1 = Halt(x,y)$

$\implies$ h es computable por comp. de funciones computables $(g, \dot{-})$ pero $h = Halt$ ABS!

$\therefore$ f no es computable.

2017 1C EJ5

domingo, 13 de junio de 2021 12:51 a. m.

Ejercicio 5. Hallar el código del siguiente programa y decir qué función computa.

$[A_1]$ IF $X_1 \neq 0$ GOTO B_1

$Z_1 \leftarrow Z_1 + 1$

IF $Z_1 \neq 0$ GOTO E_1

$[B_1]$ $Y \leftarrow Y + 1$

$X_1 \leftarrow X_1 - 1$

IF $Y \neq 0$ GOTO A_1

Función que computa:

X_1	Z_1	Y
0	1	0
1	0	0
0	1	1

Computa $f: \mathbb{N} \to \mathbb{N} \,/\, f(x) = x$

Codificación: $\#P = [(\#I_1, \ldots, \#I_6)] - 1$, $\#I_j = \langle a, \langle b, c \rangle\rangle$

- I_1 $a=1,\ b=2+2=4,\ c=1 \implies \#I_1 = \langle 1, \langle 4,1\rangle\rangle,\ \langle 4,1\rangle = 2^4(2\cdot 1+1)-1 = 47 \implies \langle 1,47\rangle = 2^1\cdot(2\cdot 47+1)-1 = 189$
- I_2 $a=0,\ b=1,\ c=2 \implies \#I_2 = \langle 0, \langle 1,2\rangle\rangle,\ \langle 1,2\rangle = 2^1(2\cdot 2+1)-1 = 9 \implies \langle 0,9\rangle = 2^0(2\cdot 9+1)-1 = 18$
- I_3 $a=0,\ b=2+5=7,\ c=2 \implies \#I_3 = \langle 0, \langle 7,2\rangle\rangle,\ \langle 7,2\rangle = 2^7(2\cdot 2+1)-1 = 639 \implies \langle 0,639\rangle = 1278$
- I_4 $a=2,\ b=1,\ c=0 \implies \#I_4 = \langle 2, \langle 1,0\rangle\rangle,\ \langle 1,0\rangle = 2^1\cdot(2\cdot 0+1)-1 = 1 \implies \langle 2,1\rangle = 2^2\cdot(2\cdot 1+1)-1 = 11$
- I_5 $a=0,\ b=2,\ c=1 \implies \#I_5 = \langle 0, \langle 2,1\rangle\rangle,\ \langle 2,1\rangle = 11 \implies \langle 0,11\rangle = 22$
- I_6 $a=0,\ b=2+1=3,\ c=0 \implies \#I_6 = \langle 0, \langle 3,0\rangle\rangle,\ \langle 3,0\rangle = 7 \implies \langle 0,7\rangle = 14.$

$\therefore\ \#P = 2^{189}\cdot 3^{18}\cdot 5^{1278}\cdot 7^{11}\cdot 11^{22}\cdot 13^{14} - 1$

2017 R1C EJ1

domingo, 13 de junio de 2021 01:16 a. m.

Ejercicio 1. Sea $\mathcal{L}$ un lenguaje de primer orden con igualdad, un símbolo de función binaria y un símbolo de predicado binario. Sea $\mathcal{I} = (\mathbb{Z}, +, \leq)$. Probar que $\{0,1\}$ es expresable.

- Propongo $\alpha_0(x) = \forall y \; f(x,y) = y$.

Interpreto: $\forall y \in \mathbb{Z}, \; x+y=y$. Veamos que expresa a $A=\{0\}$.

- Si $x \in A \Rightarrow x=0 \Rightarrow \forall y \; x+y=0+y=y \Rightarrow V_{\mathcal{I}}(\alpha_0(x))=1$
- Si $x \notin A \Rightarrow x \neq 0 \Rightarrow$ tomo $y=2 \Rightarrow 2+x \neq 2 \Rightarrow V_{\mathcal{I}}(\alpha_0(x))=0$

$\therefore \alpha_0$ expresa a $\{0\}$.

- Propongo $\alpha_{0,1}(x) = \exists w \left(\alpha_0(w) \wedge \forall y \forall z \left((P(w,y) \wedge P(w,z) \wedge \neg\alpha_0(y) \wedge \neg\alpha_0(z)) \longrightarrow P(x, f(y,z)) \wedge \neg\, x = f(y,z) \right) \wedge P(w,x) \right)$

Interpreto: $\exists w=0 \,/\, \forall y \forall z \; (\text{si } y>0 \wedge z>0 \Rightarrow y+z>x) \wedge x \geq 0$. Veamos que expresa a $A=\{0,1\}$.

- Si $x \in A \Rightarrow \forall y>0 \wedge \forall z>0 \;\; \underbrace{y}_{\geq 1}+\underbrace{z}_{\geq 1} \geq 2 > 1 \geq 0 \wedge x \geq 0 \Rightarrow V_{\mathcal{I}}(\alpha_{0,1}(x))=1$
- Si $x \notin A$
  - Si $x<0 \Rightarrow x \ngeq 0 \Rightarrow V_{\mathcal{I}}(\alpha_{0,1}(x))=0$
  - Si $x \geq 2 \Rightarrow$ Tomo $y=z=1$, entonces $y+z=2 \ngtr x \Rightarrow V_{\mathcal{I}}(\alpha_{0,1}(x))=0$

$\therefore \alpha_{0,1}$ expresa a $\{0,1\}$.

2017 R1C EJ2

domingo, 13 de junio de 2021 02:08 a. m.

Ejercicio 2. Sea $\mathcal{L}$ un lenguaje de primer orden con igualdad y un símbolo de función binaria f^2. Sea $\mathcal{I}_1 = (\mathbb{Z}_{\geq 0}, \cdot)$ e $\mathcal{I}_2 = (\mathbb{Z}, \cdot)$. Decidir si $\mathcal{I}_1$ es isomorfa a $\mathcal{I}_2$.

- Supongo que $\mathcal{I}_1 \simeq \mathcal{I}_2 \Rightarrow \exists\, F : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}_{\geq 0}$ iso. $\Rightarrow F$ biy y $F(a \cdot b) = F(a) \cdot F(b)$

  $F(0) = F(0 \cdot 0) = F(0)F(0) \Rightarrow F(0) = 0$ ó $F(0) = 1$. pero $F(0) = F(n \cdot 0) = F(0)F(n) \Rightarrow F(0)(F(n) - 1) = 0$
  $\Rightarrow F(0) = 0$ ó $\underbrace{F(n) = 1 \ \forall n}_{\text{ABS!}}$

  $F(1) = F(1 \cdot 1) = F(1)F(1) \Rightarrow F(1) = 0$ ó $F(1) = 1$

  $\therefore F(0) = 0$ y $F(1) = 1$

  $F(1) = F(-1 \cdot (-1)) = F(-1) \cdot F(-1) = 1 \iff F(-1) = 1$ ABS! pues F es inyectiva

$\Rightarrow \nexists\, f : U_{\mathcal{I}_2} \to U_{\mathcal{I}_1}$ iso $\Rightarrow \mathcal{I}_2 \not\simeq \mathcal{I}_1$ ($\mathcal{I}_1 \not\simeq \mathcal{I}_2$ pues es una rel. de equiv.).

2017 R1C EJ3

domingo, 13 de junio de 2021 11:51 a. m.

Ejercicio 3. Demostrar que $f : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$ es una función recursiva primitiva, siendo $f(x, y) = xy!$.
Puede usar que la función $suma : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$, $suma(x, y) = x + y$ es RP.

$$\begin{cases} f(x,0) = x \cdot 0! = x = g(x) \\ f(x,n+1) = x \cdot (n+1)! = x \cdot n!\,(n+1) = h(x,n,f(x,n)) \end{cases}$$

qvq g y h son RP.

- Defino $g: \mathbb{N} \to \mathbb{N} / g(x) = \pi_1^1(x) \Rightarrow g = \pi \Rightarrow g$ es RP pues es inicial.
- Defino $h: \mathbb{N}^3 \to \mathbb{N} / h(x,y,z) = prod(z, suc(x)) \Rightarrow h = prod \circ (\pi_3 \times suc \circ \pi_1) \Rightarrow h$ es RP por comp. de funciones RP.

$\therefore$ f es RP pues se obtuvo por ERII a partir de g y h RP's.

Para terminar, debo probar que prod es RP, $prod: \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N} / prod(x,y) = x \cdot y$

$$\begin{cases} prod(x,0) = x \cdot 0 = 0 = G(x) \\ prod(x,n+1) = x \cdot (n+1) = xn + x = H(x,n,prod(x,n)) \end{cases}$$

qvq G y H son RP.

- Defino $G : \mathbb{N} \to \mathbb{N} / G(x) = cero(x) \Rightarrow G = cero \Rightarrow G$ es RP pues es inicial.
- Defino $H : \mathbb{N}^3 \to \mathbb{N} / H(x,y,z) = suma(z,x) \Rightarrow H = suma \circ (\pi_3 \times \pi_1) \Rightarrow H$ es RP por comp. de funciones RP.

$\therefore$ prod es RP pues se obtuvo por ERII a partir de G y H RP's.

2017 R1C EJ4

domingo, 13 de junio de 2021 12:07 p. m.

Ejercicio 4. Decidir si $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ es una función computable, siendo $f(x) = Halt(x, \underbrace{3456789999988888777777111111111111112}_{K}^2 - 1)$.

$\#P = K^2 - 1$. K se puede descomponer en primos / $K = \prod_{i=1}^{n} p_i^{\alpha_i}$ donde $\alpha_n \neq 0 \Longrightarrow K^2 = \prod_{i=1}^{n} p_i^{2\alpha_i}$ $2\alpha_i = \#I_i$

$\Longrightarrow \#I_i$ es par $\forall i = 1, \dots, n$

$\Longrightarrow \langle a_i, \langle b_i, c_i \rangle\rangle = 2^{a_i}(2\langle b_i, c_i\rangle + 1) - 1$ es par $\Longrightarrow a_i = 0 \Longrightarrow \nexists$ etiqueta $\forall I_i$.

$\Longrightarrow P$ no tiene etiqueta.

> <u>Obs</u>: si un prog. no tiene etiq $\Longrightarrow$ para toda entrada el prog. termina en una cantidad finita de pasos.
>
> Si hay un salto a una etiqueta $\Longrightarrow$ el prog. termina.
>
> En cualquier otro caso, se ejecuta la sig. instrucción.

$\therefore f(x) = Halt(x, \#P) = 1 \quad \forall n \in \mathbb{N} \Longrightarrow f = h_1 \Longrightarrow f$ es RP $\Longrightarrow f$ es computable.

2017 R1C EJ5

domingo, 13 de junio de 2021 12:16 p. m.

Ejercicio 5. Hallar el programa de código $2^{11}7^{25} - 1$ y decir qué función computa.

$\#P = 2^{11} \cdot 7^{25} - 1 = 2^{11} \cdot 3^{0} \cdot 5^{0} \cdot 7^{25} - 1$

- $\#I_1 = 11 \Rightarrow \langle a, \langle b, c\rangle\rangle = 11 = 2^{a}(2\langle b,c\rangle + 1) - 1 \Rightarrow 2^{a}(2\langle b,c\rangle+1) = 12 \Rightarrow a = 2$ y $\langle b,c\rangle = 1$

$\Rightarrow a = 2$ y $2^{b} \cdot (2 \cdot c + 1) - 1 = 1 \Rightarrow a = 2,\ b = 1,\ c = 0 \Rightarrow I_1 =$ [B1] $Y \leftarrow Y + 1$

- $\#I_2 = \#I_3 = 0 \Rightarrow I_2 = I_3 = Y \leftarrow Y$

- $\#I_4 = 25 \Rightarrow \langle a, \langle b, c\rangle\rangle = 25 = 2^{a}(2\langle b,c\rangle + 1) - 1 \Rightarrow 2^{a}(2\langle b,c\rangle + 1) = 26 \Rightarrow a = 1$ y $\langle b,c\rangle = 6$

$\Rightarrow a = 1$ y $2^{b}(2c+1) - 1 = 6 \Rightarrow a = 1,\ b = 0,\ c = 3 \Rightarrow I_4 =$ [A1] $X_2 \leftarrow X_2$

$\therefore P =$

[B1]	$Y \leftarrow Y + 1$
	$Y \leftarrow Y$
	$Y \leftarrow Y$
[A1]	$X_2 \leftarrow X_2$

Computa $F: \mathbb{N} \to \mathbb{N} / F(x) = 1$

2017 2C EJ1

domingo, 13 de junio de 2021 12:38 p. m.

Ejercicio 1. Demostrar que el conjunto $A = \{p \in \mathbb{R}[X] : p \text{ es constante }\}$ es expresable en los siguientes lenguajes e interpretaciones.

1. Sea $\mathcal{L}$ un lenguaje de primer orden con igualdad y un símbolo de función unaria f y un símbolo de constante c. Sea $\mathcal{I} = (\mathbb{R}[X], f(p) = p', 0)$
2. Sea $\mathcal{L}$ un lenguaje de primer orden con igualdad y un símbolo de función unaria f. Sea $\mathcal{I} = (\mathbb{R}[X], f(p) = p')$

1) propongo $\alpha_A(p) = f(p) = c$. Veamos que α_A expresa A.

$V_J(\alpha_A(p)) = 1 \iff p' = 0 \iff p$ es cte $\iff p \in A$.

$\therefore$ α_A expresa a A.

2) propongo $\alpha_0(p) = f(p) = p$. Veamos que α_0 expresa $\{0\}$.

- Si $p = 0 \Rightarrow p' = 0 \Rightarrow V_J(\alpha_0(p)) = 1$.
- Si $p \neq 0$
  - Si $p = cte \neq 0 \Rightarrow p' = 0 \neq cte$
  - Si $gr(p) = 1 \Rightarrow p' = cte \neq p$
  - si $gr(p) = i > 1 \Rightarrow p' = p^*$ con $gr(p^*) i-1 \Rightarrow p^* \neq p$

  $\Rightarrow V_J(\alpha_0(p)) = 0$

$\therefore$ α_0 expresa $\{0\}$.

propongo $\alpha_A(x) = \exists w(\alpha_0(w) \wedge f(p) = w)$ Veamos que α_A expresa A.

$V_J(\alpha_A(p)) = 1 \iff p' = 0 \iff p$ es cte $\iff p \in A$.

$\therefore$ α_A expresa a A.

2017 2C EJ2 T

domingo, 13 de junio de 2021 01:08 p. m.

Ejercicio 2. Sea $\mathcal{L}$ un lenguaje de primer orden con igualdad y dos símbolos de función binaria f y g. Sea $\mathcal{I} = (\mathbb{Q}, +, \cdot)$. Probar que existe un único isomorfismo de $\mathcal{I}$ en $\mathcal{I}$.

2017 2C EJ3

domingo, 13 de junio de 2021 01:28 p. m.

Ejercicio 3. Sea $g : \mathbb{N} \to \mathbb{N}_{>0}$ una función RP. Sea $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ tal que $f(0) = g(0)$ y si $n > 0$

$$f(n) = (((g(0)^{g(1)})^{g(2)})^{\cdots})^{g(n)}$$

es decir $f(2) = (g(0)^{g(1)})^{g(2)}$ Demostrar que f es una función recursiva primitiva.

Todas aquellas funciones que sepamos que son RP porque se probó en clase o porque es un ejercicio de la guía puede usarse. Solo se pide que al usarlas escriba la definición de la misma.

- $f(0) = g(0) \in \mathbb{N}_{>0}$
- $f(n+1) = (((g(0))^{g(1)})^{\cdots})^{g(n+1)} = H(n, f(n))$ qvq H es RP.

bien defino pues $y = (g(0)^{\cdots})^{g(n)} > 0 \Rightarrow y \dot{-} 1 \geq 0$ y $g(x+1) > 0$

- Defino $H : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N} / H(x,y) = pot(y \dot{-} 1, g(x+1)) \Rightarrow H = pot \circ (RT \circ (\pi_2 \times h_1) \times g \circ suc \circ \pi_1) \Rightarrow H$ es RP por comp. de RP's.

$\therefore$ f es RP pues se obtuvo por ERI a partir de H RP.

2017 2C EJ4

domingo, 13 de junio de 2021 01:41 p. m.

Ejercicio 4. Sea $\mathcal{L}$ un lenguaje de primer orden con igualdad y dos símbolos de función binaria f y g. Sea

$$\alpha = \forall z\, \exists x\, \exists y\ \ (f(x,y) = z\ \wedge\ g(x,y) = z)$$

Hallar dos interpretaciones con universo infinto donde se interprete distinto a f y g, que una sea modelo de α y la otra no.

- Una modelo de α: $\mathcal{I}_1 = (\mathbb{R}, +, -)$

Interpreto α: $\forall z\, \exists x \exists y \,/\, x+y=z \wedge x-y=z$

$V_{\mathcal{I}}(\alpha)=1 \iff \forall z\, \exists x \exists y \,/\, x+y=z \wedge x-y=z$ **VERDADERO**, tomo $y=0$ y $x=z \Rightarrow x+y=z+0=z \wedge x-y=z-0=z$

- Una que no sea modelo de α: $\mathcal{I}_2 = (\mathbb{N}, \cdot, +)$

Interpreto α: $\forall z\, \exists x \exists y \,/\, x\cdot y=z \wedge x+y=z$

$V_{\mathcal{I}}(\alpha)=1 \iff \forall z\, \exists x \exists y \,/\, x\cdot y=z \wedge x+y=z$ **FALSO**

Tomo $z=3 \Rightarrow$ Si $x\cdot y=3 \Rightarrow$ s.p.g. $x=3 \wedge y=1 \Rightarrow x+y=4 \neq 3$.

$\therefore$ $\mathcal{I}_1$ es modelo de α, pero $\mathcal{I}_2$ no.

2017 2C EJ5

domingo, 13 de junio de 2021 01:58 p. m.

Ejercicio 5. Dado el siguiente programa:

$[C_1]$ IF $X_1 \neq 0$ GOTO B_1
$Z_1 \leftarrow Z_1 + 1$
IF $Z_1 \neq 0$ GOTO E_1
$[B_1]$ $Y \leftarrow Y + 1$
$Y \leftarrow Y + 1$
$X_1 \leftarrow X_1 - 1$
IF $Y \neq 0$ GOTO C_1

1. Hallar N el código del siguiente programa y decir qué función computa.
2. Decidir si $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ es computable, siendo $f(x) = Halt(x, N)$.

1) Codificación: $\#P = [(\#I_1, \dots, \#I_7)] - 1$

I	a	b	c	<b,c>	#I
I_1	3	4	1	47	759
I_2	0	1	2	9	18
I_3	0	7	2	639	1278
I_4	2	1	0	1	11
I_5	0	1	0	1	2
I_6	0	2	1	11	22
I_7	0	5	0	31	62

$\therefore \#P = 2^{759} \cdot 3^{18} \cdot 5^{1278} \cdot 7^{11} \cdot 11^{2} \cdot 13^{22} \cdot 17^{62} - 1$

¿Que función computa?

X_1	Z_1	Y
0	1	0
1	0	0
0	1	2

Computa $f: \mathbb{N} \to \mathbb{N} / f(x) = 2x$

2) $f: \mathbb{N} \to \mathbb{N} / f(x) = Halt(x, \#P)$ como el programa termina siempre $\Rightarrow Halt(x, \#P) = 1$

$\Rightarrow f = h_1 \Rightarrow f$ es RP $\Rightarrow f$ es computable.

2017 R2C EJ1

domingo, 13 de junio de 2021 02:12 p. m.

Ejercicio 1. Sea $\mathcal{L}$ un lenguaje de primer orden con igualdad y un símbolo de función unaria. Sea $\mathcal{I}$ la siguiente interpretación:

$$\mathcal{I} = (\mathbb{R}, f_{\mathcal{I}}(x) = x^3)$$

Decir qué expresan las siguientes fórmulas:

1. $\alpha(x) = \forall\, y\ \ (\neg x = y \Longrightarrow \neg f(x) = f(y))$
2. $\alpha(x) = \forall\, y\ \ (\neg x = y \wedge \neg f(x) = f(y))$

1) Interpreto $\alpha(x)$: $\forall y\,(x \neq y \Rightarrow x^3 \neq y^3)$. Veamos que expresa $\mathbb{R}$.

- Si $x \in \mathbb{R} \Rightarrow$ tomo $y = x \Rightarrow$ es falso el antecedente, pues no es cierto que $y \neq x\ \forall y \Rightarrow V_{\mathcal{I}}(\alpha(x)) = 1$.
- Si $x \notin \mathbb{R} \Rightarrow x \notin U_{\mathcal{I}}$ ABS! $\therefore$ la única opción es que $x \in \mathbb{R}$ y eso implica que $V_{\mathcal{I}}(\alpha(x)) = 1$.

$\therefore\ \alpha(x)$ expresa $\mathbb{R}$.

2) Interpreto $\alpha(x)$: $\forall y\,(x \neq y \wedge x^3 \neq y^3)$. Veamos que expresa $\emptyset$.

$V_{\mathcal{I}}(\alpha(x)) = 1 \Longleftrightarrow \forall y \in \mathbb{R}\ \ (x \neq y \wedge x^3 \neq y^3) \Longleftrightarrow \forall y \in \mathbb{R}\ \ x \neq y$, falso, basta tomar $y = x$.

$\therefore\ \alpha(x)$ expresa $\emptyset$.

2017 R2C EJ2

domingo, 13 de junio de 2021 03:34 p. m.

Ejercicio 2. Sea $\mathcal{L}$ un lenguaje de primer orden con igualdad y un símbolo de función binaria. Sean $\mathcal{I}_1 = (\mathbb{N}, \cdot)$ e $\mathcal{I}_2 = (\mathbb{N}, \otimes)$ siendo $a \otimes b = ab + nb$. Hallar, si existen, todos los $n \in \mathbb{N}$ tal que $\mathcal{I}_1 \simeq \mathcal{I}_2$

Supongo $F: U_{\mathcal{I}_1} \to U_{\mathcal{I}_2}$ iso,

$\Longrightarrow F(a \cdot b) = F(a) \times F(b)$ y F biy.

- $F(0) = F(a \cdot 0) = F(a) \times F(0) = F(a)F(0) + nF(0) \Longrightarrow F(0)\big(F(a) + n - 1\big) = 0 \Longrightarrow F(0) = 0$ pues $F(a) = 1 - n$ $\forall a$ es ABS!
- $F(0) = F(0 \cdot a) = F(0) \times F(a) = F(0)F(a) + nF(a) \underset{F(0)=0}{\Longrightarrow} 0 = nF(a) \Longrightarrow n = 0$ ó $\underbrace{F(a) = 0}_{\forall a \text{ es ABS!}}$

$\therefore$ Si existiera un iso entre las interpretaciones, obligatoriamente $n = 0$.

—— o ——

Si $n = 0 \Longrightarrow \otimes = \cdot$ y por tanto $\mathcal{I}_1 = \mathcal{I}_2 \Longrightarrow \mathcal{I}_1 \simeq \mathcal{I}_2$. por reflexividad.

2017 R2C EJ3

domingo, 13 de junio de 2021 03:45 p. m.

Ejercicio 3. . Sea $\mathcal{L}$ un lenguaje de primer orden con igualdad, un símbolo de función binaria, un símbolo de función unaria y un predicado unario. Sea $\mathcal{I} = (\mathbb{R}^{3\times3}, +, \mathit{trasponer}, \text{ es simétrica })$. Probar que $F : \mathbb{R}^{3\times3} \to \mathbb{R}^{3\times3}$ tal que $F(A) = BA$, es un isomorfismo de $\mathcal{I}$ en $\mathcal{I}$ siendo

$$B = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

Obs: $\det(B) = 27 \Rightarrow B$ es invertible.

1) Biyectividad:

- iny_ $F(X) = F(Y) \Rightarrow BX = BY \Rightarrow B^{-1}BX = B^{-1}BY \Rightarrow X = Y$ ✓
- sobrey_ Sea $A \in \mathbb{R}^{3\times3} \Rightarrow$ tomo $B^{-1}A \in \mathbb{R}^{3\times3} \Rightarrow F(B^{-1}A) = BB^{-1}A = B$ ✓ $\therefore F$ es biy.

2) Constantes: $\mathcal{C} = \emptyset$.

3) Funciones:

1) $+$ qvq $F(X+Y) = F(X) + F(Y)$

$F(X+Y) = B(X+Y) = BX + BY = F(X) + F(Y)$ ✓

2) trasponer qvq $F(A^t) = F(A)^t$

$F(A^t) = BA^t \underset{B=B^t}{=} B^tA^t = F(A)^t$ ✓

4) Predicados:

1) es simétrica qvq A es simétrica $\Leftrightarrow$ F(A) es simétrica.

A es simétrica $\Leftrightarrow$ A se puede escribir como $A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ b & e & d \\ c & d & f \end{pmatrix} \Leftrightarrow BA = \begin{pmatrix} 3a & 3b & 3c \\ 3b & 3e & 3d \\ 3c & 3d & 3f \end{pmatrix} \Leftrightarrow$ BA es simétrica $\Leftrightarrow$ F(A) es simétrica.

2) $=$ qvq $A = C \Leftrightarrow F(A) = F(C)$

$\Rightarrow$ F es función
$\Leftarrow$ F es iny.

$\therefore$ F es un iso de $\mathcal{I}$ en $\mathcal{I}$.

2017 R2C EJ4

domingo, 13 de junio de 2021 04:12 p. m.

Ejercicio 4. Sea $g : \mathbb{N} \to \mathbb{N}_{>0}$ función recursiva primitiva. Sea $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ tal que $f(0) = g(0)$ y

$$f(n+1) = g(n+1)^{g(n)^{g(n-1)^{\cdots g(0)}}}$$

Por ejemplo: $f(3) = g(3)^{g(2)^{g(1)^{g(0)}}}$ Probar que f es una función recursiva primitiva.

- $f(0) = g(0) \in \mathbb{N}_{>0}$
- $f(n+1) = g(n+1)^{f(n)} = H(n, f(n))$

- Defino $H: \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N} \,/\, H(x,y) = \text{Pot}(g(\text{suc}(x)) \dot{-} 1, y) \Rightarrow H = \text{Pot} \circ (\text{RT} \circ (g \circ \text{suc} \circ \pi_1 \times h_1 \circ \pi_1) \times \pi_2)$

$\Rightarrow$ H es RP por comp. de funciones RP.

$\therefore$ f es RP pues se obtuvo por ERI a partir de H RP.

- <u>Obs</u>: H está bien definida pues ninguna potencia es del tipo 0^0 o $-x^y$.

(tenemos que $g(x) > 0 \ \forall x \in \mathbb{N}$ y $g(x) \dot{-} 1 \geq 0 \ \forall x \in \mathbb{N}$.)

2017 R2C EJ5

domingo, 13 de junio de 2021 04:20 p. m.

Ejercicio 5. Sea $f : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$ tal que

$$f(x, y) = \max_{t \leq y}(Halt(x, t) \wedge t + 1 > y)$$

Decidir si f es computable.

- Supongo f computable.
- Defino $g : \mathbb{N} \to \mathbb{N} / g(x) = f(x,x) \Rightarrow g = f \circ (\pi_1 \times \pi_1) \Rightarrow g$ es computable por comp. de computables.

$g(x) = \max\limits_{t \leq x} (Halt(x,t) \wedge t+1 > x)$. Como $t \leq x \wedge t+1 > x$, $t = x$ es el único valor que se evalúa.

$\Rightarrow$ Reescribo $g(x) = Halt(x,x) \cdot x$, de esta manera si $Halt(x,x) = 1 \Rightarrow g(x) = x$; si $Halt(x,x) = 0 \Rightarrow g(x) = 0$ $\Big\}$ que son los dos únicos valores que retornaba el mínimo.

$\Rightarrow g = prod \circ (Halt \circ (\pi_1 \times \pi_1) \times \pi_1)$ es computable pues solo la reescribí.

- Defino $h : \mathbb{N} \to \mathbb{N} / h(x) = coc(g(x), x) \Rightarrow h = coc \circ (g \circ \pi_1 \times \pi_1)$ es computable por comp. de computables.

$\Rightarrow$ Reescribo $h(x) = \left\lfloor \frac{Halt(x,x) \cdot x}{x} \right\rfloor = Halt(x,x) \Rightarrow Halt(x,x)$ es computable. ABS!

EL ABS! vino de suponer f computable $\Rightarrow f$ no es computable.

2018 1C EJ1

domingo, 13 de junio de 2021 04:33 p. m.

Ejercicio 1. Sea $\mathcal{L}$ un lenguaje de primer orden con igualdad, un símbolo de función binaria y un símbolo de constante. Sea $\mathcal{I} = (\mathbb{N}, \cdot, 8)$.

1. Probar que 2 es distinguible.
2. Decidir si $A = \{x \in \mathbb{N} : x \text{ es par}\}$ es expresable.

1) Propongo $\alpha_2(x) = f(f(x,x),x) = c$

Interpreto $\alpha_2(x)$: $x^3 = 8$

$V_{\mathcal{I}}(\alpha_2(x)) = 1 \iff x^3 = 8 \iff x = 2.$ ✓

$\therefore$ α_2 distingue al 2.

2) Propongo $\alpha_{PAR}(x) = \exists w \exists z \, (\alpha_2(w) \wedge x = f(z,w))$

Interpreto $\alpha_{PAR}(x)$: $\exists z \,/\, x = 2z$

$V_{\mathcal{I}}(\alpha_{PAR}(x)) = 1 \iff \exists z \,/\, x = 2z \iff x$ es par ✓

$\therefore$ α_{PAR} expresa a A.

2018 1C EJ2

domingo, 13 de junio de 2021 04:47 p. m.

Ejercicio 2. Sea $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$

$$f(x) = \begin{cases} 1 & si \quad x \text{ es múltiplo de 23 y x es múltiplo de 11} \\ 0 & sino \end{cases}$$

Probar que f es RP, usando que EQ es RP, la función constante es RP y la suma es RP.

Reescribo f como: $f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad x = \dot{253} \\ 0 & \text{sino} \end{cases}$

- Defino $g : \mathbb{N} \to \mathbb{N} \,/\, g(x) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad x = \dot{253} \\ g(x-1)+1 & \text{sino} \end{cases}$

- $g(0) = 0 \in \mathbb{N}$
- $g(n+1) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad n+1 = \dot{253} \\ g(n)+1 & \text{sino} \end{cases} = H(n, g(n))$

- Defino $H : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N} \,/\, H(x,y) = EQ(y, h_{252}(x)) \cdot suc(y) \Rightarrow H = PROD \circ (EQ \circ (\pi_2 \times h_{252} \circ \pi_1) \times suc \circ \pi_2)$

$\Rightarrow$ H es RP por comp. de funciones RP.

$\therefore$ g es RP pues se obtuvo por ERI a partir de H RP.

$\Rightarrow f(x) = EQ(g(x), cero(x)) \Rightarrow f = EQ \circ (g \circ \pi_1 \times cero \circ \pi_1) \Rightarrow f$ es RP por comp. de RP's.

2018 1C EJ3

domingo, 13 de junio de 2021 05:37 p. m.

Ejercicio 3. Sea $\mathcal{L}$ un lenguaje de primer orden con igualdad, un símbolo de función binaria, un símbolo de función constante y un símbolo de predicado unario. Sea $\mathcal{I}_1 = (\mathbb{R}_{>0}, \cdot, 1, \{x : x > 1\})$ y sea $\mathcal{I}_2 = (\mathbb{R}, +, 0, \{x : x > 0\})$. Probar que la función logaritmo es un isomorfismo de $\mathcal{I}_1$ a $\mathcal{I}_2$.

qvq $F : \mathbb{R}_{>0} \to \mathbb{R} \,/\, F(x) = \log(x)$ es un iso de $\mathcal{I}_1$ en $\mathcal{I}_2$.

1) BIYECTIVIDAD:

$\exists\, F^{-1}(x) = e^x \quad \therefore \quad F$ es biyectiva ✓

2) CONSTANTE: $C_{\mathcal{I}_1} = 1$ qvq $F(C_{\mathcal{I}_1}) = C_{\mathcal{I}_2} = 0$.

Se cumple pues $F(1) = \log(1) = 0$ ✓

3) FUNCIÓN: qvq $F(x \cdot y) = F(x) + F(y)$

$$F(x \cdot y) = \log(x \cdot y) \underset{\substack{\downarrow \\ \text{prop de log.}}}{=} \log(x) + \log(y) = F(x) + F(y) \ ✓$$

4) PREDICADOS:

1) $=$ qvq $x = y \iff F(x) = F(y)$

$\Rightarrow$ F es función ✓

$\Leftarrow$ F es inyectiva ✓

2) qvq $x > 1 \iff F(x) > 0$

$\to F'(x) = 1$ como $x > 0$. $1 > 0 \ \forall\, x \in \mathbb{R}_{>0} \to F$ es creciente

$\Rightarrow F'(x) = \dfrac{1}{x}$ como $x>0$, $\dfrac{1}{x}>0 \ \forall x \in \mathbb{R}_{>0} \Rightarrow F$ es creciente.

Como $F(1)=0 \Rightarrow$ si $x>1$ tenemos que $F(x)>0$

$\Leftarrow$ Si $F(x) = \log(x)>0 \Rightarrow x > e^{0} > 1$ ✓

2018 1C EJ4

domingo, 13 de junio de 2021 05:38 p. m.

Ejercicio 4. Sea $\mathcal{L}$ un lenguaje de primer orden con igualdad y dos símbolos de función binaria f y g. Sea

$$\alpha = \forall z \, \exists x \, \exists y \; (f(y, y) = z \;\; \wedge \;\; g(x, y) = z)$$

Hallar dos interpretaciones con universo infinto, que una sea modelo de α y la otra no.

- $\mathcal{I} = (U_{\mathcal{I}}, f^2_{\mathcal{I}}, g^2_{\mathcal{I}})$

- $\mathcal{I}_1 = (\mathbb{R}, \pi^2_1, \pi^2_2)$

Interpreto α : $\forall z \exists x \exists y / (y = z \wedge y = z)$

$V_{\mathcal{I}}(\alpha) = 1 \iff \forall z \exists x \exists y \; (y = z \wedge y = z)$ VERDADERO.

Basta tomar $y = z \wedge x = z$ (este último da igual). $\therefore$ $\mathcal{I}_1$ es modelo de α.

- $\mathcal{I}_2 = (\mathbb{N}, +, \cdot)$

Interpreto α: $\forall z \exists x \exists y / (2y = z \wedge x \cdot y = z)$

$V_{\mathcal{I}}(\alpha) = 1 \iff \forall z \exists x \exists y \; (2y = z \wedge xy = z)$ FALSO

Tomo z impar $\Rightarrow \nexists y / 2y = z$ $\therefore$ $\mathcal{I}_2$ no es modelo de α.

2018 1C EJ5

domingo, 13 de junio de 2021 05:39 p. m.

Ejercicio 5. Dado el siguiente programa:

$[C_1]$ IF $X_1 \neq 0$ GOTO B_1
$[A_1]$ $Z_1 \leftarrow Z_1 + 1$
IF $Z_1 \neq 0$ GOTO A_1
$[D_1]$ IF $X_1 \neq 0$ GOTO B_1
$Z_2 \leftarrow Z_2 + 1$
IF $Z_2 \neq 0$ GOTO E_1
$[B_1]$ $Y \leftarrow Y + 1$
$Y \leftarrow Y + 1$
$X_1 \leftarrow X_1 - 1$
IF $Y \neq 0$ GOTO D_1

1. Hallar N el código del siguiente programa y decir qué función computa.
2. Decidir si $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ es computable, siendo $f(x) = Halt(x, N)$.

I	a	b	c	<b,c>	#I
I_1	3	4	1	47	759
I_2	1	1	2	9	37
I_3	0	3	2	39	78
I_4	4	4	1	47	1519
I_5	0	1	4	17	34
I_6	0	7	4	1151	2302
I_7	2	1	0	1	11
I_8	0	1	0	1	2
I_9	0	2	1	11	22
I_10	0	6	0	63	126

1) Codificación:

$$N = \#P = [(I_1, \dots, I_{10})] - 1 = 2^{759} \cdot 3^{37} \cdot 5^{78} \cdot 7^{1519} \cdot 11^{34} \cdot 13^{2302} \cdot 17^{11} \cdot 19^{2} \cdot 23^{22} \cdot 29^{126} - 1.$$

¿Que función computa?

X_1	Z_1	Z_2	Y
0	"∞"	0	$\uparrow$

X_1	Z_1	Z_2	Y
1	0	0	0
0	0	1	$\underline{2}$

X_2	Z_1	Z_2	Y
2	0	0	0
1	0	0	2
0	0	0	$\underline{4}$

Computa $F : \mathbb{N} \to \mathbb{N} \,/\, F(x) = \begin{cases} \uparrow & \text{si } x = 0 \\ 2x & \text{si } x \neq 0 \end{cases}$

2) $f(x) = Halt(x, N) = \begin{cases} 1 & \text{si el prog. de código } N \text{ termina ante la entrada } x \\ 0 & \text{si no} \end{cases} = \begin{cases} 1 & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$

$\Rightarrow F(x) = \alpha(\alpha(x)) \Rightarrow F = \alpha \circ \alpha \circ \pi_1 \Rightarrow F$ es computable por comp. de computables.

2018 R1C EJ1 T

domingo, 13 de junio de 2021 06:53 p. m.

Ejercicio 1. Sea $\mathcal{L}$ un lenguaje de primer orden con igualdad y un símbolo de función binaria f^2. Sea $\mathcal{I} = (\mathbb{R}^{2\times 2}, \cdot)$. Decidir si el conjunto $A = \{\lambda Id : \lambda \in \mathbb{R}\}$ es expresable.

2018 R1C EJ2

domingo, 13 de junio de 2021 07:22 p. m.

Ejercicio 2. Sea $\mathcal{L}$ un lenguaje de primer orden y sea $\mathcal{I}$ una interpretación de $\mathcal{L}$ con universo U. Probar que la función identidad es un isomorfismo de $\mathcal{I}$ en $\mathcal{I}$.

Sea $id: U_{\mathcal{I}} \to U_{\mathcal{I}} \,/\, id(x) = x$ qvq id es un iso

1) **BIYECTIVIDAD:**

iny_ Si $id(x) = id(y) \Rightarrow x = y$ ✓

sobrey_ Sea $x \in U$, tomo $x \Rightarrow id(x) = x$ ✓ $\therefore$ id es biy.

2) **CONSTANTES:** def: $c \in \mathcal{C}$. $c_{\mathcal{I}_1} \in \mathcal{U}_{\mathcal{I}_1}$ y $c_{\mathcal{I}_2} \in \mathcal{U}_{\mathcal{I}_2} \Rightarrow \mathcal{F}(c_{\mathcal{I}_1}) = c_{\mathcal{I}_2}$

Como $\mathcal{I}_1 = \mathcal{I}_2$, $c_{\mathcal{I}_1} = c_{\mathcal{I}_2} \Rightarrow$ Como $id(c_{\mathcal{I}_1}) = c_{\mathcal{I}_1} = c_{\mathcal{I}_2}$ se cumple ✓

3) **FUNCIONES:** def: $f^k \in \mathcal{F}$. $\mathcal{F}(f^k_{\mathcal{I}_1}(u_1,\dots,u_k)) = f^k_{\mathcal{I}_2}(\mathcal{F}(u_1),\dots,\mathcal{F}(u_k))$, en este caso $\mathcal{F} = id$

$$id(f^k_{\mathcal{I}_1}(u_1,\dots,u_k)) \underset{id(u_i)=u_i}{=} f^k_{\mathcal{I}_1}(u_1,\dots,u_k) \underset{\mathcal{I}_1=\mathcal{I}_2}{=} f^k_{\mathcal{I}_2}(u_1,\dots,u_k) \underset{u_i=id(u_i)}{=} f^k_{\mathcal{I}_2}(id(u_1),\dots,id(u_k)) \checkmark$$

4) **PREDICADOS:** def: $P^k \in \mathcal{P}$. $(u_1,\dots,u_k) \in P^k_{\mathcal{I}_1} \Leftrightarrow (\mathcal{F}(u_1),\dots,\mathcal{F}(u_k)) \in P^k_{\mathcal{I}_2}$, en este caso $\mathcal{F} = id$

$$(u_1,\dots,u_k) \in P^k_{\mathcal{I}_1} \underset{\mathcal{I}_1=\mathcal{I}_2}{\Longleftrightarrow} (u_1,\dots,u_k) \in P^k_{\mathcal{I}_2} \underset{u_i=id(u_i)}{\Longleftrightarrow} (id(u_1),\dots,id(u_k)) \in P^k_{\mathcal{I}_2} \checkmark$$

$\therefore$ id es un iso de $\mathcal{I}$ en $\mathcal{I}$.

2018 R1C EJ3

domingo, 13 de junio de 2021 07:43 p. m.

Ejercicio 3. Sea $\mathcal{L}$ un lenguaje de primer orden con igualdad y un símbolo de predicado unario P^1. Hallar una interpretación que sea modelo para α y otra interpretación que no lo sea, siendo $\alpha = (\beta \wedge \gamma)$ siendo

$$\beta = \exists x \exists y \exists z\, (\underbrace{(\neg x = y \wedge \neg y = z \wedge \neg x = z)}_{\beta_1} \wedge \underbrace{\forall w\, (w = x \vee w = y \vee w = z)}_{\beta_2}) \Longrightarrow \beta = \exists x \exists y \exists z\, (\beta_1 \wedge \beta_2)$$

$$\gamma = \forall x \forall y\, ((P(x) \wedge P(y)) \to x = y)$$

Interpreto la "idea" de α:

β_1: existen 3 elementos distintos.

β_2: para todo elemento, este es igual a por lo menos uno de estos.

} Existen 3 elementos distintos y sólo esos.

γ: para todo par de elementos, si cumplen el mismo predicado entonces son iguales.

- Que sea modelo de α:

$\mathfrak{I} = (\{1,3,5\}, \text{ es par})$

$V_{\mathfrak{I}}(\alpha) = 1 \iff \overset{①}{V_{\mathfrak{I}}(\beta) = 1} \wedge \overset{②}{V_{\mathfrak{I}}(\gamma) = 1}$ VERDADERO.

① $V_{\mathfrak{I}}(\beta) = 1$ pues tomo $x = 1, y = 3, z = 5 \Longrightarrow x \neq y \neq z$ y $\forall w$, w es igual a alguno de estos.

② $V_{\mathfrak{I}}(\gamma) = 1$ pues $\nexists\, x \in U_{\mathfrak{I}} / x$ sea par $\Rightarrow$ por antecedente falso, la implicación es verdadera.

$\therefore$ $\mathfrak{I}$ es modelo de α.

- Que no sea modelo de α:

$\mathfrak{I} = (\{1\}, \text{ es par})$. Veamos que $V_{\mathfrak{I}}(\alpha) = 0$.

$V_{\mathfrak{I}}(\alpha) = \min\{V_{\mathfrak{I}}(\beta), V_{\mathfrak{I}}(\gamma)\}$

Veamos que $V_{\mathfrak{I}}(\beta) = 0$

El único valor que puede tomar x e y es $1 \Longrightarrow x \neq y$ es falso $\therefore V_{\mathfrak{I}}(\beta) = 0$

$\Longrightarrow V_{\mathfrak{I}}(\alpha) = \min\{0, V_{\mathfrak{I}}(\gamma)\} = 0$ $\therefore$ $\mathfrak{I}$ no es modelo de α.

2018 R1C EJ4

domingo, 13 de junio de 2021 11:55 p. m.

Ejercicio 4. Sea $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ tal que $f(n) = a_n$ siendo

$$a_{n+2} = a_n^2 + 5a_{n+1}$$

con $a_0 = 0$ y $a_1 = 1$. Probar que f es RP.

Defino $g : \mathbb{N} \to \mathbb{N} / g(n) = \langle f(n), f(n+1) \rangle$. Veamos que g es RP.

- $g(0) = \langle f(0), f(1) \rangle = \langle 0, 1 \rangle \in \mathbb{N}$
- $g(n+1) = \langle f(n+1), f(n+2) \rangle = H(n, g(n))$

Notar que $f(n) = \ell(g(n))$

Además $f(n+1) = r(g(n))$ y $f(n+2) = \text{suma}(\text{prod}(\ell(g(n)), \ell(g(n))), \text{prod}(h_5(n), r(g(n))))$

- Defino $H : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N} / H(x,y) = \langle r(y), \text{suma}(\text{prod}(\ell(y), \ell(y)), \text{prod}(h_5(x), r(y))) \rangle$

$\Rightarrow H = \langle , \rangle \circ (r \circ \ell \times \text{suma} \circ (\text{prod} \circ (\ell \circ \pi_2 \times \ell \circ \pi_2) \times \text{prod} \circ (h_5 \circ \pi_1 \times r \circ \pi_2))) \Rightarrow H$ es RP por comp. de funciones RP's.

$\therefore$ g es RP pues se obtuvo por ERI a partir de H RP.

$\therefore$ Como $f(n) = \ell(g(n))$, es decir $f = \ell \circ g \Rightarrow f$ es RP por comp. de funciones RP's.

Ejercicio 5. .

1. Hallar el programa de código $2^{45}11^{26} - 1$ y decir que función computa.
2. Decidir si la función $f : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$ es computable, siendo

$$f(x, y) = Halt(x, y)^3 + 8\,\alpha(xy)$$

1) $\#P = 2^{45} \cdot 3^0 \cdot 5^0 \cdot 7^0 \cdot 11^{26} - 1 = [(\#I_1, \ldots, \#I_5)] - 1$

- $\#I_1 = 45 \Rightarrow \langle a, \langle b, c\rangle\rangle = 45 \Rightarrow 2^a(2\langle b,c\rangle + 1) - 1 = 45 \Rightarrow 2^a(2\langle b,c\rangle+1) = 46 \Rightarrow a = 1$ y $2\langle b,c\rangle + 1 = 23$

$\Rightarrow a = 1$ y $\langle b,c\rangle = 11 \Rightarrow a = 1$ y $2^b(2c+1) = 12 \Rightarrow a = 1,\ b = 2$ y $c = 1$

$\therefore\ I_1 = [A_1]\ X_1 \leftarrow X_1 - 1$

- $\#I_5 = 26 \Rightarrow \langle a, \langle b,c\rangle\rangle = 26 \Rightarrow 2^a(2\langle b,c\rangle+1) - 1 = 26 \Rightarrow a = 0$ y $\langle b,c\rangle = 13 \Rightarrow a = 0,\ b = 1,\ c = 3$

$\therefore\ I_5 = X_2 \leftarrow X_2 + 1$

- $\#I_2 = \#I_3 = \#I_4 = 0 \Rightarrow I_2 = I_3 = I_4 = \ Y \leftarrow Y$

$\therefore\ P =$

```
[A1] X1 <- X1 - 1
     Y <- Y
     Y <- Y
     Y <- Y
     X2 <- X2 + 1
```

Computa $F: \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N} / F(X_1, X_2) = 0$

2) $f(x, y) = Halt(x, y)^3 + 8\,\alpha(xy)$

Supongo f computable

- Defino $g: \mathbb{N} \to \mathbb{N} / g(x) = f(x,x) = Halt(x,x)^3 + 8\alpha(x \cdot x) = Halt(x,x) + 8\alpha(x,x)$

g es computable por comp. de funciones computables, $g = f \circ (\pi_1 \times \pi_1)$

- Defino $h: \mathbb{N} \to \mathbb{N} / h(x) = g(x) \dot{-} 8\alpha(x \cdot x) = \underbrace{Halt(x,x)^3 + 8\alpha(x,x)}_{\geq 8\alpha(x,x)} \dot{-} 8\alpha(x,x) = Halt(x,x)^3 = Halt(x,x)$ ($= 0$)

h es computable por comp. de funciones computables, $h = RT \circ (g \times prod \circ (h_8 \circ \pi_1 \times \alpha \circ (prod \circ (\pi_1 \times \pi_1))))$

pero $h = Halt \circ (\pi_1 \times \pi_1)$ ABS! que vino de suponer que f era computable

$\therefore$ f no es computable.

2018 2C EJ1

lunes, 14 de junio de 2021 12:42 a. m.

Ejercicio 1. Sea $\mathcal{L}$ un lenguaje de primer orden con igualdad y dos símbolos de función binaria f y g. Sea $\mathcal{I} = (\mathbb{R}, \cdot, +)$. Decidir qué conjunto expresa la siguiente fórmula y demostrarlo:

$$\alpha = \exists\, y \ \exists z((\forall\, w\ f(w,y) = w\ \wedge\ \forall\, u\ g(u,z) = u) \wedge\ z = g(f(x,x), g(x,(g(x,y)))))$$

Interpreto α: $\exists y \exists z ((\underbrace{\forall w \quad w \cdot y = w}_{y=1} \wedge \underbrace{\forall u \quad u + z = u}_{z=0}) \wedge \underbrace{z = x^2 + 2x + y}_{0 = x^2+2x+1})$

α expresa las raíces del polinomio x^2+2x+1, es decir a $\{-1\}$

<u>Demo</u>:

$V_J(\alpha) = 1 \iff \exists y \exists z \quad y=1 \wedge z=0 \wedge z = x^2+2x+y \iff x=-1$

2018 2C EJ2 T

lunes, 14 de junio de 2021 12:55 a. m.

Ejercicio 2. Decidir si $\mathcal{I}_1$ es isomorfo a $\mathcal{I}_2$ en los siguientes casos:

1. Sea $\mathcal{L}$ un lenguaje de primer orden con igualdad y un símbolo de función binaria. Sean $\mathcal{I}_1 = (\mathbb{Z}_4, +)$ e $\mathcal{I}_2 = (G_4, \cdot)$.
2. Sea $\mathcal{L}$ un lenguaje de primer orden con igualdad y un símbolo de función binaria y un símbolo de constante. Sean $\mathcal{I}_1 = (\mathbb{R}, +, 0)$ e $\mathcal{I}_2 = (\mathbb{Q}, +, 0)$.

Ejercicio 3. Hallar una fórmula en un lenguaje de primer orden con igualdad y con un símbolo de predicado P unario, cuyos modelos sean aquellos cuyo universo tenga exactamente 3 elementos y solo uno cumpla la propiedad P.

- $\beta_1 = \neg x = y \wedge \neg y = z \wedge \neg x = z$
- $\alpha = (\underbrace{\exists x \exists y \exists z (\beta_1 \wedge \beta_2)}_{\beta} \wedge \gamma)$ donde
- $\beta_2 = \forall w (w = x \vee w = y \vee w = z)$
- $\gamma = (\exists x\ P(x) \wedge \forall x \forall y (P(y) \wedge P(x) \rightarrow x = y))$

qvq $V_J(\alpha) = 1 \iff \# U_J = 3$ y $\exists!\ x \in U_J / x \in P_J^1$

$V_J(\alpha) = 1 \iff V_J(\beta) = 1 \wedge V_J(\gamma) = 1$

- Veamos que $V_J(\beta) = 1 \iff \# U_J = 3.$

$V_J(\beta) = 1 \iff \exists x \exists y \exists z\ \ x \neq y, y \neq z, x \neq z \wedge \forall w\ \ w = x \vee w = y \vee w = z \iff$ existen exactamente 3 elementos en U_J

$\iff \# U_J = 3.$

- Veamos que $V_J(\gamma) = 1 \iff \exists!\ x \in U_J / x \in P_J^1$

$V_J(\gamma) = 1 \iff \exists\ x \in P_J^1 \wedge \forall x \forall y$ si $x \in P_J^1 \wedge y \in P_J^1 \Rightarrow x = y \iff \exists!\ x \in U_J / x \in P_J^1$

$\therefore V_J(\alpha) = 1 \iff \# U_J = 3$ y $\exists!\ x \in U_J / x \in P_J^1$

2018 2C EJ4

lunes, 14 de junio de 2021 12:56 a. m.

Ejercicio 4. Probar que las funciones $f, g : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ son RP, siendo

$$f(n+1) = 2g(n), \quad g(n+1) = 3f(n), \quad f(0) = 1 \ , g(0) = 0$$

Defino $h : \mathbb{N} \to \mathbb{N} / h(n) = \langle f(n), g(n) \rangle$

- $h(0) = \langle f(0), g(0) \rangle = \langle 1, 0 \rangle \in \mathbb{N}$
- $h(n+1) = \langle f(n+1), g(n+1) \rangle = H(n, h(n))$

Por otra parte tenemos que :

$f(n) = l(h(n))$ y $g(n) = r(h(n)) \Rightarrow f(n+1) = prod(h_2(n), r(h(n)))$ y $g(n+1) = prod(h_3(n), l(h(n)))$

$\Rightarrow$ Defino $H : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N} / H(x, y) = \langle prod(h_2(x), r(y)), prod(h_3(x), l(y)) \rangle$

$\Rightarrow H = \langle , \rangle \circ (prod \circ (h_2 \circ \pi_1 \times r \circ \pi_2) \times prod \circ (h_3 \circ \pi_1 \times l \circ \pi_2)) \Rightarrow H$ es RP por comp. de funciones RP's.

$\therefore$ h es RP pues se obtuvo por ERI a partir de H RP.

$\therefore$ Como $f = l \circ h$ y $g = r \circ h \Rightarrow$ f y g son RP por comp. de funciones RP's.

2018 2C EJ5

lunes, 14 de junio de 2021 12:56 a. m.

Ejercicio 5. Decidir si las siguientes funciones son computables:

1. $f : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$, siendo
$$f(x,y) = 2Halt(x,y) \dot{-} 3Halt(x,y)^{Halt(x,y)+2}$$
2. $g : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$, siendo
$$g(x,y) = 2Halt(x,y) + 3$$

1) $f(x,y) = 2Halt(x,y) \dot{-} 3\,Halt(x,y)^{Halt(x,y)+2}$

Como $Halt(x,y)+2 \geq 2 \Rightarrow Halt(x,y)^{Halt(x,y)+2} = Halt(x,y)$

$\Rightarrow f(x,y) = 2Halt(x,y) \dot{-} 3\,Halt(x,y).$

$$\begin{cases} \text{Si } Halt(x,y) = 1 \Rightarrow 2Halt(x,y) \dot{-} 3\,Halt(x,y). = 2 \dot{-} 3 = 0 \\ \text{Si } Halt(x,y) = 0 \Rightarrow 2Halt(x,y) \dot{-} 3\,Halt(x,y). = 0 \dot{-} 0 = 0 \end{cases}$$

$\therefore f(x,y) = 0 \quad \forall (x,y) \in \mathbb{N}^2 \Rightarrow f = cero \circ \pi_1 \Rightarrow f$ es computable por comp. de computables.

2) $g(x,y) = 2Halt(x,y) + 3$

Supongo g computable y defino $f : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N} \,/\, f(x,y) = \left\lfloor \frac{g(x+y) \dot{-} 3}{2} \right\rfloor = coc\left(RT\left(g(x,y), h_3(x)\right), h_2(x)\right)$

$\Rightarrow f = coc \circ \left(RT \circ \left(g \times h_3 \circ \pi_1\right) \times h_2 \times \pi_1\right) \Rightarrow f$ es computable por comp. de computables

Reescribo f como $f(x,y) = \left\lfloor \frac{2Halt(x,y)+3 \dot{-} 3}{2} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{2Halt(x,y)+3-3}{2} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{2Halt(x,y)}{2} \right\rfloor = Halt(x,y)$

$2Halt(x,y)+3 \geq 3$

$\Rightarrow f = Halt$ y f es computable. ABS! $\therefore g$ no es computable pues el absurdo vino de suponer que lo era.

2018 R2C EJ1

lunes, 14 de junio de 2021 01:57 a. m.

Ejercicio 1. Sea $\mathcal{L}$ un lenguaje de primer orden con igualdad y un símbolo de función binaria f^2 y un símbolo de constante c. Sea $\mathcal{I} = (\mathbb{Z}, \cdot, 3)$. Probar que el conjunto $A = \{x \in \mathbb{Z} : x$ es múltiplo de 3 y x no es múltiplo de 9$\}$ es expresable.

$\alpha(x) = \exists y \exists z \left(y = c \wedge z = f(c,c) \wedge \exists w \; x = f(y,w) \wedge \neg \exists t \; x = f(z,t) \right)$

Interpreto $\alpha(x)$: $\exists y = 3, \exists z = 9 \wedge \exists w \; x = 3w \wedge \neg \exists t \; x = 9t$

- Si $x \in A \Rightarrow \exists w \in \mathbb{Z} / x = 3w$ pero $\nexists t \in \mathbb{Z} / x = 9t \Rightarrow V_{\mathcal{I}}(\alpha(x)) = 1$
- Si $x \notin A$

$\left.\begin{array}{l} \text{c1) } x \neq \dot{3} \Rightarrow \nexists w \in \mathbb{Z} / x = 3w \\ \text{c2) } x = \dot{9} \Rightarrow \exists t \in \mathbb{Z} / x = 9t \end{array}\right\} \Rightarrow V_{\mathcal{I}}(\alpha(x)) = 0$

$\therefore$ $\alpha(x)$ expresa a A.

2018 R2C EJ2

lunes, 14 de junio de 2021 02:16 p. m.

Ejercicio 2. Sea $\mathcal{L}$ un lenguaje de primer orden con igualdad y símbolo de función binaria f^2. Sean $\mathcal{I}_1 = (\mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_4, +)$ e $\mathcal{I}_2 = (\mathbb{Z}_{16}, +)$ interpretaciones de $\mathcal{L}$. Decidir si $\mathcal{I}_1 \simeq \mathcal{I}_2$.

Supongo que existe $f: \mathbb{Z}_{16} \to \mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_4$ iso.

$\Rightarrow f(\bar{a} +_{16} \bar{b}) = f(\bar{a}) +_{4\times 4} f(\bar{b})$ y f biy.

- $f(\bar{0}) = f(\bar{0}+\bar{0}) = f(\bar{0}) + f(\bar{0}) \Rightarrow f(\bar{0}) = (\bar{0}, \bar{0})$.
- $f(\bar{4}) = f(\bar{2}+\bar{2}) = f(\bar{2}) + f(\bar{2}) = f(\bar{1}+\bar{1}) + f(\bar{1}+\bar{1}) = f(\bar{1}) + f(\bar{1}) + f(\bar{1}) + f(\bar{1}) = 4f(\bar{1})$

Supongo $f(\bar{1}) = (\bar{a}, \bar{b}) \Rightarrow f(\bar{4}) = 4f(\bar{1}) = 4(\bar{a}, \bar{b}) = (\overline{4a}, \overline{4b}) = (\bar{0}, \bar{0}) \Rightarrow f(\bar{0}) = f(\bar{1})$ pero $\bar{0} \neq \bar{1}$ ABS!

$\therefore \nexists$ iso de $\mathcal{I}_2$ en $\mathcal{I}_1$ y por simetría $\nexists$ iso de $\mathcal{I}_1$ en $\mathcal{I}_2$

Ejercicio 3. Sea $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ tal que $f(n) = [\sqrt{\frac{n+5}{3}}]$. Probar que f es RP.

$[x] = \min_{t \leq x} \,/\, x < t+1 \implies f(n) = \min_{t \leq \sqrt{\frac{n+5}{3}}} \sqrt{\frac{n+5}{3}} < t+1 = \min_{t \leq n+5} \underbrace{n+5 < 3(t+1)^2}_{Cp(n,t)}$

- $n+5 > 3 \implies \frac{n+5}{3} > 1 \implies \sqrt{\frac{n+5}{3}} \leq \frac{n+5}{3} \leq n+5$

$\therefore$ $f(n) = \text{MAp}(n, n+5)$

- $Cp(n,t) = n+5 < 3(t+1)^2 \implies Cp = \text{MENOR} \circ (\text{SUMA} \circ (\pi_1 \times h_5 \circ \pi_1) \times \text{PROD} \circ (h_3 \circ \pi_1 \times \text{POT} \circ (\pi_2 \times h_2 \circ \pi_1)))$

$\implies Cp$ es RP por comp. de funciones RP $\implies$ "P es RP"

$\therefore$ $f = \text{MAp} \circ (\pi_1 \times \text{SUMA} \circ (\pi_1 \times h_5 \circ \pi_1)) \implies f$ es RP por composición de RP's (MAp con P RP, π_1, suma y h_5).

2018 R2C EJ4

lunes, 14 de junio de 2021 02:44 p. m.

Ejercicio 4. .

1. Hallar el programa de código $N = 2^7 11^4 13^6 - 1$.
2. Decidir qué función computa el programa N y si la función $g : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ $g(n) = Halt(n, N)$ es computable.

1) $\#P = 2^7 \cdot 3^0 \cdot 5^0 \cdot 7^0 \cdot 11^4 \cdot 13^6 - 1 = [(\#I_1, \dots, \#I_6)] - 1$

- $\#I_1 = 7 \Rightarrow \langle a, \langle b, c \rangle\rangle = 7 \Rightarrow 2^a(2\langle b+c\rangle + 1) - 1 = 7 \Rightarrow a=3,\ b=0,\ c=0 \Rightarrow I_1 = [C_1]\ Y \leftarrow Y$
- $\#I_2 = \#I_3 = \#I_4 = 0 \Rightarrow I_2 = I_3 = I_4 = Y \leftarrow Y$
- $\#I_5 = 4 \Rightarrow \langle a, \langle b, c \rangle\rangle = 4 \Rightarrow 2^a(2\langle b, c\rangle + 1) - 1 = 4 \Rightarrow a = 0,\ \langle b, c\rangle = 2 \Rightarrow a = 0,\ 2^b(2c+1) - 1 = 2$

$\Rightarrow a = 0,\ b = 0,\ c = 1 \Rightarrow I_5 = X_1 \leftarrow X_1$

- $\#I_6 = 6 \Rightarrow \langle a, \langle b, c \rangle\rangle = 6 \Rightarrow 2^a(2\langle b, c\rangle + 1) - 1 = 6 \Rightarrow a = 0,\ \langle b, c\rangle = 3 \Rightarrow a=0, b=2, c=0 \Rightarrow I_6 = Y \leftarrow Y - 1$

$\therefore P =$
```
[C1] Y <- Y
     Y <- Y
     Y <- Y
     Y <- Y
     X1 <- X1
     Y <- Y - 1
```

2) P computa $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N} \,/\, f(x_1) = 0$

$\therefore$ Como P termina para cualquier entrada, $g : \mathbb{N} \to \mathbb{N} \,/\, g(n) = Halt(n, N) = h_1(n)$

$\Rightarrow g = h_1 \circ \pi_1 \Rightarrow g$ es computable por comp. de computables.

Ejercicio 5. Hallar $\mathcal{I}_1$ con universo infinito que sea modelo para α e $\mathcal{I}_2$ con universo infinito que no sea modelo para α siendo $\alpha =$:

$$\forall x \ \forall y \ (f(x,y) = f(y,x) \to x = y)$$

- Propongo $\mathcal{I}_1 = (\mathbb{R}, -)$ como modelo de α

Interpreto α: $\forall x \in \mathbb{R} \ \forall y \in \mathbb{R} \ (x - y = y - x \to x = y)$

$V_{\mathcal{I}}(\alpha) = 1 \iff \forall x \in \mathbb{R} \ \forall y \in \mathbb{R} \ (x - y = y - x \to x = y) \iff \forall x \in \mathbb{R} \ \forall y \in \mathbb{R} \ (\underbrace{2x = 2y}_{x=y} \to x = y)$ **VERDADERO**

$\therefore$ $\mathcal{I}_1$ es modelo de α.

- Propongo $\mathcal{I}_2 = (\mathbb{R}, +)$ como modelo de α

Interpreto α: $\forall x \in \mathbb{R} \ \forall y \in \mathbb{R} \ (x + y = y + x \to x = y)$

Tomo $x = 3 \wedge y = 7 \Rightarrow x + y = 10 = y + x$ pero $x \neq y \Rightarrow V_{\mathcal{I}}(\alpha) = 0$.

$\therefore$ $\mathcal{I}_2$ no es modelo de α.

2019 2C EJ1

lunes, 14 de junio de 2021   03:12 p. m.

Ejercicio 1. Sea $\mathcal{L}$ un lenguaje de primer orden con igualdad, un símbolo de función binaria f y un símbolo de constante c.

$$\alpha = \forall x \forall y \ (f(x,c) = f(x,x) \rightarrow f(x,y) = x)$$

1. Decidir si α es satisfacible.
2. Decidir si α es universalmente válida.

$x+1 = x+x \Rightarrow x+y = x$

$x \cdot 0 = x \cdot x \Rightarrow xy = x$

1) α es sat si $\exists \mathcal{I}$ int y v val / $V_{\mathcal{I},v}(\alpha) = 1$.

Defino $\mathcal{I}_1 = (\mathbb{N}, \cdot, 0)$

Interpreto α: $\forall x \forall y \ (x \cdot 0 = x \cdot x \rightarrow xy = x)$

$V_{\mathcal{I}}(\alpha) = 1 \iff \forall x \forall y \ (\underbrace{x \cdot 0 = x \cdot x}_{0=x} \rightarrow xy = x) \iff \forall x \forall y$ si $x = 0 \rightarrow 0 \cdot y = 0$ ✓ VERDADERO

$\therefore$ como encontré una $\mathcal{I}$ modelo de $\alpha \Rightarrow \exists \mathcal{I}$ int y v val (en realidad cualquiera) / $V_{\mathcal{I},v}(\alpha) = 1 \Rightarrow \alpha$ es sat.

2) α es u.v. si $\forall \mathcal{I}$ int y $\forall v$ val, $V_{\mathcal{I},v}(\alpha) = 1$. Basta proponer $\mathcal{I}$ int / $\mathcal{I}$ no sea modelo de α.

Defino $\mathcal{I}_2 = (\mathbb{N}, \pi_2^2, 0)$

Interpreto α: $\forall x \forall y \ (0 = x \rightarrow y = x)$.

Basta tomar $y = 1 \Rightarrow$ si $x = 0 \rightarrow 1 = 0$ FALSO

Encontré $\mathcal{I}_2$ / $V_{\mathcal{I}_2}(\alpha) = 0 \Rightarrow \alpha$ no es u.v.

2019 2C EJ2

lunes, 14 de junio de 2021 03:30 p. m.

Ejercicio 2. Sea $\mathcal{L}$ un lenguaje de primer orden con igualdad y un símbolo de función binaria f. Sea $\mathcal{I}_1 = (\mathbb{R}^{2\times 2}, \cdot)$. Decidir si $C = \{A : A \text{ es inversible }\}$ es expresable.

- Propongo $\alpha_{Id}(x) = \forall Y (f(X,Y) = Y \wedge f(Y,X) = Y)$

Interpreto $\alpha_{Id}(x)$: $\forall Y \in \mathbb{R}^{2\times 2} \quad XY = Y \wedge YX = Y$

$V_I(\alpha_{Id}(x)) = 1 \iff X = Id$ (Álgebra) $\quad \therefore \alpha_{Id}$ distingue a Id.

- Propongo $\alpha_C(x) = \exists Y (\alpha_{Id}(Y) \wedge \exists A (f(X,A) = Y \wedge f(A,X) = Y))$

Interpreto $\alpha_C(x)$: $\exists Y,\ Y = Id \wedge \exists A \quad XA = Id \wedge AX = Id$

$V_I(\alpha_C(X)) = 1 \iff \exists A \quad XA = Id \wedge AX = Id \iff A$ es inversible (Álgebra)

$\therefore \alpha_C$ expresa $C \implies C$ es expresable.

2019 2C EJ3

lunes, 14 de junio de 2021 03:53 p. m.

Ejercicio 3. Sea $\mathcal{L}$ un lenguaje de primer orden con igualdad y un símbolo de función binaria f. Sea $\mathcal{I}_1 = (\mathbb{R}^{2\times 2}, \cdot)$.

1. Probar que $F : \mathbb{R}^{2\times 2} \to \mathbb{R}^{2\times 2}$ tal que $F(X) = A^{-1}XA$ es un isomorfismo para cualquier matriz A inversible.
2. Decidir si la matriz $B = 3e_{11} + 4e_{12}$ es distinguible.

1) qvq F es un iso de $\mathcal{I}_1$ en $\mathcal{I}_1$.

1) BIYECTIVIDAD:

iny_ si $F(X) = F(Y) \Rightarrow A^{-1}XA = A^{-1}YA \Rightarrow AA^{-1}XAA^{-1} = AA^{-1}YAA^{-1} \Rightarrow X = Y$ ✓

sobrey_ Sea $X \in \mathbb{R}^{2\times 2}$, tomo $AXA^{-1} \in \mathbb{R}^{2\times 2} \Rightarrow F(AXA^{-1}) = A^{-1}AXA^{-1}A = X$ ✓ $\therefore$ F es biy.

2) CONSTANTES: $\mathcal{C} = \emptyset$

3) FUNCIONES:

• _ qvq $F(X\cdot Y) = F(X)\cdot F(Y)$

$F(X\cdot Y) = A^{-1}XYA = A^{-1}X\,Id\,YA = A^{-1}XAA^{-1}YA = F(X)\cdot F(Y)$ ✓

4) PREDICADOS:

= _ qvq $X = Y \iff F(X) = F(Y)$

$\Rightarrow$) F es función $\Leftarrow$) F es iny ✓

$\therefore$ F es un iso de $\mathcal{I}_1$ en $\mathcal{I}_1$.

2) qv si $B = 3e_{11} + 4e_{12} = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ es distinguible $\forall$ A inversible en $\mathcal{I}$.

tomo $A = \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 7 & 4 \end{pmatrix}$, A es inversible pues $\det(A) = -1 \neq 0$

$\Rightarrow A^{-1} = -1\begin{pmatrix} 4 & -3 \\ -7 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 & 3 \\ 7 & -5 \end{pmatrix}$

$\Rightarrow F(B) = \begin{pmatrix} -4 & 3 \\ 7 & -5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 7 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -172 & -100 \\ 301 & 193 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = B \Rightarrow$ B no es distinguible por corolario.

2019 2C EJ4 T

lunes, 14 de junio de 2021 04:15 p. m.

Ejercicio 4. Probar que las funciones $f, g : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ son RP, sabiendo que $h : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ es RP siendo

$$h(x) = < f(x) + g(x), < f(x) - g(x), g(x) - f(x) >>$$

y sabiendo que $f(2x) > g(2x)$ y $f(2x+1) < g(2x+1)$, $\forall\, x \in \mathbb{N}$.

2019 2C EJ5

lunes, 14 de junio de 2021 04:15 p. m.

Ejercicio 5. Hallar el programa de código 132847. Decir que función computa y decidir si $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ tal que $f(x) = \sum_{k=0}^{x} Halt(k, 132847)$ es computable.

$$\#P = 132847 = 132848 - 1 = 2^4 \cdot 3^0 \cdot 5^0 \cdot 7^0 \cdot 11^0 \cdot 13^0 \cdot 17^0 \cdot 19^2 \cdot 23^1 - 1 = [(\#I_1, \dots, \#I_9)] - 1$$

132848	2
66424	2
33212	2
16606	2
8303	19
437	19
23	23

- $\#I_1 = 4 \Rightarrow \langle a, \langle b, c\rangle\rangle = 4 \Rightarrow 2^a(2\langle b,c\rangle + 1) - 1 = 4 \Rightarrow a = 0 \wedge 2\langle b,c\rangle + 1 = 5$

  $\Rightarrow a = 0 \wedge 2^b(2c+1) - 1 = 2 \Rightarrow a = 0,\ b = 0,\ c = 1 \Rightarrow I_1 = X_1 \leftarrow X_1$

- $\#I_2 = \dots = \#I_7 = 0 \Rightarrow I_2 = \dots = I_7 = Y \leftarrow Y$

- $\#I_8 = 2 \Rightarrow \langle a, \langle b, c\rangle\rangle = 2 \Rightarrow 2^a(2\langle b,c\rangle + 1) - 1 = 2 \Rightarrow a = 0 \wedge 2\langle b,c\rangle + 1 = 3$

  $\Rightarrow a = 0 \wedge 2^b(2c+1) - 1 = 1 \Rightarrow a = 0,\ b = 1,\ c = 0 \Rightarrow I_8 = Y \leftarrow Y + 1$

- $\#I_9 = 1 \Rightarrow \langle a, \langle b, c\rangle\rangle = 1 \Rightarrow 2^a(2\langle b,c\rangle + 1) - 1 = 1 \Rightarrow a = 1, b = 0, c = 0 \Rightarrow I_9 = [A_1]\ Y \leftarrow Y$

$\therefore P =$

```
     X1 <- X1
     Y <- Y
     Y <- Y
     Y <- Y
     Y <- Y
     Y <- Y
     Y <- Y
     Y <- Y + 1
[A1] Y <- Y
```

- P computa la función $g : \mathbb{N} \to \mathbb{N} \,/\, g(X_1) = 1$
- Como el programa termina siempre para cualquier entrada, $Halt(x, 132847) = 1 \quad \forall x \in \mathbb{N}$.

$\Rightarrow f(x) = \sum_{k=0}^{x} Halt(x, 132847) = \sum_{k=0}^{x} 1 = x + 1 \Rightarrow f = suc \circ \pi_1 \Rightarrow f$ es comp. por comp. de comp.

2019 R2C EJ1

lunes, 14 de junio de 2021   04:51 p. m.

Ejercicio 1. Sea $\mathcal{L}$ un lenguaje de primer orden con igualdad, un símbolo de predicado binario Py un símbolo de función unaria f. Sea $\mathcal{I} = (\mathbb{Q}, \leq, f(x) = x+1)$. Determinar qué conjunto expresa α

$$\alpha(x) = \neg\exists y(P(x,y) \wedge P(y, f(x)) \wedge \neg x = y \wedge \neg y = f(x))$$

- Interpreto $\alpha(x)$: $\nexists y \in \mathbb{Q} / (x \leq y \wedge y \leq x+1 \wedge x \neq y \wedge y \neq x+1) = \nexists y \in \mathbb{Q} / x < y \wedge y < x+1 = \nexists y \in \mathbb{Q} / x < y < x+1$

= "No existe un racional entre x y $x+1$" $\Longrightarrow$ Busco un x que entre él y $x+1$ no haya números racionales

Esto es falso $\forall x \in \mathbb{Q}$ pues puedo tomar $y = x + \frac{1}{2} \in \mathbb{Q}$ $\quad \therefore$ $\alpha(x)$ expresa el $\emptyset$.

2019 R2C EJ2

lunes, 14 de junio de 2021 05:06 p. m.

Ejercicio 2. Sea $\mathcal{L}$ un lenguaje de primer orden con igualdad, un símbolo de función binaria f y un un símbolo de predicado ternario P.
Proponer un enunciado universalmente válido.

- Propongo $\alpha = \exists x (P(x) \vee \neg P(x))$

Veamos que α es u.v. (i.e. $\forall\ \mathfrak{I}$ int, $\forall v$ val, $V_{\mathfrak{I},v}(\alpha) = 1$)

Obs: Como la valuación afecta a las variables libres, y α es un enunciado, es decir tiene todas sus variables ligadas, la valuación no incide en el valor de verdad de α $\Rightarrow$ Basta ver que $V_{\mathfrak{I}}(\alpha) = 1$ $\forall\ \mathfrak{I}$ int.

$\Rightarrow V_{\mathfrak{I}}(\alpha) = 1 \iff \exists x (P(x) \vee \neg P(x))$

Como $U_{\mathfrak{I}} \neq \emptyset$ tomo $x = u \in U_{\mathfrak{I}}$

$$\left.\begin{array}{ll} \text{c1)} & x \in P_{\mathfrak{I}} \Rightarrow V_{\mathfrak{I}}(\alpha) = 1 \\ \text{c2)} & x \notin P_{\mathfrak{I}} \Rightarrow V_{\mathfrak{I}}(\alpha) = 1 \end{array}\right\} \Rightarrow V_{\mathfrak{I}}(\alpha) = 1 \qquad \therefore \alpha \text{ es u.v.}$$

2019 R2C EJ3

lunes, 14 de junio de 2021 05:42 p. m.

Ejercicio 3. Sea $\mathcal{L}$ un lenguaje de primer orden con igualdad y un símbolo de función binaria. Sea $\mathcal{I} = (\mathbb{Z}_5, \cdot)$.
Hallar todos los elementos distinguibles. Justificar.

x	x^2	x^3
0	0	0
1	1	1
2	4	3
3	4	2
4	1	4

- Elementos distinguibles

1) Propongo $\alpha_0(x) = \forall y \ f(x,y) = x$.

$V_J(\alpha_0(x)) = 1 \iff \forall y \in \mathbb{Z}_5 \ \ xy = x \iff x = \overline{0}$

$\therefore \alpha_0$ distingue al $\overline{0}$.

2) Propongo $\alpha_1(x) = \forall y \ f(x,y) = y$.

$V_J(\alpha_1(x)) = 1 \iff \forall y \in \mathbb{Z}_5 \ \ xy = y \iff x = \overline{1}$

$\therefore \alpha_1$ distingue al $\overline{1}$.

3) Propongo $\alpha_4(x) = \exists y(\alpha_1(y) \wedge f(x,x) = y \wedge \neg\alpha_1(x))$

$V_J(\alpha_4(x)) = 1 \iff \exists y \in \mathbb{Z}_5 \ / \ y = \overline{1} \wedge x^2 = 1 \wedge x \neq \overline{1} \iff x = \overline{4}$

$\therefore \alpha_4$ distingue al $\overline{4}$.

- Elementos no distinguibles

Defino $f: \mathbb{Z}_5 \to \mathbb{Z}_5 \ / \ f(x) = x^3$

x	x^2	x^3
0	0	0
1	1	1
2	4	3
3	4	2
4	1	4

1) f es biy

2) $\mathcal{C} = \emptyset$

3) $f(x \cdot y) = (xy)^3 = x^3 y^3 = f(x) \cdot f(y)$

4) $x = y \Rightarrow f(x) = f(y)$ pues f es función, $f(x) = f(y) \Rightarrow x = y$ pues f es iny.

$\therefore f$ es un iso.

Como $f(\overline{2}) = \overline{3}$ y $f(\overline{3}) = \overline{2} \Rightarrow$ por corolario, $\overline{2}$ y $\overline{3}$ no son distinguibles.

2019 R2C EJ4

lunes, 14 de junio de 2021 05:43 p. m.

Ejercicio 4. Sea $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ tal que

$$f(n) = \begin{cases} 5f(n-1) & si \quad n \text{ es impar} \\ \text{suma de los cuadrados de los naturales menores iguales a n} & si \quad n \text{ es par} \end{cases}$$

- $f(0) =$ suma de los cuadrados de los naturales $\leq 0 = 0 \in \mathbb{N}$
- $f(n+1) = \begin{cases} 5f(n) & \text{si } n \text{ es par} \\ \text{suma de los cuadrados de los naturales} \leq n+1 & \text{si } n \text{ es impar} \end{cases} = H(n, f(n))$

Defino $H: \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N} \,/\, H(x,y) = \neg\text{IMPAR}(x) \cdot 5 \cdot y + \text{IMPAR}(x) \cdot \underbrace{\sum_{k=0}^{suc(x)} (k \cdot k)}_{SA_F(x,\, suc(x))}$ con $F = \text{PROD} \circ (\pi_1 \times \pi_1)$

$SA_F(x, suc(x))$: RP pues F es RP y es comp. de RP.

$F = \text{PROD} \circ (\pi_1 \times \pi_1)$: RP por comp de RP.

$\therefore H = \text{suma} \circ \Big(\text{prod} \circ (\neg\text{IMPAR} \circ \pi_1 \times \text{prod} \circ (h_5 \circ \pi_1 \times \pi_2)) \times \text{prod} \circ (\text{IMPAR} \circ \pi_1 \times SA_F \circ (\pi_1 \times suc \circ \pi_1))\Big)$

$\Rightarrow$ H es RP por comp. de funciones RP.

$\therefore$ f es RP pues se obtuvo por ERI a partir de H RP.

2019 R2C EJ5

lunes, 14 de junio de 2021 05:43 p. m.

Ejercicio 5. Decidir si $f^2 : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ es computable,

$$f(x,y) = \min_{t \le x+y} (\alpha(Halt(t,x)) \wedge t > x-1)$$

Supongo f computable.

- Defino $g: \mathbb{N} \to \mathbb{N} \,/\, g(x) = f(x,0) \implies g = f \circ (\pi_1 \times cero \circ \pi_1) \implies g$ es computable por comp. de computables.

  $g(x) = \min\limits_{t \le x} (\alpha(Halt(t,x)) \wedge t > x-1) \implies$ Como $t \le x \wedge t > x-1$, el único valor que toma t es x

$\implies g(x) = \alpha(Halt(x,x)) \cdot x$

- Defino $h: \mathbb{N} \to \mathbb{N} \,/\, h(x) = \alpha(coc(g(x), x)) \implies h = \alpha \circ coc \circ (g \times \pi_1) \implies h$ es computable por comp. de computables.

  $h(x) = \alpha\left(\left\lfloor \frac{\alpha(Halt(x,x)) \cdot x}{x} \right\rfloor\right) = \alpha(\alpha(Halt(x,x))) = Halt(x,x)$

  si $x=0$ $coc(*,0)=0 \implies \alpha(0) = 1 = Halt(x,x) = \alpha(\alpha(Halt(x,x)))$

$\therefore h = Halt \circ (\pi_1 \times \pi_1)$ es computable ABS! $\implies f$ no es computable.

2020 1C EJ1

lunes, 14 de junio de 2021 06:48 p. m.

Pregunta 1

Sea L un lenguaje de 1er orden con = y una función binaria. Sea $I = (\mathbb{C}, \cdot)$ es decir el universo es el conjunto de números complejos y f se interpreta con el producto. Decidir si el conjunto G_3 es expresable

G_3 se define como el conjunto de raíces 3-ésimas de la unidad $\Rightarrow$ Los complejos z que satisfacen $z^3 = 1$

- Propongo $\alpha_1(x) = \forall y\ f^2(x,y) = y$

$V_I(\alpha_1(x)) = 1 \iff \forall y \in \mathbb{C}\ \ x \cdot y = y \iff x = 1$

$\therefore\ \alpha_1$ expresa a $\{1\}$.

- Propongo $\alpha_{G_3}(x) = \exists y \left(\alpha_1(y) \wedge f^2(x, f^2(x,x)) = y\right)$

$V_I(\alpha_{G_3}(x)) = 1 \iff \exists y \in \mathbb{C} \,/\, y = 1 \wedge x \cdot x \cdot x = y \iff x^3 = 1 \iff x \in G_3$

$\therefore\ \alpha_{G_3}$ expresa a G_3.

2020 1C EJ2

lunes, 14 de junio de 2021 07:10 p. m.

Decidir si f es compubale siendo

$f: \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}, f(x,y) = < 4^{Halt(x,y)} 5^{Halt(x,y)}, 3\ Halt(x,y)^4 >$

Escribir la definición de todas las funciones que usa, si ya fue probada en clase su computabilidad o están en la práctica, alcanza con definirlas y aclararlo.

- Supongo f computable.

Defino $g: \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N} / g(x) = \ell(f(x))[2] \Rightarrow g = \bullet[\bullet] \circ (\ell \circ f \times h_2 \circ \pi_1) \Rightarrow g$ es computable por comp. de computables.

$\Rightarrow g(x,y) = V_{p_2}(4^{Halt(x,y)} \cdot 5^{Halt(x,y)}) = Halt(x,y) \Rightarrow g = Halt$ pero g es computable. ABS!

$\therefore$ f no es computable.

2020 1C EJ3

lunes, 14 de junio de 2021 07:18 p. m.

Sea L un lenguaje con igualdad, una función binaria g y una constante c. Decidir si F es un isomorfismo entre I1 e I2 siendo

$I1 = (\mathbb{R},\ g_I(x,y) = x + y,\ 0)$

$I2 = (\mathbb{R}_{>0},\ g_I(x,y) = xy,\ 1)$

$F: \mathbb{R} \to \mathbb{R}_{>0} / F(x) = 11^x$

Si F fuese un isomorfismo entonces deberá cumplir:

1) Biyectividad:

$\exists\ F^{-1}(x) = \log_{11}(x) \Rightarrow F$ es biyectiva. ✓

2) Constantes: $F(C_{I_1}) = C_{I_2}$

$\Rightarrow F(0) = 11^0 = 1$ ✓

3) Funciones: $F(f^k_{I_1}(u_1,\ldots,u_k)) = f^k_{I_2}(F(u_1),\ldots,F(u_k))$ $\quad u_1,\ldots,u_k \in U_{I_1}$

$\Rightarrow$ qvq $F(x+y) = F(x).F(y)$

$F(x+y) = 11^{x+y} = 11^x \cdot 11^y = F(x).F(y)$ ✓

4) Predicados: $(u_1,\ldots,u_k) \in P^k_{I_1} \Leftrightarrow (F(u_1),\ldots,F(u_k)) \in P^k_{I_2}$

$\Rightarrow$ qvq $x = y \Leftrightarrow F(x) = F(y)$

$\Rightarrow)$ F es función ✓

$\Leftarrow)$ F es iny ✓

$\therefore$ F es un iso de I_1 en I_2.

Probar que g y f son funciones recursivas primitivas

$f, g: \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, $f(x) = [(\sqrt{5}+\sqrt{13})x]$ y
$g(x) =$ *cantidad de numeros multiplos de 3 menores o iguales a* $f(x)$

Las funciones que hayan sido probadas en clase que son RP o que estén en las prácticas pueden usarlas pero definiéndolas y aclarándolo.

1) $f(x) = [(\sqrt{5}+\sqrt{13})x]$

$[x] = \min\limits_{t \le x} \; x < t+1 \implies f(x) = \min\limits_{t \le (\sqrt{5}+\sqrt{13})x} \; (\sqrt{5}+\sqrt{13})x < t+1 =$

- $\sqrt{5}+\sqrt{13} \simeq 5{,}84 \implies (\sqrt{5}+\sqrt{13})x \le 6x$
- $(\sqrt{5}+\sqrt{13})x < t+1 \implies (5+2\sqrt{5}\sqrt{13}+13)x < (t+1)^2 \implies 17x + 2\sqrt{65}x < (t+1)^2 \implies 2\sqrt{65}x < (t+1)^2 - 17x \implies 4 \cdot 65 x^2 < ((t+1)^2 - 17x^2)^2$

$\implies \underbrace{260 x^2 < ((t+1)^2 - 17x^2)^2}_{C_p(x,t)}$ $C_p(x,t)$ es RP por comp. de RP (h_j, π_j, menor, prod, pot, RT)

$(t+1)^2 - 17x^2 > 2\sqrt{65}x > 0$

$\therefore \; f(x) = \min\limits_{t \le 6x} C_p(x,t) \implies f = MA_p \circ (\pi_1 \times prod \circ (h_6 \circ \pi_1 \times \pi_1)) \implies f$ es RP por comp. de funciones RP.

2) $g(x) = \sum\limits_{K=0}^{f(x)} \underbrace{DIV(h_3(K), K)}_{h(K)} \implies g = SA_h \circ f \implies g$ es RP por comp. de RP (pues SA_h es RP)

$h(K)$ RP por comp. de RP (DIV, h_3, π_1)

2020 1C EJ5

lunes, 14 de junio de 2021 07:22 p. m.

Decidir si f es compubale siendo

$f: \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$, $f(x,y) = <6^{x+y}, \alpha(\sum_{k=0}^{y} Halt(x,k))> + 2$

Escribir la definición de todas las funciones que usa, si ya fue probada en clase su computabilidad o están en la práctica, alcanza con definirlas y aclararlo.

f es computable. Demo:

$Halt(x,0) = 1 \quad \forall x$ pues el prog. de código 0 es $Y \leftarrow Y$, que termina $\forall$ entrada

$\therefore \sum_{k=0}^{y} Halt(x,k) \geq 1$ pues $y \geq 0 \Rightarrow \alpha\left(\sum_{k=0}^{y} Halt(x,k)\right) = 0$

$\Rightarrow f(x,y) = <6^{x+y}, 0> + 2 \quad \Rightarrow f = suma \circ (<,> \circ (pot \circ (h_6 \circ \pi_1 \times suma \circ (\pi_1 \times \pi_2)) \times cero \circ \pi_1) \times h_2 \circ \pi_1)$

$\therefore$ f es computable por comp. de computables.

2020 1C EJ6 TF

lunes, 14 de junio de 2021 07:22 p. m.

Sea L un lenguaje de 1er orden con igualdad y un predicado unario P. Decir todas las interpretaciones que son modelo de $\alpha = \neg \exists x_1 \exists x_2 (\neg x_1 = x_2 \wedge \forall z (z = x_1 \vee z = x_2) \wedge P(x_1))$

Interpreto α:

2020 R1C EJ1 T

lunes, 14 de junio de 2021 07:39 p. m.

Decidir si la funcion f es computable, siendo

$$f: \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N} \,/\, f(x,y) = \sum_{k=0}^{5y} \alpha(Halt(x+2k,\ x+y^2+8k))$$

2020 R1C EJ2 T

lunes, 14 de junio de 2021 07:39 p. m.

Probar que la funcion f es recursiva primitiva, siendo

$f: \mathbb{N} \to \mathbb{N} / f(n) = a_n$, donde

$a_{n+2} = (a_n + a_{n+1} + 1)^2$

$a_0 = 3,\ a_1 = 2$

2020 R1C EJ3 T

lunes, 14 de junio de 2021 07:39 p. m.

Sea L un lenguaje con igualdad y P^2, *sea* $I = (P(\mathbb{N}), \subset)$

1) Probar que existen elementos no distinguibles

2) Decidir si existen elementos distinguibles

2020 2C EJ1 T

lunes, 14 de junio de 2021 07:41 p. m.

Sea L un lenguaje de 1er orden con igualdad, un símbolo de constante y un símbolo de función

$$Sea\ F: U_I \to U_I\ tal\ que\ F(x) = \begin{cases} \frac{1}{x^3} & si\ x \neq 0 \\ 0 & sino \end{cases}$$

Seleccionar todas las Interpretaciones en las que F es un isomorfismo

Respuestas seleccionadas:

$I = (\mathbb{R}, 0, \cdot)$

$I = (\mathbb{R}_{\geq 0}, 0, \cdot)$

Respuestas:

$I = (\mathbb{R}[X], 0, \cdot)$

$I = (\mathbb{R}, 0, \cdot)$

$I = (\mathbb{N}, 0, \cdot)$

$I = (\mathbb{C}, 0, \cdot)$

$I = (\mathbb{R}_{\geq 0}, 0, \cdot)$

2020 2C EJ2 T

lunes, 14 de junio de 2021 07:41 p. m.

Dado un lenguaje L de 1er orden con igualdad y un símbolo de predicado binario. Sabiendo que

$I = (P(\mathbb{N}), \subseteq)$.

Sea $A \subseteq P(\mathbb{N})$ el conjunto que expresa la siguiente fórmula:

$$\alpha(x) = \exists y \exists z\, (P(y,x) \wedge P(z,x) \wedge \neg y = z \ \wedge\ \forall w\, (w = y \ \vee\ w = z))$$

Hallar A.

Solo escribir la respuesta, no escribir el desarrollo ni la justificación.

2020 2C EJ3 T

lunes, 14 de junio de 2021 07:42 p. m.

Sea L un lenguaje de 1er orden con 4 predicados de orden 2 (HR, PD, MD, A) y dos constantes (c_1 y c_2). Sea una interpretación I=(Personas, HR_I, PD_I, MD_I, A_I, Ana, Pedro) siendo HR_I={(x,y)/ x es hermano (o hermana) de y}, PD_I={(x,y)/ x es padre de y}, MD_I= {(x,y)/ x es madre de y}, A_I = { (x,y) / x e y son amigos }

Escribir un enunciado que en este lenguaje, con esta interpretación describa la siguiente afirmación:

Ana y Pedro tienen abuelas que son amigas entre si

2020 2C EJ4 T

lunes, 14 de junio de 2021 07:42 p. m.

Probar que la función g es RP sabiendo que:

Sea $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ *una función recursiva primitiva.*

Y sea $g : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ *tal que*

$$f(n) = \sum_{j=0}^{n} (g(j) + j!)$$

2020 2C EJ5 T

lunes, 14 de junio de 2021 07:43 p. m.

Decidir si la siguiente función es computable

$$f : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N} \,/\, f(x,y) = \begin{cases} Halt(x+7y, 5y+x) \text{ si } 2x+3y \text{ es par} \\ Halt(2x, y+2) \text{ sino} \end{cases}$$

Justificar

2020 R2C EJ1 T

lunes, 14 de junio de 2021 07:44 p. m.

Sea L un lenguaje de primer orden con = y un símbolo de función binaria f. Sean $I_1 = (\mathbb{Z}_{12}, \cdot)$ e $I_2 = (G_{12}, \cdot)$.

Decidir si dichas interpretaciones son isomorfas.

Si son isomorfas escribir un isomorfismo entre ellas. sino dar un enunciado que demuestre que no lo son.

2020 R2C EJ2 T

lunes, 14 de junio de 2021 07:44 p. m.

Probar que la función f definida de la siguiente manera es recursiva primitiva

$$f: \mathbb{N} \to \mathbb{N},\ f(x) = \textit{cantidad de dígitos de } \lfloor \sqrt{3}\,x \rfloor$$

2020 R2C EJ3 T

lunes, 14 de junio de 2021 07:44 p. m.

Sea L un lenguaje de 1er orden con = y un símbolo de predicado binario. Sea I=([-1,1] U [4,5], ≤).

Marcar todas las respuestas correctas

Respuestas seleccionadas: -1 y 5 son distinguibles

Respuestas:
- 1, -1, 4 y 5 son distinguibles
- (4,5) es expresable
- todos los elementos son distinguibles
- [-1,1] es expresable
- -1 y 5 son distinguibles