Lógica Proposicional: Consecuencia Lógica y Teorema de Compacidad

DEFINICION 1

1. Sea v val y $\alpha \in F$. Decimos q v satisface α si $v(\alpha)=1$.
2. Sea $\alpha \in F$. Decimos q α es satisfacible si $\exists$ v val / $v(\alpha)=1$ sino decimos q es insatisfacible.
3. Sea $\gamma \in F$. Decimos q γ es satisfacible si $\exists$ v val / $v(\alpha)=1$ $\forall \alpha \in \gamma$ ⇒ lo notamos $v(\gamma)=1$.

⇒ Decimos que v satisface γ

Obs: γ insatisfacible si $\forall$ v val, $\exists \alpha \in \gamma / v(\alpha)=0$ i.e. si $\nexists$ v val / $v(\gamma)=1$ ⇒ siempre hay $\alpha \in F / v(\alpha)=0$

EJEMPLOS

Decidir si los conjuntos son satisfacibles.

1. $\gamma = \{P_1, P_1 \wedge P_2\}$

Defino $f: VAR \to \{0,1\} / f(P_j)=1$ y sea v_f la val q extiende a f.

- $v_f(P_1) = f(P_1) = 1$
- $v_f(P_1 \wedge P_2) = \min\{v_f(P_1), v_f(P_2)\} = \min\{f(P_1), f(P_2)\} = 1$

v_f satisface γ ⇒ γ es satisfacible

2. $\gamma = \{P_1, \neg P_2, \neg P_1 \wedge \neg P_2\}$

Sup q γ es satisfacible ⇒ $\exists$ v val / $v(\gamma)=1$ ⇒ $v(P_1) = v(\neg P_2) = v(\neg P_1 \wedge \neg P_2) = 1$

Luego, $v(\neg P_1 \wedge \neg P_2) = \min\{1-v(P_1), 1-v(P_2)\} = 0$ pues $v(P_1)=1$ y $v(P_2)=0$ ABS!

Lo absurdo vino de suponer q γ es satisfacible ⇒ γ es insatisfacible.

Obs: TODA valuación v satisface a $\gamma=\emptyset$ i.e. $\emptyset$ satisfacible x las infinitas valuaciones q existen.

3. $\gamma = \emptyset$

Sea v val, sup q v no satisface a γ ⇒ $\exists \alpha \in \emptyset / v(\alpha)=0$ ABS! pues $\nexists \alpha \in \emptyset$ ⇒ γ es satisfacible.

4. $\gamma = FORM$

Sup q γ es satisfacible ⇒ $\exists$ v val / $v(\gamma)=1$ y como $\{P_1, \neg P_1\} \subseteq \gamma$ ⇒ $v(P_1) = v(\neg P_1) = 1$ ABS!

↳ γ es insatisfacible

DEFINICION 2

Sea $\gamma \subseteq F$ y $\alpha \in F$. Decimos q α es consecuencia de γ si "$v(\gamma)=1 \Rightarrow v(\alpha)=1$" $\forall$ v val

Obs: En AI, $C(\gamma)$ = conjunto de hipótesis o de datos ⇒ base de conocimiento.

Notación: $C(\gamma)$ = conjunto de consecuencias de γ = $\{\alpha \in F / \alpha$ es consecuencia de $\gamma\}$

⇒ $\alpha \notin C(\gamma)$ si $\exists$ v val / $v(\gamma)=1$ y $v(\alpha)=0$

Decidir si $\alpha \in C(\gamma)$

1. $\gamma = \{P_1, (P_1 \to P_2)\}$ y $\alpha = P_2$ ⇒ veamos q $\alpha \in C(\gamma)$

Sea v val / $v(\gamma)=1$ ⇒ $v(P_1)=1$ y $v(P_1 \to P_2) = \max\{1-v(P_1), v(P_2)\} = 1$.

Como $1-v(P_1)=0$ ⇒ $\max\{1-v(P_1), v(P_2)\} = \max\{0, v(P_2)\} = 1$ ⇒ $v(P_2)=1$ ⇒ $P_2 \in C(\gamma)$

2. $\gamma = \{P_1, (P_1 \to P_2)\}$ y $\alpha = P_3$ ⇒ veamos q $\alpha \notin C(\gamma)$

Busco v val / $v(\gamma)=1$ y $v(P_3)=0$.

Defino $f: VAR \to \{0,1\} / f(P_j) = \begin{cases} 0 & \text{si } j=3 \\ 1 & \text{sino} \end{cases}$ y v_f la ! valuación q extiende a f.

- $v_f(P_3) = f(P_3) = 0$
- $v_f(P_1) = f(P_1) = 1$
- $v_f(P_1 \to P_2) = \max\{1-v_f(P_1), v_f(P_2)\} = \max\{1-f(P_1), f(P_2)\} = 1$

↳ v_f es una val / $v_f(\gamma)=1$ y $v_f(P_3)=0$ ⇒ $\alpha \notin C(\gamma)$

Calcular $C(\gamma)$

1. Sea $\gamma = \emptyset$ ⇒ veamos q $C(\emptyset)$ = tautologías = $\{\alpha \in F / \alpha$ es tauto$\}$

$\subseteq$) Sea $\alpha \in C(\emptyset)$ ⇒ quiero ver q α es tauto.

Sup q α no es tauto i.e. $\exists$ v val / $v(\alpha)=0$ PERO $v(\emptyset)=1$ ⇒ $\alpha \notin C(\emptyset)$ ABS! ⇒ α es tauto.

$\supseteq$) Sea α tauto ⇒ quiero ver q $\alpha \in C(\emptyset)$.

Sea v val / $v(\emptyset)=1$ ⇒ $v(\alpha)=1$ xq α es tauto ⇒ $\alpha \in C(\emptyset)$.

Conclusión: $C(\emptyset)$ son las tautologías

2. γ = conj insatisfacible ⇒ veamos q $C(\gamma) = FORM$

$\subseteq$) $C(\gamma)$ son FORM ⇒ $C(\gamma) \subseteq FORM$

$\supseteq$) Sup q $\exists \alpha \in F / \alpha \notin C(\gamma)$ ⇒ $\exists$ v val / $v(\gamma)=1$ y $v(\alpha)=0$ ABS! pues γ es insatisfacible i.e. $\nexists$ v val / $v(\gamma)=1$

⇒ $\alpha \in C(\gamma)$

TEOREMA 1

Sea $\gamma \subseteq F$ y $\alpha \in F$, $\alpha \in C(\gamma) \Leftrightarrow \gamma \cup \{\neg\alpha\}$ es insatisfacible.

DEMOSTRACION

⇒) Sup q $\gamma \cup \{\neg\alpha\}$ es satisfacible ⇒ $\exists$ v val / $v(\gamma)=1$ y $v(\neg\alpha)=1$ ⇒ $\exists$ v val / $v(\gamma)=1$ y $v(\alpha)=0$ ⇒ $\alpha \notin C(\gamma)$.

↳ queda demostrado por contrarrecíproco

Obs: tmb da x absurdo

2 Obs: tmb por contrarrecíproco

$\Leftarrow$) Sup q $\alpha \notin C(\sigma) \Rightarrow \exists$ v val / $v(\sigma)=1$ y $v(\alpha)=0 \Rightarrow v(\sigma)=1$ y $v(\neg\alpha)=1 \Rightarrow$ v satisface $\sigma \cup \{\neg\alpha\}$ ABS!

TEOREMA 2

Sea $\sigma = \{\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_n\} \subseteq F$, $\alpha \in F$, $\alpha \in C(\sigma) \Leftrightarrow (\sigma_1 \wedge \sigma_2 \wedge \dots \wedge \sigma_n) \to \alpha$ es tautología

DEMOSTRACIÓN

$\Rightarrow$) $\alpha \in C(\sigma)$, quiero ver q $(\sigma_1 \wedge \dots \wedge \sigma_n) \to \alpha = \beta$ es tauto

Otra forma: sup q β no es tauto

Sea v val.

$\Rightarrow \exists$ v val / $v(\beta)=0$

- Si $v(\sigma_1 \wedge \dots \wedge \sigma_n)=0 \Rightarrow v(\beta) = \max\{1 - v(\sigma_1 \wedge \dots \wedge \sigma_n), v(\alpha)\} = 1$

$\Rightarrow v(\sigma_1 \wedge \dots \wedge \sigma_n) = 1$ y $v(\alpha)=0$ ABS! $\alpha \in C(\sigma)$

- Si $v(\sigma_1 \wedge \dots \wedge \sigma_n) = 1 \Rightarrow v(\sigma_i) = 1 \ \forall 1 \le i \le n \Rightarrow v(\sigma)=1 \Rightarrow v(\alpha)=1$ xq $\alpha \in C(\sigma) \Rightarrow v(\beta) = \max\{1 - v(\sigma_1 \wedge \dots \wedge \sigma_n), v(\alpha)\} = 1$

$\Rightarrow$ β es tautología

$\Leftarrow$) β es tautología, quiero ver q $\alpha \in C(\sigma)$

Sea v val / $v(\sigma)=1$, probemos q $v(\alpha)=1 \Rightarrow$ sabemos q $v(\beta) = \max\{1 - v(\sigma_1 \wedge \dots \wedge \sigma_n), v(\alpha)\} = 1$.

Luego, como $v(\sigma)=1 \Rightarrow v(\sigma_i) = 1 \ \forall 1 \le i \le n \Rightarrow v(\sigma_1 \wedge \dots \wedge \sigma_n) = \min\{v(\sigma_1), \dots, v(\sigma_n)\} = 1$.

Finalmente, $\max\{1 - v(\sigma_1 \wedge \dots \wedge \sigma_n), v(\alpha)\} = \max\{0, v(\alpha)\} = 1 \Rightarrow v(\alpha)=1 \Rightarrow \alpha \in C(\sigma)$.

TEOREMA 3: "Teorema de la deducción"

Versión semántica: Sea $\sigma \subseteq F$ y $\alpha, \beta \in F$, $(\alpha \to \beta) \in C(\sigma) \Leftrightarrow \beta \in C(\sigma \cup \{\alpha\})$

DEMOSTRACIÓN

$\Rightarrow$) Sea v val / $v(\sigma \cup \{\alpha\}) = 1 \Rightarrow v(\sigma)=1$ y $v(\alpha)=1 \Rightarrow v(\alpha \to \beta) = 1$ pues $(\alpha \to \beta) \in C(\sigma) \Rightarrow \max\{1 - v(\alpha), v(\beta)\} = 1 \Rightarrow v(\beta)=1$

$\Rightarrow \beta \in C(\sigma \cup \{\alpha\})$

$\Leftarrow$) Sea v val / $v(\sigma)=1$.

- Si $v(\alpha)=0 \Rightarrow v(\alpha \to \beta) = \max\{1 - v(\alpha), v(\beta)\} = 1$
- Si $v(\alpha)=1 \Rightarrow v(\sigma \cup \{\alpha\}) = 1 \Rightarrow v(\beta)=1$ pues $\beta \in C(\sigma \cup \{\alpha\}) \Rightarrow v(\alpha \to \beta) = \max\{1 - v(\alpha), v(\beta)\} = 1$

EJEMPLO

Probar q $\beta \in C(\{\alpha, \alpha \to \beta\})$.

Por el T. de la deducción, $\beta \in C(\{\alpha, \alpha \to \beta\}) \Leftrightarrow (\alpha \to \beta) \in C(\{\alpha \to \beta\})$ y como es cierto q $\sigma \subseteq C(\sigma) \Rightarrow$ no hay nada q probar.

DEFINICIÓN 3

Sea $\sigma \subseteq F$, σ es finitamente satisfacible (fs) si todo subconjunto finito de σ es satisfacible.

LEMA 1

Sea $\sigma \subseteq F$, σ fs, $P_j \in VAR \Rightarrow \sigma \cup \{P_j\}$ es fs ó $\sigma \cup \{\neg P_j\}$ es fs

DEMOSTRACIÓN

Sup q $\sigma \cup \{P_j\}$ no es fs y $\sigma \cup \{\neg P_j\}$ es fs.

Obs: El ó NO es excluyente.

$\Rightarrow \exists \sigma_1 \subseteq \sigma \cup \{P_j\} / \sigma_1$ finito e insatisfacible y $\exists \sigma_2 \subseteq \sigma \cup \{P_j\} / \sigma_2$ finito e insatisfacible

Ej. $\sigma = \{P_1\}$ es fs

Notemos q $\sigma_1 \notin \sigma$ y $\sigma_2 \notin \sigma$ xq σ es fs $\Rightarrow \sigma_1 = \tilde{\sigma}_1 \cup \{P_j\} / \tilde{\sigma}_1 \subseteq \sigma$ y $\sigma_2 = \tilde{\sigma}_2 \cup \{P_j\} / \tilde{\sigma}_2 \subseteq \sigma$.

$\Rightarrow \{P_1, P_2\}$ y $\{P_1, \neg P_2\}$ son fs

Defino $\tilde{\sigma} = \tilde{\sigma}_1 \cup \tilde{\sigma}_2$. Como $\tilde{\sigma}_1$ es finito y $\tilde{\sigma}_2$ es finito $\Rightarrow \tilde{\sigma}$ es finito. Luego, $\tilde{\sigma}_1 \subseteq \sigma$ y $\tilde{\sigma}_2 \subseteq \sigma \Rightarrow \tilde{\sigma} \subseteq \sigma$.

Como $\tilde{\sigma}$ es finito, $\tilde{\sigma} \subseteq \sigma$ y σ es fs $\Rightarrow \tilde{\sigma}$ es satisfacible $\Rightarrow \exists$ v val / $v(\tilde{\sigma}) = 1$.

Caso 1: $v(P_j)=1 \Rightarrow v(\tilde{\sigma}_1 \cup \{P_j\}) = 1 \Rightarrow v(\sigma_1)$ es satisfacible ABS!

Caso 2: $v(\neg P_j)=1 \Rightarrow v(\tilde{\sigma}_2 \cup \{\neg P_j\}) = 1 \Rightarrow v(\sigma_2)$ es satisfacible ABS!

TEOREMA 4: "Teorema de Compacidad"

Sea $\sigma \subseteq F$, σ es satisfacible $\Leftrightarrow \sigma$ es fs i.e. σ es insatisfacible $\Leftrightarrow \exists \sigma' \subseteq \sigma$ finito e insatisfacible / σ' no es fs

DEMOSTRACIÓN

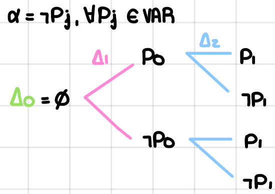
$\Rightarrow$) σ es satisfacible $\Rightarrow \exists$ v val / $v(\sigma)=1$

Sea $\sigma' = \{\alpha_1, \dots, \alpha_n\} \subseteq \sigma$. Como $v(\alpha) = 1 \ \forall \alpha \in \sigma$, en particular, $v(\sigma')=1 \Rightarrow \sigma$ es fs.

[Literal] = es una fórmula $\alpha / \alpha = P_j$ ó $\alpha = \neg P_j$, $\forall P_j \in VAR$

$\Leftarrow$) Defino una suce° creciente de conjuntos $\Delta_0 \subseteq \Delta_1 \subseteq \Delta_2 \dots$ q van a contener literales.

Defino $\Delta_0 = \emptyset$ y $\Delta_{n+1} = \begin{cases} \Delta_n \cup \{P_n\} & \text{si } \sigma \cup \Delta_n \cup \{P_n\} \text{ es fs} \\ \Delta_n \cup \{\neg P_n\} & \text{sino} \end{cases}$



Defino $\Delta = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \Delta_n$ y defino $f: VAR \to \{0,1\} / f(P_j) = \begin{cases} 1 & \text{si } P_j \in \Delta \\ 0 & \text{sino} \end{cases}$ c/ v_f la ! val q extiende a f

$\Rightarrow$ Probar que v_f es la ! val q satisface Δ

Veamos que Δ es satisfacible:

- Si $P_j \in \Delta \Rightarrow v_f(P_j) = f(P_j) = 1$
- Si $P_j \notin \Delta \Rightarrow \neg P_j \in \Delta \Rightarrow v_f(\neg P_j) = 1 - v_f(P_j) = 1 - f(P_j) = 1 - 0 = 1$

$v_f(\Delta) = 1 \Rightarrow \Delta$ satisfacible por v_f

Veamos que $\sigma \cup \Delta_n$ es fs:

CB) $\sigma \cup \Delta_0 = \sigma$ es fs por hipótesis

PI) H: $\sigma \cup \Delta_n$ es fs ; T: $\sigma \cup \Delta_{n+1}$ es fs

$\sigma \cup \Delta_{n+1} = \begin{cases} \sigma \cup \Delta_n \cup \{P_n\} & \text{si } \sigma \cup \Delta_n \cup \{P_n\} \text{ es fs} \\ \sigma \cup \Delta_n \cup \{\neg P_n\} & \text{si sino} \end{cases}$

- Si $\sigma \cup \Delta_{n+1} = \sigma \cup \Delta_n \cup \{P_n\} \Rightarrow$ es fs pues debe cumplir la condición
- Si $\sigma \cup \Delta_{n+1} = \sigma \cup \Delta_n \cup \{\neg P_n\} \Rightarrow \sigma \cup \Delta_n \cup \{P_n\}$ no es fs y $\sigma \cup \Delta_n$ es fs por H) $\Rightarrow$ por el Lema 1, $\sigma \cup \Delta_n \cup \{\neg P_n\}$ es fs

Veamos que $v_f(\sigma) = 1$:

Ej. Si $\alpha = ((P_1 \to P_3) \vee \neg P_8) \Rightarrow k = 8$

Sup q v_f no satisface $\sigma \Rightarrow \exists \alpha \in \sigma / v_f(\alpha) = 0$. Sea $k = \max\{j / P_j$ aparece en $\alpha\}$

I. $v_f(P_k) = 1 \Rightarrow \{\alpha\} \cup \Delta_k \cup \{P_k\} = \Sigma$ es insatisfacible

Demos: sup q Σ es satisfacible $\Rightarrow \exists$ ω val / $\omega(\Sigma) = 1 \Rightarrow \omega(\alpha) = 1$ y $\omega(\Delta_k \cup \{P_k\}) = 1$

Notemos q si $p_j \in var(\alpha) \Rightarrow p_j \in \Delta_k \cup \{p_k\}$ ó $\neg p_j \in \Delta_k \cup \{p_k\}$ y $v_F(\Delta) = 1$.

Luego, $v_F|_{var(\alpha)} = \omega|_{var(\alpha)} \Rightarrow v_F(\alpha) = \omega(\alpha) = 1$ ABS! pues $v_F(\alpha) = 0$ (v_F no satisface $\Gamma \Rightarrow \exists \alpha \in \Gamma / v_F(\alpha) = 0$)

↯ Σ es insatisfacible PERO $\Sigma \subseteq \Gamma \cup \Delta_{k+1}$ q es fs $\Rightarrow \Sigma$ es satisfacible ABS!

2. $v_F(p_k) = 0 \Rightarrow \{\alpha\} \cup \Delta_k \cup \{\neg p_k\} = \Sigma$ es insatisfacible

Demos: sup q Σ es satisfacible $\Rightarrow \exists\ \omega$ val$/ \omega(\Sigma) = 1 \Rightarrow \omega(\alpha) = 1$ y $\omega(\Delta_k \cup \{\neg p_k\}) = 1$

Notemos q si $p_j \in var(\alpha) \Rightarrow p_j \in \Delta_k \cup \{p_k\}$ ó $\neg p_j \in \Delta_k \cup \{p_k\}$ y $v_F(\Delta) = 1$.

Luego, $v_F|_{var(\alpha)} = \omega|_{var(\alpha)} \Rightarrow v_F(\alpha) = \omega(\alpha) = 1$ ABS! pues $v_F(\alpha) = 0 \Rightarrow \Sigma$ es insatisfacible

PERO $\Sigma \subseteq \Gamma \cup \Delta_{k+1}$ fs $\Rightarrow \Sigma$ satisfacible ABS!

Conclusion: lo absurdo vino de suponer q Γ no es satisfacible $\Rightarrow v_F(\Gamma) = 1 \Rightarrow \Gamma$ es satisfacible

TEOREMA 5

Son equivalentes:

1. Γ es satisfacible $\Leftrightarrow \Gamma$ es fs
2. Γ es insatisfacible $\Leftrightarrow \Gamma$ NO es fs
3. Sea $\alpha \in F / \alpha \in C(\Gamma) \Rightarrow \exists\ \Gamma'$ finito$/ \alpha \in C(\Gamma')$ y $\Gamma' \subseteq \Gamma$

DEMOSTRACION

$1 \Leftrightarrow 2$: pues 2 es el contrarrecíproco de 1

$(1=2) \Rightarrow 3$:

$\alpha \in C(\Gamma) \Rightarrow \Gamma \cup \{\neg\alpha\}$ es insatisfacible (por T1) $\Rightarrow \Gamma \cup \{\neg\alpha\}$ no es fs (por T. de compacidad) $\Rightarrow \exists\ \Gamma'$ finito e insatisfacible$/ \Gamma' \subseteq \Gamma \cup \{\neg\alpha\}$ y Γ' no es fs

1. Si $\Gamma' \subseteq \Gamma$ y Γ' insatisfacible $\Rightarrow C(\Gamma') = F \Rightarrow \alpha \in C(\Gamma')$
2. Si $\Gamma' \nsubseteq \Gamma$, $\Gamma' = \Gamma'' \cup \{\neg\alpha\} / \Gamma'' \subseteq \Gamma$, qvq $\alpha \in C(\Gamma'')$.

Sup q $\alpha \notin C(\Gamma'') \Rightarrow \exists\ \omega$ val$/ \omega(\alpha) = 0$ y $\omega(\Gamma'') = 1 \Rightarrow \omega(\Gamma'') = 1$ y $\omega(\neg\alpha) = 1$ ABS! pues Γ' es insatisfacible

$\Rightarrow \alpha \in C(\Gamma'')$, $\Gamma'' \subseteq \Gamma$ y Γ'' finito (pues Γ' es finito)

$3 \Rightarrow (1=2)$:

Quiero probar q Γ es fs $\Leftrightarrow \Gamma$ es satisfacible (o la contrarrecíproca)

$\Rightarrow$) Sup Γ insatisfacible $\Rightarrow (p_1 \wedge \neg p_1) \in C(\Gamma) = F \overset{3}{\Rightarrow} \exists\ \Gamma' \subseteq \Gamma$, Γ' finito$/ (p_1 \wedge \neg p_1) \in C(\Gamma') \Rightarrow \Gamma'$ es insatisfacible $\Rightarrow \Gamma$ no es fs $\Rightarrow$ queda demostrado por contrarrecíproco

Obs: Si Γ' fuese sat, $\exists\ v$ val$/ v(\Gamma') = 1 \Rightarrow v(p_1 \wedge \neg p_1) = 1$ ABS!

$\Leftarrow$) Ver demo de T. de compacidad

DEFINICION 4

$\Gamma \subseteq F$ es base si:

1. Γ es independiente
2. Γ es maximal respecto a la independencia i.e. si $\Gamma \subseteq \Sigma$ y Σ es independiente $\Rightarrow \Sigma = \Gamma$

DEFINICION 5

Decimos q $\Gamma \subseteq F$ es independiente si $\forall \alpha \in \Gamma$ se tiene q $\alpha \notin C(\Gamma \setminus \{\alpha\})$.

En caso contrario, decimos q Γ es dependiente i.e. $\exists \alpha \in \Gamma / \alpha \in C(\Gamma \setminus \{\alpha\})$