

Δέντρο Steiner

Το Πρόβλημα του Δέντρου Steiner (Steiner Tree Problem) ορίζεται ως εξής: έστω μη κατευθυνόμενο γράφημα $G = (V, E, d)$, όπου V το σύνολο των κορυφών, E το σύνολο των ακμών και d συνάρτηση των βαρών των ακμών E , με πεδίο τιμών τους μη αρνητικούς πραγματικούς αριθμούς. Έστω επίσης το σύνολο κορυφών $S \subseteq V$. Οι κορυφές που ανήκουν στο σύνολο S , ονομάζονται Steiner κορυφές. Ζητείται να βρεθεί το δέντρο με το ελάχιστο συνολικό βάρος ακμών που περιέχει όλες τις κορυφές του συνόλου S . Το δέντρο δηλαδή θα πρέπει να περιέχει οπωσδήποτε όλες τις Steiner κορυφές και ίσως κάποιες από το σύνολο $V \setminus S$.

Για την επίλυση του συγκεκριμένου προβλήματος υπάρχει προσεγγιστικός αλγόριθμος με λόγο προσέγγισης δύο. Αυτό σημαίνει ότι η τιμή της λύσης που βρίσκει ο προσεγγιστικός αλγόριθμος δεν μπορεί να είναι χειρότερη κατά δύο φορές από τη βέλτιστη λύση.

Ο αλγόριθμος επίλυσης του προβλήματος είναι ο εξής:

- α) Δεδομένου ενός μη κατευθυνόμενου γραφήματος $G = (V, E, d)$ και ενός Steiner συνόλου S , δημιουργήσε το πλήρες μη κατευθυνόμενο γράφημα $G_1 = (V_1, E_1, d_1)$, το οποίο αποτελείται από τις Steiner κορυφές του G και οι ακμές μεταξύ δύο οποιονδήποτε κορυφών του έχουν βάρος ίσο με το βάρος του συντομότερου μονοπατιού που ενώνει τις δυο αυτές κορυφές στο γράφημα G . Το βάρος των ακμών του γραφήματος G_1 δίνεται από τη συνάρτηση d_1 . Δηλαδή για κάθε ακμή $\{u, v\} \in E_1$, όπου $u, v \in V_1$ η τιμή $d_1(\{u, v\})$ ισούται με το βάρος του ελάχιστου μονοπατιού από την u στη v στο G .
- β) Βρες το ελάχιστο γεννητικό δέντρο T_1 του γραφήματος G_1 .
- γ) Κατασκεύασε το υπογράφημα G_s του G , αντικαθιστώντας κάθε ακμή του ελάχιστου γεννητικού δέντρου T_1 , με το αντίστοιχο ελάχιστο μονοπάτι στο γράφημα G .
- δ) Βρες το ελάχιστο γεννητικό δέντρο T_s του γραφήματος G_s .
- ε) Κατασκεύασε το Steiner δέντρο T_H από το ελάχιστο γεννητικό δέντρο T_s διαγράφοντας, αν είναι απαραίτητο, εκείνες τις ακμές που όταν αφαιρεθούν, φύλλα στο δέντρο T_H να είναι μόνο Steiner κορυφές. Δηλαδή, στο βήμα αυτό διαγράφονται οι κορυφές που δεν είναι Steiner κορυφές και που στο ελάχιστο γεννητικό δέντρο T_s είναι φύλλα. Αυτή η διαδικασία επαναλαμβάνεται μέχρι φύλλα να είναι αποκλειστικά Steiner κορυφές.

Εκτενέστερη παρουσίαση του Προβλήματος Δέντρου Steiner θα βρείτε στην ερευνητική εργασία [1]. Στην παρούσα άσκηση καλείστε να επιλύσετε το Πρόβλημα Δέντρου Steiner σε γραφήματα που θα δημιουργήσετε με τυχαίο τρόπο. Το πρόγραμμά σας θα αποτελείται από ένα εξωτερικό επαναληπτικό βρόχο με τιμές στο διάστημα $[6, 12]$ με βήμα αύξησης ένα. Οι τιμές του βρόχου αντιστοιχούν στο πλήθος των κορυφών του γραφήματος. Σε κάθε επανάληψη θα δημιουργείτε τους κόμβους του γραφήματος από τους οποίους το 70% θα είναι Steiner κόμβοι. Τα βάρη των ακμών θα δημιουργούνται τυχαία, όπου η μέγιστη τιμή των βαρών θα είναι 50. Το πρόγραμμά σας θα πρέπει να τυπώνει το Steiner δέντρο καθώς και το συνολικό κόστος των ακμών του δέντρου.

Ο αλγόριθμος που θα υλοποιήσετε έχει λόγο προσέγγισης δύο. Καλείστε λοιπόν, να επαληθεύσετε πειραματικά τον λόγο αυτό. Συγκεκριμένα, για κάθε ένα από τα γραφήματα του προηγούμενου ερωτήματος, θα βρείτε τη βέλτιστη λύση και θα τη συγκρίνετε με τη λύση του αλγορίθμου που υλοποιήσατε. Το πρόβλημα της εύρεσης Δέντρου Steiner είναι υπολογιστικά δύσκολο, για το λόγο

αυτό και το μέγεθος των γραφημάτων που θα υλοποιήσετε είναι μικρό, ώστε να είναι εφικτή η εύρεση της βέλτιστης λύσης. Τη βέλτιστη λύση θα τη βρείτε με εξαντλητική αναζήτηση όλων των πιθανών δέντρων Steiner των γραφημάτων.

Βαθμολόγηση εργασίας

Η εργασία είναι προαιρετική και θα βαθμολογηθεί με άριστα το 2. Ο βαθμός αυτός θα προστεθεί στο βαθμό της γραπτής εξέτασης η οποία βαθμολογείται με άριστα το 10.

Παράδοση Εργασίας

Η παράδοση της εργασίας θα γίνει μέσω της πλατφόρμας του Gunet. Η προθεσμία παράδοσης της εργασίας ορίζεται η 26/02/2024. Θα πρέπει να παραδώσετε τον πηγαίο κώδικα, αναλυτικές οδηγίες εκτέλεσης του κώδικα, αναλυτική τεκμηρίωση της υλοποίησης και των αποτελεσμάτων των πειραμάτων σας. Η εργασία μπορεί να εκπονηθεί από ομάδα μέχρι δύο ατόμων.

Αναφορές

- [1] Kou, L., Markowsky, G., & Berman, L. (1981). A fast algorithm for Steiner trees. Acta informatica, 15(2), 141-145.