

Advanced Statistical Analysis

Série d'exercices 3 : Estimations

Exercice 1

Chaque semaine, un supermarché sélectionne un échantillon de 100 clients, pour estimer le montant moyen des dépenses de leurs dépenses. En se fondant sur les nombreuses enquêtes précédentes, le supermarché suppose que la dépense de chaque client suit approximativement une loi normale, d'écart-type 10 euros. Cette semaine, la moyenne échantillonnale trouvée par le supermarché est égale à 45 euros.

1. Estimer par intervalle le montant moyen dépensé par les consommateurs du supermarché, pour un niveau de confiance de 95%.
2. Idem pour un niveau de confiance de 99%.

Exercice 2

Dans une ferme, des études réalisées dans le passé ont pu montrer que la masse d'un œuf choisi au hasard peut être considérée comme la réalisation d'une variable aléatoire normale X , de variance égale à 2. On admet que les masses des œufs sont indépendantes les unes des autres. Un échantillon aléatoire de 36 œufs est prélevé et pesé. On obtient les mesures suivantes :

[Insérer ici le tableau de données]

1. Calculer l'estimateur ponctuel de la moyenne et de la variance des masses d'œufs.
2. Estimer par intervalle la masse moyenne d'un œuf, au niveau de confiance de 95%, puis de 98%.
3. Au niveau de confiance de 95%, la masse moyenne d'un œuf peut-elle être supposée égale à 56 grammes ? 57 grammes ?
4. Mêmes questions au niveau de confiance de 99%.

Exercice 3

On suppose que le poids d'un nouveau-né est une variable normale d'écart-type égal à 0,5 kg. Le poids moyen des 49 enfants nés au mois de janvier 2016 dans une maternité marseillaise a été de 3,6 kg.

1. Estimer par intervalle, au niveau de confiance de 95%, le poids moyen d'un nouveau-né dans cette maternité.
2. Quel serait le niveau de confiance d'un intervalle de longueur 0,1 kg centré en 3,6 pour ce poids moyen ?
3. Même question pour un intervalle de longueur 1 kg.

Exercice 4

Des naturalistes désirent évaluer le nombre N d'individus d'une espèce animale vivant sur une île. Ils capturent 800 individus qu'ils marquent puis relâchent. Un mois plus tard, après avoir laissé les individus se remélanger dans la population globale, ils recapturent 1000 individus, parmi lesquels figurent 250 individus marqués. Produire une estimation par intervalle, au niveau de confiance de 95%, du nombre d'individus de cette espèce animale présents sur l'île.

Exercice 5

Une patrouille de police effectue des contrôles de vitesse en bordure d'une route où la vitesse est limitée à 70 km/h. Pour les seize premiers véhicules contrôlés, les vitesses relevées sont les suivantes : 49 ; 71 ; 78 ; 58 ; 83 ; 74 ; 64 ; 86 ; 56 ; 65 ; 55 ; 64 ; 65 ; 72 ; 87 ; 56

1. Estimer la vitesse moyenne des véhicules contrôlés.
2. Estimer par intervalle, au niveau de confiance de 95%, la vitesse moyenne des véhicules contrôlés.
3. Estimer ponctuellement la part des véhicules ne respectant pas la limitation de vitesse.
4. Estimer par intervalle, au niveau de confiance de 95%, cette même proportion.

Exercice 6

Deux candidats sont en lice pour une élection. Un sondage réalisé auprès de 250 électeurs donne le premier gagnant avec 55% des voix contre 45% à son adversaire.

1. Estimer la proportion de votants en faveur du premier candidat, au niveau de confiance de 95%. Que peut-on en conclure ?
2. Même question, en supposant que le sondage a été réalisé auprès de 1000 personnes.
3. Déterminer le nombre de personnes à interroger lors du sondage pour assurer le premier candidat d'une probable victoire, au niveau de confiance de 95%.

Exercice 7

Une entreprise industrielle qui fabrique des pièces mécaniques a mis en place un processus de contrôle de la qualité de la production. Lors d'un contrôle de fabrication de certaines pièces réalisé sur un échantillon de 150 pièces, 17 pièces ont été trouvées défectueuses.

1. Estimer ponctuellement la proportion de pièces défectueuses dans la production de la firme.
2. Estimer à l'aide d'un intervalle cette même proportion, au niveau de confiance de 95%.
3. Au même niveau de confiance de 95%, combien faut-il contrôler de pièces pour limiter à 2% la marge d'erreur (longueur d'intervalle égale à 4%) ? à 1% (longueur d'intervalle égale à 2%) ? à 0,5% (longueur d'intervalle égale à 1%) ? Commenter.

Exercice 8

Une enquête publiée par un institut de sondages révèle que $60\% \pm 2\%$ des français sont contre l'entrée de la Turquie dans l'Union Européenne à brève échéance. Le sondage a été réalisé sur un échantillon de 914 personnes majeures. Quel niveau de confiance l'institut de sondage a-t-il utilisé ?

Exercice 9

Une très grande firme prend un soin particulier de la santé de ses salariés. A cette fin, elle a proposé à l'ensemble des salariés la réalisation d'un examen de santé. Le taux de cholestérol de 100 salariés a ainsi pu être réalisé (on suppose que ces 100 personnes ont été désignés de façon aléatoire et que toutes ont accepté le test). Les résultats sont les suivants :

[Insérer ici le tableau de données]

1. Calculer la moyenne échantillonnale et l'écart-type échantillonnal s du taux de cholestérol.
2. Estimer la moyenne μ et l'écart-type σ du taux de cholestérol dans toute l'entreprise.
3. Estimer par intervalle, au niveau de confiance de 95%, le taux de cholestérol des salariés de la firme.
4. Déterminer la taille minimale de l'échantillon pour que l'amplitude de l'intervalle de confiance calculé à la question précédente soit inférieure à 100.

Exercice 10

Les responsables d'une formation universitaire souhaitent réaliser une enquête sur le salaire annuel moyen des diplômés de la formation à l'issue de leurs études. Ils parviennent à estimer grossièrement l'écart-type de la rémunération mensuelle à 3 500€.

1. Combien de diplômés devront-ils enquêter s'ils veulent obtenir une estimation de la rémunération qui ne s'écarte pas de plus de 500€ de la vraie rémunération obtenue, au niveau de confiance de 95% ?
2. Même question pour un écart de pas plus de 100€.
3. La réalisation de l'enquête coûte 10€ par personne enquêtée. Les responsables de la formation disposent d'un budget de 30 000€. Avec quelle précision parviendront-ils à estimer la rémunération moyenne de leurs diplômés ?