



UNIVERSITE GASTON BERGER

Master2 Informatique

Memoire de fin de cycle

Présenté par:

**PEKPASSI Digonaou**

29 Juillet 2015

## Table des matières

<b>1</b>	<b>Etat de l'art</b>	<b>5</b>
1.1	Notions de base . . . . .	5
1.1.1	Pré requis . . . . .	5
1.1.2	Les différents types de représentation de préférences qualitatives . .	6
1.2	Les différents modes de combinaison de préférences . . . . .	10
1.2.1	Composition de préférences prioritaires . . . . .	10
1.2.2	Réseaux de préférences conditionnelles (CP-nets) . . . . .	11
<b>2</b>	<b>Résumé article Preference Learning : An Introduction de Johannes Furn-</b>	
	<b>kranz 1 and Eyke Hullermeier</b>	<b>13</b>
2.1	Tâches d'apprentissage de préférences . . . . .	14
2.1.1	Le classement de labels . . . . .	14
2.1.2	Classement d'instance . . . . .	15
2.1.3	Classement d'objets . . . . .	16
<b>3</b>	<b>Définition et extraction des règles de préférence contextuelle</b>	<b>19</b>
3.1	Préférences utilisateur . . . . .	19
<b>4</b>	<b>Utilisation des motifs séquentiels dans le cadre des préférences</b>	<b>21</b>
4.1	Représentation séquentielle des préférences . . . . .	21
4.2	Description de la consruction du profil de préférence par Sprex-Build . . .	23
4.3	Aperçut du formalisme de CHOMICKY . . . . .	23
4.4	Définition d'une règle de préférence suivant le formalisme de CHOMICKY	24
4.4.1	Cas concret d'une règle de préférence contextuelle . . . . .	25
4.5	Processus d'extraction des règles de préférence . . . . .	26
4.5.1	Etapes de transformation des préférences utilisateurs en transaction de préférence . . . . .	26
4.5.2	Etape de l'extraction des règles interressantes minimales des tran- sactions de préférence . . . . .	30
4.6	Algorithme . . . . .	31
4.7	Exemple d'extraction des règles de préférence . . . . .	31
4.7.1	Cas où le schémas relationnel n'a que des attributs symboliques . .	31
4.8	Determination des itemsets interressants minimaux avec $\text{supmin}=2$ et $\text{conf-}$ $\text{min}=0.5$ . . . . .	32

4.8.1	Cas où le schémas relationnel a des attributs numériques et symboliques	33
4.9	Determination des itemsets interessants minimaux avec supmin=2 et conf- min=0.5 . . . . .	35

# 1 Etat de l'art

## 1.1 Notions de base

### 1.1.1 Pré requis

#### Definition 1. Relation binaire

Une relation binaire  $\mathcal{R}$  sur un ensemble  $E$  est un sous-ensemble du produit cartésien  $E \times E$  ie un ensemble de couples  $(x, y)$  d'éléments de  $E$ . Nous noterons  $x\mathcal{R}y$  pour indiquer que le couple  $(x, y)$  appartient à la relation  $\mathcal{R}$ . Une relation binaire peut être :

- réflexive si  $\forall x \in E, x\mathcal{R}x$
- irréflexive si  $\forall x \in E, \neg(x\mathcal{R}x)$
- symétrique si  $\forall x, y \in E, x\mathcal{R}y \Rightarrow y\mathcal{R}x$
- antisymétrique si  $\forall x, y \in E, x\mathcal{R}y \wedge y\mathcal{R}x \Rightarrow x = y$
- asymétrique si  $\forall x, y \in E, x\mathcal{R}y \Rightarrow \neg(y\mathcal{R}x)$
- complète si  $\forall x, y \in E, x\mathcal{R}y \vee y\mathcal{R}x$
- transitive si  $\forall x, y \in E, x\mathcal{R}y \wedge y\mathcal{R}z \Rightarrow x\mathcal{R}z$
- négativement transitive si  $\forall x, y \in E, \neg(x\mathcal{R}y) \wedge \neg(y\mathcal{R}z) \Rightarrow \neg(x\mathcal{R}z)$

**Definition 2. Relation d'indifférence** Etant donnée une relation  $\mathcal{R}$  sur un ensemble  $E$ , la relation d'indifférence noté  $\tilde{\mathcal{R}}$  est définie pour tout  $x, y \in E$  par  $\tilde{\mathcal{R}}$  si  $x\mathcal{R}y$  et  $y\mathcal{R}x$ .

**Definition 3. Relation d'incompatibilité** Etant donnée une relation  $\mathcal{R}$  sur un ensemble  $E$ , la relation d'incompatibilité notée  $||_{\mathcal{R}}$  est définie pour tout  $x, y \in E$  par :  $x||_{\mathcal{R}}y$  si  $\neg(x\mathcal{R}y)$  et  $\neg(y\mathcal{R}x)$

**Definition 4. Relation de préférence** Une relation de préférence sur un ensemble d'éléments  $E$  est une relation binaire.

Dans ce cas, étant donné une relation de préférences notée  $\succ_{\mathcal{R}}$  :

1.  $x \succ_{\mathcal{R}} y$  signifie que  $x$  est strictement préféré à  $y$ ,
2.  $x\tilde{\mathcal{R}}y$  signifie que  $x$  et  $y$  sont également préférés, et enfin,
3.  $x||_{\mathcal{R}}y$  signifie qu'il n'y a ni indifférence, ni préférence entre  $x$  et  $y$  et on dit que  $x$  et  $y$  ne sont pas comparables.

**Definition 5. Relation d'ordre** On appelle relation d'ordre sur un ensemble  $E$ , toute relation binaire sur  $E$  qui est réflexive, antisymétrique et transitive.

Si la relation d'ordre est complète, elle est dite ordre total sinon l'ordre est partiel.

**Definition 6. Préordre**

Un préordre sur un ensemble  $E$  est une relation binaire réflexive et transitive.

À une relation d'ordre on peut associer une relation obtenue en ôtant de celle-ci les couples d'éléments identiques.

**Definition 7. (Relation d'ordre strict)** Une relation d'ordre strict sur un ensemble  $E$  est une relation binaire irréflexive et transitive. L'ordre strict est dit faible, s'il est partiel et négativement transitif.

**1.1.2 Les différents types de représentation de préférences qualitatives**

Dans ce qui suit, nous considérons l'ensemble  $E$  comme étant l'ensemble des tuples  $t = (u_1, u_2, \dots, u_d)$  avec  $u_i \in \text{dom}(A_i)$  de  $R(A_1, A_2, \dots, A_d)$ . Nous définissons suivant cela une relation de préférence ( $\succ_p$ ) sur un schéma  $R$  par un ensemble de tuples  $(t_i, t_j)$  de  $r$ . Par conséquent  $t_i \succ_p t_j$  signifiera que  $t_i$  est préféré à  $t_j$  sous  $\succ_p$ .

**Formulation de Jan Chomicki**

CHOMICKI a dans l'article [?] établi la notion de **relation de préférence**  $\succ$  comme un sous ensemble de  $\text{Dom}(A) \times \text{Dom}(A)$ . Ceci veut intuitivement dire que  $\succ$  est une relation binaire entre des transactions d'une même instance  $r$  du schémas relationnel  $\mathcal{R}$ . Ainsi on a  $t_1$  est préféré à  $t_2$  suivant  $\succ$  si  $t_1 \succ t_2$ . De même il a défini la notion de formule de préférence  $C(t_1, t_2)$  comme étant une une formule de premier ordre définissant une relation de préférence  $\succ_C$  de telle sorte que  $t_1 \succ_C t_2 \equiv C(t_1, t_2)$ . Cette formule est définie ci dessous.

**Definition 8.** Une formule de préférence suivant le formalisme de CHOMICKY est une formule représentée sous la forme normale disjonctive DNF sans les quantificateurs. Ainsi on a :

$$C(t_1, t_2) = \bigvee_{i=1..k} \left( \bigwedge_{j=1..l} f_{ij} \right)$$

où  $f_{ij}$  sont des formules atomiques sous la forme  $x\delta y$  ou  $x\delta c$  avec  $x$  et  $y$  des variables d'un attribut de  $R$  correspondants respectivement à  $t_1$  et  $t_2$ .  $c$  quand à lui est une constante.  $\delta$  prend les valeurs  $=, \neq$  dans le cas où les éléments  $x, y, c$  sont de type quelconque (Exemple :  $x = y, x = a, y \neq a$ ), et  $\leq, \geq, <, >$  dans le cas où on a à faire à des valeurs numériques

(Exemple :  $x < y, x < a, y \geq a$ ).

### Example 1

- Soit deux transactions  $t_1 = \{x_1, x_2, x_3\}$  et  $t_2 = \{y_1, y_2, y_3\}$  d'une instance de la relation  $R(\text{Plat}, \text{TypePlat}, \text{TypeVin})$ . On a qu'ils vérifient la formule de préférence  $C$  si et seulement si

$$C(t_1, t_2) \equiv (x_1 = y_1 \wedge x_2 = \text{"fish"} \wedge y_2 = \text{"fish"} \wedge x_3 = \text{"white"} \wedge y_3 = \text{"red"}) \\ \vee (x_1 = y_1 \wedge x_2 = \text{"meat"} \wedge y_2 = \text{"meat"} \wedge x_3 = \text{"red"} \wedge y_3 = \text{"white"})$$

est vérifié. Cette condition veut dire que dans le cas où c'est un plat à base de poisson, le client préfère le vin blanc au vin rouge et dans le cas où c'est un plat à base de viande, le client préfère le vin rouge au vin blanc.

- En prenant en compte les valeurs numériques, soit deux transactions  $t_1 = \{x_1, x_2, x_3\}$  et  $t_2 = \{y_1, y_2, y_3\}$  d'une instance de la relation  $R(\text{TypeFilm}, \text{Annee}, \text{Acteur})$ . On a  $t_1 \succ_C t_2$  ssi :

$$C(t_1, t_2) \equiv (x_1 = y_1 \wedge x_2 > 2010 \wedge y_2 < 2000) \\ \vee (x_1 = y_1 \wedge x_2 = y_2 \wedge x_3 = \text{"Sylvester Stalone"} \wedge y_3 = \text{"Pierce Brosnan"})$$

Cette règle veut tout simplement dire que le client préfère pour des films de même type, des films au delà de 2010 aux films produits avant 2000, et si les films sont de même type et de même année, il préfère ceux avec l'acteur Sylvester Stalone à ceux avec l'acteur Pierce Brosnan.

### Formulation de Nic Wilson

Le formalisme de Wilson se fonde sur la logique des préférences conditionnelles. Une règle de préférence conditionnelle a sa forme générale comme suit : "si [conjonction de conditions élémentaires] alors [décision]"

La partie condition indique dans quelle condition la règle est appliquée et la partie décision montre le choix à opérer sur les valeurs si la partie condition est satisfaite. Plus précisément, le formalisme proposé par Wilson est défini de la façon suivante :

**Definition 9.** Soit  $\mathcal{A}$  un ensemble d'attributs,  $U \subseteq \mathcal{A}$ ,  $a_{i1}$  et  $a_{i2} \in \text{dom}(A_i)$ ,  $A_i \notin U$ . Une règle de préférence contextuelle est sous la forme  $u : a_{i1} \succ a_{i2}[W]$  tel que  $u \in \text{dom}(U)$  et

$W$  un sous-ensemble de  $S = \mathcal{A} - (U \cup A_i)$ .

Cette formulation peut être réécrite suivant le formalisme de CHOMICKY (Définition 8) de la façon suivante (dans cette situation on a  $p = u : a_{i1} \succ a_{i2}[W]$ ) :

$$t_i \succ_p t_j \text{ ssi } t_i[S - W] = t_j[S - W] \wedge t_i[U] = t_j[U] = u \wedge t_i[A_i] = a_{i1} \wedge t_j[A_i] = a_{i2}$$

De façon intuitive cette règle de préférence contextuelle indique que tout tuple  $t_i$  contenant  $u$  et  $a_{i1}$  est préféré à tout tuple  $t_j$  contenant  $u$  et  $a_{i2}$  indépendamment des valeurs des attributs  $W$  dans  $dom(W)$ , sachant que les valeurs dans  $dom(S - W)$  sont les mêmes pour les deux tuples.

Par cette formulation, l'exemple 1 peut se réécrire de la façon suivante :

### Exemple 2

Dans le cas d'un schéma relationnel  $\mathcal{R} = \{Langage, Title, Director, Actor\}$  on a l'exemple suivant

$$Langage = English \succ Langage = French[Title, Director, Actor]$$

Cette règle indique la préférence des films Anglais aux films Français sans tenir compte du titre du film, du directeur du film ou bien de l'acteur, pour tout couple de film ayant la même année de production.

### Formulation de Werner Kießling

Dans les travaux de [Kie02], l'auteur propose un langage formel pour modéliser les préférences qui forment une relation d'ordre partiel strict. Pour cela, l'auteur propose un certain nombre de constructeurs de base qui sont des patrons de préférence, qui dès qu'ils sont instanciés donnent des préférences de base. Ces constructeurs sont caractérisés par plusieurs arguments dont le premier indique les noms des attributs concernés par le constructeur et les autres arguments indiquant les caractéristiques de l'ordre partiel stricte  $< P$  qui sera appliqué sur les attributs énoncés dans le premier argument. Dans ce travail, nous présenterons deux types de constructeurs de base à savoir les **constructeurs de base non numériques** et les **constructeurs de base numériques**.

### Les constructeurs de base non numériques

Leurs définition ne prend pas en compte d'opérations numériques.

Exemple :



Préférence POS : POS(A, POS-set)

P est une préférence POS si :

$$x <_{Pyssix} \notin POS - set \wedge y \in POS - set$$

Ceci veut dire que parmi deux valeurs de A, la valeur préférée est celle qui appartient à  $POS - set \subset dom(A)$ . Autrement si aucune des valeurs n'est dans  $POS - set$ , alors une des deux est acceptable. (Ex : scénario d'un choix de voiture : POS(transmission, automatique))

Préférence POS/NEG : POS/NEG(A, POS-set ; NEG-set)

P est appelé préférence POS/NEG si :

$$x <_{Pyiff} (x \in NEG - set \wedge y \notin NEG - set) \vee (x \notin NEG - set \wedge x \notin POS - set \wedge y \in POS - set)$$

Ceci veut dire que parmi deux valeurs, la préférée est celle qui appartient à  $POS - set \subset A$ , autrement si aucune des deux valeurs n'est dans  $POS - set$ , et qu'une d'elle n'appartient pas à  $NEG - set \subset A$ , elle est la préférée, autrement si les deux appartiennent à  $NEG - set$  alors une d'elles est choisie arbitrairement. (Ex : scénario de choix de voiture : POS/NEG(couleur,jaune ;gris)

### Les constructeurs de base non numériques

Leur définition prend en compte des opérations numériques.

Exemple :

Préférence AROUND : AROUND(A, z)

Etant donné  $z \in dom(A)$ , pour tout  $v \in dom(A)$ , on défini  $distance(v, z) := abs(v - z)$ . P est appelé préférence AROUND, si :

$$x <_{Pyssidistance} (x, z) > distance(y, z)$$

Ceci veut dire que parmi deux valeurs de A, si l'une d'elle est z, elle est la valeur préférée. Autrement, si aucune des valeurs n'est z, la plus préférée est celle qui est la plus proche de Z e terme de distance. (Ex : scénario de choix de voiture : AROUND(prix, 40000))

Préférences LOWEST, HIGHEST : LOWEST(A), HIGHEST(A)

P est appelé préférence LOWEST, si :

$$x < Pyssix > y$$

P est appelé préférence HIGHEST, si :

$$x < Pyssix < y$$

Ceci veut dire qu'une valeur désirée doit être la plus élevée (basse) possible. (Ex : scénario choix de voiture : HIGHEST(puissance).

## 1.2 Les différents modes de combinaison de préférences

Après avoir présenté précédemment les différentes formulations des préférences dans la littérature, nous allons à présent étudier les différentes méthodes de combinaisons de ces préférences afin de former des modèles de préférence.

### 1.2.1 Composition de préférences prioritaires

Elle est définie comme suit :

**Definition 10.** Soient  $P_x$  et  $P_y$  deux relations de préférence définies sur le même schéma relationnel  $R$ . La relation de préférence prioritaire  $\succ_{P_x} \& \succ_{P_y}$  est définie sur  $R$  par :

$$\forall t_i, t_j \text{ d'une instance de } R, t_i \succ_{P_x} t_j \text{ ssi } (t_i \succ_{P_x} t_j) \vee (t_i \sim_{P_x} t_j \wedge t_i \succ_{P_y} t_j).$$

Ceci veut dire qu'on utilise la préférence  $P_x$  si elle est applicable et autrement on utilise  $P_y$ .

#### Example 3

Soient deux relations de préférence  $\succ_{P_x}$  et  $\succ_{P_y}$  tel que :

- $t_i \succ_{P_x} t_j$ , ssi  $t_i[\text{genre}] = 'Drama' \wedge t_j[\text{genre}] = 'Comedy'$ .
- $t_i \succ_{P_y} t_j$ , ssi  $t_i[\text{Language}] = 'French' \wedge t_j[\text{Language}] = 'English'$ .

La relation de préférence prioritaire  $\succ_{P_x} \& \succ_{P_y}$  est alors définie comme suit :

$$t_i \succ_{P_x} \& \succ_{P_y} t_j \text{ ssi } (t_i[\text{genre}] = 'Drama' \wedge t_j[\text{genre}] = 'Comedy') \vee (t_i[\text{genre}] \neq 'Drama' \wedge t_i[\text{Language}] = 'French' \wedge t_j[\text{Language}] = 'English')$$

### 1.2.2 Réseaux de préférences conditionnelles (CP-nets)

Un CP-nets est une approche de représentation des préférences fondée sur une représentation graphique. Ceci se fait à l'aide de deux notions à savoir :

- la notion de préférence conditionnelle ;
- la notion de ceteris paribus.

Soit  $V = \{X_1, X_2, \dots, X_i\}$  La notion de préférence conditionnelle est d'indiquer pour chaque attribut  $X_i$  ses attributs parents  $Pa(X_i)$ , c'est à dire les autres attributs dont il dépend par rapport aux préférences de l'utilisateur. Ainsi lorsque l'on a une instantiation  $u$  de  $Pa(X_i)$ , on sait quel valeur de  $X_i$  est préférée à l'autre suivant  $u$ . La notion de ceteris paribus dans le cas d'une préférence conditionnelle est que pour un attribut  $X_i$ , le choix au niveau de cet attribut dépend de ses parents  $Pa(X_i)$  indépendamment des valeurs fixées au niveau des autres attributs  $Y = V - Pa(X_i) \cup X_i$ .

En se basant sur ces notions, nous formons au niveau de chaque attribut  $X_i$ , ce qu'on appelle **Table de Préférence Conditionnelle CPT** (sur la condition du ceteris paribus). Celle ci énumère les différentes préférences au niveau des valeurs de  $X_i$  suivant les valeurs des attributs de  $Pa(X_i)$ .

#### Exemple 4

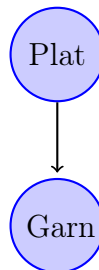
Cas des préférences au niveau des plats de riz. L'utilisateur préfère accompagné le riz au poisson plutôt qu'à la viande, et dans le cas du spaghetti, il préfère la viande au poisson.

Riz	Poisson $\succ$ Viande
Spaghetti	Viande $\succ$ Poisson

L'ensemble de ces tables de préférences conditionnelles vont former les CP-nets comme on peut le voir au niveau de l'exemple ci dessous.

#### Exemple 5

Meme genre que l'exemple précédent.



	Poisson $\succ$ Viande
Riz	Poisson $\succ$ Viande
Spaghetti	Viande $\succ$ Poisson

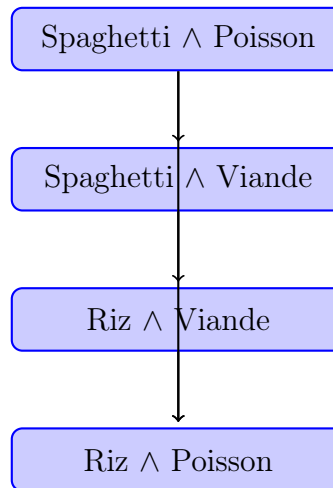
Ainsi nous définissons un CP-nets de la manière suivante :

**Definition 11.** Un CP-net sur les attributs  $V = \{X_1, X_1, \dots, X_n\}$  est un graphe orienté sur les attributs  $X_1, X_1, \dots, X_n$  où chaque nœud  $X_i$  est annoté avec une table de préférence conditionnelle,  $CPT(X_i)$ . Chaque table de préférence conditionnelle  $CPT(A_i)$  associe un ordre total  $\succ_u^i$  pour chaque instantiation  $u$  de  $Pa(X_i)$ .

A partir d'un CP-net on peut alors schématiser le graphe de préférence induit.

### Example 6

Le graphe de préférence induit par rapport à l'exemple précédent nous donne :



Sur cette figure, un arc partant d'un élément  $a$  vers un élément  $b$  indique que la préférence de  $b$  sur  $a$  peut être déterminée directement par les CPTs du CP-net. On voit que l'élément le plus en haut (Spaghetti  $\wedge$  Poisson) est l'élément le moins préféré tandis que l'élément le plus en bas (Riz  $\wedge$  Poisson) est l'élément le plus préféré.

### Comparaison de deux transaction suivant un CP-net

**Definition 12.** Prenons un CP-net  $N$  sur  $V$ ,  $X_i$  un attribut de  $V$  et  $Pa(X_i)$  les attributs parents de  $X_i$  dans  $V$ . Soit  $Y = V \setminus (U \cup \{X_i\})$ . Soit  $\succ_u^i$  l'ordre induit par  $CPT(X_i)$  sur

$Dom(X_i)$  pour toute initialisation  $u \in Ass(U)$  de  $Pa(X_i)$ . Soit  $\succ$  une relation de préférences sur  $Asst(V)$ .

On peut dire qu'une relation de préférences  $\succ$  satisfait  $\succ_u^i$  ssi on a, pour tout  $y \in Asst(Y)$  et tout  $x, x' \in Dom(X_i)$ ,  $yxu \succ yx'u$  chaque fois que  $x \succ_u^i x'$ .

Une relation de préférence  $\succ$  satisfait  $CPT(X_i)$  ssi elle satisfait  $\succ_u^i$  pour tout  $u \in Asst(U)$ . Donc un CP-net  $N$  est satisfait par  $\succ$  ssi celui ci satisfait chacun des préférences conditionnelles exprimées dans les CPT de  $N$  suivent la notion de ceteris paribus.

**Definition 13.** Soit  $N$  un CP-net sur l'ensemble des attributs  $V$ . Soit  $a, b \in Asst(V)$ .  $N$  entraine  $a \succ b$  et noté  $N \models a \succ b$  ssi  $a \succ b$  pour toute relation de préférence qui satisfait  $N$ .

---

## 2 Résumé article Preference Learning : An Introduction de Johannes Furnkranz 1 and Eyke Hullermeier

### Introduction

Le raisonnement à base de préférence est un domaine de recherche en Intelligence Artificielle. Les préférences sont des contraintes faibles qui permetttent une meilleure flexibilité en terme d'étude et de prédiction des choix utilisateurs. Ainsi on peut dans le cas où les conditions de recherche fixé par un utilisateur ne donnent pas des résultats consistants, se baser sur ces préférences afin de proposer d'autres résultats suivant ses préférences qui porteront aussi autant d'intérêt.

Il est à noter que l'quisition de préférences se base sur plusieurs principes à savoir :

- Les langages de modélisation et de formalisme
- Les méthodes d'apprentissage automatique, de découverte

Ainsi l'étude des préférences est un domaine qui fait l'objet de recherche dans les disciplines tel que l'apprentissage artificiel, la fouille de données, les systèmes de recommandation.

L'apprentissage de préférence, grosso modo parlant consiste à extraire des modèles de préférences de données empiriques.

Deux approches sont à distinguer en terme de modélisation de préférences à savoir

- Les fonctions utilités

— Les relations de préférence

Comparativement aux méthodes basées sur les fonctions utilité, l'apprentissage des relations de préférence se distingue fortement des méthodes classiques comme la classification ou la régression du fait qu'elle permet d'obtenir des structures complexes comme les classements et les relations d'ordre partielles plutôt que des valeurs.

Ce document parcourt de façon générale les recherches en cours dans le domaine de l'apprentissage de préférences et alors permettra d'avoir une meilleure vue de ce domaine.

## 2.1 Tâches d'apprentissage de préférences

La tâche d'apprentissage de classement est celle qui a le plus d'attention dans l'apprentissage de préférence. Dans cette section nous proposons une terminologie unifiée et claire pour les problèmes de classement les plus importants.

Dans le cadre des notations, nous allons utiliser une terminologie qui est souvent utilisée en apprentissage supervisé. Ainsi un objet caractérisant une donnée est appelé instance dénoté  $x$  et la classe à laquelle il est associé sera appelé label de classe. L'espace caractéristique des instances sera noté  $\mathcal{X}$  et l'espace de sortie sera dénoté  $\mathcal{Y}$ . Les instances sont souvent représentées sous forme de vecteur caractéristique :

$$x = (x_1, x_2, \dots, x_m) \in \mathcal{X} = \mathcal{X}_1 \times \mathcal{X}_2 \times \dots \times \mathcal{X}_m$$

Nous distinguons trois types de classement à savoir :

- Le classement de labels
- Le classement d'instances
- Le classement d'objets

### 2.1.1 Le classement de labels

Le classement de labels est un type de classement prenant en compte un espace d'instances  $\mathcal{X}$  et un ensemble fini de labels  $\mathcal{Y} = \{y_1, y_2, \dots, y_k\}$ . Il consiste à apprendre un "classeur de labels" qui est une fonction définie sur  $\mathcal{X} \Rightarrow S_y$  qui prend en entrée une instance et fournie en sortie une permutation de l'ensemble des labels suivant un ordre total. Ainsi le classement de label peut être vu comme une généralisation de la classification conventionnelle où un classement total

$$y_{\pi_x^{-1}(1)} \succ_x y_{\pi_x^{-1}(2)} \succ_x \dots \succ_x y_{\pi_x^{-1}(k)}$$

est associé à une instance  $x$  au lieu d'un seul label de classe dans le cas de la classification.  $\pi_x$  est une permutation de  $\{1, 2, \dots, k\}$  telle que  $\pi_x(i)$  est la position du label  $y(i)$  dans le classement associé à  $x$ .

L'ensemble d'apprentissage pour le classement de labels typiquement consiste en un ensemble de préférences par paires de la forme  $y_i \succ y_j$  indiquant que  $y_i$  est préféré à  $y_j$  pour l'instance  $x$ .

Comme exemple de situations où on a affaire à un classement de label, on peut parler du classement de la pertinence des types de rubriques par journal comme le sport, les technologies, la santé etc..

---

**Soit :**

- Un ensemble d'instances d'apprentissage  $\{x_l | l = 1, 2, \dots, n\} \subseteq \mathcal{X}$  (chaque instance peut ou pas être représentée par un vecteur).
- Un ensemble de labels  $\mathcal{Y} = \{y_i | i = 1, 2, \dots, k\}$
- Pour toute instance d'entraînement  $x_l$ , un ensemble de préférences de la forme  $y_i \succ_{x_l} y_j$

**Trouvons :**

Une fonction de classement qui lie toute instance  $x$  à un classement  $\succ_x$  de  $\mathcal{Y}$  (i.e une permutation  $\pi_x \in \mathcal{S}_k$ )

**Mesures de performance**

- Erreur de classement (ex : basée sur les mesures de corrélation entre les rangs) comparant les classements prédits aux classements cibles.
- Erreur de position comparant le rang prédit au label cible.

---

### 2.1.2 Classement d'instance

Ce classement se fonde sur le principe d'une 'classification ordinaire où une instance  $x$  appartient à une des classes de l'ensemble de classes ordonnées  $\mathcal{Y} = \{y_1, y_2, \dots, y_k\}$  tel que  $y_1 < y_2 < \dots < y_k$ .

Le jeu de données d'apprentissage consistent en un ensemble  $\mathcal{T}$  d'instances labellisées. Comme exemple on peut considérer la répartition d'articles suivant les catégories "rejeté", "faible rejet", "faible acceptation", "acceptation". Suivant les données d'apprentissage, le but est alors d'apprendre des fonctions de classement assignant un score à chaque

instance fournie en entrée. Ce score permet de classer les différentes instances. Ainsi des problèmes concrets étudiés prennent en compte des classements basés sur des ensembles de deux classes ( $k=2$ ) appelés **problèmes de classement bipartites** et des classements basés sur des ensembles de  $k$  classes appelés de **problèmes de classement k-partite ou multipartite**. Dans le cas des classements bipartites, en prenant deux instances  $x_1$  et  $x_2$ , avec le score donné par la fonction, on a que :

$$f(x_1) > f(x_2) \Rightarrow x_1 \text{ a le label supérieur et } x_2 \text{ le label inférieur}$$

Du côté du classement multipartite de même on a en prenant deux instances  $x_1$  et  $x_2$ , avec le score donné par la fonction, on a que :

$$f(x_1) > f(x_2) \Rightarrow x_1 \text{ a un label supérieur à celui de } x_2$$

Mais dans ce cas ci il est à prendre en compte l'écart entre les niveau des labels lors de l'évaluation de la précision de la méthode d'apprentissage.

---

**Soit :**

- Un ensemble d'instances d'apprentissage  $\{x_l | l = 1, 2, \dots, n\} \subseteq \mathcal{X}$  (chaque instance peut ou pas être représentée sous forme d'un vecteur).
- Un ensemble de labels  $\mathcal{Y} = \{y_i | i = 1, 2, \dots, k\}$  munis d'un ordre  $y_1 < y_2 < \dots < y_k$
- Pour toute instance d'entraînement  $x_l$ , un label associé  $y_l$

**Trouvons :**

Une fonction de classement qui permet de classer un nouvel ensemble d'instances  $\{x_j\}_{j=1}^t$  suivant leur degré de préférence

---

### 2.1.3 Classement d'objets

**L'approche de Cohen**[ref : article de Cohen :Learning to Order Things](#)

L'approche de Cohen est caractérisée par la définition des **fonctions de préférence**  $PREF$  qui sont des fonctions définies sur  $X \times X \rightarrow [0, 1]$  indiquant pour tout couple  $(u, v) \in X \times X$ , avec quel taux de recommandation l'un doit être préféré à l'autre. Ainsi si  $PREF(u, v)$  tend vers 1, alors il y'a une forte recommandation que  $u$  soit préféré à  $v$  et si  $PREF(u, v)$  tend vers 0, alors il y'a une forte recommandation que  $v$  soit préféré à  $u$ . Une valeur proche



de  $1/2$  est interprétée comme une abstention de faire une recommandation.

Cette fonction de préférence est obtenue par la combinaison pondérée de  $N$  **fonctions de préférence primitive**  $R_1, \dots, R_N$ . Elle est écrite alors de la manière suivante :

$$PREF(u, v) = \sum_{i=1}^N w_i R_i(u, v)$$

Chaque fonction de préférence primitive  $R_i(u, v)$  est déjà disponible et prend les valeurs 1 si  $u$  est préféré à  $v$ , 0 si  $v$  est préféré à  $u$  et  $1/2$  autrement. Afin de déterminer les poids  $w_i$  alloué à chaque fonction de préférence primitive  $R_i$ , plusieurs tours sont effectués en fournissant à chaque tour  $t$  un ensemble d'instance  $X^t$  à classer. Après le classement de ces instances par la fonction de préférence de base, un feedback  $F^t$  lui est fourni en contenant des paires  $(u, v)$  indiquant quel élément  $u$  devrait être préféré à quel élément  $v$  dans le classement. Avec ce feedback on peut définir la **perte** de la fonction de préférence  $R_i$  définie par :

$$Loss(R, F) = \frac{\sum_{(u,v) \in F} (1 - R(u, v))}{|F|} = 1 - \frac{1}{|F|} \sum_{(u,v) \in F} R(u, v)$$

Initialement  $w_i^1 = 1/N$  mais par la suite, les valeurs de  $w_i^t$  par les itérations suivantes sont obtenus par la formule suivante :

$$w_i^{(t+1)} = \frac{w_i^t \cdot \beta^{Loss(R_i^t, F^t)}}{Z_t}$$

où  $\beta \in [0, 1]$  est un paramètre et  $Z_t$  est une **constante de normalisation**.

Suite à l'obtention de la fonction de préférence finale fournissant ainsi un score à chaque couple d'un l'ensemble  $X \times X$  fourni en entrée, le but est de fournir un ordre total de ces instances. Le processus de classement effectué à partir de l'évaluation des scores des couples  $(u, v)$  fourni par  $PREF$  est NP-complet,. D'où la nécessité d'utiliser un algorithme optimisant ce classement. Le but est d'avoir l'ordre  $O$  maximisant

$$\sum_{(u,v) \in O} PREF(u, v)$$

Ainsi il a été proposé un algorithme glouton décrit ci dessous :

---

**Algorithme 1** : Algorithme glouton de classement (Cohen)

---

```
O ← ∅;
forall x ∈ Xu do
    score(x) ← ∑x' ∈ Xu PREF(x, x');
while Xu ≠ ∅ do
    xtop ← argmaxx score(x);
    Ou ← Ou ∪ xtop;
    Xu ← Xu - xtop;
    forall x ∈ Xu do
        score(x) ← score(x) - PREF(x, xtop);
return Ou;
```

---

**Algorithme RankBoost**

C'est un algorithme proposé par Freund et al [ref : livre preference learning](#) qui est un dérivé de Adaboost, Algorithme de boosting connu dans le domaine de l'apprentissage. Sa spécificité est qu'il se base sur des ordre au lieu de se baser sur des scores dans le cas de Adaboost. Les données d'entrée de Rankboost sont des **fonctions de retour**  $\phi(x_a, x_b)$  qui impliquent que  $x_b \succ x_a$  si  $\phi(x_a, x_b) > 0$ . Ces fonctions de retour sont issu du processus d'appréciation fournie en retour de l'information de classement fournie par l'algorithme. De même en entré, il y'a un ensemble de fonctions appelées **ranking features**  $f(x_i)$  qui fournie une information partielle sur l'ordre dans l'ensemble  $X$  des instances. Avec ces entrées, Rankboost retourne le classement final  $H(x_i)$  qui fonctionne comme une fonction de score. Initialement, une distributino est calculée par  $D_1(x_a, x_b) = \max(\phi(x_a, x_b), 0)/Z_1$  pour tout  $(x_a, x_b) \in X \times X$  où  $Z_1$  est un coefficient de normalisation qui assure que  $\sum_{x_a, x_b} D_1(x_a, x_b) = 1$  Ainsi pour chaque tour  $t = 1, \dots, T$ , l'algorithme répète un processus de sélection du poids  $\alpha_t$  et de la fonction d'apprentissage de base  $h_t(x)$  de manière à minimiser la valeur de  $Z_t$ . Il existe plusieurs méthodes pour cette minimisation que nous n'allons pas expliciter (conf ...). A l'itération suivante on met à jour la distribution :

$$D_{t+1}(x_a, x_b) = \frac{1}{Z_t} \exp(\alpha_t(h_t(x_a) - h_t(x_b)))$$

Les fonctions d'apprentissage de base  $h_t$  sont caractérisées par le fait que  $h_t(x_b) > h_t(x_a) \Rightarrow$

$x_b \succ x_a$ . Après les  $T$  itérations, nous obtenons une fonction de score :

$$H(x) = \sum_{t=1}^T \alpha_t h_t(x)$$

Ainsi cette fonction permet de classer toutes les instances de  $X$  tel que :

$$\forall x_a, x_b \in X \times X, H(x_a) > H(x_b) \Rightarrow x_a \succ x_b$$

### Classement à base de SVM

---

## 3 Définition et extraction des règles de préférence contextuelle

Soit  $\mathcal{R}(R_1, R_2, \dots, R_n)$  un schémas relationnel tel que pour chaque attribut  $R_i$  on note son domaine de valeurs par  $Dom(R_i)$ . Ainsi notons  $Dom(\mathcal{R}) = Dom(R_1) \times Dom(R_2) \times \dots \times Dom(R_n)$ . On appelle une **transaction**, tout élément de  $Dom(\mathcal{R})$ . Soit  $\mathbf{I} = \bigcup_1^n Dom(R_i)$ , tout élément  $i$  tel que  $i \in \mathbf{I}$ , est appelé **item**. En prenant une transaction  $T = i_1, i_2, \dots, i_n$ , tout élément  $I$  tel que  $I \in T$  est appelé **itemset**. Une **base de transactions** est un ensemble de transactions, chacun associé à un identifiant unique. Une **paire de transactions**  $\langle T_1, T_2 \rangle$  est un vecteur de transactions tel que  $\langle T_1, T_2 \rangle \neq \langle T_2, T_1 \rangle$

### Exemple 7

Soit un schémas relationnel  $\mathcal{R}(\text{Genre}, \text{Acteur}, \text{Annee})$ . Leur domaines de valeurs peuvent être les suivants :  $Dom(\text{Genre}) = \{\text{Action}, \text{Aventure}, \text{Guerre}, \text{Comedie}\}$ ,  $Dom(\text{Acteur}) = \{\text{PierceBrosman}, \text{SylvesterStalone}, \text{HarrisonFord}\}$  et  $Dom(\text{Annee}) = [1900; 2020]$ .  $Dom(A) = Dom(\text{Genre}) \times Dom(\text{Acteur}) \times Dom(\text{Annee})$  Ainsi  $T = \{\text{Action}, \text{PierceBrosman}, 2010\}$  est une transaction de  $Dom(A)$ .  $T' = \{\text{Action}, 2010\} \in T$  est alors un itemset.

### 3.1 Préférences utilisateur

**Definition 14.** (*Préférence utilisateur*)

Une **préférence utilisateur** est une paire de transactions  $\langle T_1, T_2 \rangle$  qui spécifie que l'utili-

sateur préfère  $T_1$  à  $T_2$ . Elle est aussi écrite sous la forme  $T_1 \succ T_2$ .

**Definition 15.** (Base de préférence)

Soit  $\mathcal{D}$  un ensemble de transactions. Une **base de préférence**  $\mathcal{P} = \mathcal{D} \times \mathcal{D}$  d'un utilisateur est un ensemble de préférences utilisateur.

**Definition 16.** (Règle de préférence contextuelle)

Soit des itemsets  $C, X, Y$ . Une **règle de préférence contextuelle** est une règle de la forme  $C \rightarrow X \succ Y$  signifiant que l'utilisateur préfère  $X$  à  $Y$  si le contexte  $C$  est observé.

**Example 8**

La règle de préférence contextuelle  $\{Action\} \rightarrow \{1990\} \succ \{2000\}$  signifie que dans le cas de films d'action, l'utilisateur préfère les films de 1990 aux films de 2000.

La règle de préférence contextuelle  $\{MemeGenre\} \rightarrow \{Avant \text{ l'annee } 2000\} \succ \{Après \text{ l'annee } 2000\}$  signifie que dans le cas où deux films sont de même genre, l'utilisateur préfère les films produits au delà de l'année 2000.

Deux transactions sont **comparables** suivant la règle  $C \rightarrow X \succ Y$  si les deux contiennent  $C$  et si une des deux contient  $X$  et l'autre  $Y$ .

On dit qu'une préférence  $\langle T_1, T_2 \rangle$  **supporte** une règle de préférence contextuelle  $\mathcal{R} = C \rightarrow X \succ Y$  prenant en compte les items (resp les itemsets de préférence) si  $C \in T_1 \cap T_2$  (resp  $T_1$  et  $T_2$  vérifient  $C$ ) et si  $X \in T_1 \setminus T_1 \cap T_2$  (resp seul  $T_1$  vérifie  $X$ ) et  $Y \in T_2 \setminus T_1 \cap T_2$  (resp seul  $T_2$  vérifie  $Y$ ).

De même on dit qu'une préférence  $\langle T_1, T_2 \rangle$  **contredit** une règle de préférence contextuelle  $\mathcal{R} = C \rightarrow X \succ Y$  prenant en compte les items (resp les itemsets de préférence) si  $C \in T_1 \cap T_2$  (resp  $T_1$  et  $T_2$  vérifient  $C$ ) et si  $Y \in T_1 \setminus T_1 \cap T_2$  (resp seul  $T_1$  vérifie  $Y$ ) et  $X \in T_2 \setminus T_1 \cap T_2$  (resp seul  $T_2$  vérifie  $X$ ).

**Example 9**

Avec  $T_1 = \{Action, Pierce Brosman, 1990\}$  et  $T_2 = \{Action, Sylvester Stalone, 2000\}$ , on constate que  $\langle T_1, T_2 \rangle$  supporte la règle de préférence  $\{Action\} \rightarrow \{1990\} \succ \{2000\}$ .

De même on dit qu'une transaction  $T_1$  est **préférée** à une transaction  $T_2$  suivant une règle contextuelle  $\mathcal{R} = C \rightarrow X \succ Y$  et noté  $T_1 \succ_{\mathcal{R}} T_2$  si si  $C \in T_1 \cap T_2$  (resp  $T_1$  et  $T_2$  vérifient  $C$ ) et si  $Y \in T_1 \setminus T_1 \cap T_2$  (resp seul  $T_1$  vérifie  $Y$ ) et  $X \in T_2 \setminus T_1 \cap T_2$  (resp seul  $T_2$  vérifie  $X$ ).

**Definition 17.** Le **support** d'un itemset (resp. règle de préférence) est le nombre de transactions de préférences contenant l'itemset (resp. supportant la règle de préférence)

$$sup(Itemset) = \frac{|\langle T_i, T_j \rangle \in \mathcal{P} | Itemset \subset \langle T_i, T_j \rangle|}{|\mathcal{P}|}$$

**Definition 18.** La **confiance** d'une règle de préférence quand à elle est le taux de transactions vérifiant la règle par rapport à la somme du nombre de transactions vérifiant et du nombre de transactions contredisant la règle.

$$conf(Rule) = \frac{|\langle T_i, T_j \rangle \in \mathcal{P} | T_i \succ_{Rule} T_j|}{|\langle T_i, T_j \rangle \in \mathcal{P} | T_i \succ_{Rule} T_j| + |\langle T_i, T_j \rangle \in \mathcal{P} | T_j \succ_{Rule} T_i|}$$

## 4 Utilisation des motifs séquentiels dans le cadre des préférences

Les travaux antérieurs se sont penchés sur des méthodes d'extraction de connaissance afin de les exploiter pour extraire les profils de préférence. C'est dans cette logique que le travail effectué au niveau de (Giacometti et al.) a permis de proposer un mode d'extraction de profil utilisateur inspiré de l'extraction des motifs séquentiels. Ils ont nommé cette approche **Sprex** (Sequence-pattern based preference rule extraction) Il a été ainsi adopté de nouvelles représentation des préférences utilisateurs inspirées de la représentation des motifs séquentiels. Nous allons dans les sous sections suivantes décrire cette nouvelle représentation et les différentes étapes de Sprex qui permettent de construire les profils de préférence (à l'aide de son module nommé **Sprex-Build**) et prédire les préférences (à l'aide de son module nommé **Sprex-Predict**).

### 4.1 Représentation séquentielle des préférences

Soit  $I$  l'ensemble de tous les items. Un item de préférence est une paire  $L : i$  où  $L \in \{C, P, N\}$  est un label (avec  $C \equiv$  Contexte,  $P \equiv$  Préféré,  $N \equiv$  Non-préféré) et  $i$  un

item de  $\mathcal{I}$ . Soient deux transactions  $T_1$  et  $T_2$  telles que  $T_1 \succ T_2$ . Dans leur cas, on défini par :

- **Itemset contextuel** l'ensemblle d'items de préférence  $C = \{C : c_1, C : c_2, \dots, C : c_k\}$  tel que  $\{c_1, c_2, \dots, c_k\} \equiv T_1 \cap T_2$
- **Itemset préféré** l'ensemblle d'items de préférence  $P = \{P : x_1, P : x_2, \dots, P : x_k\}$  tel que  $\{x_1, x_2, \dots, x_k\} \equiv T_1 \setminus T_2$
- **Itemset non préféré** l'ensemblle d'items de préférence  $N = \{N : y_1, N : y_2, \dots, N : y_k\}$  tel que  $\{y_1, y_2, \dots, y_k\} \equiv T_2 \setminus T_1$

Ces types d'itemsets sont appelés **itemsets de préférence**. La **base de séquences de préférence**  $\mathcal{P}$  correspondant à une **base de préférence** est l'ensemble des séquences de préférence qui correspondent à une préférence unique de la base de préférence. Dans ce cas on calcule le support  $supp$  d'une séquence de préférence  $s$  en comptant le nombre de séquences de préférence  $s'$  de la base de séquence de préférence qui contiennent  $s$ .

$$supp(s) = \{s' \in \mathcal{P} / s \subset s'\}$$

On appelle **séquence de préférence** la séquence  $\langle CPN \rangle$  qui est une liste ordonnée des itemsets  $C, P, N$  représentant la transaction de préférence  $\langle T_1, T_2 \rangle$  avec  $T_1 = C \cup P$  et  $T_2 = C \cup N$ .

Une règle de préférence contextuelle  $C \rightarrow X \succ Y$  où  $C = \{c_1, c_2, \dots, c_k\}$ ,  $X = \{x_1, x_2, \dots, x_3\}$ ,  $Y = \{y_1, y_2, \dots, y_3\}$ , peut être écrite sous forme de séquence de préférence  $\langle C_C X_P Y_N \rangle$ .

Soit la paire de transactions  $\langle T_1, T_2 \rangle$  dont la séquence de préférence correspondante est  $\langle I_C I_P I_N \rangle$ . Ainsi :

$$C \rightarrow X \succ Y \text{ supporte } \langle T_1, T_2 \rangle \Leftrightarrow \langle C_C X_P Y_N \rangle \subseteq \langle I_C I_P I_N \rangle$$

$$C \rightarrow X \succ Y \text{ contredit } \langle T_1, T_2 \rangle \Leftrightarrow \langle C_C X_P Y_N \rangle \not\subseteq \langle I_C I_N I_P \rangle$$

Ces correspondances nous permettent de déduire que le support d'une règle de préférence  $C \rightarrow X \succ Y$  est égal au support de la séquence de préférence  $\langle C_C X_P Y_N \rangle$  qui lui correspond. De même le nombre de paires de préférence qui contredisent cette règle correspond au nombre de séquences de préférences qui supportent  $\langle C_C Y_P X_N \rangle$ .

## 4.2 Description de la consruction du profil de préférence par Sprex-Build

Sprex-Build est la composante de Sprex dont le rôle est de permettre la construction d'un profil utilisateur (modèle de préférence)  $\mathcal{M}_{\mathcal{P}}$  à partir d'une base de préférences utilisateur  $\mathcal{P}$  en prennant en commpte le seuil minimal de support  $\sigma$ , le seuil minimal de confiance  $\delta$  et en utilisant une fonction de modélisation  $\pi$  (choisie par l'utilisateur). Nous décrivons ci dessous l'algorithme de Sprex-Build.

## 4.3 Aperçut du formalisme de CHOMICKY

CHOMICKI a dans l'article [?] établit la notion de **relation de préférence**  $\succ$  comme un sous ensemble de  $Dom(A) \times Dom(A)$ . Ceci veut intuitivement dire que  $\succ$  est une relation binaire entre des transactions d'une même instance  $r$  du schémas relationnel  $\mathcal{R}$ . Ainsi on a  $t_1$  est préféré à  $t_2$  suivant  $\succ$  si  $t_1 \succ t_2$ . De même il a défini la notion de formule de préférence  $C(t_1, t_2)$  comme étant une une formule de premier ordre définissant une relation de préférence  $\succ_C$  de telle sorte que  $t_1 \succ_C t_2 \equiv C(t_1, t_2)$

Cette formule est sous une forme normale disjonctive DNF mais sans considérer les quantificateurs. Ainsi on a :

$$C(t_1, t_2) = \bigvee_{i=1..k} \left( \bigwedge_{j=1..l} f_{ij} \right)$$

où  $f_{ij}$  sont des formules atomiques sous la forme  $x\delta y$  ou  $x\delta c$  avec  $x$  et  $y$  des variables d'un attribut de  $R$  correspondants respectivement à  $t_1$  et  $t_2$ .  $c$  quand à lui est une constante.  $\delta$  prend les valeurs  $=, \neq$  dans le cas où les éléments  $x, y, c$  sont de type quelconque (Exemple :  $x = y, x = a, y \neq a$ ), et  $\leq, \geq, <, >$  dans le cas où on a à faire à des valeurs numériques (Exemple :  $x < y, x < a, y \geq a$ ).

### Exemple 10

- Soit deux transactions  $t_1 = \{x_1, x_2, x_3\}$  et  $t_2 = \{y_1, y_2, y_3\}$  d'une instance de la relation  $R(\text{Plat}, \text{TypePlat}, \text{TypeVin})$ . On a qu'ils vérifient la formule de préférence  $C$  si et seulement si

$$\begin{aligned} C(t_1, t_2) \equiv & (x_1 = y_1 \wedge x_2 = \text{"fish"} \wedge y_2 = \text{"fish"} \wedge x_3 = \text{"white"} \wedge y_3 = \text{"red"}) \\ & \vee (x_1 = y_1 \wedge x_2 = \text{"meat"} \wedge y_2 = \text{"meat"} \wedge x_3 = \text{"red"} \wedge y_3 = \text{"white"}) \end{aligned}$$

est vérifié. Cette condition veut dire que dans le cas où c'est un plat à base de poisson, le client préfère le vin blanc au vin rouge et dans le cas où c'est un plat à base de viande, le client préfère le vin rouge au vin blanc.

- En prenant en compte les valeurs numériques, soit deux transactions  $t_1 = \{x_1, x_2, x_3\}$  et  $t_2 = \{y_1, y_2, y_3\}$  d'une instance de la relation  $R(\text{TypeFilm}, \text{Annee}, \text{Acteur})$ . On a  $t_1 \succ_C t_2$  ssi :

$$C(t_1, t_2) \equiv (x_1 = y_1 \wedge x_2 > 2010 \wedge y_2 < 2000) \\ \vee (x_1 = y_1 \wedge x_2 = y_2 \wedge x_3 = \text{"Sylvester Stalone"} \wedge y_3 = \text{"Pierce Brosnan"})$$

Cette règle veut tout simplement dire que le client préfère pour des films de même type, des films au delà de 2010 aux films produits avant 2000, et si les films sont de même type et de même année, il préfère ceux avec l'acteur Sylvester Stalone à ceux avec l'acteur Pierce Brosnan.

#### 4.4 Définition d'une règle de préférence suivant le formalisme de CHOMICKY

Dans notre travail, nous allons nous inspirer du formalisme de CHOMICKY décrit précédemment pour proposer un format de règle de préférence. Plus précisément les formules de préférences de CHOMICKY seront plus ou moins similaires à nos règles de préférence que nous définirons par la suite. On sait qu'une formule de préférence de Chomicky est sous la forme :

$$C(t_1, t_2) = \bigvee_{i=1..k} \left( \bigwedge_{j=1..l} f_{ij} \right)$$

Dans notre cas, le **profil** utilisateur est un ensemble de règles de préférence qui permettra de prédire la préférence de l'utilisateur. Nous constatons que les formules de préférence de CHOMICKY sont des DNF (Formes Normales Disjonctives) c'est à dire une disjonction de conjonctions de formules élémentaires. Dans notre cas les règles ne prendrons en compte que des conjonctions de formules élémentaires. Ainsi on a :

$$P(t_1, t_2) = \bigwedge_{k \in E} P_{A_k}(t_1, t_2) \quad (1)$$

avec  $E \subset \{1, 2, \dots, n\}$  où  $n$  le nombre d'attributs de  $\mathcal{R}$  et  $P_{A_k}(t_1, t_2)$  est la conjonction de formules atomiques définies sur l'attribut  $A_k$ .



### Exemple 11

Pour deux transactions  $t_1 = \{x_1, x_2\}$  et  $t_2 = \{y_1, y_2\}$ , on a que  $t_1 \succ_P t_2$  ssi  $P(t_1, t_2) = \{x_1 = y_1\} \wedge \{x_2 > 4\} \wedge \{y_2 < 3\}$  est vrai.

#### 4.4.1 Cas concret d'une règle de préférence contextuelle

Le but maintenant est de passer d'une règle de préférence sous le formalisme de CHOMICKY à une règle de préférence contextuelle. Comme précédemment définie, une règle de préférence contextuelle  $R$  est sous la forme  $C \rightarrow X \succ Y$  de telle sorte que si on a  $t_1 \succ_R t_2$ ,  $C$  est vérifié par  $t_1$  et  $t_2$ ,  $X$  est vérifié seulement par  $t_1$  et  $Y$  est vérifié seulement par  $t_2$ . Dans notre cas, une règle de préférence contextuelle  $R'$  suivant le formalisme de CHOMICKY est sous la forme  $C \rightarrow PN$  (peut être écrit  $C \wedge PN$ ) où si on a  $t_1 \succ_{R'} t_2$ ,  $C$  prend en compte les conditions communes à  $t_1$  et  $t_2$  et est alors symétrique (ie  $C(t_1, t_2) \Rightarrow C(t_2, t_1)$ ) et  $PN$  prend en compte les conditions qui permettent de distinguer  $t_1$  de  $t_2$  donc asymétrique (ie  $C(t_1, t_2) \Rightarrow \neg C(t_2, t_1)$ ). On a alors la définition suivante :

**Definition 19.** (*Règle de préférence contextuelle suivant le formalisme de CHOMICKY*)

Une règle de préférence contextuelle suivant le formalisme de CHOMICKY s'écrit sous la forme :

$$P(t_1, t_2) = \bigwedge_{k \in E} P_{A_k}(t_1, t_2) = C(t_1, t_2) \wedge PN(t_1, t_2)$$

avec

$$\begin{aligned} C(t_1, t_2) &= \bigwedge_{k \in E} C_{A_k}(t_1, t_2) \text{ Conditions vérifiées communément par } t_1 \text{ et } t_2 : \text{symétrique} \\ PN(t_1, t_2) &= \bigwedge_{k \in E} PN_{A_k}(t_1, t_2) \text{ Conditions permettant de distinguer } t_1 \text{ de } t_2 : \text{asymétrique} \end{aligned}$$

Il faut remarquer que  $P_{A_k} = C_{A_k} \wedge PN_{A_k}$

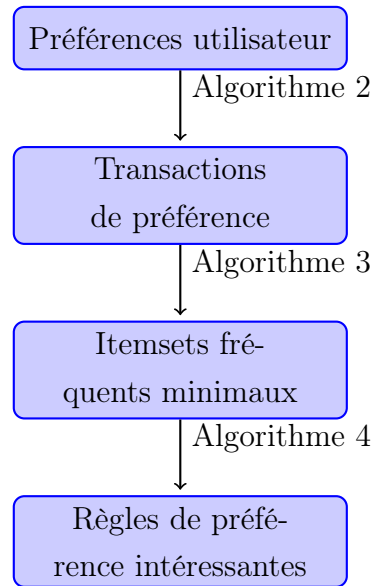
#### Condition de non redondance :

Il est à noter que les  $P_{A_k}$  ne doivent pas contenir de redondance i.e si on considère  $F_k$  l'ensemble des formules élémentaires constituant  $P_{A_k}$  ( $P_{A_k} = \bigwedge_{f \in F_k} f$ ), on a

$$F' \subsetneq F \Rightarrow \neg(\bigwedge_{f \in F'} f \Rightarrow P_{A_k}).$$

## 4.5 Processus d'extraction des règles de préférence

Suite à la définition précédente des règles de préférence contextuelles basées sur le formalisme de CHOMICKY, nous allons à présent décrire le processus qui nous permettra d'extraire des règles de préférence d'une base de préférence utilisateur.



Le diagramme ci dessus énonce les différentes étapes du processus permettant l'extraction des règles de préférence intéressantes. Ces étapes seront décrites par la suite. Nous allons tout d'abord définir le support d'un itemset et la confiance d'une règle.

### 4.5.1 Etapes de transformation des préférences utilisateurs en transaction de préférence

Cette étape consiste à transformer le couple  $\langle t_1, t_2 \rangle$  de préférences utilisateur en une transaction de formules que l'on appellera **transaction de préférence**.

**Principe** Il se fonde sur le formalisme de Chomicky appliqué aux règles de préférence contextuelles comme précédemment énoncé. Ainsi la prise en compte de la symétrie et de l'asymétrie dans cette situation, nous amène à définir ci-dessous les items élémentaires qui seront utilisés dans les transactions de préférence :

$$\begin{array}{l} \text{Items symétriques} \\ \text{(Contexte)} \end{array} \left\{ \begin{array}{l} C : \{x = y\} \quad \equiv \quad x = y \\ C : \{x \neq y\} \quad \equiv \quad x \neq y \\ C : \{x, y = a\} \quad \equiv \quad x = y \wedge x = a \wedge y = a \\ C : \{x, y < a\} \quad \equiv \quad x < a \wedge y < a \\ C : \{x, y > a\} \quad \equiv \quad x > a \wedge y > a \end{array} \right.$$

$$\begin{array}{l} \text{Items asymétriques} \\ \text{(Préférences)} \end{array} \left\{ \begin{array}{l} P : \{x < y\} \quad \equiv \quad x < y \\ P : \{x > y\} \quad \equiv \quad x > y \\ P : \{x = a\} \quad \equiv \quad x = a \wedge x \neq y \\ P : \{x < a\} \quad \equiv \quad x < a \wedge y \geq a \\ P : \{x > a\} \quad \equiv \quad x > a \wedge y \leq a \\ N : \{y > a\} \quad \equiv \quad y > a \wedge x \leq a \\ N : \{y < a\} \quad \equiv \quad y < a \wedge x \geq a \\ N : \{y = a\} \quad \equiv \quad y = a \wedge x \neq y \end{array} \right.$$

Ces items sont obtenus suivant les conditions définies dans le tableau suivant :

	Valeurs Attr	Type Attr	Items de transaction de préférence
Attr monovalué	$x = a, y = a$	num/symb	$C : \{x = y\}$ $C : \{x, y = a\}$
		num	$C : \{x, y < c\}, \forall c   c < a$ $C : \{x, y > c\}, \forall c   c > a$
Attr monovalué	$x = a, y = b$ avec $a \neq b$	num/symb	$P : \{x = a\}$ $N : \{y = b\}$ $C : \{x \neq y\}$
		num	$P : \{x < y\}, \text{ si } a < b$ $P : \{x > y\}, \text{ si } a > b$ $P : \{x < c\}, \text{ si } a < b \text{ et } \forall c   a < c \leq b$ $P : \{x > c\}, \text{ si } a > b \text{ et } \forall c   a > c \geq b$ $N : \{y < c\}, \text{ si } a > b \text{ et } \forall c   b < c \leq a$ $N : \{y > c\}, \text{ si } a < b \text{ et } \forall c   b > c \geq a$ $C : \{x, y < c\}, \forall c   c < a \wedge c < b$ $C : \{x, y > c\}, \forall c   c > a \wedge c > b$
Attr multivalué	$x \in X, y \in Y$	Set(symb)	$C : \{x, y = c\}, \forall c \in X \cap Y$ $P : \{x = a\}, \forall a \in X \setminus Y$ $N : \{y = b\}, \forall b \in Y \setminus X$

Ainsi l'algorithme suivant effectue la transformation des tuples  $\langle t_1, t_2 \rangle$  de préfé-

rence vers les transactions de préférence.

---

**Algorithme 2 : Comparaison**

---

**Entrées :**  $x$  ,  $y$  et l'attribut  $A_i$  auquel ils sont liés

**Sorties :** items issus de la comparaison entre  $x$  et  $y$

**début**

$\mathcal{E} = \emptyset$  ; // Ensemble des items générés

**si**  $x = y$  **alors**

        Ajouter  $P : \{x_{A_i} = y_{A_i}\}$  à  $\mathcal{E}$ ;

        Ajouter  $P : \{x_{A_i} = y_{A_i} = x\}$  à  $\mathcal{E}$ ;

**pour chaque**  $c \in DomActif(A_i)$  **et**  $A_i$  *numérique* **faire**

**si**  $x < c$  **alors**

                Ajouter  $C : \{x_{A_i}, y_{A_i} < c\}$  à  $\mathcal{E}$ ;

**sinon si**  $x > c$  **alors**

                Ajouter  $C : \{x_{A_i}, y_{A_i} > c\}$  à  $\mathcal{E}$ ;

**sinon si**  $x \neq y$  **alors**

        Ajouter  $C : \{x_{A_i} \neq y_{A_i}\}$  à  $\mathcal{E}$ ;

        Ajouter  $P : \{x_{A_i} = x\}$  à  $\mathcal{E}$ ;

        Ajouter  $N : \{y_{A_i} = y\}$  à  $\mathcal{E}$ ;

**si**  $A_i$  *numérique* **alors**

**si**  $x > y$  **alors**

                Ajouter  $P : \{x_{A_i} > y_{A_i}\}$  à  $\mathcal{E}$ ;

**si**  $x < y$  **alors**

                Ajouter  $P : \{x_{A_i} < y_{A_i}\}$  à  $\mathcal{E}$ ;

**pour chaque**  $c \in DomActif(A_i)$  **faire**

**si**  $x < c \wedge y \geq c$  **alors**

                Ajouter  $P : \{x_{A_i} < c\}$  à  $\mathcal{E}$ ;

**sinon si**  $x \leq c \wedge y > c$  **alors**

                Ajouter  $N : \{y_{A_i} > c\}$  à  $\mathcal{E}$ ;

**sinon si**  $x > c \wedge y \leq c$  **alors**

                Ajouter  $P : \{x_{A_i} > c\}$  à  $\mathcal{E}$ ;

**sinon si**  $x \geq c \wedge y < c$  **alors**

                Ajouter  $N : \{x_{A_i} < c\}$  à  $\mathcal{E}$ ;

**sinon si**  $x < c \wedge y < c$  **alors**

                Ajouter  $C : \{x_{A_i}, y_{A_i} < c\}$  à  $\mathcal{E}$ ;

**sinon si**  $x > c \wedge y > c$  **alors**

                Ajouter  $C : \{x_{A_i}, y_{A_i} > c\}$  à  $\mathcal{E}$ ;

    retourner  $\mathcal{E}$ ;

---

#### 4.5.2 Etape de l'extraction des règles interressantes minimales des transactions de préférence

Cette étape peut utiliser toute méthode d'extraction d'itemsets intéressants minimaux. Notre choix s'est porté sur une méthode d'extraction des itemsets fréquents minimaux décrite dans l'article [?], du fait du peu de mémoire dont elle nécessite pour l'extraction.

##### Principe

Elle consiste en un parcours en profondeur basé sur le principe du calcul des objets critiques. On a que

$$X \in \mathcal{F} \text{ est minimal ssi } \forall e \in X, \widehat{cov}(X, e) \neq \emptyset$$

avec  $\widehat{cov}(X, e) = cov(X \setminus e) \setminus cov(e)$  et  $cov$  étant la couverture d'un itemset (nombre de transactions contenant l'itemset). Donc à chaque ajout d'un item à un itemset  $X$  lors d'un parcours en profondeur, l'évaluation de la minimalité du nouvel itemset  $Y$  obtenu se fait en utilisant l'égalité suivante :

$$\widehat{cov}(Xe', e) = \widehat{cov}(X, e) \cap cov(e')$$

Ainsi il suffit d'obtenir la couverture du nouvel item ajouté pour savoir si le nouvel itemset formé est minimal.

A partir de cette procédure, étant donné que la minimalité que nous utilisons est une minimalité basée sur le support et sur la confiance, nous allons procéder comme suit :

- Générer la base de transactions de préférences inverses et ajouter celle ci à la base de préférence initiale.
- Extraire à l'aide du procédé précédent, les itemsets minimaux suivant leur support
- Filtrer les itemsets obtenus suivant que leur support dans la base initiale soit supérieur au support seuil.

Cette procédure s'explique par le fait que si un itemset  $X$  est minimal dans la base globale, c'est que

$$\forall e \in X, \text{supp}(X \setminus e) \neq \text{supp}(X) \text{ ou } \text{conf}(X \setminus e) \neq \text{conf}(X)$$

## 4.6 Algorithme

---

**Algorithme 3** : Algorithme d'extraction de règles intéressantes

---

**Entrées** : Préférences utilisateur  $\mathcal{P}$

**Sorties** : Règles de préférence intéressantes  $\mathcal{R}$

**début**

```
 $\mathcal{P}_S = \emptyset$  ; // Ensemble des transactions obtenues des tuples de
préférence
pour chaque  $\langle T, U \rangle \in \mathcal{P}$  faire
     $\mathcal{P}_{TU} = \emptyset$ ; // Ensemble des items
    pour chaque  $A_i \in R$  faire
         $x = T.A_i$  ; // Val correspondante à l'attribut  $A_i$  de  $T$ 
         $y = U.A_i$ ;
         $\mathcal{P}_{TU} = \mathcal{P}_{TU} \cup \text{Comparaison}(x, y, A_i)$ ;
    Ajouter  $\mathcal{P}_{TU}$  à  $\mathcal{P}_S$ ;
 $\mathcal{F} = \text{ExtraireItemsetFréquents}(\mathcal{P}_S)$ ;
 $\mathcal{R} = \text{FiltrerRèglesIntéressantes}(\mathcal{F})$ ;
Retourner  $\mathcal{R}$ ;
```

---

## 4.7 Exemple d'extraction des règles de préférence

Nous allons étudier deux situations :

- Cas où le schémas relationnel  $\mathcal{R}(\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2, \dots, \mathcal{A}_n)$  n'a que des attributs symboliques ;
- Cas où le schémas relationnel  $\mathcal{R}(\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2, \dots, \mathcal{A}_n)$  a des attributs symboliques et numériques.

### 4.7.1 Cas où le schémas relationnel n'a que des attributs symboliques

Prenons un schémas relationnel  $\mathcal{R}(\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2)$  avec  $\mathcal{A}_1$  et  $\mathcal{A}_2$  de type symboliques. Soit la base de préférence ci dessous :

	$t_1$		$t_2$	
$P_1$	a	A	b	B
$P_2$	b	A	a	B
$P_3$	a	A	a	B
$P_4$	a	A	a	C
$P_5$	b	B	a	A

### Passage des préférences vers les transactions de préférence

On a :

$$P_1 \Rightarrow T_1 = \{C : \{x_1 \neq y_1\}, P : \{x_1 = a\}, N : \{y_1 = b\}, C : \{x_2 \neq y_2\}, P : \{x_2 = A\}, N : \{y_2 = B\}, \}$$

$$P_2 \Rightarrow T_2 = \{C : \{x_1 \neq y_1\}, P : \{x_1 = b\}, N : \{y_1 = a\}, C : \{x_2 \neq y_2\}, P : \{x_2 = A\}, N : \{y_2 = B\}, \}$$

$$P_3 \Rightarrow T_3 = \{C : \{x_1 = y_1\}, C : \{x_1, y_1 = a\}, C : \{x_2 \neq y_2\}, P : \{x_2 = A\}, N : \{y_2 = B\}, \}$$

$$P_4 \Rightarrow T_4 = \{C : \{x_1 = y_1\}, C : \{x_1, y_1 = a\}, C : \{x_2 \neq y_2\}, P : \{x_2 = A\}, N : \{y_2 = C\}, \}$$

$$P_5 \Rightarrow T_5 = \{C : \{x_1 \neq y_1\}, P : \{x_1 = b\}, N : \{y_1 = a\}, C : \{x_2 \neq y_2\}, P : \{x_2 = B\}, N : \{y_2 = A\}, \}$$

## 4.8 Détermination des itemsets interressants minimaux avec sup-min=2 et confmin=0.5

Itemsets interressants minimaux de taille 1 ++++++

$$I_4 = \{P : \{x_2 = A\}, \} \text{ sup}=4.0 \text{ conf}=0.8$$

$$I_5 = \{N : \{y_2 = B\}, \} \text{ sup}=3.0 \text{ conf}=0.75$$

$$I_6 = \{P : \{x_1 = b\}, \} \text{ sup}=2.0 \text{ conf}=0.666666666667$$

$$I_7 = \{N : \{y_1 = a\}, \} \text{ sup}=2.0 \text{ conf}=0.666666666667$$

Itemsets interressants minimaux de taille 2 ++++++



$$\begin{aligned}
 I_{14} &= \{C : \{x_1 \neq y_1\}, P : \{x_2 = A\}, \} \text{ sup}=2.0 \text{ conf}=0.666666666667 \\
 I_{15} &= \{C : \{x_1 \neq y_1\}, N : \{y_2 = B\}, \} \text{ sup}=2.0 \text{ conf}=0.666666666667 \\
 I_{29} &= \{P : \{x_2 = A\}, C : \{x_1 = y_1\}, \} \text{ sup}=2.0 \text{ conf}=1.0 \\
 I_{30} &= \{P : \{x_2 = A\}, C : \{x_1, y_1 = a\}, \} \text{ sup}=2.0 \text{ conf}=1.0
 \end{aligned}$$

Pas d'itemsets interessant minimaux de taille 3

#### 4.8.1 Cas où le schémas relationnel a des attributs numériques et symboliques

Prenons un schémas relationnel  $\mathcal{R}(\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2)$  avec  $A_1$  et  $A_2$  de type symboliques. Soit la base de préférence ci dessous :

	$t_1$		$t_2$	
$P_1$	a	3	b	7
$P_2$	a	3	b	3
$P_3$	b	3	a	7
$P_4$	a	3	a	7
$P_5$	a	3	a	9
$P_6$	b	9	a	7
$P_7$	b	7	a	3

Transactions de preference obtenues

$$P_1 \Rightarrow T_1 = \{C : \{x_1 \neq y_1\}, P : \{x_1 = a\}, N : \{y_1 = b\}, C : \{x_2 \neq y_2\}, P : \{x_2 = 3\}, N : \{y_2 = 7\}, P : \{x_2 < y_2\}, N : \{y_2 > 3\}, P : \{x_2 < 7\}, C : \{x_2, y_2 < 9\}, \}$$

$$P_2 \Rightarrow T_2 = \{C : \{x_1 \neq y_1\}, P : \{x_1 = a\}, N : \{y_1 = b\}, C : \{x_2 = y_2\}, C : \{x_2, y_2 = 3\}, C : \{x_2, y_2 < 7\}, C : \{x_2, y_2 < 9\}, \}$$

$$P_3 \Rightarrow T_3 = \{C : \{x_1 \neq y_1\}, P : \{x_1 = b\}, N : \{y_1 = a\}, C : \{x_2 \neq y_2\}, P : \{x_2 = 3\}, N : \{y_2 = 7\}, P : \{x_2 < y_2\}, N : \{y_2 > 3\}, P : \{x_2 < 7\}, C : \{x_2, y_2 < 9\}, \}$$

$$P_4 \Rightarrow T_4 = \{C : \{x_1 = y_1\}, C : \{x_1, y_1 = a\}, C : \{x_2 \neq y_2\}, P : \{x_2 = 3\}, N : \{y_2 = 7\}, P : \{x_2 < y_2\}, N : \{y_2 > 3\}, P : \{x_2 < 7\}, C : \{x_2, y_2 < 9\}, \}$$

$$P_5 \Rightarrow T_5 = \{C : \{x_1 = y_1\}, C : \{x_1, y_1 = a\}, C : \{x_2 \neq y_2\}, P : \{x_2 = 3\}, N : \{y_2 = 9\}, P : \{x_2 < y_2\}, N : \{y_2 > 3\}, N : \{y_2 > 7\}, P : \{x_2 < 7\}, P : \{x_2 < 9\}, \}$$

$$P_6 \Rightarrow T_6 = \{C : \{x_1 \neq y_1\}, P : \{x_1 = b\}, N : \{y_1 = a\}, C : \{x_2 \neq y_2\}, P : \{x_2 = 9\}, N : \{y_2 = 7\}, P : \{x_2 > y_2\}, P : \{x_2 > 7\}, N : \{y_2 < 9\}, C : \{x_2, y_2 > 3\}, \}$$

$$P_7 \Rightarrow T_7 = \{C : \{x_1 \neq y_1\}, P : \{x_1 = b\}, N : \{y_1 = a\}, C : \{x_2 \neq y_2\}, P : \{x_2 = 7\}, N : \{y_2 = 3\}, P : \{x_2 > y_2\}, P : \{x_2 > 3\}, N : \{y_2 < 7\}, C : \{x_2, y_2 < 9\}, \}$$

## 4.9 Determination des itemsets interessants minimaux avec sup-min=2 et confmin=0.5

Itemsets interessants minimaux de taille 1 ++++++

$$\begin{aligned} I_4 &= \{P : \{x_2 = 3\}, \} \text{ sup}=4.0 \text{ conf}=0.8 \\ I_5 &= \{N : \{y_2 = 7\}, \} \text{ sup}=4.0 \text{ conf}=0.8 \\ I_6 &= \{P : \{x_2 < y_2\}, \} \text{ sup}=4.0 \text{ conf}=0.66666666666667 \\ I_7 &= \{N : \{y_2 > 3\}, \} \text{ sup}=4.0 \text{ conf}=0.8 \\ I_8 &= \{P : \{x_2 < 7\}, \} \text{ sup}=4.0 \text{ conf}=0.8 \\ I_{13} &= \{P : \{x_1 = b\}, \} \text{ sup}=3.0 \text{ conf}=0.6 \\ I_{14} &= \{N : \{y_1 = a\}, \} \text{ sup}=3.0 \text{ conf}=0.6 \end{aligned}$$

Itemsets interessants minimaux de taille 2 ++++++

$$\begin{aligned} I_{32} &= \{C : \{x_1 \neq y_1\}, P : \{x_2 = 3\}, \} \text{ sup}=2.0 \text{ conf}=0.66666666666667 \\ I_{33} &= \{C : \{x_1 \neq y_1\}, N : \{y_2 = 7\}, \} \text{ sup}=3.0 \text{ conf}=0.75 \\ I_{35} &= \{C : \{x_1 \neq y_1\}, N : \{y_2 > 3\}, \} \text{ sup}=2.0 \text{ conf}=0.66666666666667 \\ I_{36} &= \{C : \{x_1 \neq y_1\}, P : \{x_2 < 7\}, \} \text{ sup}=2.0 \text{ conf}=0.66666666666667 \\ I_{74} &= \{C : \{x_2 \neq y_2\}, P : \{x_1 = b\}, \} \text{ sup}=3.0 \text{ conf}=0.75 \\ I_{75} &= \{C : \{x_2 \neq y_2\}, N : \{y_1 = a\}, \} \text{ sup}=3.0 \text{ conf}=0.75 \\ I_{79} &= \{P : \{x_2 = 3\}, N : \{y_2 = 7\}, \} \text{ sup}=3.0 \text{ conf}=0.75 \\ I_{83} &= \{P : \{x_2 = 3\}, C : \{x_2, y_2 < 9\}, \} \text{ sup}=3.0 \text{ conf}=0.75 \\ I_{86} &= \{P : \{x_2 = 3\}, C : \{x_1 = y_1\}, \} \text{ sup}=2.0 \text{ conf}=1.0 \\ I_{87} &= \{P : \{x_2 = 3\}, C : \{x_1, y_1 = a\}, \} \text{ sup}=2.0 \text{ conf}=1.0 \\ I_{89} &= \{N : \{y_2 = 7\}, P : \{x_2 < y_2\}, \} \text{ sup}=3.0 \text{ conf}=0.75 \\ I_{90} &= \{N : \{y_2 = 7\}, N : \{y_2 > 3\}, \} \text{ sup}=3.0 \text{ conf}=0.75 \\ I_{91} &= \{N : \{y_2 = 7\}, P : \{x_2 < 7\}, \} \text{ sup}=3.0 \text{ conf}=0.75 \\ I_{92} &= \{N : \{y_2 = 7\}, C : \{x_2, y_2 < 9\}, \} \text{ sup}=3.0 \text{ conf}=0.75 \\ I_{93} &= \{N : \{y_2 = 7\}, P : \{x_1 = b\}, \} \text{ sup}=2.0 \text{ conf}=1.0 \\ I_{94} &= \{N : \{y_2 = 7\}, N : \{y_1 = a\}, \} \text{ sup}=2.0 \text{ conf}=1.0 \\ I_{100} &= \{P : \{x_2 < y_2\}, C : \{x_2, y_2 < 9\}, \} \text{ sup}=3.0 \text{ conf}=0.75 \\ I_{103} &= \{P : \{x_2 < y_2\}, C : \{x_1 = y_1\}, \} \text{ sup}=2.0 \text{ conf}=1.0 \\ I_{104} &= \{P : \{x_2 < y_2\}, C : \{x_1, y_1 = a\}, \} \text{ sup}=2.0 \text{ conf}=1.0 \\ I_{107} &= \{N : \{y_2 > 3\}, C : \{x_2, y_2 < 9\}, \} \text{ sup}=3.0 \text{ conf}=0.75 \end{aligned}$$

$I_{110} = \{N : \{y_2 > 3\}, C : \{x_1 = y_1\}, \} \text{ sup}=2.0 \text{ conf}=1.0$   
 $I_{111} = \{N : \{y_2 > 3\}, C : \{x_1, y_1 = a\}, \} \text{ sup}=2.0 \text{ conf}=1.0$   
 $I_{113} = \{P : \{x_2 < 7\}, C : \{x_2, y_2 < 9\}, \} \text{ sup}=3.0 \text{ conf}=0.75$   
 $I_{116} = \{P : \{x_2 < 7\}, C : \{x_1 = y_1\}, \} \text{ sup}=2.0 \text{ conf}=1.0$   
 $I_{117} = \{P : \{x_2 < 7\}, C : \{x_1, y_1 = a\}, \} \text{ sup}=2.0 \text{ conf}=1.0$   
 $I_{127} = \{P : \{x_1 = b\}, P : \{x_2 > y_2\}, \} \text{ sup}=2.0 \text{ conf}=0.666666666667$   
 $I_{130} = \{N : \{y_1 = a\}, P : \{x_2 > y_2\}, \} \text{ sup}=2.0 \text{ conf}=0.666666666667$

Itemsets interressants minimaux de taille 3 ++++++

$I_{151} = \{C : \{x_1 \neq y_1\}, N : \{y_2 = 7\}, P : \{x_2 < y_2\}, \} \text{ sup}=2.0 \text{ conf}=0.666666666667$   
 $I_{154} = \{C : \{x_2, y_2 < 9\}, C : \{x_1 \neq y_1\}, N : \{y_2 = 7\}, \} \text{ sup}=2.0 \text{ conf}=0.666666666667$   
 $I_{160} = \{C : \{x_2, y_2 < 9\}, C : \{x_1 \neq y_1\}, P : \{x_2 < y_2\}, \} \text{ sup}=2.0 \text{ conf}=0.666666666667$   
 $I_{197} = \{C : \{x_2, y_2 < 9\}, C : \{x_2 \neq y_2\}, P : \{x_1 = b\}, \} \text{ sup}=2.0 \text{ conf}=0.666666666667$   
 $I_{198} = \{C : \{x_2, y_2 < 9\}, C : \{x_2 \neq y_2\}, N : \{y_1 = a\}, \} \text{ sup}=2.0 \text{ conf}=0.666666666667$

Pas d'itemsets interressant minimaux de taille 4