Bureau d'études GPS
Navigation par satellites

Durée : 4 heures

19 janvier 2026

Ce bureau d'études a pour objet de calculer la trajectoire d'un utilisateur du système GPS à partir des mesures de pseudo-distances satellite/récepteur. Le problème est rendu difficile par le fait que les mesures sont reliées non linéairement aux paramètres à estimer et que, de plus, elles sont perturbées par un bruit de mesure additif. Pour s'affranchir de ces difficultés, une version linéarisée de l'algorithme des moindres carrés est utilisée.
Après avoir étudié la robustesse de l'algorithme à des conditions de navigation défavorables, l'influence de la géométrie de la constellation sur les performances du GPS sera évaluée en calculant le facteur DOP (Dilution of Precision).

1 Contexte du bureau d'études

Dans ce bureau d'etudes, nous nous intéressons à une voiture équipée d'un GPS circulant dans la ville de Talence suivant l'itinéraire représenté sur la figure (1). En navigation, il est nécessaire de toujours préciser le référentiel dans lequel est exprimé le mouvement du véhicule. En particulier, deux repères de référence sont utiles pour cette étude :

Repère 1
Le repère ECEF (*Earth Centered Earth fixed*), dans lequel sont généralement exprimées les coordonnées des satellites. Son origine est le centre de la Terre O, son axe x est situé à l'intersection du plan de l'écliptique (équateur) et du méridien de Greenwhich, son axe z est confondu avec l'axe des pôles et pointe vers le Nord, et finalement son axe y est défini de façon à former un trièdre direct.

Repère 2
Le repère local (N, E, D), utile pour visualiser le mouvement du véhicule. Il est centré en un point de la surface terrestre P_0 et ses axes pointent respectivement vers la verticale locale et les directions du Nord et de l'Est.

La relation entre les deux repères est explicitée sur la figure (2). La formule reliant les coordonnées d'un vecteur dans l'un ou l'autre des deux repères est :

$$X^1 = MX^2 + X_0^1, \tag{1}$$

où $X_0^1 = (x_0, y_0, z_0)^T$ représente les coordonnées du point P_0 dans le repère 1 et la matrice de passage M vérifie :

$$M = \begin{pmatrix} -\sin\lambda\cos\phi & -\sin\phi & -\cos\lambda\cos\phi \\ -\sin\lambda\sin\phi & \cos\phi & -\cos\lambda\sin\phi \\ \cos\lambda & 0 & -\sin\lambda \end{pmatrix}, \tag{2}$$

avec λ et ϕ correspondant respectivement à la latitude et à la longitude du point de référence P_0.

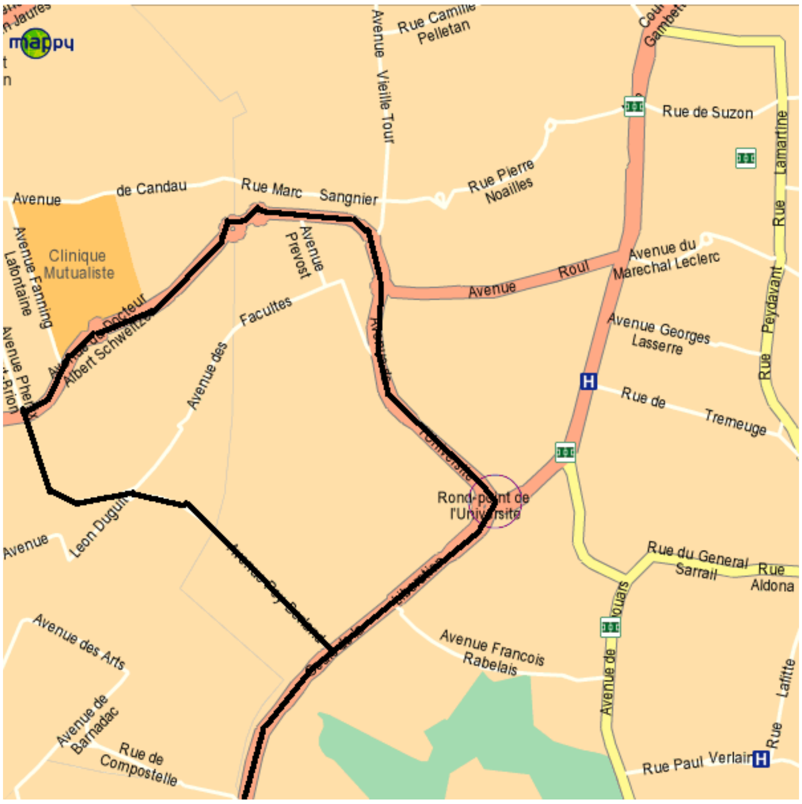

FIGURE 1 – Itinéraire suivi

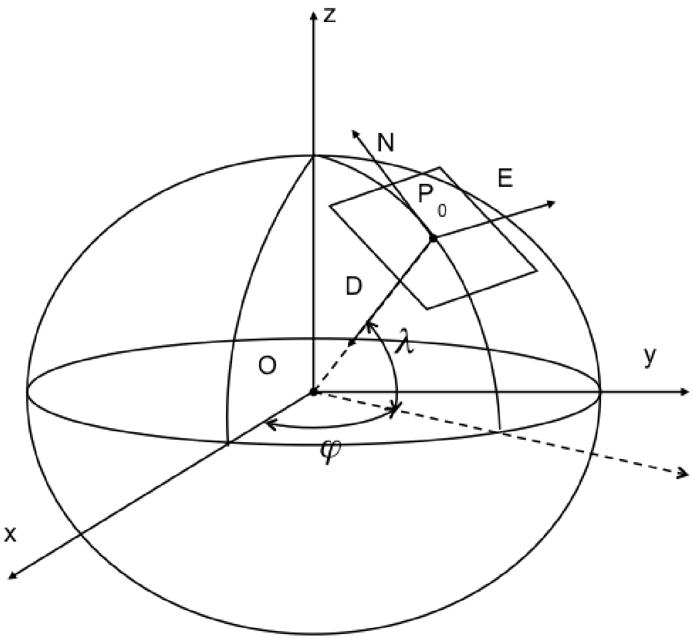

FIGURE 2 – Repères de référence

2 Rappels : calcul de la position par moindres carrés

2.1 Algorithme des moindres carrés

L'algorithme des moindres carrés permet d'estimer un ensemble de paramètres inconnus à partir d'un jeu d'observations bruitées mais dépendant **linéairement** des paramètres à estimer. Le problème peut être formulé mathématiquement de la manière suivante :

$$Z = HX + w, \tag{3}$$

où

— X est la vecteur d'état dont les composantes sont les paramètres inconnus,

— Z est le vecteur d'observation,

— w est le vecteur des bruits d'observation.

La technique des moindres carrés consiste à calculer l'estimation de X, notée $\widehat{X}$, qui minimise l'erreur quadratique $J(\xi) = \|Z - H\xi\|^2$. Elle vérifie :

$$\widehat{X} = (H^T H)^{-1} H^T Z,$$

avec $(H^T H)^{-1} H^T$ la matrice dite pseudo-inverse.

2.2 Application au cas du GPS

Pour un problème de navigation GPS, les paramètres à estimer à chaque instant sont la position du véhicule en 3 dimensions dans un repère cartésien (x, y, z) et le biais d'horloge du récepteur b. Ils forment le vecteur d'état $X = (x, y, z, b)^T$ et sont reliés aux mesures GPS de pseudo-distance par l'équation :

$$Y(t) = h_t(x, y, z, b) + w(t), \tag{4}$$

où le vecteur $Y(t) = (Y_1, Y_2, ..., Y_n)^T$ regroupe les n mesures GPS disponibles à l'instant t et le vecteur $w(t)$ est formé de bruits blancs centrés gaussiens de variance σ^2. Ce dernier représente le bruit de mesure GPS.

La fonction $h_t(x, y, z, b)$ vérifie :

$$h_t(x, y, z, b) = \begin{cases} \sqrt{(x - x^1(t))^2 + (y - y^1(t))^2 + (z - z^1(t))^2} + b, \\ \vdots \\ \sqrt{(x - x^n(t))^2 + (y - y^n(t))^2 + (z - z^n(t))^2} + b, \end{cases} \tag{5}$$

où le triplet $(x^i(t), y^i(t), z^i(t))$ représente la position du i ?me satellite à l'instant t.

L'algorithme des moindres carrés a été développé pour des systèmes linéaires. Il est donc nécessaire de linéariser l'équation (4) pour pouvoir l'appliquer. Par un développement de Taylor au premier ordre autour d'un point de référence X_r, on obtient :

$$Y(t) - h_t(x_r, y_r, z_r, b_r) = H_t(X - X_r) + w(t), \tag{6}$$

où $H_t = \bigtriangledown h_t$ contient les dérivées partielles de h_t par rapport aux composantes du vecteur d'état. En notant $Z(t) = Y(t) - h_t(x_r, y_r, z_r, b_r) + H_t X_r$, le problème d'estimation peut donc être mis sous la forme 4. La validité de cette approche dépend du point de linéarisation choisi, qui ne doit pas être trop éloigné du vrai vecteur d'état X. En navigation GPS, il est classiquement pris égal à la précédente estimation de la position et du biais d'horloge.

Les coefficients de la matrice H_t dépendent de la position des satellites GPS par rapport au récepteur. Cette matrice traduit l'influence de la géométrie des satellites sur l'erreur d'estimation.

3 Dilution of Precision

Comme souligné en fin de partie précédente, l'erreur de positionnement dépend conjointement de l'incertitude sur les mesures et de la géométrie de la constellation des satellites. Pour un même vecteur d'erreur de mesure, l'erreur d'estimation de la position est plus ou moins grande selon la position relative des satellites par rapport au récepteur. L'impact de la constellation est quantifié par un facteur appelé le DOP, pour *Dilution of Precision*, qui est défini de la façon suivante :

$$\text{RMSE} = DOP \times \sigma,$$

avec σ l'écart-type du bruit de mesure et $\text{RMSE} = \sqrt{\text{E}\left[\|X - \widehat{X}\|^2\right]}$ la racine carrée de l'erreur quadratique moyenne.
L'expression du DOP se déduit de la solution des moindres carrés au problème de positionnement. On rappelle que :

$$\widehat{X} = (H_t^T H_t)^{-1} H_t^T Z.$$

L'erreur d'estimation vérifie donc :

$$\widehat{X} - X = (H_t^T H_t)^{-1} H_t^T w(t), \tag{7}$$

où $w(t)$ est le bruit de mesure. En remarquant que,

$$\text{E}\left[\|X - \widehat{X}\|^2\right] = \text{Trace}\left(\Sigma_{\Delta X \Delta X}\right), \text{ avec } \Sigma_{\Delta X \Delta X} = \text{E}\left(\left(X - \widehat{X}\right)\left(X - \widehat{X}\right)^T\right), \tag{8}$$

il est possible de démontrer que :

$$DOP = \sqrt{\text{Trace}\left((H_t^T H_t)^{-1}\right)}. \tag{9}$$

Ce facteur permet de calculer un ordre de grandeur de l'erreur d'estimation de la position et du biais d'horloge et donc de la confiance qu'on peut accorder à la solution GPS. En se limitant à l'erreur de position (sans considérer l'estimation du biais d'horloge), il est possible de calculer le $PDOP$ (Position Dilution of Precision) :

$$PDOP = \sqrt{\tilde{H}_t(1,1) + \tilde{H}_t(2,2) + \tilde{H}_t(3,3)}, \text{ où } \tilde{H}_t = (H_t^T H_t)^{-1}.$$

Selon le repère où est exprimée la position, on parle aussi de $VDOP$ (vertical DOP) et $HDOP$ (horizontal DOP).

4 Description des données fournies

Les données GPS nécessaires pour résoudre le problème de positionnement sont sauvées dans le fichier "donnees_GPS_TP.mat". Il s'agit :

— des pseudo-distances GPS pour chacun des points de la trajectoire du véhicule. Elles sont délivrées toutes les secondes pendant T secondes. Le récepteur considéré comprend 8 canaux de poursuite et peut donc former et exploiter au maximum 8 mesures simultanément,

— des coordonnées des satellites en ligne de vue du récepteur dans le repère ECEF.

En outre, la véritable trajectoire du véhicule exprimée dans le repère local est fournie pour pouvoir juger des performances de l'algorithme de navigation. Elle est enregistrée dans le fichier "trajectoire_TP.mat".

Format des données

Type de donnée	Nom de la variable	Dimension
Pseudo-distances GPS	PRN	$8 \times T$
Coordonnées satellite	XYZsat	$8 \times 3 \times T$
Trajectoire du véhicule	Xloc	$3 \times T$

Les tableaux PRN et XYZsat contiennent des NaN lorsque la donnée GPS est indisponible.
Finalement, le programme *llh2xyz.m* est fourni qui permet d'obtenir la position d'un point en coordonnées cartésiennes à partir de ses coordonnées ellipsoïdales (latitude et longitude en radians, altitude).

5 Questions

1. Reportez-vous à l'annexe et retrouvez l'expression (2) de la matrice M en décomposant la transformation du repère 1 au repère 2 en 2 rotations successives.
2. Utilisez le programme *llh2xyz* pour obtenir les coordonnées du point de référence P_0, origine du repère 2, dans le repère 1. Pour la trajectoire étudiée, le point de référence a une altitude nulle, une latitude de 44°48' Nord et une longitude de 0°35' Ouest (Attention : la longitude est comptée positivement vers l'Est). Rappel : 1' = 1/60°.
3. Retrouvez la trajectoire du véhicule dans Talence (dans le repère 1 et dans le repère 2) en appliquant l'algorithme des moindres carrés aux données GPS fournies.
4. Modifiez les données GPS fournies pour simuler la présence d'interférences (augmentation de la variance du bruit de mesure) et de multitrajets (apparition d'un biais sur une ou plusieurs des mesures GPS). Etudiez la robustesse de votre algorithme à ces perturbations. Vous pourrez en particulier vous intéresser à l'erreur quadratique moyenne en fonction de l'amplitude de l'erreur.
5. Démontrez la relation (7), puis la relation (9) à partir des équations (7) et (8).
6. Calculez le facteur DOP tout le long de la trajectoire du véhicule et vérifiez sa cohérence avec les résultats obtenus pour l'estimation de la position. Calculez aussi le $PDOP$, le $VDOP$ et le $HDOP$. Pour les calculs de ces deux derniers termes, il faut raisonner dans le repère local.

Annexe

Considérons la matrice de passage M d'un repère R' défini par les axes (x', y', z') au un repère R défini par les axes (x, y, z) telle que :

$$X = MX',$$

où X' et X sont les vecteurs des coordonnées d'un point dans le repère R' et R respectivement. Les colonnes de M sont les coordonnées des vecteurs unitaires du repère R' exprimées dans le repère R. Ainsi, si la transformation entre les deux repères est une rotation d'angle θ et d'axe z comme représenté sur les figures ci-dessous, M vérifie :

$$M = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Le même raisonnement est applicable si la rotation a lieu autour de l'axe x ou y.