

**ENSEIRB-MATMECA  
BORDEAUX-INP**

**3A TÉLÉCOMMUNICATIONS  
TS343 - FILTRAGE OPTIMAL**

---

**Bureau d'étude GPS : Navigation par  
satellites**

---

*Élèves :*  
Raphaël KUHN  
Manâl RHAZZA

*Enseignant :*  
Audrey GIREMUS

# Navigation par satellites

20 janvier 2026

## Table des matières

<b>1 Questions</b>	<b>2</b>
1.1 Calcul de la matrice de rotation $M$ . . . . .	2
1.2 Coordonnées du point de référence $P_0$ . . . . .	2
1.3 Trajectoire du véhicule dans Talence . . . . .	2
1.4 Étude de la robustesse aux interférences et aux multitrajets . . . . .	4
1.5 Calcul du <i>Dilution of Precision (DOP)</i> . . . . .	5
1.6 Application du <i>DOP</i> à la trajectoire . . . . .	6

## Table des figures

1 Comparaison entre la trajectoire estimée et la trajectoire de référence . . . . .	3
2 Erreur quadratique moyenne de position en fonction de l'écart-type $\sigma$ du bruit ajouté aux pseudo-distances (interférences). . . . .	4
3 Erreur quadratique moyenne de position en fonction de l'amplitude du biais $B$ ajouté sur un satellite (multitrajets). . . . .	5
4 Etude de l'impact de la constellation sur l'erreur de position . . . . .	6

# 1 Questions

## 1.1 Calcul de la matrice de rotation $M$

On souhaite transformer le repère ECEF en repère local à l'aide de matrice de rotations. On pose  $\lambda$  la latitude du repère local et  $\phi$  sa longitude.

Tout d'abord effectuons une rotation d'angle  $\phi$  autour de l'axe  $z$ . On obtient la matrice de rotation :

$$M_1 = \begin{pmatrix} \cos \phi & -\sin \phi & 0 \\ \sin \phi & \cos \phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

On doit ensuite effectuer une rotation d'angle  $\frac{\pi}{2} - \lambda$  autour de l'axe  $y$ , ce qui donnera la matrice de rotation :

$$M_2 = \begin{pmatrix} \cos(\frac{\pi}{2} - \lambda) & 0 & -\sin(\frac{\pi}{2} - \lambda) \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin(\frac{\pi}{2} - \lambda) & 0 & \cos(\frac{\pi}{2} - \lambda) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\sin \lambda & 0 & \cos \lambda \\ 0 & 1 & 0 \\ \cos \lambda & 0 & -\sin \lambda \end{pmatrix}$$

La matrice  $M$  de rotation pour obtenir le repère 2 en fonction du repère 1 est le produit de ces 2 matrices de rotation :

$$M = M_1 M_2 = \begin{pmatrix} -\sin \lambda \cos \phi & -\sin \phi & -\cos \lambda \cos \phi \\ -\sin \lambda \sin \phi & \cos \phi & -\cos \lambda \sin \phi \\ \cos \lambda & 0 & -\sin \lambda \end{pmatrix}$$

## 1.2 Coordonnées du point de référence $P_0$

Les coordonnées du point de référence  $P_0$ , correspondant à une latitude de  $44^{\circ}48' N$ , une longitude de  $0^{\circ}35' O$  et une altitude nulle, ont été converties dans le repère terrestre ECEF.

On obtient ainsi :

$$P_0 \approx (4.53 \times 10^6, -4.62 \times 10^4, 4.47 \times 10^6) \text{ m.}$$

## 1.3 Trajectoire du véhicule dans Talence

L'objectif de cette question est de reconstruire la trajectoire du véhicule à partir des pseudo-distances GPS fournies, en estimant à chaque instant la position du récepteur ainsi que le biais d'horloge associé.

À chaque pas de temps, les satellites disponibles sont identifiés à partir des pseudo-distances valides. Le vecteur d'état à estimer est défini par :

$$X = (x \ y \ z \ b)^T,$$

où  $(x, y, z)$  représente la position du récepteur dans le repère terrestre ECEF et  $b$  le biais d'horloge exprimé en mètres.

Le modèle de mesure est donné par :

$$\rho_i = \|x - s_i\| + b,$$

où  $s_i$  désigne la position du satellite  $i$ .

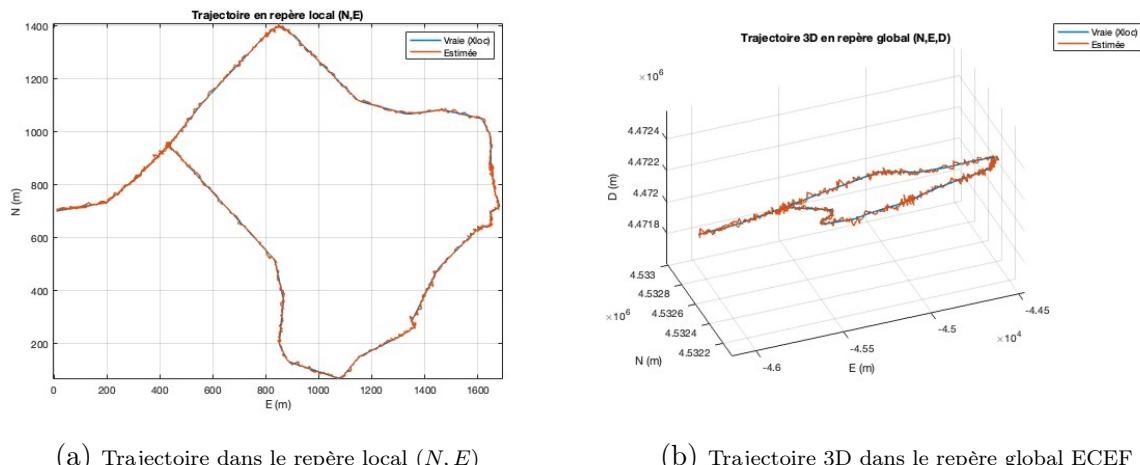
Ce modèle étant non linéaire, une méthode de moindres carrés linéarisés de type Gauss-Newton est mise en œuvre. À chaque itération, le modèle est linéarisé autour de l'estimation courante, la matrice jacobienne est construite, puis l'incrément du vecteur d'état est estimé par résolution du problème des moindres carrés. La solution obtenue à l'instant précédent est utilisée comme condition initiale afin d'assurer une bonne convergence.

Une fois la trajectoire estimée dans le repère ECEF, celle-ci est exprimée dans le repère local ( $N, E, D$ ) centré en  $P_0$  à l'aide de la matrice de rotation issue de la question 1. La conversion est réalisée selon

$$X_{\text{loc}} = M^T(X_{\text{ecef}} - P_0),$$

où  $M$  est une matrice de rotation orthonormale.

La figure 1a présente la trajectoire estimée et la trajectoire de référence dans le plan horizontal ( $N, E$ ). On observe une très bonne superposition entre les deux trajectoires, indiquant que l'algorithme permet de reconstruire fidèlement le mouvement du véhicule. La figure 1b montre la trajectoire en trois dimensions dans le repère global ECEF, où l'on constate également une cohérence globale entre la trajectoire estimée et la trajectoire de référence.



(a) Trajectoire dans le repère local ( $N, E$ )

(b) Trajectoire 3D dans le repère global ECEF

FIGURE 1 – Comparaison entre la trajectoire estimée et la trajectoire de référence

## 1.4 Étude de la robustesse aux interférences et aux multitrajets

Dans cette partie, on étudie la robustesse de l'algorithme de localisation GPS face à des perturbations affectant les pseudo-distances. Deux types de dégradations sont considérés : les interférences, et les multitrajets.

Les interférences sont simulées en ajoutant un bruit gaussien de moyenne nulle et d'écart-type  $\sigma$  aux pseudo-distances disponibles. Plusieurs valeurs de  $\sigma$  sont testées afin d'augmenter progressivement la variance du bruit de mesure. Pour chaque valeur, la trajectoire est réestimée à l'aide de l'algorithme de moindres carrés linéarisés, puis l'erreur quadratique moyenne (EQM) de position est calculée dans le repère local.

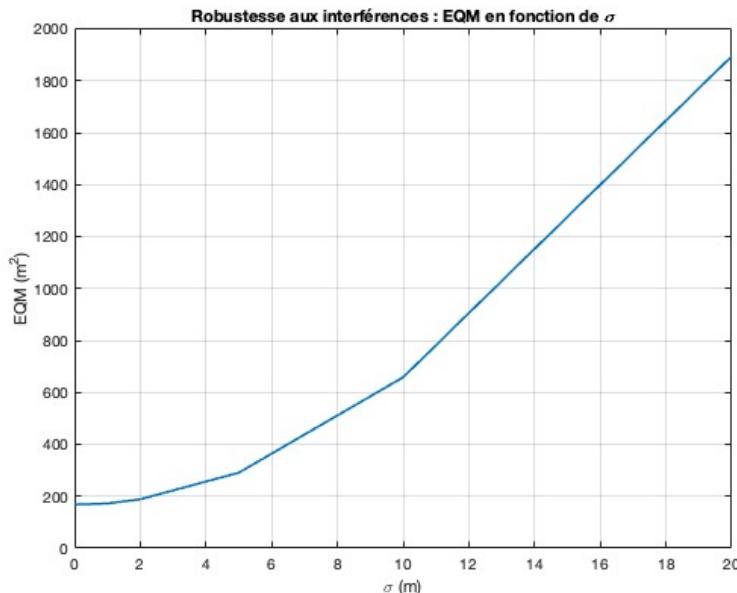


FIGURE 2 – Erreur quadratique moyenne de position en fonction de l'écart-type  $\sigma$  du bruit ajouté aux pseudo-distances (interférences).

La figure 2 présente l'évolution de l'EQM en fonction de  $\sigma$ . On observe une augmentation monotone de l'erreur lorsque la variance du bruit croît. Cette évolution est cohérente avec le caractère non biaisé mais bruité des mesures : l'algorithme reste stable, mais la précision de la localisation se dégrade progressivement à mesure que le bruit augmente.

Les multitrajets sont modélisés par l'ajout d'un biais constant  $B$  sur les pseudo-distances d'un satellite donné. Contrairement au bruit aléatoire, ce biais introduit une erreur systématique dans les mesures. Là encore, plusieurs amplitudes de biais sont testées, et l'EQM de position est évaluée pour chacune d'elles.

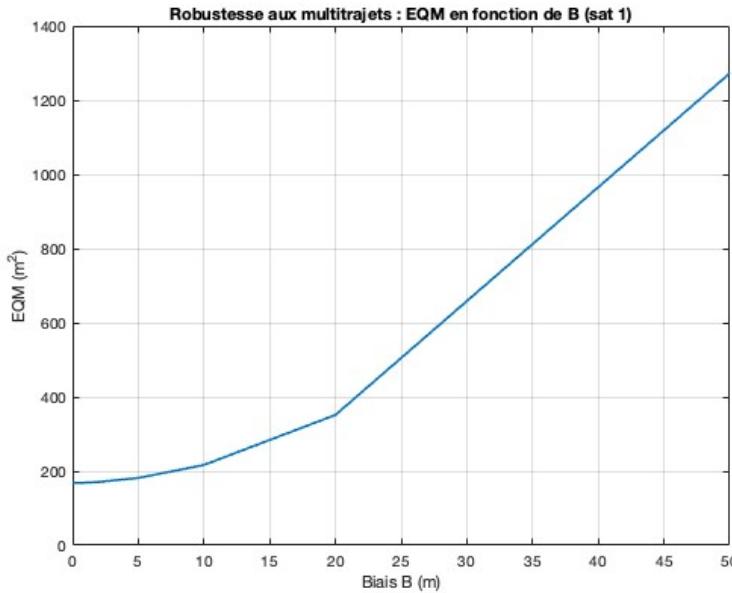


FIGURE 3 – Erreur quadratique moyenne de position en fonction de l'amplitude du biais  $B$  ajouté sur un satellite (multitrajets).

La figure 3 montre l'évolution de l'EQM en fonction de l'amplitude du biais  $B$ . On constate que l'erreur augmente fortement avec  $B$ , illustrant la sensibilité de l'algorithme aux erreurs systématiques. Les multitrajets ont ainsi un impact plus critique que les interférences aléatoires, car ils ne sont pas compensés par l'estimation du biais d'horloge et induisent un décalage persistant de la trajectoire estimée.

## 1.5 Calcul du *Dilution of Precision (DOP)*

Tout d'abord par solution du problème des moindres carrés on peut poser

$$\begin{aligned}
 \hat{X} - X &= (H_t^T H_t)^{-1} H_t^T Z - X \\
 &= (H_t^T H_t)^{-1} H_t^T (H_t^T X + w(t)) - X \\
 &= X + (H_t^T H_t)^{-1} H_t^T w(t) - X \\
 \hat{X} - X &= (H_t^T H_t)^{-1} H_t^T w(t)
 \end{aligned} \tag{7}$$

On pose  $\Sigma_{\Delta X \Delta X} = E \left( (X - \hat{X})(X - \hat{X})^T \right)$ . On peut alors le calculer à l'aide du résultat précédent.

$$\begin{aligned}
 \Sigma_{\Delta X \Delta X} &= E \left( (X - \hat{X})(X - \hat{X})^T \right) \\
 &= E \left( (H_t^T H_t)^{-1} H_t^T w(t) \left( (H_t^T H_t)^{-1} H_t^T w(t) \right)^T \right) \quad \text{par (7)} \\
 &= E \left( (H_t^T H_t)^{-1} H_t^T w(t)^2 H_t ((H_t^T H_t)^{-1})^T \right) \\
 &= E(w(t)^2) ((H_t^T H_t)^{-1})^T \\
 &= \sigma^2 ((H_t^T H_t)^{-1})^T \\
 Tr(\Sigma_{\Delta X \Delta X}) &= Tr \left( \sigma^2 ((H_t^T H_t)^{-1})^T \right) \\
 &= \sigma^2 Tr \left( (H_t^T H_t)^{-1} \right)
 \end{aligned}$$

Maintenant calculons le *DOP*.

$$\begin{aligned}
 DOP &= \frac{1}{\sigma} RMSE \\
 &= \frac{1}{\sigma} \sqrt{E \|X - \hat{X}\|^2} \\
 &= \frac{1}{\sigma} \sqrt{\text{Tr}(\Sigma_{\Delta X \Delta X})} \quad \text{par (8)} \\
 &= \frac{1}{\sigma} \sqrt{\sigma^2 \text{Tr}((H_t^T H_t)^{-1})} \\
 DOP &= \sqrt{\text{Tr}((H_t^T H_t)^{-1})} \quad (9)
 \end{aligned}$$

## 1.6 Application du *DOP* à la trajectoire

Dans la partie précédente nous avons bien redémontré comment calculer le *DOP* dans notre cas. Le *PDOP* est obtenu en enlevant la composante du biais d'horloge du *DOP*. Pour calculer le *VDOP* et le *HDOP*, il faut d'abord passer  $H$  dans le repère *END* à l'aide de la matrice de rotation  $M$ .

On peut alors justifier l'augmentation de l'erreur de positionnement entre  $t = 600$  et  $t = 800$  sur la figure 4a par l'augmentation de l'erreur liée à la constellation de satellites caractérisée par le *DOP* sur la figure 4.

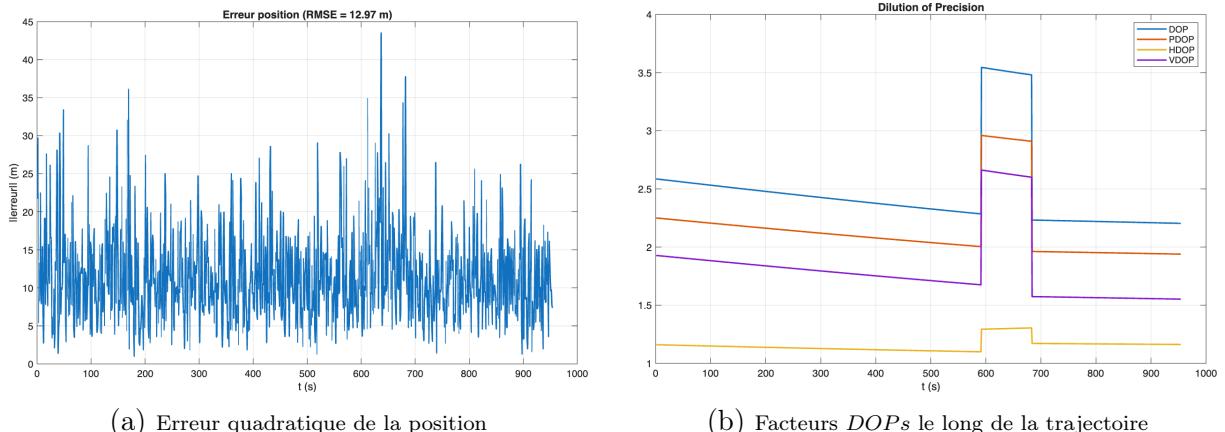


FIGURE 4 – Etude de l'impact de la constellation sur l'erreur de position