



پروژه شماره دوم

پردازش سیگنال های دیجیتال (DSP)
پاییز 1402

استاد: دکتر بدیعی رستمی
تهیه و تنظیم: علیرضا فداکار - رضا جهانی
مهلت تحویل: 29 آذر 1402

بخش 1 - فشرده سازی تصویر با تبدیل فوریه گسسته کسینوسی

در DFT از توابع سینوسی و کسینوسی که به صورت یک تابع $e^{j\omega t}$ ظاهر میشود به عنوان تابع پایه استفاده میشود. در تبدیل فوریه گسسته کسینوسی فقط توابع کسینوسی به عنوان توابع پایه در نظر گرفته میشوند. بنابراین این تبدیل برای سیگنال های حقیقی یک تبدیل حقیقی خواهد داشت. فرمی تبدیلی که اینجا مطرح میکنیم فرمتی است که حالت پیش فرض متلب است. برای یک سیگنال دارای N نمونه تبدیل یک بعدی DCT-2 که ازین پس با نام DCT از آن یاد میکنیم برای سیگنال $x[n]$ مطابق رابطه زیر است.

$$X^{c2}[k] = \sqrt{\frac{2}{N}} c_k \sum_{n=0}^{N-1} x[n] \cos\left(\frac{(2n+1)k\pi}{2N}\right); k = 1:N-1$$

$$c_k = \begin{cases} \frac{\sqrt{2}}{2}, & k = 0 \\ 1, & k \neq 0 \end{cases}$$

برای پی بردن به نحوه عملکرد این نگاشت و چگونگی کمک آن به فشرده سازی $N=2$ در نظر میگیریم. با اعمال این تبدیل به دو نمونه مجاور هم خواهیم دید که دو نمونه خروجی در واقع به ترتیب ضریبی از مجموع و تفاضل این نمونه های مجاور هم هستند. به صورت دقیق تر نمونه اول خروجی DCT یک تخمین کلی از سیگنال را در اختیار قرار داده و نمونه دوم جزئیات را در خود نگه میدارد. همچنین معکوس این تبدیل به فرم زیر نوشته میشود.

$$x[n] = \sqrt{\frac{2}{N}} \sum_{k=0}^{N-1} c_k X^{c2}[k] \cos\left(\frac{(2n+1)k\pi}{2N}\right); n = 1:N-1$$

فرم دو بعدی این تبدیل در فشرده سازی و در رمز آوردن تصاویر کاربرد گسترده ای دارد. فرمول بندی این تبدیل قابل استخراج از تبدیل فوریه تک بعدی میباشد و در این تمرین نیازی به جزئیات نیست. در صورتی که تمایل به دانستن اطلاعات بیشتری داشتید میتوانید آن را در مراجع و منابع جستجو کنید. در فرم تبدیل دو بعدی این نگاشت، هرچه اندیس های سطر و ستون

کوچکتر باشد (گوشه سمت چپ بالای ماتریس تبدیل) اطلاعات بیشتری در آن نهفته است و هرچه به سمت راست و پایین برویم اطلاعات جزئی در آن می باشد. زیرا نماینده فرکانس های بالاتر هستند.

یک روش بسیار ساده در فشرده سازی تصاویر یا **Image Compression** این است که از نگهداری مقادیر جزئی صرف نظر کرده و با قرار دادن صفر به جای آن آرایه ها در ماتریس، حجم تصویر را کاهش دهیم.

- برای این بخش قرار است تصویر **tiger.jpg** را فشرده کنید. از این تصویر **DCT 2** بعدی بگیرید و لگاریتم اندازهی خروجی آن را به شکل یک تصویر نمایش دهید. خروجی نمایش داده شده را مطابق توضیحات ارائه شده تحلیل کنید و در گزارش خود بیاورید (برای نمایش میتوانید از روشهای **colormap** یا امثال آن نیز استفاده کنید)
- متودی پیاده سازی کنید که حجم تصویر تا حدود 5 درصد کاهش یابد (تا کیفیت تصویر دچار تغییر جدی نشود) و تصویر خروجی را ذخیره کنید. دقت کنید که مقادیر قابل ذخیره سازی برای پیکسل های یک تصویر باید به شکل 8 بیتی یا **uint8** باشند.
- متودی پیشنهاد دهید و پیاده سازی کنید تا حجم تصویر تا حدود 15 درصد کاهش پیدا کند.
- آیا از این متودها برای کاهش حجم تصاویر رنگی استفاده کرد؟ چرا؟

بخش 2 - پردازش سیگنال صوتی

در این بخش می خواهیم با اعمال متودهای پردازش سیگنال، کلمه **"California"** را از یک سخنرانی حذف کنیم. فرض کنید نام ایالت محرمانه است و می خواهیم این قسمت از فایل صوتی را سانسور کنیم.

- فایل **"Voice.wav"** را بارگیری کرده و در محیط متلب لود کنید.
 - می خواهیم از فایل **"California.wav"** به عنوان الگو استفاده کنیم. این فایل را در محیط متلب لود کرده و به هر دو فایل صوتی گوش دهید. از دستور **sound** استفاده کنید.
 - هر دو فایل صوتی را در محیط متلب خوانده و ذخیره شده آماده داشته باشید.
 - متودی پیشنهاد دهید تا بر مبنای مفهوم **Normalized Cross Correlation** بتوان آن بازه ای از فایل صوتی **Voice.wav** را که کلمه **California** در آن گفته میشود تشخیص دهید.
- راهنمایی: با محاسبه همبستگی این دو سیگنال با مفهوم مطرح شده در این قسمت، میتوان تشخیص داد در چه لحظه ای کلمه مورد نظر در فایل صوتی اصلی شروع میشود.
- کلمه مورد نظر را با یک سیگنال تک تن با فرکانس 1000 هرتز جابجا کنید.
 - صوت نهایی اصلاح شده (سانسور شده) را در یک فایل صوتی جدید با نام **"Censored.wav"** ذخیره کنید.

بخش 3- زاویه یابی به کمک تبدیل فوری

در این بخش می خواهیم با یکی از کاربردهای DFT در مخابرات آشنا شویم. یک آرایه خطی یکنواخت شامل M آنتن در نظر بگیرید. در مدل میدان دور، اگر K سیگنال از مسیرهای مختلف به این آرایه تابش کنند، سیگنال دریافتی در باند پایه از طریق رابطه زیر در لحظه دلخواه t به دست می آید:

$$\mathbf{y} = \mathbf{A}\mathbf{s} + \mathbf{n}$$

که در آن $\mathbf{y} \in \mathbb{C}^{M \times 1}$ سیگنال دریافتی و $\mathbf{n} \in \mathbb{C}^{M \times 1}$ نویز گوسی جمع شونده می باشد که هر المان آن میانگین صفر و واریانس آن برابر σ_n^2 است. ستون های ماتریس $\mathbf{A} \in \mathbb{C}^{M \times K}$ بردارهای هدایت آرایه را مشخص می کنند. به عبارتی ستون k ام آن به صورت زیر تعریف می شود:

$$[\mathbf{A}]_{:,k} = \mathbf{a}(\theta_k) = [1, e^{j\pi \sin(\theta_k)}, \dots, e^{j(M-1)\pi \sin(\theta_k)}]^T$$

که در این رابطه θ_k زاویه ورود (AoA) سیگنال مسیر k ام به آرایه می باشد. بردار $\mathbf{s} \in \mathbb{C}^{K \times 1}$ سیگنال منابع را در لحظه t مشخص می کند.

(1) با استفاده از روش M DFT نقطه ای روشی برای تخمین زوایای $\{\theta_k\}_{k=1}^K$ ارائه دهید. روش خود را به صورت شبه کد در گزارش بنویسید. (این قسمت نیازی به شبیه سازی ندارد).

راهنمایی: به ساختار بردار هدایت $\mathbf{a}(\cdot)$ توجه نمایید.

(2) فرض کنید $K = 1$ ، $M = 100$ و $\theta_1 = 26.5^\circ$. مقادیر میانگین خطای مربعات $(\text{RMSE})^2$ (بر حسب درجه) تخمینگر پیشنهادی در قسمت قبل را بر حسب سیگنال به نویز³ (SNR) در بازه -10dB تا 20dB با گام 5dB رسم کنید. در هر SNR ، حداقل از 10000 داده مونت کارلو استفاده نمایید. محور RMSE به صورت لگاریتمی رسم شود. نمودار به دست آمده چه رفتاری دارد؟ دلیل مشاهده خود را شرح دهید.

(3) فرض کنید $K = 1$ ، $\text{SNR} = 10\text{dB}$ و $\theta_1 = 26.5^\circ$. مقادیر RMSE (بر حسب درجه) تخمینگر پیشنهادی در قسمت قبل را بر حسب تعداد آنتن ها در بازه 50 تا 300 آنتن با گام 50 آنتن رسم کنید. در هر مقدار M ، حداقل از 10000 داده مونت کارلو استفاده نمایید. محور RMSE به صورت لگاریتمی رسم شود. نمودار به دست آمده چه رفتاری دارد؟ دلیل مشاهده خود را شرح دهید.

(4) مورد شماره 2 را برای $K = 2$ و $\theta_1 = 30.65^\circ$ و $\theta_2 = 75.25^\circ$ تکرار کنید. فرض کنید SNR هر دو مسیر برابر باشند.

(5) امتیازی: به صورت تئوری ثابت کنید اگر $M \rightarrow \infty$ ، آنگاه دقت تخمینگر در قسمت قبل به صفر میل می کند.

¹ Angle of Arrival
² Root Mean Squared Error
³ Signal-to-Noise Ratio

نکات کلی درباره تمرین

- در صورت وجود هرگونه سوال و ابهام، با علیرضا فداکار و رضا جهانی از طریق ایمیل در ارتباط باشید. دستیاران آموزشی موظف به پاسخگویی از راههای ارتباطی دیگر نیستند.
- مطابق قوانین اعلام شده در ابتدای ترم عمل کنید.
- مشورت کردن، کمک به یکدیگر و همفکری بسیار درست و سازنده است؛ به شرط آن که به یادگیری کمک کند. بنابراین مشورت در راستای فهم دقیق مسائل مانعی ندارد.
- سوالات زیر تنها جهت آشنایی بیشتر شما با مطالب پوشش داده شده در این تمرین هستند. حل آنها اختیاری است؛ نیازی به تحویل آنها نیست و نمره‌ی امتیازی نیز ندارند.
- کتاب Oppenheim، ویرایش سوم