



# COMPUTER ASSIGNMENT

Linear control systems

Amirhesam Jafir Rad	810100247
Mana Mohammadi	8101002074

mana mohammadi  
[Email address]

## بخش اول

$$\begin{cases} A \frac{dh_1}{dt} = Q_{in} - Q_{out} \\ Q_{out} = \frac{1}{2} S \sqrt{2gh_1} \end{cases} \quad \begin{cases} x = h_1 \rightarrow \dot{x} = \dot{h}_1 = \frac{1}{A} (Q_{in} - Q_{out}) = \frac{1}{A} \left[ u - \frac{1}{2} S \sqrt{2gx} \right] \\ u = Q_{in} \end{cases}$$

در حالت پایدار:  $\dot{x} = 0 \rightarrow \frac{1}{A} \left[ u^* - \frac{1}{2} S \sqrt{2gx^*} \right] = 0 \rightarrow u^* = \frac{S}{2} \sqrt{2gx^*}$   $x^* = h_1^* = 1.47$   $u^* = 1.34 \times 10^{-4} \text{ m}^3/\text{s}$

$$f_1(x, u) = \frac{-S}{A} \sqrt{\frac{gx}{2}} + \frac{1}{A} u \rightarrow \frac{\partial f_1}{\partial x} = \frac{-S\sqrt{g}}{2A\sqrt{2x}} \quad \frac{\partial f_1}{\partial u} = \frac{1}{A}$$

$$\rightarrow \ddot{x} = \underbrace{\frac{-S\sqrt{g}}{2A\sqrt{2x^*}}}_{A} \tilde{x} + \underbrace{\frac{1}{A}}_B \tilde{u}$$

$$f_2(x, u) = \frac{1}{2} S \sqrt{2gx} \rightarrow \frac{\partial f_2}{\partial x} = \frac{S\sqrt{g}}{2\sqrt{2x}} \quad \frac{\partial f_2}{\partial u} = 0 \rightarrow \frac{\partial^2}{\partial x^2} = \underbrace{\frac{-S\sqrt{g}}{2\sqrt{2x^*}}}_C + \underbrace{0}_D$$

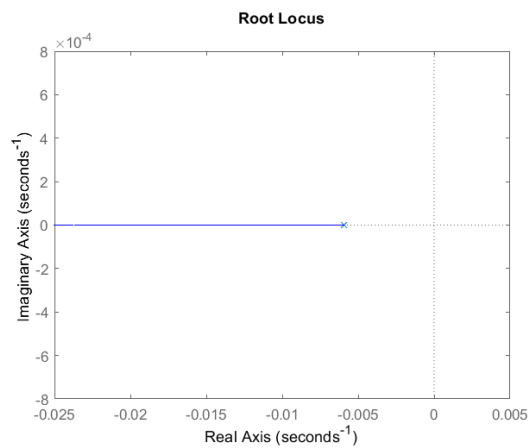
$$G =$$

$$0.002965$$

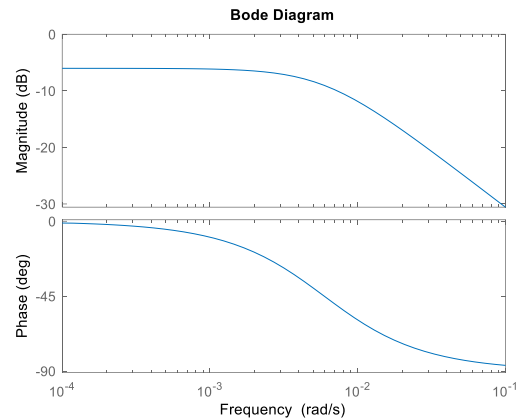
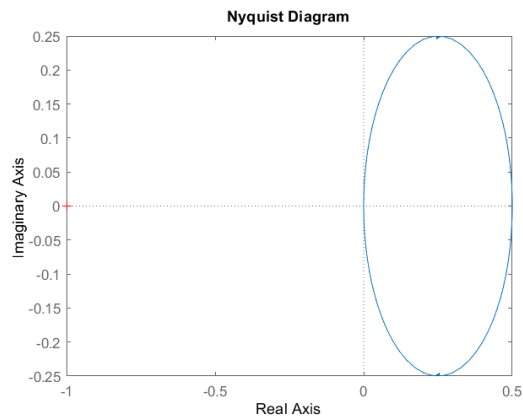
$$s + 0.002965$$

همانطور که میبینیم قطب تابع تبدیل منفی است پس این سیستم پایدار است.

## بخش دوم



به ازای همه بهره های مثبت پایدار است



Phase Margin: Inf degrees

Gain Margin: Inf dB

Bandwidth: 0.005917 rad/s

چون نمودار اندازه با 0db و نمودار فاز با -180 برخورد ندارند پس میبینیم که هر دو حاشیه بینهایت هستند.

## بخش سوم

$$\begin{aligned}
 & \epsilon \frac{-\xi\pi}{\sqrt{1-\xi^2}} \leq 0.15 \rightarrow \frac{-\xi\pi}{\sqrt{1-\xi^2}} \leq 1.897 \rightarrow \xi\pi \geq 1.897\sqrt{1-\xi^2} \rightarrow (1.897^2 + \pi^2)\xi^2 \geq 1.897^2 \rightarrow \xi \geq 0.5169 \\
 & \xi = 0.5169 \Rightarrow \theta \leq 58.845^\circ \\
 & \epsilon = 2\% \rightarrow T_s = \frac{4}{\xi\omega_n} \leq 200 \rightarrow \xi\omega_n \geq 0.02 \quad \tan(\theta) = \frac{\beta}{\alpha} \rightarrow \beta = \alpha \tan(\theta) = 0.33 \\
 & \Rightarrow s_1 = -0.02 + j0.33 \\
 & G(s_1) = \frac{0.002965}{-0.017035 + j0.33} \rightarrow \angle G(s_1) = \tan^{-1}\left(\frac{0.33}{-0.017}\right) \approx 87^\circ
 \end{aligned}$$

کنترل کننده بهره :

$$\text{gain controller: } G_c = k \rightarrow k \left| \frac{0.002965}{s_1 + 0.002965} \right| = 1 \rightarrow k \left| \frac{0.002965}{-0.17035 + j0.33} \right| = 1 \rightarrow k = 125.33$$

## کنترل کننده lead :

$$\text{lead controller: } G_c(s) = \frac{1 + \alpha s}{1 + \alpha \tau s} \quad \left. \begin{array}{l} \text{lead controller: } G_c(s) = \frac{1 + \alpha s}{1 + \alpha \tau s} \\ \alpha = 7 \times 10^{-4} \end{array} \right\} G_c(s) = k \times 7 \times 10^{-4} \times \frac{1 + 45s}{1 + 45 \times 7 \times 10^{-4}s}$$

$$\frac{1}{T} > 0.02 \rightarrow T < 50 \rightarrow T = 45$$

$$|G_c(s_1) G(s_1)| = 1 \rightarrow k \times 7 \times 10^{-4} \times \left| \frac{1 + 45s_1}{1 + 45 \times 7 \times 10^{-4}s_1} \right| \left| \frac{0.002965}{s_1 + 0.002965} \right| = k \times 7 \times 10^{-4} \times \left| \frac{0.1 + j14.85}{0.99 + j0.0104} \right| \left| \frac{0.002965}{-0.017 + j0.33} \right| = 1$$

$$\rightarrow k \times 7 \times 10^{-4} \times \frac{14.85}{0.99} \times \frac{0.002965}{0.3304} = 1 \rightarrow k = 10612.7$$

$$\rightarrow G_c(s) = 10612.7 \times 7 \times 10^{-4} \times \frac{1 + 45s}{1 + 45 \times 7 \times 10^{-4}s} = 10612.7 \times \frac{s + 0.02}{s + 31.7}$$

## کنترل کننده lag :

از این کنترل کننده عموماً برای کنترل خطای حالت دائم و حاشیه ها در عین ثابت ماندن مکان ریشه استفاده میشود و اینجا کاربرد ندارد.

## کنترل کننده PI :

$$\text{PI controller: } G_c(s) = k_p + k_i \frac{1}{s} = \frac{k_p s + k_i}{s}$$

$$\rightarrow \frac{k_p s + k_i}{s} \times \frac{0.002965}{s + 0.002965} \rightarrow T(s) = \frac{G_c(s)}{1 + G_c(s)} = \frac{0.002965 (k_p s + k_i)}{s(s + 0.002965) + 0.002965 (k_p s + k_i)}$$

$$\Rightarrow s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2 = s^2 + (0.002965(1 + k_p) + 0.002965 k_i)$$

$$\zeta = 0.5169, \quad \zeta\omega_n = 0.02 \rightarrow \omega_n = 0.03869 \rightarrow 0.002965 k_i = 1.497 \times 10^{-3} \rightarrow k_i = 0.5049$$

$$0.002965(1 + k_p) = 2 \times 0.02 \rightarrow k_p = 12.49$$

$$\rightarrow G_c(s) = 12.49 + 0.5049 \frac{1}{s}$$

## کنترل کننده PID :

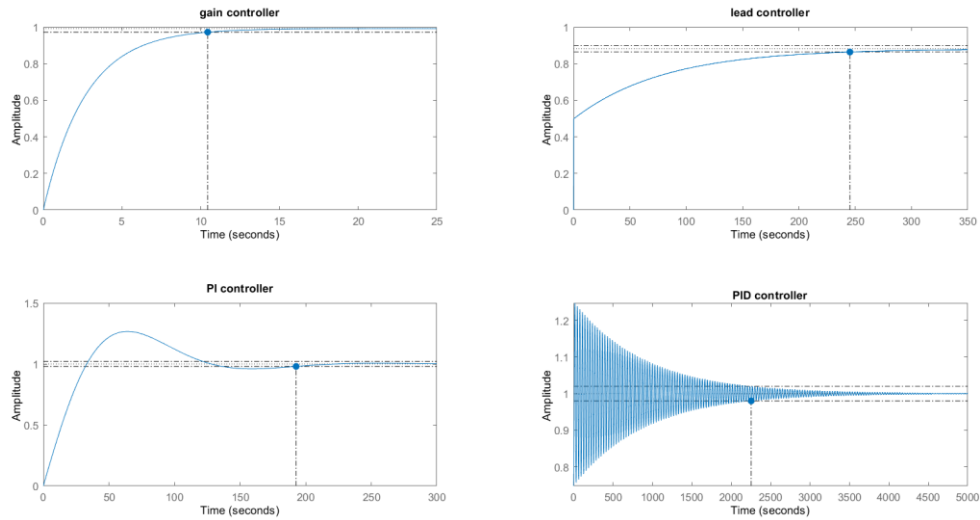
$$\text{PID controller: } G_c(s) = k_p + k_D s + k_I \frac{1}{s} = \frac{k_D s^2 + k_p s + k_I}{s} \rightarrow \frac{0.002965 (k_D s^2 + k_p s + k_I)}{s(s + 0.002965)}$$

$$\rightarrow T(s) = \frac{0.002965 (k_D s^2 + k_p s + k_I)}{s(s + 0.002965) + 0.002965 (k_D s^2 + k_p s + k_I)} \rightarrow [1 + 0.002965 k_D] s^2 + [0.002965(1 + k_p)] s + 0.002965 k_I$$

$$\rightarrow \frac{0.002965 k_I}{1 + 0.002965 k_D} = \omega_n^2 \rightarrow k_I = \frac{(1 + 0.002965 k_D) \times 1.497 \times 10^{-3}}{0.002965}$$

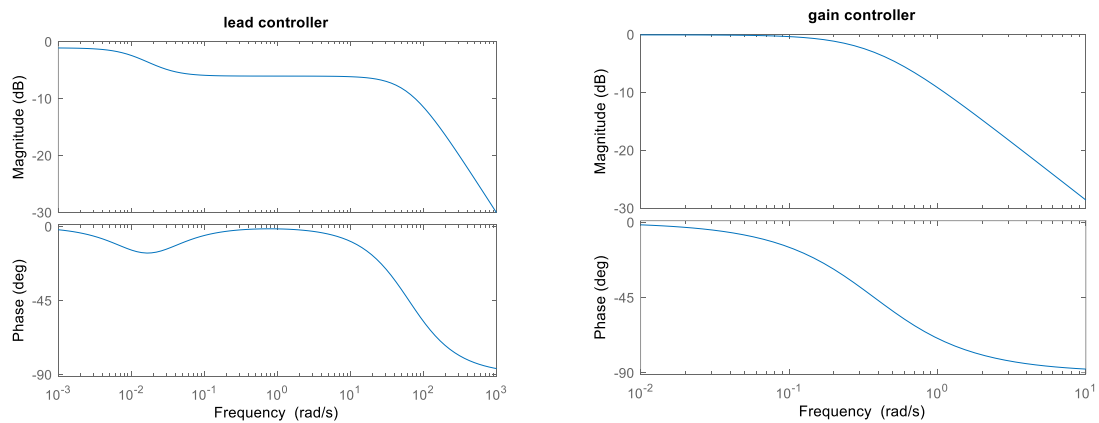
$$\frac{0.002965(1 + k_p)}{1 + 0.002965 k_D} = 2\zeta\omega_n \rightarrow k_p = \frac{(1 + 0.002965 k_D) \times 0.04}{0.002965} - 1$$

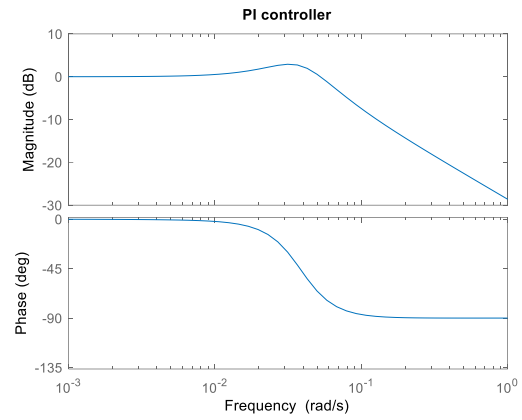
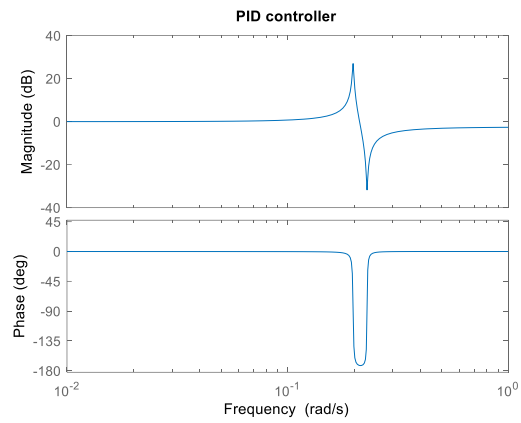
## بخش چهارم



- در کنترل کننده بهره، اوورشوت ندارد و زمان نشست آن خیلی کم است (10 s)
- در کنترل کننده پیشفاز، اوورشوت ندارد و زمان نشست کمی بیشتر از 200 ثانیه است.
- در کنترل کننده PI، اوورشوت ندارد و زمان نشست 192 ثانیه است.
- در کنترل کننده PID، اوورشوت کمی بیشتر از مقدار دلخواه دارد و زمان نشست آن خیلی زیاد است و به خوبی کنترل نشده (میتوان با یافتن ضریب  $k_p$  بهتر این کنترلر را بهتر تنظیم کرد و نتیجه بهتری گرفت)

## قسمت پنجم





gain controller:

Phase Margin: Inf degrees

Gain Margin: Inf dB

lead controller:

Phase Margin: Inf degrees

Gain Margin: Inf dB

PI controller:

Phase Margin: 111.360803 degrees

Gain Margin: Inf dB

PID controller:

Phase Margin: 8.010277 degrees

Gain Margin: Inf dB