

Проективная геометрия в компьютерном зрении

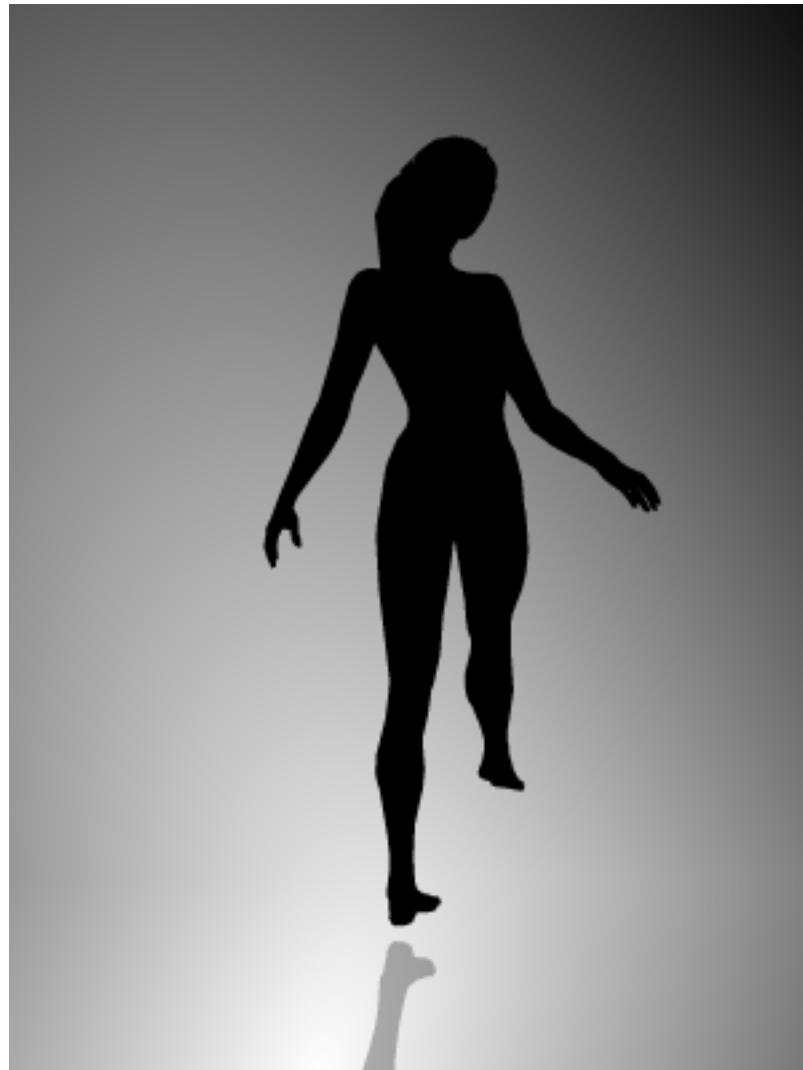
Ерухимов Виктор Львович



Зачем нужна геометрия в компьютерном зрении?



В какую сторону вращается танцовщица?





Copyrighted Material

SECOND EDITION

Multiple View Geometry in computer vision



Richard Hartley and Andrew Zisserman

Copyrighted Material

CAMBRIDGE

ДЖ. ГОЛУБ, Ч. ВАН ЛОУН

МАТРИЧНЫЕ ВЫЧИСЛЕНИЯ



ИЗДАТЕЛЬСТВО «МИР»

ozon.ru

Вопросы

- Что такое симметричная матрица?
- Что такое верхняя диагональная матрица?
- Что такое ранг матрицы?
- Что такое ядро матрицы?
- Что такое детерминант матрицы?
- Что такое собственное число?
 - Действительные или комплексные?
- Что такое ортогональная матрица?

Решение систем линейных уравнений

$$Ax = b$$

Собственные значения и векторы

$$Ax = \lambda x$$

$$(x_1, x_2) = 0, \lambda_1 \neq \lambda_2$$

$$A = Q\Lambda Q^{-1}$$

Симметричные матрицы имеют действительные собственные значения

Разложение Холецкого

$A = LL^*$, где L – нижняя диагональная матрица с ненулевыми диагональными элементами, а L^* -- её эрмитово сопряженная. Это разложение существует тогда и только тогда, когда A – эрмитова неотрицательно определенная матрица.

QR факторизация

$$A = QR$$

A Произвольная матрица $m \times n$, $m > n$

Q Ортогональная матрица $m \times m$

R Верхняя треугольная матрица $m \times n$

Singular Value Decomposition

$$A = UDV^T$$

$$\begin{aligned} A\mathbf{v}_i &= \sigma_i \mathbf{u}_i \\ A^T \mathbf{u}_i &= \sigma_i \mathbf{v}_i \end{aligned} \quad D \quad \text{уникальна}$$

Сложность $4m^2n + 8mn^2 + 9n^3$

Использование SVD

- $\min_{\|x\|=1} \|Ax\|^2$
- Ядро матрицы определяется последними правыми сингулярными векторами
- ранг – ненулевыми сингулярными числами

Использование SVD

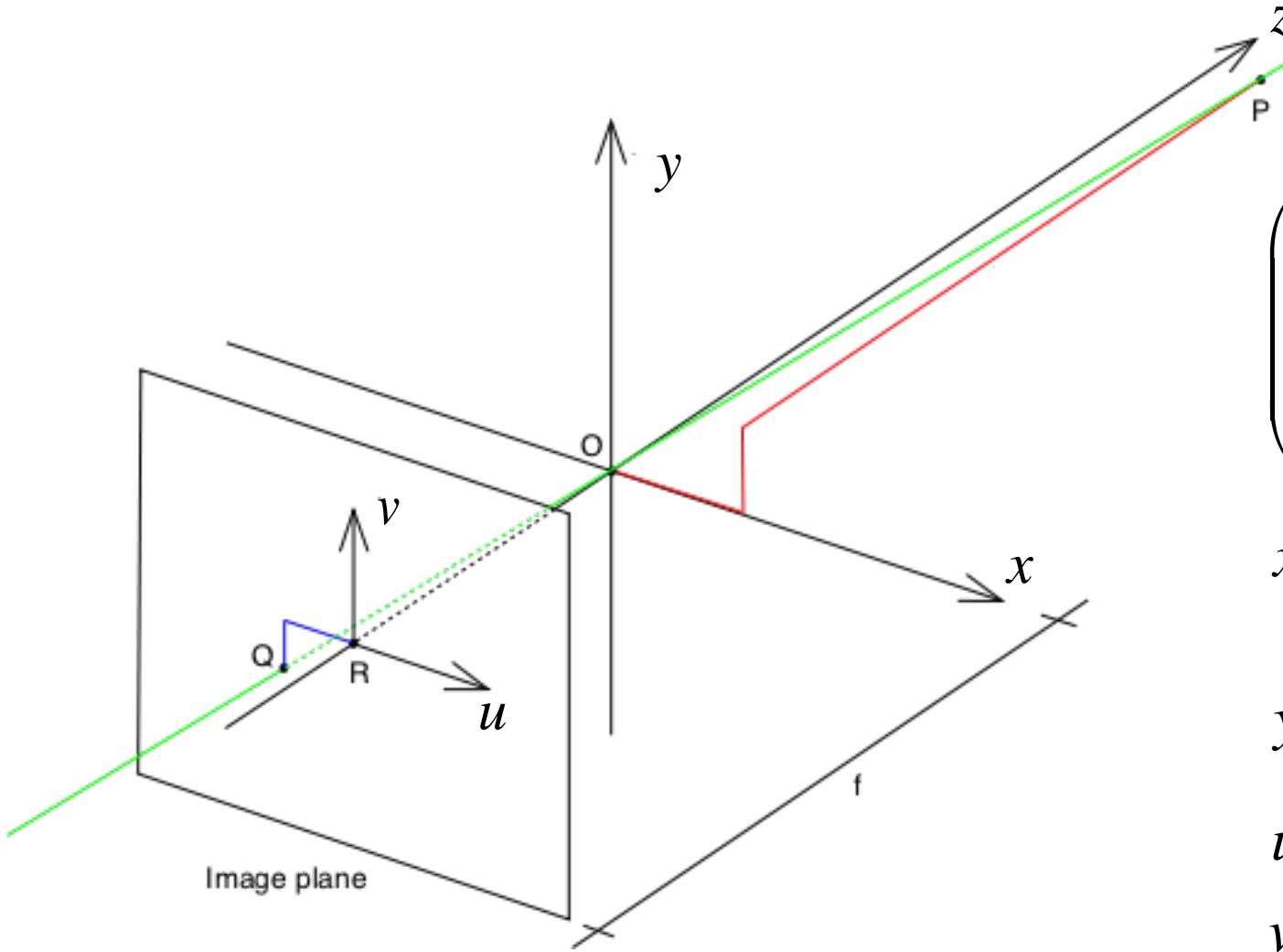
- Ортогональная проблема Прокруста

$$\underset{B^T B = I}{\arg \min} \|A - B\|$$

- Теорема Эккарта-Янга

$$\underset{\text{rank}(B) = r < \text{rank}(A)}{\arg \min} \|A - B\|$$

Pinhole camera model



$$\begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix} = R \begin{pmatrix} X_0 \\ Y_0 \\ Z_0 \end{pmatrix} + t$$

$$x' = \frac{X}{Z}$$

$$y' = \frac{Y}{Z}$$

$$u = f_x x' + c_x$$

$$v = f_y y' + c_y$$

Проективное пространство

- Состоит из множества прямых линий, проходящих через нулевую точку линейного пространства
- Включает в себя линию на бесконечности
- Если линейное пространство трехмерное, то проективное пространство называют проективной плоскостью P^2

Однородные координаты

Точка на проективной плоскости $p = \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{pmatrix} \in P^2$

ставится в соответствие всем точкам из трехмерного пространства, проектирующимся в нее:

$$u = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = z \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{pmatrix} \in R^3$$

(x,y,z) называют однородными координатами точки p .

Однородные координаты

Уравнение прямой:

$$p^T l = 0 \quad p_x l_x + p_y l_y + p_z l_z = 0$$

Прямая, проходящая через две точки:

$$l = p_1 \times p_2 \quad p_i^T p_1 \times p_2 = 0$$

Пересечение прямых:

$$p = l_1 \times l_2 \quad l_i^T l_1 \times l_2 = 0$$

Где пересекаются прямые линии

$$l_1 = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}, l_2 = \begin{pmatrix} a \\ b \\ \tilde{c} \end{pmatrix}$$

Точка на бесконечности

Прямые линии

$$l_1 = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}, l_2 = \begin{pmatrix} a \\ b \\ \tilde{c} \end{pmatrix}$$

пересекаются в точке

$$p = l_1 \times l_2 = \begin{pmatrix} \hat{a} \\ \hat{b} \\ 0 \end{pmatrix}$$

Прямая на бесконечности

Все точки на бесконечности лежат на одной прямой:

$$l_{\infty} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = 0$$

Преобразования проективной плоскости

- Изометрическое

$$q' = \begin{pmatrix} R & t \\ 0^T & 1 \end{pmatrix} q$$

- Инварианты:

- Длина
- Углы
- Площадь

Преобразования проективной плоскости

- Подобие

$$q' = \begin{pmatrix} sR & t \\ 0^T & 1 \end{pmatrix} q$$

- Инварианты:

- Отношение длин
- Углы
- Отношение площадей

Преобразования проективной плоскости

- Афинное

$$q' = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & t_x \\ a_{21} & a_{22} & t_y \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} q$$

- Инварианты:

- Параллельность
- Отношение длин отрезков на параллельных прямых
- Отношение площадей

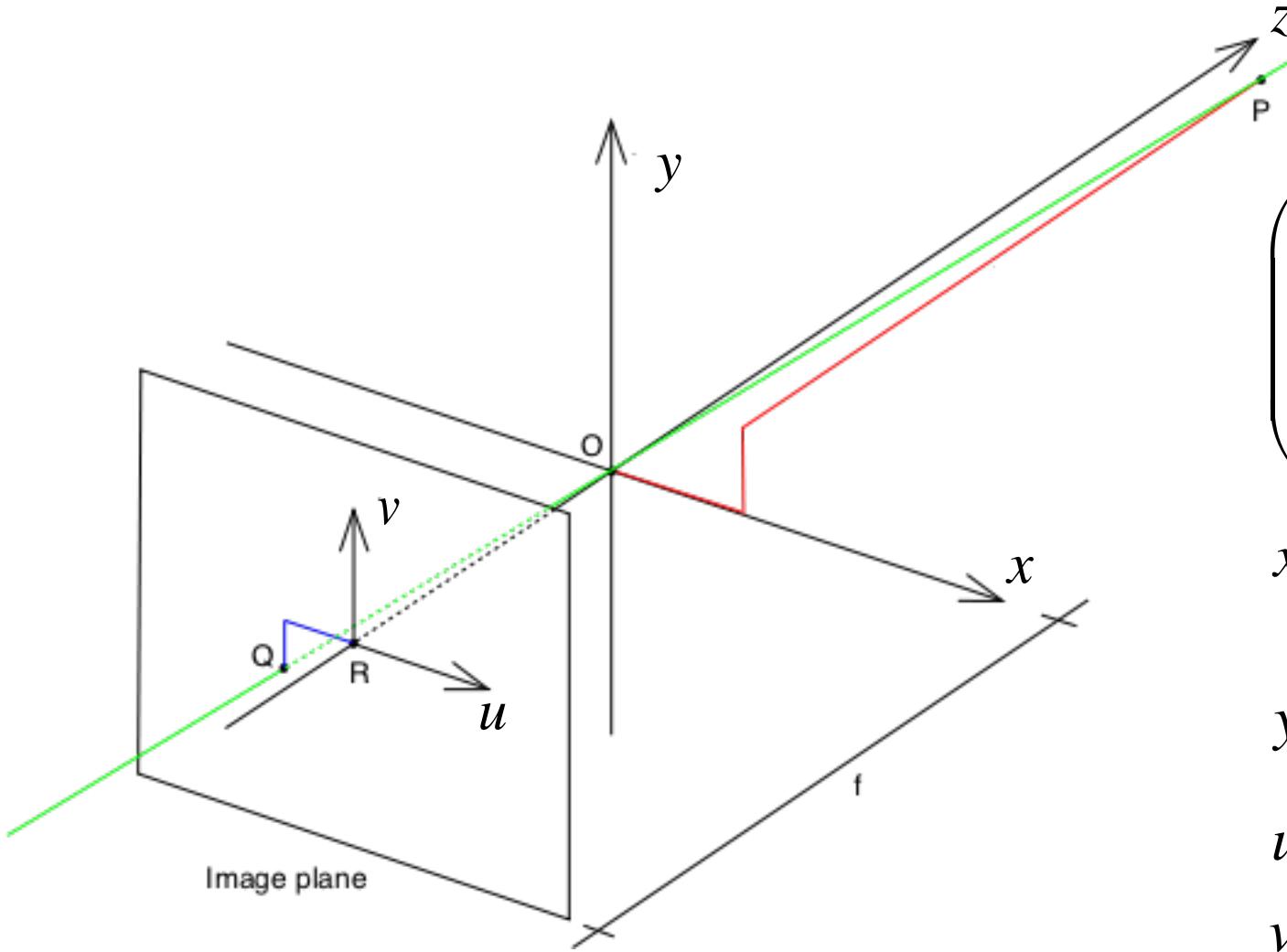
Преобразования проективной плоскости

- Перспективное

$$q' = \begin{pmatrix} h_{11} & h_{12} & h_{13} \\ h_{21} & h_{22} & h_{23} \\ h_{31} & h_{32} & h_{33} \end{pmatrix} q$$

Group	Matrix	Distortion
Projective 8 dof	$\begin{bmatrix} h_{11} & h_{12} & h_{13} \\ h_{21} & h_{22} & h_{23} \\ h_{31} & h_{32} & h_{33} \end{bmatrix}$	
Affine 6 dof	$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & t_x \\ a_{21} & a_{22} & t_y \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$	
Similarity 4 dof	$\begin{bmatrix} sr_{11} & sr_{12} & t_x \\ sr_{21} & sr_{22} & t_y \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$	
Euclidean 3 dof	$\begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & t_x \\ r_{21} & r_{22} & t_y \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$	

Pinhole camera model



$$\begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix} = R \begin{pmatrix} X_0 \\ Y_0 \\ Z_0 \end{pmatrix} + t$$

$$x' = \frac{X}{Z}$$

$$y' = \frac{Y}{Z}$$

$$u = f_x x' + c_x$$

$$v = f_y y' + c_y$$

Проективное преобразование (гомография)

- Обратимое отображение $H^l: P^2 \rightarrow P^2$, такое, что любые три точки x_1, x_2, x_3 лежат на одной прямой тогда и только тогда, когда на одной прямой лежат их образы $H^l(x_1), H^l(x_2), H^l(x_3)$, называется гомографией.

Теорема о представлении гомографии

- Отображение $H^l: P^2 \rightarrow P^2$ является гомографией тогда и только тогда, когда существует обратимая матрица 3×3 H , такая, что для каждой точки из P^2 , представляемой 3 -мерным вектором x , выполняется соотношение $H^l(x) = Hx$
- Доказать

Соотношение гомографии для координат пикселей

$$\begin{pmatrix} \tilde{u}w \\ \tilde{v}w \\ w \end{pmatrix} = H \begin{pmatrix} u \\ v \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned}\tilde{u} &= \frac{h_{11}u + h_{12}v + h_{13}}{h_{31}u + h_{32}v + h_{33}} \\ \tilde{v} &= \frac{h_{21}u + h_{22}v + h_{23}}{h_{31}u + h_{32}v + h_{33}}\end{aligned}$$

Свойства гомографии

$$\tilde{p} = H^I(p) \quad p = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \in I$$

- Суперпозиция двух гомографий -- гомография

$$p_1 = H_1^I(p), \quad p_2 = H_2^I(p_1) \xrightarrow{\text{blue arrow}} p_2 = (H_1 \cdot H_2)^I(p)$$

- Гомографии образуют группу в \mathbb{P}^2

Нахождение гомографии

- Direct Linear Transformation

$$w_i \begin{pmatrix} \tilde{u}_i \\ \tilde{v}_i \\ 1 \end{pmatrix} = H \begin{pmatrix} u_i \\ v_i \\ 1 \end{pmatrix} \quad \xrightarrow{\text{blue arrow}} \quad \begin{pmatrix} \tilde{u}_i \\ \tilde{v}_i \\ 1 \end{pmatrix} \times H \begin{pmatrix} u_i \\ v_i \\ 1 \end{pmatrix} = 0$$

Матрица проекции камеры

$$w \begin{pmatrix} u \\ v \\ 1 \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} X_0 \\ Y_0 \\ Z_0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$P = K[R \mid T]$$
$$K = \begin{pmatrix} f_x & 0 & c_x \\ 0 & f_y & c_y \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Матрица проекции камеры

$$q = \begin{pmatrix} f_x & 0 & c_x \\ 0 & f_y & c_y \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} [R \mid T] Q$$

$K \quad P$

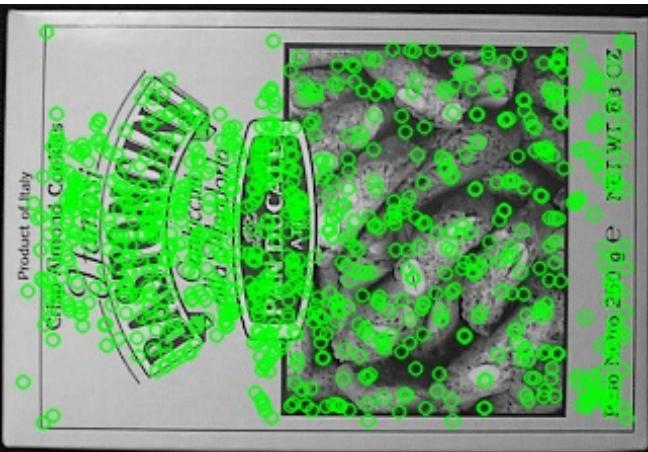
$q \in P^2$
 $Q \in P^3$

Отображение гомографии

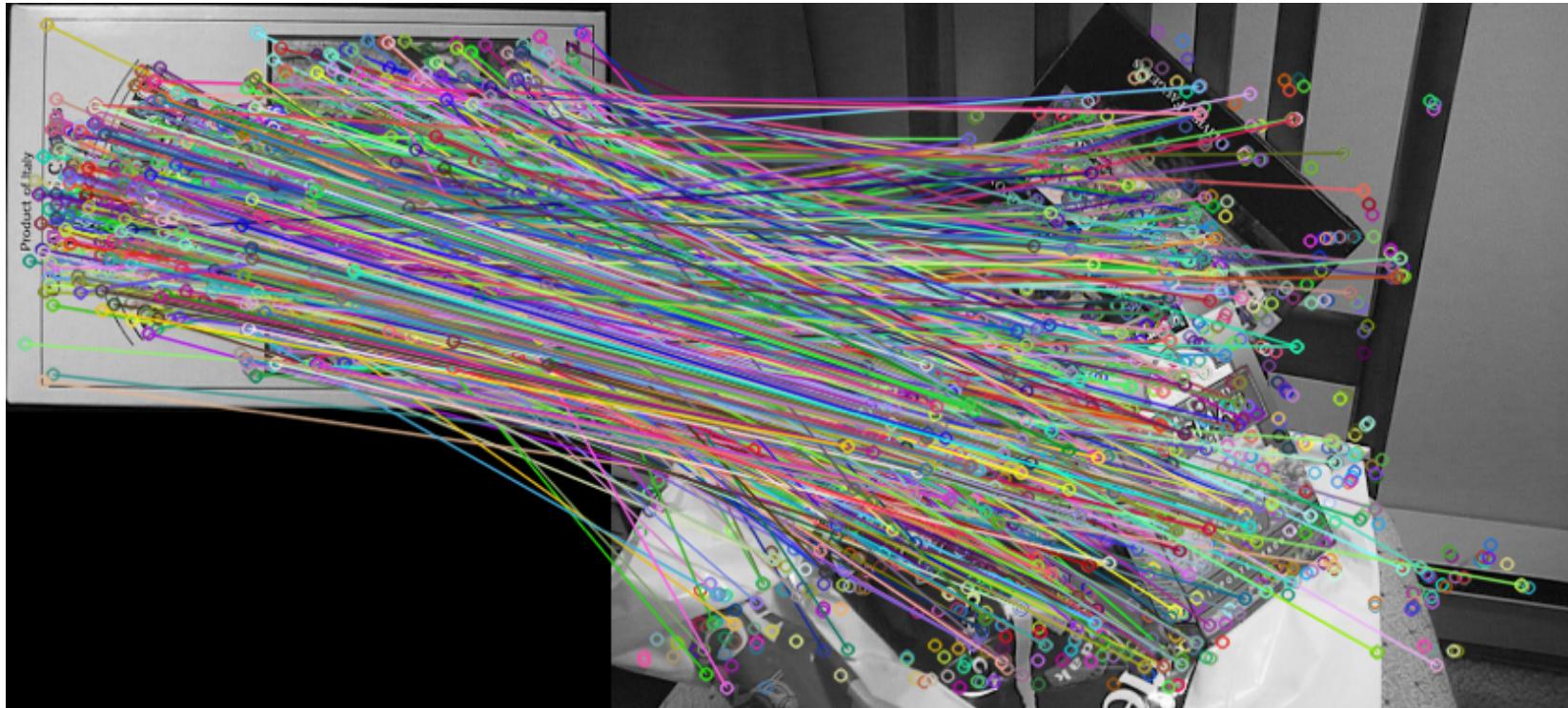
$$S_2 = RS_1 + T \quad n_1^T S_1 = d_1 \quad S_1, S_2 \in \Re^3$$

$$\begin{aligned} & S_2 = RS_1 + T \frac{n_1^T S_1}{d} \\ & S_2 = \left(R + \frac{Tn_1^T}{d} \right) S_1 \quad \xrightarrow{\text{blue arrow}} \quad q_2 = \left(R + \frac{Tn_1^T}{d} \right) q_1 \end{aligned}$$

Keypoints example



Matching descriptors example

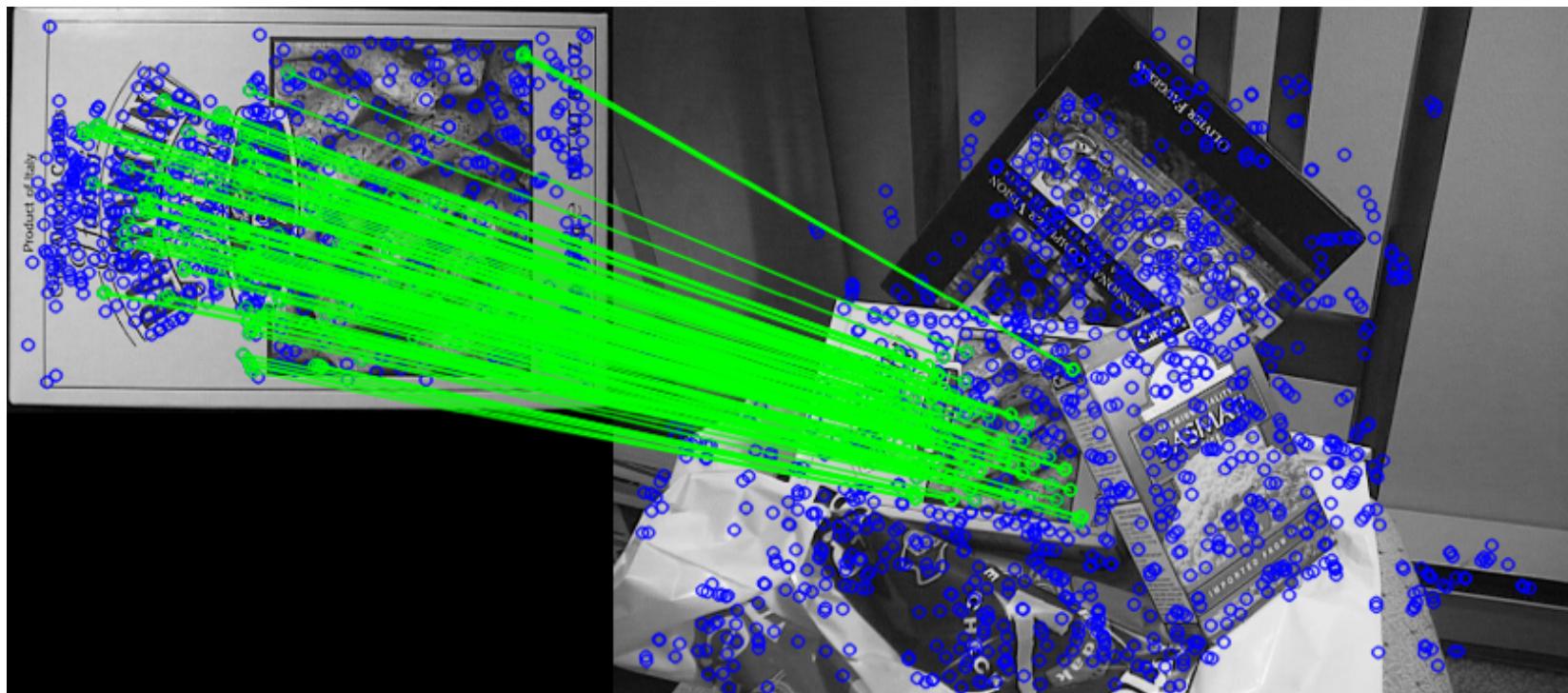


Random Sample Consensus

- Do n iterations until #inliers > inlierThreshold
 - Draw k matches randomly
 - Find the transformation
 - Calculate inliers count
 - Remember the best solution

The number of iterations required $\sim 10 * \left(\frac{\# \text{ matches}}{\# \text{ inliers}} \right)^k$

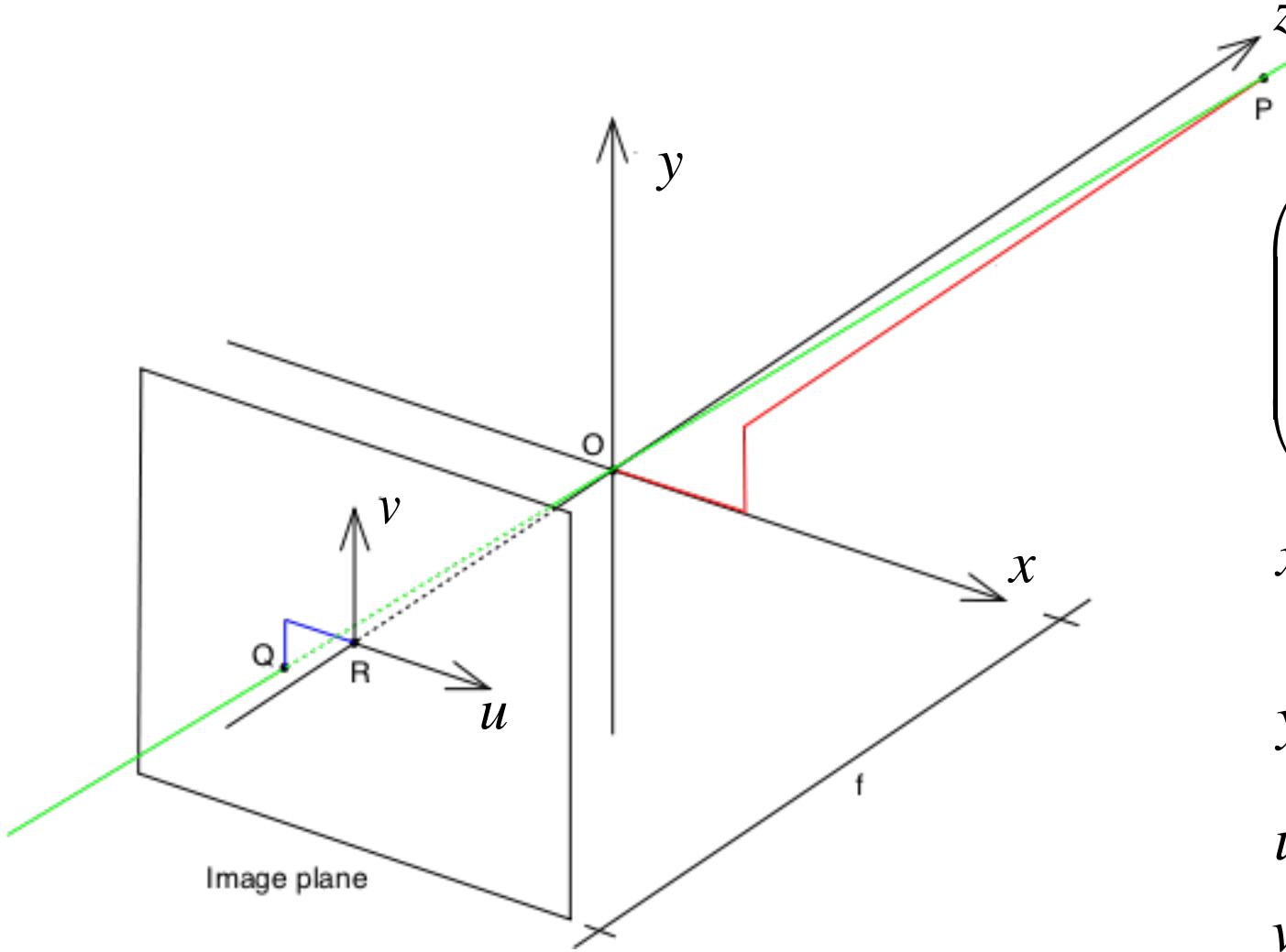
Geometry validation



Когда между изображениями существует гомография?

- Плоская сцена
- Бесконечно удаленная сцена

Pinhole camera model



$$\begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix} = R \begin{pmatrix} X_0 \\ Y_0 \\ Z_0 \end{pmatrix} + t$$

$$x' = \frac{X}{Z}$$

$$y' = \frac{Y}{Z}$$

$$u = f_x x' + c_x$$

$$v = f_y y' + c_y$$

Откуда берутся такие искажения?



Модель искажений линзы

$$x'' = x'(1 + k_1 r^2 + k_2 r^4 + k_3 r^6) + 2p_1 x' y' + p_2(r^2 + 2x'^2)$$

$$y'' = y'(1 + k_1 r^2 + k_2 r^4 + k_3 r^6) + p_1(r^2 + 2y'^2) + 2p_2 x' y'$$

$$\text{where } r^2 = x'^2 + y'^2$$

$$u = f_x * x'' + c_x$$

$$v = f_y * y'' + c_y$$

Модель искажений линзы

- Искажения, вносимые линзой, можно компенсировать, не используя предположения о трехмерной сцене

Pose estimation

Detected
image points:

$$\left\{ \begin{pmatrix} u_i \\ v_i \end{pmatrix} \right\}_{i=1..n}$$

Train object
points:

$$\left\{ \begin{pmatrix} X_i \\ Y_i \\ Z_i \end{pmatrix} \right\}_{i=1..n}$$

A class of object
transformations:

$$f \left[\begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix}, R, T \right] = R \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix} + T$$

Reprojection error

$$w_i \begin{pmatrix} u_i^p \\ v_i^p \\ 1 \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} X_i \\ Y_i \\ Z_i \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$error(P) = \sum_i \left[\begin{pmatrix} u_i \\ v_i \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} u_i^p \\ v_i^p \end{pmatrix} \right]^2$$

Perspective-n-Points problem

$$\min_{R, T} \text{error}(K, R, T)$$

Direct Linear Transformation

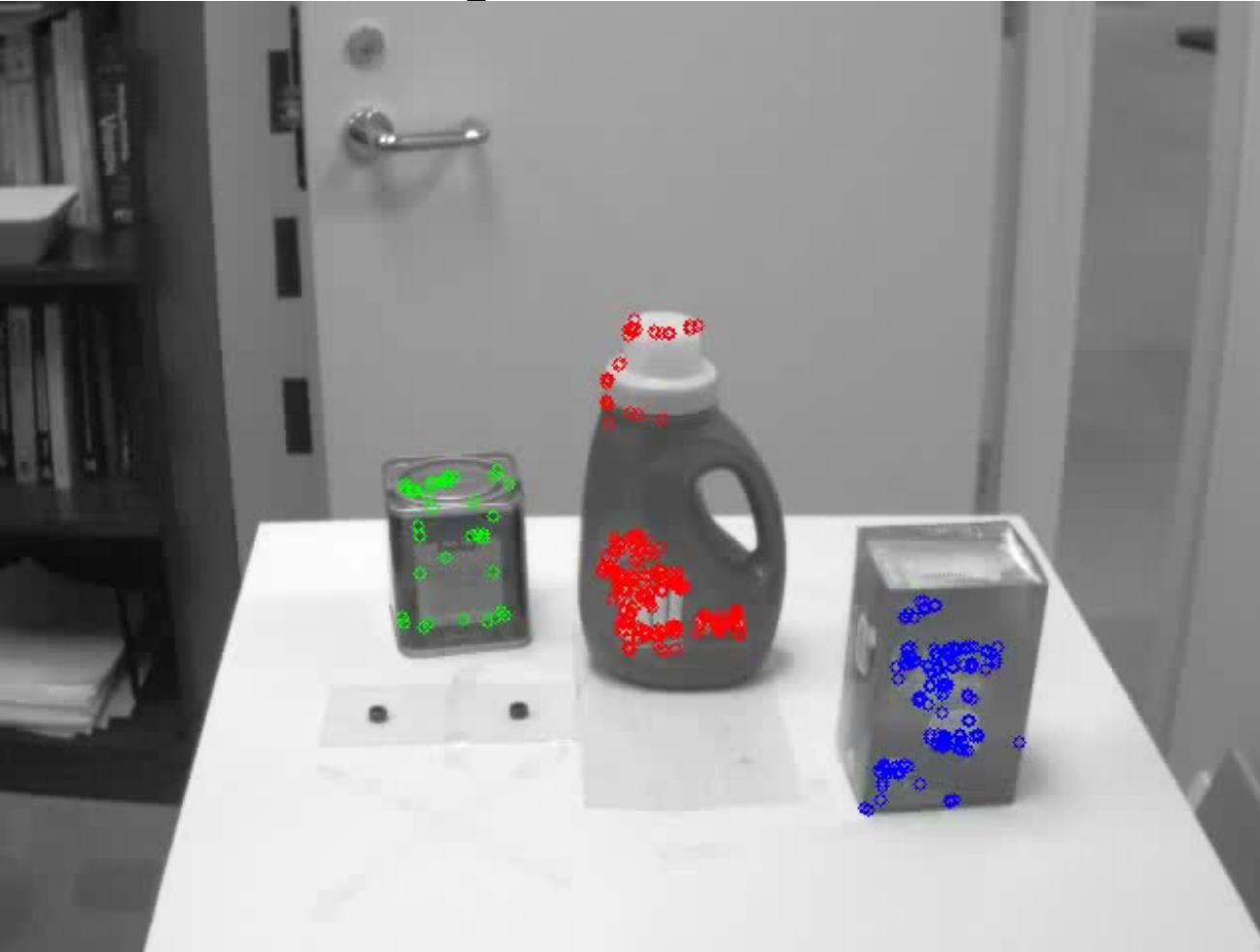
$$\begin{pmatrix} u_i^p w_i \\ v_i^p w_i \\ w_i \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} X_i \\ Y_i \\ Z_i \\ 1 \end{pmatrix} \quad \xrightarrow{\text{blue arrow}} \quad \begin{pmatrix} u_i^p \\ v_i^p \\ 1 \end{pmatrix} \times P \begin{pmatrix} X_i \\ Y_i \\ Z_i \\ 1 \end{pmatrix} = 0$$

$$[R \mid T] = K^{-1}P$$

Other methods

- $O(N)$ closed-form methods
- Levenberg-Marquardt
- P3P, P4P
- RANSAC

Object detection example



Iryna Gordon and David G. Lowe,
"What and where: 3D object
recognition with accurate pose," in
*Toward Category-Level Object
Recognition*, eds. J. Ponce, M.
Hebert, C. Schmid, and A. Zisserman,
(Springer-Verlag, 2006), pp. 67-82.

Manuel Martinez Torres, Alvaro
Collet Romea, and Siddhartha
Srinivasa, MOPED: A Scalable and
Low Latency Object Recognition
and Pose Estimation
System, Proceedings of ICRA 2010,
May, 2010.

Optimization: Gauss-Newton method

$$\min C(\vec{\beta}) = \sum_i (y_i - f(\vec{x}_i, \vec{\beta}))^2 = \vec{\varepsilon}^T (\vec{\beta}) \vec{\varepsilon}(\vec{\beta})$$

$$C(\vec{\beta} + \vec{\delta}) \approx (\vec{\varepsilon}(\vec{\beta}) + J\vec{\delta})^T (\vec{\varepsilon}(\vec{\beta}) + J\vec{\delta}) + O(\|\delta\|^2)$$

$$\nabla C(\vec{\beta} + \vec{\delta}) \approx -2J^T (\vec{\varepsilon}(\vec{\beta}) + J\vec{\delta})$$

$$J^T J \vec{\delta} = -J^T \vec{\varepsilon}$$

Optimization: Levenberg method

$$(J^T J + \lambda E) \vec{\delta} = J^T \vec{\varepsilon}$$

$\|\lambda E\| >> \|J^T J\|: \lambda \vec{\delta} = J^T \vec{\varepsilon}$, this is gradient descent

$\|\lambda E\| << \|J^T J\|: J^T J \vec{\delta} = J^T \vec{\varepsilon}$, this is Gauss – Newton

Optimization: Levenberg-Marquardt method

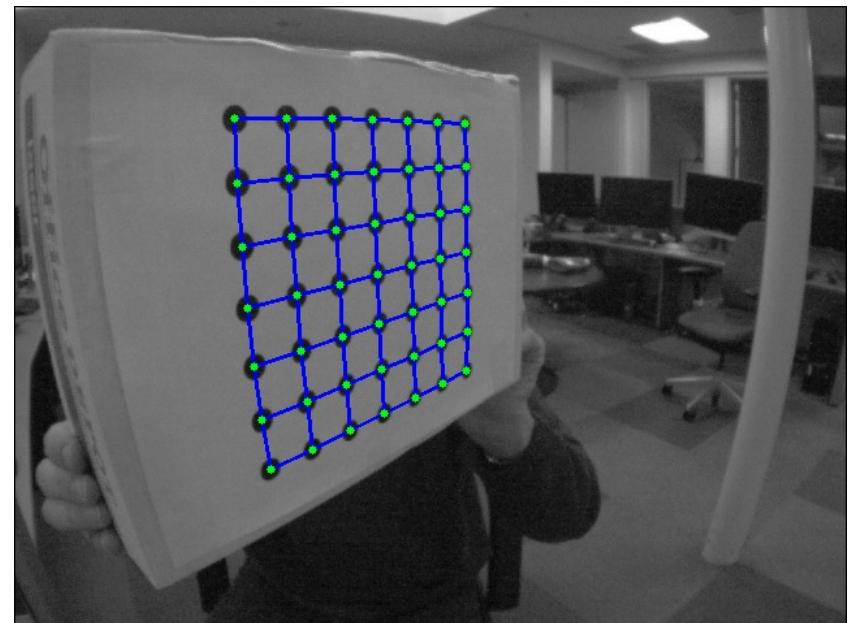
$$\left(J^T J + \lambda diag(J^T J) \right) \vec{\delta} = J^T \vec{\epsilon}$$

Practical considerations

- Cholesky decomposition
 - The left-hand side matrix can be forced to be positive-definite
- The matrix is usually sparse, so sparse Cholesky decomposition is possible

Camera calibration

- Estimate camera parameters given images of a known template

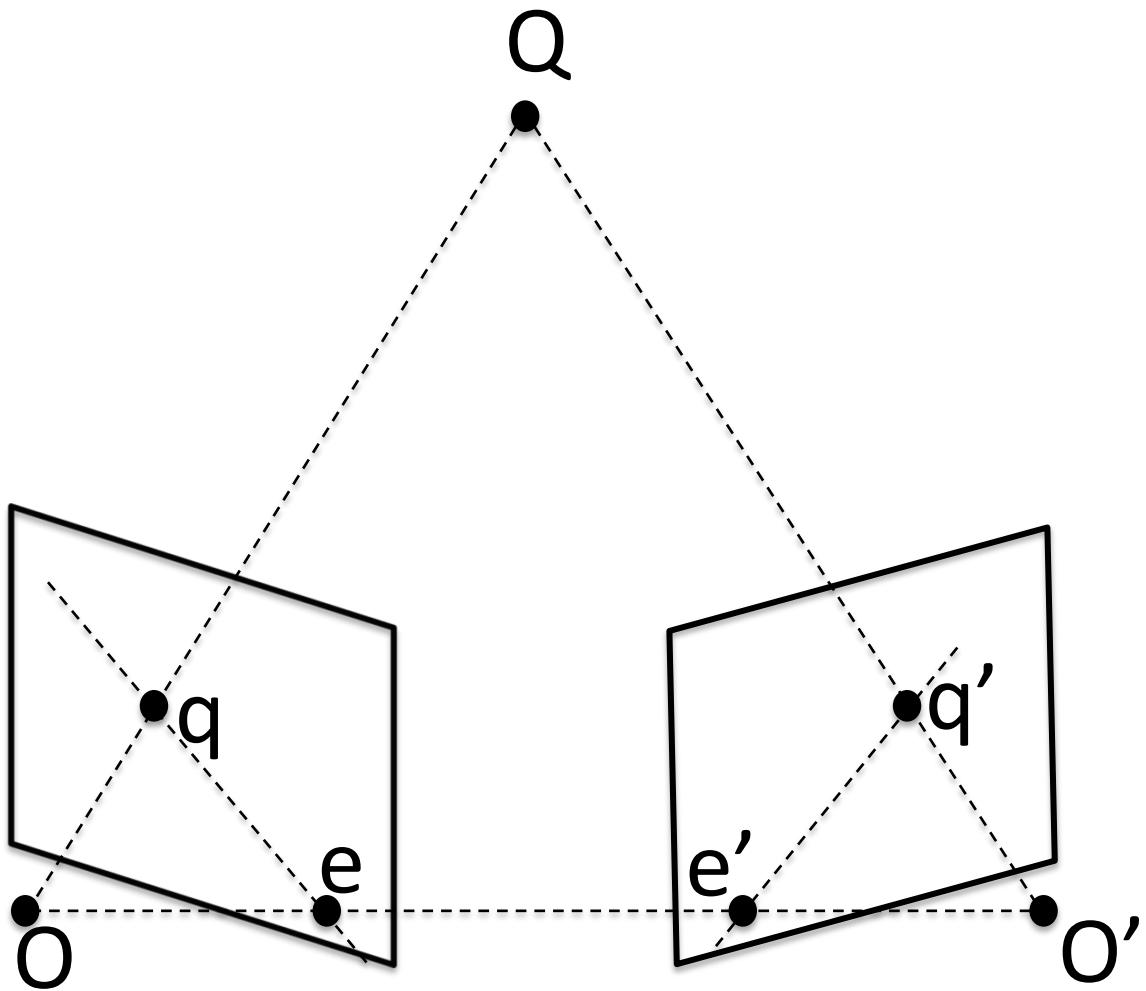


- QR разложение для обратимой матрицы
единственно, если диагональные элементы
 R выбраны положительными.

Вопросы

- Зависят ли f_x и f_y от разрешения изображения?
- Как решить задачу PnP, пользуясь SVD?
- Множество пар 2D-3D точек в задаче PnP содержит 80% ошибок. Сколько итераций RANSAC надо сделать?

Stereo: epipolar geometry



Fundamental matrix
constraint

$$(u', v', 1) \cdot F \cdot \begin{pmatrix} u \\ v \\ 1 \end{pmatrix} = 0$$

Эпиполярные линии

- Линия в плоскости изображения одной из двух камер, проходящая через проекцию трехмерной точки и проекцию центра другой камеры, называется эпиполярной

$$l' = Fq$$

$$l = q'^T F$$

- Проекция центра одной камеры на другую называется эпиполем

Свойства

- Если F – фундаментальная матрица для пары камер (P, P') , то F^T – фундаментальная матрица для пары камеры (P', P)
- Эпиполярные линии
- Эпиполь
- F имеет 7 степеней свободы

$$F = [e']_x P' P^+$$

- F – фундаментальная матрица
- P, P' – матрицы проекции первой и второй камер
- e' – эпиполь на изображении второй камеры

$$P P^+ = I$$

Доказательство

- Луч, проходящий через центр камеры O и точку на изображении q , содержит точку

$$Q = P^+ q$$

- Проекция этого луча на второе изображение содержит точки $P'P^+q$ и $e' = P'O$, тогда уравнение этой прямой --

$$q'^T l = 0, \quad l = e' \times P'P^+q = [e']_x P'P^+q$$

Гомография между эпиполярными линиями

$$l' = F[e]_x l$$

Связь фундаментальной матрицы с положением камер

$$F = [e']_x P' P^+ \quad P = K [I | 0] \quad P' = K' [R | T]$$



$$F = K'^{-T} [T]_x R K^{-1}$$

Essential matrix

$$Q' = RQ + T$$

$$E = [T]_x R \quad Q'^T E Q = 0$$



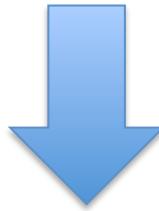
$$q'^T E q = 0$$

Фундаментальная матрица для параллельного переноса

Определение трехмерных координат

$$P = K[I|0]$$

$$P' = K[I|T]$$



$$Z = \frac{f_x T}{x' - x}$$

Для любой обратимой матрицы M и любых трехмерных векторов x и y справедливо равенство:

$$\det(M) M^{-T} (x \times y) = (Mx \times My)$$

Неопределенность в представлении фундаментальной матрицы

$$F = [a]_x A = [a']_x A'$$



$$a' = ka, A' = k^{-1}(A + av^T)$$

Ректификация

Перспективные преобразования H , действующее над изображением I , и H' , действующее над изображением I' , называются согласованными тогда и только тогда, когда они сохраняют соответствие эпиполярных линий.

Если I и I' – соответствующие друг другу эпиполярные линии из I и I' , то

$$H^{-T} l = H'^{-T} l'$$

Ректификация стереопары: первое преобразование

$$e = (f, 0, 1)^T \quad G = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1/f & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad Ge = (f, 0, 0)^T$$

$$\begin{pmatrix} \tilde{x} \\ \tilde{y} \\ 1 \end{pmatrix} = G \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ \frac{x}{1-x/f} \\ \frac{y}{1-y/f} \end{pmatrix} \quad \frac{\partial(\tilde{x}, \tilde{y})}{\partial(x, y)} \approx \begin{pmatrix} 1+2x/f & 0 \\ y/f & 1+x/f \end{pmatrix}$$

Ректификация стереопары: поиск согласованных гомографий

$$F = [e']_x M$$

$$H = (E + H'e'a^T)H'M$$

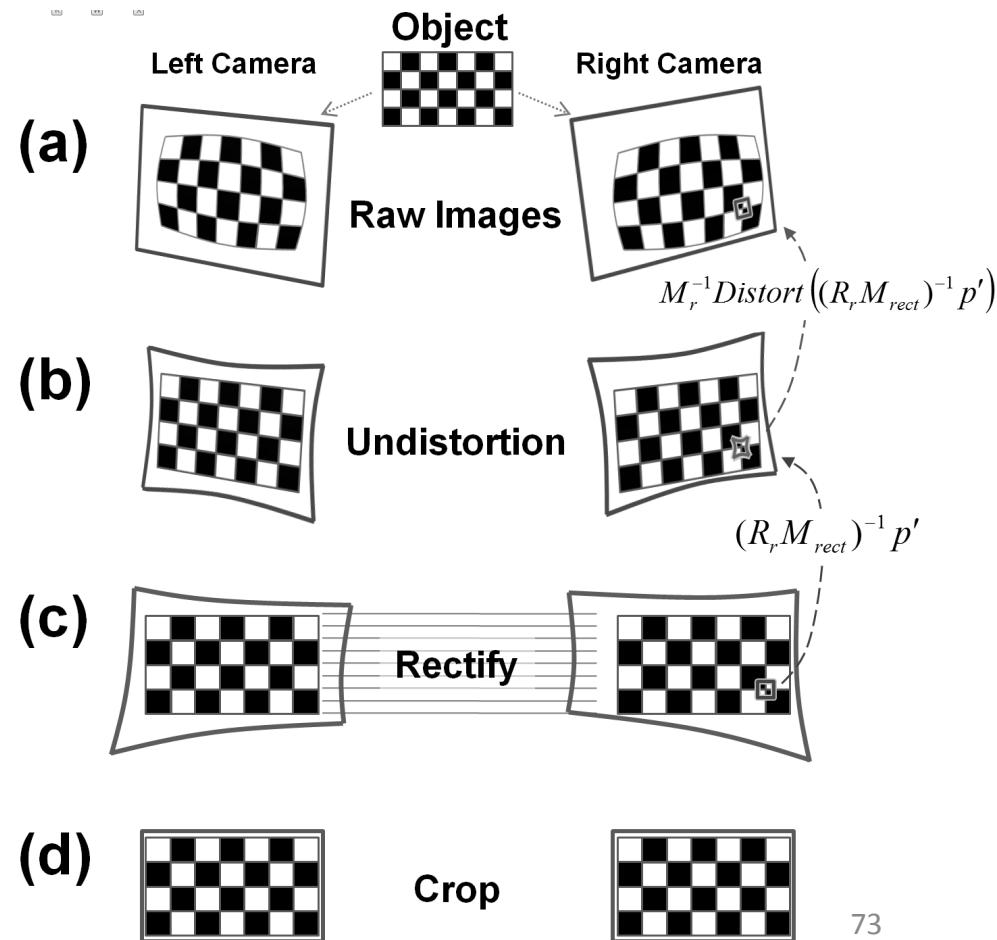
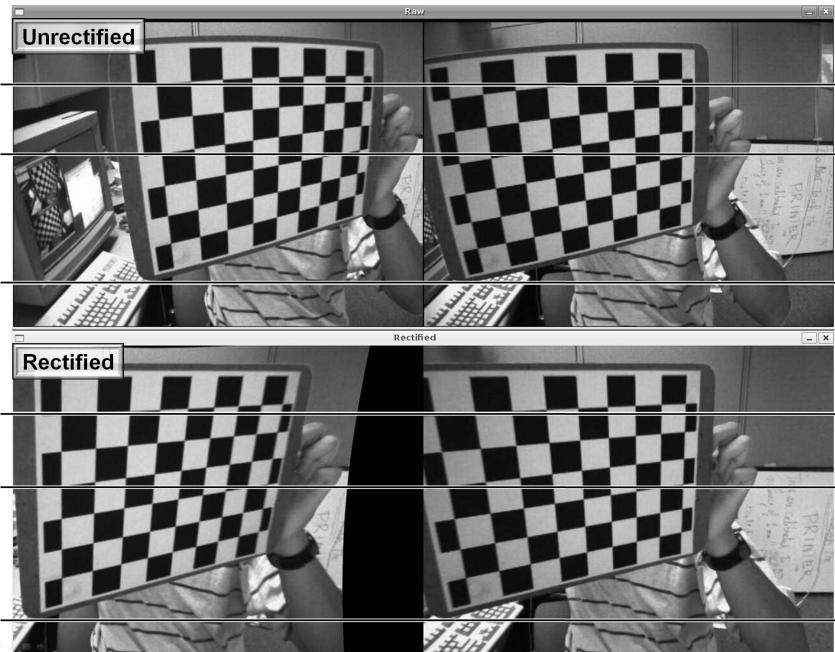
Если $H'e' = (1,0,0)^T$, то

$$H = H_A H'M$$

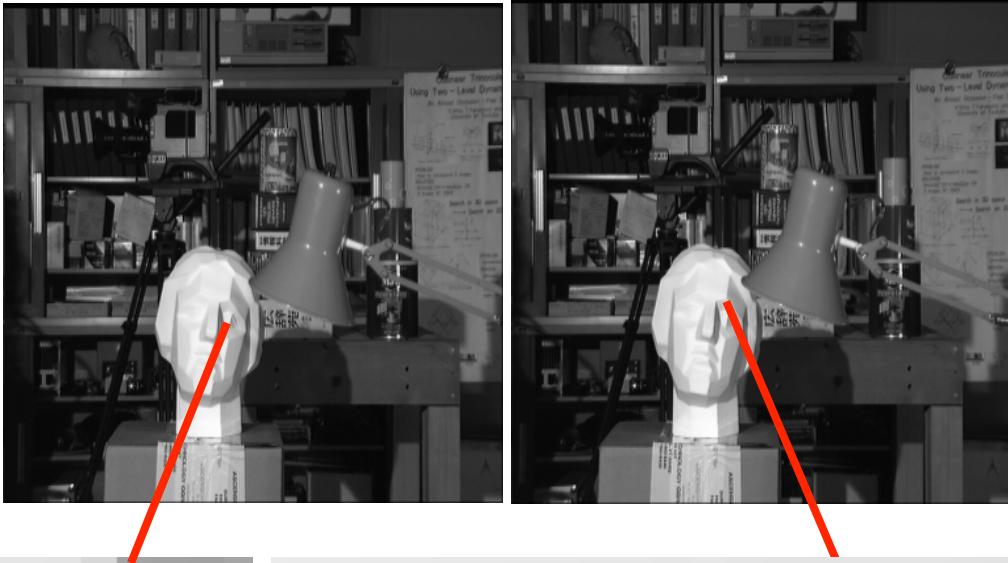
$$H_A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Stereo Rectification

- Algorithm steps are shown at right:
- Goal:
 - Each row of the image contains the same world points
 - “Epipolar constraint”

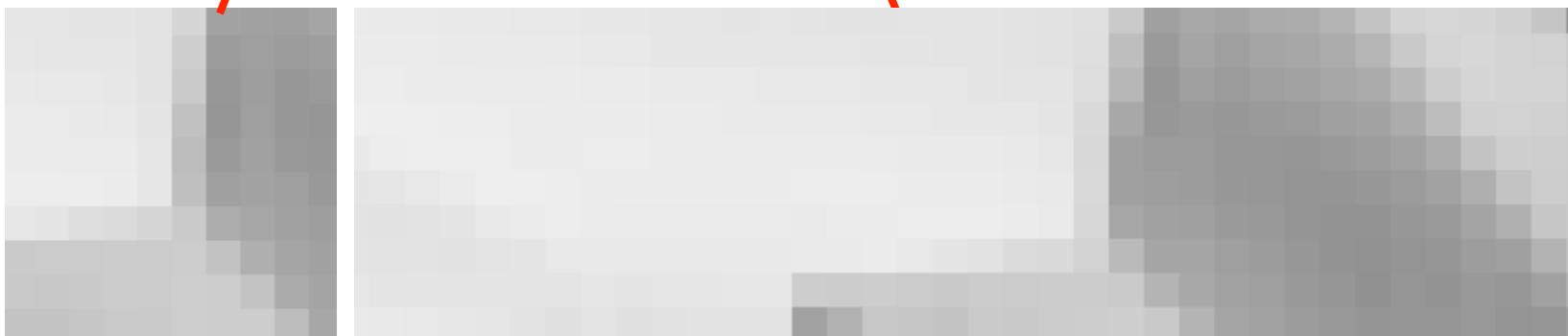


Stereo correspondence block matching

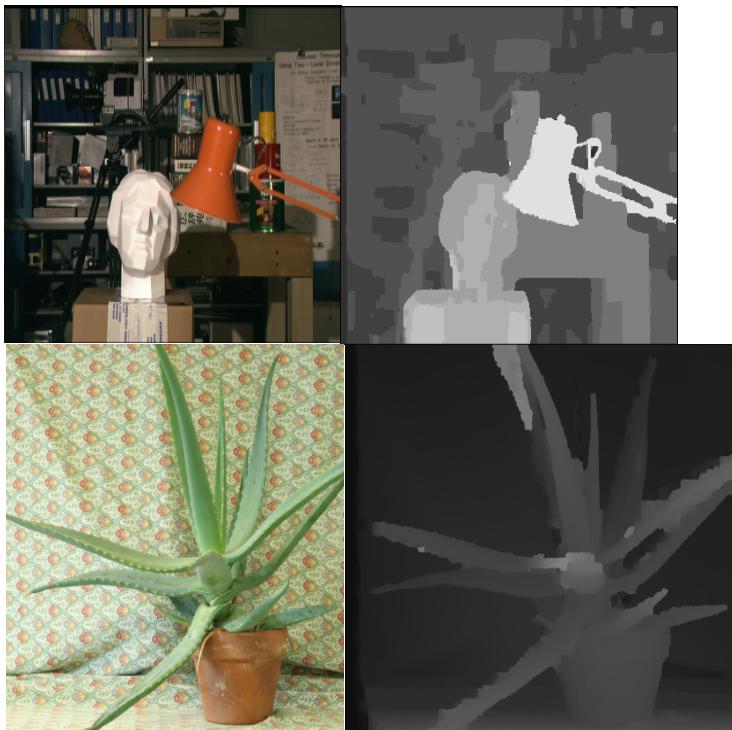
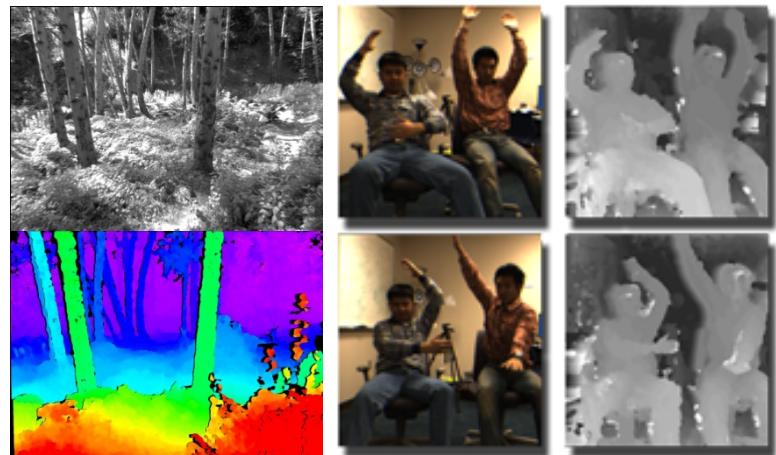


For each block in left image:

Search for the corresponding block in the right image such that SSD or SAD between pixel intensities is minimum

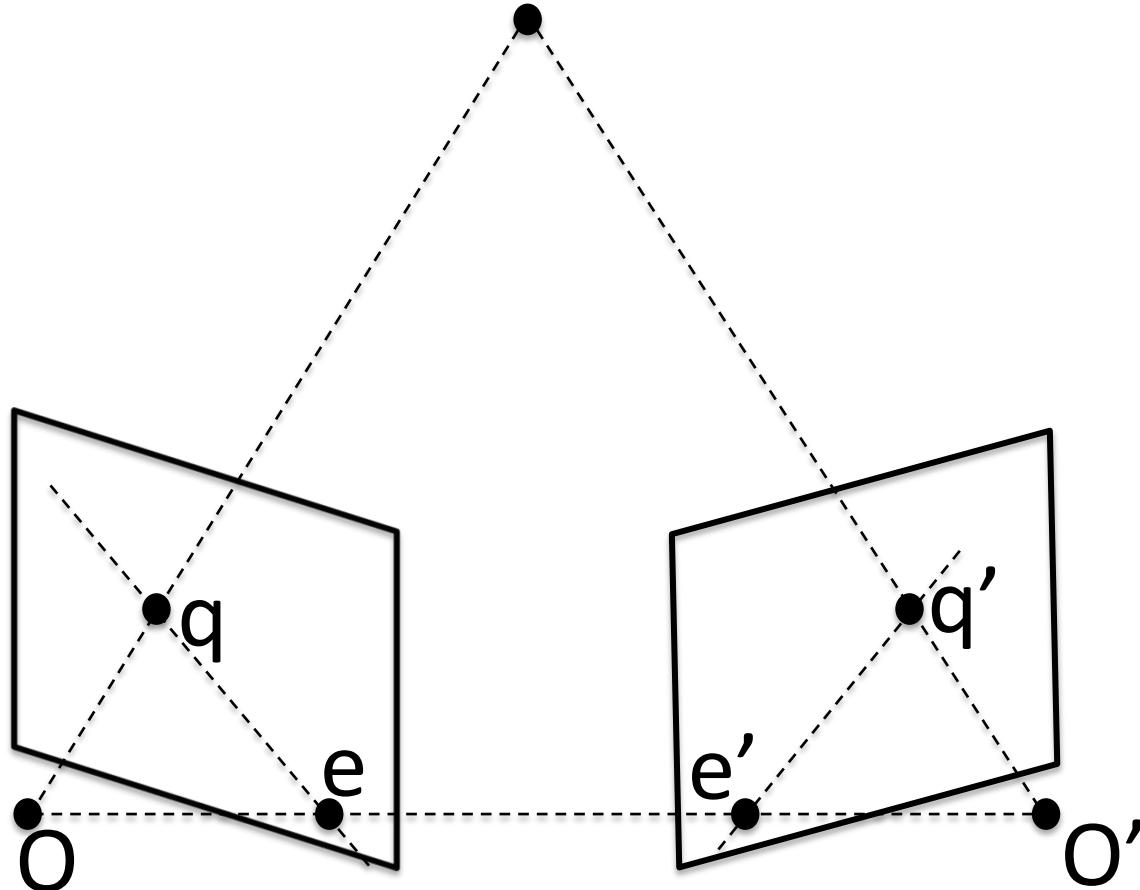


Stereo Matching



$$Z = f_x \frac{T}{D}$$

Structure from motion



Проективные преобразования в P^3

$$w \begin{pmatrix} X' \\ Y' \\ Z' \\ 1 \end{pmatrix} = H \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \\ 1 \end{pmatrix} = H\Lambda \quad \Lambda \in P^3 \quad \exists H^{-1}$$

Уравнение плоскости: $\pi^T \Lambda = 0$

Плоскость на бесконечности

$$\pi_\infty = (0, 0, 0, 1)^T$$

Проективное преобразование, которое переводит плоскость на бесконечности в плоскость на бесконечности, является афинным преобразованием. Верно и обратное.

Hierarchy of P^3 homography transformations

Group	Matrix	Distortion	Invariant properties
Projective 15 dof	$\begin{bmatrix} A & t \\ v^T & v \end{bmatrix}$		Intersection and tangency of surfaces in contact. Sign of Gaussian curvature.
Affine 12 dof	$\begin{bmatrix} A & t \\ 0^T & 1 \end{bmatrix}$		Parallelism of planes, volume ratios, centroids. The plane at infinity, π_∞ , (see section 3.5).
Similarity 7 dof	$\begin{bmatrix} sR & t \\ 0^T & 1 \end{bmatrix}$		The absolute conic, Ω_∞ , (see section 3.6).
Euclidean 6 dof	$\begin{bmatrix} R & t \\ 0^T & 1 \end{bmatrix}$		Volume.

Неоднозначность матриц проекции

- Если H – матрица 4×4 , представляющая проективное преобразование P^3 , то фундаментальные матрицы, соответствующие парам камер (P, P') и $(PH, P'H)$, будут одинаковы.

Канонический вид фундаментальной матрицы

- Любую пару матриц проекции камер можно привести к виду

$$P = [I \mid 0] \quad P' = [M \mid m]$$

- Фундаментальная матрица в этом случае будет иметь вид

$$F = [m]_x M$$

Неоднозначность фундаментальной матрицы

- Если F – фундаментальная матрица, соответствующая парам матриц камер (P_1, P'_1) и (P_2, P'_2) , то существует H такое, что
$$P_2 = P_1 H, P'_2 = P'_1 H$$
- Фундаментальная матрица определяет матрицы проекции с точностью до проективного преобразования P^3

Доказательство

- Пусть существует две пары матриц проекции камер (P_1, P'_1) и (P_2, P'_2) , которым соответствует одна фундаментальная матрица F
- Без ограничения общности положим

$$P_1 = P_2 = [I \mid 0], \quad P'_1 = [A \mid a], \quad P'_2 = [\tilde{A} \mid \tilde{a}]$$

- Тогда справедливо:

$$F = [a]_{\times} A = [\tilde{a}]_{\times} \tilde{A}$$

Лемма

- Пусть матрица F ранга 2 может быть представлена двумя разными способами:

$$F = [a]_x \quad A = [\tilde{a}]_x \quad \tilde{A}$$

- Тогда существует такое число k и вектор v , что

$$\tilde{a} = ka, \quad \tilde{A} = k^{-1} \left(A + av^T \right)$$

$$P'_1 = [A \mid a], P'_2 = [k^{-1}(A + av^T) \mid ka]$$

- Рассмотрим проективное преобразование

$$H = \begin{bmatrix} k^{-1}I & 0 \\ k^{-1}v^T & k \end{bmatrix}$$

- Легко убедиться, что

$$P_1 H = k^{-1} P_2, P'_1 H = P'_2$$

Projective reconstruction theorem

- Пусть (q_i, q'_i) – пары соответствующих точек на двух изображениях, и существует единственная F такая, что $q'_i F q_i = 0$ для всех i . Пусть $(P_1, P'_1, \{Q_{1i}\})$ и $(P_2, P'_2, \{Q_{2i}\})$ – две реконструкции, соответствующие (q_i, q'_i) . Тогда существует несингулярная матрица H такая, что $P_2 = P_1 H^{-1}$, $P'_2 = P'_1 H^{-1}$ и $Q_{2i} = H Q_{1i}$, кроме точек, для которых верно $F q_i = q'^T_i F = 0$

Доказательство

- Из предыдущего результата следует, что

$$\exists H \mid P_2 = P_1 H^{-1}, P'_2 = P'_1 H^{-1}$$

- Тогда:

$$P_2 HQ_{1i} = P_1 Q_{1i} = q_i = P_2 Q_{2i}, P'_2 HQ_{1i} = P'_2 Q_{2i}$$

- Это означает, что точки HQ_{1i} и Q_{2i} либо равны, либо проектируются в эпиполи, чтд.

Преобразование плоскости на бесконечности

- Теорема: проективное преобразование $H: P^3 \rightarrow P^3$ отображает плоскость на бесконечности в плоскость на бесконечности тогда и только тогда, когда H – афинное.

Афинная реконструкция

- Пример преобразования, преобразующего плоскость π в плоскость на бесконечности (если последняя компонента вектора π не равна 0):

$$H = \begin{bmatrix} E & | & 0 \\ \hline \pi^T & & \end{bmatrix}$$

Трехмерная реконструкция

Проективная реконструкция
(находим фундаментальную матрицу)



Афинная реконструкция
(находим плоскость на бесконечности)



Метрическая реконструкция
(взаимное расположение камер)

Нахождение фундаментальной матрицы

- По 8 соответствиям
 - Опциональная нормализация для устойчивости
 - Решение системы уравнений $q_i' F q_i = 0$
 - Замена F на ближайшую сингулярную
- По 7 соответствиям
 - Общее решение имеет вид $F = aF_1 + (1-a)F_2$
 - Используем условие $\det(F) = 0$ и получаем уравнение 3-й степени относительно F

Нахождение матриц камеры при известных внутренних параметрах

$$F = \begin{bmatrix} t \\ \end{bmatrix}_x R$$

- Для заданной F и матрицы проекции первой камеры $P_1 = [I, 0]$, существует ровно 4 решения для матрицы проекции второй камеры P_2 .
- Только одно из них соответствует положительным Z .

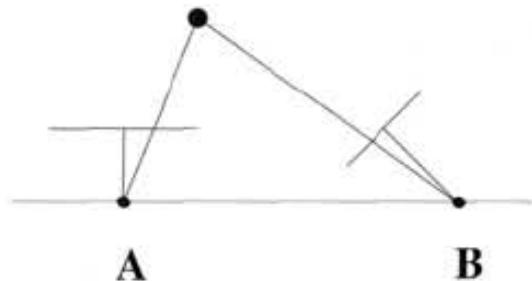
- Для матрицы $F=U\text{diag}(1,1,0)V^T$ и матрицы проекции первой камеры $P=[E|0]$, существуют 4 возможных значения матрицы проекции второй камеры:

$$P' = [UWV^T|+u_3] \text{ или } P' = [UWV^T| -u_3] \text{ или}$$

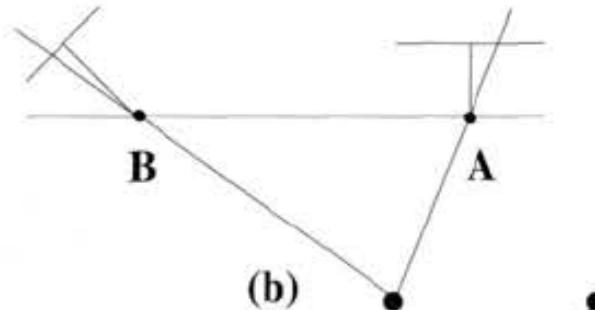
$$P' = [UW^TV^T|+u_3] \text{ или } P' = [UW^TV^T| -u_3]$$

$$W = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

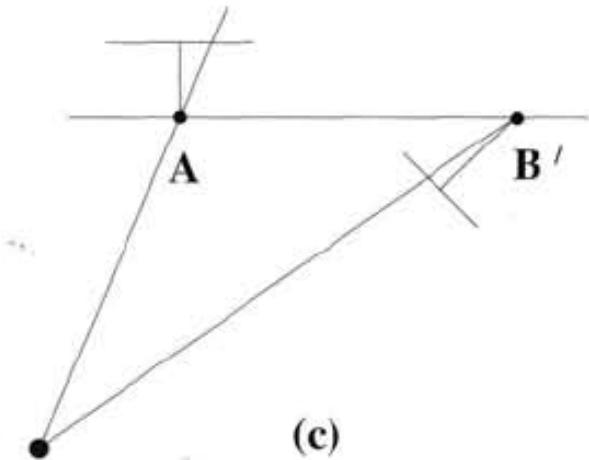
4 решения для матрицы проекции второй камеры



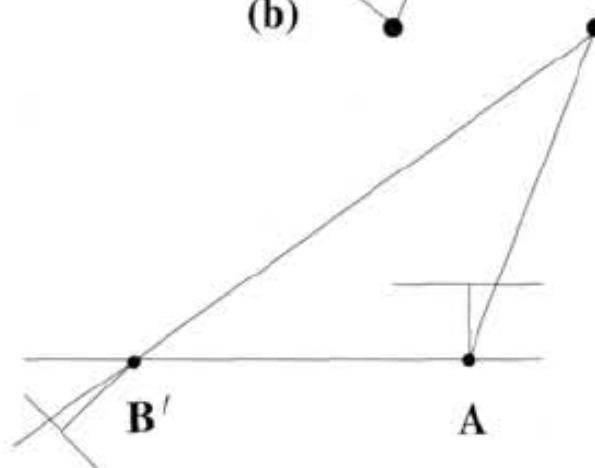
(a)



(b)



(c)



(d)

Алгоритм Faugeras-Lustman

$$Q_2 = RQ_1 + t \quad nQ_1 = d$$



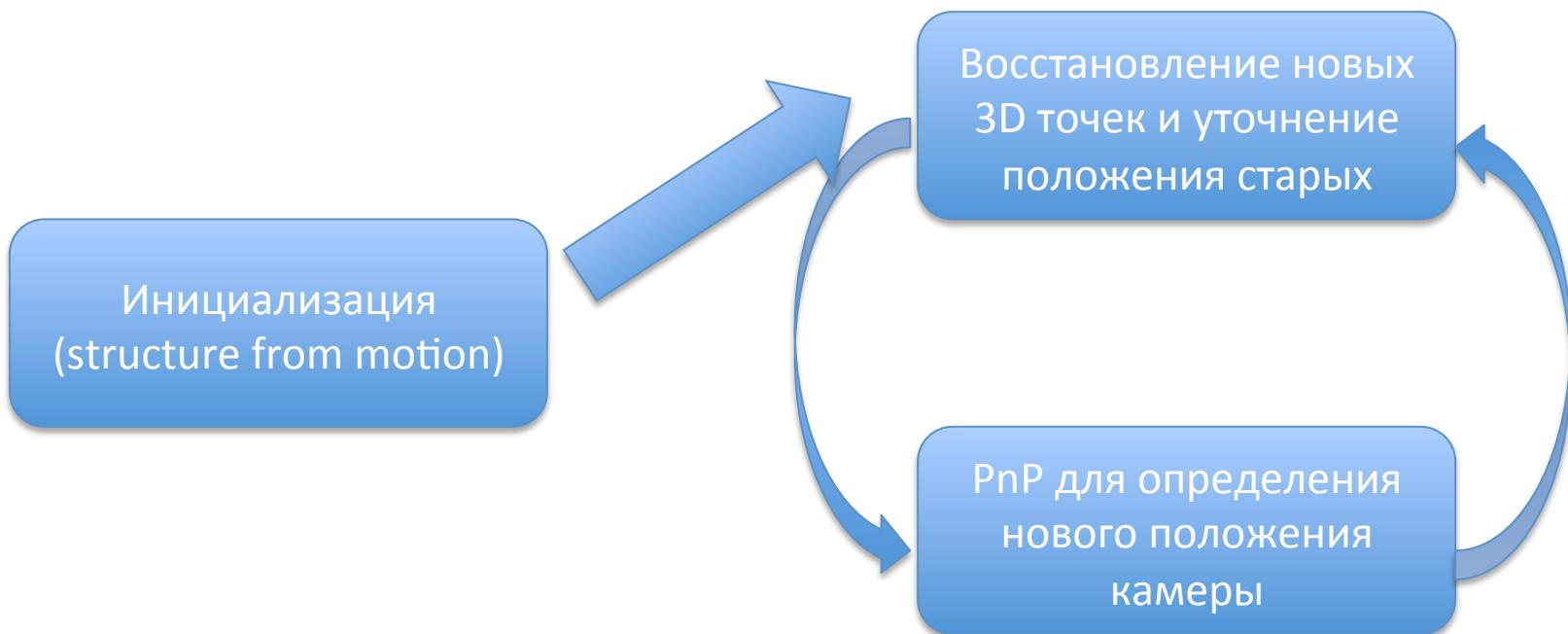
$$q_2 = Hq_1 \quad H = dR + tn^T$$

- В общем случае это уравнение имеет 8 различных решений. Решений 4 ттт, когда Н имеет сингулярное значение кратности 2. Решений несчётное множество ттт, когда Н имеет сингулярное значение кратности 3.

<http://hal.inria.fr/docs/00/07/56/98/PDF/RR-0856.pdf>

Восстановление структуры

Структура алгоритма визуальной одометрии



Вопросы

- В чём отличие fundamental и essential матриц?
- Сколько точек надо, чтобы однозначно восстановить фундаментальную матрицу?
- В каких случаях между изображениями двух камер существует гомография?

OpenCV functions: single view

- SVD
- projectPoints
- undistort
- solvePnP
- calibrateCamera
- findChessboardCorners/findCirclesGrid

OpenCV functions: two views

- findHomography
- findFundamentalMat
- stereoCalibrate
- stereoRectify/reprojectImageTo3D/
initUndistortRectifyMap