Lista de Exercícios 2

Gustavo Higuchi

August 11, 2016

Contents

Exercício 1

(a)

Teorema 1. *Para qualquer $n \in \mathbb{Z}^+$, a seguinte equação é verdadeira.*

$$1^3 + 2^3 + .. + n^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4} \tag{1}$$

Proof. Para n = 1, isso é verdade?

$$\begin{aligned} 1^3 &= \frac{1^2(1+1)^2}{4} \\ 1 &= \frac{1(2)^2}{4} \\ 1 &= \frac{4}{4} = 1 \end{aligned} \tag{2}$$

Sim! É verdade. E para n = 2?

$$\begin{aligned} 1^3 + 2^3 &= \frac{2^2(2+1)^2}{4} \\ 1 + 8 &= \frac{2^2(2+1)^2}{4} \\ 9 &= \frac{4(9)}{4} = 9 \end{aligned} \tag{3}$$

Vou supor que para um n = k dá certo também, então para $n = k + 1$ dá certo?

$$\begin{aligned} 1^3 + 2^3 + .. + k^3 + (k+1)^3 &= \frac{(k+1)^2((k+1)+1)^2}{4} \\ \frac{k^2(k+1)^2}{4} + (k+1)^3 &= \frac{(k+1)^2(k+2)^2}{4} \\ \frac{k^2(k+1)^2 + 4(k+1)^3}{4} &= \frac{(k+1)^2(k+2)^2}{4} \\ \frac{(k+1)^2(k^2 + 4(k+1))}{4} &= \frac{(k+1)^2(k+2)^2}{4} \\ \frac{(k+1)^2(k^2 + 4k + 4)}{4} &= \frac{(k+1)^2(k+2)^2}{4} \\ \frac{(k+1)^2(k+2)^2}{4} &= \frac{(k+1)^2(k+2)^2}{4} \end{aligned} \tag{4}$$

Dá! Sucesso! Provado por indução! $\square$

(b)

Teorema 1. *Para qualquer $n \in \mathbb{N}$ e todo $c \in \mathbb{C} - 1, 0$, a seguinte equação é verdadeira.*

$$\sum_{i=0}^{n} c^i = \frac{c^{n+1} - 1}{c - 1} \tag{5}$$

Proof. Para $n = 1$ e $c = 2$, temos

$$\begin{aligned}\sum_{i=0}^{1} c^i = c^0 + c^1 &= \frac{c^{1+1} - 1}{c - 1} \\ 1 + c^1 &= \frac{c^2 - 1}{c - 1} \\ 1 + 2 &= \frac{2^2 - 1}{2 - 1} \\ 3 &= 3\end{aligned} \tag{6}$$

É verdade, daí para $n = 2$ e $c = 3$, temos

$$\begin{aligned}\sum_{i=0}^{2} c^i = c^0 + c^1 + c^2 &= \frac{c^{2+1} - 1}{c - 1} \\ 1 + 3 + 3^2 &= \frac{3^3 - 1}{3 - 1} \\ 13 &= \frac{26}{2} = 13\end{aligned} \tag{7}$$

Então, vamos supor que para $n = k$ e $c = l$ isso também vale, assim temos

$$\begin{aligned}\sum_{i=0}^{k} c^i = c^0 + c^1 + .. + c^k &= \frac{c^{k+1} - 1}{c - 1} \\ \frac{(c^0 + c^k)k}{2} &= \frac{c^{k+1} - 1}{c - 1} \\ \frac{(c^k + 1)}{2} &= \frac{c^{k+1} - 1}{c - 1} \\ c^k + 1 &= c^{k+1} - 1\end{aligned} \tag{8}$$

□