Lista de Exercícios 4

Gustavo Higuchi

August 30, 2016

Contents

Exercício 1

Para mostrar que $\log_b n \leq c * \log_a n$, basta

$$\begin{aligned} \log_b n = \frac{\log_a n}{\log_a b} &\leq c * \log_a n \\ \frac{1}{\log_a b} &\leq c \end{aligned} \tag{1}$$

Então, para um $c \geq \dfrac{1}{\log_a b}$ e um $n_0 \geq 1$

$$\log_b n = O(\log_a n) \tag{2}$$

Exercício 2

Pela definição, $\exists c_1, n_1$ tal que $\bar{f}(n) \leq c_1 f(n)$ para $n \geq n_1$
E pela definição, $\exists c_2, n_2$ tal que $\bar{g}(n) \leq c_2 g(n)$ para $n \geq n_2$
Assim

$$\begin{aligned} \bar{f}(n)\bar{g}(n) &\leq c_1 f(n) c_2 g(n) \\ &\leq c_3 f(n) g(n), \text{ onde } c_3 = c_1 * c_2 \end{aligned} \tag{3}$$

para $n \geq max\{n_1, n_2\}$

Exercício 3

Se dividir a função $f(x)$ em 3 funções, teremos

$$\begin{aligned} g(x) &= x + 1 \\ h(x) &= \log(x^2 + 1) \\ i(x) &= 3x^2 \\ f(x) &= g(x)h(x) + i(x) \end{aligned} \tag{4}$$

Então,

$$\begin{aligned} g(x) &= O(x + 1) = O(x) \\ h(x) &= O(\log(x^2 + 1)) = O(\log x^2) = O(\log x) \\ i(x) &= O(3x^2) = O(x^2) \end{aligned} \tag{5}$$

$$\begin{aligned} f(x) &= O(x) * O(\log x) + O(x^2) \\ &= O(x \log x) + O(x^2) \\ &= O(x^2) \end{aligned} \tag{6}$$

Exercício 4

Sim para o primeiro, pois existe uma constante c tal que

$$2^{n+1} \leq c * 2^n \tag{7}$$

para um $n_0 \geq 1$ e $c = 2$

Porém, para o segundo, temos

$$2^{2n} = c * 2^n \tag{8}$$

para um $n_0 \geq 0$ e um $c = 2^{10000}$, quando $n = 10001$ teremos

$$\begin{aligned} 2^{2*10001} &\leq 2^{10000} * 2^{10001} \\ 2^{20002} &\leq 2^{20001} \end{aligned} \tag{9}$$

o que é falso, portanto não há uma constante que multiplica 2^n tal que para todo $n > n_0$, 2^{2n} seja menor que $c * 2^n$

Exercício 5

(a)

Proof.
$2^n = 2 * 2 * 2 * 2 * .. * 2$, enquanto
$n! = n * (n-1) * (n-2) * .. * 4 * 3 * 2 * 1$

Então, para um $n_0 = 1$ e um $c = 2$, $2^n = O(n!)$ □

(b)

Proof.
Como $\log n!$ pode ser reescrito da seguinte forma:

$$\log n! = \sum_{i=0}^{n} \log(n-i) \tag{10}$$

E assim teremos o seguinte

$$\begin{aligned} \sum_{i=0}^{n} log(n-i) &< \sum_{i=0}^{n} \log n \\ &= n * \log n = O(n \log n) \end{aligned} \tag{11}$$

□