Lista de Exercícios 2

Gustavo Higuchi

August 16, 2016

Contents

Exercício 1

(a)

Teorema 1. *Para qualquer $n \in \mathbb{Z}^+$, a seguinte equação é verdadeira.*

$$1^3 + 2^3 + .. + n^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4} \tag{1}$$

Proof. Para n = 1, isso é verdade?

$$\begin{aligned} 1^3 &= \frac{1^2(1+1)^2}{4} \\ 1 &= \frac{1(2)^2}{4} \\ 1 &= \frac{4}{4} = 1 \end{aligned} \tag{2}$$

Sim! É verdade. E para n = 2?

$$\begin{aligned} 1^3 + 2^3 &= \frac{2^2(2+1)^2}{4} \\ 1 + 8 &= \frac{2^2(2+1)^2}{4} \\ 9 &= \frac{4(9)}{4} = 9 \end{aligned} \tag{3}$$

Vou supor que para um n = k dá certo também, então para $n = k+1$ dá certo?

$$\begin{aligned} 1^3 + 2^3 + .. + k^3 + (k+1)^3 &= \frac{(k+1)^2((k+1)+1)^2}{4} \\ \frac{k^2(k+1)^2}{4} + (k+1)^3 &= \frac{(k+1)^2(k+2)^2}{4} \\ \frac{k^2(k+1)^2 + 4(k+1)^3}{4} &= \frac{(k+1)^2(k+2)^2}{4} \\ \frac{(k+1)^2(k^2+4(k+1))}{4} &= \frac{(k+1)^2(k+2)^2}{4} \\ \frac{(k+1)^2(k^2+4k+4)}{4} &= \frac{(k+1)^2(k+2)^2}{4} \\ \frac{(k+1)^2(k+2)^2}{4} &= \frac{(k+1)^2(k+2)^2}{4} \end{aligned} \tag{4}$$

Dá! Sucesso! Provado por indução! □

(b)

Teorema 1. *Para qualquer $n \in \mathbb{N}$ e todo $c \in \mathbb{C} - 1, 0$, a seguinte equação é verdadeira.*

$$\sum_{i=0}^{n} c^i = \frac{c^{n+1} - 1}{c - 1} \tag{5}$$

Proof. Para $n = 0$, temos

$$\begin{aligned} \sum_{i=0}^{0} c^i &= \frac{c^{0+1} - 1}{c - 1} \\ c + 1 &= \frac{c^2 - 1}{c - 1} \\ (c + 1)(c - 1) &= c^2 - 1 \\ c^2 - c + c - 1 &= \\ c^2 - 1 &= c^2 - 1 \end{aligned} \tag{6}$$

Para $n = 1$, temos

$$\begin{aligned} \sum_{i=0}^{1} c^i &= \frac{c^{1+1} - 1}{c - 1} \\ c^2 + c + 1 &= \frac{c^3 - 1}{c - 1} \\ (c^2 + c + 1)(c - 1) &= c^2 - 1 \\ c^3 - c^2 + c^2 - c + c - 1 &= \\ c^2 - 1 &= c^2 - 1 \end{aligned} \tag{7}$$

É verdade, então vamos supor que o teorema é válido para $n = k$, assim

$$\sum_{i=0}^{k} c^i = \frac{c^{k+1} - 1}{c - 1} \tag{8}$$

Então, vamos verificar se para $n = k + 1$ isso também vale, temos

$$\begin{aligned} \sum_{i=0}^{k+1} c^i &= \frac{c^{k+2} - 1}{c - 1} \\ \sum_{i=0}^{k} c^i c^{k+1} &= \frac{c^{k+2} - 1}{c - 1} \\ \frac{c^{k+1} - 1}{c - 1} + (c^{k+1})(c - 1) &= \frac{c^{k+2} - 1}{c - 1} \\ \frac{c^{k+1} - 1 + c^{k+2} - c^{k+1}}{c - 1} &= \frac{c^{k+2} - 1}{c - 1} \\ \frac{c^{k+2} - 1}{c - 1} &= \frac{c^{k+2} - 1}{c - 1} \end{aligned} \tag{9}$$

É verdade também □

(c)

Teorema 1. *$n^3 + 2n$ é divisível por 3 para todo $n \in \mathbb{N}^+$*

Proof. Para $n = 0$, temos

$$\frac{0^3 + 2 * 0}{3} = 0 \tag{10}$$

Para $n = 1$, temos

$$\frac{1^3 + 2 * 1}{3} = \frac{3}{3} = 1 \tag{11}$$

Para $n = 2$, temos

$$\frac{2^3 + 2 * 2}{3} = \frac{8 + 4}{3} = 4 \tag{12}$$

Para $n = 3$, temos

$$\frac{3^3 + 2 * 3}{3} = \frac{9 + 6}{3} = 5 \tag{13}$$

Para $n = 4$, temos

$$\frac{4^3 + 2 * 4}{3} = \frac{64 + 8}{3} = 24 \tag{14}$$

Então vamos supor que para um $n = k$ isso também dá certo.

$$\frac{k^3 + 2k}{3} =?? \tag{15}$$

□

(d)

Teorema 1. *$9^n - 1$ é divisível por 8 para qualquer $n \in \mathbb{N}^+$*

Proof. Para $n = 0$, temos

$$\frac{9^0 - 1}{8} = 0 \tag{16}$$

Para $n = 1$, temos

$$\frac{9^1 - 1}{8} = \frac{8}{8} = 1 \tag{17}$$

Para $n = 2$, temos

$$\frac{9^2 - 1}{8} = \frac{80}{8} = 10 \tag{18}$$

Então vamos supor que para um $n = k$ isso também dá certo.

$$\frac{9^k - 1}{8} =?? \tag{19}$$

□

(e)

Teorema 1. *$n^2 - 1$ é divisível por 8 para qualquer $n \in \mathbb{N}$ ímpar*

Proof. Para $n = 0$, temos

$$\frac{0^2 - 1}{8} = 0 \tag{20}$$

Para $n = 1$, temos

$$\frac{1^2 - 1}{8} = 0 \tag{21}$$

Para $n = 3$, temos

$$\frac{3^2 - 1}{8} = \frac{8}{8} = 1 \tag{22}$$

Então vamos supor que para um $n = k$ isso também dá certo.

$$\frac{k^2 - 1}{8} =?? \tag{23}$$

□

(f)

Teorema 1. $\sum_{i=1}^{n} i * (i + 1) = \frac{n(n + 1)(n + 2)}{3}$

Proof. Para $n = 1$, temos

$$\begin{aligned} 1 * 2 &= \frac{1 * (1 + 1) * (1 + 2)}{3} \\ 2 &= \frac{6}{3} = 2 \end{aligned} \tag{24}$$

Para $n = 2$ temos

$$\begin{aligned} (1 * 2) + (2 * 3) &= \frac{2 * (2 + 1)(2 + 2)}{3} \\ 8 &= \frac{24}{3} = 8 \end{aligned} \tag{25}$$

Assumindo que seja verdade para $n = k$,

$$\sum_{i=1}^{k} i * (i + 1) = \frac{k(k + 1)(k + 2)}{3} \tag{26}$$

vamos provar para $n = k + 1$

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{k+1} i*(i+1) &= \frac{(k+1)(k+2)(k+3)}{3} \\ \sum_{i=1}^{k} i*(i+1) + (k+1)(k+2) &= \frac{(k+1)(k+2)(k+3)}{3} \\ \frac{k(k+1)(k+2)}{3} + (k^2+3k+2) &= \\ \frac{k(k+1)(k+2) + 3*(k^2+3k+2)}{3} &= \\ \frac{k^3+3k^2+2k+3k^2+9k+6}{3} &= \\ \frac{k^3+6k^2+11k+6}{3} &= \\ \frac{(k+1)(k+2)(k+3)}{3} &= \end{aligned} \tag{27}$$

□

(g)

Teorema 1. $2^{n+2} + 3^{2n+1}$ *é divisível por 7 para todo* $n \in \mathbb{N}^+$

Proof. Para $n = 0$

$$\frac{2^{0+2} + 3^{0+1}}{7} = \frac{4+3}{7} = 1 \tag{28}$$

Para $n = 1$ temos

$$\frac{2^{1+2} + 3^{2+1}}{7} = \frac{8+27}{7} = 5 \tag{29}$$

Para $n = 2$ temos

$$\frac{2^{2+2} + 3^{4+1}}{7} = \frac{16+243}{7} = 37 \tag{30}$$

Vamos supor que para $n = k$ também é verdade

$$\frac{2^{n+2} + 3^{2n+1}}{7} = ?? \tag{31}$$

□

Exercício 2

Olha só