

Lista de Exercícios 2

Gustavo Higuchi

August 11, 2016

Contents

Exercício 1	2
-------------	---

Exercício 1

(a)

Teorema 1. Para qualquer $n \in \mathbb{Z}^+$, a seguinte equação é verdadeira.

$$1^3 + 2^3 + \dots + n^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4} \quad (1)$$

Proof. Para $n = 1$, isso é verdade?

$$\begin{aligned} 1^3 &= \frac{1^2(1+1)^2}{4} \\ 1 &= \frac{1(2)^2}{4} \\ 1 &= \frac{4}{4} = 1 \end{aligned} \quad (2)$$

Sim! É verdade. E para $n = 2$?

$$\begin{aligned} 1^3 + 2^3 &= \frac{2^2(2+1)^2}{4} \\ 1 + 8 &= \frac{2^2(2+1)^2}{4} \\ 9 &= \frac{4(9)}{4} = 9 \end{aligned} \quad (3)$$

Vou supor que para um $n = k$ dá certo também, então para $n = k + 1$ dá certo?

$$\begin{aligned} 1^3 + 2^3 + \dots + k^3 + (k+1)^3 &= \frac{(k+1)^2((k+1)+1)^2}{4} \\ \frac{k^2(k+1)^2}{4} + (k+1)^3 &= \frac{(k+1)^2(k+2)^2}{4} \\ \frac{k^2(k+1)^2 + 4(k+1)^3}{4} &= \frac{(k+1)^2(k+2)^2}{4} \\ \frac{(k+1)^2(k^2 + 4(k+1))}{4} &= \frac{(k+1)^2(k+2)^2}{4} \\ \frac{(k+1)^2(k^2 + 4k + 4)}{4} &= \frac{(k+1)^2(k+2)^2}{4} \\ \frac{(k+1)^2(k+2)^2}{4} &= \frac{(k+1)^2(k+2)^2}{4} \end{aligned} \quad (4)$$

Dá! Então, se para $n = k$ dá certo, para $n = k + 1$ também dá. Sucesso! Provado por indução!

□