# Lista de Exercícios 12

Gustavo Higuchi

September 20, 2016

## Contents

**Exercício 1** 2

**Exercício 2** 2

**Exercício 3** 3

**Exercício 4** 4

## Exercício 1

**Teorema 1.**

$$T(n) = \begin{cases} 1, & se\ n = 1 \\ T(\lfloor n/2 \rfloor) + 1, & se\ n > 1 \end{cases} \tag{1}$$

*T(n) é* $O(\log n)$

*Proof.*
**Hipótese** : $T(k) \leq c \log k$, para todo $n_0 \leq k < n$, onde $c$ e $n_0$ são constantes
**Passo** : quero provar que para $T(n) \leq c \log n$.
Assim temos

$$\begin{aligned} T(n) &= T(\lceil n/2 \rceil) + 1 \\ &\leq c \log \lceil n/2 \rceil + 1 \\ &= c(\log n - 1) + 1 \\ &= c \log n - c + 1 \\ T(n) &\leq c \log n - c + 1 \\ &\leq c \log n, \text{ se } c \leq 1 \end{aligned} \tag{2}$$

A afirmação é verdadeira para um $c = 1$ e $n_0 \geq 1$ □

## Exercício 2

**Teorema 1.**

$$T(n) = \begin{cases} 8, & se\ n\ =\ 1 \\ 2T(\lfloor n/2 \rfloor) + n, & se\ n\ ¿\ 1 \end{cases} \tag{3}$$

*T(n) é* $\Theta(n \log n)$.

*Proof.*
**Hipótese** : $T(k) \leq ck \log k$, para todo $n_0 \leq k < n$, onde $c$ e $n_0$ são constantes
**Passo** : Quero provar que para $T(n) \leq cn \log n$.
Assim temos

$$\begin{aligned} T(n) &= 2T(\lfloor n/2 \rfloor) + n \\ &\leq 2c\lfloor n/2 \rfloor \log \lfloor n/2 \rfloor + n \\ &= 2c\lfloor n/2 \rfloor (\log n - 1) + n \\ &= 2c\lfloor n/2 \rfloor \log n - 2c\lfloor n/2 \rfloor + n \\ &\leq cn \log n - cn + n \\ T(n) &\leq cn \log n \end{aligned} \tag{4}$$

T(n) é $O(n \log n)$ para um $c = 9$ e $n_0 \geq 2$

$$\begin{aligned} T(n) &= 2T(\lfloor n/2 \rfloor) + n \\ &\geq 2c\lfloor n/2 \rfloor \log\lfloor n/2 \rfloor + n \\ &= 2c\lfloor n/2 \rfloor(\log n - 1) + n \\ &= 2c\lfloor n/2 \rfloor \log n - 2c\lfloor n/2 \rfloor + n \\ &\geq cn \log n - cn + n \\ T(n) &\geq cn \log n \end{aligned} \tag{5}$$

T(n) é $\Omega(n \log n)$ para um $c = 1$ e um $n_0 \geq 2$
Portanto, T(n) é $\Theta(n \log n)$ □

## Exercício 3

**Teorema 1.**

$$T(n) = \begin{cases} 1, & \textit{se n = 1} \\ 2T(\lfloor n/2 \rfloor + 17) + n, & \textit{se n ¿ 1} \end{cases} \tag{6}$$

*T(n) é* $\Theta(n \log n)$.

*Proof.*
**Hipótese** : $T(k) \leq ck \log k$, para todo $n_0 \leq k < n$, onde $c$ e $n_0$ são constantes
**Passo** : Quero provar que para $T(n) \leq cn \log n$.
Assim temos

$$\begin{aligned} T(n) &= 2T(\lfloor n/2 \rfloor + 17) + n \\ &\leq 2c(\lfloor n/2 \rfloor + 17) \log(\lfloor n/2 \rfloor + 17) + n \\ &= 2c(\lfloor n/2 \rfloor + 17) \log\lfloor n/2 \rfloor + \log(1 + \frac{17}{\lfloor n/2 \rfloor}) + n \\ T(n) &\leq cn \log n \end{aligned} \tag{7}$$

T(n) é $O(n \log n)$ para um $c = 9$ e $n_0 \geq 2$

$$\begin{aligned} T(n) &= 2T(\lfloor n/2 \rfloor) + n \\ &\geq 2c\lfloor n/2 \rfloor \log\lfloor n/2 \rfloor + n \\ &= 2c\lfloor n/2 \rfloor(\log n - 1) + n \\ &= 2c\lfloor n/2 \rfloor \log n - 2c\lfloor n/2 \rfloor + n \\ &\geq cn \log n - cn + n \\ T(n) &\geq cn \log n \end{aligned} \tag{8}$$

T(n) é $\Omega(n \log n)$ para um $c = 1$ e um $n_0 \geq 2$
Portanto, T(n) é $\Theta(n \log n)$ □

# Exercício 4

## (a)

**Algoritmo 1:** busca

**Entrada:** $A$, $v$
**Saída:** índice $i$ de $v$ em $A$

**início**
  **se** $v = A[n/2]$ **então**
    **retorna** $n/2$
  **fim**
  **se** $n = 0$ **então**
    **retorna** $nil$
  **fim**
  **senão**
    **se** $v < A[n/2]$ **então**
      $busca(A[0, n/2 - 1], v)$
    **fim**
    **senão**
      $busca(A[n/2 + 1, n], v)$
    **fim**
  **fim**
**fim**

## (b)

$$busca(A[0,n],v) = \begin{cases} n/2 & \text{, se A[n/2] = v} \\ busca(A[0,n/2-1]) + 1 & , seA[n/2] > v \\ busca([n/2+1,n]) + 1 & , seA[n/2] < v \\ nil & \text{, se n = 0} \end{cases} \tag{9}$$

Onde $i = \left\lfloor \dfrac{inicio + fim}{2} \right\rfloor$

## (c)

**Teorema 1.** *$busca(A, v)$ é $\Theta(\log n)$.*

*Proof.*
**Hipótese** : $busca(A[0,k],v) \leq c \log k$, para todo $n_0 \leq k < n$, onde $n$ é o tamanho de A, $c$ e $n_0$ são constantes
**Passo** : Quero provar que para $busca(A[0,n],v) \leq c \log n$.

$$
\begin{aligned}
busca(n, v) &= busca(n/2, v) + 1 \\
&\leq c \log n/2 + 1 \\
&= c \log n
\end{aligned} \tag{10}
$$

Então $busca(n)$ é $O(\log n)$, para um $c \geq 1$ e um $n_0 \geq 1$

$$
\begin{aligned}
busca(n, v) &= busca(n/2, v) + 1 \\
&\leq c \log n/2 + 1 \\
&= c \log n
\end{aligned} \tag{11}
$$

Então $busca(n)$ é $\Theta(\log n)$, para um $c \geq 1$ e um $n_0 \geq 1$ $\square$