Lista de Exercícios 2

Gustavo Higuchi

August 16, 2016

Contents

Exercício 1

(a)

Teorema 1. *Para qualquer $n \in \mathbb{Z}^+$, a seguinte equação é verdadeira.*

$$1^3 + 2^3 + .. + n^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4} \tag{1}$$

Proof. Para n = 1, isso é verdade?

$$\begin{aligned} 1^3 &= \frac{1^2(1+1)^2}{4} \\ 1 &= \frac{1(2)^2}{4} \\ 1 &= \frac{4}{4} = 1 \end{aligned} \tag{2}$$

Sim! É verdade. E para n = 2?

$$\begin{aligned} 1^3 + 2^3 &= \frac{2^2(2+1)^2}{4} \\ 1 + 8 &= \frac{2^2(2+1)^2}{4} \\ 9 &= \frac{4(9)}{4} = 9 \end{aligned} \tag{3}$$

Vou supor que para um n = k dá certo também, então para $n = k + 1$ dá certo?

$$\begin{aligned} 1^3 + 2^3 + .. + k^3 + (k+1)^3 &= \frac{(k+1)^2((k+1)+1)^2}{4} \\ \frac{k^2(k+1)^2}{4} + (k+1)^3 &= \frac{(k+1)^2(k+2)^2}{4} \\ \frac{k^2(k+1)^2 + 4(k+1)^3}{4} &= \frac{(k+1)^2(k+2)^2}{4} \\ \frac{(k+1)^2(k^2 + 4(k+1))}{4} &= \frac{(k+1)^2(k+2)^2}{4} \\ \frac{(k+1)^2(k^2 + 4k + 4)}{4} &= \frac{(k+1)^2(k+2)^2}{4} \\ \frac{(k+1)^2(k+2)^2}{4} &= \frac{(k+1)^2(k+2)^2}{4} \end{aligned} \tag{4}$$

Dá! Sucesso! Provado por indução! □

(b)

Teorema 1. *Para qualquer $n \in \mathbb{N}$ e todo $c \in \mathbb{C} - 1, 0$, a seguinte equação é verdadeira.*

$$\sum_{i=0}^{n} c^i = \frac{c^{n+1} - 1}{c - 1} \tag{5}$$

Proof. Para $n = 0$, temos

$$\begin{aligned}
\sum_{i=0}^{0} c^i &= \frac{c^{0+1} - 1}{c - 1} \\
c + 1 &= \frac{c^2 - 1}{c - 1} \\
(c+1)(c-1) &= c^2 - 1 \\
c^2 - c + c - 1 &= \\
c^2 - 1 &= c^2 - 1
\end{aligned} \tag{6}$$

Para $n = 1$, temos

$$\begin{aligned}
\sum_{i=0}^{1} c^i &= \frac{c^{1+1} - 1}{c - 1} \\
c^2 + c + 1 &= \frac{c^3 - 1}{c - 1} \\
(c^2 + c + 1)(c-1) &= c^2 - 1 \\
c^3 - c^2 + c^2 - c + c - 1 &= \\
c^2 - 1 &= c^2 - 1
\end{aligned} \tag{7}$$

É verdade, então vamos supor que o teorema é válido para $n = k$, assim

$$\sum_{i=0}^{k} c^i = \frac{c^{k+1} - 1}{c - 1} \tag{8}$$

Então, vamos verificar se para $n = k + 1$ isso também vale, temos

$$\begin{aligned}
\sum_{i=0}^{k+1} c^i &= \frac{c^{k+2} - 1}{c - 1} \\
\sum_{i=0}^{k} c^i c^{k+1} &= \frac{c^{k+2} - 1}{c - 1} \\
\frac{c^{k+1} - 1}{c - 1} + (c^{k+1})(c-1) &= \frac{c^{k+2} - 1}{c - 1} \\
\frac{c^{k+1} - 1 + c^{k+2} - c^{k+1}}{c - 1} &= \frac{c^{k+2} - 1}{c - 1} \\
\frac{c^{k+2} - 1}{c - 1} &= \frac{c^{k+2} - 1}{c - 1}
\end{aligned} \tag{9}$$

É verdade também $\square$

(c)

Teorema 1. *$n^3 + 2n$ é divisível por 3 para todo $n \in \mathbb{N}^+$*

Proof. Para $n = 0$, temos

$$\frac{0^3 + 2 * 0}{3} = 0 \tag{10}$$

Que é divisível por 3.
Para $n = 1$, temos

$$\frac{1^3 + 2 * 1}{3} = \frac{3}{3} = 1 \tag{11}$$

Também.
Assim, para um $n = k$, vamos assumir que seja verdade.
Então vamos provar pra $n = k + 1$, daí

$$\begin{aligned}
(k+1)^3 + 2(k+1) &= (k+1)(k+1)(k+1) + 2k + 2 \\
&= (k^2 + 2k + 1)(k+1) + 2k + 2 \\
&= (k^3 + k^2 + 2k^2 + 2k + k + 1) + 2k + 2 \\
&= k^3 + 2k + 3k^2 + 3k + 3 \\
&= k^3 + 2k + 3(k^2 + k + 1)
\end{aligned} \tag{12}$$

Então, pela hipótese, $k^3 + 2k$ é divisível por 3 e $3(k^2 + k + 1)$ também. □

(d)

Teorema 1. *$9^n - 1$ é divisível por 8 para qualquer $n \in \mathbb{N}^+$*

Proof. Para $n = 0$, temos

$$\frac{9^0 - 1}{8} = 0 \tag{13}$$

Para $n = 1$, temos

$$\frac{9^1 - 1}{8} = \frac{8}{8} = 1 \tag{14}$$

Então vamos supor que para um $n = k$ isso também dá certo.

$$9^k - 1, \text{ é divisível por } 8 \tag{15}$$

Daí, vamos provar para $n = k + 1$

$$\begin{aligned}
9^{k+1} - 1 &= 9^k * 9 - 1 \\
&= 9^k - 1 + 8 * 9^k
\end{aligned} \tag{16}$$

Da hipotese, temos que $9^k - 1$ é verdade, e $8 * 9^k$ é obviamente divisível por 8. □

(e)

Teorema 1. *$n^2 - 1$ é divisível por 8 para qualquer $n \in \mathbb{N}$ ímpar*

Proof. Para $n = 1$, temos

$$\frac{1^2 - 1}{8} = 0 \tag{17}$$

Para $n = 3$, temos

$$\frac{3^2 - 1}{8} = \frac{8}{8} = 1 \tag{18}$$

Então vamos supor que para um $n = 2k + 1$ isso também dá certo.

$$\begin{aligned} (2k+1)^2 - 1 &= 4k^2 + 4k + 1 - 1 \\ &= 4k^2 + 4k \text{ é divisível por 8} \end{aligned} \tag{19}$$

Daí vamos provar para $n = 2k + 3$

$$\begin{aligned} (2k+3)^2 - 1 = 4k^2 + 12k + 9 - 1 \\ &= 4k^2 + 12k + 8 \\ &= 4k^2 + 4k + (8k - 8) \\ &= 4k^2 + 4k + 8(k - 1) \end{aligned} \tag{20}$$

Pela hipótese, $4k^2 + 4k$ é divisível por 8 e $8(k-1)$ é obviamente divisível por 8. □

(f)

Teorema 1. $\sum_{i=1}^{n} i * (i+1) = \frac{n(n+1)(n+2)}{3}$

Proof. Para $n = 1$, temos

$$\begin{aligned} 1 * 2 &= \frac{1 * (1+1) * (1+2)}{3} \\ 2 &= \frac{6}{3} = 2 \end{aligned} \tag{21}$$

Para $n = 2$ temos

$$\begin{aligned} (1 * 2) + (2 * 3) &= \frac{2 * (2+1)(2+2)}{3} \\ 8 &= \frac{24}{3} = 8 \end{aligned} \tag{22}$$

Assumindo que seja verdade para $n = k$,

$$\sum_{i=1}^{k} i * (i+1) = \frac{k(k+1)(k+2)}{3} \tag{23}$$

vamos provar para $n = k + 1$

$$\begin{aligned}
\frac{(k+1)(k+2)(k+3)}{3} &= \sum_{i=1}^{k+1} i*(i+1) \\
&= \sum_{i=1}^{k} i*(i+1) + (k+1)(k+2) \\
&= \frac{k(k+1)(k+2)}{3} + (k^2+3k+2) \\
&= \frac{k(k+1)(k+2) + 3*(k^2+3k+2)}{3} \\
&= \frac{k^3+3k^2+2k+3k^2+9k+6}{3} \\
&= \frac{k^3+6k^2+11k+6}{3} \\
&= \frac{(k+1)(k+2)(k+3)}{3}
\end{aligned} \tag{24}$$

□

(g)

Teorema 1. $2^{n+2} + 3^{2n+1}$ *é divisível por 7 para todo* $n \in \mathbb{N}^+$

Proof. Para $n = 0$

$$\frac{2^{0+2}+3^{0+1}}{7} = \frac{4+3}{7} = 1 \tag{25}$$

Para $n = 1$ temos

$$\frac{2^{1+2}+3^{2+1}}{7} = \frac{8+27}{7} = 5 \tag{26}$$

Vamos supor que para $n = k$ isso também é verdade

$$2^{k+2} + 3^{2k+1}, \text{ é divisível por } 7 \tag{27}$$

Agora vamos provar que para $n = k + 1$ também é verdade

$$\begin{aligned}
2^{k+3} + 3^{2(k+1)+1} &= 2^{k+2} + 2^{k+2} + 3^{2k+3} \\
&= 2^{k+2} + 2^{k+2} + 3^{2k+1} + 3^{2k+1} + 7*3^{2k+1} \\
&= (2^{k+2} + 3^{2k+1}) + (2^{k+2} + 3^{2k+1}) + 7*3^{2k+1}
\end{aligned} \tag{28}$$

Pela hipótese $2^{k+2} + 3^{2k+1}$ é divisível por 7, e obviamente $7*3^{2k+1}$ também.

□

Exercício 2

$$\sum_{k=0}^{n} \left(\begin{array}{c} n \\ k \end{array} \right) = 2^n \tag{29}$$

Proof. Para $n = 1$, temos

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{1} \left(\begin{array}{c} 1 \\ k \end{array} \right) &= 2^1 \\ \left(\begin{array}{c} 1 \\ 0 \end{array} \right) + \left(\begin{array}{c} 1 \\ 1 \end{array} \right) &= \\ \left(\begin{array}{c} 0 \\ 1 \end{array} \right) + \left(\begin{array}{c} 0 \\ 0 \end{array} \right) &= \\ 1 + 1 &= 2 \end{aligned} \tag{30}$$

Para $n = 2$, temos

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{2} \left(\begin{array}{c} 2 \\ k \end{array} \right) &= 2^2 \\ \left(\begin{array}{c} 2 \\ 0 \end{array} \right) + \left(\begin{array}{c} 2 \\ 1 \end{array} \right) + \left(\begin{array}{c} 2 \\ 2 \end{array} \right) &= \\ \left(\begin{array}{c} 1 \\ 1 \end{array} \right) + \left(\begin{array}{c} 1 \\ 0 \end{array} \right) + \left(\begin{array}{c} 1 \\ 2 \end{array} \right) + \left(\begin{array}{c} 1 \\ 1 \end{array} \right) &= \\ \left(\begin{array}{c} 0 \\ 1 \end{array} \right) + \left(\begin{array}{c} 0 \\ 0 \end{array} \right) + 0 + 0 + \left(\begin{array}{c} 0 \\ 1 \end{array} \right) + \left(\begin{array}{c} 0 \\ 0 \end{array} \right) &= \\ 1 + 1 + 1 + 1 &= \\ 4 &= 4 \end{aligned} \tag{31}$$

Vamos assumir que para $n = j$ isso é verdade

$$\sum_{k=0}^{j} \left(\begin{array}{c} j \\ k \end{array} \right) = 2^j \tag{32}$$

Então, provaremos para $n = j + 1$

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{j+1} \left(\begin{array}{c} j+1 \\ k \end{array} \right) &= 2^{j+1} \\
\sum_{k=0}^{j+1} \left(\begin{array}{c} j \\ k \end{array} \right) + \sum_{k=0}^{j+1} \left(\begin{array}{c} j \\ k-1 \end{array} \right) &= \\
\sum_{k=0}^{j} \left(\begin{array}{c} j \\ k \end{array} \right) + \left(\begin{array}{c} j \\ j+1 \end{array} \right) + \left(\begin{array}{c} j \\ -1 \end{array} \right) + \left(\begin{array}{c} j \\ 0 \end{array} \right) + .. + \left(\begin{array}{c} j \\ j \end{array} \right) &= \\
2^j + 0 + 0 + \left(\begin{array}{c} j \\ 0 \end{array} \right) + .. + \left(\begin{array}{c} j \\ j \end{array} \right) &= \\
2^j + \sum_{k=0}^{j} \left(\begin{array}{c} j \\ k \end{array} \right) &= \\
2^j + 2^j &= 2^{j+1}
\end{aligned} \tag{33}$$

$\square$