Série de Fourier

Gustavo Higuchi

November 17, 2016

Contents

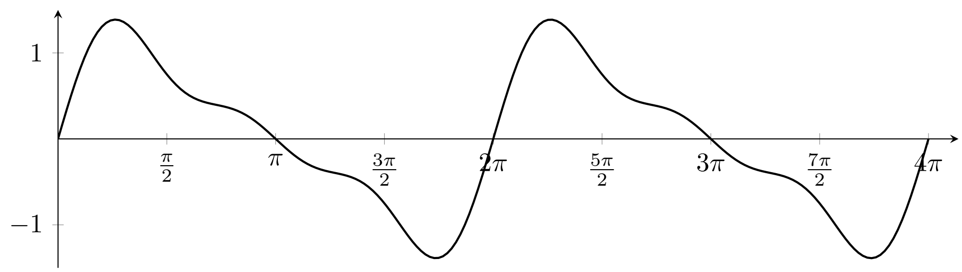
Funções periódicas

Uma função $f(x)$ é dita periódica se existe uma constante $T > 0$, tal que

$$f(x+T) = f(x) \tag{1}$$

para qualquer $T \in \mathbb{R}$.
Essa constante T é chamada de período da função $f(x)$. As funções periódicas mais comuns são $\sin x$, $\cos x$, $\tan x$, etc. Funções periódicas surgem em muitas aplicações matemáticas e em problemas de física e engenharia. Esta claro que a soma, a diferença, a multiplicação e a divisão de duas funções periódica com período T é também uma função periódica com período T.

Se plotarmos o gráfico da função $y = f(x)$ em qualquer intervalo fechado $a \leq x \leq a+T$, é possível obter o gráfico de $f(x)$ através da repitição periódica da porção do gráfico correspondente a $a \leq x \leq a+T$.



Se T é um período da função periódica $f(x)$, então seus múltiplos $2T$, $3T$, $4T$, etc também são períodos da função $f(x)$. Isso é verificado facilmente ao inspecionar os gráficos de uma função periódica, ou pela série de igualdades:

$$f(x) = f(x+T) = f(x+2T) = f(x+4T) = ... \tag{2}$$

Assim, podemos afirmar que se T é um período, então kT também é, para um $k \in \mathbb{N}$, i.e., **se um período existe, ele não é único**.

A partir disso, temos a seguinte propriedade de qualquer função periódica $f(x)$ com período T:
Se f(x) é integrável em um intervalo de tamanho T, então é integrável em qualquer outro intervalo de tamanho T, e o valor da integral é o mesmo

$$\int_a^{a+T} f(x)\,\mathrm{d}x = \int_b^{b+T} f(x)\,\mathrm{d}x. \tag{3}$$

para qualquer a, b.

Essa propriedade é uma consequência imediata da interpretação da integral como área. Cada integral é igual a área incluida entre a curva $y = f(x)$, o eixo x e as ordenadas desenhadas nos limites do intervalo, onde áreas acima do eixo x são tidas como positivas, e áreas abaixo são tidas como negativas. No caso, as áreas representadas pelas duas integrais são a mesma por causa da propriedade de $f(x)$.

gráfico de 3

Daqui em diante, quando uma função $f(x)$ de período T for integrável, então ela será integrável em qualquer intervalo de tamanho T.

Harmonicos

A função periódica mais simples é $y = \sin x$ e pode ser escrito da forma:

$$y = A \sin(\omega x + \varphi) \tag{4}$$

onde A, ω e φ são constantes. Essa função é chamada de função de função *harmonica* de amplitude A, frequência ω e fase inicial φ. Neste caso, o período dessa harmonica é $T = 2\pi/\omega$

$$A \sin[\omega(x + \frac{2\pi}{\omega}) + \varphi] = A \sin[(\omega x + \varphi) + 2\pi] = A \sin(\omega x + \varphi) \tag{5}$$

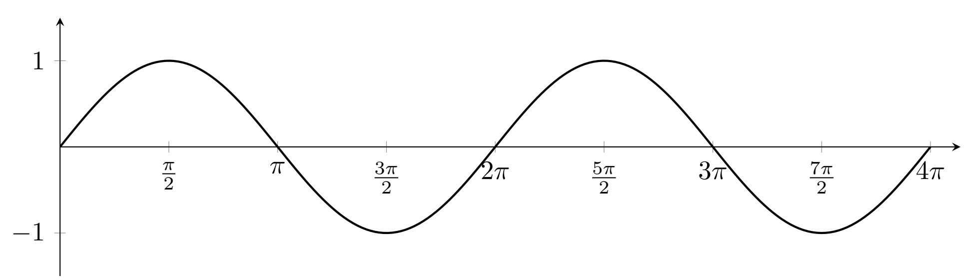
daí tem uma historinha de onde surgiu esses termos, spoiler: de um problema oscilatório.

Vamos assumir que $\omega > 0$, uma vez que, pela propriedade do seno, $\sin -a = -\sin a$

Vamos examinar o comportamento da função

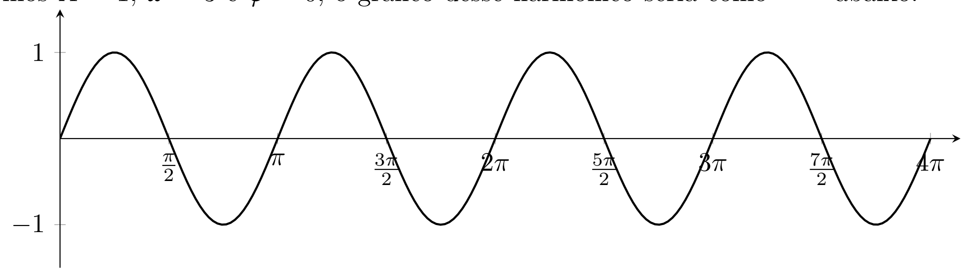
$$y = A \sin(\omega x + \varphi) \tag{6}$$

Para $A = 1$, $\omega = 1$ e $\varphi = 0$, temos a curva senóide comum $y = \sin x$



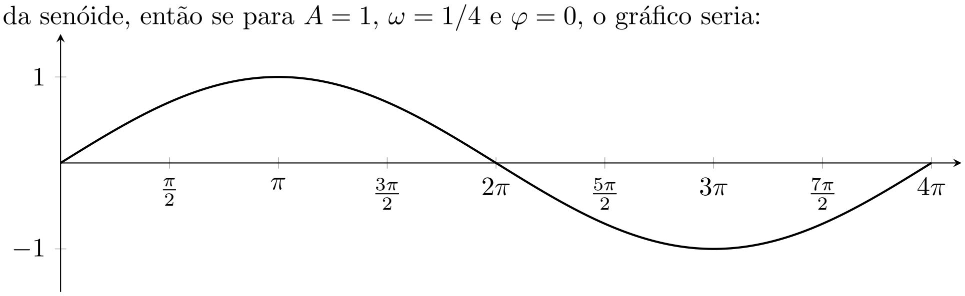
Agora considere o seguinte harmonico $y = \sin wx$ e definir $\omega x = z$, teremos

$y = \sin z$ cujo gráfico é a curva senóide normal. Portanto, o gráfico de $y = \sin \omega x$ é obtido deformando o gráfico da senóide comum. Por exemplo, se atribuirmos um $\omega > 1$, teremos uma *compressão* do gráfico da senóide, então se tivermos $A = 1$, $\omega = 3$ e $\varphi = 0$, o gráfico desse harmonico seria como —— abaixo.



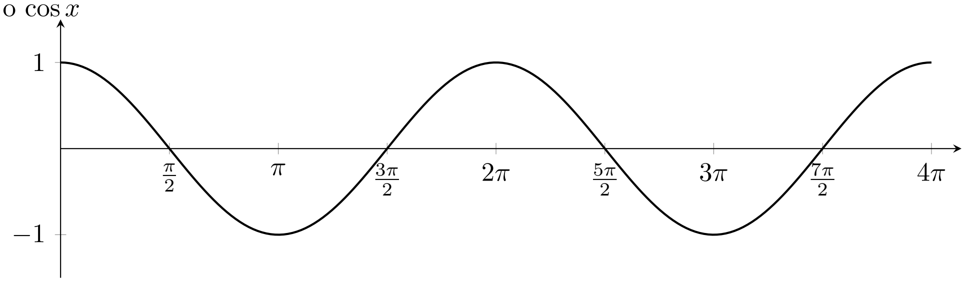
Ou seja, tivemos uma "compressão" da curva senóide original ao setar $\omega = 2$, sendo assim sempre que tivermos um $\omega > 1$, teremos uma propocionalmente **menor**, neste caso $T = 2\pi/\omega = 2\pi/3$.

Por outro lado, se atribuirmos um $\omega < 1$, teríamos uma *expansão* do gráfico da senóide, então se para $A = 1$, $\omega = 1/4$ e $\varphi = 0$, o gráfico seria:



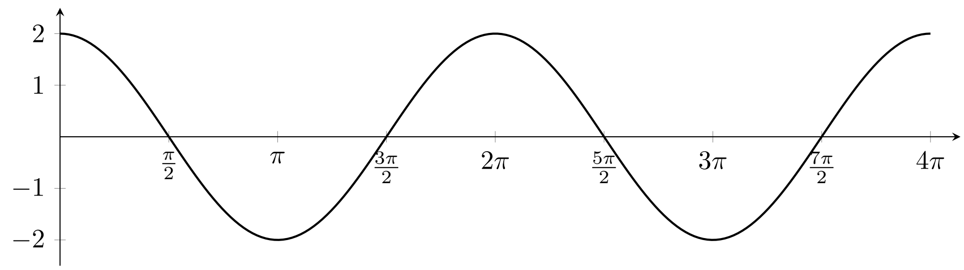
Assim, teremos uma "expansão" do gráfico da curva senóide original ao setar $\omega < 1$, e uma função com período **maior** com $\omega < 1$, neste caso $T = 2\pi/\omega = \dfrac{2\pi}{1/2} = 4\pi$.

Agora considere o harmonico $y = \sin(\omega x + \varphi)$ e definir $\omega x + \varphi = \omega z$, para que $x = z - \varphi/\omega$. Como já sabemos o gráfico de $\sin \omega z$, o gráfico de $y = \sin(\omega x + \varphi)$ é obtido deslocando o gráfico de $y = \sin \omega x$ ao longo do eixo x por $-\varphi/\omega$. Então, dado $A = 1$, $\omega = 1$ e $\varphi = 1/2$, teremos a curva que representa o $\cos x$



que nada mais é que a curva senóide deslocada para esquerda.

Finalmente, o harmonico $y = A \sin(\omega x + \varphi)$é obtido do harmonico $y = \sin(\omega x + \varphi)$ multiplicando todas as ordenadas por A, então dado $A = 2$, $\omega = 1$ e $\varphi = 0$, temos



Portanto, podemos resumir tudo isso no seguinte:
O gráfico da harmonica $y = A\sin(\omega x + \varphi)$ é obtido do gráfico da curva senóide comum por uma compressão (ou expansão) uniforme ao longo dos eixos, mais um deslocamento ao longo do eixo x.

Com isso, podemos utilizar uma conhecida fórmula matemática para derivar o seguinte:

$$A\sin(\omega x + \varphi) = A(\cos\omega x \sin\varphi + \sin\omega x \cos\varphi) \tag{7}$$

Então, temos

$$a = A\sin\varphi \quad , \quad b = A\cos\varphi \tag{8}$$

podemos dizer que todo harmonico pode ser representado na forma

$$y = a\cos\omega x + b\sin\omega x \tag{9}$$

Do mesmo jeito que uma função com a forma 9 é um harmonico também. Para provar isso, basta resolver 8 para a e b. O resultado é

$$\begin{aligned} A = \sqrt{a^2+b^2} \quad , \quad \sin\varphi = \frac{a}{A} = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} \\ e \quad \cos\varphi = \frac{b}{A} = \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}} \end{aligned} \tag{10}$$

do qual φ pode ser facilmente encontrado.

Assim, podemos escrever os harmonicos na forma 9. No exemplo ——, o harmonico pode ser escrito na forma

$$y = \sqrt{2}\cos 3x + \sin 3x \tag{11}$$

e essa notação será usada daqui em diante.

Também será conviniente explicitar o período T em 9. Se definirmos $T = 2l$, então, como $T = 2\pi/\omega$, temos

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{\pi}{l} \tag{12}$$

e assim, o harmonico com período $T = 2l$ pode ser escrito da seguinte forma

$$a \cos \frac{\pi x}{l} + b \sin \frac{\pi x}{l} \tag{13}$$

Polinômios trigonométricos e séries

Dado o período $T = 2l$, considere os harmonicos

$$a_k \cos \frac{\pi k x}{l} + b_k \sin \frac{\pi k x}{l}, \text{ para k = 1,2,3,...} \tag{14}$$

Com frequencia $\omega_k = k\pi/l$ e períodos $T_k = \dfrac{2\pi}{\omega_k} = \dfrac{2l}{k}$. Uma vez que

$$T = 2l = kT_k, \tag{15}$$

o número $T = 2l$ é simultaneamente o período de todos os harmonicos, pois um múltiplo de um período é também um período (Sec 1). Então, toda soma na forma

$$s_n(n) = A + \sum_{k=1}^{n} (a_k \cos \frac{k\pi x}{l} + b_k \sin \frac{k\pi x}{l}) \tag{16}$$

é uma função de período $2l$, uma vez que é uma soma de funções de período $2l$. Vale notar que A é uma constante e não afeta a periodicidade da função, inclusive é possível considerar que uma constante é uma função periódica, onde qualquer valor pode ser um período.

Essa função $s_n(x)$ é chamada de **polinômio trigonométrico de ordem n**(e período $2l$).

Por mais que seja a soma de vários harmonicos, um polinômio trigonométrico pode ser usado para representar uma função de natureza muito mais complexa que a de um harmonico. E geralmente é o caso. Escolhendo as constantes corretamente, podemos formar funções com gráficos bem diferentes de um simples harmonico... ? **[colocar algumas aplicações mais recentes que "gráficos"]**.
Na primeira figura ——, o polínomio que representa aquele gráfico é

$$y = \sin x + \frac{1}{2} \sin 2x + \frac{1}{4} \sin 3x \tag{17}$$

Se colocar em algum software de plot de função, será idêntica à ——.

A **série trigonométrica infinita**

$$f(x) = A + \sum_{k=1}^{\infty}(a_k \cos\frac{k\pi x}{l} + b_k \sin\frac{k\pi x}{l}) \tag{18}$$

também representa uma função de período $2l$. As funções como 18 podemos ser usadas para representar fenômenos de origem muito mais complexa que um polinomio.

Sendo assim, o gráfico de uma função periódica $f(x)$ pode ser obtido através da sobreposição de todos os harmonicos que o compõe, i.e., pode ser representado como uma soma de harmonicos simples. Então a pergunta que fica é: *Qualquer função que tenha período 2l pode ser representado por uma soma de séries trigonométricas?*

A resposta é sim, na realidade, é possível ser usado em grande gama classes de problemas! Diversos outros fenômenos podem ser ser representado por uma série trigonométrica, tais como......................

Se

$$f(x) = A + \sum_{k=1}^{\infty}(a_k \cos\frac{k\pi x}{l} + b_k \sin\frac{k\pi x}{l}) \tag{19}$$

Então, podemos definir, por comodidade, que $\dfrac{\pi x}{l} = t$ ou que $x = \dfrac{tl}{\pi}$, assim teremos

$$g(t) = f(tl/\pi) = A + \sum_{k=1}^{\infty}(a_k \cos kt + b_k \sin kt) \tag{20}$$

onde os harmonicos dessa série tenham período 2π. É possível verificar que se a função $f(x)$ de período $2l$ possui a expansão 19, então a função $g(x)$ de período 2π possui a expansão 20, e que o contrário é verdadeiro também. Por ser mais legível, usaremos a expansão 20 e ao final faremos a tradução para o mais genérico 19.

Uma terminologia mais precisa

Agora vamos introduzir a uma terminologia mais precisa e relembrar alguns fatos de cálculo integral e diferencial. Quando dizemos que $f(x)$ é integrável no intervalo [a,b], siginifica que a integral

$$\int_a^b f(x)dx \tag{21}$$

(que pode ser imprópria) existe no sentido elementar. Portanto, nossas funções integráveis $f(x)$ sempre serão contínuas ou com finitas descontinuidades no intervalo [a,b], no qual a função pode ser limitada ou não.

Em cursos de cálculo integral, primeiro se prova que a função possui um número finito de descontinuidades dentro de um intervalo, então se a integral

$$\int_a^b |f(x)|dx \tag{22}$$

existe, então 21 também existe. Neste caso, a função $f(x)$ é tida como uma função **absolutamente integrável**. (Vale notar que o inverso pode não ser verdadeiro).

Propriedade 1
Se $f(x)$ é uma função absolutamente integrável e $g(x)$ é uma função integrável limitada, então o produto $f(x)g(x)$ é uma função absolutamente integrável também.

A seguinte regra de integração por partes é válida:

Seja f(x) e g(x) contínuas em [a,b], mas talvez não diferençiavel em um número finito de pontos. Portanto se f'(x) e g'(x) são absolutamente integráveis, então temos:

$$\int_a^b f(x)g'(x)dx = f(x)g(x)]_a^b - \int_a^b f'(x)g(x)dx \tag{23}$$