Tema4Teoria.pdf

gsmrt

Modelos Matemáticos I

2º Doble Grado en Ingeniería Informática y Matemáticas

Facultad de Ciencias
Universidad de Granada

T4 - MATRICES ESTOCÁSTICAS
APLICACIONES EN GENÉTICA

Matrices positivas y estrictamente positivas

Sea $A = (a_{ij}) \in M_{d\times d}(\mathbb{R})$ una matriz. Se dice que es:

1. Débilmente positiva o no negativa: $A \geq 0$ si $a_{ij} \geq 0$, $\forall i,j$
2. Positiva: $A > 0$ si $a_{ij} \geq 0$, $\forall i,j$, y al menos un $a_{ij} > 0$
3. Estrictamente positiva: $A >> 0$ si $a_{ij} > 0$, $\forall i,j$.

Ejemplo

$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ Débilmente positiva. No es positiva

X, Y son dos vectores columna de dimensión d, definimos

$X \geq Y \iff X - Y \geq 0$

$X > Y \iff X - Y > 0$

$X >> Y \iff X - Y >> 0$

Propiedades básicas

1. Si $A >> 0$, $X > 0$, entonces $AX >> 0$
2. Si $A > 0$, $X > Y > 0$, entonces $AX > AY$
3. Si $A \geq 0$, $X >> 0$, $AX = 0$, entonces $A = 0$.
4. Si $A > 0$, $X >> Y >> 0$, entonces $AX >> AY$.

Ejemplos

$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ es ergódica $\Rightarrow A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

I no es ergódica

$J = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow J^n \begin{cases} J & \text{si } n \text{ par} \\ I & \text{si } n \text{ impar} \end{cases}$

Teorema de Perron - Frobenius

Def Una matriz positiva $A=(a_{ij})\in M_{d\times d}(\mathbb{R})$ se dice primitiva o ergódica si existe $m\in\mathbb{N}$ tal que $A^m>>0$. Tiene una potenc estrict. positiva

Tma Si A es una matriz primitiva, entonces

(i) A tiene un valor propio λ_1 real, estrictamente positivo y dominante, esto es,

$$|\lambda_i|<\lambda \quad \forall \lambda_i\in\sigma(A)\setminus\{\lambda_1\} \quad y \quad \rho(A)=\lambda_1$$

(ii) Se puede tomar un vector propio v_1 asociado al valor propio λ_1 con todas las componentes positivas, i.e., $v_1>>0$.

Ejemplos

(1). $A=\begin{pmatrix}1&1\\1&1\end{pmatrix}$ pos est. $\Rightarrow$ TPF $\exists\lambda_1$ dominante, positivo, simple

$$|A-\lambda I|=\begin{vmatrix}1-\lambda & 1\\ 1 & 1-\lambda\end{vmatrix}=(1-\lambda)^2-1=\lambda^2-2\lambda$$

$\sigma(A)=\{0,2\}$

$\rho(A)=2=\lambda_1$ domin.

Recordemos

$\sigma(A)=\{\lambda_1,\dots,\lambda_r$ valores propios$\}$

$\rho(A)=\max\{|\lambda_i|:\lambda_i\in\sigma(A)\}\in\mathbb{R}$

$\sigma(A)=\{i,-i\}$

$\rho(A)=1\notin\sigma(A)$

(2). $B=\begin{pmatrix}1&1\\1&0\end{pmatrix}$ positiva no estricta, pero primitiva

$\overset{TPF}{\Rightarrow}$ $\exists\lambda_1$ dominante simple, positivo

$$|B-\lambda I|=\begin{vmatrix}1-\lambda & 1\\ 1 & -\lambda\end{vmatrix}=\lambda^2-\lambda-1\rightarrow \lambda_1=\frac{1+\sqrt5}{2},\quad \lambda_2=\frac{1-\sqrt5}{2}$$

DGT Dirección General de Tráfico · ADA · AEDIVE · aesleme · devecar · AOP · aspaym · CEA · onae · FESVIAL · Hostelería de España · PMYV · PONS · Rotary · STOP

③. $C = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = 1$ No positiva estricta y no primitiva

No podemos aplicar TPF.

Consecuencias del teorema de Perron-Frobenius.

Sea x_0 el vector inicial de $x_{n+1} = Ax_n$; $n \geq 0$

Corolario 1

Si A es una matriz primitiva, λ_1 es su valor propio real, estrictamente positivo y dominante, y $v_1 >> 0$ vector propio asociado a λ_1. Entonces existe α tal que

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{\lambda_1^n} A^n x_0 = \alpha v_1$$

Corolario 2

En las condiciones anteriores, si $x_0 > 0$, entonces

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{\|x_n\|_1} x_n = \frac{1}{\|v_1\|_1} v_1$$

Matrices positivas

¿Qué ocurre si A es positiva pero no primitiva?

Sea $A \geq 0$, entonces

ⓘ. Existe un valor propio $\lambda_m \geq 0$ que verifica $|\mu| \leq \lambda_m$ para todo valor propio μ. Esto es, $\rho(A)$ es valor propio de A. Lo llamaremos el mayor valor propio.

ⓘⓘ Existe $v > 0$ vector propio asociado a λ_m

Cruzamos flores

AA × AA

100% rojas

Aa × Aa

AA Aa aA aa

0,25 = 1/4 rojas

0,5 = 1/2 rosas

0,25 = 1/4 blancas

aa × aa

100% blancas

$$\begin{cases} x^n = \text{nº flores rojas en el momento n-ésimo} \\ y^n = \text{nº flores rosas en el momento n-ésimo} \\ z^n = \text{nº flores blancas en el momento n-ésimo} \end{cases}$$

$$\left.\begin{aligned} x^{n+1} &= x^n + \tfrac{1}{4} y^n \\ y^{n+1} &= \tfrac{1}{2} y^n \\ z^{n+1} &= \tfrac{1}{4} y^n + z^n \end{aligned}\right\} \underline{X}^{n+1} = \begin{pmatrix} 1 & 1/4 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 1/4 & 1 \end{pmatrix}$$

→ Matriz de Markov por columnas $\sum_{i=1}^{n} a_{ij} = 1$

Ejemplo

$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & 2 \\ 4 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ estimaremos el mayor valor propio (será dominante ya que $A >> 0$)

$$\left.\begin{aligned} C_1 &= 1+2+4 = 7 & R_1 &= 1+2+3 = 6 \\ C_2 &= 2+2+1 = 5 & R_2 &= 2+2+2 = 6 \\ C_3 &= 3+2+1 = 6 & R_3 &= 4+1+1 = 6 \end{aligned}\right\} \lambda_M = 6 \text{ y dominante.}$$

Matriz permutación

$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ Es la identidad cambiando las columnas o las filas 1 y 2

Al multiplicar una matriz por esta, te da la misma matriz pero permutada.

Cotas para el mayor valor propio

Proposición

Sea $A \geq 0$ y $\rho(A) = \lambda_M \geq 0$ su mayor valor propio. Sean

columnas ← $C_j = \sum_{i=1}^{d} a_{ij}$, $R_i = \sum_{j=1}^{d} a_{ij}$ → filas

las sumas de los elementos de la j-ésima columna y de la i-ésima fila, respectivamente, de A. Entonces

$$\min_{1 \leq j \leq d} C_j \leq \lambda_M \leq \max_{1 \leq j \leq d} C_j$$

$$\min_{1 \leq i \leq d} R_i \leq \lambda_M \leq \max_{1 \leq i \leq d} R_i$$

Matrices reducibles. Grafo y matriz de adyacencia.

Matriz de permutación : $P = (p_{ij})_{i,j=1}^{d}$

Def A cuadrada de orden $d > 1$ se dice reducible si existe $1 \leq r < d$ y una matriz de permutación P tal que:

$$PAP^t = \left(\begin{array}{c|c} \underset{r \times r}{A_1} & 0 \\ \hline \underset{(d-r)\times r}{B} & \underset{(d-r)\times(d-r)}{A_2} \end{array} \right)$$

donde A_1 y A_2 son matrices $\square$ de órdenes r y d-r, y 0

denota la matriz nula de r filas y d-r columnas
Si A no es reducible, se dice que es irreducible.

Ejemplo $\left(\begin{array}{ccc|cc} 1 & 2 & 3 & & \\ 4 & 5 & 6 & & 0 \\ 0 & 1 & 2 & & \\ \hline 3 & 3 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & 9 & 8 & 0 & 1 \end{array}\right) = PAP^t$

Equivalentemente, A se dice reducible si existe una matriz de permutación Q tal que

$$Q^t A Q = \begin{pmatrix} \hat{A}_1 & \hat{B} \\ 0 & \hat{A}_2 \end{pmatrix}$$

donde $\hat{A}_1$ y $\hat{A}_2$ son matrices cuadradas

Ejemplo
$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ ¿Reducible? Si el 0 está en la diagonal principal no se ____

Sí porque tiene un bloque de 0, en el 1er y 2° cuadrante

Grafo y matriz de adyacencia

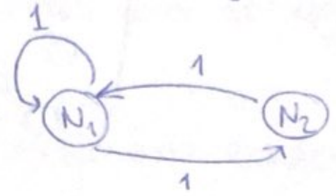
Def Dada una matriz cuadrada real A, se llama grafo asociado a A (graf(A)) a la gráfica dirigida sobre d nodos $\{N_1, N_2, \dots, N_d\}$ tal que si $a_{ij} > 0$ entonces existe una flecha desde N_j hasta N_i. La matriz A se llama matriz de adyacencia del grafo.

Def Se dice que graf(A) está fuertemente conectado si toda pareja i,j existe $m = m(i,j) > 1$ tal que para la pareja de nodos N_i, N_j existe un camino de longitud menor o igual a m que los conecta. Es decir, se puede ir del nodo N_j al N_i tras m pasos (como mucho) en el grafo asociado a la matriz A.

Ejemplos

① la dim $A = n$, entonces hay n nodos

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}_{2\times 2}$$



$a_{11} = 1 \Rightarrow$ flecha de N_1 a N_1 de peso 1

$a_{12} = 1 \Rightarrow$ flecha de N_2 a N_1 de peso 1

$a_{21} = 1 \Rightarrow$ flecha de N_1 a N_2 de peso 1

$a_{22} = 0 \Rightarrow$ No hay flecha de N_2 a N_2

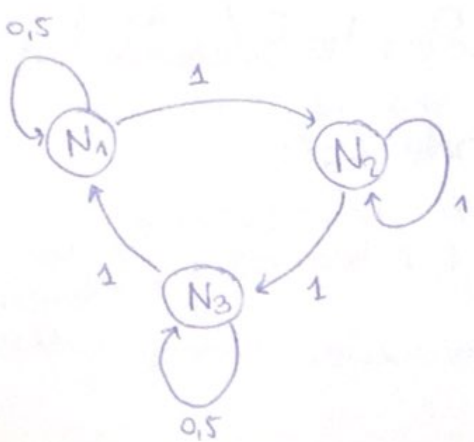
Dado este grafo, se dice que la matriz $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ es la matriz de adyacencia

② Determine el grafo de la matriz de adyacencia

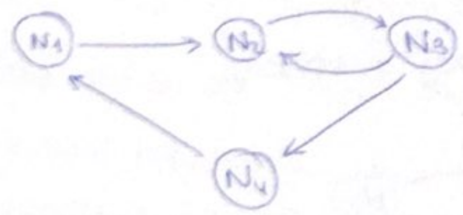
$$A = \begin{pmatrix} 0{,}5 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0{,}5 \end{pmatrix}$$ dim $3\times 3 \Rightarrow 3$ nodos

Podemos ir de cualquier nodo a cualquier nodo.

Longitud mínima del camino: 2

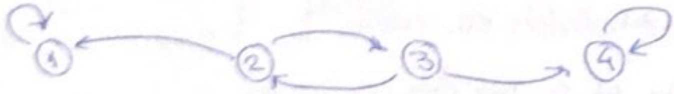


3. Determine la matriz de adyacencia del grafo



$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

4. Grafo del caminante borracho



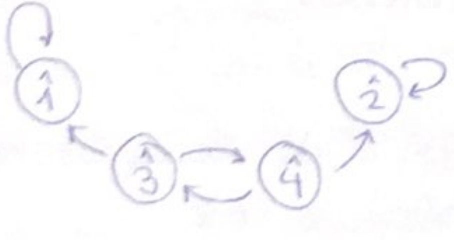
Peso 1 por defecto

4 nodos ⇒ dim 4x4 , No está fuertemente conectado

y de 1 y de 4 no se puede ir a cualq. nodo

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Para conseguir una matriz reducible la permutamos, para ello permutamos los nodos.



$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$\hat{1} = 1$
$\hat{2} = 4$
$\hat{3} = 2$
$\hat{4} = 3$

Reducible ya que el 3er cuadrante es 0.

Para construirla debemos leer al 1 le llega del 1
" 2
" 3

así se rellenan las filas

<u>Prop 1</u> Si una matriz es primitiva (o ergódica) entonces es irreducible.

El recíproco no es cierto puede ser irreducible y no primit.

<u>Prop 2</u> Sea $A \geq 0$ de orden $d \times d$. Son equivalentes:

(i) A es irreducible

(ii) graf(A) está fuertemente conectado

Recordatorio

$$L = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_N \\ b_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & b_2 & & \vdots \\ 0 & \cdots & b_{N-1} & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{matrix} 0 < b_i \leq 0 \\ a_i \geq 0 \end{matrix}$$

¿Primitiva?: no es estrict. pos.
Deberíamos ver si $\exists m \geq 1 / L^m \gg 0$

Para que la teoría sea válida si $\exists i / a_i a_{i+1} > 0$

$$L = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & 0 \end{pmatrix} ; \quad L^2 = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1^2 + a_2 b_1 & a_1 a_2 \\ b_1 a_1 & b_1 a_2 \end{pmatrix}$$

$L^2 \gg 0$, satisface el T^{ma} de P-F.

-<u>Dem</u> (prop 1)-

dim $d \times d$

A primitiva si $\exists m \geq 1 / A^m \gg 0$

Irreducible si no es reducible

-1 (inversa) si quiero diagonalizar

A reducible si $\exists P$ permutación $/ PAP^t = \left(\begin{array}{c|c} A_1 & 0 \\ \hline B_1 & A_2 \end{array}\right)$

A_1 dim $r \times r$
A_2 dim $(d-r) \times (d-r)$
B_1 dim $(d-r) \times r$
0 matr. $\emptyset$ dim $r \times (d-r)$

$\exists r \mid 0 < r < d$

el grupo de $\emptyset$ puede cambiar de sitio

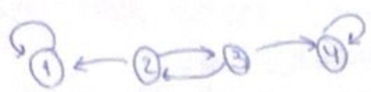
(Equivalentemente $\exists Q$ permutable $QAQ^t / QAQ^t = \left(\begin{array}{c|c} \hat{A}_1 & \hat{B} \\ \hline 0 & \hat{A}_2 \end{array}\right)$)

Hay matrices irreducibles que no son primitivas

Ejemplo

$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ Irreducible
No primitiva
↳ $J^2 = I$; $J^3 = J$ . . .

Fuertemente conectado



No está fuertemente conectado
↳ La matriz es reducible

Irreducibilidad

Sea $A \geq 0$ de orden $d \times d$ irreducible. Entonces:

1. $\lambda_1 = \rho(A)$ es valor propio positivo y simple.
   $\rho(A) = \max\{|\lambda_i| / \lambda_i$ valor propio de $A\}$
   Si $\exists \lambda_1 \in \sigma(A) / \lambda_1 = \rho(A) \Rightarrow \lambda_1$ real y $\oplus$ y $\lambda_1 \geq |\lambda_i|$
2. Existe un único vector propio u_1 asociado a $\lambda_1 = \rho(A)$ verificando $u_1 >> 0$ y $\|u_1\|_1 = 1$, llamado vector de Perron
3. Si existe $j \in \{1, 2, \dots, d\}$ tal que $a_{jj} > 0$, entonces $\lambda_1 = \rho(A)$ es dominante
4. Todos los valores propios de módulo igual a $\rho(A)$ son simples

Ejemplo

$J = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ irreducible (visto por su grafo)
$\lambda_1 = \rho(A)$ valor propio positivo y simple

Resultado que acota el mayor valor propio

$\min_i C_j \leq \lambda_M \leq \max_i C_j$
$\min_i R_i \leq \lambda_M \leq \max_j R_i$

$1 \leq \lambda_M \leq 1 \Rightarrow \lambda_M = 1$
↳ $C_j = \sum_i a_{ij}$ (columnas)
$R_i = \sum a_{ij}$ (filas)

Calculamos u_1 del teorema anterior

$Ker(J-I) \Rightarrow (J-I)u = 0$

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u^1 \\ u^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \left.\begin{matrix} -u^1 + u^2 = 0 \\ u^1 - u^2 = 0 \end{matrix}\right\} u^1 = u^2 \Rightarrow u = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Normalicemos $\|u\|_1 = 1+1 \overset{\text{del T}^{\text{ma}}}{\Rightarrow} u_1 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/2 \\ 1/2 \end{pmatrix}$ vector de Perron

$\sigma(J) = \{1, \underbrace{-1}_{\text{No es dominante}}\}$

Comportamiento asintótico de las soluciones

Sea $x_{n+1} = Ax_n,\ n \geq 0$ sist. lineal de ecuaciones en diferenc.

Solución $x_n = A^n x_0,\ n \geq 0$

Si la matriz A es positiva e irreducible:

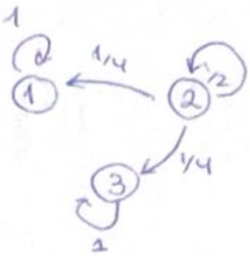
- $\lambda_1 = \rho(A)$ es dominante, entonces
  1. $\lim_{n\to\infty} x_n = 0$ si y solo si $\rho(A) < 1$
  2. si $\rho(A) = 1$ y $x_0 >> 0$, entonces $\lim_{n\to\infty} x_n = x >> 0$, que es vector propio asociado al valor propio $\lambda_1 = 1$.

- $\lambda_1 = \rho(A)$ no es dominante, entonces habrá valores propios simples de igual módulo.
  1. $\rho(A) > 1$: las soluciones oscilan creciendo en radio
  2. $\rho(A) < 1$: las soluciones oscilan decreciendo hacia cero.
  3. $\rho(A) = 1$: las soluciones se mantendrían en la circunferencia unidad y podrían ser eventualmente periódicas

Ejemplo (Problema de las flores)

$$\left(\begin{array}{cc|c} 0 & 1/4 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 \\ \hline 0 & 1/4 & 1 \end{array}\right)$$

¿irreducible?
Reducible
$\xrightarrow{\text{Grafo asoc.}}$



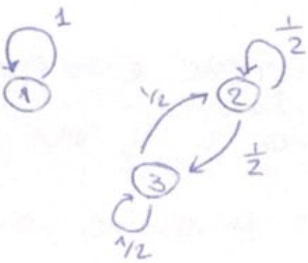
Como el grafo no está fuertemente conectado, la matriz asociada es reducible.

$\lambda_M = 1$ es valor propio

La matriz verifica que la suma de sus columnas vale 1

Ejemplos

1. $$\left(\begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 1/2 & 1/2 \\ 0 & 1/2 & 1/2 \end{array}\right)$$



No fuertemente conectado. → cuando llegas no puedes salir

El nodo 1 es "absorbente" (dangling node)

no (porque no puedes llegar)

Matriz estocástica

<u>Def</u> Sea $A = (a_{ij})$ una matriz cuadrada de orden d positiva. Se dice que A es estocástica o de probabilidad o de Markov (por columnas) si

$$\sum_{i=1}^{d} a_{ij} = 1 \quad , \; j = 1, 2, \dots, d$$

Matriz Markov por columnas $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 1 \\ 0 & 1/2 & 0 \end{pmatrix}$

Matriz Markov por filas: $\begin{pmatrix} 1/2 & 0 & 1/2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1/2 & 1/2 \end{pmatrix}$

Doblemente de Markov. $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 1/2 \\ 0 & 1/2 & 1/2 \end{pmatrix}$

Propiedad básica.
Si A es una matriz estocástica, entonces
 (i). $\rho(A)=1$, y además $\lambda_1=1$ es valor propio de A
 (ii). Admite un vector propio v_1 asociado a $\lambda_1=1$ con $v_1>0$

Cadenas de Markov

Def una cadena de Markov es una sucesión de vectores positivos $\{P_0, P_1, \dots, P_n, \dots\}$ solución de un sistema de ecuaciones en diferencias (orden 1, matricial, homogenea)

$$P_{n+1} = MP_n \quad , \quad n\geq 0$$

donde P_0 cumple $\|P_0\|_1 = 1$, y se le llama distribución inicial de probabilidad, y la matriz de transición M es estocástica (suma columnas $=1$)

Las cadenas de Markov surgen en el estudio de repeticiones de experimentos con d resultados posibles que corresponden a los estados $S_1, S_2, \dots, S_d$, con ciertas hipótesis:

- La probabilidad de que resulte un estado S_i sólo depende del resultado en la repetición anterior del experimento, y no de los anteriores.

- m_{ij}, $j=1,2,\dots,d$ representa la probabilidad de que se dé el estado S_i habiéndose dado el estado $_j$ en la etapa anterior

- Sea $p_n(i)$ la probabilidad de que en la n-ésima repetición del experimento salga S_i. entonces

$$p_{n+1}(i) = m_{i1}p_n(1) + m_{i2}p_n(2) + \dots + m_{id}p_n(d)$$

Así, si $P_n = (p_n(1), p_n(2), \dots, p_n(d))^t$, entonces

$$p_{n+1} = M p_n \ , \ n \geq 0 \ ,$$

y se verifica:

* La matriz de transición M es estocástica

* Los vectores P_n cumplen $\|P_n\|_1 = 1$

Hay dos tipos especiales de cadenas de Markov.

1. Cadenas regulares: se dice que una cadena de Markov es regular si la matriz M es primitiva, es decir, $M^k \gg 0$ para algún entero positivo k.
En este caso, el valor propio λ_1 es dominante y por tanto la cadena que parte de un $P_0 \gg 0$ tiende a una distribución estacionaria (vector propio asociado o vector de Perron) de probabilidad que nos indicaría las probabilidades (proporciones / porcentajes) de cada uno de los estados del experimento a lo largo del plazo.

② Cadenas absorbentes: Se dice que una cadena de Markov es absorbente si hay, al menos, un estado S_j absorbente (es decir, $m_{jj}=1$) y desde cualquier otro estado podemos conectar a uno absorbente.

Aplicaciones.

Un modelo para la herencia autosómica

* La genética es el área de estudio de la biología que busca comprender y explicar cómo se transmite la herencia biológica de generación en generación.

* El principal objeto de estudio de la genética son los genes, formados por segmentos de ADN y ARN. El ADN controla la estructura y el funcionamiento de cada célula, tiene la capacidad de crear copias exactas de sí mismo tras un proceso llamado replicación.

* El genoma es la totalidad de la información genética que puede poseer un organismo en particular.

* El genotipo se refiere a la información genética que posee un organismo en particular. El genotipo, junto con factores ambientales que actúan sobre el ADN, determina las características del organismo, es decir, su fenotipo.

* Los cromosomas son cada una de las estructuras de la célula altamente organizadas, formadas por ADN y proteínas, que contiene la mayor parte de la información genética de un individuo. Aparecen en pares conteniendo los miembros de cada par genes con idénticas funciones. Los pares se separan durante la división celular.

* Un autosoma o cromosoma somático es cualquier cromosoma que no sea sexual. En el ser humano, los cromosomas del par 1 al 22 son autosomas, y el par 23 pertenece a los cromosomas sexuales X e Y.

* En la reproducción sexual cada nuevo individuo recibe un juego de cromosomas proveniente de cada uno de sus progenitores

* Muchos rasgos de los individuos de una especie biológica están determinados por los genes heredados de sus padres

* Supongamos que un gen particular G tiene sólo dos formas llamadas alelos (alelo G y alelo g)

* Ya que cada individuo hereda un alelo de este gen de cada padre, puede tener en su herencia cromosómica cuatro tipos de pares de alelos del gen G: (G,G), (g,g), (G,g), (g,G)

* Los dos primeros tipos se denominan homocigóticos, y heterocigóticos los últimos. Consideremos, por simplicidad, el caso en el que el orden de los alelos no tiene ninguna influencia, es decir, consideramos indistinguibles (G,g) y (g,G)

* Así, tenemos tres tipos de individuos en relación con las características determinadas por el gen G: dos homocigóticos: (G,G) y (g,g), y un heterocigótico (G,g)

Ejemplo

Si pretendemos modelar la evolución de los caract. en sucesivas generaciones por herencia de los progenitores basta saber cómo son los emparejamientos.

Por ejemplo, supongamos que el emparejamiento en sucesivas generaciones es, siempre, con individuos de genotipo Gg. En esta situación se puede deducir el modelo siguiente

Si $P_n = \begin{pmatrix} P_n(GG) \\ P_n(Gg) \\ P_n(gg) \end{pmatrix} \Rightarrow P_{n+1} = M P_n$, donde $M = \begin{pmatrix} 0,5 & 0,25 & 0 \\ 0,5 & 0,5 & 0,5 \\ 0 & 0,25 & 0,5 \end{pmatrix}$

Cruzamos dos individuos, cada individuo proporciona gametos con un solo gen

2 genes $\begin{cases} G = \text{ojos negros (dominante)} \\ g = \text{ojos azules} \end{cases}$

GG = ojos negros
Gg = ojos negros
gg = ojos azules

flores

A = rojo
a = blanco

AA = rojo
Aa = rosa → se mezclan (no son dominantes)
aa = blanco

$x^{(n)}$ = Individuos (número) con genotipo GG en la etapa n-ésima

$y^{(n)}$ = " Gg "

$z^{(n)}$ = " gg "

① GG × Gg

GG Gg GG Gg

50% genotipo GG
50% genotipo Gg

② Gg × Gg

GG Gg Gg gg

25% genotipo GG
50% genotipo Gg
25% genotipo gg

③ gg × Gg

Gg gg Gg gg

50% genotipo Gg
50% genotipo gg

$$\begin{pmatrix} x^{(n+1)} \\ y^{(n+1)} \\ z^{(n+1)} \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} \boxed{0,5} & 0,25 & 0 \\ 0,5 & \boxed{0,5} & 0,5 \\ 0 & 0,25 & \boxed{0,5} \end{pmatrix}}_{M} \begin{pmatrix} x^{(n)} \\ y^{(n)} \\ z^{(n)} \end{pmatrix}$$

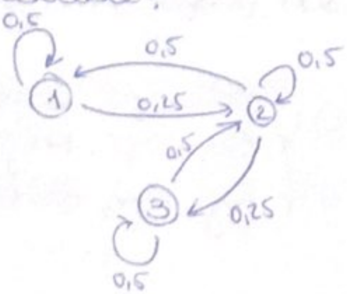
$x^{(n+1)} = 0,5x^{(n)} + 0,25y^{(n)} + 0z^{(n)}$

Matriz de peso o evolución $= M$

$\boxed{} > 0$

Matriz Markov por columnas $\to \rho(M) = 1 = \lambda_M$

¿Irreducible?



Fuertemente conectada

matriz irreducible

Por el Tma P-F $\lambda_M = 1 > 0$ y simple y dominante

Calculamos el vector de Perron (único vector propio

$u_1 \gg 0$ con $\|u_1\| = 1$

$(M - I)u = 0$

$$\begin{pmatrix} -0,5 & 0,25 & 0 \\ 0,5 & -0,5 & 0,5 \\ 0 & 0,25 & -0,5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u^1 \\ u^2 \\ u^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \left\{ \begin{array}{l} -0,5u^1 + 0,25u^2 = 0 \\ 0,5u^1 - 0,5u^2 + 0,5u^3 = 0 \\ 0,25u^2 - 0,5u^3 = 0 \end{array} \right.$$

$$\begin{cases} -0{,}5u^1+0{,}25u^2=0 \\ -0{,}25u^2+0{,}5u^3=0 \\ 0{,}25u^2-0{,}5u^3=0 \end{cases} \quad \begin{cases} u^3=1 \\ u^2=2 \\ u^1=1 \end{cases} \Rightarrow u=\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix} \qquad \|u\|_1=4$$

vector de Perron: $u_1=\frac{1}{\|u\|_1}u=\frac{1}{4}\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1/4\\1/2\\1/4\end{pmatrix}$

Interpretación asintótica:

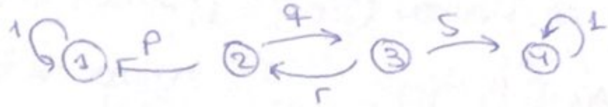
25% con genotipo GG

50% con genotipo Gg

25% con genotipo gg

Cadena regular → a largo plazo irá al vect. propio asoc. a $\lambda_1=1$

Cadena absorbente



$p, q>0$
$r, s>0$
$p+q=1$
$r+s=1$

Queremos que sea una cadena de Markov (mirando solo el grafo)

→ ① y ④ son nodos absorbentes

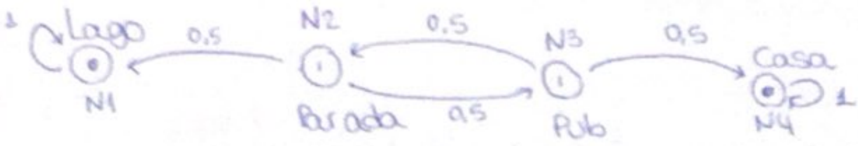
→ las 2 flechas que salen de ② van en la misma columna

$$\begin{array}{c|cccc} \text{entran} \backslash \text{salen} & ① & ② & ③ & ④ \\ \hline ① & 1 & p & 0 & 0 \\ ② & 0 & 0 & r & 0 \\ ③ & 0 & q & 0 & 0 \\ ④ & 0 & 0 & s & 1 \end{array}$$

"Caminata aleatoria"

Como los otros valores propios son $\lambda_2=0{,}5$ y $\lambda_3=0$, este procedimiento daría una buena estimación con un número de iteraciones relativamente pequeño.

Ejemplo. Problema del caminante borracho



Distancia entre nodos = 1 paso

$$A = \begin{array}{c} \\ \\ \\ \\ \end{array}\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & 4 & \\ \end{array}$$

$$A = \begin{array}{cc} \begin{array}{cccc} 1 & 2 & 3 & 4 \end{array} & \\ \begin{pmatrix} 1 & 0,5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0,5 & 0 \\ 0 & 0,5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0,5 & 1 \end{pmatrix} & \begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{array} \end{array}$$

Markov

reducible o irreducible
↳ pues el grafo no está fuertemente conectado

→ puedo hacer operaciones y resolver el problema

Renombramos los nodos, agrupando los nodos absorbentes

Matriz de Markov $\left(\sum_{i=1}^{4} a_{ij} = 1\right)_{j=1,\dots,4} \rightarrow \lambda_M = 1$ es valor propio, es el mayor de todos pero no tiene porqué ser dominante

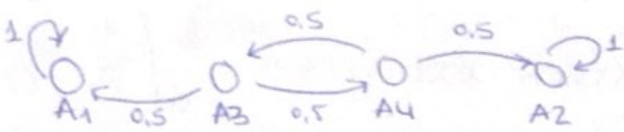
$$\left(\begin{array}{c|c} A_1 & B \\ \hline O & A_2 \end{array}\right)$$

A1 = N1

A2 = N4

A3 = N2

A4 = N3



$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0,5 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0,5 \\ 0 & 0 & 0 & 0,5 \\ 0 & 0 & 0,5 & 0 \end{pmatrix}$$

Markov

Reducible

$\lambda_M = 1$ es el mayor valor propio

$p_1^{(n)}$ = probabilidad de estar en el nodo A1 en el instante n

$p_2^{(n)}$ = " A2 "

$Q_1^{(n)}$ = " A3 "

$Q_2^{(n)}$ = " A4 "

$$\begin{array}{cccc} & A_1 & & B \\ \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 0,5 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0,5 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0,5 \\ 0 & 0 & 0,5 & 0 \end{array}\right) & & & \\ 0 & & A_2 & \end{array} \begin{pmatrix} p_1^{(n)} \\ p_2^{(n)} \\ \hline Q_1^{(n)} \\ Q_2^{(n)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_1^{(n+1)} \\ p_2^{(n+1)} \\ \hline Q_1^{(n+1)} \\ Q_2^{(n+1)} \end{pmatrix}$$

; $\mathbb{P}^{(n+1)} = M\,\mathbb{P}^{(n)}, n \geq 0$

Solución: $\mathbb{P}^{(n)} = M\,\mathbb{P}^{(0)}$

está en el pob

$$\mathbb{P}^{(0)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} ; \begin{pmatrix} p_1^{(0)} \\ p_2^{(0)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} Q_1^{(0)} \\ Q_2^{(0)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

estado inicial

Trabajando por bloques: $p^{(n)} = \begin{pmatrix} p_1^{(n)} \\ p_2^{(n)} \end{pmatrix}$, $Q^{(n)} = \begin{pmatrix} Q_1^{(n)} \\ Q_2^{(n)} \end{pmatrix}$

$A_1 p^{(n)} + B\, Q^{(n)} = p^{(n+1)}$ Ec(1)

$0 \cdot p^{(n)} + A_2 Q^{(n)} = Q^{(n+1)}$ Ec(2)

$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$; $A_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0,5 \\ 0,5 & 0 \end{pmatrix}$

$B = \begin{pmatrix} 0,5 & 0 \\ 0 & 0,5 \end{pmatrix}$, $0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

① Resolvemos (2)

$A_2 Q^{(n)} = Q^{(n+1)} \to$ solución $Q^{(n)} = A_2^n Q^{(0)}, n \geq 0$

$A_2^n \to A_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0,5 \\ 0,5 & 0 \end{pmatrix}$ Matriz positiva, no Markov

$\lambda_M = 0,5$ (lema de las cotas)

$\min C_i \leq \lambda_M \leq \max C_i$

$A_2 = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} J$

$A_2^{2n} = \left(\frac{1}{2}\right)^{2n} \overbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}^{I}$; $A_2^{2n+1} = \left(\frac{1}{2}\right)^{2n+1} \overbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}}^{J}$

$$\lim_{n\to\infty} A_2^n = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \lim_{n\to\infty} Q^{(n)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$ No va a estar nunca en los estados intermedios

El caminante no estará en A3 ni en A4.

② Resolvemos ec (1)

elem anterior

$$P^{(n+1)} = A_1 P^{(n)} + BQ^{(n)} = A_1[A_1 P^{(n-1)} + BQ^{(n-1)}] + B[A_2 Q^{(n-1)}] =$$

$$= A_1^2 P^{(n-1)} + [A_1 B + BA_2] Q^{(n-1)} =$$

$$= A_1^2 [A_1 P^{(n-2)} + BQ^{(n-2)}] + [A_1 B + BA_2] A_2 Q^{(n-2)} =$$

$$= A_1^3 P^{(n-2)} + [A_1^2 B + A_1 BA_2 + BA_2^2] Q^{(n-2)} = (A_1 = 1)$$ los primeros nodos son absorbentes

$$= P^{(n-2)} + [B + BA_2 + BA_2^2] Q^{(n-2)} =$$

$$= \cdots = P^{(0)} + B\sum_{i=0}^{n} A_2^i Q^{(0)} = B \sum_{i=0}^{n} A_2^i Q^{(0)}$$

Ejercicio 9 (rel. 3)

Sea A cuadrada con $|\lambda| < 1$ (y real), para todo valor propio de A. Demostrar

ⓐ $I - A$ es regular

ⓑ $\sum_{i=0}^{\infty} A^i = (I - A)^{-1}$

¿$\exists \lim_{n\to+\infty} \sum_{i=0}^{n} A_2^i$? $\quad A_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0.5 \\ 0.5 & 0 \end{pmatrix}$ Sabemos que $\lambda_M = 0.5$ (mayor valor propio) $\lambda_M \geq |\lambda_i|$

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{i=0}^{n} A_2^i = (I - A_2)^{-1}$$

luego

De este modo $\lim_{n\to\infty} P^{(n)} = B\left(\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} A_2^i\right) Q^{(0)} = B(I - A_2)^{-1} Q^{(0)} = \begin{pmatrix} 1/3 \\ 2/3 \end{pmatrix}$

casa ✓

Además $B = 0.5\,Id$