Solución ejercicios Tema 1

Manuel Vicente Bolaños Quesada

1. Comprueba que si $N \in \mathbb{N}$ y $1 \leq p < \infty$, entonces la aplicación $\|\cdot\|_p : \mathbb{R}^N \longrightarrow \mathbb{R}$ definida en cada $x \in \mathbb{R}^N$ como

$$\|x\|_p := \left(\sum_{j=1}^{N} |x_j|^p \right)^{1/p}$$

es una norma en dicho espacio vectorial.

Solución:

Caso 1: $p = 1$

- $\|x\|_1 := \sum_{j=1}^{N} |x_j|$. Por ser una suma de elementos no negativos, $\|x\|_1 \geq 0$, con igualdad si y solo si $x = 0$
- $\|x+y\|_1 = \sum_{j=1}^{N} |x_j + y_j| \leq \sum_{j=1}^{N} |x_j| + \sum_{j=1}^{N} |y_j| = \|x\|_1 + \|y\|_1$
- $\|\lambda x\|_1 = \sum_{j=1}^{N} |\lambda x_j| = \sum_{j=1}^{N} |\lambda||x_j| = |\lambda| \sum_{j=1}^{N} |x_j| = |\lambda| \, \|x\|_1$

Caso 2: $p = \infty$

- $\|x\|_\infty \geq 0$ por ser el máximo de varios valores no negativos. Por la misma razón, $\|x\|_\infty = 0 \Longleftrightarrow x = 0$.
- $\|x+y\|_\infty = \max_{1\leq j\leq N} |x_j + y_j| \leq \max_{1\leq j\leq N} |x_i| + \max_{1\leq j\leq N} |y_j| = \|x\|_\infty + \|y\|_\infty$
- $\|\lambda x\|_\infty = \max_{1\leq j\leq N} |\lambda x_j| = |\lambda| \max_{1\leq j\leq N} |x_j| = |\lambda| \, \|x\|_\infty$

Caso 3: $1 < p < \infty$

- $\|x\|_p \geq 0$ por ser una potencia de un número no negativo.
- $\|x\|_p = 0 \Longleftrightarrow x = 0$, trivialmente
- $\|\lambda x\|_p = \left(\sum_{j=1}^{N} |\lambda x_j|^p \right)^{1/p} = |\lambda| \left(\sum_{j=1}^{N} |x_j|^p \right)^{1/p} = |\lambda| \, \|x\|_p$

Sea p' el único número real tal que $1/p + 1/p‘ = 1$, o lo que es lo mismo: $p' = \dfrac{p}{p-1}$. Demostremos que se cumple la siguiente desigualdad:

$$x, y \geq 0 \implies xy \leq \frac{x^p}{p} + \frac{y^{p'}}{p'} \tag{1}$$

Para ello consideremos la función $f(x) = \dfrac{x^p}{p} + \dfrac{y^{p'}}{p'} - xy$, para $x \geq 0$, donde $y \geq 0$ lo consideramos fijo.

Tenemos que $f'(x) = x^{p-1} - y$. Entonces:

- $f'(x) \geq 0 \Leftrightarrow x \geq y^{\frac{1}{p-1}} \implies f$ es creciente si $x \geq y^{\frac{1}{p-1}}$

- $f'(x) \leq 0 \Leftrightarrow x \leq y^{\frac{1}{p-1}} \implies f$ es decreciente si $x \leq y^{\frac{1}{p-1}}$

$f(y^{\frac{1}{p-1}}) = \dfrac{y^{\frac{p}{p-1}}}{p} + \dfrac{y^{p'}}{p'} - y^{\frac{p}{p-1}} = y^{p'}\left(\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{p'} - 1\right) = 0$. Teniendo en cuenta esto y la monotonía de la función, deducimos que $f(x) \geq 0 \; \forall x, y \geq 0$, tal y como queríamos demostrar.
Probemos ahora que:

$$\sum_{j=1}^{N} |x_j y_j| \leq \left(\sum_{j=1}^{N} |x_j|^p\right)^{1/p} \left(\sum_{j=1}^{N} |y_j|^{p'}\right)^{1/p'} \tag{2}$$

Sea A el primer término del producto de la derecha y B el segundo. Haciendo $x = \dfrac{|x_i|}{A}$, $y = \dfrac{|y_i|}{B}$ en la desigualdad (1) obtenemos lo siguiente:

$$\frac{|x_i|}{A}\frac{|y_i|}{B} \leq \frac{|x_i|^p}{pA^p} + \frac{|y_i|^{p'}}{p'B^{p'}}$$

Sumando esta desigualdad para $i = 1, 2, 3, \ldots, N$, obtenemos

$$\sum_{j=1}^{N} \frac{|x_j y_j|}{AB} = \sum_{j=1}^{N} \frac{|x_j|}{A}\frac{|y_j|}{B} \leq \frac{1}{p}\frac{\sum_{i=1}^{N}|x_i|^p}{A^p} + \frac{1}{p'}\frac{\sum_{i=1}^{N}|y_i|^{p'}}{B^{p'}} = \frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1,$$

de donde

$$\sum_{j=1}^{N} |x_j y_j| \leq AB,$$

tal y como queríamos.

Por otra parte:

$$\begin{aligned}
\sum_{j=1}^{N}(|x_j| + |y_j|)^p &= \sum_{j=1}^{N} |x_j|(|x_j| + |y_j|)^{p-1} + \sum_{j=1}^{N} |y_j|(|x_j| + |y_j|)^{p-1} \\
&\leq \left(\sum_{j=1}^{N} |x_j|^p\right)^{1/p} \left(\sum_{j=1}^{N}(|x_j| + |y_j|)^{(p-1)p'}\right)^{1/p'} + \left(\sum_{j=1}^{N} |y_j|^p\right)^{1/p} \left(\sum_{j=1}^{N}(|x_j| + |y_j|)^{(p-1)p'}\right)^{1/p'} \\
&= \left(\sum_{j=1}^{N}(|x_j| + |y_j|)^p\right)^{1/p'} \left[\left(\sum_{j=1}^{N} |x_j|^p\right)^{1/p} + \left(\sum_{j=1}^{N} |y_j|^p\right)^{1/p}\right]
\end{aligned}$$

$$\iff \|x\|_p + \|y\|_p \geq \left(\sum_{j=1}^{N}(|x_j| + |y_j|)^p\right)^{1/p},$$

donde hemos usado la desigualdad (2) y hemos tenido en cuenta que $(p-1)p' = p$.
Usando la desigualdad triangular para el valor absoluto:

$$\|x\|_p + \|y\|_p \geq \left(\sum_{j=1}^{N}(|x_j| + |y_j|)^p\right)^{1/p} \geq \left(\sum_{j=1}^{N} |x_j + y_j|^p\right)^{1/p} = \|x + y\|_p$$

que es lo que nos faltaba para concluir que, en efecto, es una norma.

2. *Símbolos de Landau.* Sean $N \in \mathbb{N}$, A un subconjunto no vacío de $\mathbb{R}^N$, $f_1, f_2, g_1, g_2 : A \longrightarrow \mathbb{R}$ y supongamos que $x_0 \in \mathbb{R}^N$ es un punto de acumulación de A y que existe $\gamma > 0$ de forma que

$$\left.\begin{array}{c} x \in A \\ 0 < \|x - x_0\| < \gamma \end{array}\right| \implies g(x) \neq 0$$

Comprueba:

(a) $f(x) = o(g(x))$ cuando $x \to x_0 \implies f(x) = O(g(x))$ cuando $x \to x_0$.

(b) $f(x) = O(g_1(x))$ cuando $x \to x_0$ y $g_1(x) = O(g_2(x))$ cuando $x \to x_0 \implies f(x) = O(g_2(x))$ cuando $x \to x_0$ (Ídem para o).

(c) $f_1(x) = O(g_1(x))$ cuando $x \to x_0$ y $g_1(x) = O(g_2(x))$ cuando $x \to x_0 \implies f_1(x)f_2(x) = O(g_1(x)g_2(x))$ cuando $x \to x_0$ (Ídem para o).

(d) Dados $a, b, c \in \mathbb{R}$, $an^2 + bn + c = O(n^2)$ cuando $n \to \infty$

(e) Si $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ es una función polinómica, entonces $f(x) = o(e^x)$ cuando $x \to \infty$.

Solución

(a) $f(x) = o(g(x))$ cuando $x \to x_0 \implies \lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)} = 0 \implies \forall\, \varepsilon > 0,\ \exists\, \lambda > 0$ tal que si $x \in A$ y $0 < \|x - x_0\| < \lambda$, entonces $\left|\dfrac{f(x)}{g(x)}\right| < \varepsilon$. De aquí deducimos que $f(x) = O(g(x))$.

(b) Primera parte

$f(x) = O(g_1(x)) \implies \exists\, M_1 > 0$ y $0 < \delta_1 < \gamma$ tales que si $x \in A$ y $0 < \|x - x_0\| < \delta_1$, entonces $\left|\dfrac{f(x)}{g_1(x)}\right| < M_1$. Similarmente:

$g_1(x) = O(g_2(x)) \implies \exists\, M_2 > 0$ y $0 < \delta_2 < \gamma$ tales que si $x \in A$ y $0 < \|x - x_0\| < \delta_2$, entonces $\left|\dfrac{g_1(x)}{g_2(x)}\right| < M_2$.

Sea $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$ y sea $x \in A$ tal que $0 < \|x - x_0\| < \delta$. Entonces, $\left|\dfrac{f(x)}{g_1(x)}\right| < M_1$ y $\left|\dfrac{g_1(x)}{g_2(x)}\right| < M_2$. Multiplicando estas dos desigualdades, obtenemos $\left|\dfrac{f(x)}{g_2(x)}\right| < M_1M_2$, y por tanto, $f(x) = O(g_2(x))$.

Segunda parte

$f(x) = o(g_1(x)) \implies \lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x)}{g_1(x)} = 0$. Similarmente, $g_1(x) = o(g_2(x)) \implies \lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{g_1(x)}{g_2(x)} = 0$.

Entonces, $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x)}{g_1(x)} \lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{g_1(x)}{g_2(x)} = \lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x)}{g_1(x)}\dfrac{g_1(x)}{g_2(x)} = \lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x)}{g_2(x)} = 0 \cdot 0 = 0$, de donde $f(x) = o(g_2(x))$, tal y como queríamos.

(c) Primera parte

$f_1(x) = O(g_1(x)) \implies \exists\, M_1 > 0$ y $0 < \delta_1 < \gamma$ tales que si $x \in A$ y $0 < \|x - x_0\| < \delta_1$, entonces $\left|\dfrac{f_1(x)}{g_1(x)}\right| < M_1$. Similarmente:

$f_2(x) = O(g_2(x)) \implies \exists\, M_2 > 0$ y $0 < \delta_2 < \gamma$ tales que si $x \in A$ y $0 < \|x - x_0\| < \delta_2$, entonces $\left|\dfrac{f_2(x)}{g_2(x)}\right| < M_2$.

Sea $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$ y sea $x \in A$ tal que $0 < \|x - x_0\| < \delta$. Entonces, $\left|\dfrac{f_1(x)}{g_1(x)}\right| < M_1$ y $\left|\dfrac{f_2(x)}{g_2(x)}\right| < M_2$. Multiplicando estas dos desigualdades, obtenemos $\left|\dfrac{f_1(x)f_2(x)}{g_1(x)g_2(x)}\right| < M_1M_2$, y por tanto, $f_1(x)f_2(x) = O(g_1(x)g_2(x))$

Segunda parte

$f_1(x) = o(g_1(x)) \implies \lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f_1(x)}{g_1(x)} = 0$. Similarmente, $f_2(x) = o(g_2(x)) \implies \lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f_2(x)}{g_2(x)} = 0$.

Entonces, $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f_1(x)}{g_1(x)} \lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f_2(x)}{g_2(x)} = \lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f_1(x)}{g_1(x)}\dfrac{f_2(x)}{g_2(x)} = 0 \cdot 0 = 0$, de donde $f_1(x)f_2(x) = o(g_1(x)g_2(x))$, tal y como queríamos.

(d) $\left|\dfrac{an^2 + bn + c}{n^2}\right| = a + \dfrac{b}{n} + \dfrac{c}{n^2} < a + b + c$, por lo que $an^2 + bn + c = O(n^2)$

(e) Sea n el grado del polinomio $f(x)$, entonces la derivada n-ésima de $f(x)$ es una constante, y por lo tanto, si al límite $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{f(x)}{e^x}$ le aplicamos L'Hôpital n veces, obtenemos trivialmente que

$$\lim_{x \to \infty} \frac{f(x)}{e^x} = 0$$

.

3. Calcula el radio espectral de la matriz

$$A = \begin{bmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 1/4 & 0 \end{bmatrix}.$$

¿Qué podemos afirmar sobre la sucesión $\{A^n\}_{n\geq 1}$?

Solución:

Vamos a hallar los valores propios de la matriz A:

$$0 = \det \begin{pmatrix} 1/2-\lambda & 1/2 \\ 1/4 & -\lambda \end{pmatrix} = -\lambda(1/2-\lambda) - 1/8 = \lambda^2 - \frac{1}{2}\lambda - \frac{1}{8}$$

Las soluciones de esa ecuación son $\lambda_1 = \dfrac{1+\sqrt{3}}{4}$ y $\lambda_2 = \dfrac{1-\sqrt{3}}{4}$.

Entonces, $\rho(A) = \max\{|\lambda_1|, |\lambda_2|\} = |\lambda_1| = \dfrac{1+\sqrt{3}}{4}$

Como $\rho(A) < 1$, lo que podemos afirmar de la sucesión $\{A^n\}_{n\geq 1}$ es que converge a 0.

4. Encuentra una matriz $A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ y una norma matricial $\|\cdot\|$ en $\mathbb{R}^{3\times 3}$ de forma que $\rho(A) < 1$ pero $\|A\| \geq 1$.

Solución:

Consideramos la matriz $A = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 \\ 1 & 0 & 1/2 \end{pmatrix}$. Su único valor propio es $\lambda = 1/2$, con multiplicidad 3, y por tanto $\rho(A) = 1/2 < 1$. Si consideramos la norma $\|\cdot\|_1$ inducida en $\mathbb{R}^{M\times N}$, $\|A\|_1 = 3/2$.

5. Demuestra que toda función real definida en un intervalo y de clase C^1 es estable, pero que el recíproco no es cierto. Comprueba además que la función $f : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}$ definida en cada $x \in \mathbb{R}_+$ como

$$f(x) := \sqrt{x}$$

no es estable en cero. ¿Podemos asegurar que toda función real definida en un intervalo que sea estable en todo su domino es de clase C^1? Justifica tu respuesta.

Solución:

Sea $f : I \longrightarrow Y$, de clase C^1, donde I es un intervalo. Nos preguntamos si existen $M, \delta > 0$ tales que si $y \in Y$ y $|y - y_0| < \delta$, entonces $|g(y) - g(y_0)| < M|y - y_0|$.

Tomemos $\delta = 1$. Por el Teorema del valor medio, sabemos que existe c, entre y e y_0 tal que $f(y) - f(y_0) = f'(c)(y - y_0)$, de donde $|f(y) - f(y_0)| = |f'(c)| \cdot |y - y_0|$.

Como $c \in [y_0 - 1, y_0 + 1]$, tenemos que $|f'(c)| \leq \max\limits_{y\in[y_0-1,y_0+1]} |f'(y)| = S$, máximo cuya existencia está garantizada por el Teorema de Weierstrass.

Si tomamos $M = 1 + S$, tenemos que $g(y) - g(y_0)| < M|y - y_0|$, tal y como queríamos probar.

Comprobemos ahora que la función $f : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}$ definida para cada $x \in \mathbb{R}_+$ como $f(x) := \sqrt{x}$ no es estable en $x = 0$. Dado un $\delta > 0$ tal que $0 < |x - x_0| = x < \delta$, tenemos que

$$\frac{|\sqrt{x} - \sqrt{0}|}{|x - 0|} = \frac{|\sqrt{x}|}{|x|} = \frac{\sqrt{x}}{x} = \frac{1}{\sqrt{x}}$$

Como $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1}{\sqrt{x}} = +\infty$, la función f no es estable en $x = 0$.

La respuesta a la última pregunta es negativa. Si f es estable, entonces es uniformemente continua y, por tanto, continua, pero que sea continua no asegura que sea de clase C^1.

6. Decide en función del parámetro $a \in \mathbb{R}$ si el problema:

$$\text{dado } \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2, \text{ encontrar } \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2 : \begin{bmatrix} 1 & a \\ a & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix}$$

está bien planteado. Para los valores de a que hagan que dicho problema esté bien planteado, estudia su condicionamiento en $\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.1 \\ 0.22 \end{bmatrix}$ y el de la matriz de coeficientes, referidos ambos a una conveniente norma que elijas.

Solución:

Consideremos la norma $\|\cdot\|_1$ a partir de ahora en adelante.

Sea $A = \begin{bmatrix} 1 & a \\ a & 1 \end{bmatrix}$. La resolvente es $g(y) = A^{-1}y$. Para que el problema esté bien planteado, necesitamos que $\det(A) \neq 0 \Longleftrightarrow 1 - a^2 \neq 0 \Longrightarrow a \neq \pm 1$. En ese caso, $A^{-1} = \begin{bmatrix} \dfrac{1}{1-a^2} & \dfrac{-a}{1-a^2} \\ \dfrac{-a}{1-a^2} & \dfrac{1}{1-a^2} \end{bmatrix}$.

Sea $y_0 = \begin{bmatrix} 1.1 \\ 0.22 \end{bmatrix}$. Entonces $x_0 = g(y_0) = A^{-1}y_0 = \begin{bmatrix} \dfrac{1}{1-a^2} & \dfrac{-a}{1-a^2} \\ \dfrac{-a}{1-a^2} & \dfrac{1}{1-a^2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1.1 \\ 0.22 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dfrac{1.1 - 0.22a}{1-a^2} \\ \dfrac{0.22 - 1.1a}{1-a^2} \end{bmatrix}$

Tenemos entonces:

$$\|A^{-1}\|_1 = \left|\frac{1}{1-a^2}\right| + \left|\frac{-a}{1-a^2}\right| = \frac{1+|a|}{|1-a^2|}$$

$$\|y_0\|_1 = 1.32$$

$$\|x_0\|_1 = \left|\frac{1.1 - 0.22a}{1-a^2}\right| + \left|\frac{0.22 - 1.1a}{1-a^2}\right| = \frac{|1.1 - 0.22a| + |0.22 - 1.1a|}{|1-a^2|}$$

$$\|A\| = 1 + |a|$$

Entonces,

$$c(g, y_0) = \frac{\|A^{-1}\|\|y_0\|}{\|x_0\|} = \frac{1.32 \cdot (1 + |a|)}{|1.1 - 0.22a| + |0.22 - 1.1a|}$$

Y el condicionamiento de la matriz de coeficientes vendrá dado por la expresión:

$$c(A) = \|A^{-1}\|\|A\| = \frac{(1+|a|)^2}{|1-a^2|}$$

7. Sean $N \in \mathbb{N}$ y $\|\cdot\|$ una norma matricial en $\mathbb{R}^{N\times N}$ inducida por una norma en $\mathbb{R}^N$. Prueba que

$$\min\{c(A) : A \in \mathbb{R}^{N\times N \text{ regular}}\} = 1$$

y que si $A, B \in \mathbb{R}^{N\times N}$ son matrices regulares, entonces

$$c(AB) \leq c(A)c(B)$$

Solución:

$$c(A) = \|A^{-1}\|\|A\| \geq \|A^{-1}A\| = \|I\| = 1$$

Como $c(I) = 1$, donde I es la matriz identidad, tenemos que

$$\min\{c(A) : A \in \mathbb{R}^{N\times N} \text{ regular}\} = 1$$

Por otra parte,

$$c(A)c(B) = \|A^{-1}\|\|A\|\|B^{-1\|}B\| = \|A^{-1}\|\|B^{-1}\|\|A\|\|B\| \geq \|A^{-1}B^{-1}\|\|AB\| = c(AB)$$

8. Estudia el condicionamiento de las siguiente funciones en todos los puntos de su dominio y discute los puntos de mal condicionamiento que eventualmente puedan existir:

   (a) $f(x) = e^x \sin x, \qquad (0 < x < \pi)$.

(b) $f(x) = 2 - 4\cos x, \qquad (-\pi/2 < x < \pi/2).$

(c) $f(x) = \log \sqrt{x}, \qquad (x > 0).$

Solución:

(a) Tenemos que $x \neq 0 \neq f(x), \forall x \in (0, \pi)$, así que

$$c(f,x) = \left|\frac{f'(x)x}{f(x)}\right| = \left|\frac{xe^x(\sin(x)+\cos(x))}{e^x\sin(x)}\right| = \left|\frac{x(\sin(x)+\cos(x))}{\sin(x)}\right|$$

Estudiemos los siguientes límites, usando la regla de L'Hôpital:

- $\displaystyle\lim_{x\to 0^+}\frac{x(\sin(x)+\cos(x))}{\sin(x)} = \lim_{x\to 0^+} x + \frac{x\cos x}{\sin x} = \lim_{x\to 0^+}\frac{x}{\tan x} = \lim_{x\to 0^+}\frac{1}{1+\tan^2 x} = 1$
- $\displaystyle\lim_{x\to \pi^-}\frac{x(\sin(x)+\cos(x))}{\sin(x)} = \lim_{x\to \pi^-} x + \frac{x\cos x}{\sin x} = \pi + \lim_{x\to \pi^-}\frac{x}{\tan x} = \infty$

Así que la función está mal condicionada en los puntos cercanos a π.

(b) $f'(x) = 4\sin x \ \forall x \in]-\pi/2, \pi/2[$.
En el punto $x = 0$, tenemos que $c(f,0) = |f'(0)| = 0$.
$f(x) = 0 \Longleftrightarrow \cos x = \dfrac{1}{2} \Longleftrightarrow x = \pm\pi/3$. Tenemos entonces que $c(f, \pm\pi/3) = |f'(\pm\pi/3)| = 2\sqrt{3}$
Supongamos que $x \neq 0, \pm\pi/3$. Entonces

$$c(f,x) = \left|\frac{f'(x)x}{f(x)}\right| = \left|\frac{4x\sin(x)}{2-4\cos(x)}\right|$$

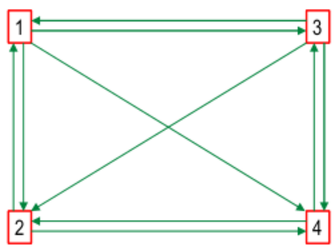
Como $\displaystyle\lim_{x\to\pm\pi/3} c(f,x) = +\infty$, deducimos que la función no está bien condicionada en los puntos cercanos a $\pm\pi/3$.

(c) $f(x) = \dfrac{\log x}{2} \implies f'(x) = \dfrac{1}{2x}$
$f(x) = 0 \Longleftrightarrow x = 1$. En este caso, $c(f,1) = |f'(1)| = \dfrac{1}{2}$. Si $x \neq 1$ tenemos que

$$c(f,x) = \left|\frac{1}{\log(x)}\right|$$

Como $\displaystyle\lim_{x\to 1} = +\infty$ deducimos que la función está mal condicionada en los puntos cercanos al 1, pero no en $x = 1$.

9. Modeliza matemáticamente la relevancia de cada una de las cuatro páginas web que aparecen en la figura, de acuerdo con el algoritmo PageRank de Google y teniendo en cuenta la estructura de enlaces mutuos.



Solución:

La solución tiene que estar normalizada (valor máximo 10)

$$\left.\begin{aligned} x_1 &= \tfrac{x_2}{2} + \tfrac{x_3}{3} \\ x_2 &= \tfrac{x_1}{3} + \tfrac{x_3}{3} + \tfrac{x_4}{2} \\ x_3 &= \tfrac{x_1}{3} + \tfrac{x_4}{2} \\ x_4 &= \tfrac{x_1}{3} + \tfrac{x_2}{2} + \tfrac{x_3}{3} \end{aligned}\right\}$$

Restando la segunda y cuarta ecuación obtenemos:

$$x_2 - x_4 = \frac{x_4}{2} - \frac{x_2}{2} \implies x_2 = x_4$$

Como además, de la primera y cuarta ecuación obtenemos que $x_1 = x_4 - \dfrac{x_1}{3} < x_4$, y de la tercera y segunda ecuación obtenemos que $x_3 = x_2 - \dfrac{x_3}{3} < x_2$, tenemos que x_2 y x_4 son los mayores valores, y por tanto $x_2 = x_4 = 10$. Sustituyendo estos valores y resolviendo el sencillo sistema obtenemos que $x_1 = x_3 = 7.5$

Así pues,

$$x_2 = x_4 > x_1 = x_3$$

10. Decide razonadamente la validez del siguiente razonamiento: "En la sucesión de Fibonacci, al ser $n \in \mathbb{N} \implies x_{n+2} = x_{n+1} + x_n$, dividiendo por x_{n+1} obtenemos:

$$\frac{x_{n+2}}{x_{n+1}} = 1 + \frac{1}{\frac{x_{n+1}}{x_n}}$$

luego notando $l = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{x_{n+1}}{x_n}$, se tiene de la igualdad anterior que $l = 1 + \dfrac{1}{l} \iff l^2 - l - 1 = 0$, y como $l \geq 0$, entonces $l = \Phi$

Solución:

El razonamiento estaría perfecto si antes se hubiera demostrado que la sucesión $\left\{\dfrac{x_{n+1}}{x_n}\right\}_{n\in\mathbb{R}}$ es convergente. Sin haber hecho esto, el razonamiento no es correcto, ya que hay sucesiones que verifican una relación de recurrencia y no convergen, como ocurre con la sucesión dada por:

$$x_1 = 1$$

y

$$x_{n+1} = -x_n + 1, \ \forall n \in \mathbb{N}$$

11. Obtén la representación posicional binaria de los números

(a) 8.275

(b) -6.6875

(c) $5/7$.

Solución:

(a)
- $8 = 2^3 = (1000)_2$
- $0.275 = \dfrac{275}{1000} = \dfrac{11}{40} = \dfrac{1}{2^2}\dfrac{44}{40} = \dfrac{1}{2^2}(1 + \dfrac{1}{10}) = \dfrac{1}{2^2}(1 + \dfrac{1}{2^4}\dfrac{16}{10}) = \dfrac{1}{2^2}(1 + \dfrac{1}{2^4}(1 + \dfrac{3}{5})$

$$= \frac{1}{2^2}(1 + \frac{1}{2^4}(1 + \frac{1}{2}\frac{6}{5})) = \frac{1}{2^2}(1 + \frac{1}{2^4}(1 + \frac{1}{2}\left[1 + \frac{1}{5}\right])) = \frac{1}{2^2}(1 + \frac{1}{2^4}(1 + \frac{1}{2}(1 + \frac{1}{2^3}\frac{8}{5})))$$
$$= \frac{1}{2^2}(1 + \frac{1}{2^4}(1 + \frac{1}{2}(1 + \frac{1}{2^3}(1 + \frac{3}{5})))) = \frac{1}{2^2}(1 + \frac{1}{2^4}(1 + \frac{1}{2}(1 + \frac{1}{2^3}(1 + \frac{1}{2}\frac{6}{5}))))$$
$$= \frac{1}{2^2}(1 + \frac{1}{2^4}(1 + \frac{1}{2}(1 + \frac{1}{2^3}(1 + \frac{1}{2}(1 + \frac{1}{5})))))$$
$$= \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^6}(1 + \frac{1}{2}(1 + \frac{1}{2^3}(1 + \frac{1}{2}(1 + \frac{1}{5}))))$$
$$= \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^6} + \frac{1}{2^7}(1 + \frac{1}{2^3}(1 + \frac{1}{2}(1 + \frac{1}{5})))$$
$$= \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^6} + \frac{1}{2^7} + \frac{1}{2^{10}}(1 + \frac{1}{2}(1 + \frac{1}{5}))$$
$$= \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^6} + \frac{1}{2^7} + \frac{1}{2^{10}} + \frac{1}{2^{11}}\left[1 + \frac{1}{5}\right] = (0.01000\overline{1100})_2$$

Entonces, $8.275 = (1000.01000\overline{1100})_2$

(b)
- $6 = 2 \cdot 3 = 2(2 + 1) = 2 + 2^2 (110)_2$

- $0.6875 = \frac{11}{16} = \frac{1}{2}\frac{11}{8} = \frac{1}{2}(1+\frac{3}{8}) = \frac{1}{2}(1+\frac{1}{2^2}\frac{3}{2}) = \frac{1}{2}(1+\frac{1}{2^2}(1+\frac{1}{2})$
  $= \frac{1}{2} + \frac{1}{2^3}(1+\frac{1}{2}) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{2^4} = (0.1011)_2$

  Entonces, $-6.6875 = -(110.1011)_2$

(c) $\frac{5}{7} = \frac{1}{2}\frac{10}{7} = \frac{1}{2}(1+\frac{3}{7}) = \frac{1}{2}(1+\frac{1}{2^2}\frac{12}{7}) = \frac{1}{2}(1+\frac{1}{2^2}(1+\frac{5}{7})) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2^3}(1+\frac{5}{7})$
$= \frac{1}{2} + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{2^3}\frac{5}{7} = (0.\overline{101})_2$

12. ¿Es posible encontrar un número real con representación posicional decimal infinita y binaria finita? ¿Por qué? De forma más general, ¿qué debe cumplir una base b para que toda representación posicional finita en dicha base sea también finita en base 10?

    Solución:

    a) Supongamos que x es un número real con representación posicional decimal infinita, y binaria finita. Sin pérdida de generalidad, asumamos que $0 < x < 1$ Entonces, $x = (0.a_1a_2 \ldots a_n)_2$
    Entonces, $x = \sum_{i=1}^{n} a_i 2^{-i} = \sum_{i=1}^{n} \frac{5^i a_i}{10^i}$, que es un número real, que tiene representación decimal finita, contradiciendo la hipótesis.

    b) Veamos que la representación posicional decimal en la base b del número x es finita implica que la representación posicional decimal de x es finita si y solo si $b = 2^s 5^t$, para algunos $s, t \in \mathbb{N}_0$.
    $\Longrightarrow$) Sea $x = (0.1)_b$. Entonces, $x = \frac{1}{b}$, que tiene que tener un número real con representación posicional decimal finita. Esto ocurre si y solo si la descomposición en primos del número b solo tiene como factores el 2 y el 5.
    $\Longleftarrow$) Sea $b = 2^s 5^t$, para algunos $s, t \in \mathbb{N}_0$. Sea $m = \min\{s,t\}$. Sea x un número real con representación posicional en la base b finita. Sin pérdida de generalidad, $0 < x < 1$. Entonces, $x = (0.a_1a_2 \ldots a_n)_b$.
    Entonces, $x = \sum_{i=1}^{n} \frac{a_i}{b^i} = \sum_{i=1}^{n} \frac{a_i}{(2^s 5^t)^i} = \sum_{i=1}^{n} \frac{a_i \cdot 2^{(m-s)i} \cdot 5^{(m-t)i}}{(2^m 5^m)^i} = \sum_{i=1}^{n} \frac{a_i \cdot 2^{(m-s)i} \cdot 5^{(m-t)i}}{(10^m)^i}$, número cuya representación decimal es finita claramente.

13. Fijada una base b, sean $k \geq 1, 0 \leq a_{k+1}, a_{k+2}, \cdots \leq b-1$ y $0 \leq a_k < b-1$. Demuestra que

$$(0.0 \cdots 0 a_k a_{k+1} a_{k+2} \cdots)_b \leq (0.0 \cdots 0 a_k + 1)_b.$$

    Solución:

$$\begin{aligned}
(0.0 \cdots 0 a_k a_{k+1} a_{k+2} \cdots)_b = \frac{a_k}{b^k} + \frac{a_{k+1}}{b^{k+1}} + \frac{a_{k+2}}{b^{k+2}} + \cdots &\leq \frac{a_k}{b^k} + \frac{b-1}{b^{k+1}} + \frac{b-1}{b^{k+2}} + \cdots \\
&= \frac{a_k}{b^k} + \frac{b-1}{b^{k+1}}\left(1 + \frac{1}{b} + \frac{1}{b^2} + \cdots\right) \\
&= \frac{a_k}{b^k} + \frac{b-1}{b^{k+1}}\frac{b}{b-1} \\
&= \frac{a_k}{b^k} + \frac{1}{b^k} \\
&= \frac{a_k + 1}{b^k} \\
&= (0.0 \cdots 0\ a_k + 1)_b
\end{aligned}$$

14. Describe todos los números estrictamente positivos del sistema de punto flotante $\mathbb{F}(2, 3, -1, 2)$. Calcula su épsilon máquina y su precisión. Obtén además la truncatura y el redondeo en dicho sistema del número real 3.25, comprobando que los correspondientes errores relativos están acotados por el épsilon máquina y la precisión.

    Solución:

$$(0.111) \cdot 2^2 = \frac{7}{2}, \qquad (0.110) \cdot 2^2 = 3, \qquad (0.101) \cdot 2^2 = \frac{5}{2}, \qquad (0.100) \cdot 2^2 = 2$$

$$(0.111)\cdot 2 = \frac{7}{4}, \qquad (0.110)\cdot = \frac{3}{2}, \qquad (0.101)\cdot = \frac{5}{4}, \qquad (0.100)\cdot 2 = 1$$

$$(0.111)\cdot 2^0 = \frac{7}{8}, \qquad (0.110)\cdot 2^0 = \frac{3}{4}, \qquad (0.101)\cdot 2^0 = \frac{5}{8}, \qquad (0.100)\cdot 2^0 = \frac{1}{2}$$

$$(0.111)\cdot 2^{-1} = \frac{7}{16}, \qquad (0.110)\cdot 2^{-1} = \frac{3}{8}, \qquad (0.101)\cdot 2^{-1} = \frac{5}{16}, \qquad (0.100)\cdot 2^{-1} = \frac{1}{4}$$

Calculamos ahora el épsilon máquina.

$$\varepsilon_M = 2^{1-3} = 0.25$$

Y ahora la precisión:

$$u = \frac{1}{2}\varepsilon_M = 0.125$$

Tenemos que $3 = (11.01)_2 = (0.1101)\cdots 2^2$

Así que:

$$\mathrm{tr}(3.25) = (0.110)\cdot 2^2 = 3 \qquad \left(\frac{|x-\mathrm{tr}(x)|}{|x|} = \frac{0.25}{3.25} = \frac{1}{13} < \varepsilon_M\right)$$

$$\mathrm{rd}(3.25) = (0.111)\cdot 2^2 = 3.5 \qquad \left(\frac{|x-\mathrm{rd}(x)|}{|x|} = \frac{0.25}{3.25} = \frac{1}{13} < u\right)$$

15. Considera un sistema de punto flotante $\mathbb{F}(b,t,L,U)$ con $L < U$. Sean $L \leq e < e' \leq U$ y $(0.a_1\cdots a_t)\cdot b^e$, $(0.\alpha_1\cdots\alpha_t)\cdot b^{e'} \in \mathbb{F}(b,t,L,U)$. Demuestra que

$$(0.a_1\cdots a_t)\cdot b^e < (0.\alpha_1\cdots\alpha_t)\cdot b^{e'}.$$

Deduce la distribución de los puntos del sistema de punto flotante $\mathbb{F}(b,t,L,U)$.

Solución:

Demostremos primero que $b^e - b^{e-t} < b^{e'-1}$.

$$b^e - b^{e-t} - b^{e'-1} = b^e\left(1 - b^{-t} - b^{e'-e-1}\right) \leq b^e\left(1 - b^{-t} - 1\right) = -b^{e-t} < 0$$

tal y como queríamos.

Entonces

$$\begin{aligned}(0.a_1a_2\ldots a_t)\cdot b^e = b^e\sum_{i=1}^{t} a_i b^{-i} \leq b^e\sum_{i=1}^{t}(b-1)b^{-i} = b^e(b-1)\sum_{i=1}^{t} b^{-i} &= b^e(b-1)\left(\frac{b^t-1}{b^t(b-1)}\right)\\ &= b^e\left(1-\frac{1}{b^t}\right)\\ &= b^e - b^{e-t}\\ &< b^{e'-1}\\ &\leq b^e\sum_{i=1}^{t}\alpha_i b^{-i}\\ &= (0.\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_t)\cdot b^{e'}\end{aligned}$$

Los puntos de este sistema de punto flotante están distribuidos de forma que si el exponente de la base que multiplica al número es mayor que el de otro, entonces el primero es mayor que el segundo.

16. Sea $\{x_n\}_{n\geq 0}$ la sucesión de números reales definida para cada $n \in \mathbb{N}\cup\{0\}$ como

$$x_n := \int_0^1 \frac{x^n}{x+3}dx.$$

Justifica razonadamente que esta sucesión verifica la recurrencia

$$x_0 = \log(4/3)$$

y

$$n \geq 1 \implies x_n = \frac{1}{n} - 3x_{n-1}.$$

Para estudiar la propagación del error, parte en la recurrencia anterior de un redondeo de x_0 con 5 cifras significativas ($t = 5$). De forma más general, analiza la propagación del error cuando se parte de $x_0 + \delta$, con $\delta \in \mathbb{R}$. Expresa x_n como $f_n(x_0)$, para una conveniente función f_n y halla su condicionamiento en x_0.

Solución:

$x_0 = \displaystyle\int_0^1 \frac{1}{x+3}dx = \log(x+3)|_0^1 = \log(4) - \log(3) = \log(4/3)$ Sea $n \geq 1$. Tenemos entonces que

$$\frac{x}{x+3} = 1 - \frac{3}{x+3} \implies \frac{x^n}{x+3} = x^{n-1} - \frac{3x^{n-1}}{x+3}$$

Entonces

$$\int_0^1 \frac{x^n}{x+3}dx = \int_0^1 \left(x^{n-1} - \frac{3x^{n-1}}{x+3}\right)dx = \int_0^1 x^{n-1}dx - 3\int_0^1 \frac{x^{n-1}}{x+3}dx = \frac{1}{n} - 3\int_0^1 \frac{x^{n-1}}{x+3}dx$$

O, equivalentemente,

$$x_n = \frac{1}{n} - 3x_{n-1}$$

tal y como se pedía demostrar.

Estudiemos la propagación del error, partiendo en la recurrencia anterior de un redondeo de x_0 con 5 cifras significativas. Así pues, $x_0 = 0.28768$.

- $x_1 = 1 - 3x_0 = 0.13696$
- $x_2 = 1/2 - 3x_1 = 0.08912$
- $x_3 = 1/3 - 3x_2 = 0.06597$
- $x_4 = 1/4 - 3x_3 = 0.05208$

Estudiamos el error relativo:

$$\frac{|0.05208 - x_4|}{|x_4|} = \frac{|0.05208 + 93/4 - 81\log(4/3)|}{|-93/4 + 81\log(4/3)|} = 0.0032129$$

Estudiemos ahora la propagación del error, cuando se parte de $x_0 + \delta$, con $\delta \in \mathbb{R}$.

- $x_0 = x_0 + \delta$
- $x_1 = 1 - 3(x_0 + \delta) = 1 - 3x_0 - 3\delta$
- $x_2 = 1/2 - 3x_1 = 1/2 - 3 + 9x_0 + 9\delta$
- $x_3 = 1/3 - 3x_2 = 1/3 - 3/2 + 9 - 27x_0 - 27\delta$

Así vemos que del valor real al obtenido hay una diferencia de $|3^n\delta|$

Vamos a expresar x_n como $f_n(x_0)$, y vamos a hallar su condicionamiento en x_0

Probemos por inducción que $x_n = f_n(x_0) = \alpha_n + (-3)^n x_0$, para alguna constante α_n. Para $n = 1$ tenemos $x_1 = 1 - 3x_0 = f_1(x_0)$. Supongamos ahora que se cumple para un $n \in \mathbb{N}$. Entonces,

$$x_{n+1} = \frac{1}{n+1} - 3x_n = \frac{1}{n+1} - 3(\alpha_n + (-3)^n x_0 = \overbrace{\frac{1}{n+1} - 3\alpha_n}^{\alpha_{n+1}} + (-3)^{n+1}x_0 = \alpha_{n+1} + (-3)^{n+1}x_0$$

tal y como queríamos ver.

Demostremos ahora que $x_n \geq x_{n+1}$ para todo $n \in \mathbb{N}_0$ Como $0 \leq x \leq 1$, $\dfrac{x^n}{x+3} \geq \dfrac{x^{n+1}}{x+3}$, de donde $\displaystyle\int_0^1 \frac{x^n}{x+3}dx \geq \int_0^1 \frac{x^{n+1}}{x+3}dx$, o, equivalentemente, $x_n \geq x_{n+1}$. Además, $x_0 > x_1$, trivialmente. Entonces,

$$c(f_n, x_0) = \left|\frac{f_n'(x_0)x_0}{f_n(x_0)}\right| = \left|\frac{(-3)^n x_0}{x_n}\right| \geq \left|\frac{(-3)^n x_0}{x_0}\right| = |(-3)^n| = 3^n$$

así que la función f_n está mal condicionada en x_0 para todo $n \in \mathbb{N}_0$.

17. Deduce razonadamente la expresión explícita de la norma matricial inducida en el espacio de matrices por la norma 1.

Sean $A \in \mathbb{R}^{N\times M}$ y $x \in \mathbb{R}^N$ tal que $\|x\|_1 = 1$, o, equivalentemente, $\displaystyle\sum_{i=1}^{N} |x_i| = 1$. Entonces

$$\begin{aligned}\|Ax\|_1 = \sum_{i=1}^{M}\left|\sum_{j=1}^{N} a_{ij}x_j\right| \leq \sum_{i=1}^{M}\sum_{j=1}^{N}|a_{ij}||x_j| = \sum_{j=1}^{N}|x_j|\left(\sum_{i=1}^{M}|a_{ij}|\right) &\leq \max_{1\leq j\leq N}\sum_{i=1}^{M}|a_{ij}|\|x\| \\ &= \max_{1\leq j\leq N}\sum_{i=1}^{M}|a_{ij}|\end{aligned}$$

Entonces $\|A\|_1 = \displaystyle\max_{\|x\|_1=1}\|Ax\|_1 \leq \max_{1\leq j\leq N}\sum_{i=1}^{M}|a_{ij}|$, es decir, $\displaystyle\max_{1\leq j\leq N}\sum_{i=1}^{M}|a_{ij}|$ es una cota superior de $\|A\|_1$.

Por otra parte, existe un $k \in \mathbb{N}$ tal que $1 \leq k \leq N$ y $\displaystyle\max_{1\leq j\leq N}\sum_{i=1}^{M}|a_{ij}| = \sum_{i=1}^{M}|a_{ik}|$. Sea entonces $v = (0, \ldots, 1, \ldots, 0)$, donde el 1 está en la posición k-ésima. Es claro que $\|v\|_1 = 1$. Entonces:

$$\|Av\|_1 = \sum_{i=1}^{M}|a_{ik}| = \max_{1\leq j\leq N}\sum_{i=1}^{M}|a_{ij}|.$$

Deducimos entonces que la cota superior se alcanza y por tanto $\|A\|_1 = \displaystyle\max_{1\leq j\leq N}\sum_{i=1}^{M}|a_{ij}|$

18. Deduce razonadamente la expresión explícita del n-ésimo término de la sucesión de Fibonacci.

La sucesión de Fibonacci es la sucesión $\{f_n\}_{n\geq 0}$ definida como

$$f_0 = 0, f_1 = 1 \text{ y } n \geq 1 \implies f_{n+1} = f_n + f_{n+1}$$

Podemos expresar esta recurrencia como

$$\begin{bmatrix}0 & 1\\ 1 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}f_{n-1}\\ f_n\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}f_n\\ f_{n+1}\end{bmatrix}.$$

Probemos primero que $\begin{bmatrix}0 & 1\\ 1 & 1\end{bmatrix}^n\begin{bmatrix}0\\ 1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}f_n\\ f_{n+1}\end{bmatrix}$. Procedemos por inducción. Los casos $n = 0, 1$ son triviales. Sea $n \geq 2$. Entonces:

$$\begin{bmatrix}0 & 1\\ 1 & 1\end{bmatrix}^n\begin{bmatrix}0\\ 1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0 & 1\\ 1 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0 & 1\\ 1 & 1\end{bmatrix}^{n-1}\begin{bmatrix}0\\ 1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0 & 1\\ 1 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}f_{n-1}\\ f_n\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}f_n\\ f_{n+1}\end{bmatrix}$$

tal y como queríamos probar. Llamemos $A = \begin{bmatrix}0 & 1\\ 1 & 1\end{bmatrix}$ para abreviar. Hallemos los valores propios de A.

$$0 = p_A(\lambda) = -\lambda(1-\lambda) - 1 = \lambda^2 - \lambda - 1 \iff (x-\phi)(x-\psi) = 0$$

de donde los valores propios son $\lambda_1 = \phi$ y $\lambda_2 = \psi$. Calculemos ahora los subespacios propios asociados a esos valores propios.

$$V_{\lambda_1} = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | \begin{bmatrix} -\phi & 1 \\ 1 & 1-\phi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right\} = \big\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | -\phi \cdot x + y = 0\big\} = L(\{1, \phi\})$$

$$V_{\lambda_2} = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | \begin{bmatrix} -\psi & 1 \\ 1 & 1-\psi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right\} = \big\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | -\psi \cdot x + y = 0\big\} = L(\{1, \psi\})$$

Sean $D = \begin{bmatrix} \phi & 0 \\ 0 & \psi \end{bmatrix}$ y $P = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ \phi & \psi \end{bmatrix}$. Fácilmente se obtiene que $P^{-1} = \begin{bmatrix} \dfrac{\sqrt{5}-1}{2\sqrt{5}} & 1/\sqrt{5} \\ \dfrac{1+\sqrt{5}}{2\sqrt{5}} & -1/\sqrt{5} \end{bmatrix}$. Tenemos entonces que $A = P \cdot D \cdot P^{-1}$, de donde $A^n = P \cdot D^n \cdot P^{-1}$. Entonces

$$\begin{aligned}
\begin{bmatrix} f_n \\ f_{n+1} \end{bmatrix} = A^n \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = P \cdot D^n \cdot P^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ \phi & \psi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \phi^n & 0 \\ 0 & \psi^n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dfrac{\sqrt{5}-1}{2\sqrt{5}} & 1/\sqrt{5} \\ \dfrac{1+\sqrt{5}}{2\sqrt{5}} & -1/\sqrt{5} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} \phi^n & \psi^n \\ \phi^{n+1} & \psi^{n+1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dfrac{\sqrt{5}-1}{2\sqrt{5}} & 1/\sqrt{5} \\ \dfrac{1+\sqrt{5}}{2\sqrt{5}} & -1/\sqrt{5} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} \alpha & \dfrac{\phi^n - \psi^n}{\sqrt{5}} \\ \beta & \dfrac{\phi^{n+1} - \psi^{n+1}}{\sqrt{5}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} \dfrac{\phi^n - \psi^n}{\sqrt{5}} \\ \dfrac{\phi^{n+1} - \psi^{n+1}}{\sqrt{5}} \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

donde $\alpha = \phi^n \dfrac{\sqrt{5}-1}{2\sqrt{5}} + \psi^n \dfrac{1+\sqrt{5}}{2\sqrt{5}}$, y $\beta = \phi^{n+1} \dfrac{\sqrt{5}-1}{2\sqrt{5}} + \psi^{n+1} \dfrac{1+\sqrt{5}}{2\sqrt{5}}$ de donde $\boxed{f_n = \dfrac{\phi^n - \psi^n}{\sqrt{5}}}$.

RELACIÓN MAXIMA TEMA 1

EJERCICIO 1

$\longrightarrow$ g(x):=if 0.3 <= x and x <= 0.5 then 2*x-log(x) else if 0.5 <= x and x <= 0.8 then 2/x + abs(x - 0.6) else if(x >= 0 and x <=1) then 0;

(% o2)

$$\mathrm{g}(x) := \mathrm{if}\ 0.3< \ =x and x< \ =0.5\ \mathrm{then}\ 2x-\log(x)\ \mathrm{else\ if}\ 0.5< \ =x and x< \ =0.8\ \mathrm{then}\ \frac{2}{x}+|x-0.6|$$

$$\mathrm{else\ if}\ x> \ =0 and x< \ =1\ \mathrm{then}\ 0$$

$\longrightarrow$ integral: float(integrate(2*x - log(x), x, 0.3, 0.5));

rat: replaced 0.2 by 1/5 = 0.2rat: replaced 0.3 by 3/10 = 0.3rat: replaced 0.5 by 1/2 = 0.5

rat: replaced 0.2 by 1/5 = 0.2rat: replaced 0.2 by 1/5 = 0.2rat: replaced 0.3 by 3/10 = 0.3

rat: replaced 0.5 by 1/2 = 0.5rat: replaced 0.2 by 1/5 = 0.2rat: replaced 0.8 by 4/5 = 0.8

rat: replaced 0.045 by 9/200 = 0.045rat: replaced 0.125 by 1/8 = 0.125

rat: replaced 0.2 by 1/5 = 0.2rat: replaced 0.3 by 3/10 = 0.3rat: replaced 0.5 by 1/2 = 0.5

rat: replaced 0.2 by 1/5 = 0.2rat: replaced 0.2 by 1/5 = 0.2rat: replaced 0.3 by 3/10 = 0.3

rat: replaced 0.5 by 1/2 = 0.5rat: replaced 0.2 by 1/5 = 0.2rat: replaced 0.7 by 7/10 = 0.7

rat: replaced -0.5108256237659908 by -21994011/43055810 = -0.5108256237659912

rat: replaced 0.6931471805599453 by 13614799/19642003 = 0.693147180559946

rat: replaced 1.203972804325936 by 24084703/20004358 = 1.203972804325937

rat: replaced 0.5108256237659908 by 21994011/43055810 = 0.5108256237659912

rat: replaced 0.5108256237659908 by 21994011/43055810 = 0.5108256237659912

rat: replaced 0.6931471805599453 by 13614799/19642003 = 0.693147180559946

rat: replaced 1.203972804325936 by 24084703/20004358 = 1.203972804325937

rat: replaced 0.5108256237659908 by 21994011/43055810 = 0.5108256237659912

rat: replaced -0.8465735902799727 by -16628401/19642003 = -0.8465735902799729

rat: replaced -0.6611918412977808 by -26789369/40516787 = -0.6611918412977811

(integral) 0.3453817489821919

$\longrightarrow$ integral:integral + float(integrate(2/x + abs(x - 0.6), x, 0.5, 0.8));

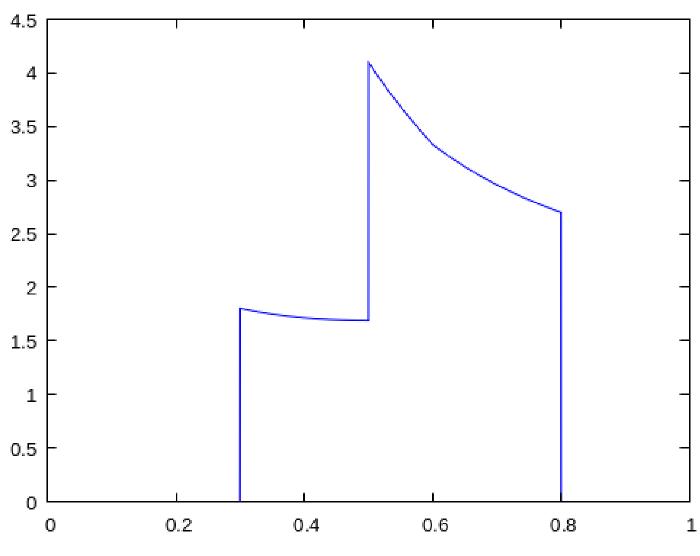
rat: replaced 0.3 by 3/10 = 0.3rat: replaced 0.5 by 1/2 = 0.5rat: replaced 0.8 by 4/5 = 0.8

rat: replaced 0.3 by 3/10 = 0.3rat: replaced -0.6 by -3/5 = -0.6
rat: replaced -0.6 by -3/5 = -0.6rat: replaced 0.6 by 3/5 = 0.6rat: replaced 0.3 by 3/10 = 0.3
rat: replaced 0.5 by 1/2 = 0.5rat: replaced 0.8 by 4/5 = 0.8rat: replaced 0.3 by 3/10 = 0.3
rat: replaced -0.6 by -3/5 = -0.6rat: replaced -0.6 by -3/5 = -0.6
rat: replaced -0.004999999999999997 by -1/200 = -0.005
rat: replaced 0.02000000000000001 by 1/50 = 0.02
rat: replaced 0.3 by 3/10 = 0.3rat: replaced 0.5 by 1/2 = 0.5
rat: replaced 0.8 by 4/5 = 0.8rat: replaced 0.3 by 3/10 = 0.3
rat: replaced 1.3 by 13/10 = 1.3rat: replaced 0.3 by 3/10 = 0.3
rat: replaced 0.5 by 1/2 = 0.5rat: replaced 0.8 by 4/5 = 0.8
rat: replaced 0.3 by 3/10 = 0.3
rat: replaced 0.3 by 3/10 = 0.3
rat: replaced 0.5 by 1/2 = 0.5
rat: replaced 0.8 by 4/5 = 0.8
rat: replaced 0.3 by 3/10 = 0.3
rat: replaced 0.9650072584914712 by 59875457/62046639 = 0.9650072584914712

(integral) 1.310389007473663

‘

$\longrightarrow$ wxplot2d([g(x)], [x,0,1])$
(% t4)



Ejercicio 2

$\longrightarrow$ A:genmatrix(lambda([i,j], abs(2*i-4*j)), 4, 4);

(A) $$\begin{pmatrix} 2 & 6 & 10 & 14 \\ 0 & 4 & 8 & 12 \\ 2 & 2 & 6 & 10 \\ 4 & 0 & 4 & 8 \end{pmatrix}$$

$\longrightarrow$ v:eigenvalues(A)[1];

(v) $$[\frac{376\left(\frac{\sqrt{3}\%i}{2}+\frac{-1}{2}\right)}{9\left(\frac{16\sqrt{6409}}{3^{\frac{3}{2}}}+\frac{9872}{27}\right)^{\frac{1}{3}}}+\left(\frac{16\sqrt{6409}}{3^{\frac{3}{2}}}+\frac{9872}{27}\right)^{\frac{1}{3}}\left(\frac{-1}{2}-\frac{\sqrt{3}\%i}{2}\right)+\frac{20}{3},$$
$$\left(\frac{16\sqrt{6409}}{3^{\frac{3}{2}}}+\frac{9872}{27}\right)^{\frac{1}{3}}\left(\frac{\sqrt{3}\%i}{2}+\frac{-1}{2}\right)+\frac{376\left(\frac{-1}{2}-\frac{\sqrt{3}\%i}{2}\right)}{9\left(\frac{16\sqrt{6409}}{3^{\frac{3}{2}}}+\frac{9872}{27}\right)^{\frac{1}{3}}}+\frac{20}{3},$$
$$\left(\frac{16\sqrt{6409}}{3^{\frac{3}{2}}}+\frac{9872}{27}\right)^{\frac{1}{3}}+\frac{376}{9\left(\frac{16\sqrt{6409}}{3^{\frac{3}{2}}}+\frac{9872}{27}\right)^{\frac{1}{3}}}+\frac{20}{3},0]$$

$\longrightarrow$

$\longrightarrow$ radio_espectral:float(apply(max, abs(v)));

(radio_ espectral) 20.07783624796722

EJERCICIO 3

$\longrightarrow$ solucion:0;

(solucion) 0

$\longrightarrow$ for i:1 thru 23 do solucion:solucion+iˆ3;

(% o38) *done*

$\longrightarrow$ solucion;

(% o40) 76176

$\longrightarrow$ apply("+", makelist(iˆ3, i, 1, 23));

(% o42) 76176

EJERCICIO 4

```
→ solucion_4:1;
```

(solucion_ 4) 1

```
→ for i:6 thru 19 do solucion_4:solucion_4/i;
```

(% o44) $done$

```
→ solucion_4;
```

(% o45) $$\frac{1}{1013709170073600}$$

```
→ apply("*", makelist(1/i, i, 6, 19));
```

(% o46) $$\frac{1}{1013709170073600}$$

EJERCICIO 5

```
→ termino_1:1;
```

(termino_ 1) 1

```
→ termino_2:1;
```

(termino_ 2) 1

```
→ termino:0;
```

(termino) 0

```
→ for i:1 thru 41 do (termino:termino_1 + termino_2, termino_1:termino_2,
  termino_2: termino) ;
```

(% o25) $done$

```
→ termino;
```

(% o26) 433494437

$\longrightarrow$ float(((1+sqrt(5))^43 - (1 - sqrt(5))^43)/(2^43*sqrt(5)));

(% o42) $4.33494437 10^{8}$

EJERCICIO 6

$\longrightarrow$ for i:1 thru 20 do print(float(sqrt(5.0+10^(-i)) - sqrt(5.0)));

0.02224998062745298

0.00223495106014937

$2.235956185279164 10^{-4}$

$2.236056797233487 10^{-5}$

$2.236066859229169 10^{-6}$

$2.23606786420305 10^{-7}$

$2.236067953020892 10^{-8}$

$2.236067775385208 10^{-9}$

$2.236069107652838 10^{-10}$

$2.236077989437035 10^{-11}$

$2.235989171595065 10^{-12}$

$2.233768725545815 10^{-13}$

$2.220446049250313 10^{-14}$

$2.220446049250313 10^{-15}$

0.0

0.0

0.0

0.0

0.0

0.0

(% o46) *done*

$\longrightarrow$ for i:1 thru 20 do print(float((10^(-i))/(sqrt(5 + 10^(-i)) + sqrt(5))));

0.02224998062745328

$$0.002234951060149439$$

$$2.235956185279857 10^{-4}$$

$$2.236056797271703 10^{-5}$$

$$2.236066859466919 10^{-6}$$

$$2.236067865696401 10^{-7}$$

$$2.23606796631945 10^{-8}$$

$$2.236067976381755 10^{-9}$$

$$2.236067977387987 10^{-10}$$

$$2.236067977488609 10^{-11}$$

$$2.236067977498672 10^{-12}$$

$$2.236067977499677 10^{-13}$$

$$2.23606797749978 10^{-14}$$

$$2.236067977499788 10^{-15}$$

$$2.236067977499791 10^{-16}$$

$$2.236067977499789 10^{-17}$$

$$2.236067977499791 10^{-18}$$

$$2.23606797749979 10^{-19}$$

$$2.236067977499792 10^{-20}$$

$$2.236067977499789 10^{-21}$$

(% o47) *done*

En el primero se hace una diferencia de valores muy cercanos y como el ordenador trabaja con números máquina, losredondea a 0, y como en la segunda forma no se hace la diferencia no lo redondea a 0. EJERCICIO 7

$\longrightarrow$ A: genmatrix(lambda([i,j], 2*i - abs(j)), 3, 3);

(A)
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 3 & 2 & 1 \\ 5 & 4 & 3 \end{pmatrix}$$

$\longrightarrow$ n:matrix_size(A)[1];

(n) 3

$\longrightarrow$ v:makelist(apply("+", abs(transpose(A)[i])), i, 1, n);

(v) $[9, 6, 5]$

$\longrightarrow$ norma_1: apply(max, v);

(norma_ 1) 9

EJERCICIO 8

$\longrightarrow$ A:matrix([1,0,3],[1,2,0],[3,0,-5]);

(A) $$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 1 & 2 & 0 \\ 3 & 0 & -5 \end{pmatrix}$$

$\longrightarrow$ n:matrix_size(A)[1];

(n) 3

$\longrightarrow$ v:makelist(apply("+", abs(A[i])), i, 1, n);

(v) $[4, 3, 8]$

$\longrightarrow$ v_inv:makelist(apply("+", abs(invert(A)[i])), i, 1, n);

(v_ inv) $[\frac{4}{7}, \frac{11}{14}, \frac{2}{7}]$

$\longrightarrow$ if (determinant(A)=0) then print ("La matriz no es regular") else norma:apply(max, v);

(% o10) 8

$\longrightarrow$ if (determinant(A) $\neq$ 0) then norma_inv:apply(max, v_inv);

(% o18) $\frac{11}{14}$

$\longrightarrow$ condicionamiento:norma_inv*norma;

(condicionamiento) $\frac{44}{7}$

EJERCICIO 9

$\longrightarrow$ A: genmatrix(lambda([i,j], i/(i+j+1)), 2, 4);

(A) $$\begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & \frac{1}{5} & \frac{1}{6} \\ \frac{1}{2} & \frac{2}{5} & \frac{1}{3} & \frac{2}{7} \end{pmatrix}$$

$\longrightarrow$ At:transpose(A);

(At) $$\begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{4} & \frac{2}{5} \\ \frac{1}{5} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{6} & \frac{2}{7} \end{pmatrix}$$

$\longrightarrow$ v:eigenvalues(At.A)[1];

(v) $$[-\frac{\sqrt{22126530049}-148905}{352800}, \frac{\sqrt{22126530049}+148905}{352800}, 0]$$

$\longrightarrow$ radio_espectral:apply(max, abs(v));

(radio_ espectral) $$\frac{\sqrt{22126530049}+148905}{352800}$$

$\longrightarrow$ norma_eucl:float(sqrt(radio_espectral));

(norma_ eucl) 0.9185276269534124

Solución ejercicios Tema 2

Manuel Vicente Bolaños Quesada

1. ¿Es posible aplicar el método de Gauss al sistema de ecuaciones lineales

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 8.8 \\ 4 & 5 & 6 & 6 & 6 \\ 7 & 8 & 9 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 3 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/2 \\ 2/3 \\ 3/4 \\ 4/5 \\ 5/6 \end{bmatrix}?$$

¿Por qué?

- **Solución.**

Tenemos que

$$\det(A_1) = 1, \quad \det(A_2) = \det \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 5 \end{bmatrix} = -3, \quad \det(A_3) = \det \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix} = 0$$

Como $\det(A_3) = 0$, no se puede completar el método de Gauss hasta el paso 5.

2. Describe en forma de algoritmo la obtención, cuando es factible, de la factorización LU tipo Crout de una matriz regular. Prográmalo y aplícalo a la matriz

$$\begin{bmatrix} 1.1 & 2.2 & 3.3 & 0 & 0 & 1.1 & 0.55 & 1.1 \\ 2 & 5.2 & 6 & 1.2 & 1.2 & 3.2 & 2.2 & 2 \\ 3 & 6 & 10.3 & 0.78 & 0 & 3.91 & 2.54 & 4.17 \\ 0 & 1 & 0.6 & 2.76 & 3.8 & 2.82 & 4.28 & 1.94 \\ 0 & 1 & 0 & 3 & 6.5 & 3 & 6.5 & 2 \\ 1 & 3 & 3.7 & 2.42 & 3 & 5.09 & 15.26 & 15.43 \\ 0.5 & 2 & 2.3 & 3.48 & 6 & 11.06 & 57.59 & 60.92 \\ 1 & 2 & 3.9 & 1.54 & 2 & 10.63 & 60.22 & 69.61 \end{bmatrix}$$

Resuelve a partir de esta factorización el sistema que tiene a esta matriz por matriz de coeficientes y por vector de términos $[1, 0, -1, 0, -2, 1, 2, 2]^T$

- **Solución.**

Resuelto con Maxima:

——————–EJERCICIO~2————————

(% i1) A: matrix([1.1,2.2,3.3,0,0,1.1,0.55,1.1],[2,5.2,6,1.2,1.2,3.2,2.2,2],[3,6,10.3,0.78,0,3.91,2.54,4.17],
[0,1,0.6,2.76,3.8,2.82,4.28,1.94],[0,1,0,3,6.5,3,6.5,2],[1,3,3.7,2.42,3,5.09,15.26,15.43],
[0.5,2,2.3,3.48,6,11.06,57.59,60.92],[1,2,3.9,1.54,2,10.63,60.22,69.61])$

(% i14) b:transpose([1, 0, -1, 0, -2, 1, 2, 2]);

(b)
$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \\ -2 \\ 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Programamos primero el método de Doolittle, y luego lo adaptamos a Crout

(% i5) N:matrix_size(A)[1];

(N)
$$8$$

(% i6) l:ident(N);

(l)
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(% i7) u:ident(N);

(u)
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

```
(% i8) for i:1 thru N do(for j:i thru N do u[i, j]:transpose(A)[i,j]-sum(l[i,k]*u[k,j], k, 1,
       i-1),for j:i+1 thru N do l[j, i]:1/u[i,i]*(transpose(A)[j,i]-sum(l[j,k]*u[k, i], k, 1,
       i-1)));
```

(% o8) *done*

```
⟶ aux:u;

⟶ u:transpose(l);

⟶ l:transpose(aux);
```

Resolvemos ahora el sistema l.y = b

```
(% i15) y:makelist(0, i, 1, N);
```

(y) $[0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0]$

```
(% i19) y[1]:b[1, 1]/l[1,1];
```

(y[1]) 0.9090909090909091

```
(% i22) for i:2 thru N do y[i]:1/l[i, i]*(b[i, 1]-sum(l[i, j]*y[j], j, 1, i-1));
```

(% o22) *done*

```
(% i23) y;
```

(% o23)

$[0.9090909090909091, -1.515151515151515, -2.867132867132861, 2.311022311022304, -3.404595404595392, 0.8137695637695634, -0.917366946778716, -2.351379557261914]$

```
(% i24) x:makelist(0, i, 1, N);
```

(x) $[0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0]$

ahora resolvemos Ux=y

```
(% i25) x[N]:y[N]/u[N, N];
```

(x[N]) -2.351379557261914

(% i26) for i:N-1 thru 1 step -1 do x[i]:1/u[i,i]*(y[i] - apply("+", makelist(u[i, j]*x[j], j, i+1, N)));

(% o26) $done$

(% i32) solucion:x;

(solucion)
$[41.34023019464165, -9.582148788031109, -9.739728735316927, 1.884874928992429, -4.838608015078577, 9.58671774848256, 1.434012610483188, -2.351379557261914]$

3. Dada la matriz

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 5 & 8 & 11 \\ 3 & 9 & 16 & 23 \\ 4 & 12 & 24 & 37 \end{bmatrix}$$

y los vectores

$$b_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \\ 10 \\ 16 \end{bmatrix}, \quad b_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 5 \\ 13 \\ 19 \end{bmatrix}, \quad b_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 7 \\ 13 \end{bmatrix}, \quad b_4 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 4 \\ 9 \end{bmatrix},$$

resuelve los cuatro sistemas de ecuaciones lineales $Ax = b_i$, $i = 1, 2, 3, 4$, mediante el método más eficiente.

- **<u>Solución</u>**

Hallemos, si es posible, una factorización LU de la matriz A. Usaremos la de tipo Doolittle.

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 5 & 8 & 11 \\ 3 & 9 & 16 & 23 \\ 4 & 12 & 24 & 37 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ l_{21} & 1 & 0 & 0 \\ l_{31} & l_{32} & 1 & 0 \\ l_{41} & l_{42} & l_{43} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} & u_{13} & u_{14} \\ 0 & u_{22} & u_{23} & u_{24} \\ 0 & 0 & u_{33} & u_{34} \\ 0 & 0 & 0 & u_{44} \end{bmatrix}$$

Tenemos entonces:

$u_{11} = 1, u_{12} = 2, u_{13} = 3, u_{14} = 4$

$2 = l_{21}u_{11} \implies l_{21} = 2$

$5 = l_{21}u_{12} + u_{22} = 4 + u_{22} \implies u_{22} = 1$

$8 = l_{21}u_{13} + u_{23} = 6 + u_{23} \implies u_{23} = 2$

$11 = l_{21}u_{14} + u_{24} = 8 + u_{24} \implies u_{24} = 3$

$3 = l_{31}u_{11} \implies l_{31} = 3$

$9 = l_{31}u_{12} + l_{32}u_{22} = 6 + l_{32} \implies l_{32} = 3$

$16 = l_{31}u_{13} + l_{32}u_{23} + u_{33} = 9 + 6 + u_{33} \implies u_{33} = 1$

$23 = l_{31}u_{14} + l_{32}u_{24} + u_{34} = 12 + 9 + u_{34} \implies u_{34} = 2$

$4 = l_{41}u_{11} \implies l_{41} = 4$

$12 = l_{41}u12 + l_{42}u_{22} = 8 + l_{42} \implies l_{42} = 4$

$24 = l_{41}u_{13} + l_{42}u_{23} + l_{43}u_{33} = 12 + 8 + l_{43} \implies l_{43} = 4$

$37 = l_{41}u_{14} + l_{42}u_{24} + l_{43}u_{34} + u_{44} = 16 + 12 + 8 + u_{44} = 1$

Así que

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 5 & 8 & 11 \\ 3 & 9 & 16 & 23 \\ 4 & 12 & 24 & 37 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 3 & 1 & 0 \\ 4 & 4 & 4 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

- **Primer sistema**. $b_1 = [1, 4, 10, 16]^T$
  Resolvemos el sistema triangular auxiliar:
  $\mathbf{Ly_1} = \mathbf{b_1}$, cuya solución se obtiene fácilmente por ser triangular, y es $y_1 = [1, 2, 1, 0]^T$ Y ahora, resolvemos el sistema $\mathbf{Ux_1} = \mathbf{y_1}$, cuya solución también se obtiene fácilmente, y es $\boxed{x_1 = [-2, 0, 1, 0]^T}$, que también es solución del sistema original, $\mathbf{Ax_1} = \mathbf{b_1}$.

- **Segundo sistema**. $b_2 = [1, 5, 13, 19]^T$
  Resolvemos el sistema triangular auxiliar:
  $\mathbf{Ly_2} = \mathbf{b_2}$, cuya solución se obtiene fácilmente por ser triangular, y es $y_2 = [1, 3, 1, -1]^T$ Y ahora, resolvemos el sistema $\mathbf{Ux_2} = \mathbf{y_2}$, cuya solución también se obtiene fácilmente, y es $\boxed{x_2 = [-4, 0, 3, -1]^T}$, que también es solución del sistema original, $\mathbf{Ax_2} = \mathbf{b_2}$.

- **Tercer sistema**. $b_3 = [1, 3, 7, 13]^T$
  Resolvemos el sistema triangular auxiliar:
  $\mathbf{Ly_3} = \mathbf{b_3}$, cuya solución se obtiene fácilmente por ser triangular, y es $y_3 = [1, 1, 1, 1]^T$ Y ahora, resolvemos el sistema $\mathbf{Ux_3} = \mathbf{y_3}$, cuya solución también se obtiene fácilmente, y es $\boxed{x_3 = [0, 0, -1, 1]^T}$, que también es solución del sistema original, $\mathbf{Ax_3} = \mathbf{b_3}$.
- **Cuarto sistema**. $b_4 = [0, 1, 4, 9]^T$
  Resolvemos el sistema triangular auxiliar:
  $\mathbf{Ly_4} = \mathbf{b_4}$, cuya solución se obtiene fácilmente por ser triangular, y es $y_4 = [0, 1, 1, 1]^T$ Y ahora, resolvemos el sistema $\mathbf{Ux_4} = \mathbf{y_4}$, cuya solución también se obtiene fácilmente, y es $\boxed{x_4 = [-1, 0, -1, 1]^T}$, que también es solución del sistema original, $\mathbf{Ax_4} = \mathbf{b_4}$.

4. Supongamos que una matriz regular y tridiagonal

$$\begin{bmatrix} a_1 & c_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ b_2 & a_2 & c_2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & b_3 & a_3 & c_3 & \cdots & 0 \\ & \cdots & & & \cdots & \\ 0 & \cdots & & b_{N-1} & a_{N-1} & c_{N-1} \\ 0 & \cdots & & 0 & b_N & a_N \end{bmatrix}$$

admite una descomposición LU tipo Doolittle. Prueba que las correspondientes matrices triangulares adoptan la forma

$$L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ l_2 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & l_3 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ & \cdots & & & \cdots & \\ 0 & \cdots & & l_{N-1} & 1 & 0 \\ 0 & \cdots & & 0 & l_N & 1 \end{bmatrix}, \qquad U = \begin{bmatrix} d_1 & c_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & d_2 & c_2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & d_3 & c_3 & \cdots & 0 \\ & \cdots & & & \cdots & \\ 0 & \cdots & & 0 & d_{N-1} & c_{N-1} \\ 0 & \cdots & & 0 & 0 & d_N \end{bmatrix}$$

con $d_1 = a_1$, e $i = 2, \ldots, N \implies l_i = \dfrac{b_i}{d_{i-1}}, \quad d_i = a_i - l_i c_{i-1}$.

- <u>**Solución.**</u>

Sean

$$L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ l_{21} & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ l_{N1} & l_{N2} & \cdots & 1 \end{bmatrix}, \qquad U = \begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} & \cdots & u_{1N} \\ 0 & u_{22} & \cdots & u_{2N} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & u_{NN} \end{bmatrix}$$

Entonces, si estas son matrices de factorización LU de tipo Doolittle, tenemos que $LU = A$, donde A es la matriz tridiagonal del enunciado.

- Multiplicando la primera fila de L por las columnas de U obtenemos que $u_{11} = a_1, u_{12} = c_1$, y el resto de la fila son ceros.
- Multiplicando la segunda fila de L por las columnas de U, obtenemos que $l_{21} \cdot u_{11} = b_2 \implies l_{21} = \frac{b_2}{a_1}$, y $l_{21} \cdot c_1 + d_2 = a_2 \implies d_2 = a_2 - l_{21} \cdot c_1$.
- Repitiendo este proceso para todas las filas y columnas, obtenemos la solución del enunciado.

5. Decide razonadamente si la matriz

$$A = \begin{bmatrix} 2 & \sqrt{2} & \sqrt{2} \\ \sqrt{2} & 2 & 5 \\ \sqrt{2} & 5 & 18 \end{bmatrix}$$

es o no definida positiva, y aplica tu argumento para resolver el sistema de ecuaciones lineales

$$Ax = \begin{bmatrix} 2 \\ 6 + \sqrt{2} \\ 26 + \sqrt{2} \end{bmatrix}$$

- **Solución.**

Sabemos que una matriz es definida si y solo si admite una factorización tipo Cholesky. Comprobemos que, en efecto, admite dicha factorización.

$$\begin{bmatrix} 2 & \sqrt{2} & \sqrt{2} \\ \sqrt{2} & 2 & 5 \\ \sqrt{2} & 5 & 18 \end{bmatrix} A = U^T \cdot U = \begin{bmatrix} u_{11} & 0 & 0 \\ u_{21} & u_{22} & 0 \\ u_{31} & u_{32} & u_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{11} & u_{21} & u_{31} \\ 0 & u_{22} & u_{32} \\ 0 & 0 & u_{33} \end{bmatrix}$$

de donde obtenemos las siguientes ecuaciones y soluciones:

- $u_{11}^2 = 2 \implies u_{11} = \sqrt{2}$
- $u_{11}u_{21} = \sqrt{2} \implies u_{21} = 1$
- $u_{11}u_{31} = \sqrt{2} \implies u_{31} = 1$
- $u_{21}^2 + u_{22}^2 = 2 \implies u_{22} = 1$
- $u_{21}u_{31} + u_{22}u_{32} = 5 \implies u_{32} = 4$
- $u_{31}^2 + u_{32}^2 + u_{33}^2 = 18 \implies u_{33} = 1$

de donde $A = U^T \cdot U$, donde $U = \begin{bmatrix} \sqrt{2} & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, y por tanto A es definida positiva. Para resolver el sistema pedido, resolveremos primero el sistema auxiliar $U^t y = \begin{bmatrix} 2 \\ 6+\sqrt{2} \\ 26+\sqrt{2} \end{bmatrix}$. La solución a este sistema es inmediata, por ser U^T una matriz triangular inferior, y es $y = [\sqrt{2}, 6, 2]^T$. Ahora, resolvemos el sistema $Ux = y$, cuya solución también es fácil, por ser U una matriz triangular superior, $\boxed{x = [1, -2, 2]^T}$, que es también solución del sistema original.

6. Se considera el sistema de ecuaciones lineales

$$\begin{bmatrix} 5 & -2 \\ 2 & 7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 13 \\ 13 \end{bmatrix}$$

cuya solución exacta es $x_1 = 3, x_2 = 1$.

- Demuestra que los correspondientes métodos de Jacobi y Gauss-Seidel convergen para cualquier elección de la estimación inicial.
- Si modificamos el sistema anterior aplicándole una transformación elemental que consiste en intercambiar de posición sus ecuaciones obtenemos este otro equivalente

$$\begin{bmatrix} 2 & 7 \\ 5 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 13 \\ 13 \end{bmatrix}$$

Estudia la convergencia de los métodos de Jacobi y Gauss-Seidel asociados.

- Ilustra los resultados anteriores realizando 5 iteraciones con ambos métodos iterativos, partiendo en el primer sistema de la estimación inicial $x_0 = [-50, -40]^T$, y en el segundo de $x_0 = [1.1, 1.1]^T$

Solución.

- Sean B y B' las matrices asociadas a los métodos de Jacobi y Gauss-Seidel, respectivamente. Sean $D = \begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 7 \end{bmatrix}, E = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -2 & 0 \end{bmatrix}, F = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$. Entonces

$$B = D^{-1}(E+F) = \begin{bmatrix} 0 & 2/5 \\ -2/7 & 0 \end{bmatrix} \implies p_B(\lambda) = \lambda^2 + \frac{4}{35} \implies \lambda = \pm\frac{2}{\sqrt{35}}i \implies \rho(B) < 1$$

$$B' = (D-E)^{-1}F = \begin{bmatrix} 0 & 2/5 \\ 0 & -4/35 \end{bmatrix} \implies p_{B'}(\lambda) = \lambda^2 - \frac{4}{35}\lambda = \lambda(\lambda - \frac{4}{35}) \implies \rho(B') = \frac{4}{35} < 1$$

Como los dos radios espectrales son menores que 1, los métodos de Jacobi y Gauss-Seidel convergen para cualquier elección de la estimación inicial.

- Sean B y B' las matrices asociadas a los métodos de Jacobi y Gauss-Seidel, respectivamente. Sean $D = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}, E = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -5 & 0 \end{bmatrix}, F = \begin{bmatrix} 0 & -7 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$. Entonces

  $$B = D^{-1}(E+F) = \begin{bmatrix} 0 & -7/2 \\ 5/2 & 0 \end{bmatrix} \implies p_B(\lambda) = \lambda^2 + \frac{35}{4} \implies \lambda = \pm\frac{\sqrt{35}}{2}i \implies \rho(B) = \frac{\sqrt{35}}{2} > 1$$

  $$B' = (D-E)^{-1}F = \begin{bmatrix} 0 & -7/2 \\ 0 & -35/4 \end{bmatrix} \implies p_{B'}(\lambda) = \lambda^2 + \frac{35}{4}\lambda = \lambda(\lambda + \frac{35}{4}) \implies \rho(B') = \frac{35}{4} > 1$$

  Como los dos radios espectrales son mayores que 1, no podemos afirmar que los métodos de Jacobi y Gauss-Seidel converjan para cualquier elección de la estimación inicial.
- Solución con Maxima:

——————EJERCICIO 6—————— PRIMER~SISTEMA

(% i69) x0:[-50, -40];

(x0) $$[-50, -40]$$

(% i70) A: matrix([5,-2],[2,7]);

(A) $$\begin{pmatrix}5 & -2\\ 2 & 7\end{pmatrix}$$

(% i71) n:matrix_size(A)[1];

(n) $$2$$

(% i72) b:[13, 13];

(b) $$[13, 13]$$

(% i73) D:ident(n);

(D) $$\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$$

(% i76) E: genmatrix(lambda([i,j], 0), n, n);

(E) $$\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}$$

(% i77) F: genmatrix(lambda([i,j], 0), n, n);

(F) $$\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}$$

(% i78) for i:1 thru n do D[i,i]:A[i,i];

(% o78) $$done$$

(% i79) for i:1 thru n-1 do (for j: i+1 thru n do F[i, j]:-A[i,j]);

(% o79) $$done$$

(% i80) for i:2 thru n do (for j:1 thru i-1 do E[i, j]:-A[i,j]);

(% o80) $$done$$

- Jacobi

(% i81) M:D;

(M) $$\begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 7 \end{pmatrix}$$

(% i82) N:E+F;

(N) $$\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}$$

(% i83) B:invert(M).N;

(B) $$\begin{pmatrix} 0 & \frac{2}{5} \\ -\frac{2}{7} & 0 \end{pmatrix}$$

(% i84) anterior:x0;

(anterior) $$[-50, -40]$$

(% i85) x:makelist(0, i, 1, n);

(x) $$[0, 0]$$

(% i86) for i:1 thru 5 do (aux:x, for j:1 thru n do x[j]:1/A[j, j]*(b[j]-sum(A[j, k]*anterior[k],k, 1,n) + A[j, j]*anterior[j]), anterior:aux);

(% o86) $$done$$

(% i87) float(x);

(% o87) $$[2.990958433985839, 1.002583304575474]$$

- Gauss-Seidel

(% i27) M:D-E;

(M) $$\begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 2 & 7 \end{pmatrix}$$

(% i28) N:F;

(N) $$\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

(% i29) B:invert(M).N;

(B) $$\begin{pmatrix} 0 & \frac{2}{5} \\ 0 & -\frac{4}{35} \end{pmatrix}$$

(% i51) x:makelist(0, i, 1, n);

(x) $$[0, 0]$$

(% i52) anterior:x0;

(anterior) $$[-50, -40]$$

(% i54) for i:1 thru 5 do (aux:x, for j:1 thru n do x[j]:1/A[j, j]*(b[j]-sum(A[j, k]*x[k], k, 1, j-1) - sum(A[j, k]*anterior[k], k, j+1, n)), anterior:aux);

(% o54) $$done$$

(% i57) float(x);

(% o57) $$[3.000526130710843, 0.999849676939759]$$

SEGUNDO~SISTEMA

(% i92) x0:[1.1, 1.1];

(x0) $$[1.1, 1.1]$$

(% i93) A:matrix([2, 7],[5, -2]);

(A) $$\begin{pmatrix} 2 & 7 \\ 5 & -2 \end{pmatrix}$$

(% i94) n:matrix_size(A)[1];

(n) $$2$$

(% i95) b:[13, 13];

(b) $$[13, 13]$$

(% i96) D:ident(n);

(D) $$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(% i97) E: genmatrix(lambda([i,j], 0), n, n);

(E) $$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

(% i98) F: genmatrix(lambda([i,j], 0), n, n);

(F) $$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

(% i99) for i:1 thru n do D[i,i]:A[i,i];

(% o99) $$done$$

(% i100) for i:1 thru n-1 do (for j: i+1 thru n do F[i, j]:-A[i,j]);

(% o100) $$done$$

(% i101) for i:2 thru n do (for j:1 thru i-1 do E[i, j]:-A[i,j]);

(% o101) $$done$$

- Jacobi

(% i102) M:D;

(M) $$\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$$

(% i103) N:E+F;

(N) $$\begin{pmatrix} 0 & -7 \\ -5 & 0 \end{pmatrix}$$

(% i104) B:invert(M).N;

(B) $$\begin{pmatrix} 0 & -\frac{7}{2} \\ \frac{5}{2} & 0 \end{pmatrix}$$

(% i105) anterior:x0;

(anterior) $$[1.1, 1.1]$$

(% i106) x:makelist(0, i, 1, n);

(x) $$[0, 0]$$

(% i107) for i:1 thru 5 do (aux:x, for j:1 thru n do x[j]:1/A[j, j]*(b[j]-sum(A[j, k]*anterior[k],k, 1,n) + A[j, j]*anterior[j]), anterior:aux);

(% o107) $$done$$

(% i108) float(x);

(% o108) $$[-11134.451171875, -27842.6279296875]$$

Aquí vemos que no converge a la solución del sistema, claramente - Gauss-Seidel

(% i109) M:D-E;

(M) $$\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 5 & -2 \end{pmatrix}$$

(% i110) N:F;

(N) $$\begin{pmatrix} 0 & -7 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

(% i111) B:invert(M).N;

(B) $$\begin{pmatrix} 0 & -\frac{7}{2} \\ 0 & -\frac{35}{4} \end{pmatrix}$$

(% i112) x:makelist(0, i, 1, n);

(x) $[0,0]$

(% i113) anterior:x0;

(anterior) $[1.1,1.1]$

(% i114) for i:1 thru 5 do (aux:x, for j:1 thru n do x[j]:1/A[j, j]*(b[j]-sum(A[j, k]*x[k], k, 1, j-1) - sum(A[j, k]*anterior[k], k, j+1, n)), anterior:aux);

(% o114) *done*

(% i115) float(x);

(% o115) $[-2048.635742187504, -5128.089355468761]$

Aquí también vemos que el método de Gauss-Seidel tampoco converge

7. Para las matrices A_1 y A_2 de la sección 2.2, ilustra con los sistemas de ecuaciones lineales que se describen a continuación la velocidad de convergencia calculada para dichas matrices. En concreto, considera los dos sistemas s_1 y s_2 cuyas matrices de coeficientes son A_1 y A_2, respectivamente, y tienen por vectores de términos independientes los que hacen que la solución sea $x = [1, 1, 1]^T$. Construye para estos sistemas s_1 y s_2 los 4 y 6 primeros iteradores, respectivamente, generados tanto por el método de Jacobi como por el de Gauss-Seidel, partiendo de la estimación inicial nula.

   - **Solución.**

   Resuelto con Maxima:

——————–EJERCICIO 7—————— PRIMER~SISTEMA

(% i1) x0:[0,0, 0];

(x0) $$[0,0,0]$$

(% i2) A1:matrix([4 ,1, 1],[2, -9, 0],[0, -8, -6]);

(A1) $$\begin{pmatrix} 4 & 1 & 1 \\ 2 & -9 & 0 \\ 0 & -8 & -6 \end{pmatrix}$$

(% i3) x:matrix([1], [1], [1]);

(x) $$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

(% i4) b1:A1.x;

(b1) $$\begin{pmatrix} 6 \\ -7 \\ -14 \end{pmatrix}$$

(% i5) n:matrix_size(A1)[1];

(n) $$3$$

(% i6) D:ident(n);

(D) $$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(% i14) E: genmatrix(lambda([i,j], 0), n, n);

(E) $$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

(% i15) F: genmatrix(lambda([i,j], 0), n, n);

(F) $$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

(% i16) for i:1 thru n do D[i,i]:A1[i,i];

(% o16) $$done$$

(% i17) for i:1 thru n-1 do (for j: i+1 thru n do F[i, j]:-A1[i,j]);

(% o17) $$done$$

(% i18) for i:2 thru n do (for j:1 thru i-1 do E[i, j]:-A1[i,j]);

(% o18) $$done$$

- Jacobi

(% i19) M:D;

(M) $$\begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & -9 & 0 \\ 0 & 0 & -6 \end{pmatrix}$$

(% i20) N:E+F;

(N) $$\begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 \\ -2 & 0 & 0 \\ 0 & 8 & 0 \end{pmatrix}$$

(% i21) B:invert(M).N;

(B) $$\begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} \\ \frac{2}{9} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{4}{3} & 0 \end{pmatrix}$$

(% i22) anterior:x0;

(anterior) $$[0, 0, 0]$$

(% i23) x:makelist(0, i, 1, n);

(x) $$[0, 0, 0]$$

(% i24) for i:1 thru 4 do (aux:x, for j:1 thru n do x[j]:1/A1[j, j]*(b1[j, 1]-sum(A1[j, k]*anterior[k],k, 1,n) + A1[j, j]*anterior[j]), anterior:aux);

(% o24) $$done$$

(% i25) float(x);

(% o25) $[0.9999047401310776, 0.9999788311402394, 1.000028225146347]$

- Gauss-Seidel

(% i26) M:D-E;

(M) $$\begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 2 & -9 & 0 \\ 0 & -8 & -6 \end{pmatrix}$$

(% i27) N:F;

(N) $$\begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

(% i28) B:invert(M).N;

(B) $$\begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} \\ 0 & -\frac{1}{18} & -\frac{1}{18} \\ 0 & \frac{2}{27} & \frac{2}{27} \end{pmatrix}$$

(% i29) x:makelist(0, i, 1, n);

(x) $[0, 0, 0]$

(% i30) anterior:x0;

(anterior) $[0, 0, 0]$

(% i31) for i:1 thru 4 do (aux:x, for j:1 thru n do x[j]:1/A1[j, j]*(b1[j, 1]-sum(A1[j, k]*x[k], k, 1, j-1) - sum(A1[j, k]*anterior[k], k, j+1, n)), anterior:aux);

(% o31) *done*

(% i32) float(x);

(% o32) $[1.000003175328964, 1.000000705628658, 0.9999990591617884]$

Como podemos ver, la solución proporcionada por el método de Gauss-Seidel, es más acertada que la del método deJacobi. Esto se debe a que el radio espectral de la matriz asociada al método de Jacobi, aunque es menor que 1, es másgrande que el de la matriz asociada al método de Gauss-Seidel. SEGUNDO~SISTEMA

(% i35) A2:matrix([7 ,6, 9],[4, 5, -4],[-7, -3, 8]);

(A2) $$\begin{pmatrix} 7 & 6 & 9 \\ 4 & 5 & -4 \\ -7 & -3 & 8 \end{pmatrix}$$

(% i36) x:matrix([1], [1], [1]);

(x) $$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

(% i38) b2:A2.x;

(b2) $$\begin{pmatrix} 22 \\ 5 \\ -2 \end{pmatrix}$$

(% i39) D:ident(n);

(D) $$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(% i40) E: genmatrix(lambda([i,j], 0), n, n);

(E) $$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

(% i41) F: genmatrix(lambda([i,j], 0), n, n);

(F) $$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

(% i42) for i:1 thru n do D[i,i]:A2[i,i];

(% o42) $$done$$

(% i43) for i:1 thru n-1 do (for j: i+1 thru n do F[i, j]:-A2[i,j]);

(% o43) $$done$$

(% i44) for i:2 thru n do (for j:1 thru i-1 do E[i, j]:-A2[i,j]);

(% o44) $done$

- Jacobi

(% i45) M:D;

(M) $$\begin{pmatrix} 7 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 8 \end{pmatrix}$$

(% i46) N:E+F;

(N) $$\begin{pmatrix} 0 & -6 & -9 \\ -4 & 0 & 4 \\ 7 & 3 & 0 \end{pmatrix}$$

(% i47) B:invert(M).N;

(B) $$\begin{pmatrix} 0 & -\frac{6}{7} & -\frac{9}{7} \\ -\frac{4}{5} & 0 & \frac{4}{5} \\ \frac{7}{8} & \frac{3}{8} & 0 \end{pmatrix}$$

(% i61) x:makelist(0, i, 1, n);

(x) $[0, 0, 0]$

(% i62) anterior:x0;

(anterior) $[0, 0, 0]$

(% i63) for i:1 thru 6 do (aux:x, for j:1 thru n do x[j]:1/A2[j, j]*(b2[j, 1]-sum(A2[j, k]*anterior[k],k, 1,n) + A2[j, j]*anterior[j]), anterior:aux);

(% o63) $done$

(% i64) float(x);

(% o64) $[1.168181204056763, 0.4185620571041827, 0.929119324963737]$

- Gauss-Seidel

(% i65) M:D-E;

(M) $$\begin{pmatrix} 7 & 0 & 0 \\ 4 & 5 & 0 \\ -7 & -3 & 8 \end{pmatrix}$$

(% i66) N:F;

(N) $$\begin{pmatrix} 0 & -6 & -9 \\ 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

(% i67) B:invert(M).N;

(B) $$\begin{pmatrix} 0 & -\frac{6}{7} & -\frac{9}{7} \\ 0 & \frac{24}{35} & \frac{64}{35} \\ 0 & -\frac{69}{140} & -\frac{123}{280} \end{pmatrix}$$

(% i68) x:makelist(0, i, 1, n);

(x) $[0, 0, 0]$

(% i69) anterior:x0;

(anterior) $[0, 0, 0]$

(% i70) for i:1 thru 6 do (aux:x, for j:1 thru n do x[j]:1/A2[j, j]*(b2[j, 1]-sum(A2[j, k]*x[k], k, 1, j-1) - sum(A2[j, k]*anterior[k], k, j+1, n)), anterior:aux);

(% o70) *done*

(% i71) float(x);

(% o71) $[1.604310877645299, 0.5714857110100808, 1.368079159568417]$

Análogamente al ejemplo anterior, vemos que la estimación de la solución mediante el método de Jacobi, aún siendomala, es mejor que la obtenida mediante el método de Gauss-Seidel. Igual que en el primer sistema, esto se debe a queel radio espectral de la matriz asociada al método de Jacobi es menor que el de la matriz asociada al método deGauss-Seidel.

8. Decide razonadamente cuáles de los siguientes métodos iterativos es convergente para cualquier estimación inicial:

   - Jacobi y Gauss-Seidel para el sistema $\begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 9/2 & 0.5 & -1 \\ 1 & 2 & 3000 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 40 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ \pi \\ \sqrt{21} \\ -1234 \end{bmatrix}$
   - Jacobi y Gauss-Seidel para el sistema $\begin{bmatrix} 0.5 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$

   Solución.

   - Sabemos que si un sistema de ecuaciones lineales tiene por matriz de coeficientes una matriz diagonalmente estrictamente dominante, entonces los correspondientes métodos de Jacobi y Gauss-Seidel convergen para cualquier estimación inicial. Como $|3| > |1|+|0|+|-1|$, $|9/2| > |1| + |0.5|+|-1|$, $|3000| > |1|+|2|+|4|$, $|40| > |1|+|2|+|3|$, la matriz de coeficientes es diagonalmente estrictamente decreciente, por lo que los métodos de Jacobi y Gauss-Seidel convergen para cualquier estimación inicial.
   - Sean B y B' las matrices asociadas a los métodos de Jacobi y Gauss-Seidel, respectivamente. Sean $D = \begin{bmatrix} 0.5 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$, $E = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \end{bmatrix}$, $F = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$. Entonces

   $$B = D^{-1}(E+F) = \begin{bmatrix} 0 & -2 & 0 \\ 0.5 & 0 & -0.5 \\ 1/3 & -1/3 & 0 \end{bmatrix} \implies p_B(\lambda) = \lambda^3 - \frac{7}{6}\lambda + \frac{1}{3} = 0 \implies \rho(B) \approx 1.202 > 1$$

   $$B' = (D-E)^{-1}F = \begin{bmatrix} 0 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & -0.5 \\ 0 & 1/3 & 1/6 \end{bmatrix} \implies p_{B'}(\lambda) = 6\lambda^3 - 7\lambda^2 + 2\lambda = \lambda(\lambda - 2/3)(\lambda - 1/3)$$

   $\implies \rho(B') = 2/3 < 1$

   Entonces, el método de Jacobi no converge para todas las estimaciones iniciales, pero el método de Gauss-Seidel, sí.

9. Dado el sistema de ecuaciones lineales

   $$\begin{bmatrix} 10 & 9 & 1 \\ 1 & 5 & 4 \\ 7 & 3 & 11 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 27 \\ 7 \\ 2 \end{bmatrix}$$

   - prueba que el correspondiente método de Jacobi es convergente y mide su velocidad de convergencia,
   - aplica el método de Jacobi al sistema anterior, partiendo de la iteración inicial $x_0 = [0,0,0]^T$ y realizando 12, 45 y 100 iteraciones, y
   - calcula la solución exacta mediante un adecuado comando de Maxima. ¿Guardan relación los razonamientos del primer apartado y los resultados numéricos del segundo?¿Por qué?

   Solución.

   - Sea B la matriz asociada al método de Jacobi. Sean $D = \begin{bmatrix} 10 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 11 \end{bmatrix}$, $E = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ -7 & -3 & 0 \end{bmatrix}$, $F = \begin{bmatrix} 0 & -9 & -1 \\ 0 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$. Entonces

   $$B = D^{-1}(E+F) = \begin{bmatrix} 0 & -9/10 & -1/10 \\ -1/5 & 0 & -4/5 \\ -7/11 & -3/11 & 0 \end{bmatrix}$$

   Resolvemos $p_B(\lambda) = 0$, y la solución con mayor valor absoluto es $\lambda \approx 0.97 \implies \rho(B) \approx 0.97 < 1$. Entonces, el método de Jacobi es convergente. Como $\rho(B)$ es un número muy cercano a 1, la velocidad de convergencia será lenta.

- Resuelto con Maxima.
- Resuelto con Maxima

—————EJERCICIO~9——————-

(% i1) x0:[0, 0, 0];

(x0) $$[0,0,0]$$

(% i2) A:matrix([10, 9, 1],[1, 5, 4],[7, 3, 11]);

(A) $$\begin{pmatrix}10 & 9 & 1\\ 1 & 5 & 4\\ 7 & 3 & 11\end{pmatrix}$$

(% i3) n:matrix_size(A)[1];

(n) $$3$$

(% i4) b:[27, 7, 2];

(b) $$[27,7,2]$$

(% i5) D:ident(n);

(D) $$\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

(% i6) E: genmatrix(lambda([i,j], 0), n, n);

(E) $$\begin{pmatrix}0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

(% i7) F: genmatrix(lambda([i,j], 0), n, n);

(F) $$\begin{pmatrix}0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

(% i8) for i:1 thru n do D[i,i]:A[i,i];

(% o8) $$done$$

(% i9) for i:1 thru n-1 do (for j: i+1 thru n do F[i, j]:-A[i,j]);

(% o9) $$done$$

(% i10) for i:2 thru n do (for j:1 thru i-1 do E[i, j]:-A[i,j]);

(% o10) $$done$$

(% i11) M:D;

(M) $$\begin{pmatrix} 10 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 11 \end{pmatrix}$$

(% i12) N:E+F;

(N) $$\begin{pmatrix} 0 & -9 & -1 \\ -1 & 0 & -4 \\ -7 & -3 & 0 \end{pmatrix}$$

(% i13) B:invert(M).N;

(B) $$\begin{pmatrix} 0 & -\frac{9}{10} & -\frac{1}{10} \\ -\frac{1}{5} & 0 & -\frac{4}{5} \\ -\frac{7}{11} & -\frac{3}{11} & 0 \end{pmatrix}$$

(% i30) anterior:x0;

(anterior) $$[0, 0, 0]$$

(% i31) x:makelist(0, i, 1, n);

(x) $$[0, 0, 0]$$

(% i32) for i:1 thru 12 do (aux:x, for j:1 thru n do x[j]:1/A[j, j]*(b[j]-sum(A[j, k]*anterior[k],k, 1,n) + A[j, j]*anterior[j]), anterior:aux);

(% o32) $$done$$

(% i33) float(x);

(% o33) $$[1.000460161178689, 1.979744589182912, -0.9947686268908695]$$

(% i34) x:makelist(0, i, 1, n);

(x) $$[0, 0, 0]$$

(% i35) for i:1 thru 45 do (aux:x, for j:1 thru n do x[j]:1/A[j, j]*(b[j]-sum(A[j, k]*anterior[k],k, 1,n) + A[j, j]*anterior[j]), anterior:aux);

(% o35) $$done$$

(% i36) float(x);

(% o36) $$[1.000000000043204, 2.000000000241058, -1.000000000093236]$$

(% i37) x:makelist(0, i, 1, n);

(x) $$[0, 0, 0]$$

(% i38) for i:1 thru 100 do (aux:x, for j:1 thru n do x[j]:1/A[j, j]*(b[j]-sum(A[j, k]*anterior[k],k, 1,n) + A[j, j]*anterior[j]), anterior:aux);

(% o38) $$done$$

(% i39) float(x);

(% o39) $$[1.0, 2.0, -0.9999999999999998]$$

Cálculo de la solución exacta:

(% i41) invert(A).b;

(% o41) $$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Sí que guardan relación, ya que, al ser la velocidad de convergencia tan lenta, con 12 iteraciones no es todavía unaaproximación tan exacta, aproximación que sí mejora al aumentar el número de iteraciones, acercándose bastante a lasolución exacta del sistema en el caso de 100 iteraciones.

10. Para el sistema de ecuaciones lineales

$$\begin{bmatrix} 1/10 & 2/11 & 3/7 \\ 4 & 5 & 4 \\ 7 & 3 & 8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 547/770 \\ 13 \\ 18 \end{bmatrix}$$

- estudia la convergencia del correspondiente método de Gauss-Seidel,
- aplica el método de Gauss-Seidel al sistema anterior, partiendo de la iteración inicial $x_0 = [0,0,0]^T$ y realizando 9 iteraciones y
- resuelve el sistema anterior mediante un adecuado comando de Maxima y halla el error relativo (norma $\|\cdot\|_\infty$ del máximo) que se comete al tomar x_0 como aproximación de la solución exacta x. Interpreta dicho error a la luz del primer apartado.

<u>Solución.</u>

- Sea B la matriz asociada al método de Gauss-Seidel. Sean $D = \begin{bmatrix} 1/10 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 8 \end{bmatrix}$, $E = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -4 & 0 & 0 \\ -7 & -3 & 0 \end{bmatrix}$, $F = \begin{bmatrix} 0 & -2/11 & -3/7 \\ 0 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$. Entonces

$$B = (D-E)^{-1}F = \begin{bmatrix} 0 & -20/11 & -30/7 \\ 0 & 16/19 & 92/35 \\ 0 & 23/28 & 387/140 \end{bmatrix} \implies \rho(B) \approx 3.89 > 1$$

  Por tanto, el método no converge para todas las estimaciones iniciales.
- Resuelto con Maxima.
- Resuelto con Maxima.

————-EJERCICIO 10————–

(% i21) x0:[0, 0, 0];

(x0) $$[0,0,0]$$

(% i22) A:matrix([1/10, 2/11, 3/7],[4, 5, 4],[7, 3, 8]);

(A) $$\begin{pmatrix} \frac{1}{10} & \frac{2}{11} & \frac{3}{7} \\ 4 & 5 & 4 \\ 7 & 3 & 8 \end{pmatrix}$$

(% i23) n:matrix_size(A)[1];

(n) $$3$$

(% i24) b:[547/770, 13, 18];

(b) $$[\frac{547}{770}, 13, 18]$$

(% i25) D:ident(n);

(D) $$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(% i26) E: genmatrix(lambda([i,j], 0), n, n);

(E) $$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

(% i27) F: genmatrix(lambda([i,j], 0), n, n);

(F) $$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

(% i28) for i:1 thru n do D[i,i]:A[i,i];

(% o28) $$done$$

(% i29) for i:1 thru n-1 do (for j: i+1 thru n do F[i, j]:-A[i,j]);

(% o29) $$done$$

(% i30) for i:2 thru n do (for j:1 thru i-1 do E[i, j]:-A[i,j]);

(% o30) $$done$$

(% i31) M:D-E;

(M) $$\begin{pmatrix} \frac{1}{10} & 0 & 0 \\ 4 & 5 & 0 \\ 7 & 3 & 8 \end{pmatrix}$$

(% i32) N:F;

(N) $$\begin{pmatrix} 0 & -\frac{2}{11} & -\frac{3}{7} \\ 0 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

(% i33) B:invert(M).N;

(B) $$\begin{pmatrix} 0 & -\frac{20}{11} & -\frac{30}{7} \\ 0 & \frac{16}{11} & \frac{92}{35} \\ 0 & \frac{23}{22} & \frac{387}{140} \end{pmatrix}$$

(% i38) x:makelist(0, i, 1, n);

(x) $$[0, 0, 0]$$

(% i39) anterior:x0;

(anterior) $$[0, 0, 0]$$

(% i40) for i:1 thru 9 do (aux:x, for j:1 thru n do x[j]:1/A[j, j]*(b[j]-sum(A[j, k]*x[k], k, 1, j-1) - sum(A[j, k]*anterior[k], k, j+1, n)), anterior:aux);

(% o40) $$done$$

(% i41) float(x);

(% o41) $$[321172.8023352613, -215804.1729920051, -200097.3871713517]$$

Aquí se observa que el método de Gauss-Seidel no es convergente para toda estimación inicial. La solución exacta del sistema es:

(% i42) solucion:invert(A).b;

(solucion) $$\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$$

Por tanto, el error cometido será:

(% i50) apply(max, (makelist(solucion[i, 1], i, 1, 3)-x0));

(% o50) $$1$$

11. Sea $A \in \mathbb{R}^{N\times N}$ una matriz regular con $a_{11}\cdots a_{NN} \neq 0$

   - Comprueba que la correspondiente matriz del método de Jacobi $M^{-1}N = D^{-1}(E+F)$ tiene norma infinito menor estrictamente que 1 si, y solo si, A es diagonalmente estrictamente dominante.
   - Deduce que si A es diagonalmente estrictamente dominante, entonces el método de Jacobi correspondiente es convergente, cualquiera sean el vector de términos independientes y la estimación inicial fijados.

   Solución.

   - Sean: $D = \begin{bmatrix} a_{11} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & a_{33} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{NN} \end{bmatrix}$, $E = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ -a_{21} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ -a_{31} & -a_{32} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -a_{N1} & -a_{N2} & -a_{N3} & \cdots & 0 \end{bmatrix}$, y
     $F = \begin{bmatrix} 0 & -a_{12} & -a_{13} & \cdots & -a_{1N} \\ 0 & 0 & -a_{23} & \cdots & -a_{1N} \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -a_{3N} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}$. Entonces, $D^{-1} = \begin{bmatrix} 1/a_{11} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1/a_{22} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1/a_{33} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1/a_{NN} \end{bmatrix}$.

     Tenemos así que $D^{-1}(E+F) = \begin{bmatrix} 0 & -a_{12}/a_{11} & -a_{13}/a_{11} & \cdots & -a_{1N}/a_{11} \\ -a_{21}/a_{22} & 0 & -a_{23}/a_{22} & \cdots & -a_{2N}/a_{22} \\ -a_{31}/a_{33} & -a_{32}/a_{33} & 0 & \cdots & -a_{3N}/a_{33} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -a_{N1}/a_{NN} & -a_{N2}/a_{NN} & -a_{N3}/a_{NN} & \cdots & 0 \end{bmatrix}$.

     Entonces,

     $$\begin{aligned} \|D^{-1}(E+F)\|_\infty < 1 &\iff \frac{|a_{i1}|+|a_{i2}|+\cdots+|a_{i,i-1}|+|a_{i,i+1}|+\cdots+|a_{iN}|}{|a_{ii}|} < 1 \ \forall i \in \{1,2,\ldots,N\} \\ &\iff |a_{i1}|+|a_{i2}|+\cdots+|a_{i,i-1}|+|a_{i,i+1}|+\cdots+|a_{iN}| < |a_{ii}| \ \forall i \in \{1,2,\ldots,N\} \\ &\iff A \text{ es diagonalmente estrictamente dominante} \end{aligned}$$

   - A es diagonalmente estrictamente dominante $\Longrightarrow$ la matriz del método de Jacobi tiene norma infinito menor estrictamente que 1, y como sabemos que si la matriz de un método iterativo tiene alguna norma matricial menor que 1, el método converge, deducimos que el método de Jacobi es convergente.

12. Considera un sistema formado por 5 muelles alineados verticalmente y 4 cuerpos entre los mismos de masas $m_1 = 5$ kg, $m_2 = 4$ kg, $m_3 = 3$ kg, $m_4 = 2$ kg, de forma que el extremo superior del muelle de arriba y el extremo inferior del que está abajo permanecen fijos: véase la figura adjunta. Suponemos además que los cuerpos están sometidos únicamente a la acción de sus pesos p_1, p_2, p_3 y p_4 y que el sistema está en equilibrio.

   - Sabiendo que los coeficientes de elasticidad de los muelles son $c_1 = 1Nw/m, c_2 = 1.1Nw/m, c_3 = 0.9Nw/m, c_4 = 0.2Nw/m$ y $c_5 = 3Nw/m$, expresa los desplazamientos x_1, x_2, x_3 y x_4 de los cuerpos en función de sus pesos mediante un conveniente sistema de ecuaciones lineales $Kx = p$.
   - ¿Admite la matriz K de coeficientes, conocida en este contexto como matriz de rigidez, una factorización LU tipo Cholesky? En caso afirmativo determínala y úsala para resolver el sistema anterior.
   - Demuestra que tanto el método de Jacobi como el de Gauss-Seidel convergen hacia la solución del sistema, a pesar de que la matriz de rigidez no es diagonalmente estrictamente dominante, y calcula para cada uno de dichos métodos iterativos las 7 primeras iteraciones, partiendo de la estimación inicial $x_0 = [0,0,0,0]^T$.
   - Comprueba que para la iteración séptima del método de Gauss-Seidel se verifican las 3 estimaciones del error absoluto establecidas en la Sección 2.3.

   Solución.

- $d_1 = x_1, \quad d_2 = x_2 - x_1, \quad d_3 = x_3 - x_2, \quad d_4 = x_4 - x_3, d_5 = -x_4 \Longleftrightarrow Ax = d$. Entonces,

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

y además,

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1.1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.9 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

Tenemos también que $p = [9.81m_1, 9.81m_2, 9.81m_3, 9.81m_4]^T = [49.05, 39.24, 29.43, 19.62]^T$. Hay que resolver entonces el sistema de ecuaciones:

$$Kx = p \Longleftrightarrow A^T CAx = p \Longleftrightarrow \begin{bmatrix} 2.1 & -1.1 & 0 & 0 \\ -1.1 & 2 & -0.9 & 0 \\ 0 & -0.9 & 1.1 & -0.2 \\ 0 & 0 & -0.2 & 3.2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 49.05 \\ 39.24 \\ 29.43 \\ 19.62 \end{bmatrix} \Longrightarrow \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 93.02 \\ 133 \\ 138.26 \\ 14.77 \end{bmatrix}$$

- Intentemos hallar dicha factorización tipo Cholesky:
  Veamos si existe una matriz triangular superior, U, tal que $U^T U = K$. Para ello, sea

$$U = \begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} & u_{13} & u_{14} \\ 0 & u_{22} & u_{23} & u_{24} \\ 0 & 0 & u_{33} & u_{34} \\ 0 & 0 & 0 & u_{44} \end{bmatrix}$$

. Entonces,

$$U^T U = \begin{bmatrix} u_{11} & 0 & 0 & 0 \\ u_{12} & u_{22} & 0 & 0 \\ u_{13} & u_{23} & u_{33} & 0 \\ u_{14} & u_{24} & u_{34} & u_{44} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} & u_{13} & u_{14} \\ 0 & u_{22} & u_{23} & u_{24} \\ 0 & 0 & u_{33} & u_{34} \\ 0 & 0 & 0 & u_{44} \end{bmatrix}$$

de donde, multiplicando la primera fila por las columnas:

  - $u_{11}^2 = 2.1 \implies u_{11} = 1.45$
  - $u_{11}u_{12} = -1.1 \implies u_{12} = -0.76$
  - $u_{11}u_{13} = u_{11}u_{14} = 0 \implies u_{13} = u_{14} = 0$

multiplicando la segunda fila por las columnas:

  - $u_{12}^2 + u_{22}^2 = 2 \implies u_{22} = 1.19$
  - $u_{12}u_{13} + u_{22}u_{23} = -0.9 \implies u_{23} = -0.76$
  - $u_{12}u_{14} + u_{22}u_{24} = 0 \implies u_{24} = 0$

multiplicando la tercera fila por las columnas:

  - $u_{13}^2 + u_{23}^2 + u_{33}^2 = 1.1 \implies u_{33} = 0.73$
  - $u_{13}u_{14} + u_{23}u_{24} + u_{33}u_{34} = -0.2 \implies u_{34} = -0.274$

multiplicando la cuarta fila por la cuarta columna:

  - $u_{14}^2 + u_{24}^2 + u_{34}^2 + u_{44}^2 = 3.2 \implies 1.79$

Entonces, $U = \begin{bmatrix} 1.45 & -0.76 & 0 & 0 \\ 0 & 1.19 & -0.76 & 0 \\ 0 & 0 & 0.73 & -0.274 \\ 0 & 0 & 0 & 1.79 \end{bmatrix}$ cumple que $U^T U = K$, y por tanto, K admite una factorización tipo Cholesky.

Para resolver el sistema, resolvemos primero el sistema auxiliar $U^T x' = p \Longleftrightarrow \begin{bmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ x'_3 \\ x'_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 33.82 \\ 54.58 \\ 97.14 \\ 25.83 \end{bmatrix}$

y ahora, el sistema $Ux = x' \Longleftrightarrow \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 93.72 \\ 134.3 \\ 138.48 \\ 14.43 \end{bmatrix}$, que es la solución que nos piden. No coincide con la solución exacta debido a errores de redondeo.

- Resuelto con Maxima
- Resuelto con Maxima

—————EJERCICIO 12————— - Primer apartado

$\longrightarrow$ A:matrix([1, 0, 0, 0],[-1, 1, 0, 0],[0, -1, 1, 0],[0, 0, -1, 1],[0, 0, 0, -1]);

(A) $$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$\longrightarrow$ C:matrix([1, 0, 0, 0, 0],[0, 1.1, 0, 0, 0],[0, 0, 0.9, 0, 0],[0, 0, 0, 0.2, 0],[0, 0, 0, 0, 3]);

(C) $$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1.1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.9 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

$\longrightarrow$ K:transpose(A).C.A;

(K) $$\begin{pmatrix} 2.1 & -1.1 & 0.0 & 0.0 \\ -1.1 & 2.0 & -0.9 & 0.0 \\ 0.0 & -0.9 & 1.1 & -0.2 \\ 0.0 & 0.0 & -0.2 & 3.2 \end{pmatrix}$$

$\longrightarrow$ p:[49.05, 39.24, 29.43, 19.62];

(p) $$[49.05, 39.24, 29.43, 19.62]$$

$\longrightarrow$ x:invert(K).transpose(p);

(x) $$\begin{pmatrix} 93.02299879081018 \\ 132.9984522370012 \\ 138.2573397823458 \\ 14.77233373639661 \end{pmatrix}$$

- Segundo apartado

$\longrightarrow$ U:matrix([1.45, -0.76, 0, 0],[0, 1.19, -0.76, 0],[0, 0, 0.73, -0.274],[0, 0, 0, 1.79]);

(U) $$\begin{pmatrix} 1.45 & -0.76 & 0 & 0 \\ 0 & 1.19 & -0.76 & 0 \\ 0 & 0 & 0.73 & -0.274 \\ 0 & 0 & 0 & 1.79 \end{pmatrix}$$

$\longrightarrow$ x1:invert(transpose(U)).transpose(p);

(x1) $$\begin{pmatrix} 33.82758620689655 \\ 54.57896261953057 \\ 97.13700217923732 \\ 25.82990983078828 \end{pmatrix}$$

$\longrightarrow$ solucion:invert(U).x1;

(solucion) $$\begin{pmatrix} 93.7242808652727 \\ 134.3060803259853 \\ 138.4806223268315 \\ 14.43011722390406 \end{pmatrix}$$

- Tercer apartado

$\longrightarrow$ x0:[0, 0, 0,0];

(x0) $$[0, 0, 0, 0]$$

$\longrightarrow$ A:K;

(A) $$\begin{pmatrix} 2.1 & -1.1 & 0.0 & 0.0 \\ -1.1 & 2.0 & -0.9 & 0.0 \\ 0.0 & -0.9 & 1.1 & -0.2 \\ 0.0 & 0.0 & -0.2 & 3.2 \end{pmatrix}$$

$\longrightarrow$ n:matrix_size(A)[1];

(n) $$4$$

$\longrightarrow$ b:p;

(b) $$[49.05, 39.24, 29.43, 19.62]$$

$\longrightarrow$ D:ident(n);

(D) $$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$\longrightarrow$ E: genmatrix(lambda([i,j], 0), n, n);

(E) $$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

⟶ F: genmatrix(lambda([i,j], 0), n, n);

(F)
$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

⟶ for i:1 thru n do D[i,i]:A[i,i];

(% o20) *done*

⟶ for i:1 thru n-1 do (for j: i+1 thru n do F[i, j]:-A[i,j]);

(% o21) *done*

⟶ for i:2 thru n do (for j:1 thru i-1 do E[i, j]:-A[i,j]);

(% o22) *done*

- Método de Jacobi

⟶ M:D;

(M)
$$\begin{pmatrix} 2.1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2.0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1.1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3.2 \end{pmatrix}$$

⟶ N:E+F;

(N)
$$\begin{pmatrix} 0 & 1.1 & -0.0 & -0.0 \\ 1.1 & 0 & 0.9 & -0.0 \\ -0.0 & 0.9 & 0 & 0.2 \\ -0.0 & -0.0 & 0.2 & 0 \end{pmatrix}$$

⟶ B:invert(M).N;

(B)
$$\begin{pmatrix} 0.0 & 0.5238095238095238 & 0.0 & 0.0 \\ 0.55 & 0.0 & 0.45 & 0.0 \\ 0.0 & 0.8181818181818181 & 0.0 & 0.1818181818181818 \\ 0.0 & 0.0 & 0.0625 & 0.0 \end{pmatrix}$$

⟶ float(apply(max, abs(eigenvalues(B)[1])));

rat: replaced 0.3681818181818181 by 81/220 = 0.3681818181818181rat: replaced -0.01136363636363636 by -1/

(% o29) 0.8140642413865695

Vemos que el radio espectral de la matriz asociada al método de Jacobi es menor que uno, por lo que el método es convergente.Calculemos ahora la séptima iteración del método.

$\longrightarrow$ anterior:x0;

(anterior) $[0, 0, 0, 0]$

$\longrightarrow$ x:makelist(0, i, 1, n);

(x) $[0, 0, 0, 0]$

$\longrightarrow$ for i:1 thru 7 do (aux:x, for j:1 thru n do x[j]:1/A[j, j]*(b[j]-sum(A[j, k]*anterior[k],k, 1,n) + A[j, j]*anterior[j]), anterior:aux);

(% o36) *done*

$\longrightarrow$ float(x);

(% o37)

$[84.62695446461753, 122.3761491511347, 129.4147362801101, 14.21967101750688]$

Vemos que se acerca a la solución exacta del sistema. Con unas pocas iteraciones más, la solución será muy aproximada. - Método de Gauss-Seidel

$\longrightarrow$ M:D-E;

(M) $$\begin{pmatrix} 2.1 & 0 & 0 & 0 \\ -1.1 & 2.0 & 0 & 0 \\ -0.0 & -0.9 & 1.1 & 0 \\ -0.0 & -0.0 & -0.2 & 3.2 \end{pmatrix}$$

$\longrightarrow$ N:F;

(N) $$\begin{pmatrix} 0 & 1.1 & -0.0 & -0.0 \\ 0 & 0 & 0.9 & -0.0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$\longrightarrow$ B:invert(M).N;

(B)

$$\begin{pmatrix} 0.0 & 0.5238095238095238 & 0.0 & 0.0 \\ 0.0 & 0.2880952380952381 & 0.45 & 0.0 \\ 0.0 & 0.2357142857142857 & 0.3681818181818181 & 0.1818181818181818 \\ 0.0 & 0.01473214285714285 & 0.02301136363636363 & 0.01136363636363636 \end{pmatrix}$$

→ float(apply(max, abs(eigenvalues(B)[1])));

rat: replaced -0.45 by -9/20 = -0.45rat: replaced -0.002678571428571428 by -3/1120 = -0.002678571428571428

(% o41) 0.6627005891042911

Vemos que el radio espectral de la matriz asociada al método de Gauss-Seidel es menor que uno, por lo que el método esconvergente. Calculemos ahora la séptima iteración del método.

→ x7:makelist(0, i, 1, n);

(x7) $[0, 0, 0, 0]$

→ anterior:x0;

(anterior) $[0, 0, 0, 0]$

→ for i:1 thru 7 do (aux:x7, for j:1 thru n do x7[j]:1/A[j, j]*(b[j]-sum(A[j, k]*x7[k], k, 1, j-1) - sum(A[j, k]*anterior[k], k, j+1, n)), anterior:aux);

(% o68) *done*

→ float(x7);

(% o69)
$[86.23493780325924, 124.4104983895593, 131.1082431924113, 14.3255151995257]$

→ x6:makelist(0, i, 1, n);

(x6) $[0, 0, 0, 0]$

→ anterior:x0;

(anterior) $[0, 0, 0, 0]$

→ for i:1 thru 6 do (aux:x6, for j:1 thru n do x6[j]:1/A[j, j]*(b[j]-sum(A[j, k]*x6[k], k, 1, j-1) - sum(A[j, k]*anterior[k], k, j+1, n)), anterior:aux);

(% o72) *done*

⟶ float(x6);

(% o73)
[82.77997034179355, 120.039426715313, 127.469516883926, 14.09809480524537]

⟶ x1:makelist(0, i, 1, n);

(x1) [0, 0, 0, 0]

⟶ anterior:x0;

(anterior) [0, 0, 0, 0]

⟶ for i:1 thru 1 do (aux:x7, for j:1 thru n do x1[j]:1/A[j, j]*(b[j]-sum(A[j, k]*x1[k], k, 1, j-1) - sum(A[j, k]*anterior[k], k, j+1, n)), anterior:aux);

(% o76) *done*

⟶ float(x1);

(% o77)
[23.35714285714285, 32.46642857142857, 53.31798701298701, 9.46362418831169]

Al igual que antes, vemos que se acerca a la solución exacta del sistema. En las siguientes iteraciones, la solución será muyaproximada. Cuarto apartado. Trabajaremos con la norma infinito

⟶ error_abs:apply("+", abs(x-makelist(solucion[i, 1], i, 1, n)));

(error_ abs) 24.86190615723809

⟶ norma_B:apply(max, makelist(apply("+", abs(B[i])), i,1, n));

(norma_ B) 0.7857142857142857

- Primera desigualdad:

⟶ norma_B^7/(1-norma_B)*apply("+", abs(x1));

(% o93) 102.3205801523718

Claramente, 24.86 <= 102.32 - Segunda desigualdad

⟶ norma_B*apply("+", abs(x6 -makelist(solucion[i, 1], i, 1, n)));

(% o94) 28.72107228234801

Claramente, 24.86 <=∼28.72 - Tercera desigualdad

⟶ norma_B/(1-norma_B)*apply("+", abs(x7-x6));

(% o95) 42.87134807441772

Que también se cumple, claramente.

RELACIÓN 2 MAXIMA

EJERCICIO 1

→ `A:matrix([0.34,-1.99,2/7,0],[0,1.1,2.3,-3.57],[0,0,3.2,33],[0,0,0,66.72]);`

(A) $$\begin{pmatrix} 0.34 & -1.99 & \frac{2}{7} & 0 \\ 0 & 1.1 & 2.3 & -3.57 \\ 0 & 0 & 3.2 & 33 \\ 0 & 0 & 0 & 66.72 \end{pmatrix}$$

→ `b:[1,34,78,-9.42];`

(b) $$[1, 34, 78, -9.42]$$

→ `N:matrix_size(A)[1];`

(N) $$4$$

→ `x:makelist(0, i, 1, N);`

(x) $$[0, 0, 0, 0]$$

→ `x[N]:b[N]/A[N, N];`

(x[N]) $$-0.1411870503597122$$

→ `for i:N-1 thru 1 step -1 do x[i]:1/A[i,i]*(b[i] - apply("+", makelist(A[i, j]*x[j], j, i+1, N)));`

(% o17) $$\mathit{done}$$

→ `x;`

(% o18)
$$[-156.6572049746565, -23.55938010954871, 25.83099145683453, -0.1411870503597122]$$

EJERCICIO 2

→ `A:matrix([0.24,1.1,3/2,3.45],[-1.2,1,3.5,6.7],[33.1,1,2,-3/8],[4,17,71,-4/81]);`

(A) $$\begin{pmatrix} 0.24 & 1.1 & \frac{3}{2} & 3.45 \\ -1.2 & 1 & 3.5 & 6.7 \\ 33.1 & 1 & 2 & -\frac{3}{8} \\ 4 & 17 & 71 & -\frac{4}{81} \end{pmatrix}$$

$\longrightarrow$ b:[1,2,4,-21/785];

(b) $[1, 2, 4, -\frac{21}{785}]$

$\longrightarrow$ N:matrix_size(A)[1];

(N) 4

$\longrightarrow$ for i:1 thru N-1 do (for j:i+1 thru N do (b[j]:(b[j]-b[i]*A[j, i]/A[i, i]), A[j]:(A[j] - A[i]*(A[j, i]/A[i, i]))));

(% o13) *done*

$\longrightarrow$ A;

(% o14)
$$\begin{pmatrix} 0.24 & 1.1 & \frac{3}{2} & 3.45 \\ 0.0 & 6.5 & 11.0 & 23.95 \\ 0.0 & 0.0 & 50.16987179487182 & 79.11474358974363 \\ 0.0 & 0.0 & 0.0 & -128.7338968666914 \end{pmatrix}$$

$\longrightarrow$ b;

(% o15) $[1, 7.0, 28.38461538461538, -42.55955680541488]$

$\longrightarrow$ x:makelist(0, i, 1, N);

(x) $[0, 0, 0, 0]$

$\longrightarrow$ x[N]:b[N]/A[N, N];

(x[N]) 0.3306010137290167

$\longrightarrow$ for i:N-1 thru 1 step -1 do suma:x[i]:1/A[i,i]*(b[i] - apply("+", makelist(A[i, j]*x[j], j, i+1, N)));

(% o18) *done*

$\longrightarrow$ x;

(% o19)
$[0.1284446578136515, -0.2164089146507654, 0.04443306058363852, 0.3306010137290167]$

EJERCICIO 3 primero programamos el método de Doolittle, y luego lo adaptamos para el método de Crout

$\longrightarrow$ A:matrix([3,6,9],[1,4,11],[0,4,19]);

(A) $$\begin{pmatrix} 3 & 6 & 9 \\ 1 & 4 & 11 \\ 0 & 4 & 19 \end{pmatrix}$$

$\longrightarrow$ b:[1/2, -2/3, -3/4];

(b) $$[\frac{1}{2}, -\frac{2}{3}, -\frac{3}{4}]$$

$\longrightarrow$ N:matrix_size(A)[1];

(N) $$3$$

$\longrightarrow$ l:ident(N);

(l) $$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$\longrightarrow$ u:ident(N);

(u) $$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$\longrightarrow$ for i:1 thru N do(for j:i thru N do u[i, j]:transpose(A)[i,j]-sum(l[i,k]*u[k,j], k, 1, i-1),for j:i+1 thru N do l[j, i]:1/u[i,i]*(transpose(A)[j,i]-sum(l[j,k]*u[k, i], k, 1, i-1)));

(% o7) $$done$$

$\longrightarrow$ l;

(% o8) $$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 4 & 1 \end{pmatrix}$$

$\longrightarrow$ u;

(% o9) $$\begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

$\longrightarrow$ aux:u;

(aux) $$\begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

$\longrightarrow$ u:transpose(l);

(u) $$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$\longrightarrow$ l:transpose(aux);

(l) $$\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 4 & 3 \end{pmatrix}$$

resolvemos ahora el sistema l.y=b

$\longrightarrow$ y:makelist(0, i, 1, N);

(y) $$[0, 0, 0]$$

$\longrightarrow$ y[1]:b[1]/l[1,1];

(y[1]) $$\frac{1}{6}$$

$\longrightarrow$ for i:2 thru N do y[i]:1/l[i, i]*(b[i]-sum(l[i, j]*y[j], j, 1, i-1));

(% o18) $$\mathit{done}$$

$\longrightarrow$ y;

(% o19) $$[\frac{1}{6}, -\frac{5}{12}, \frac{11}{36}]$$

$\longrightarrow$ x:makelist(0, i, 1, N);

(x) $$[0, 0, 0]$$

ahora resolvemos Ux=y

$\longrightarrow$ x[N]:y[N]/u[N, N];

(x[N]) $$\frac{11}{36}$$

$\longrightarrow$ for i:N-1 thru 1 step -1 do x[i]:1/u[i,i]*(y[i] - apply("+", makelist(u[i, j]*x[j], j, i+1, N)));

(% o26) $$done$$

$\longrightarrow$ x;

(% o27) $$[\frac{91}{36},-\frac{59}{36},\frac{11}{36}]$$

EJERCICIO 4

$\longrightarrow$ x0:[1,-1.34,1.456];

(x0) $$[1,-1.34,1.456]$$

$\longrightarrow$ A:matrix([3,-2,0.25],[2,9,-5],[2,3,-6]);

(A) $$\begin{pmatrix}3 & -2 & 0.25\\ 2 & 9 & -5\\ 2 & 3 & -6\end{pmatrix}$$

$\longrightarrow$ n:matrix_size(A)[1];

(n) $$3$$

$\longrightarrow$ b:[1.1,2.2,3.3];

(b) $$[1.1,2.2,3.3]$$

$\longrightarrow$ N:matrix_size(A)[1];

(N) $$3$$

$\longrightarrow$ D:ident(N);

(D) $$\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

$\longrightarrow$ E: genmatrix(lambda([i,j], 0), N, N);

(E) $$\begin{pmatrix}0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

$\longrightarrow$ F: genmatrix(lambda([i,j], 0), N, N);

(F) $$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$\longrightarrow$ for i:1 thru N do D[i,i]:A[i,i];

(% o10) *done*

$\longrightarrow$ for i:1 thru N-1 do (for j: i+1 thru N do F[i, j]:-A[i,j]);

(% o11) *done*

$\longrightarrow$ for i:2 thru N do (for j:1 thru i-1 do E[i, j]:-A[i,j]);

(% o12) *done*

- Jacobi

$\longrightarrow$ M:D;

(M) $$\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 9 & 0 \\ 0 & 0 & -6 \end{pmatrix}$$

$\longrightarrow$ N:E+F;

(N) $$\begin{pmatrix} 0 & 2 & -0.25 \\ -2 & 0 & 5 \\ -2 & -3 & 0 \end{pmatrix}$$

$\longrightarrow$ B:invert(M).N;

(B) $$\begin{pmatrix} 0 & \frac{2}{3} & -0.08333333333333333 \\ -\frac{2}{9} & 0 & 0.5555555555555556 \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{2} & 0.0 \end{pmatrix}$$

$\longrightarrow$ c:invert(M).b;

(c) $$\begin{pmatrix} 0.3666666666666667 \\ 0.2444444444444444 \\ -0.5499999999999999 \end{pmatrix}$$

$\longrightarrow$ anterior:x0;

(anterior) $[1, -1.34, 1.456]$

$\longrightarrow$ x:makelist(0, i, 1, n);

(x) $[0, 0, 0]$

$\longrightarrow$ for i:1 thru 15 do (aux:x, for j:1 thru n do x[j]:1/A[j, j]*(b[j]-sum(A[j, k]*anterior[k],k, 1,n) + A[j, j]*anterior[j]), anterior:aux);

(% o19) *done*

$\longrightarrow$ x;

(% o20) $[0.3393137090792436, -0.1020165630555549, -0.4879037118346961]$

- Gauss-Seidel

$\longrightarrow$ M:D-E;

(M) $$\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 2 & 9 & 0 \\ 2 & 3 & -6 \end{pmatrix}$$

$\longrightarrow$ N:F;

(N) $$\begin{pmatrix} 0 & 2 & -0.25 \\ 0 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$\longrightarrow$ B:invert(M).N;

(B) $$\begin{pmatrix} 0 & \frac{2}{3} & -0.08333333333333333 \\ 0 & -\frac{4}{27} & 0.5740740740740741 \\ 0 & \frac{4}{27} & 0.2592592592592593 \end{pmatrix}$$

$\longrightarrow$ x:makelist(0, i, 1, n);

(x) $[0, 0, 0]$

$\longrightarrow$ anterior:x0;

(anterior) $[1, -1.34, 1.456]$

→ for i:1 thru 15 do (aux:x, for j:1 thru n do x[j]:1/A[j, j]*(b[j]-sum(A[j, k]*x[k], k, 1, j-1) - sum(A[j, k]*anterior[k], k, j+1, n)), anterior:aux);

(% o30) $done$

→ float(x);

(% o31) $[0.3393174570092825, -0.102013966967479, -0.4879011644806453]$

Solución ejercicios Tema 3

Manuel Vicente Bolaños Quesada

1. Sean $x_0, x_1, \ldots, x_M$ $M+1$ números reales. Comprueba que

$$\det \begin{bmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ x_0 & x_1 & \cdots & x_{M-1} & x_M \\ x_0^2 & x_1^2 & \cdots & x_{M-1}^2 & x_M^2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ x_0^M & x_1^M & \cdots & x_{M-1}^M & x_M^M \end{bmatrix} = \prod_{\substack{i,j=0 \\ i<j}}^{M} (x_j - x_i).$$

Deduce que si $(x_0, y_0), (x_1, y_1), \ldots, (x_M, y_M) \in \mathbb{R}^2$ son tales que $i, j = 1, \ldots, M \implies x_i \neq x_j$, entonces existe una única función polinómica $p : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ de grado menor o igual que M con $i = 0, 1, \ldots, M \implies p(x_i) = y_i$.

- **Solución.**

Para la primera parte del ejercicio, primero vemos que el determinante debe ser un polinomio homogéneo de grado $0 + 1 + 2 + \cdots + M = \dfrac{M(M+1)}{2}$. Ahora, notamos que si $x_i = x_j$ para algunos $i < j \in \{0, 1, \ldots, M\}$, entonces dos columnas de la matriz (a la que a partir de ahora llamaremos A, por comodidad) son iguales, y por tanto su determinante es 0. Deducimos entonces que $(x_j - x_i)$ es un factor de $\det(A)$. Como esto lo hemos hecho para dos índices cualquiera, deducimos que $\det(A) = Q(x_0, x_1, \ldots, x_M) \displaystyle\prod_{\substack{i,j=0 \\ i<j}}^{M} (x_j - x_i)$, donde $Q(x_0, x_1, \ldots, x_M)$ es un polinomio en esas variables.

Como $\det(A)$ tiene que ser un polinomio homogéneo de grado $\dfrac{M(M+1)}{2}$, y $\displaystyle\prod_{\substack{i,j=0 \\ i<j}}^{M} (x_j - x_i)$ ya lo es, Q tiene que ser una constante. El producto de los elementos de la diagonal de A es $x_1 x_2^2 \cdots x_M^M$, que coincide con el monomio obtenido al multiplicar los primeros sumandos de cada término de $\displaystyle\prod_{\substack{i,j=0 \\ i<j}}^{M} (x_j - x_i)$. Por tanto, $Q = 1$, y, en efecto, $\det(A) = \displaystyle\prod_{\substack{i,j=0 \\ i<j}}^{M} (x_j - x_i)$.

Para la segunda parte del enunciado, supongamos que existen dos polinomios $p, q : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, de grado menor o igual que M y distintos, tales que $p(x_i) = q(x_i) = y_i \ \forall i \in \{0, 1, \ldots, M\}$. Sea $r(x) = p(x) - q(x)$. Como p y q son distintos, r es un polinomio de grado menor o igual que M no nulo y $i = 0, 1, \ldots, M \implies r(x_i) = 0$. Es decir, x_i es una raíz del polinomio r $\forall i \in \{0, 1, \ldots, M\}$. Supongamos que $r(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_M x^M$, para algunas constantes a_i. Entonces, se satisfacen estas ecuaciones:

$$\begin{cases} a_0 + a_1 x_0 + \cdots + a_M x_0^M = 0 \\ a_0 + a_1 x_1 + \cdots + a_M x_1^M = 0 \\ \qquad\qquad \vdots \\ a_0 + a_1 x_M + \cdots + a_M x_M^M = 0 \end{cases}$$

La solución a ese sistema es única (con solución $a_0 = a_1 = \cdots = a_M = 0$) si $\det(A) \neq 0$. Pero como $x_i \neq x_j$ si $i \neq j$, $\det(A) \neq 0$, y por tanto, $r(x) = 0$, de donde $p(x) = q(x)$.

2. Comprueba que el problema de interpolación anterior no está bien definido si el grado de la función polinómica p es distinto de M (número de datos menos 1).

   - **Solución.**

   Caso 1: el grado es menor que M

   Un contraejemplo sería el siguiente: por los puntos $(0,0),(1,1),(2,1)$ no pasa ningún polinomio de grado 1.

   Caso 2: el grado es mayor que M

   Un contraejemplo es el siguiente: dados los puntos $(0,0),(1,1)$ pasa la recta $y=x$, y la parábola $y=x^2$.

3. Demuestra que si $a<b$, $f\in C^3([a,b])$ y I_2f es el polinomio en $\mathbb{P}_2$ de forma que

$$I_2f(x_0)=f(x_0),\qquad I_2f(x_1)=f(x_1),\qquad I_2f(x_2)=f(x_2)$$

   con los nodos igualmente espaciados $x_0=a, x_1=(a+b)/2, x_2=b$, entonces el correspondiente error de interpolación E_2f verifica

$$\|E_2f\|_\infty\le\frac{\|f'''\|_\infty}{9\sqrt{3}}h^3,$$

   siendo $h=(b-a)/2$.

   - **Solución.**

   Error de interpolación puntual: $\exists\varepsilon\in]a,b[$ tal que $E_2f(x)=\dfrac{f'''(\varepsilon)}{6}(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)$.

   Estimación uniforme para error de interpolación: $\|E_2f\|_\infty\le\dfrac{\|f'''\|_\infty}{6}h^3$. No obstante, esta estimación es mejorable (acotando $\omega_3(x)$): existe $0\le t\le 2$ tal que $x=x_0+th$. Entonces:

   - Caso 1: $x_0\le x\le x_1$

$$|(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)|=(x-x_0)(x_1-x)(x_2-x)=th(1-t)h(2-t)h=h^3(t^3-3t^2+2t)$$

   Sea $g:[0,2]\longrightarrow\mathbb{R}$ la función dada por $g(x)=x^3-3x^2+2x\ \forall x\in[0,2]$. Tenemos que $g'(x)=3x^2-6x+2$, y $g'(x)=0\iff x^2-2x+\frac{2}{3}=0\iff\left(x-\left(1+\dfrac{1}{\sqrt{3}}\right)\right)\left(x-\left(1-\dfrac{1}{\sqrt{3}}\right)\right)=0$. Es fácil comprobar que g tiene un máximo absoluto en $x=1-\dfrac{1}{\sqrt{3}}$. Entonces, $g(x)\le g\left(1-\dfrac{1}{\sqrt{3}}\right)=\dfrac{2}{3\sqrt{3}}$.

   Deducimos entonces que $\|E_2f\|_\infty\le\dfrac{\|f'''\|_\infty}{6}h^3\dfrac{2}{3\sqrt{3}}=\dfrac{\|f'''\|_\infty}{9\sqrt{3}}h^3$, tal y como queríamos.

   - Caso 2: $x_1\le x\le x_2$

$$|(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)|=(x-x_0)(x_1-x)(x_2-x)=th(t-1)h(2-t)h=h^3(-t^3+3t^2-2t)$$

   Sea $h:[0,2]\longrightarrow\mathbb{R}$ la función dada por $h(x)=-x^3+3x^2-2x\ \forall x\in[0,2]$. Tenemos que $h'(x)=-3x^2+6x-2\implies h'(x)=0\iff x^2-2x+\frac{2}{3}=0$. Análogamente al caso anterior, obtenemos que h tiene un máximo en $x=1+\dfrac{1}{\sqrt{3}}$. Entonces, $h(x)\le h\left(1+\dfrac{1}{\sqrt{3}}\right)=\dfrac{2}{3\sqrt{3}}$. A partir de aquí se sigue igual que en el caso anterior.

4. Calcula los 7 nodos de Chebyshev $x_0, x_1, \ldots, x_6$ del intervalo $[1.6, 3]$ y úsalos para resolver el problema de interpolación:

$$\text{encontrar } p \in \mathbb{P}_6 \ : \ i = 0,1,2,3,4,5,6 \implies p(x_i) = \sqrt{|x_i - 2|}$$

mediante las fórmulas de Lagrange y Newton. Analiza el condicionamiento de este problema y obtén una estimación del error de interpolación.

- <u>**Solución.**</u>

Comenzamos hallando los 7 nodos de Chebyshev del intervalo referencia, $[-1, 1]$.

$$\left\{\cos\left(\frac{\pi}{14}\right), \cos\left(\frac{3\pi}{14}\right), \cos\left(\frac{5\pi}{14}\right), \cos\left(\frac{7\pi}{14}\right), \cos\left(\frac{9\pi}{14}\right), \cos\left(\frac{11\pi}{14}\right), \cos\left(\frac{13\pi}{14}\right)\right\}$$

Ahora, vamos a construir un conveniente isomorfismo afín. Sea $\phi : [-1, 1] \longrightarrow [1.6, 3]$ el isomorfismo afín caracterizado por la doble igualdad $\phi(-1) = 1.6$, $\phi(1) = 3$. Esto es, si $\phi(x) = \alpha x + \beta$, entonces:

$$\left\{\begin{array}{l} -\alpha + \beta = 1.6 \\ \alpha + \beta = 3 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{l} \alpha = 0.7 = \frac{7}{10} \\ \beta = 2.3 = \frac{23}{10} \end{array}\right.$$

Así pues $\phi(x) = \dfrac{7}{10}x + \dfrac{23}{10}$, y entonces, los 7 nodos de Chebyshev en el intervalo $[1.6, 3]$ son:

$$\left\{\frac{7}{10}\cos\left(\frac{\pi}{14}\right) + \frac{23}{10}, \frac{7}{10}\cos\left(\frac{3\pi}{14}\right) + \frac{23}{10}, \frac{7}{10}\cos\left(\frac{5\pi}{14}\right) + \frac{23}{10}, \frac{7}{10}\cos\left(\frac{7\pi}{14}\right) + \frac{23}{10}, \frac{7}{10}\cos\left(\frac{9\pi}{14}\right) + \frac{23}{10},\right.$$
$$\left.\frac{7}{10}\cos\left(\frac{11\pi}{14}\right) + \frac{23}{10}, \frac{7}{10}\cos\left(\frac{13\pi}{14}\right) + \frac{23}{10}\right\}$$

La parte del problema de interpolación la resuelvo con Maxima:

————————————————————EJERCICIO~4————————————————
———————————— Polinomio de interpolación mediante las fórmulas de Lagrange

(% i1) nodos:makelist(float(0.7*cos((2*i +1)*%pi/14)+2.3), i, 0, 6);

(nodos)
$$[2.982449538527276, 2.847282037727621, 2.60371861738229, 2.3, 1.996281382617709, 1.752717962272379, 1.617550461472723]$$

(% i2) f(x):=sqrt(abs(x-2));

(% o2)
$$\mathrm{f}(x) := \sqrt{|x-2|}$$

(% i3) imagenes:makelist(f(nodos[i]), i, 1, 7);

(imagenes)
$$[0.9911859253072939, 0.9204792435072183, 0.7769933187500974, 0.547722557505166, 0.06098046721935422, 0.4972746099768427, 0.6184250468143062]$$

(% i4) l(i,x):=product((x-nodos[j])/(nodos[i]-nodos[j]),j,1,i-1)*product((x-nodos[j])/(nodos[i]-nodos[j]),j,i+1,7);

(% o4)
$$\mathrm{l}(i,x) := \prod_{j=1}^{i-1} \frac{x - nodos_j}{nodos_i - nodos_j} \prod_{j=i+1}^{7} \frac{x - nodos_j}{nodos_i - nodos_j}$$

(% i5) p(x):=sum(imagenes[i]*l(i, x), i, 1, 7);

(% o5)
$$\mathrm{p}(x) := \sum_{i=1}^{7} imagenes_i \, \mathrm{l}(i,x)$$

(% i6) expand(p(x));

(% o6)
$$-24.75292799807803x^6+349.9934972799469x^5-2041.754186135891x^4+6285.746443881553x^3 -10762.69525253004x^2 + 9711.293214095564x - 3605.252707524357$$

Polinomio de interpolación mediante las fórmulas de Newton

(% i7) w(i, x):= if i=1 then 1 else product(x-nodos[j], j, 1, i-1);

(% o7)
$$\mathrm{w}(i,x) := \text{if } i = 1 \text{ then } 1 \text{ else } \prod_{j=1}^{i-1} x - nodos_j$$

(% i8) difer: genmatrix(lambda([i,j], 0), 7, 7);

(difer) $$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

(% i9) for i:1 thru 7 do difer[i, 1]:float(imagenes[i]);

(% o9) $$done$$

(% i10) for i:2 thru 7 do (for j:i thru 7 do difer[j, i]: (difer[j, i-1] - difer[j-1, i-1])/(nodos[j]-nodos[j-i+1]));

(% o10) $$done$$

(% i12) q(x):=sum(imagenes[i]*w(i, x), i, 1, 7);

(% o12) $$\mathrm{q}(x) := \sum_{i=1}^{7} imagenes_i \, \mathrm{w}(i, x)$$

(% i13) expand(p(x));

(% o13)

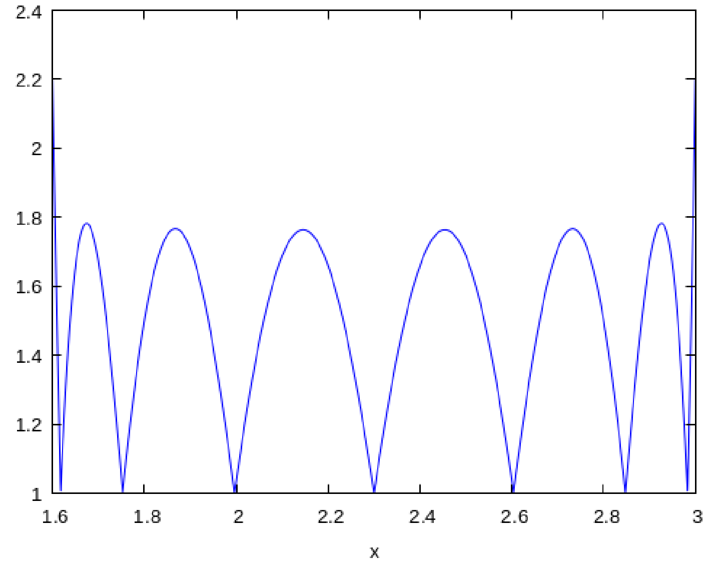
$$-24.75292799807803x^6+349.9934972799469x^5-2041.754186135891x^4+6285.746443881553x^3 -10762.69525253004x^2 + 9711.293214095564x - 3605.252707524357$$

Como podemos ver, ambos polinomios de interpolación son los mismos por ambos métodos. Para estudiar elcondicionamiento, vamos a graficar la función de Lebesgue

(% i14) lebesgue(x):=sum(abs(l(i, x)), i, 1, 7);

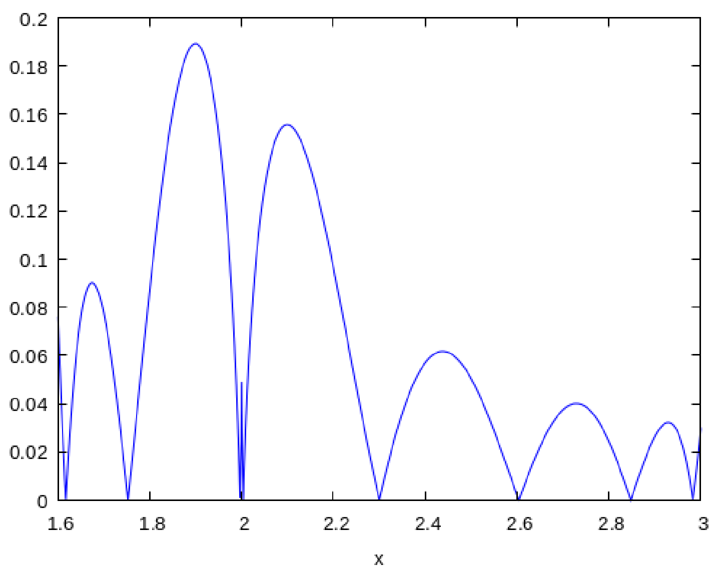
(% o14) $$\mathrm{lebesgue}(x) := \sum_{i=1}^{7} |\mathrm{l}(i, x)|$$

(% i15) wxplot2d([lebesgue(x)], [x,1.6,3])$
(% t15)



De aquí, podemos ver que la constante de Lebesgue es, aproximadamente, 2.2, de donde el condicionamiento esbastante bueno. Para estimar el error de interpolación, vamos a graficar la función error:

(% i16) wxplot2d([abs(f(x)-p(x))], [x,1.6,3])$
(% t16)



Vemos que, la norma infinito del error es, aproximadamente, 0.19, lo que nos dice que el error cometido es bajo.

5. Considera en el intervalo $[-1, 1]$ 9 nodos x_i, uniformemente distribuidos y los correspondientes 9 nodos de Chebyshev, u_i. Estudia en cada caso el problema de interpolación:

$$\text{encontrar } p \in \mathbb{P}_8 \;:\; i = 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 \implies p(x_i) = 2|x_i| + 1,$$

así como el análogo para los nodos u_i. Dibuja simultáneamente ambos interpolantes junto con la función $2|x| + 1, -1 \leq x \leq 1$.

- **Solución.**

Los nodos x_i son:

$$x_0 = -1, x_1 = -\frac{3}{4}, x_2 = -\frac{1}{2}, x_3 = -\frac{1}{4}, x_4 = 0, x_5 = \frac{1}{4}, x_6 = \frac{1}{2}, x_7 = \frac{3}{4}, x_8 = 1.$$

Los 9 nodos de Chebyshev, u_i, son:

$$\left\{\cos\left(\frac{\pi}{18}\right), \cos\left(\frac{3\pi}{18}\right), \cos\left(\frac{5\pi}{18}\right), \cos\left(\frac{7\pi}{18}\right), \cos\left(\frac{9\pi}{18}\right), \cos\left(\frac{11\pi}{18}\right), \cos\left(\frac{13\pi}{18}\right),\right.$$
$$\left.\cos\left(\frac{15\pi}{18}\right), \cos\left(\frac{17\pi}{18}\right)\right\}$$

La parte del problema de interpolación la resuelvo con Maxima:

————————————————————EJERCICIO 5———————————
————————— Nodos uniformemente distribuidos

$\longrightarrow$ nodos1:makelist(-1 + 2*i/8, i, 0, 8);

(nodos1) $$[-1,-\frac{3}{4},-\frac{1}{2},-\frac{1}{4},0,\frac{1}{4},\frac{1}{2},\frac{3}{4},1]$$

$\longrightarrow$ f(x):=2*abs(x)+1;

(% o2) $$\mathrm{f}(x):=2\left|x\right|+1$$

$\longrightarrow$ imagenes1:makelist(f(nodos1[i]), i, 1, 9);

(imagenes1) $$[3,\frac{5}{2},2,\frac{3}{2},1,\frac{3}{2},2,\frac{5}{2},3]$$

$\longrightarrow$ l1(i,x):=product((x-nodos1[j])/(nodos1[i]-nodos1[j]),j,1,i-1)*product((x-nodos1[j])/(nodos1[i]-nodos1[j]),j,i+1,9);

(% o4) $$\mathrm{l1}\left(i,x\right):=\prod_{j=1}^{i-1}\frac{x-\mathit{nodos1}_j}{\mathit{nodos1}_i-\mathit{nodos1}_j}\prod_{j=i+1}^{9}\frac{x-\mathit{nodos1}_j}{\mathit{nodos1}_i-\mathit{nodos1}_j}$$

$\longrightarrow$ p1(x):=sum(imagenes1[i]*l1(i, x), i, 1, 9);

(% o5) $$\mathrm{p1}(x):=\sum_{i=1}^{9}\mathit{imagenes1}_i\,\mathrm{l1}\left(i,x\right)$$

Nodos de Chebyshev

$\longrightarrow$ nodos2:makelist(cos((2*i+1)*%pi/18), i, 0, 8);

(nodos2)
$$[\cos\left(\frac{\pi}{18}\right),\frac{\sqrt{3}}{2},\cos\left(\frac{5\pi}{18}\right),\cos\left(\frac{7\pi}{18}\right),0,\cos\left(\frac{11\pi}{18}\right),\cos\left(\frac{13\pi}{18}\right),-\frac{\sqrt{3}}{2},\cos\left(\frac{17\pi}{18}\right)]$$

$\longrightarrow$ imagenes2:makelist(f(nodos2[i]), i, 1, 9);

(imagenes2)
$$[2\cos\left(\frac{\pi}{18}\right)+1,\sqrt{3}+1,2\cos\left(\frac{5\pi}{18}\right)+1,2\cos\left(\frac{7\pi}{18}\right)+1,1,1-2\cos\left(\frac{11\pi}{18}\right),1-2\cos\left(\frac{13\pi}{18}\right),$$
$$\sqrt{3}+1,1-2\cos\left(\frac{17\pi}{18}\right)]$$

→ l2(i,x):=product((x-nodos2[j])/(nodos2[i]-nodos2[j]),j,1,i-1)*product((x-nodos2[j])/(nodos2[i]-nodos2[j]),j,i+1,9);

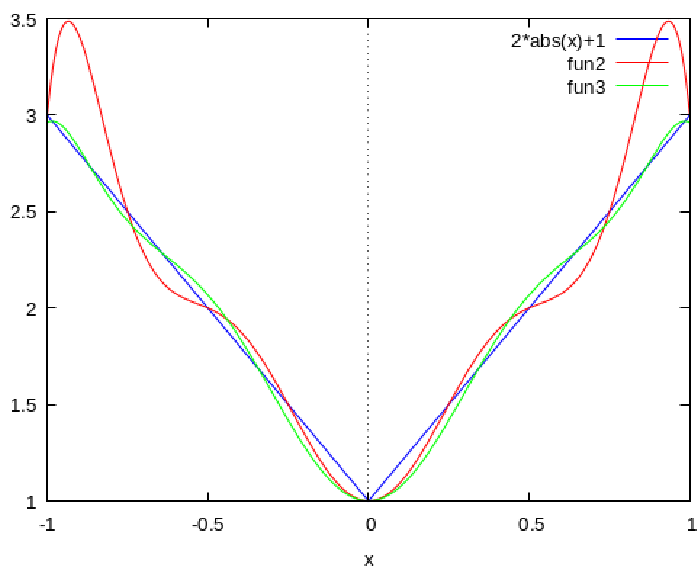
(% o8) $$\mathrm{l2}\left(i,x\right):=\prod_{j=1}^{i-1}\frac{x-nodos2_j}{nodos2_i-nodos2_j}\prod_{j=i+1}^{9}\frac{x-nodos2_j}{nodos2_i-nodos2_j}$$

→ p2(x):=sum(imagenes2[i]*l2(i, x), i, 1, 9);

(% o9) $$\mathrm{p2}(x):=\sum_{i=1}^{9}imagenes2_i\,\mathrm{l2}\left(i,x\right)$$

→ wxplot2d([f(x), p1(x), p2(x)], [x,-1,1])$

(% t10)



7. Dada la partición uniforme P del intervalo $[-1,1]$ determinada por 6 puntos y la función de Runge f, determina el spline s que verifica

$$i = 0,1,2,3,4,5 \implies s(-1+2i/5) = f(-1+2i/5),$$

siendo, o bien $s = S_5^1 \in \mathbb{S}_1^0(P)$, o bien $s = S_5^2 \in \mathbb{S}_3^2(P)$ con $s''(-1) = s''(1) = 0$ (natural). Ilustra con un ejemplo el principio de mínima energía para este último spline.

- **<u>Solución.</u>**

Lo resuelvo con Maxima:

——————————————————————EJERCICIO~7———————————
—————————— Spline lineal

⟶ f(x):=1/(1+25*x^2);

(% o1) $$f(x) := \frac{1}{1+25x^2}$$

⟶ P:makelist(-1+2*i/5, i, 0, 5);

(P) $$[-1, -\frac{3}{5}, -\frac{1}{5}, \frac{1}{5}, \frac{3}{5}, 1]$$

⟶ imagenes:makelist(f(P[i]), i, 1, 6);

(imagenes) $$[\frac{1}{26}, \frac{1}{10}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{10}, \frac{1}{26}]$$

⟶ B(i, x):=if i=1 then(if (P[1]<=x and x<=P[2]) then (P[2] - x)/(P[2]-P[1]) else 0) else if (1<i and i<6) then(if (P[i-1]<x and x<P[i]) then (x-P[i-1])/(P[i]-P[i-1])else if (P[i]<x and x<P[i+1]) then (P[i+1] - x)/(P[i+1]-P[i])else 0) else if i=6 then(if (P[5]<=x and x<=P[6]) then (x-P[5])/(P[6] - P[5]) else 0) else 0;

(% o4)

$$\mathrm{B}\left(i,x\right) := \mathrm{if}\ i=1\ \mathrm{then}\ \mathrm{if}\ P_1 < \, = x and x < \, = P_2\ \mathrm{then}\ \frac{P_2 - x}{P_2 - P_1}\ \mathrm{else}\ 0\ \mathrm{else}\ \mathrm{if}\ 1 < \ i$$

$$and i < \ 6\ \mathrm{then}\ \mathrm{if}\ P_{i-1} < \ x and x < \ P_i\ \mathrm{then}\ \frac{x - P_{i-1}}{P_i - P_{i-1}}\ \mathrm{else}\ \mathrm{if}\ P_i < \ x and x < \ P_{i+1}\ \mathrm{then}\ \frac{P_{i+1} - x}{P_{i+1} - P_i}\ \mathrm{else}\ 0$$

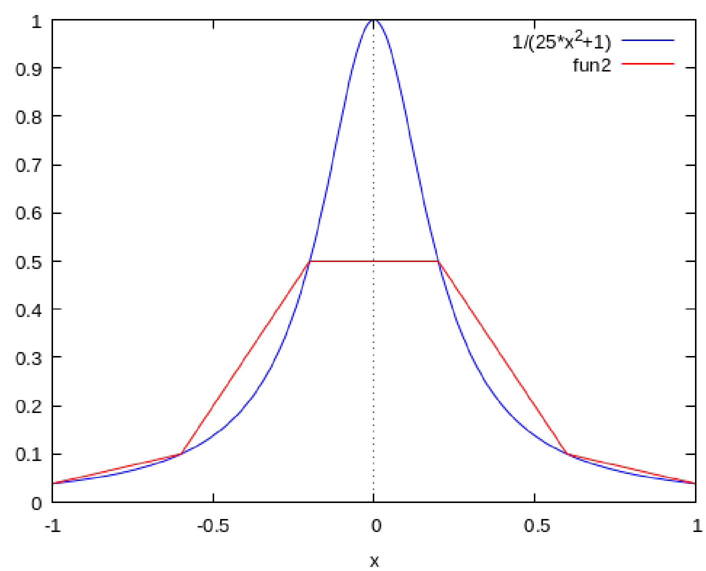
$$\mathrm{else}\ \mathrm{if}\ i=6\ \mathrm{then}\ \mathrm{if}\ P_5 < \, = x and x < \, = P_6\ \mathrm{then}\ \frac{x - P_5}{P_6 - P_5}\ \mathrm{else}\ 0\ \mathrm{else}\ 0$$

⟶ s_lineal(x):=sum(imagenes[i]*B(i, x), i, 1, 6);

(% o5) $$s_{lineal}(x) := \sum_{i=1}^{6} imagenes_i\, \mathrm{B}\left(i,x\right)$$

⟶ wxplot2d([f(x), s_lineal(x)], [x,-1,1])$

(% t6)



Spline cúbico

⟶ h:2/5;

(h) $$\frac{2}{5}$$

⟶ A:genmatrix(lambda([i,j], if i=j then 2 else if i=j+1 or j=i+1 then 1/2 else 0), 6, 6);

(A) $$\begin{pmatrix} 2 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 2 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 2 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & 2 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 2 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 2 \end{pmatrix}$$

⟶ A[1, 2]:0;

(% o9) $$0$$

⟶ A[6, 5]:0;

(% o10) $$0$$

$\longrightarrow$ b:makelist(0, i, 1, 6);

(b) $$[0,0,0,0,0,0]$$

$\longrightarrow$ for i:2 thru 5 do b[i]:(imagenes[i+1]-2*imagenes[i]+imagenes[i-1])*3/h^2;

(% o12) $$done$$

$\longrightarrow$ c:invert(A).b;

(c) $$\begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1020}{247} \\ -\frac{945}{247} \\ -\frac{945}{247} \\ \frac{1020}{247} \\ 0 \end{pmatrix}$$

$\longrightarrow$ alpha:makelist((imagenes[i+1]-imagenes[i])/h - (h/6)*(c[i+1,1]-c[i,1]), i, 1, 5);

(alpha) $$[-\frac{30}{247}, \frac{378}{247}, 0, -\frac{378}{247}, \frac{30}{247}]$$

$\longrightarrow$ beta:makelist(imagenes[i]-c[i, 1]*h^2/6, i, 1, 5);

(beta) $$[\frac{1}{26}, -\frac{5}{494}, \frac{1487}{2470}, \frac{1487}{2470}, -\frac{5}{494}]$$

$\longrightarrow$ s(i, x):=c[i,1]*(P[i+1]-x)^3/(6*h) + c[i+1, 1]*(x-P[i])^3/(6*h) + alpha[i]*(x-P[i]) + beta[i];

(% o16) $$\mathrm{s}\left(i,x\right):=\frac{c_{i,1}\left(P_{i+1}-x\right)^{3}}{6h}+\frac{c_{i+1,1}\left(x-P_{i}\right)^{3}}{6h}+alpha_{i}\,\left(x-P_{i}\right)+beta_{i}$$

$\longrightarrow$ p(i, x):= if P[i]<=x and x<P[i+1] then s(i, x) else 0;

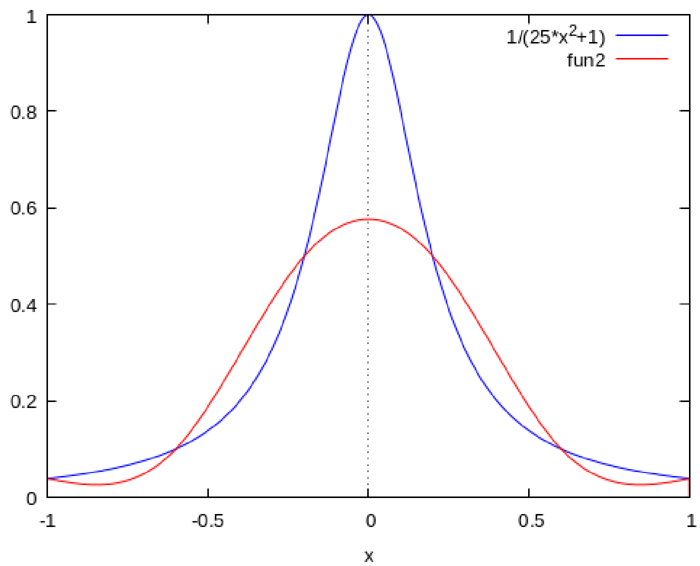
(% o17) $$\mathrm{p}\left(i,x\right):=\mathrm{if}\;P_{i}<\,=x and x<\;P_{i+1}\,\mathrm{then}\,\mathrm{s}\left(i,x\right)\mathrm{else}\,0$$

$\longrightarrow$ s_cubic(x):=sum(p(i, x), i, 1, 5);

(% o18) $$s_{cubic}(x):=\sum_{i=1}^{5}\mathrm{p}\left(i,x\right)$$

⟶ wxplot2d([f(x), s_cubic(x)], [x,-1,1])$

(% t19)



Lo que dice el principio de mínima energía es que la integral definida entre a y b, de la segunda derivada del spline cúbico queacabamos de calcular al cuadrado, es menor o igual que la integral definida entre a y b, de la segunda derivada del polinomiointerpolador, al cuadrado. Veamos que esto ocurre. Calculemos primero el polinomio interpolador (de Lagrange) de f.

⟶ l(i,x):=product((x-P[j])/(P[i]-P[j]),j,1,i-1)*product((x-P[j])/(P[i]-P[j]),j,i+1,6);

(% o20) $$\mathrm{l}\left(i,x\right):=\prod_{j=1}^{i-1}\frac{x-P_j}{P_i-P_j}\prod_{j=i+1}^{6}\frac{x-P_j}{P_i-P_j}$$

⟶ p(x):=sum(imagenes[i]*l(i, x), i, 1, 6);

(% o21) $$\mathrm{p}(x):=\sum_{i=1}^{6}\mathit{imagenes}_i\,\mathrm{l}\left(i,x\right)$$

⟶ float(expand(p(x)));

(% o22) $1.201923076923076x^4-1.73076923076923x^2+0.5673076923076923$

⟶ integral_interp:float(integrate((diff(p(x), x, 2))^2, x, -1, 1));

(integral_ interp) 40.60650887573964

Calculamos ahora la integral del spline

⟶ `integral_s:sum(integrate((diff(s(i, x), x, 2))^2, x, P[i], P[i+1]), i, 1, 5);`

(integral_ s) $$\frac{47010}{3211}$$

⟶ `float(%);`

(% o25) 14.64029897228277

Y está claro que se cumple el principio de mínima energía.

RELACIÓN 3 MAXIMA

EJERCICIO~1

$\longrightarrow$ nodos:makelist(i/8, i, 0, 8);

(nodos) $$[0, \frac{1}{8}, \frac{1}{4}, \frac{3}{8}, \frac{1}{2}, \frac{5}{8}, \frac{3}{4}, \frac{7}{8}, 1]$$

$\longrightarrow$ f(x):=sin(x) - 2*x;

(% o6) $$\mathrm{f}(x) := \sin(x) - 2x$$

$\longrightarrow$ imagenes:makelist(f(nodos[i+1]), i, 0, 8);

(imagenes)
$$[0, \sin\left(\frac{1}{8}\right) - \frac{1}{4}, \sin\left(\frac{1}{4}\right) - \frac{1}{2}, \sin\left(\frac{3}{8}\right) - \frac{3}{4}, \sin\left(\frac{1}{2}\right) - 1, \sin\left(\frac{5}{8}\right) - \frac{5}{4}, \sin\left(\frac{3}{4}\right) - \frac{3}{2}, \sin\left(\frac{7}{8}\right) - \frac{7}{4}, \sin(1) - 2]$$

$\longrightarrow$ l(i,x):=product((x-nodos[j])/(nodos[i]-nodos[j]),j,1,i-1)*product((x-nodos[j])/(nodos[i]-nodos[j]),j,i+1,9);

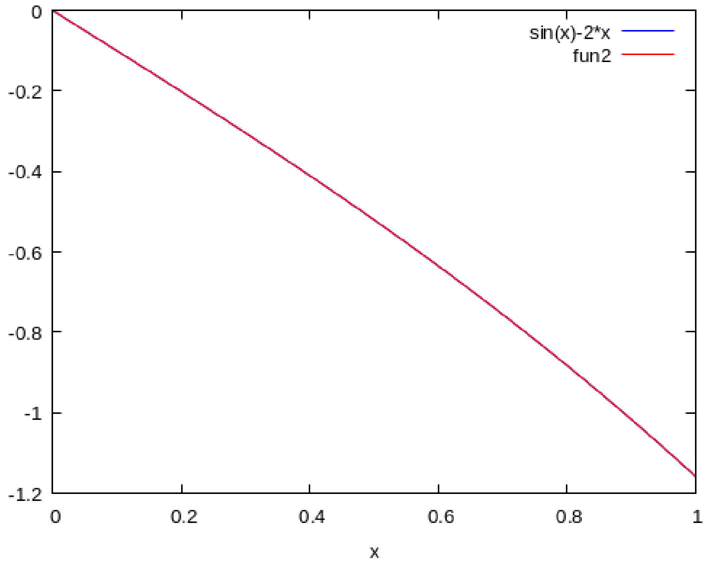
(% o8) $$\mathrm{l}(i, x) := \prod_{j=1}^{i-1} \frac{x - nodos_j}{nodos_i - nodos_j} \prod_{j=i+1}^{9} \frac{x - nodos_j}{nodos_i - nodos_j}$$

$\longrightarrow$ p(x):=sum(imagenes[i]*l(i, x), i, 1, 9);

(% o9) $$\mathrm{p}(x) := \sum_{i=1}^{9} imagenes_i \, \mathrm{l}(i, x)$$

$\longrightarrow$ wxplot2d([f(x), p(x)], [x,0,1])$

(% t10)



EJERCICIO~2

$\longrightarrow$ N:9;

(N) $$9$$

$\longrightarrow$ nodos:makelist(i/8, i, 0, 8);

(nodos) $$[0, \frac{1}{8}, \frac{1}{4}, \frac{3}{8}, \frac{1}{2}, \frac{5}{8}, \frac{3}{4}, \frac{7}{8}, 1]$$

$\longrightarrow$ f(x):=sin(x) - 2*x;

(% o19) $$\mathrm{f}(x) := \sin(x) - 2x$$

$\longrightarrow$ imagenes:makelist(f(nodos[i+1]), i, 0, 8);

(imagenes)

$$[0, \sin\left(\frac{1}{8}\right)-\frac{1}{4}, \sin\left(\frac{1}{4}\right)-\frac{1}{2}, \sin\left(\frac{3}{8}\right)-\frac{3}{4}, \sin\left(\frac{1}{2}\right)-1, \sin\left(\frac{5}{8}\right)-\frac{5}{4}, \sin\left(\frac{3}{4}\right)-\frac{3}{2}, \sin\left(\frac{7}{8}\right)-\frac{7}{4}, \sin(1)-2]$$

$\longrightarrow$ w(i, x):=if i=1 then 1 else product(x-nodos[j], j, 1, i-1);

(% o21) $$\mathrm{w}(i, x) := \text{if } i = 1 \text{ then } 1 \text{ else } \prod_{j=1}^{i-1} x - nodos_j$$

$\longrightarrow$ difer: genmatrix(lambda([i,j], 0), N, N);

(difer)
$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$\longrightarrow$ for i:1 thru N do difer[i, 1]:imagenes[i];

(% o23) $$done$$

$\longrightarrow$ for i:2 thru N do (for j:i thru N do difer[j, i]: (difer[j, i-1] - difer[j-1, i-1])/(nodos[j]-nodos[j-i+1]));

(% o24) $$done$$

$\longrightarrow$ p(x):=sum(difer[i, i]*w(i, x), i, 1, 9);

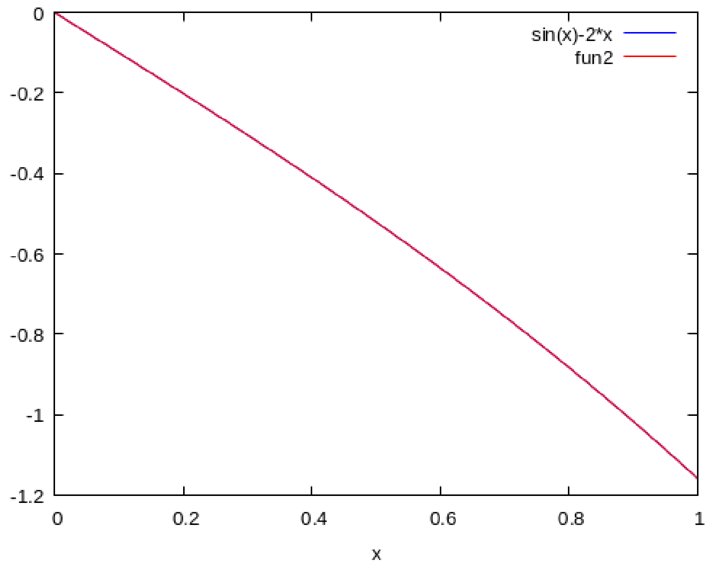
(% o26) $$\mathrm{p}(x) := \sum_{i=1}^{9} \mathit{difer}_{i,i}\, \mathrm{w}(i, x)$$

$\longrightarrow$ float(expand(p(x)));

(% o27)
$$1.182873654670402\,10^{-5}\, x^8 - 2.203082106007059\,10^{-4}\, x^7 + 2.241755532850222\,10^{-5}\, x^6$$
$$+0.0083195917127341 09 x^5 + 5.116238867231004\,10^{-6}\, x^4 - 0.1666677845536526 x^3$$
$$‘ + 1.292412861175762\,10^{-7}\, x^2 - 1.000000005932017 x$$

→ wxplot2d([f(x), p(x)], [x,0,1])$

(% t28)



EJERCICIO 3

→ f(x):=7.21*cos(2*x/%pi);

(% o1) $$f(x) := 7.21\cos\left(\frac{2x}{\pi}\right)$$

→ nodos:makelist(1-2*j/21, j,0, 21);

(nodos)
$$[1, \frac{19}{21}, \frac{17}{21}, \frac{5}{7}, \frac{13}{21}, \frac{11}{21}, \frac{3}{7}, \frac{1}{3}, \frac{5}{21}, \frac{1}{7}, \frac{1}{21}, -\frac{1}{21}, -\frac{1}{7}, -\frac{5}{21}, -\frac{1}{3}, -\frac{3}{7}, -\frac{11}{21}, -\frac{13}{21}, -\frac{5}{7}, -\frac{17}{21}, -\frac{19}{21}, -1]$$

→ imagenes:makelist(f(nodos[i]), i, 1, 22);

(imagenes)
$$[7.21\cos\left(\frac{2}{\pi}\right), 7.21\cos\left(\frac{38}{21\pi}\right), 7.21\cos\left(\frac{34}{21\pi}\right), 7.21\cos\left(\frac{10}{7\pi}\right), 7.21\cos\left(\frac{26}{21\pi}\right), 7.21\cos\left(\frac{22}{21\pi}\right),$$
$$7.21\cos\left(\frac{6}{7\pi}\right), 7.21\cos\left(\frac{2}{3\pi}\right), 7.21\cos\left(\frac{10}{21\pi}\right), 7.21\cos\left(\frac{2}{7\pi}\right), 7.21\cos\left(\frac{2}{21\pi}\right), 7.21\cos\left(\frac{2}{21\pi}\right),$$
$$7.21\cos\left(\frac{2}{7\pi}\right), 7.21\cos\left(\frac{10}{21\pi}\right), 7.21\cos\left(\frac{2}{3\pi}\right), 7.21\cos\left(\frac{6}{7\pi}\right), 7.21\cos\left(\frac{22}{21\pi}\right), 7.21\cos\left(\frac{26}{21\pi}\right),$$
$$7.21\cos\left(\frac{10}{7\pi}\right), 7.21\cos\left(\frac{34}{21\pi}\right), 7.21\cos\left(\frac{38}{21\pi}\right), 7.21\cos\left(\frac{2}{\pi}\right)]$$

$\longrightarrow$ imag_pert:makelist(imagenes[i]+10^(-3)*(-1)^(i-1), i, 1, 22);

(imag_ pert)

$$[7.21\cos\left(\frac{2}{\pi}\right)+\frac{1}{1000},7.21\cos\left(\frac{38}{21\pi}\right)-\frac{1}{1000},7.21\cos\left(\frac{34}{21\pi}\right)+\frac{1}{1000},7.21\cos\left(\frac{10}{7\pi}\right)-\frac{1}{1000},$$
$$7.21\cos\left(\frac{26}{21\pi}\right)+\frac{1}{1000},7.21\cos\left(\frac{22}{21\pi}\right)-\frac{1}{1000},7.21\cos\left(\frac{6}{7\pi}\right)+\frac{1}{1000},7.21\cos\left(\frac{2}{3\pi}\right)-\frac{1}{1000},$$
$$7.21\cos\left(\frac{10}{21\pi}\right)+\frac{1}{1000},7.21\cos\left(\frac{2}{7\pi}\right)-\frac{1}{1000},7.21\cos\left(\frac{2}{21\pi}\right)+\frac{1}{1000},7.21\cos\left(\frac{2}{21\pi}\right)-\frac{1}{1000},$$
$$7.21\cos\left(\frac{2}{7\pi}\right)+\frac{1}{1000},7.21\cos\left(\frac{10}{21\pi}\right)-\frac{1}{1000},7.21\cos\left(\frac{2}{3\pi}\right)+\frac{1}{1000},7.21\cos\left(\frac{6}{7\pi}\right)-\frac{1}{1000},$$
$$7.21\cos\left(\frac{22}{21\pi}\right)+\frac{1}{1000},7.21\cos\left(\frac{26}{21\pi}\right)-\frac{1}{1000},7.21\cos\left(\frac{10}{7\pi}\right)+\frac{1}{1000},7.21\cos\left(\frac{34}{21\pi}\right)-\frac{1}{1000},$$
$$7.21\cos\left(\frac{38}{21\pi}\right)+\frac{1}{1000},7.21\cos\left(\frac{2}{\pi}\right)-\frac{1}{1000}]$$

$\longrightarrow$ maximo:apply(max, makelist(abs(imagenes[i]-imag_pert[i]), i, 1, 22));

(maximo) $$0.001$$

$\longrightarrow$ l1(i, x):=product((x-nodos[j])/(nodos[i]-nodos[j]), j, 1, i-1)*product((x-nodos[j])/(nodos[i]-nodos[j]), j, i+1, 22);

(% o6) $$\mathrm{l1}\left(i,x\right):=\prod_{j=1}^{i-1}\frac{x-nodos_j}{nodos_i-nodos_j}\prod_{j=i+1}^{22}\frac{x-nodos_j}{nodos_i-nodos_j}$$

$\longrightarrow$ p1(x):=sum(imagenes[i]*l1(i, x), i, 1, 22);

(% o7) $$\mathrm{p1}(x):=\sum_{i=1}^{22} imagenes_i\,\mathrm{l1}\left(i,x\right)$$

$\longrightarrow$ l2(i, x):=l1(i, x);

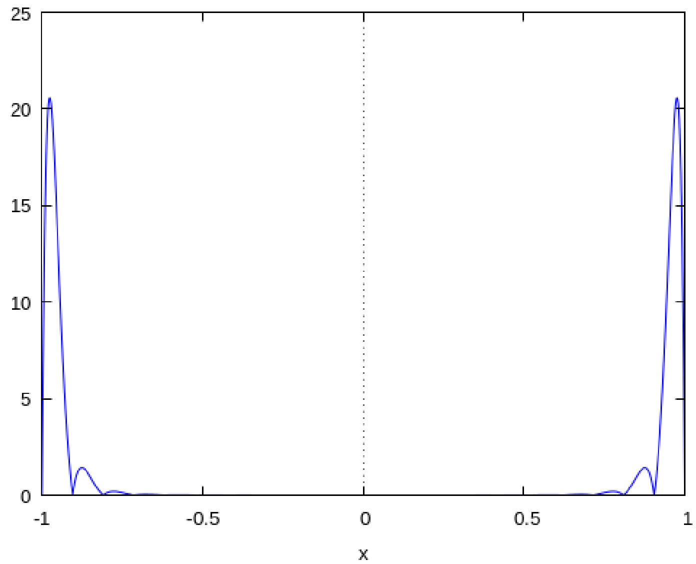
(% o8) $$\mathrm{l2}\left(i,x\right):=\mathrm{l1}\left(i,x\right)$$

$\longrightarrow$ p2(x):=sum(imag_pert[i]*l2(i, x), i, 1, 22);

(% o9) $$\mathrm{p2}(x):=\sum_{i=1}^{22} imag\_pert_i\,\mathrm{l2}\left(i,x\right)$$

$\longrightarrow$ wxplot2d([abs(p1(x) - p2(x))], [x,-1,1])$

(% t10)



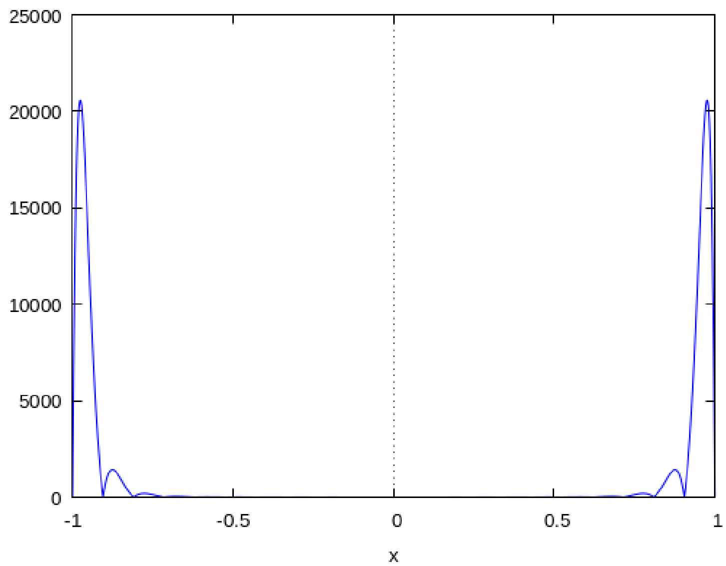
Con este gráfico podemos observar que la distancia entre los dos polinomios es elevada en números cercanos a 1, con un valorligeramente mayor que 20. Por tanto, el problema no es estable.

$\longrightarrow$ lebesgue(x):=sum(abs(l1(i, x)), i, 1, 22);

(% o11)
$$\mathrm{lebesgue}(x) := \sum_{i=1}^{22} |\mathrm{l1}\,(i, x)|$$

$\longrightarrow$ wxplot2d([lebesgue(x)], [x,-1,1])$

(% t12)



Con este gráfico, lo que observamos es que la constante de Lebesgue es mayor que 2000. Al ser este valor tan elevado, elcondicionamiento también es malo.

$\longrightarrow$ chebyshev:makelist(cos(((2*i+1)*%pi)/44), i, 0, 21);

(chebyshev)

$$[\cos\left(\frac{\pi}{44}\right), \cos\left(\frac{3\pi}{44}\right), \cos\left(\frac{5\pi}{44}\right), \cos\left(\frac{7\pi}{44}\right), \cos\left(\frac{9\pi}{44}\right), \frac{1}{\sqrt{2}}, \cos\left(\frac{13\pi}{44}\right), \cos\left(\frac{15\pi}{44}\right), \cos\left(\frac{17\pi}{44}\right), \cos\left(\frac{19\pi}{44}\right), \cos\left(\frac{21\pi}{44}\right), \cos\left(\frac{23\pi}{44}\right), \cos\left(\frac{25\pi}{44}\right), \cos\left(\frac{27\pi}{44}\right), \cos\left(\frac{29\pi}{44}\right), \cos\left(\frac{31\pi}{44}\right), -\frac{1}{\sqrt{2}}, \cos\left(\frac{35\pi}{44}\right), \cos\left(\frac{37\pi}{44}\right), \cos\left(\frac{39\pi}{44}\right), \cos\left(\frac{41\pi}{44}\right), \cos\left(\frac{43\pi}{44}\right)]$$

$\longrightarrow$ l3(i, x):=product((x-chebyshev[j])/(chebyshev[i]-chebyshev[j]), j, 1, i-1)*product((x-chebyshev[j])/(chebyshev[i]-chebyshev[j]), j, i+1, 22);

(% o14)

$$\mathrm{l3}\left(i,x\right) := \prod_{j=1}^{i-1} \frac{x - chebyshev_j}{chebyshev_i - chebyshev_j} \prod_{j=i+1}^{22} \frac{x - chebyshev_j}{chebyshev_i - chebyshev_j}$$

$\longrightarrow$ p3(x):=sum(f(chebyshev[i])*l3(i, x), i, 1, 22);

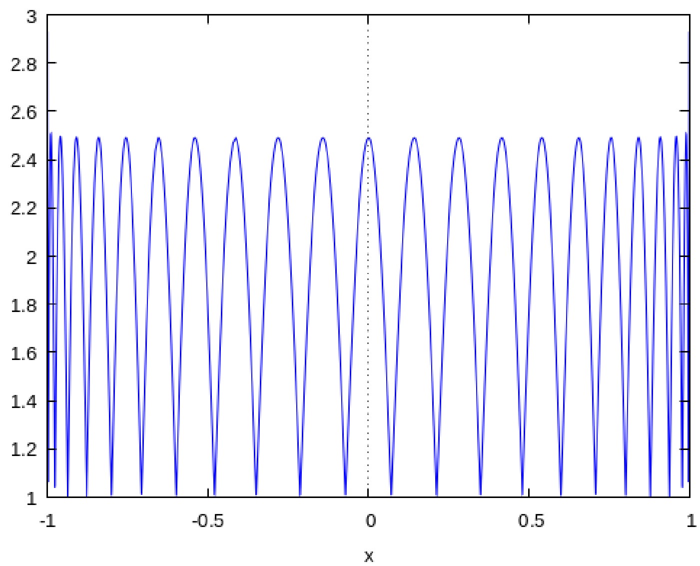
(% o15) $$\mathrm{p3}(x) := \sum_{i=1}^{22} \mathrm{f}\left(chebyshev_i\right) \mathrm{l3}\left(i,x\right)$$

$\longrightarrow$ lebesgue2(x):=sum(abs(l3(i, x)), i, 1, 22);

(% o17) $$\mathrm{lebesgue2}(x) := \sum_{i=1}^{22} |\mathrm{l3}\,(i, x)|$$

$\longrightarrow$ wxplot2d([lebesgue2(x)], [x,-1,1])$

(% t18)



De aquí deducimos que la constante de Lebesgue es, aproximadamente, 2.5, de donde el condicionamiento de este problemaes bueno. EJERCICIO~6

$\longrightarrow$ P:[0.4, 0.5, 2.34, 3.45, 4.567, 5.081, 5.26];

(P) $$[0.4, 0.5, 2.34, 3.45, 4.567, 5.081, 5.26]$$

$\longrightarrow$ f(x):=1-x^2/20.78;

(% o52) $$\mathrm{f}(x) := 1 - \frac{x^2}{20.78}$$

$\longrightarrow$ imagenes:makelist(f(P[i]), i, 1, 7);

(imagenes)

$$[0.9923002887391723, 0.9879692011549567, 0.7364966313763235, 0.4272136669874879,$$
$$-0.003729018286814156, -0.2423754090471608, -0.331453320500481]$$

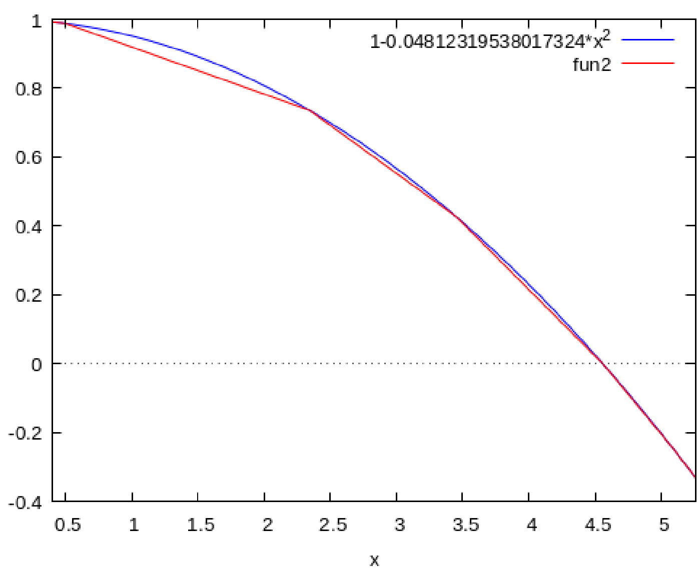
→
```
B(i, x):=if i=1 then(if (P[1]<=x and x<=P[2]) then (P[2] - x)/(P[2]-P[1]) else 0) else if (1<i and i<7) then(if (P[i-1]<x and x<P[i]) then (x-P[i-1])/(P[i]-P[i-1])else if (P[i]<x and x<P[i+1]) then (P[i+1] - x)/(P[i+1]-P[i])else 0) else if i=7 then(if (P[6]<=x and x<=P[7]) then (x-P[6])/(P[7] - P[6]) else 0) else 0;
```
(% o79)

$$\mathrm{B}\left(i,x\right):=\mathrm{if}\ i=1\ \mathrm{then\ if}\ P_1< =x and x< =P_2\ \mathrm{then}\ \frac{P_2-x}{P_2-P_1}\ \mathrm{else}\ 0\ \mathrm{else\ if}\ 1< i and i< 7\ \mathrm{then\ if}\ P_{i-1}< x and x< P_i\ \mathrm{then}\ \frac{x-P_{i-1}}{P_i-P_{i-1}}\ \mathrm{else\ if}\ P_i< x and x< P_{i+1}\ \mathrm{then}\ \frac{P_{i+1}-x}{P_{i+1}-P_i}\ \mathrm{else}\ 0\ \mathrm{else\ if}\ i=7\ \mathrm{then\ if}\ P_6< =x and x< =P_7\ \mathrm{then}\ \frac{x-P_6}{P_7-P_6}\ \mathrm{else}\ 0\ \mathrm{else}\ 0$$

→
```
s(x):=sum(imagenes[i]*B(i, x), i, 1, 7);
```

(% o80) $$\mathrm{s}(x):=\sum_{i=1}^{7} imagenes_i\,\mathrm{B}\left(i,x\right)$$

→
```
wxplot2d([f(x), s(x)], [x,0.4,5.26])$
```
(% t81)



EJERCICIO 7

→
```
a:-2.09;
```

(a) $$-2.09$$

$\longrightarrow$ b:4.56;

(b) $$4.56$$

$\longrightarrow$ h:(b-a)/8;

(h) $$0.8312499999999999$$

$\longrightarrow$ f(x):=log(sqrt(1+abs(x)));

(% o152) $$\mathrm{f}(x) := \log\left(\sqrt{1+|x|}\right)$$

$\longrightarrow$ nodos:makelist(a+i*h, i, 0, 8);

(nodos)
$[-2.09, -1.25875, -0.4275, 0.40375, 1.234999999999999, 2.06625, 2.8975, 3.72875, 4.56]$

$\longrightarrow$ imagenes:makelist(f(nodos[i]), i, 1, 9);

(imagenes)
$[0.564085545454827, 0.4074057814621505, 0.1779623312740141, 0.1695736135352579,$

$0.402120614032766, 0.560227658295281, 0.6801676609748972, 0.7768304484825509, 0.8577990541312456]$

$\longrightarrow$ A:genmatrix(lambda([i,j], if i=j then 2 else if i=j+1 or j=i+1 then 1/2 else 0), 9, 9);

(A) $$\begin{pmatrix} 2 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 2 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 2 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & 2 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 2 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 2 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 2 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 2 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 2 \end{pmatrix}$$

$\longrightarrow$ A[1, 2]:0;

(% o156) $$0$$

$\longrightarrow$ A[9,8]:0;

(% o157) $$0$$

$\longrightarrow$ bv:makelist(0, i, 1, 9);

(bv) $[0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0]$

$\longrightarrow$ for i:2 thru 8 do bv[i]:(imagenes[i+1]-2*imagenes[i]+imagenes[i-1])*3/h^2;

(% o162) *done*

$\longrightarrow$ c:invert(A).bv;

(c)
$$\begin{pmatrix} 0.0 \\ -0.2639287184254621 \\ 0.4238814065967181 \\ 0.4879014754534119 \\ -0.2833551177217908 \\ -8.70132142422697810^{-4} \\ -0.04458261291668436 \\ -0.02292391448997783 \\ 0.0 \end{pmatrix}$$

$\longrightarrow$ alpha:makelist((imagenes[i+1]-imagenes[i])/h - (h/6)*(c[i+1,1]-c[i,1]), i, 1, 8);

(alpha)
$[-0.1519218095946672, -0.3713125567858325, -0.01896113755231057, 0.386606963918338,$

$0.1510680223120995, 0.1503447249687106, 0.1132854279817167, 0.09422992406192267]$

$\longrightarrow$ beta:makelist(imagenes[i]-c[i, 1]*h^2/6, i, 1, 8);

(beta)
$[0.564085545454827, 0.4378005412292599, 0.1291469784010366, 0.1133855328106785,$

$0.4347525715677969, 0.5603278651147297, 0.6853019177449703, 0.7794704297547723]$

$\longrightarrow$ s(i, x):=c[i,1]*(nodos[i+1]-x)^3/(6*h) + c[i+1, 1]*(x-nodos[i])^3/(6*h) + alpha[i]*(x-nodos[i]) + beta[i];

(% o198)
$$\mathrm{s}\,(i, x) := \frac{c_{i,1}\,(nodos_{i+1} - x)^3}{6h} + \frac{c_{i+1,1}\,(x - nodos_i)^3}{6h} + alpha_i\,(x - nodos_i) + beta_i$$

$\longrightarrow$ p(i, x):= if nodos[i]<=x and x<nodos[i+1] then s(i, x) else 0;

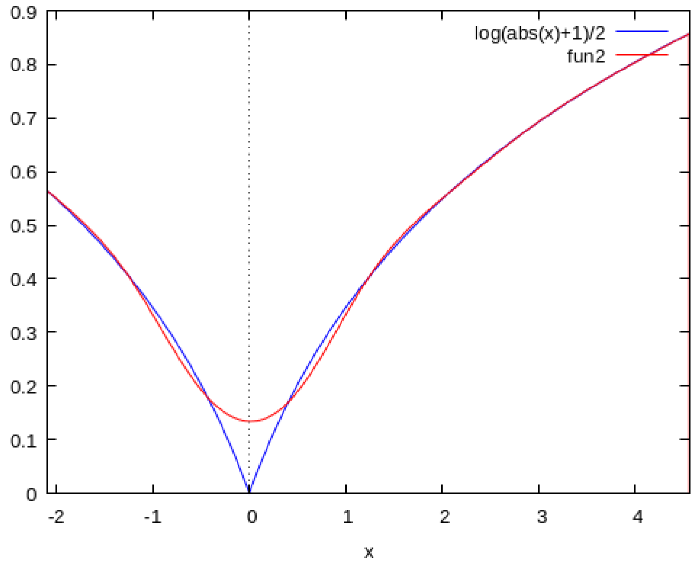
(% o199) $\mathrm{p}\,(i, x) := \text{if } nodos_i < \; = x and x < \; nodos_{i+1} \text{ then } \mathrm{s}\,(i, x) \text{ else } 0$

→ s_cubic(x):=sum(p(i, x), i, 1, 8);

(% o200) $$s_{cubic}(x) := \sum_{i=1}^{8} \mathrm{p}\left(i, x\right)$$

→ wxplot2d([f(x), s_cubic(x)], [x,a,b])$

(% t201)



→