TEMA 2: FORMAS BILINEALES Y FORMAS CUADRÁTICAS

Índice

1. Aplicaciones multilineales y tensores

Definición 1.1 (Aplicación multilineal)**.** Sean $V_1, V_2, \dots V_r, W$ espacios vectoriales sobre el mismo cuerpo $\mathbb{K}$. Una aplicación multilineal (r veces lineal) de $V_1 \times V_2 \times \cdots \times V_r$ en W es una aplicación $T : V_1 \times V_2 \times \cdots \times V_r \longrightarrow W$ que verifica

$$T(v_1, v_2, \dots, v_{i-1}, \lambda a+\mu b, v_{i+1}, \dots, v_r) = \lambda T(v_1, v_2, \dots, v_{i-1}, a, v_{i+1}, \dots, v_r) + \mu T(v_1, v_2, \dots, v_{i-1}, b, v_{i+1}, \dots, v_r)$$

$\forall \lambda, \mu \in \mathbb{K},\ \forall a, b \in V_i,\ \forall i \in \{1, \dots, r\}$

Observación. Multilineal y lineal no guardan relación, salvo en el caso en el que $r = 1$.

Definición 1.2 (Tensor)**.** Sea $V(\mathbb{K})$ un espacio vectorial. Un tensor r veces covariante y s veces contravariante (o de tipo (r, s)) es una aplicación multilineal de

$$\underbrace{V \times V \times \cdots \times V}_{r} \times \underbrace{V^* \times V^* \times \cdots \times V^*}_{s} \text{ en } \mathbb{K}$$

$T_{r,s}(V) =$ familia de tensores de tipo (r, s).
$T_{r,0}(V) =$ tensores covariantes de tipo $(r, 0)$ o $r-$convariantes.
$T_{0,s}(V) =$ tensores contravariantes de tipo $(0, s)$ o $s-$contravariantes.

Ejemplos.

1. $T_{1,0}(V) = V^*, \quad T_{0,1}(V) = V^{**} \cong V, \quad T_{0,0}(V) = \mathbb{K}$
2. Producto escalar usual en $\mathbb{R}^n$
3. Producto vectorial en $\mathbb{R}^3$
4. Producto mixto en $\mathbb{R}^3$
5. Determinante
6. $T_{1,1}(V) \cong \mathrm{End}(V)$

Propiedades.

1. $T_{r,s}(V)$ es un espacio vectorial sobre $\mathbb{K}$
2. $\dim(T_{r,s}(V)) = \dim(V)^{r+s}$. En particular,

$$\overbrace{T_{2,0}(V)}^{\text{formas bilineales}} \cong T_{0,2}(V) \cong T_{1,1}(V)$$

Definición 1.3 (Producto tensorial)**.** Dados $T \in T_{r,s}(V)$ y $T' \in \mathcal{T}_{r',s'}(V)$ se define su producto tensorial

$$T \otimes T' \in \mathcal{T}_{r+r',s+s'}(V)$$

por la fórmula

$$T \otimes T'(v_1, \dots, v_r, u_1, \dots, u_{r'}, \varphi_1, \dots, \varphi_2, \psi_1, \dots, \psi_{s'}) = T(v_1, \dots, v_r, \phi_1, \dots \phi_s) \cdot T(u_1, \dots, u_{r'}, \psi_1, \dots, \psi_{s'})$$

$\forall v_1, \dots, v_r, u_1, \dots, u_{r'} \in V,\ \forall \phi_1, \dots \phi_r, \psi_1, \dots \psi_{s'} \in V^*$

Ejemplos.

1. $T_{1,0}(V) = V^*, \phi, \psi \in V^*$. Entonces $\phi \otimes \psi \in \mathcal{T}_{2,0}(V)$
   $\phi \otimes \psi(u, v) = \phi(u)\psi(v), \quad \forall u, v \in V$
2. $T_{0,1}(V) = V^{**} \cong V, u, v \in V$. Entonces $u \otimes v \in \mathcal{T}_{0,2}(V)$
   $u \otimes v(\phi, \psi) = \phi(u)\psi(v), \quad \forall \phi, \psi \in V^*$
3. $\phi \in T_{1,0}(V), u \in T_{0,1}(V)$. Entonces $\phi \otimes u, u \otimes \phi \in \mathcal{T}_{1,1}(V)$
   $\phi \otimes u(v, \psi) = \phi(v)\psi(u) = \psi(u)\phi(v) = u \otimes \phi(v, \phi), \quad \forall v \in V, \quad \forall \psi \in V^*$

Observación. En general, $T \otimes T' \neq T' \otimes T$

2. Formas bilineales. Ejemplos. Expresión matricial. Congruencia de matrices

A partir de ahora, consideremos $\mathbb{K} = \mathbb{R}$.

Definición 2.1 (Forma bilineal)**.** Una forma bilineal sobre un espacio vectorial V es una aplicación $b : V \times V \longrightarrow \mathbb{R}$ que verifica

I) $b(\lambda u + \mu v, w) = \lambda b(u, w) + \mu b(v, w) \quad \forall \lambda, \mu \in \mathbb{R},\ \forall u, v, w \in V$

II) $b(u, \lambda v + \mu w) = \lambda b(u, v) + \mu b(u, w) \quad \forall \lambda, \mu \in \mathbb{R},\ \forall u, v, w \in V$

Denotemos por $\mathcal{B}(V) = \{\text{formas bilineales sobre } V\} = \{b : V \times V \longrightarrow \mathbb{R} \mid b \text{ es lineal}\}$

Ejemplos.

1. $\mathbb{R}^n, A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), \quad b_A : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$

$$b_A(u, v) = uAv$$

2. $\mathcal{M}_n(\mathbb{R}), M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), \quad b_M : \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \times \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}$
   - $b_M(A, B) = \operatorname{tr}(AMB)$
   - $b'_M(A, B) = \operatorname{tr}(AMB^t)$
   - $b''_M(A, B) = \operatorname{tr}(A^tMB)$
   - $b'''_M(A, B) = \operatorname{tr}(A^tMB^t)$
3. $\mathbb{R}_n[x], \quad b : \mathbb{R}_n[x] \times \mathbb{R}_n[x] \longrightarrow \mathbb{R}$
   - $b_1(p(x), q(x)) = \displaystyle\int_{-1}^{1} p(x)q(x)dx$
   - $b_2(p(x), q(x)) = \displaystyle\int_{-1}^{1} p'(x)q''(x)dx$
   - $b_3(p(x), q(x)) = \displaystyle\int_{-1}^{1} p(x)q(x)\sin(x)dx$
   - $b_4(p(x), q(x)) = p(1)q(3)$
   - $b_5(p(x), q(x)) = p'(3)q''(4)$

Sean V un espacio vectorial de dimensión n, $b \in \mathcal{B}(V)$, $B = \{v_1, \dots, v_n\}$ base de V, $u, w \in V$ con $u = (a_1, a_2, \dots, a_n)_B$ y $w = (b_1, b_2, \dots, b_n)_B$. Entonces $u = \sum_{i=1}^{n} a_i v_i, w = \sum_{i=1}^{n} b_i v_i$.

$$b(u, w) = b\left(\sum_{i=1}^{n} a_i v_i, \sum_{i=1}^{n} b_i v_i\right) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_i b_j b(v_i, v_j)$$

Definición 2.2 (Expresión matricial de una forma bilineal)**.** Dados V un espacio vectorial de dimensión n, b una forma bilineal sobre V y $B = \{v_1, \dots, v_n\}$ una base de V se define la matriz de b en la base B, $\mathcal{M}(b, B)$, como la matriz cuadrada de orden n dada por

$$\mathcal{M}(b, B) = \big(b(v_i, v_j)\big)_{1 \le i,j \le n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$$

Observación.

1. $b(u, w) = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_n \end{pmatrix} \mathcal{M}(b, B) \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} \quad \forall u, w \in V$
2. $b' \in \mathcal{B}(V), \quad b = b' \Longleftrightarrow \mathcal{M}(b, B) = \mathcal{M}(b', B)$

2.1. Relación entre las expresiones matriciales en dos bases diferentes

Sea V un espacio vectorial de dimensión n, y sean B y B' dos bases de V. Sean $u, v \in V$. Entonces:

$$u = (a_1, a_2, \dots, a_n)_B = (a'_1, a'_2, \dots, a'_n)_{B'}$$
$$v = (b_1, b_2, \dots, b_n)_B = (b'_1, b'_2, \dots, b'_n)_{B'}$$

Sea $P = M(\mathrm{Id}_V, B', B)$ la matriz cambio de base de B' a B. Entonces

$$P \begin{pmatrix} a'_1 \\ \vdots \\ a'_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}, \quad P \begin{pmatrix} b'_1 \\ \vdots \\ b'_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$

Tenemos entonces

$$\begin{aligned} b(u,v) = (a_1, \dots, a_n) \cdot M(b,B) \cdot \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} &= (a'_1, \dots, a'_n) \cdot P^t \cdot M(b,B) \cdot P \cdot \begin{pmatrix} b'_1 \\ \vdots \\ b'_n \end{pmatrix} \\ &= (a'_1, \dots, a'_n) \cdot M(b,B') \cdot \begin{pmatrix} b'_1 \\ \vdots \\ b'_n \end{pmatrix} \\ &\Longrightarrow \boxed{M(b,B') = P^t \cdot M(b,B) \cdot P} \end{aligned}$$

Definición 2.3 (Congruencia de matrices)**.** Dadas $M, N \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ se dice que M y N son congruentes si existe una matriz regular P tal que $M = P^t \cdot N \cdot P$.

Observación.

1. "Ser congruente" es una relación de equivalencia en $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$
2. Si $b \in \mathcal{B}(V)$ y B y B' son bases de V, entonces $M(b,B)$ y $M(b,B')$ son congruentes. Recíprocamente, si $b \in \mathcal{B}(V)$, y B es una base de V, entonces $N \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ es una matriz congruente con $M(b,B)$ si existe una única base B' de V tal que $M(b,B') = N$.
3. Si $M, N \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ son congruentes, entonces:
   a) M es simétrica $\Longleftrightarrow$ N es simétrica.
   b) M es antisimétrica $\Longleftrightarrow$ N es antisimétrica.
4. "Ser congruente" y "ser semejante" no guardan relación alguna.
5. Si $M, N \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ son congruentes, entonces:
   a) $\mathrm{rg}(M) = \mathrm{rg}(N)$
   b) M es regular $\Longleftrightarrow$ N es regular.
   c) $\det(M)$ y $\det(N)$ tienen el mismo signo.

Proposición 2.1. *Sea V un espacio vectorial real de dimensión n. El conjunto $\mathcal{B}(V)$ tiene de forma natural una estructura de espacio vectorial real de dimensión n^2. Además, fijada una base B de V, la aplicación*

$$\begin{aligned} F_B : \mathcal{B}(V) &\longrightarrow \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \\ b &\longmapsto M(b,B) \end{aligned}$$

es un isomorfismo de espacios vectoriales.

Definición 2.4 (Forma bilineal traspuesta)**.** Dada $b \in \mathcal{B}(V)$, se define la forma bilineal traspuesta de la forma bilineal b, b^t, como la aplicación $b^t : V \times V \longrightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$b^t(u,v) = b(v,u)$$

Proposición 2.2. *Se define la aplicación trasposición*

$$\begin{aligned} T : \mathcal{B}(V) &\longrightarrow \mathcal{B}(V) \\ b &\longmapsto T(b) = b^t \end{aligned}$$

Se tiene entonces que

a) T *es lineal.*

b) $T^2 = \mathrm{Id}_{\mathcal{B}(V)} \implies T$ *es un automorfismo.* $T^{-1} = T$ *y* T *es una simetría vectorial.*

Definición 2.5 (Forma bilineal simétrica y antisimétrica)**.** Sean V un espacio vectorial y $b \in \mathcal{B}(V)$. Se dice que b es una forma bilineal simétrica si $b = b^t$, es decir, si

$$b(u, v) = b(v, u), \quad \forall u, v \in V$$

Denotemos por

$$\mathcal{B}_S(V) = \{b \in \mathcal{B}(V) \mid b \text{ es simétrica}\}$$

Se dice que b es una forma bilineal antisimétrica si $b = -b^t$, es decir, si

$$b(u, v) = -b(v, u) \iff b(u, u) = 0, \quad \forall u, v \in V$$

Denotemos por

$$\mathcal{B}_A(V) = \{b \in \mathcal{B}(V) \mid b \text{ es antisimétrica}\}$$

Proposición 2.3. *Sea* V *un espacio vectorial de dimensión* n*. Se verifican:*

i) $\mathcal{B}_S(V)$ *y* $\mathcal{B}_A(V)$ *son subespacios vectoriales de* $\mathcal{B}(V)$

ii) $\mathcal{B}(V) = \mathcal{B}_S(V) \oplus \mathcal{B}_A(V)$*. Además, si* $b \in \mathcal{B}(V)$*,*

$$b = \underbrace{\frac{1}{2}(b + b^t)}_{\in \mathcal{B}_S(V)} + \underbrace{\frac{1}{2}(b - b^t)}_{\in \mathcal{B}_A(V)}$$

iii) *Son equivalentes:*

a) $b \in \mathcal{B}_S(V)$

b) $\forall B$ *base de* V*,* $M(b, B) \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$

c) $\exists$ B *base de* V *tal que* $M(b, B) \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$

iv) *Son equivalentes:*

a) $b \in \mathcal{B}_A(V)$

b) $\forall B$ *base de* V*,* $M(b, B) \in \mathcal{A}_n(\mathbb{R})$

c) $\exists$ B *base de* V *tal que* $M(b, B) \in \mathcal{A}_n(\mathbb{R})$

v) *Si* $B = \{v_1, \ldots, v_n\}$ *es una base de* V *y* $B^* = \{\phi_1, \ldots, \phi_n\}$ *es la base dual de* B*, los conjuntos de formas bilineales*

$$B_1 = \{\phi_i \otimes \phi_j + \phi_j \otimes \phi_i \mid 1 \leq i, j \leq n\} \cup \{\phi_i \otimes \phi_i \mid 1 \leq i \leq n\}$$

$$B_2 = \{\phi_i \otimes \phi_j - \phi_j \otimes \phi_i \mid 1 \leq i < j \leq n\}$$

son bases de $\mathcal{B}_S(V)$ *y* $\mathcal{B}_A(V)$*, respectivamente. Por tanto,*

$$\dim(\mathcal{B}_S(V)) = \frac{n(n+1)}{2}$$

$$\dim(\mathcal{B}_A(V)) = \frac{n(n-1)}{2}$$

Además, si $F_B : \mathcal{B}(V) \longrightarrow \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ *es el isomorfismo de la proposición 2.1, entonces*

$$F_B(\mathcal{B}_S(V)) = \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$$

$$F_B(\mathcal{B}_A(V)) = \mathcal{A}_n(\mathbb{R})$$

Ejemplos.

1. $\mathbb{R}^n, A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), \quad b_A$, que cumple $\lambda b_A + \mu b_{A'} = b_{\lambda A + \mu A'}$ y $M(b_A, B_u) = A$

$$b_A^t = b_{A^t} \implies \begin{cases} b_A \in \mathcal{B}_S(\mathbb{R}^n) \iff A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R}) \\ b_A \in \mathcal{B}_A(\mathbb{R}^n) \iff A \in \mathcal{A}_n(\mathbb{R}) \end{cases}$$

$$b_A = \underbrace{b_{\frac{A+A^t}{2}}}_{\in \mathcal{B}_S(\mathbb{R}^n)} + \underbrace{b_{\frac{A-A^t}{2}}}_{\in \mathcal{B}_A(\mathbb{R}^n)}$$

2. Consideramos las formas lineales b_M, b'_M, b''_M, b'''_M, en el espacio $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, donde $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$

- $b_M = b'_M \iff M = 0$
- $b_M = b''_M \iff M = 0$
- $b_M = b'''_M \iff b = c = 0, a = d \iff M = aI_2$
- $b'_M = b''_M \iff b = c = 0, a = d \iff M = aI_2$
- $b'_M = b'''_M \iff M = 0$
- $b''_M = b'''_M \iff M = 0$

- $b_M, b'''_M \in \mathcal{B}_S(\mathcal{M}_2(\mathbb{R})) \iff M = aI_2$
- $b_M, b'''_M \in \mathcal{B}_A(\mathcal{M}_2(\mathbb{R})) \iff M = 0$
- $b'_M, b''_M \in \mathcal{B}_S(\mathcal{M}_2(\mathbb{R})) \iff M \in \mathcal{S}_2(\mathbb{R})$
- $b'_M, b''_M \in \mathcal{B}_A(\mathcal{M}_2(\mathbb{R})) \iff M \in \mathcal{A}_2(\mathbb{R})$

3. Clasificación de métricas y formas cuadráticas reales

Definición 3.1 (Métrica)**.** Sea V un espacio vectorial real. Una métrica g sobre V es una forma bilineal y simétrica definida sobre V. Un espacio vectorial métrico es un par (V, g) formado por un espacio vectorial real y una métrica g sobre V.

A partir de ahora, EVM significa espacio vectorial métrico.

Definición 3.2. Sea (V, g) un EVM. Se define la forma cuadrática asociada a g, ω_g, como la aplicación $\omega_g : V \longrightarrow \mathbb{R}$ dada por:

$$\omega_g(v) = g(v, v), \forall v \in V$$

Propiedades.

1. $\omega_g(\lambda v) = \lambda^2 \omega_g(v), \forall \lambda \in \mathbb{R}, \forall v \in V$
2. $g(u, v) = \frac{1}{2} (\omega_g(u + v) - \omega_g(u) - \omega_g(v)) \frac{1}{4} (\omega_g(u + v) - \omega(u - v))$

Definición 3.3 (Forma cuadrática)**.** Sea V un espacio vectorial real. Una forma cuadrática sobre V es una aplicación $\omega : V \longrightarrow \mathbb{R}$ que verifica:

a) $\omega(\lambda v) = \lambda^2 \omega(v), \forall \lambda \in \mathbb{R}, \forall v \in V$

b) La aplicación $g_\omega : V \times V \longrightarrow \mathbb{R}$, dada por

$$g_\omega(u, v) = \frac{1}{2} (\omega(u + v) - \omega(u) - \omega(v))$$

es una métrica sobre V

Denotaremos $\mathcal{F}(V)$ a la familia de formas cuadráticas definidas sobre V, esto es,

$$\mathcal{F}(V) = \{\omega : V \longrightarrow \mathbb{R} \mid \omega \text{ es una forma cuadrática}\}$$

Proposición 3.1. *Sea V un espacio vectorial real de dimensión n. El conjunto $\mathcal{F}(V)$ tiene, de forma natural, estructura de espacio vectorial real de dimensión $\frac{n(n+1)}{2}$. Además, las aplicaciones*

$$\begin{aligned} \Omega_1 : &\mathcal{B}_S(V) \longrightarrow \mathcal{F}(V) \\ &g \longmapsto \Omega_1(g) = \omega_g \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Omega_2 : &\mathcal{F}(V) \longrightarrow \mathcal{B}_S(V) \\ &\omega \longmapsto \Omega_2(\omega) = g_\omega \end{aligned}$$

son aplicaciones lineales y verifican

$$\Omega_1 \circ \Omega_2 = \mathrm{Id}_{\mathcal{F}(V)}, \quad \Omega_2 \circ \Omega_1 = \mathrm{Id}_{\mathcal{B}_S(V)}$$

En consecuencia, Ω_1 y Ω_2 son isomorfismos y $\Omega_1^{-1} = \Omega_2$

Definición 3.4 (Perpendicularidad)**.** Sea (V, g) un EVM. Dos vectores, $u, v \in V$ se dice que son perpendiculares u ortogonales ($u \perp v$) si $g(u, v) = 0$.

Si $u \in V$ y $U \subseteq V$ es un subespacio vectorial de V, se dice que u y U son perpendiculares u ortogonales ($u \perp U$) si $g(u, v) = 0, \forall v \in U$.

Si U y W son subespacios vectoriales de V, se dice que U y W son perpendiculares u ortogonales ($U \perp W$) si $g(u, w) = 0, \forall u \in U, \forall w \in W$.

Si $U_1, U_2, \ldots, U_k$ son k subespacios vectoriales de V, se dice que V es suma ortogonal de $U_1, U_2, \ldots, U_k$

$$V = U_1 \textcircled{\perp} U_2 \textcircled{\perp} \cdots \textcircled{\perp} U_k$$

si $V = U_1 \oplus U_2 \oplus \cdots \oplus U_k$ y $U_i \perp U_j \forall i, j \in \{1, \ldots, k\}, i \neq j$

Observación.

1. $u \perp v \iff \omega_g(u+v) = \omega_g(u) + \omega_g(v) \longrightarrow \omega_g(u+v) = \omega_g(u-v)$
2. Si $U = \mathcal{L}(\{u_1, \ldots, u_k\})$ entonces $v \perp U \iff v \perp u_i, \forall i \in \{1, 2, \ldots, k\}$
3. Si $U = \mathcal{L}(\{u_1, \ldots, u_k\})$ y $W = \mathcal{L}(\{w_1, \ldots, w_s\})$, entonces

$$U \perp W \iff u_i \perp w_j \forall i \in \{1, \ldots, k\}, \forall j \in \{1, \ldots, s\}$$

Definición 3.5 (Tipos de métricas)**.** Sea V un espacio vectorial real y g una métrica sobre V, $g \neq 0$. Se dice que:

1. g es degenerada si $\exists u \in V, u \neq 0$ tal que $g(u, v) = 0\ \forall v \in V$ ($\iff u \perp v \forall v \in V$).
2. g es no degenerada si g no es degenerada, es decir, si $\forall u \in V, u \neq 0$, se cumple que $g(u, v) \neq 0$.
3. g es definida positiva o euclídea si $\forall u \in V, u \neq 0$ se cumple que $\omega_g(u) = g(u, u) > 0$
4. g es definida negativa si $\forall u \in V, u \neq 0$ se cumple que $\omega_g(u) = g(u, u) < 0$
5. g es semidefinida positiva si $\forall u \in V$ se cumple que $\omega_g(u) = g(u, u) \geq 0$ y $\exists u_0 \in V, u_0 \neq 0$ tal que $\omega_g(u_0) = g(u_0, u_0) = 0$.
6. g es semidefinida negativa si $\forall u \in V$ se cumple que $\omega_g(u) = g(u, u) \leq 0$ y $\exists u_0 \in V, u_0 \neq 0$ tal que $\omega_g(u_0) = g(u_0, u_0) = 0$
7. g es indefinida si $\exists u, v \in V$ tales que $\omega_g(u) = g(u, u) > 0$ y $\omega_g(v) = g(v, v) < 0$

Se dice que un EVM (V, g) es:

1. degenerado si g es degenerada
2. no degenerado si g es no degenerada
3. definido positivo o euclídeo si g es euclídea

4. definido negativo si g es definida negativa
5. semidefinido positivo si g es semidefinida positiva
6. semidefinido negativo si g es semidefinida negativa
7. indefinido si g es indefinida.

Observación.

1. Si g es euclídea, g es un producto escalar sobre V.
2. g es definida positiva $\Longleftrightarrow -g$ es definida negativa

   g es semidefinida positiva $\Longleftrightarrow -g$ es semidefinida negativa
3. Si g es definida positiva o definida negativa $\implies g$ es no degenerada.
4. Si g es semidefinida positiva o semidefinida negativa $\implies g$ es degenerada.

   <u>Demostración</u>: g semidefinida positiva $\implies \forall u \in V, g(u,u) \geq 0$ y $\exists u_0 \in V, u_0 \neq 0$ tal que $g(u_0, u_0) = 0$

   Consideremos la función $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, definida por

   $$f(x) = \omega_g(xu_0 + v) = g(xu_0 + v, xu_0 + v)$$

   donde $u_0 \in V, u_0 \neq 0, \omega_g(u_0) = 0$ y $v \in V$.

   g semidefinida positiva $\implies f(x) \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}$. Como g es bilineal, tenemos que $f(x) = x^2\omega_g(u_0) + 2xg(u_0, v) + \omega_g(v) = 2x\underbrace{g(u_0,v)}_{=\alpha} + \underbrace{\omega_g(v)}_{=\beta} = 2\alpha x + \beta$

   Supongamos que $\alpha \neq 0$, entonces

   $$f\left(-\frac{\beta}{2\alpha} - \alpha\right) = 2\alpha\left(-\frac{\beta}{2\alpha} - \alpha\right) + \beta = -\beta - 2\alpha^2 + \beta = -2\alpha^2 < 0,$$

   lo que es una contradicción. Por tanto, $\alpha = 0$, lo que implica que $g(u_0, v) = 0 \forall v \in V \implies g$ es degenerada.

   Si g es semidefinida negativa, entonces $-g$ es semidefinida positiva $\implies -g$ es degenerada (por lo demostrado) $\implies g$ es degenerada.

3.1. Primera clasificación de métricas

Sea (V, g) un EVM con $g \neq 0$

- Degenerada $\begin{cases} \bullet \text{ Semidefinida positiva} \\ \bullet \text{ Semidefinida negativa} \\ \bullet \text{ Indefinida} \end{cases}$
- No degenerada $\begin{cases} \bullet \text{ Definida positiva} \\ \bullet \text{ Definida negativa} \\ \bullet \text{ Indefinida} \end{cases}$

Ejemplos.

1. Sea (V, g) un EVM, con $g \neq 00$ y con $\dim(V) = 1$, y sea $B = \{u\}$ una base de V.

   Sea $v \in V$, entonces $v = \lambda u$, para algún $\lambda \in \mathbb{R}$. Entonces $\omega_g(v) = \omega_g(\lambda u) = \lambda^2\omega_g(u)$.

   Si $\omega_g(u) > 0 \implies (V, g)$ es euclídeo.

   Si $\omega_g(u) < 0 \implies (V, g)$ es definido negativo.
2. Sea (V, g) un EVM con $\dim(V) = 2$ y $g \neq 0$

   Entonces sabemos que existe una base B de V tal que

   $$M(g, B) = \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix}, \alpha \neq 0,$$

   lo que implica que $\omega_g(v) = \alpha x^2 + \beta y^2$, donde $v = (x, y)_B$. Además:

1) g es euclídea $\Longleftrightarrow \alpha > 0, \beta > 0$
2) g es definida negativa $\Longleftrightarrow \alpha < 0, \beta < 0$
3) g es indefinida $\Longleftrightarrow \alpha\beta < 0$. En particular, g es no degenerada.
4) g es semidefinida positiva $\Longleftrightarrow \alpha > 0, \beta = 0$
5) g es semidefinida negativa $\Longleftrightarrow \alpha < 0, \beta = 0$
   Como consecuencia,
6) Son equivalentes:
   i) g es euclídea.
   ii) $\forall\{a, b\}$, base de V, tal que $M(g, \{a, b\}) = \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix}$ se tiene que $\begin{cases} \det(M(g, \{a, b\})) > 0 \\ x > 0 \end{cases}$
   iii) $\exists\{a, b\}$, base de V tal que $M(g, \{a, b\}) = \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix}$ se tiene que $\begin{cases} \det(M(g, \{a, b\})) > 0 \\ x > 0 \end{cases}$
7) Son equivalentes:
   i) g es definida negativa.
   ii) $\forall\{a, b\}$, base de V, tal que $M(g, \{a, b\}) = \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix}$ se tiene que $\begin{cases} \det(M(g, \{a, b\})) > 0 \\ x < 0 \end{cases}$
   iii) $\exists\{a, b\}$, base de V tal que $M(g, \{a, b\}) = \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix}$ se tiene que $\begin{cases} \det(M(g, \{a, b\})) > 0 \\ x < 0 \end{cases}$
8) Son equivalentes:
   i) g es indefinida.
   ii) $\forall\{a, b\}$, base de V, $\det(M(g, \{a, b\}) < 0$
   iii) $\exists\{a, b\}$, base de V tal que $\det(M(g, \{a, b\}) < 0$
9) Son equivalentes:
   i) g es semidefinida positiva.
   ii) $\forall\{a, b\}$, base de V, se tiene que $\begin{cases} \det(M(g, \{a, b\})) = 0 \\ \operatorname{tr}(M(g, \{a, b\})) > 0 \end{cases}$
   iii) $\exists\{a, b\}$, base de V se tiene que $\begin{cases} \det(M(g, \{a, b\})) = 0 \\ \operatorname{tr}(M(g, \{a, b\})) > 0 \end{cases}$
10) Son equivalentes:
   i) g es semidefinida negativa.
   ii) $\forall\{a, b\}$, base de V, se tiene que $\begin{cases} \det(M(g, \{a, b\})) = 0 \\ \operatorname{tr}(M(g, \{a, b\})) < 0 \end{cases}$
   iii) $\exists\{a, b\}$, base de V se tiene que $\begin{cases} \det(M(g, \{a, b\})) = 0 \\ \operatorname{tr}(M(g, \{a, b\})) < 0 \end{cases}$

Definición 3.6 (Radical)**.** Sea (V, g) un EVM con $\dim(V) = n$. Se define el radical de g, $\operatorname{Rad}(g)$ como el subconjunto de V dado por:

$$\operatorname{Rad}(g) = \{v \in V \mid v \perp V\} = \{v \in V \mid v \perp u, \forall u \in V\} = \{v \in V \mid g(v, u) = 0, \forall u \in V\}$$

Por la bilinealidad de g, $\operatorname{Rad}(g)$ es un subespacio vectorial de V. Además, se definen la nulidad de g como el número

$$\operatorname{nul}(g) = \dim(\operatorname{Rad}(g))$$

y el rango de g como el número

$$\operatorname{rg}(g) = n - \operatorname{nul}(g)$$

Observación.
g es degenerada $\Longleftrightarrow \operatorname{Rad}(g) \neq \{0\} \Longleftrightarrow \operatorname{nul}(g) > 0 \Longleftrightarrow \operatorname{rg}(g) < n$
g es no degenerada $\Longleftrightarrow \operatorname{Rad}(g) = \{0\} \Longleftrightarrow \operatorname{nul}(g) = 0 \Longleftrightarrow \operatorname{rg}(g) = n$

En lo que sigue, vamos a construir, cuando (V, g) es no degenerado, un isomorfismo natural entre V y V^* utilizando la métrica g.

Definición 3.7. Sea (V, g) un EVM con $\dim(V) = n$. Se define la aplicación $\Phi : V \longrightarrow V^*$ dada por
$$\left.\begin{array}{l}\Phi(v) : V \longrightarrow \mathbb{R} \\ \Phi(v)(u) = g(u, v), \forall u \in V\end{array}\right\} \forall v \in V$$

Proposición 3.2. *Se verifican:*

a) Φ *está bien definida.*

b) Φ *es lineal.*

c) $\ker(\Phi) = \mathrm{Rad}(g)$

d) *Si* B *es una base de* V *y* B^* *su base dual, entonces*
$$M(\Phi, B, B^*) = M(g, B)$$

e) $\mathrm{nul}(g) = \mathrm{nul}(\Phi) = n - \mathrm{rg}(M(g, B))$
$\mathrm{rg}(g) = \mathrm{rg}(\Phi) = \mathrm{rg}(M(g, B))$

f) *Son equivalentes las siguientes afirmaciones:*

  i) (V, g) *es no degenerado.*
  ii) $\mathrm{Rad}(g) = \{0\}$
  iii) $\mathrm{nul}(g) = 0$
  iv) $\mathrm{rg}(g) = n$
  v) Φ *es un isomorfismo.*
  vi) $\forall B$ *base de* V*,* $M(g, B)$ *es regular.*
  vii) $\exists B$ *base de* V *tal que* $M(g, B)$ *es regular.*

Observación. Si (V, g) es no degenerado a los isomorfismos Φ y Φ^{-1} se les denominan isomorfismos musicales:
$$\Phi = \text{ isomorfismo bemol } = \flat : V \longrightarrow V^*$$
$$\Phi^{-1} = \text{ isomorfismo sostenido } = \sharp : V^* \longrightarrow V$$

que actúan así:
$$\flat(v) \equiv v^\flat : V \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$v^\flat(u) = g(u, v), \forall u, v \in V$$
$$\sharp(\varphi) \equiv \varphi^\sharp \in V,\ g(u, \varphi^\sharp) = \varphi(u), \forall u \in V, \forall \varphi \in V^*$$

Ejemplos.

1. $\mathbb{R}^n, A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Sea $b_A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$, $b_A : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$, definido por $b_A(u, v) = u \cdot A \cdot v$. Entonces, $M(b_A, B_u) = A$. Tenemos que $b_A \in \mathcal{B}_S(\mathbb{R}^\ltimes) \iff A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R}^\ltimes)$.

   Entonces, a partir de ahora, $b_A = g_A$.

   ¿Cuándo se dice que A es euclídea, A es definida negativa o A es indefinida?

   1.a) $A = I_n$, $g_A = g_u =$ métrica euclídea usual en $\mathbb{R}^n$ o producto escalar usual en $\mathbb{R}^n$. Sean $u, v \in \mathbb{R}^n$, con $u = (x_1, \ldots, x_n)$ y $v = (y_1, \ldots, y_n)$. Entonces
$$g_u(u, v) = u \cdot v = \sum_{i=1}^n x_i y_i,\ \text{y}\ \omega_{g_u}(u) = \sum_{i=1}^n x_i^2$$

1.b) Sean $n \in \mathbb{N}, p, q, r \in \mathbb{N}_0$, con $p+q+r=n$ y $r<n$. Entonces, la matriz

$$A_{p,q} = \left(\begin{array}{c|c|c} I_p & 0 & 0 \\ \hline 0 & -I_q & 0 \\ \hline 0 & 0 & O_r \end{array}\right) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$$

es diagonal. Sea $g_{A_{p,q}} = g_{p,q}$, $u, v \in \mathbb{R}^n$ con $u = (x_1, \ldots, x_n)$ y $v = (y_1, \ldots, y_n)$. Entonces

$$g_{p,q}(u,v) = \sum_{i=1}^{p} x_i y_i - \sum_{j=p+1}^{p+q} x_j y_j$$

$$\omega_{g_{p,q}}(u) = \sum_{i=1}^{p} x_i^2 - \sum_{j=p+1}^{p+q} x_j^2$$

- $g_{p,q}$ es degenerada $\iff p+q<n \iff r>0$.
- $g_{p,q}$ es no degenerada $\iff p+q=n \iff r=0$.
- $g_{p,q}$ es euclídea $\iff p=n, q=r=0 \iff g_{p,q}=g_u$.
- $g_{p,q}$ es definida negativa $\iff q=n, p=r=0$.
- $g_{p,q}$ es indefinida $\iff p>0$ y $q>0$.
- $g_{p,q}$ es semidefinida positiva $\iff q=0$ y $r>0$.
- $g_{p,q}$ es semidefinida negativa $\iff p=0$ y $r>0$.

El ejemplo $p=n-1$, $q=1$, $r=0$, $g_{n-1,1}$, es conocida como la métrica de Lorentz-Minkowski en $\mathbb{R}^n$.

1.c) Sea $0 \neq M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), A = M^t \cdot M$, y consideremos g_A.

$$g_A(u,v) = u \cdot M^t \cdot M \cdot v = (M \cdot u)^t \cdot (M \cdot v) = g_u(Mu, Mv)$$

- g_A es euclídea $\iff M \in \mathrm{Gl}(n, \mathbb{R})$
- g_A es semidefinida positiva $\iff \det(M) = 0$.
- Además, $\mathrm{Rad}(g_A) = \ker(M)$

2. $\mathcal{M}_2(\mathbb{R}), M = \begin{pmatrix} a & c \\ c & d \end{pmatrix}$.

- b_M, b_M''' son métricas $\iff M = a \cdot I_2$, $a \in \mathbb{R}$.
  $b_M(A,B) = \mathrm{tr}(A \cdot a \cdot I_2 \cdot B) = a\,\mathrm{tr}(A \cdot B) = a\,\mathrm{tr}(A^t B^t) = \mathrm{tr}(A^t \cdot a \cdot I_2 \cdot B^t) = b_M'''(A,B)$
- $g(A,B) = \mathrm{tr}(A \cdot B)$ es métrica en $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
  $\omega_g(A) = \sum_{i,j=1}^n a_{i,j} \cdot a_{j,i}$.
- b_M', b_M'' son métricas $\iff M \in \mathcal{S}_2(\mathbb{R})$
- $b_M' = b_M'' \iff M = a \cdot I_2, a \in \mathbb{R}$.
- $M \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$. Entonces $g_M(A,B) = \mathrm{tr}(A \cdot M \cdot B^t)$ y $g_M'(A,B) = \mathrm{tr}(A^t \cdot M \cdot B)$ son dos métricas en $\mathcal{S}_2(\mathbb{R})$.
- $M = I_n$, $g_M = g_M' = g_u =$ métrica euclídea usual en $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
  $g_u(A,B) = \mathrm{tr}(A \cdot B^t) = \sum_{i,j=1}^n a_{i,j} \cdot b_{i,j}$
  $\omega_{g_u}(A) = \sum_{i,j=1}^n (a_{i,j})^2$.

3. $\mathbb{R}_n[x]$. Consideramos las métricas $g_1, g_2, g_3, g_4 : \mathbb{R}_n[x] \times \mathbb{R}_n[x] \longrightarrow \mathbb{R}$ dadas por:

$$\begin{cases} g_1(p(x), q(x)) = \int_{-1}^{1} p(x) \cdot q(x) dx \\ g_2(p(x), q(x)) = \int_{-1}^{1} p'(x) \cdot q'(x) dx \\ g_3(p(x), q(x)) = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} p(x) \cdot q(x) \cdot \mathrm{sen}(x) dx \\ g_4(p(x), q(x)) = p(3) \cdot q(3) \end{cases}$$

4. Métrica inducida en un subespacio vectorial (ejemplo teórico)

Sea (V, g) un EVM, y $U \subseteq V$ un subespacio vectorial de V. Entonces, la aplicación $g_{|U} : U \times U \longrightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$g_{|U}(a, b) = g(a, b), \forall a, b \in U$$

es una métrica sobre U, con $\omega_{(g_{|U})} = (\omega_g)_{|U}$

A la métrica $g_{|U}$ se le conoce como la métrica g restringida a U o inducida en U.

Propiedades. Partiendo de $U \neq \{0\}$, un subespacio vectorial de V cualquiera:

i) Si g es euclídea $\Longrightarrow$ $g_{|U}$ es euclídea.

ii) Si g es definida negativa $\Longrightarrow$ $g_{|U}$ es definida negativa.

iii) Si g es definida positiva $\Longrightarrow$ $g_{|U}$ o bien es definida positiva (si $U \cap \mathrm{Rad}(g) = \{0\}$) o bien semidefinida positiva (si $U \cap \mathrm{Rad}(g) \neq \{0\}$). Además, si $g_{|U}$ es semidefinida positiva, entonces $\mathrm{Rad}(g_{|U}) = \mathrm{Rad}(g) \cap U$.

iv) Si g es semidefinida negativa, entonces $g_{|U}$ o bien es definida negativa (si $U \cap \mathrm{Rad}(g) = \{0\}$), o bien semidefinida negativa (si $U \cap \mathrm{Rad}(g) \neq \{0\}$). Además, si $g_{|U}$ es semidefinida negativa, entonces $\mathrm{Rad}(g_{|U}) = \mathrm{Rad}(g) \cap U$.

v) Si g es indefinida, $g_{|U}$ puede ser cualquier tipo de métrica.

Observación. Si (V, g) es degenerado y U es un complementario cualquiera de $\mathrm{Rad}(g)$, entonces $V = \mathrm{Rad}(g) \textcircled{\perp} U$ y $g_{|U}$ es no degenerado.

4. Bases ortogonales y ortonormales. Ley de inercia de Sylvester. Criterio de Sylvester

Definición 4.1 (Subespacio perpendicular u ortogonal a uno dado)**.** Sean (V, g) un EVM y $U \subseteq V$ un subespacio vectorial de V. Se define el subespacio perpendicular u ortogonal a U, $U^\perp$, como

$$U^\perp = \{v \in V \mid v \perp u, \forall u \in U\}$$

Propiedades.

1. $U^\perp$ es un subespacio vectorial de V.
2. $\mathrm{Rad}(g) \subseteq U^\perp$, $\forall U$ subespacio vectorial de V.
3. $\{0\}^\perp = V$, y $V^\perp = \mathrm{Rad}(g)$.
4. Si $u \in V, u \neq 0$, se tiene que o bien $\mathcal{L}(\{u\})^\perp = V$ (si $u \in \mathrm{Rad}(g)$), o bien $\mathcal{L}(\{u\})^\perp$ es un hiperplano de V (si $u \notin \mathrm{Rad}(g)$).
5. Si $U = \mathcal{L}(\{u_1, \ldots, u_k\})$, entonces

$$U^\perp = \{v \in V \mid v \perp u_i, 1 \leq i \leq k\} = \mathcal{L}(\{u_1\})^\perp \cap \mathcal{L}(\{u_2\})^\perp \cap \cdots \cap \mathcal{L}(\{u_k\})^\perp$$

Proposición 4.1. *Sea (V, g) un EVM **no degenerado** y U y W subespacios vectoriales de V. Se verifican:*

1. $\dim(U^\perp) = \dim(V) - \dim(U)$.
2. $(U^\perp)^\perp = U$.
3. $U \subseteq W \Longleftrightarrow W^\perp \subseteq U^\perp$.
4. $(U + W)^\perp = U^\perp \cap W^\perp$.

5. $(U \cap W)^\perp = U^\perp + W^\perp$.
6. $V = U \textcircled{\perp} U^\perp \iff g_{|U}$ *es no degenerada* $\iff g_{|U^\perp}$ *es no degenerada.*
7. *Si* $V = U \textcircled{\perp} U'$ *para* U' *subespacio vectorial de* V, *entonces* $U' = U^\perp$.

Definición 4.2 (Base ortogonal y base ortonormal)**.** Sean (V, g) un EVM y $B = \{v_1, v_2, \dots, v_k\} \subseteq V$ un subconjunto de V formado por k vectores. Se dice que:

1. B es un subconjunto ortogonal si $v_i \perp v_j, \forall i, j \in \{1, \dots, j\}, i \neq j$.
2. B es un subconjunto ortonormal si B es ortogonal y $\omega_g(v_i) \in \{-1, 0, 1\} \forall i \in \{1, 2, \dots, k\}$.
3. B es una base ortogonal de V si B es una base de V y B es un subconjunto ortogonal de V. Equivalentemente, B es base de V y $M(g, B)$ es diagonal.
4. B es una base ortonormal de V si B es una base de V y B es un subconjunto ortonormal de V. Equivalentemente, B es base de V y $M(g, B)$ es diagonal con $\{-1, 0, 1\}$ en la diagonal.

Observación.

1. Si B es una base ortonormal de (V, g), entonces B es una base ortogonal de (V, g).
2. Si B es una base ortogonal de (V, g), y normalizo los vectores de B, obtengo una base B' que es ortonormal para g. (normalizar un vector $\equiv$ hacer que su distancia sea 1).
3. Si B es una base ortonormal de (V, g), y $\dim(V) = n$, entonces:

   $$M(g, B) = A_{p,q} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$$

   donde $p + q = \mathrm{rg}(M(g, B)) = \mathrm{rg}(g)$, y $r = \mathrm{nul}(g)$ (ya definimos la matriz $A_{p,q}$ antes).

   Entonces, $B = \{u_1, \dots, u_p, v_1, \dots v_q, w_1, \dots, w_r\}$. En efecto,

   - $\omega_g(u_1) = \cdots = \omega_g(u_p) = 1$
   - $\omega_g(v_1) = \cdots = \omega_g(v_q) = -1$
   - $\mathcal{L}(\{w_1, \dots, w_r\}) = \mathrm{Rad}(g)$

   Sean $u = (a_1, \dots, a_n)_B, v = (b_1, \dots b_n)_B$. Entonces

   - $g(u, v) = \sum_{i=1}^{p} a_i \cdot b_i - \sum_{j=p+1}^{p+q} a_j \cdot b_j$
   - $\omega_g(u) = \sum_{i=1}^{p} a_i^2 - \sum_{j=p+1}^{p+q} a_j^2$
4. Si (V, g) es no degenerado y B es una base ortonormal de V, ¿cómo puedo calcular de una forma sencilla las coordenadas de un vector respecto de B?

   $B = \{u_1, \dots, u_p, v_1, \dots, v_q\}$ es una base ortonormal. Sea $v \in V$, con $v = (a_1, \dots, a_n)_B$. Entonces

   - $a_i = g(v, u_i), \forall i \in \{1, \dots, p\}$
   - $a_{p+i} = -g(v, v_i), \forall i \in \{1, \dots, p\}$
5. Si $\{v_1, \dots, v_k\}$ es un subconjunto ortogonal de (V, g) tal que $\omega_g(v_i) \neq 0 \forall i = 1, \dots k$, entonces $\{v_1, \dots, v_k\}$ es linealmente independiente. En particular, si (V, g) es definido positivo o definido negativo y $\{v_1, \dots, v_k\}$ es un subconjunto ortogonal de (V, g) formado por vectores no nulos entonces $\{v_1, \dots, v_k\}$ es linealmente independiente.

Teorema 4.3. *Todo espacio vectorial métrico tiene bases ortonormales.*

Demostración. Sea (V, g) un EVM con $\dim(V) = n$. Distinguir entonces dos casos:

1. (V, g) es no degenerado (inducción sobre n)
2. (V, g) es degenerado.

Teorema 4.4. *Sean* (V, g) *un EVM de dimensión* n *y* B *una base ortonormal de* (V, g). *Si* $M(g, B) = A_{p,q}$, *entonces se verifican:*

i) $r = \mathrm{nul}(g)$ *y* $p + q = \mathrm{rg}(g)$

ii) *si* $p > 0$, *entonces*

$$p = \max\{\dim(U) \mid U \textit{ es un subespacio vectorial de } V, \textit{ y } g_{|U} \textit{ es definida positiva}\}$$

iii) *si* $q > 0$, *entonces*

$$1 = \max\{\dim(U) \mid U \textit{ es un subespacio vectorial de } V, \textit{ y } g_{|U} \textit{ es definida negativa}\}$$

Demostración. Distinguir casos:

1. $g = 0 \iff p = q = 0, r = n$
2. g euclídea $\iff p = n, q = r = 0$
3. g definida negativa $\iff p = 0, q = n, r = 0$
4. g semidefinida positiva $\iff p > 0, q = 0, r > 0$
5. g semidefinida negativa $\iff p = 0, q > 0, r > 0$
6. g indefinida $\iff p > 0, q > 0$.

Teorema 4.5 (Teorema de Sylvester. Ley de inercia de Sylvester). *En todo espacio vectorial métrico existen bases tales que la matriz de la métrica en dichas bases es una matriz diagonal, y em la diagonal aparecen unos, menos unos y ceros. Además, la cantidad de unos, menos unos y ceros no depende de la base que se elija, solo depende de la métrica.*

Demostración. Consecuencia de los dos teoremas anteriores.

Definición 4.6. Sean (V, g) un EVM de dimensión n y B una base ortonormal de (V, g). Si $M(g, B) = A_{p,q}$, se define el índice de g, indice(g), como la cantidad de menos unos que aparece en la diagonal de $M(g, B)$, es decir,

$$\text{indice}(g) = q \implies 0 \leq \text{indice}(g) \leq \text{rg}(g)$$

Corolario 4.7. *Sea* (V, g) *un EVM de dimensión* n *con* $g \neq 0$. *Se verifican:*

1. (V, g) *es euclídeo o definido positivo* $\iff \text{rg}(g) = n, \text{indice}(g) = 0$.
2. (V, g) *es definido negativo* $\iff \text{rg}(g) = n, \text{indice}(g) = n \iff \text{indice}(g) = n$.
3. (V, g) *es semidefinido positivo* $\iff \text{rg}(g) < n, \text{indice}(g) = 0$.
4. (V, g) *es semidefinido negativo* $\iff \text{rg}(g) < n, \text{indice}(g) = \text{rg}(g)$.
5. (V, g) *es indefinido* $\iff 0 < \text{indice}(g) < \text{rg}(g)$.

Corolario 4.8. *Sea* V *un espacio vectorial de dimensión* n *y* ω *una forma cuadrática definida sobre* V. *Se tiene que existen* B *una base de* V *y* $p, q, r \in \mathbb{Z}$, *con* $p, q, r \geq 0$ *y* $p+q+r = n$ *(que solo dependen de* ω*) tales que si* B *viene dada por vectores* $B = \{u_1, \ldots, u_p, v_1, \ldots, v_q, w_1, \ldots, w_r\}$ *y* $v \in V$ *es un vector de coordenadas respecto de* B, *con* $v = (x_1, x_2, \ldots, x_n)_B$, *entonces*

$$\omega(v) = x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_p^2 - x_{p+1}^2 - x_{p+2}^2 - \cdots - x_{p+q}^2$$

Además, $q = \text{indice}(g)$ *y* $p + q = \text{rg}(g)$.

Corolario 4.9. *Si* $A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$, *existen* $p, q, r \in \mathbb{Z}$, *con* $p, q, r \geq 0$ *y* $p + q + r = n$ *(que solo dependen de A) tales que A es congruente a la matriz* $A_{p,q}$, *donde* $p + q = \text{rg}(g_A) = \text{rg}(A)$ *y* $q = \text{indice}(g_A) = \text{indice}(A)$.

Además, si $A, B \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$, *se tiene que* A *y* B *son congruentes* $\iff \text{rg}(A) = \text{rg}(B)$ *y* $\text{indice}(A) = \text{indice}(B)$.

Corolario 4.10 (Criterio de Sylvester).

Previo al enunciado: Sean (V, g) un EVM de dimensión n, y $B = \{v_1, \dots, v_n\}$ una base de V. Sea $M(g, B) = A$. Entonces, dado $k \in \{1, \dots, n\}$, definimos el subespacio vectorial $U_k = \mathcal{L}(\{v_1, v_2, \dots, x_k\})$ de V de dimensión k. Entonces, $(U_k, g_{|U_k})$ es un EVM de dimensión k, y $B_k = \{v_1, v_2, \dots, v_k\}$ es una base de U_k.

Si llamamos $A_k = M(g_{|U_k})$, entonces

$$A_k = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1k} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2k} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{k1} & a_{k2} & \cdots & a_{kk} \end{pmatrix}, \text{ submatriz de } A$$

Denotemos por $\alpha_k(g, B) = \det(A_k) =$ menor angular de orden k de la matriz A.

Criterio de Sylvester:
Sea (V, g) un EVM de dimensión n. Se verifican:

i) *son equivalentes:*
   a) *(V, g) es euclídeo.*
   b) *$\forall B$ base de V, $\alpha_k(g, B) > 0, \forall k = 1, \dots, n$.*
   c) *$\exists B$ base de V tal que $\alpha_k(g, B) > 0 \forall k = 1, \dots, n$*

ii) *son equivalentes:*
   a) *(V, g) es definido negativo.*
   b) *$\forall B$ base de V, $(-1)^k \alpha_k(g, B) > 0, \forall k = 1, \dots, n$.*
   c) *$\exists B$ base de V tal que $(-1)^k \alpha_k(g, B) > 0 \forall k = 1, \dots, n$*

Demostración.

i) *a)* $\implies$ *b)*. Se aplican:
   (*) Si (V, g) es euclídeo y B una base de V, entonces $\det(M(g, B)) > 0$, ya que $M(g, B)$ e I_n son congruentes.
   (**) Si (V, g) es euclídeo y U es un subespacio de V, $U \neq \{0\}$, entonces $g_{|U}$ es una métrica euclídea en U.

   b) $\implies$ *c)* es trivial.

   c) $\implies$ *a)*: inducción sobre n.

ii) Se aplican:
   (*) (V, g) es definido negativo $\iff$ $(V, -g)$ es euclídeo.
   (**) Para todo $k \in \{1, \dots, n\}$ se cumple que $M(-g, B) = -M(g, B)$, $M(-g_{|U_k}, B_k) = -M(g_{|U_k}, B_k)$, $\det(-A_k) = (-1)^k \det(A_k)$ y $\alpha_k(-g, B) = (-1)^k \alpha_k(g, B)$.

Ejercicio. (Clasificación de espacios métricos para dimensión 3)
Sea (V, g) un EVM de dimensión 3, con $g \neq 0$, y $B = \{v_1, v_2, v_3\}$ una base de V. Sea

$$M(g, B) = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix} \in \mathcal{S}_3(\mathbb{R})$$

Entonces, $\alpha_1(g, B) = a_{11},\ \alpha_2(g, B) = \det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix},\ \alpha_3(g, B) = \det(M(g, B))$.

Tenemos que:

1. g es euclídea $\iff \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 > 0$.

2. g es definida negativa $\Longleftrightarrow \alpha_1 < 0, \alpha_2 > 0, \alpha_3 < 0$.
3. Si $\alpha_3 \neq 0$ ($\Longleftrightarrow g$ no degenerada) y no se verifica ni 1. ni 2., entonces g es indefinida. Tenemos ahora dos posibilidades:

   a) $\exists B'$ base de V tal que $M(g, B') = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$. Entonces g es indefinida, no degenerada, de rango 3 e índice 2 ($\Longleftrightarrow \alpha_3 > 0$).

   b) $\exists B'$ base de V tal que $M(g, B') = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$. Entonces g es indefinida, no degenerada, de rango 3 e índice 1 ($\Longleftrightarrow \alpha_3 < 0$).

4. Si $\alpha_3 = 0$ ($\Longleftrightarrow g$ es degenerada) el criterio de Sylvester no es válido.

   Primer paso: ¿$\mathrm{rg}(g) \in \{1, 2\}$?

   a) $\mathrm{rg}(g) = 2$. Entonces $\mathrm{Rad}(g)$ recta vectorial. Sea U un complementario cualquiera de $\mathrm{Rad}(g)$, esto es, $V = U \oplus \mathrm{Rad}(g)$. Entonces $V = U \bigoplus\!\!\!\!\!\bot\ \mathrm{Rad}(g)$, y $g_{|U}$ es no degenerada. Por lo tanto, aplicando la clasificación en dimensión dos se tiene que:

      a.1) si $g_{|U}$ es euclídea, entonces $\exists B'$ base de V tal que $M(g, B') = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, que equivale a decir que g es semidefinida positiva de rango 2 e índice 0.

      a.2) si $g_{|U}$ es definida negativa, entonces $\exists B'$ base de V tal que $M(g, B') = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, , que equivale a decir que g es indefinida degenerada de rango 2 e índice 1.

   b) $\mathrm{rg}(g) = 1$. Entonces $\exists B'$ base de V tal que

$$M(g, B') = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \ (\Longleftrightarrow \mathrm{tr}(M(g, B)) > 0) \quad \text{o}$$

$$M(g, B') = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \ (\Longleftrightarrow \mathrm{tr}(M(g, B)) < 0)$$

   En el primer caso, g es semidefinida positiva de rango 1 e índice 0, y en el segundo, g es semidefinida negativa de rango 1 e índice 1.

5. Isometrías entre espacios vectoriales métricos

¿Cuándo dos EVM (V, g) y (V', g') son iguales desde el punto de vista de la teoría de espacios vectoriales métricos?

Definición 5.1. Sean (V, g) y (V', g') dos EVM y $f : V \longrightarrow V'$ una aplicación. Se dice que f es una isometría si f verifica:

1. f es un isomorfismo
2. $\forall u, v \in V$, $g'(f(u), f(v)) = g(u, v)$

Se dice que dos EVM (V, g) y (V', g') son isométricos si existe una isometría $f : (V, g) \longrightarrow (V', g')$.

Si (V, g) es un EVM denotaremos por

$$\mathrm{Iso}(V, g) = \{f : (V, g) \longrightarrow (V, g) \mid f \text{ es una isometría}\}$$

Veamos que en algunos casos la condición (2) de la anterior definición implica la condición (1).

Sean (V,g), (V',g') dos EVM y $f : V \longrightarrow V'$ una aplicación que verifica (2). Se tiene que $\forall u,v,w \in V, \forall \lambda,\mu \in \mathbb{R}$ se verifica que

$$g'(f(\lambda u+\mu v)-\lambda f(u)-\mu f(v), f(w)) = g(\lambda f(u)+\mu f(v)-\lambda f(u)-\mu f(v), f(w)) = g(0, f(w)) = 0$$

Por lo tanto,

$$\begin{aligned}
&\omega_{g'}(f(\lambda u+\mu v)-\lambda f(u)-\mu f(v)) \\
&= g'(f(\lambda u+\mu v)-\lambda f(u)-\mu f(v), f(\lambda u+\mu v)-\lambda f(u)-\mu f(v)) \\
&= g'(f(\lambda u+\mu v)-\lambda f(u)-\mu f(v), f(\lambda u-\mu v)) - \lambda g'(f(\lambda u+\mu v)-\lambda f(u)-\mu f(v), f(u)) \\
&\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad - \mu g'(f(\lambda u+\mu v)-\lambda f(u)-\mu f(v), f(v)) \\
&= 0-\lambda\cdot 0-\mu\cdot 0 = 0,\ \forall u,v \in V, \forall \lambda,\mu \in \mathbb{R}
\end{aligned}$$

Proposición 5.1. *Sean (V,g) y (V',g') EVM y $f : V \longrightarrow V'$ una aplicación. Se verifican:*

1. *Si g y g' son métricas no degeneradas, f es sobreyectiva y f verifica la condición (2) de la definición anterior, entonces f es una isometría.*
2. *Si g y g' son métricas euclídeas o métricas definidas negativas, $\dim(V) = \dim(V')$ y f verifica la condición (2) de la definición anterior, entonces f es una isometría.*

¿Cómo traducir la condición (2) de la definición anterior en coordenadas?

Sean (V,g) y (V',g') EVM, con $\dim(V) = n$ y $\dim(V') = m$, y $f : V \longrightarrow V'$ una aplicación lineal. Supongamos que f verifica que $g'(f(u), f(v)) = g(u,v),\ \forall u,v \in V$. Sean $B = \{u_1,\ldots,u_n\}$ y $B' = \{v_1,\ldots,v_n\}$ bases de V y V', respectivamente. Si $u = (a_1,\ldots,a_n)_B$ y $v = (b_1,\ldots,b_n)_B$. Entonces,

$$g(u,v) = (a_1,\ldots,a_n)\cdot \underbrace{M(g,B)}_{n\times n}\cdot \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$

y

$$(a_1,\ldots,a_n)\cdot \underbrace{M(f,B,B')^t}_{n\times m}\cdot \underbrace{M(g',B')}_{m\times m}\cdot \underbrace{M(f,B,B')}_{m\times n}\cdot \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} = g'(f(u),f(v))$$

y como $g(u,v) = g'(f(u),f(v))$, tenemos que

$$M(f,B,B')^t\cdot M(g',B')\cdot M(f,B,B') = M(g,B)$$

Proposición 5.2. *Sean (V,g) y (V',g') EVM y $f : V \longrightarrow V'$ un isomorfismo. Son equivalentes:*

1. *f es una isometría.*
2. *$\omega_{g'}(f(u)) = \omega_g(u),\ \forall u \in V$.*
3. *$\forall B$ base de V, $\forall B'$ base de V', se verifica $M(f,B,B')^t\cdot M(g',B')\cdot M(f,B,B') = M(g,B)$*
4. *$\exists B$ base de V, $\exists B'$ base de V' tales que $M(f,B,B')^t\cdot M(g',B')\cdot M(f,B,B') = M(g,B)$*

Corolario 5.2. *Sean (V,g) y (V',g') EVM tales que $\dim(V) = \dim(V')$, $\mathrm{rg}(g) = \mathrm{rg}(g')$ e $\mathrm{indice}(g) = \mathrm{indice}(g')$, y sea $f : V \longrightarrow V'$ una aplicación lineal. Son equivalentes:*

1. *f es una isometría.*
2. *$\forall B$ base ortonormal de (V,g), $f(B)$ es una base ortonormal de (V',g').*
3. *$\exists B$ base ortonormal de (V,g), tal que $f(B)$ es una base ortonormal de (V',g').*

Corolario 5.3. *Sean (V,g) y (V',g') EVM. Son equivalentes:*

1. *(V,g) y (V',g') son isométricas.*
2. *$\dim(V) = \dim(V')$, $\mathrm{rg}(g) = \mathrm{rg}(g')$ e $\mathrm{indice}(g) = \mathrm{indice}(g')$*

Proposición 5.3. *Se verifican:*

1. *La composición de isometrías es isometría.*
2. *La inversa de una isometría es una isometría.*
3. *La identidad de (V, g), un EVM, en sí mismo es una isometría.*
4. *La relación binaria "ser isometríco" en la familia de espacios métricos es una relación de equivalencia.*
5. $(\mathrm{Iso}(V, g), 0)$ *es un subgrupo de* $(\mathrm{Aut}(V), 0)$

Algunas consecuencias de todo lo expuesto hasta ahora para EVM euclídeas. Sea (V, g) un EVM euclídeo de dimensión n.

1. Sea $f : V \longrightarrow V$ una aplicación. Entonces

$$f \in \mathrm{Iso}(V, g) \iff g(f(u), f(v)) = g(u, v) \iff \begin{cases} \omega_g(f(v)) = \omega_g(v) \\ f(u + v) = f(u) + f(v) \end{cases}$$

2. Si $f \in \mathrm{Iso}(V, g)$ y B es una base ortonormal de (V, g), entonces

$$\underbrace{M(g, B)}_{=I_n} = M(f, B)^t \cdot \underbrace{M(g, B)}_{=I_n} \cdot M(f, B) \implies M(f, B)^t \cdot M(f, B) = I_n$$

$$\implies \begin{cases} M(f, B) \in \mathrm{Gl}(n, \mathbb{R}) \\ M(f, B)^{-1} = M(f, B)^t \end{cases}$$

3. Si B y B' son bases ortonormales de (V, g), como $I_V \in \mathrm{Iso}(V, g)$, entonces:

$$\underbrace{M(g, B')}_{=I_n} = M(I_V, B', B)^t \cdot \underbrace{M(g, B)}_{=I_n} \cdot M(I_V, B', B) \implies M(I_V, B', B)^t \cdot M(I_V, B', B) = I_n$$

Definición 5.4. Se dice que $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ es una matriz ortogonal si $A^t \cdot A = I_n$, es decir, $A \in \mathrm{Gl}(n, \mathbb{R})$ y $A^{-1} = A^t$. Denotaremos por

$$O(n) = \{A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \mid A \text{ es ortogonal}\}$$

el grupo ortogonal de orden n.

Proposición 5.4. *Se verifican:*

1. *Si* $A \in O(n)$, *entonces* $\det(A) = \pm 1$.
2. *Si* $A \in O(n)$ *y* $\lambda \in \mathbb{R}$ *es un valor propio de* A, *entonces* $\lambda = \pm 1$.
3. *Si* $f \in \mathrm{End}(V)$, *son equivalentes:*
   a) $f \in \mathrm{Iso}(V, g)$
   b) $\forall B$ *base ortonormal de* $(V, g) \mid M(f, B) \in O(n)$.
   c) $\exists B$ *base ortonormal de* (V, g) *tal que* $M(f, B) \in O(n)$.
4. *Si* B *es una base ortonormal de* (V, g) *y* B' *es otra base de* V, *son equivalentes:*
   a) B' *es una base ortonormal de* (V, g)
   b) $M(I_V, B', B) \in O(n)$
5. *Si* B *es una base ortonormal de* (V, g), *la aplicación*

$$\begin{aligned} F_B : \mathrm{Iso}(V, g) &\longrightarrow O(n) \\ f &\mapsto M(f, B) \end{aligned}$$

es un isomorfismo de grupos.