TEMA 2: APLICACIONES CONTINUAS

Manuel Bolaños Quesada

Índice

1. Continuidad

Notación. $f : X \to Y$ denota una aplicación entre conjuntos. f^{-1} puede referirse a la imagen inversa, o a la aplicación inversa de f, si f es biyectiva. Nosotros usaremos la primera excepto cuando se indique lo contrario. Así pues, si $V \subset Y$:

$$f^{-1}(V) = \{x \in X : f(x) \in V\}$$

Son de comprobación inmediata las siguientes afirmaciones:

1. $f^{-1}(\bigcup_{i\in I} V_i) = \bigcup_{i\in I} f^{-1}(V_i)$
2. $f^{-1}(\bigcap_{i\in I} V_I) = \bigcap_{i\in I} f^{-1}(V_i)$
3. $f^{-1}(Y\backslash V) = X\backslash f(V)$
4. $y \in f(f^{-1}(V)) \implies \exists x \in f^{-1}(V)$ tal que $y = f(x) \in V$.

Definición 1.1. Diremos que $f : (X, T) \to (Y, T')$ es continua si $\forall V \in T'$, se tiene que $f^{-1}(V) \in T$

Definición 1.2. Sea $x_0 \in X$. Diremos que $f : (X, T) \to (Y, T')$ es continua en x_0 si $\forall V' \in N'_{f(x_0)}, \exists V \in N_{x_0}$ tal que $f(V) \subset V'$.

Proposición 1.1. *Sea $f : X \to Y$ una aplicación entre dos espacio topológicos (X, T) y (Y, T'). Son equivalentes:*

1. *$f : (X, T) \to (Y, T')$ es continua*
2. *$f : (X, T) \to (Y, T')$ es continua en x_0 $\forall x_0 \in X$.*

<u>Demostración.</u>

- 1) $\implies$ 2) Fijamos $x_0 \in X$. Veamos que f es continua en x_0. Tomamos $V' \in N'_{f(x_0)}$. Por definición de entorno, $\exists U' \in T'$ tal que $f(x_0) \in U' \subset V'$. Como f es continua por hipótesis y $U' \in T'$ (es abierto) $\implies f^{-1}(U') \in T$.

$$\left.\begin{array}{r} x_0 \in f^{-1}(U') \iff f(x_0) \in U' \\ f^{-1}(U') \in T \end{array}\right\} \implies V = f^{-1}(U') \in N_{x_0}$$

  $f(V) = f(f^{-1}(U')) \subset U' \subset V'$. Así que f es continua en x_0 $\forall x_0 \in X$, ya que fijados x_0 y un entorno de $f(x_0)$, V', hemos encontrado un entorno de x_0, V tal que $f(V) \subset V'$.

- 2) $\implies$ 1) Sea $U' \in T'$. Consideramos el conjunto $f^{-1}(U')$. Queremos ver que $f^{-1}(U') \in T$. Para ello, probamos que todo punto $x_0 \in f^{-1}(U')$ es un punto interior.

$$\left.\begin{array}{r} U' \in T' \\ f(x_0) \in U' \end{array}\right\} \implies U' \in N'_{f(x_0)}$$

  Por hipótesis, como f es continua en x_0, existe $V \in N_{x_0}$ tal que $f(V) \subset U' \implies f^{-1}(f(V)) \subset f^{-1}(U') \implies V \subset f^{-1}(f(V)) \subset f^{-1}(U') \implies x_0 \in \text{int}(f^{-1}(U'))$. $\square$

Veamos ahora varios ejemplos de funciones continuas:

Ejemplos.

1. $\text{Id}_X : (X, T) \to (X, T)$ es continua: sea $V \in T$

$$(\text{Id}_X)^{-1}(V) = \{x \in X : \text{Id}_X(x) \in V\} = \{x \in X : x \in V\} = V \in T$$

2. $\text{Id}_X : (X, T_1) \to (X, T_2)$ es continua $\iff \forall V \in T_2, (\text{Id}_X)^{-1}(V) \in T_1 \iff \forall V \in T_2, V \in T_1 \iff T_2 \subset T_1 \iff T_2$ es más fina que T_1.

3. Sean $f_1 : (X_1, T_1) \to (X_2, T_2)$, $\quad f_2 : (X_2, T_2) \to (X_3, T_3)$ funciones continuas. Entonces, $f_2 \circ f_1 : (X_1, T_1) \to (X_3, T_3)$ es continua: sea $V \in T_3$. Entonces
$$(f_2 \circ f_1)^{-1}(V) = f_1^{-1}(\underbrace{f_2^{-1}(V)}_{\in T_2}) \in T_1$$
4. Ejercicio: si $f_1 : (X_1, T_1) \to (X_2, T_2)$ es continua en $x_1 \in X_1$, y $f_2 : (X_2, T_2) \to (X_3, T_3)$ es continua en $f_1(x_1) \implies f_2 \circ f_1 : (X_1, T_1) \to (X_3, T_3)$ es continua en x_1.

Proposición 1.2. *Sea $f : X \to Y$ una aplicación entre dos espacios topológicos. Sea $x_0 \in X$, y sean $\mathcal{B}_{x_0}, \mathcal{B}'_{f(x_0)}$ bases de entornos de x_0 en (X, T) y de $f(x_0)$ en (Y, T'), respectivamente. Son equivalentes:*

1. *f es continua en x_0*
2. *$\forall B' \in \mathcal{B}'_{f(x_0)}, \exists B \in \mathcal{B}_{x_0}$ tal que $f(B) \subset B'$.*

Demostración.

- 1) $\implies$ 2) Tenemos que $\mathcal{B}'_{f(x_0)} \subset N'_{f(x_0)}$ y $\mathcal{B}_{x_0} \subset N_{x_0}$. Sea $B' \in \mathcal{B}'_{f(x_0)} \subset N'_{f(x_0)}$. Por 1), existe $V \in N_{x_0}$ tal que $f(V) \subset B'$, y como $\mathcal{B}_{x_0}$ es base de entornos de x_0, entonces existe $B \in \mathcal{B}_{x_0}$ tal que $B \subset V \implies f(B) \subset f(V) \subset B'$.
- 2) $\implies$ 1) Sea $V' \in N'_{f(x_0)}$. Como $\mathcal{B}_{f(x_0)}$ es base de entornos de $f(x_0)$, existe $B' \in \mathcal{B}'_{f(x_0)}$ al que $B' \subset V'$. Por 2), existe $B \in \mathcal{B}_{x_0}$ tal que $f(B) \subset B' \subset V'$.

  Como $\mathcal{B}_{x_0} \subset N_{x_0}$, podemos tomar $V = B \in N_{x_0}$. Por tanto, $f(V) = f(B) \subset B' \subset V'$. $\square$

Ejemplos. Sean $(X, \mathrm{d}), (Y, \mathrm{d}')$ espacios métricos, $f : X \to Y, x_0 \in X$. Tomamos las siguientes bases de entornos:
$$\mathcal{B}_{x_0} = \{B(x_0, r) : r > 0\}$$
$$\mathcal{B}'_{f(x_0)} = \{B'(f(x_0), r) : r > 0\}$$
$f : (X, T_{\mathrm{d}}) \to (Y, T_{\mathrm{d}'})$ es continua en $x_0 \in X$ si y solo si $\forall B' \in \mathcal{B}'_{f(x_0)}, \exists B \in \mathcal{B}_{x_0}$ tal que $f(B) \subset B'$.

Tenemos entonces que dar un elementos de $\mathcal{B}'_{f(x_0)}$ o de $\mathcal{B}_{x_0}$ es equivalente a dar el radio de la bola. Entonces
$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 \text{ tal que } f(B(x_0, \delta)) \subset B'(f(x_0), \varepsilon) \iff$$
$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 \text{ tal que } d(x_0, x') < \delta \implies d'(f(x_0), f(x')) < \varepsilon$$

Observación. Todas las aplicaciones $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continuas en x_0 en el sentido de Cálculo I ($\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$ tal que $|x - x_0| < \delta \implies |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$) son continuas como aplicaciones de $(\mathbb{R}, T_u)$ en $(\mathbb{R}, T_u)$.

Proposición 1.3. *Sean $(X, T), (Y, T')$ dos espacios topológicos y $f : X \to Y$ una aplicación. Son equivalentes:*

1. *f es continua ($f^{-1}(U') \in T \ \forall U' \in T'$)*
2. *$f^{-1}(C') \in C_T \ \forall C' \in C_{T'}$*
3. *$f(\bar{A}) \subset \overline{f(A)} \ \forall A \subset X$*

Demostración.

1) $\implies$ 2). Sea $C' \in C_{T'}$. Queremos ver que $f^{-1}(C') \in C_T$, que es equivalente a que $X \backslash f^{-1}(C') \in T$. Pero
$$X \backslash f^{-1}(C') = f^{-1}(\underbrace{Y \backslash C'}_{\in T'}) \in T$$

2) $\Longrightarrow$ 1). Parecida a la anterior.

1) $\Longrightarrow$ 3). Suponemos que f es continua. Veamos que $f(\bar{A}) \subset \overline{f(A)}$. Sea $y \in f(\bar{A}) \Longrightarrow \exists x \in \bar{A}$ tal que $f(x) = y$. Sabemos que f es continua en x. Elegimos $V' \in N'_y$. Entonces existe $V \in N_x$ tal que $f(V) \subset V'$.

$$\left.\begin{array}{l} V \in N_x \\ x \in \bar{A} \end{array}\right\} \Longrightarrow \emptyset \neq V \cap A \Longrightarrow$$

$\Longrightarrow \emptyset \neq f(V \cap A) \subset f(V) \cap f(A) \subset V' \cap f(A) \Longrightarrow \emptyset \neq V' \cap f(A)$.

Por tanto, $y \in \overline{f(A)}$, y entonces $f(\bar{A}) \subset \overline{f(A)}$.

3) $\Longrightarrow$ 1). Sea $U' \in T'$. Queremos ver que $f^{-1}(U') \in T$, que es equivalente a que $X \backslash f^{-1}(U') \in C_T$. Para ello vamos a comprobar que $\overline{X \backslash f^{-1}(U')} \subset X \backslash f^{-1}(U')$.

Si $A = X \backslash f^{-1}(U')$. Como suponemos que (3) se verifica, sabemos que $f(\bar{A}) \subset \overline{f(A)}$. Por tanto,

$$f(\overline{X \backslash f^{-1}(U')}) \subset \overline{f(X \backslash f^{-1}(U'))} \subset \overline{Y \backslash U'} = Y \backslash U'$$

De aquí, obtenemos $\overline{X \backslash f^{-1}(U')} \subset f^{-1}(Y \backslash U') = X \backslash f^{-1}(U')$, tal y como queríamos ver. □

Ejemplos.

1. $f : (X, T) \to (Y, T')$
   - Si T es la topología discreta, entonces f es continua: si $U' \in T' \Longrightarrow f^{-1}(U') \subset X \overset{T \text{ discreta}}{\Longrightarrow} f^{-1}(U') \in T$.
   - Si T' es la topología trivial, entonces f es continua: $T' = \{\emptyset, Y\}$. Entonces $f^{-1}(\emptyset) = \emptyset \in T$, y $f^{-1}(Y) = X \in T$.
2. $f : (X, T) \to (Y, T')$. Supongamos que f es constante (existe $y_0 \in Y$ tal que $f(x) = y_0 \ \forall x \in X$). Entonces f es continua: si $U \in T'$, entonces
$$f^{-1}(U') = \{x \in X : f(x) \in U'\} = \left\{\begin{array}{cl} \emptyset & \text{si } y_0 \notin U' \\ X & \text{si } y_0 \in U' \end{array}\right\} \Longrightarrow f \text{ continua}$$
3. Sea (X, T) un espacio topológico, $A \subset X, A \neq \emptyset$. Sea $T_A = \{U \cap A : U \in T\}$. Entonces, si $i_A : A \to X$ denota la aplicación inclusión, tenemos que $i_A : (A, T_A) \to (X, T)$ es continua:
$$U \in T \Longrightarrow i_A^{-1}(U) = \{a \in A : i_A(a) \in U\} = \{a \in A : a \in U\} = U \cap A \in T_A$$
4. Sea $f : (X, T) \to (Y, T')$ continua, $A \subset X, A \neq \emptyset$. Entonces, la restricción de f al conjunto A es la aplicación $f_{|A} : A \to Y$ definida por $f_{|A}(a) = f(a)$. Veamos que $f_{|A}$ es continua. Para demostrarlo, observamos que $f_{|A} = f \circ i_A$. En efecto,
$$a \in A \Longrightarrow f_{|A}(a) = f(a) = f(i_A(a)) = (f \circ i_A)(a).$$
Si $f : X \to Y$ es continua, como sabemos que $i_A : A \to X$ es continua, entonces la composición $f \circ i_A : A \to Y$ es continua $\Longrightarrow f_{|A} = f \circ i_A$ es continua.
5. Sea $f : (X, T) \to (Y, T')$ una aplicación. Supongamos que $X = \bigcup\limits_{\alpha \in I} U_\alpha, \ U_\alpha \in T \ \forall \alpha \in I$. Entonces,
$$f_{|U_\alpha} \text{ es continua } \forall \alpha \in I \iff f \text{ es continua}$$
$\Longleftarrow$) ejemplo anterior.
$\Longrightarrow$) Sea $V \in T'$. Por hipótesis, $f_{|U_\alpha}^{-1}(V) \in T_{U_\alpha} \ \forall \alpha \in I$. Además,
$$f_{|U_\alpha}^{-1}(V) = \{x \in U_\alpha : f(x) \in V\} = \{x \in U_\alpha : x \in f^{-1}(V)\} = U_\alpha \cap f^{-1}(V)$$
Entonces $U_\alpha \cap f^{-1}(V) \in T_{|U_\alpha} \subset T \ \forall \alpha \in I$ (si A es abierto, entonces $T_A \subset T$), de donde $U_\alpha \cap f^{-1}(V) = U_\alpha \cap W_\alpha$, donde $W_\alpha \in T$. De aquí, obtenemos que $U_\alpha \cap f^{-1}(V) \in T \Longrightarrow$
$f^{-1}(V) = f^{-1}(V) \cap X = f^{-1}(V) \cap \left(\bigcup\limits_{\alpha \in I} U_\alpha\right) = \bigcup\limits_{\alpha \in I} \left(f^{-1}(V) \cap U_\alpha\right) \in T.$

6. Sea $f:(X,T)\to(Y,T')$ una aplicación. Supongamos que $X=C_1\cup\dots\cup C_k,\ k\in\mathbb{N},\ C_i\in C_T\ \forall i\in\{1,\dots,k\}$. Entonces

$$f_{|C_i} \text{ es continua } \iff f \text{ es continua}$$

$\Longleftarrow$) cierta siempre.

$\Longrightarrow$)f continua $\iff f^{-1}(C')\in C_T\ \forall C'\in C_{T'}$. Sea $C'\in C_{T'}$. Entonces

$$f^{-1}(C')=f^{-1}(C')\cap X=f^{-1}(C')\cap\left(\bigcup_{i=1}^k C_i\right)=\bigcup_{i=1}^k\left(f^{-1}(C')\cap C_i\right)=\bigcup_{i=1}^k\overbrace{f^{-1}_{|C_i}(C')}^{\in C_T}$$

Este último conjunto es cerrado en (C_i,T_{C_i}), y entonces $\bigcup_{i=1}^k f^{-1}_{|C_i}(C')=F_i\cap C_i\in C_T$, ya que $F_i\in C_T$ (propiedad siguiente). Acabamos de probar también que si A es cerrado, entonces $C_{T_A}\subset C_T$.

Observación. En el ejemplo 5, no podemos cambiar $U_\alpha\in T$ por la hipótesis $U_\alpha\in C_T$. Si eso fuera cierto, y $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$. Tenemos que $\mathbb{R}=\bigcup_{x\in\mathbb{R}}\{x\},\ \{x\}\in C_{T_u}\implies f_{|\{x\}}:(\{x\},(T_u)_{\{x\}})\to(\mathbb{R},T_u)$ es continua por ser constante, por lo que f siempre sería constante, lo que es claramente falso.

Propiedad. Si $A\subset X$, entonces $C_{T_A}=\{F\cap A: F\in C_T\}$

Demostración. Sea $G\in C_{T_A}\implies A\backslash G\in T_A\implies A\backslash G=W\cup A$, donde $W\in T$. Entonces $(X\backslash W)\cap A\underbrace{=}_{\text{ejercicio}}G\implies G=\{F\cap A: F\in C_T\}\implies C_{T_A}\subset\{F\cap A:F\in C_T\}$.

Sea ahora $G\in\{F\cap A: F\in C_T\}\implies\exists F\in C_T: G=F\cap A\implies A\backslash(F\cap A)\overbrace{=}^{\text{ejercicio}}(X\backslash F)\cap A\in T_A\implies G\in C_{T_A}$.

Definición 1.3. Una aplicación $f:(X,T)\to(Y,T')$ entre dos espacios topológicos es:

1. abierta si $f(U)\in T'\ \forall U\in T$
2. cerrada si $f(C)\in C_{T'}\ \forall C\in C_T$

Definición 1.4. Una aplicación $f:(X,T)\to(Y,T')$ entre dos espacios topológicos es un homeomorfismo si es biyectiva, continua y f^{-1} (la aplicación inversa) es continua.

Ejemplos. Sea X un conjunto, T_1 y T_2 topologías en X, con $T_1\subset T_2,\ T_1\neq T_2$. Entonces:

- $\mathrm{Id}_X:(X,T_2)\to(X,T_1)$ es biyectiva y continua ($T_1\subset T_2$).
- $\mathrm{Id}_X^{-1}:(X,T_1)\to(X,T_2)$ no es continua ($T_2\not\subset T_1$).

Definición 1.5. Un invariante topológico es una propiedad que se preserva por homeomorfismos. Dos espacios topológicos tales que exista un homeomorfismo entre ellos tienen los mismo invariantes topológicos.

Observación. Si f es biyectiva y continua, entonces f^{-1} es continua $\iff (f^{-1})^{-1}(U)\in T'\ \forall U\in T\iff f(U)\in T'\ \forall U\in T\iff f$ es abierta. Por tanto, f es homeomorfismo si f es biyectiva, continua y abierta.

Definición 1.6. Diremos que (X,T) es homeomorfo a (Y,T') si existe un homeomorfismo $(X,T)\to(Y,T')$. Lo indicaremos por $(X,T)\approx(Y,T')$.

Proposición 1.4. *"Ser homeomorfo a" es una relación de equivalencia en el conjunto de los espacios topológicos:*

- *Reflexiva:* $(X,T) \approx (X,T)$*. La aplicación* $\mathrm{Id}_X : (X,T) \to (X,T)$ *es homeomorfismo*
- *Simétrica:* $(X,T) \approx (Y,T') \implies (Y,T') \approx (X,T)$*. Si* $\exists f : (X,T) \to (Y,T')$ *homeomorfismo, entonces* $f^{-1} : (Y,T') \to (X,T)$ *es homeomorfismo*
- *Transitiva:* $(X,T) \approx (Y,T'),\ (Y,T') \approx (X,T'') \implies (X,T) \approx (Z,T'')$*. Si* $\exists f : (X,T) \to (Y,T'), g : (Y,T') \to (Z,T'')$ *homeomorfismos, entonces* $g \circ f : (X,T) \to (Z,T'')$ *es un homeomorfismo.*

Definición 1.7. Dos conjuntos tienen el mismo cardinal si existe una aplicación biyectiva entre ellos.

Ejemplos.

1. "Tener el mismo cardinal" es un invariante topológico.
2. La propiedad Hausdorff es un invariante topológico: si (X,T) es T_2 y $(X,T) \approx (Y,T')$, entonces (Y,T') es T_2.

<u>Ejercicio</u>: Si $f : (X,T) \to (Y,T')$ es homeomorfismo, entonces f es cerrada.

Como consecuencia, las propiedades AN-I y AN-II son invariantes topológicas. Recordemos que un espacio topológico es AN-I si todo punto admite una base de entornos numerable. Sea (X,T) AN-I, y supongamos que $(X,T) \approx (Y,T')$. Sea $y \in Y$, entonces $\exists x \in X : y = f(x)$. Como (X,T) es AN-I, existe una base numerable de entornos $\mathcal{B}_x$ de x, por lo que $f(\mathcal{B}_x)$ es base de entornos de y, numerable. Por tanto, (Y,T') es AN-I.

Cabe ahora preguntarse lo siguiente: dada $f : X \to Y$ una aplicación, y (X,T) un espacio topológico, ¿cuál es la topología más fina en Y que hace continua a f? Más aún: dada una familia $f_i : X \to Y,\ i \in I$ de aplicaciones y (X_i,T_i) espacio topológico para todo $i \in I$, ¿cuál es la topología más fina en Y que hace continua a todas las aplicaciones f_i?

Proposición 1.5. *Sea* $f_i : X \to Y$*,* $i \in I$*, una familia de aplicaciones. Supongamos que* (X_i,T_i) *es un espacio topológico* $\forall i \in I$*. Entonces,*

$$T' = \{V \subset Y : f_i^{-1}(V) \in T_i,\ \forall i \in I\}$$

es una topología en Y*. Además, se verifican los siguientes enunciados:*

1. $f_i : (X_i,T_i) \to (Y,T')$ *es continua* $\forall i \in I$
2. *Si* T'' *es otra topología en* Y *tal que* $f_i : (X_i,T_i) \to (Y,T'')$ *es continua* $\forall i \in I$*, entonces* $T'' \subset T'$*. Es decir,* T' *es la topología más fina que hace continuas a las aplicaciones* f_i*.*

<u>Demostración.</u> Comprobemos primero que T' es una topología:

1. $f_i^{-1}(\emptyset) = \emptyset \in T_i\ \forall i \in I, \quad f_i^{-1}(Y) = X_i \in T_i, \forall i \in I \implies \emptyset, Y \in T'$
2. Sea $\{V_j\}_{j\in J} \subset T' \implies f_i^{-1}(V_j) \in T_i\ \forall i \in I,\ \forall j \in J$. Consideremos ahora un $i \in I$, fijo. Entonces,
$$f_i^{-1}\left(\bigcup_{j\in J} V_j\right) = \bigcup_{j\in J} f_i^{-1}(V_j) \in T_i \implies \bigcup_{j\in J} V_j \in T'$$
3. Sean $V_1, \ldots, V_k \in T' \implies f_i^{-1}(V_j) \in T_i\ \forall i \in I,\ \forall j \in \{1,\ldots,k\}$. Entonces,
$$f_i^{-1}(V_1 \cap \cdots \cap V_k) = f_i^{-1}(V_1) \cap \cdots \cap f_i^{-1}(V_k) \in T_i\ \forall i \in I \implies V_1 \cap \cdots \cap V_k \in T'$$

Demostremos ahora las otras dos afirmaciones:

1. Sea $V \in T'$, entonces es claro que $f_i^{-1}(V) \in T_i$, por definición.
2. Sea T'' otra topología en Y tal que $f_i : (X_i, T_i) \to (Y, T'')$ es continua $\forall i \in I$. Sea $V \in T'' \implies f_i^{-1}(V) \in T_i \ \forall i \in I \implies V \in T' \implies T'' \subset T'$, tal y como queríamos. ∎

Definición 1.8. En la anterior proposición, se dice que T' es la topología final asociada a la familia de aplicaciones $\{f_i\}_{i \in I}$

Definición 1.9. Si (X, T) es un espacio topológico, y R es una relación de equivalencia en X, entonces la topología cociente T/R es la topología final para la aplicación $\pi : (X, T) \to X/R$

$$T/R = \{V \subset X/R : \pi^{-1}(V) \in T\}$$

Proposición 1.6 (Propiedad universal de la topología final)**.** *Sea $f_i : X_i \to X$ una familia de aplicaciones ($i \in I$). Supongamos que T_i es una topología en X_i, $\forall i \in I$, y sea T es la topología final inducida por $f_i : (X_i, T_i) \to X$. Sea (Y, T') otro espacio topológico, y $g : X \to Y$ una aplicación. Entonces*

$$g : (X, T) \to (Y, T') \text{ es continua} \iff g \circ f_i : (X_i, T_i) \to (Y, T') \text{ es continua } \ \forall i \in I$$

Demostración.

- $\implies$). g continua $\implies g \circ f_i : (X_i, T_i) \to (Y, T') \ \forall i \in I$ es continua por ser composición de funciones continuas.
- $\impliedby$). Suponemos que $g \circ f_i$ es continua $\forall i \in I$. Sea $V \in T'$. Queremos ver que $g^{-1}(V) \in T \iff f_i^{-1}(g^{-1}(V)) \in T_i \ \forall i \in I \iff (g \circ f_i)^{-1}(V) \in T_i \ \forall i \in I$, que es cierta por hipótesis.

Volviendo entonces a las preguntas anteriores a la Proposición 1.5, supongamos que $I = \{1\}$. Llamemos $f = f_1$. Entonces, tenemos la aplicación $f : X \to (X_1, T_1)$. Para que f sea continua, debe verificarse $\{f^{-1}(V) : V \in T_1\} \subset T$. Como estamos buscando la topología con la mayor cantidad posible de abiertos que haga continua a la aplicación f, tomamos $T = \{f^{-1}(V) : V \in T_1\}$. La llamaremos la topología inicial para $f : X \to (X_1, T_1)$.

Consideremos ahora el problema general (I arbitrario). Cualquier topología T en X que haga continua a las aplicaciones f_i, tiene que verificar que $V_i \in T_i \implies f_i^{-1}(V_i) \in T$. Es fácil de comprobar que $S := \{f_i^{-1}(V_i) : V_i \in T_i \text{ para algún } i \in I\} \subset T$, no es una topología. Sea $T(S) = \bigcap_{S \subset T} T$ la topología más gruesa en X que contiene a S. La llamaremos topología inicial para la familia de aplicaciones $f_i : X \to (X_i, T_i)$.

Recordemos que si $A \subset \mathcal{P}(X)$ y $\bigcup_{U \in A} U = X$, entonces

$$\mathcal{B}(A) = \{U_1 \cap \cdots \cap U_k : k \in \mathbb{N},\ U_i \in A \ \forall i \in \{1, 2, \ldots, k\}\}$$

es base de $T(A)$.

Como, en nuestro caso, $X = f_i^{-1}(X_i) \implies X \in S \implies \bigcup_{U \in S} U = X$. Por tanto,

$$\mathcal{B} = \mathcal{B}(S) = \{f_{i_1}^{-1}(V_{i_1}) \cap \cdots \cap f_{i_k}^{-1}(V_{i_k}) : k \in \mathbb{N},\ i_1, \ldots, i_k \in I,\ V_{i_j} \in T_{i_j} \ \forall j \in \{1, \ldots, k\}\}$$

es una base de $T(S)$.

Ejemplo (Espacio producto). Sea $k \geq 2$, y sean $(X_1, T_1), \ldots, (X_k, T_k)$ espacios topológicos. Entonces, se define el producto cartesiano $X_1 \times X_2 \times \cdots \times X_k$ como el conjunto

$$X_1 \times \cdots \times X_k = \{(x_1, \ldots, x_k) : x_i \in X_i \ \forall i \in \{1, \ldots, k\}\}$$

Decimos que la aplicación $p_i : X_1 \times \cdots \times X_k \to X_i$ es la proyección i-ésima o proyección sobre el i-ésimo factor, y viene dada por $(x_1, \ldots, x_k) \mapsto x_i$.

Definición 1.10. La topología inicial para las aplicaciones $p_i : X_1 \times \cdots \times X_k \to (X_i, T_i)$, donde $i \in \{1, \ldots, k\}$, es la topología producto en $X_1 \times \cdots X_k$, y la denotaremos por $T_1 \times \cdots \times T_k$.

Observación. Si $A_i \subset X_i$, entonces

$$p_i^{-1}(A_i) = \{(x_1, \ldots, x_k) : p_i((x_1, \ldots, x_k)) \in A_i\} = X_1 \times \cdots \times A_i \times \cdots \times X_k$$

Propiedad. $A_1 \times \cdots \times A_k = p_1^{-1}(A_1) \cap \cdots \cap p_k^{-1}(A_k)$

$$\begin{aligned}(x_1, \ldots, x_k) \in A_1 \times \cdots \times A_k &\iff x_i \in A_i \ \forall i \in \{1, \ldots, k\} \\ &\iff (x_1, \ldots, x_k) \in p_i^{-1}(A_i) \ \forall i \in \{1, \ldots, k\} \\ &\iff (x_1, \ldots, x_k) \in p_1^{-1}(A_1) \cap \cdots \cap p_k^{-1}(A_k)\end{aligned}$$

Propiedad. Una base de la topología producto $(T_1 \times \cdots \times T_k)$ es:

$\mathcal{B} = \{p_1^{-1}(U_1) \cap \cdots \cap p_k^{-1}(U_k) : U_i \in T_i \ \forall i \in \{1, \ldots, k\}\} = \{U_1 \times \cdots \times U_k : U_i \in T_i \ \forall i \in \{1, \ldots, k\}\}$

Como resumen a todo lo anterior, tenemos la siguiente proposición:

Proposición 1.7. *Dados $(X_1, T_1), \ldots, (X_k, T_k)$, espacios topológicos, la topología producto $T_1 \times \cdots \times T_k$ es la topología inicial para la familia de aplicaciones $p_i : X_1 \times \cdots \times X_k \to X_i$, dadas por $p_i(x_1, \ldots, x_k) = x_i$. Además, se verifican las siguientes afirmaciones:*

1. *Las aplicaciones $p_i : (X_1 \times \cdots \times X_k, T_1 \times \cdots \times T_k) \to (X_i, T_i)$ son continuas para todo $i \in \{1, \ldots, k\}$*
2. *Si T' es otra topología en $X_1 \times \cdots \times X_k$ que hace continuas a las aplicaciones $p_i : (X_1 \times \cdots \times X_k, T_1 \times \cdots \times T_k) \to (X_i, T_i)$, entonces $T_1 \times \cdots \times T_k \subset T'$*
3. *$\mathcal{B} = \{U_1 \times \cdots \times U_k : U_i \in T_i \ \forall i \in \{1, \ldots, k\}\}$ es una base de $T_1 \times \cdots \times T_k$*
4. *$g : (Z, T') \to (X_1 \times \cdots X_k, T_1 \times \cdots \times T_k)$ es continua $\iff$ $p_i \circ g : (Z, T') \to (X_i, T_i)$ es continua $\forall i \in \{1, \ldots, k\}$*

Proposición 1.8 (Propiedad universal de la topología inicial)**.** *Sean $\{(X_i, T_i)\}_{i \in I}$ una familia de espacios topológicos, X un conjunto, y $f_i : X \to X_i$, con $i \in I$ una familia de aplicaciones. Supongamos que T es la topología inicial para la familia $f_i : X \to (X_i, T_i)$. Si (Z, T') es otro espacio topológico, y $g : Z \to X$ es una aplicación, entonces*

$$g : (Z, T') \to (X, T) \text{ es continua} \iff f_i \circ g : (Z, T') \to (X_i, T_i) \text{ es continua } \forall i \in I$$

Demostración.

- $\Longrightarrow$). Si g es continua, como $f_i : (X, T) \to (X_i, T_i)$ es continua, entonces $f_i \circ g : (Z, T') \to (X_i, T_i)$ es continua por ser la composición de dos funciones continuas
- $\Longleftarrow$). Supongamos ahora que $f_i \circ g$ es continua $\forall i \in I$. Tomamos $U \in T$, y veamos que $g^{-1}(U) \in T'$. Sea $\{B_j\}_{j \in J} \subset \mathcal{B} : U = \bigcup_{j \in J} B_j$. Entonces, $g^{-1}(U) = \bigcup_{j \in J} g^{-1}(B_j)$. Si probamos que $g^{-1}(B_j) \in T'$, tendríamos que $g^{-1}(U) \in T'$, por ser la unión de abiertos de T'.

  Sea pues $B \in \mathcal{B}$. Comprobemos que $g^{-1}(B) \in T'$. Tenemos que, por ser $B \in \mathcal{B}$, existen $k \in \mathbb{N}$ y $i_1, \ldots, i_k \in I$ tales que $U_{i_j} \in T_{i_j} \ \forall j \in \{1, \ldots, k\}$, tales que $B = f_{i_1}^{-1}(U_{i_1}) \cap \cdots \cap f_{i_k}^{-1}(U_{i_k})$. Entonces, $g^{-1}(B) = g^{-1}(f_{i_1}^{-1}(U_{i_1}) \cap \cdots \cap f_{i_k}^{-1}(U_{i_k})) = g^{-1}(f_{i_1}^{-1}(U_{i_1})) \cap \cdots \cap g^{-1}(f_{i_k}^{-1}(U_{i_k})) = (f_{i_1} \circ g)^{-1}(U_{i_1}) \cap \cdots \cap (f_{i_k} \circ g)^{-1}(U_{i_k}) \in T'$, tal y como queríamos.

Proposición 1.9. *Sean $(X_1, \mathrm{d}_1), \ldots, (X_k, \mathrm{d}_k)$ espacios métricos. Se definen en $X \times X$, donde $X = X_1 \times \cdots \times X_k$, las aplicaciones $\mathrm{d}_\infty, \mathrm{d}_1, \mathrm{d}_2 : X \times X \to \mathbb{R}$, dadas, para $x = (x_1, \ldots, x_k)$ e $y = (y_1, \ldots, y_k)$ por:*

$$\mathrm{d}_\infty(x, y) = \max_{1 \le i \le k} \{\mathrm{d}_i(x_i, y_i)\}, \qquad \mathrm{d}_1(x, y) = \sum_{i=1}^{k} \mathrm{d}_i(x_i, y_i), \qquad \mathrm{d}_2(x, y) = \left(\sum_{i=1}^{k} \mathrm{d}_i(x_i, y_i)^2\right)^{1/2}$$

Entonces, $\mathrm{d}_\infty, \mathrm{d}_1, \mathrm{d}_2$ son distancias en X, y son equivalentes. Además, $T_{\mathrm{d}_\infty} = T_{\mathrm{d}_1} \times \cdots \times T_{\mathrm{d}_k}$.

Demostración. Para la demostración de que son distancias, y además son equivalentes, ver tema de Análisis. Veamos aquí que $T_{d_\infty} = T_{d_1} \times \cdots \times T_{d_k}$.

Una base de T_{d_∞} está formada por todas las bolas abiertas en X con la distancia d_∞:

$$\mathcal{B}_\infty = \{B_\infty(x,r) : x \in X, r > 0\}$$

Entonces, tenemos que

$$\begin{aligned} y \in B_\infty(x,r) \iff d_\infty(x,y) < r &\iff \text{máx}\{d_i(x_i,y_i)\} < r \\ &\iff d_i(x_i,y_i) < r \ \forall i \in \{1,\dots,k\} \\ &\iff y_i \in B_i(x_i,r) \ \forall i \in \{1,\dots,k\} \\ &\iff y \in B_1(x_1,r) \times \cdots \times B_k(x_k,r) \\ &\implies B_\infty(x,r) = B_1(x_1,r) \times \cdots \times B_k(x_k,r) \end{aligned}$$

Ahora, sabemos que una base $\mathcal{B}$ de $T_{d_1} \times \cdots \times T_{d_k}$ está formada por productos de abiertos:

$$\mathcal{B} = \{U_1 \times \cdots \times U_k : U_i \in T_{d_i} \ \forall i \in \{1,\dots,k\}\}$$

Para probar que las topologías son iguales, hay que comprobar:

1. $\forall B \in \mathcal{B}, \ \forall x \in B, \ \exists B' \in \mathcal{B}_\infty : x \in B' \subset B$
2. $\forall B' \in \mathcal{B}_\infty, \ \forall x \in B', \ \exists B \in \mathcal{B} : x \in B \subset B'$

La primera es clara, así que probemos la segunda: sea $B' \in \mathcal{B}_\infty$. Entonces $B' = B_\infty(y,r)$, con $y \in X_1 \times \cdots \times X_k$ y $r > 0$. Sea $x \in B' \iff x \in B_\infty(y,r) = B_1(y_1,r) \times \cdots \times B_k(y_k,r) \implies x_i \in B_i(y_i,r) \iff d(x_i,y_i) < r$. Como

$$x_i \in B_i(y_i,r) \in T_{d_i} \implies \exists s_i > 0 : B_i(x_i,s_i) \subset B_i(y_i,r) \ \forall i \in \{1,\dots,k\},$$

si tomamos $U_i = B_i(x_i,s_i) \in T_{d_i}, \ \forall i \in \{1,\dots,k\}$, entonces $x \in U_1 \times \cdots \times U_k \in \mathcal{B}$, y además, $U_1 \times \cdots \times U_k \subset B'$. Además, como d_1, d_2, d_∞ son métricamente equivalentes, hemos probado que $T_{d_1} = T_{d_2} = T_{d_\infty} = T_{d_1} \times \cdots \times T_{d_k}$. ■

Ejemplo. Consideramos $(\mathbb{R}, d)$, donde d es la distancia usual, y $\mathbb{R}^2$, con $T_u = T_{d_2}$. Tenemos que, dados $x, y \in \mathbb{R}^2$:

$$d_2(x,y) = \left(\sum_{i=1}^{2} |x_i - y_i|^2\right)^{1/2} = \left(\sum_{i=1}^{2} d(x_i,y_i)^2\right)^{1/2}$$

así que d_2 es la distancia d_2 tal y como se definió para producto de espacios métricos. Acabamos de ver que $T_{d_2} = T_d \times T_d$. Entonces, T_{d_2} es una topología producto, y tiene todas las propiedades de una topología producto. En particular, una aplicación $f : (X,T) \to (\mathbb{R}^2, T_u)$ es continua si, y solo si, $p_i \circ f : (X,T) \to (\mathbb{R}, T_d)$ es continua para $i = 1, 2$.

Por ejemplo, $f : (\mathbb{R}, T_u) \to (\mathbb{R}^2, T_u)$, dada por $f(x) = (\cos(x), \sin(x))$ es continua, porque $(p_1 \circ f)(x) = \cos(x)$ y $(p_2 \circ f)(x) = \sin(x)$, que son aplicaciones continuas de $(\mathbb{R}, T_u)$ en $(\mathbb{R}, T_u)$.

Proposición 1.10. *Las aplicaciones $p_i : (X_1 \times \cdots \times X_k, T_1 \times \cdots \times T_k) \to (X_i, T_i)$, para $i = 1, \dots, k$, son abiertas.*

Demostración. Sabemos que $\mathcal{B} = \{U_1 \times \cdots \times U_k : U_i \in T_i, i = 1, \dots, k\}$ es base de $T_1 \times \cdots \times T_k$. Tenemos que $p_i(U_1 \times \cdots \times U_k) = U_i \in T_i$. Hemos probado entonces que $p_i(B) \in T_i \ \forall B \in \mathcal{B}$.

Sea ahora $U \in T_1 \times \cdots \times T_k$, entonces $\exists \{B_j\}_{j \in J}$ tales que $U = \bigcup_{j \in J} B_j$. Entonces

$$p_i(U) = p_i\left(\bigcup_{j \in J} B_j\right) = \bigcup_{j \in J} p_i(B_j) \in T_i$$

por ser la unión arbitraria de elementos de T_i. ■

Observación. Las proyecciones en un espacio producto no son cerradas, en general. Para ello, tenemos este ejemplo: consideramos $(\mathbb{R}^2, T_{\mathrm{d}} \times T_{\mathrm{d}})$, con d la distancia usual en $\mathbb{R}$, y el conjunto $C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : xy = 1\}$. Veamos que C es cerrado, pero $p_1(C) = \mathbb{R}\backslash\{0\}$ no es cerrado en $(\mathbb{R}, T_{\mathrm{d}})$.

Veamos que C es cerrado. Solo hace falta ver que la aplicación $h : (\mathbb{R}^2, T_{\mathrm{d}} \times T_{\mathrm{d}}) \to (\mathbb{R}, T_{\mathrm{d}})$ definida por $h(x, y) = xy$ es continua. En este caso, $C = h^{-1}(\{1\})$. Como $\{1\}$ es cerrado en $(\mathbb{R}, T_{\mathrm{d}})$, $h^{-1}(\{1\}) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : h(x, y) = 1\} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : xy = 1\} = C$, es cerrado.

Veamos que $h(x, y) = xy$ es continua. Tenemos que $h(x, y) = xy = p_1(x, y) \cdot p_2(x, y) = (p_1 \cdot p_2)(x, y)$. Que h es continua se sigue del siguiente lema:

Lema 1.1. Sean $f, g : (X, T) \to (\mathbb{R}, T_{\mathrm{d}})$ aplicaciones continuas de un espacio topológico (X, T) en $(\mathbb{R}, T_{\mathrm{d}})$. Definimos $f + g : X \to \mathbb{R}$ y $f \cdot g : X \to \mathbb{R}$ (suma y producto de f y g) por las igualdades:

$$(f + g)(x) = f(x) + g(x), \qquad (f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x) \ \forall x \in X$$

Entonces, $f + g$ y $f \cdot g$ son continuas

Demostración. Se deja la demostración de la continuidad de $f + g$ como ejercicio. Demostremos que $f \cdot g$ es continua. Fijamos $x_0 \in X$. Veamos que $f \cdot g$ es continua en x_0. Sea $x \in X$, entonces

$$|(fg)(x) - (fg)(x_0)| \leq |f(x)||g(x) - g(x_0)| + |g(x_0)||f(x) - f(x_0)|$$

Sea $V \in N_{(fg)(x_0)}$, entonces, $\exists \varepsilon \in (0, 1)$ tal que $((fg)(x_0) - \varepsilon, (fg)(x_0) + \varepsilon) \subset V$. Sea $M = \max\{|f(x_0)|, |g(x_0)|\} + 1 \geq 1 > 0$. Usamos ahora que f y g son continuas en x_0. Tomando

$$\varepsilon' = \frac{\varepsilon}{2(M+1)}, \quad V_1 = (f(x_0) - \varepsilon', f(x_0) + \varepsilon') \in N_{f(x_0)}, \quad V_2 = (g(x_0) - \varepsilon', g(x_0) + \varepsilon') \in N_{g(x_0)}$$

Por la continuidad de f en x_0, existe $U_1 \in N_{x_0}$ tal que $f(U_1) \subset V_1$ ($x \in U_1 \implies f(x) \in V_1 = (f(x_0) - \varepsilon', f(x_0) + \varepsilon') \implies |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon'$). Por la continuidad de g en x_0, existe $U_2 \in N_{x_0}$ tal que $g(U_2) \subset V_2$. Tomamos entonces $U = U_1 \cap U_2 \in N_{x_0}$.

Entonces, dado $x \in U$ tenemos que

$$\begin{aligned}
|(fg)(x) - (fg)(x_0)| &\leq |f(x)||g(x) - g(x_0)| + |g(x_0)||f(x) - f(x_0)| \\
&< |f(x)|\frac{\varepsilon}{2(M+1)} + |g(x_0)|\frac{\varepsilon}{2(M+1)} \\
&< |f(x)|\frac{\varepsilon}{2(M+1)} + M\frac{\varepsilon}{2(M+1)} \\
&< \left(M + \frac{\varepsilon}{2(M+1)}\right)\frac{\varepsilon}{2(M+1)} + M\frac{\varepsilon}{2(M+1)} \\
&\leq \left(M + \frac{1}{2}\right)\frac{\varepsilon}{2(M+1)} + \frac{\varepsilon}{2} \\
&< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon
\end{aligned}$$

por lo que $(fg)(U) \subset ((fg)(x_0) - \varepsilon, (fg)(x_0) + \varepsilon) \subset V$. Por tanto, fg es continua en x_0. ■

Propiedad. Sean $(X_1, T_1), \ldots, (X_k, T_k)$ espacios topológicos. Sea $\mathcal{B}_i$ base de T_i $\forall i \in \{1, \ldots, k\}$. Entonces

$$\mathcal{B}_1 \times \cdots \times \mathcal{B}_k = \{B_1 \times \cdots \times B_k : B_i \in \mathcal{B}_i \ \forall i \in \{1, \ldots, k\}\}$$

es una base de $T_1 \times \cdots \times T_k$.

Demostración. Sea $U \in T_1 \times \cdots \times T_k$, y sea $x \in U$. Para probar que $\mathcal{B}_1 \times \cdots \times \mathcal{B}_k$ es base basta encontrar $B \in \mathcal{B}_1 \times \cdots \times \mathcal{B}_k$ tal que $x \in B \subset U$. Como

$$\{U_1 \times \cdots \times U_k : U_i \in T_i, \ i = 1, \ldots, k\}$$

es base de $T_1\times\cdots\times T_k$, existen $U_1\in T_1,\dots,U_k\in T_k$ tales que $x\in U_1\times\cdots\times U_k\subset U$. Supongamos que $x=(x_1,\dots,x_k)$, donde $x_i\in U_i\ \forall i\in\{1,\dots,k\}$. Como $\mathcal{B}_i$ es base de T_i, existe $B_i\in\mathcal{B}_i$ tal que $x_i\in B_i\subset U_i$. Entonces

$$x=(x_1,\dots,x_k)\in B_1\times\cdots\times B_k\subset U_1\times\cdots\times U_k\subset U$$

lo que demuestra lo afirmado. ■

Propiedad. Sean $(X_i,T_i),\ i=1,\dots,k$ espacios topológicos, y $A_i\subset X_i,\ i=1,\dots,k$. Entonces

$$\overline{A_1\times\cdots\times A_k}=\overline{A_1}\times\cdots\times\overline{A_k}$$

Demostración. Sea $x\in X_1\times\cdots\times X_k$. Sabemos que $\{U_1\times\cdots\times U_k : U_i\in T_i\ \forall i\in\{1,\dots,k\}\}=\mathcal{B}$ es base de $T_1\times\cdots\times T_k$, y que

$$\mathcal{B}(x)=\{U\in\mathcal{B} : x\in U\}$$

es base de entornos de x. Sabemos también que $x\in\overline{A_1\times\cdots\times A_k}$ si, y solo si, $B\cap(A_1\times\cdots\times A_k)\neq\emptyset\ \forall B\in\mathcal{B}(x)$.

$$\begin{aligned}
x=(x_1,\dots,x_k)\in\overline{A_1\times\cdots\times A_k} &\iff (U_1\times\cdots\times U_k)\cap(A_1\times\cdots\times A_k)\neq\emptyset\ \forall U_i\in T_i : x_i\in U_i\\
&\iff (U_1\cap A_1)\times\cdots\times(U_k\cap A_k)\neq\emptyset\ \forall U_i\in T_i : x_i\in U_i\\
&\iff U_i\cap A_i\neq\emptyset\ \forall i\in\{1,\dots,k\},\ \forall U_i\in T_i : x_i\in U_i\\
&\iff x_i\in\overline{A_i}\ \forall i\in\{1,\dots,k\}\\
&\iff x=(x_1,\dots,x_k)\in\overline{A_1}\times\cdots\times\overline{A_k}
\end{aligned}$$

■

2. Espacios cociente

Definición 2.1. Sea $f:(X,T)\to(Y,T')$ una aplicación entre dos espacios topológicos. Diremos que f es una identificación si T' es la topología final para f y f es sobreyectiva.

Ejemplo. Si (X,T) es un espacio topológico, y R es una relación de equivalencia, entonces la aplicación proyección $\pi:(X,T)\to(X/R,T/R)$ es una identificación.

Observación. Si $f:(X,T)\to(Y,T')$ es una aplicación y T' es la topología final para f, entonces

$$V\in T'\iff f^{-1}(V)\in T$$

Definición 2.2 (Conjunto f-saturado)**.** Sea $f:X\to Y$ una aplicación. Diremos que $U\subset X$ es f-saturado si $U=f^{-1}(f(U))$.

Observación. Si U es f-saturado, entonces $U=f^{-1}(f(U))=f^{-1}\left(\bigcup_{x\in U} f(\{x\})\right)=\bigcup_{x\in U} f^{-1}(f(\{x\}))$. De estas igualdades deducimos que si $x\in U$, entonces todos los puntos de X con la misma imagen que x también pertenecen a U. Equivalentemente, $U\subset X$ es saturado si $\forall x\in U,\ \forall x'\in X : f(x)=f(x')\implies x'\in U$. Así pues, si existen $x\in U,\ x'\in X$ tales que $f(x)=f(x')$, entonces, si $x'\notin U$, deducimos que U no es f-saturado.

Definición 2.3. Sea $f:(X,T)\to(Y,T')$ una aplicación. Diremos que f es casi-abierta (casi-cerrada) si $f(A)$ es abierto (cerrado) para todo A abierto (cerrado) que sea f-saturado.

Proposición 2.1. *Sea $f:(X,T)\to(Y,T')$ una aplicación sobreyectiva. Entonces f es una identificación $\iff$ f es continua y casi-abierta (casi-cerrada).*

Demostración.

- $\Longrightarrow$). Supongamos que f es identificación. Entonces f es continua, ya que T' es la topología final. Veamos que f es casi-abierta. Sea $U \in T$ f-saturado (esto es, $U = f^{-1}(f(U))$). Queremos ver que $f(U) \in T'$. Como T' es la topología final para f, $f(U) \in T' \iff f^{-1}(f(U)) \in T$. Como U es f-saturado, $U = f^{-1}(f(U)) \in T$.
- $\Longleftarrow$). Supongamos ahora que f es continua y casi-abierta. Para comprobar que f es identificación, tenemos que ver que f es sobreyectiva (lo es por hipótesis), y que $T' = \{V \subset Y : f^{-1}(V) \in T\}$. Como $\{V \subset Y : f^{-1}(V) \in T\}$ es la topología final para f (la más fina que hace continua a $f : (X,T) \to Y$), y $f : (X,T) \to (Y,T')$ es continua, entonces $T' \subset \{V \subset Y : f^{-1}(V) \in T\}$. Veamos ahora que $\{V \subset Y : f^{-1}(V) \in T\} \subset T'$. Sea $V \subset Y$, con $f^{-1}(V) \in T$. El conjunto $f^{-1}(V)$ es f-saturado (hay que comprobar que $f^{-1}(V) \subset f^{-1}(f(f^{-1}(V)))$). Como f es casi-abierta, $f(f^{-1}(V)) \in T'$. Pero $V = f(f^{-1}(V))$ por ser f sobreyectiva, por lo que $V \in T'$. Así pues, $T' = \{V \subset Y : f^{-1}(V) \in T\}$, y entonces T' es la topología final para f, y concluimos que f es una identificación. ■

Si $f : X \to Y$ es una aplicación, podemos definir en X la relación de equivalencia R_f, dada por
$$xR_fx' \iff f(x) = f(x')$$
Podemos definir entonces $\tilde{f} : X/R_f \to Y$ por $\tilde{f}([x]) = f(x)$ (bien definida porque si $[x] = [x']$, entonces $xR_fx' \implies f(x) = f(x')$. Tenemos entonces que la aplicación $\tilde{f}$ es siempre inyectiva (ya que si $\tilde{f}([x]) = \tilde{f}([x']) \implies f(x) = f(x') \implies xR_fx' \implies [x] = [x']$). Además, f es sobreyectiva si, y solo si, $\tilde{f}$ es sobreyectiva (ya que $f(X) = \tilde{f}(X/R_f)$). En particular, si $f : X \to Y$ es sobreyectiva, $\tilde{f} : X/R_f \to Y$ es biyectiva.

Teorema 2.4. *Sea $f : (X,T) \to (Y,T')$ una aplicación sobreyectiva entre espacios topológicos. Entonces $\tilde{f} : (X/R_f, T/R_f) \to (Y,T')$ es un homeomorfismo si, y solo si, $f : (X,T) \to (Y,T')$ es una identificación.*

Demostración. Recordemos primero que la aplicación $\pi : X \to X/R_f$ es la aplicación dada por $\pi(x) = [x] \equiv \bar{x}$. Además, $\tilde{f}(\bar{x}) = f(x) \implies \tilde{f} \circ \pi = f$.

- $\Longleftarrow$). Suponemos que f es identificación, y veamos que $\tilde{f}$ es homeomorfismo. Tenemos que $\tilde{f}$ es sobreyectiva, porque f lo es, y siempre es inyectiva, por tanto, $\tilde{f}$ es una biyección. Sabemos también que $\tilde{f} : (X/R_f, T/R_f) \to (Y,T')$ es continua si, y solo si, $\tilde{f} \circ \pi : (X,T) \to (Y,T')$ lo es, pero $\tilde{f} \circ \pi = f$, que es continua por ser identificación. Por tanto, queda ver que $\tilde{f}$ es abierta. Sea $V \in T/R_f \implies \pi^{-1}(V) \in T$. Entonces
$$f(\pi^{-1}(V)) = \{f(x) : x \in \pi^{-1}(V)\} = \{\tilde{f}(\pi(x)) : \pi(x) \in V\} = \tilde{f}(V)$$
Si probamos que $\pi^{-1}(V)$ es f-saturado, como f es casi-abierta por ser identificación, tendríamos que $\tilde{f}(V) = f(\pi^{-1}(V)) \in T' \implies f$ es abierta, y por tanto, $\tilde{f}$ sería homeomorfismo.

  Sean entonces $x \in \pi^{-1}(V), x' \in X$ tales que $f(x) = f(x') \implies xR_fx' \implies \pi(x) = \pi(x')$. Como $\pi(x) \in V$, tenemos que $x' \in \pi^{-1}(V)$, y por tanto $\pi^{-1}(V)$ es f-saturado.
- $\Longrightarrow$). Supongamos ahora que $\tilde{f}$ es homeomorfismo, y veamos que f es continua y casi-abierta. Como $\tilde{f} \circ \pi = f$, f es continua por ser composición de aplicaciones continuas (un homeomorfismo es continuo, y la proyección al espacio cociente también lo es). Queremos ver que, si V es f-saturado, entonces $f(V) \in T'$. Como $f(V) = \tilde{f}(\pi(V))$. Si comprobamos que $\pi(V) \in T/R_f$ habremos terminado, ya que $\tilde{f}$ es un homeomorfismo y $\tilde{f}(\pi(V)) \in T'$. Tenemos que
$$\pi(V) \in T/R_f \iff \pi^{-1}(\pi(V)) \in T$$
Como V es f-saturado, veamos que $V = \pi^{-1}(\pi(V))$. Para ello, solo hay que verificar que $\pi^{-1}(\pi(V)) \subset V$. Sea $x \in \pi^{-1}(\pi(V)) \implies \pi(x) \in \pi(V) \implies \exists x' \in V : \pi(x) = \pi(x') \implies$

$xR_fx' \implies f(x) = f(x') \implies x \in V$, donde, en la última implicación, hemos usado que V es f-saturado. ■

Ejemplo. Consideremos el espacio topológico $([0,1], (T_u^1)_{[0,1]})$, y el conjunto

$$S^1 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1\} \subset \mathbb{R}^2$$

Definimos la aplicación $f : ([0,1], (T_u^1)_{[0,1]}) \to (S^1, (T_u^1)_{S^1})$ por

$$f(x) = (\cos(2\pi x), \sin(2\pi x)) \quad \forall x \in [0,1]$$

Pongamos, para simplificar la notación, $T = (T_u^1)_{[0,1]}$ y $T' = (T_u^1)_{S^1}$. Vamos a ver que f es identificación (sobreyectiva, continua y casi-cerrada). Primero, veamos una consecuencia de esto. Si f es identificación, entonces, por el teorema anterior, tendríamos que la aplicación $\tilde{f} : ([0,1]/R_f, T/R_f) \to (S^1, T')$ es homeomorfismo, o, equivalentemente, $[0,1]/R_f \approx S^1$. Veamos quién es R_f.

Si $x, x' \in [0,1] : f(x) = f(x')$, tenemos que

$$\begin{aligned} f(x) = f(x') \implies (\cos(2\pi x), \sin(2\pi x)) = (\cos(2\pi x'), \sin(2\pi x')) &\implies \left\{ \begin{array}{c} \cos(2\pi x) = \cos(2\pi x') \\ \sin(2\pi x) = \sin(2\pi x') \end{array} \right\} \\ &\implies \exists k \in \mathbb{Z} : 2\pi x - 2\pi x' = 2k\pi \\ &\iff \exists k \in \mathbb{Z} : x - x' = k \end{aligned}$$

Como $x, x' \in [0,1]$, las únicas posibilidades son que $x = x'$, o bien $x = 0,\ x' = 1$, o bien $x = 1,\ x' = 0$.

Veamos entonces que f es:

1. Sobreyectiva
2. Continua
3. Casi-cerrada (de hecho es cerrada)

. . . .

1. Si $(x,y) \in S^1 \iff x^2 + y^2 = 1$, entonces $\exists t \in [0, 2\pi) : x = \cos(t),\ y = \sin(t)$. Definimos entonces $z = \dfrac{t}{2\pi} \implies z \in [0,1]$ y $f(z) = (\cos(2\pi z), \sin(2\pi z)) = (x,y)$
2. $f : ([0,1], T) \to (S^1, T') \subset (\mathbb{R}^2, T_u^2)$. Tenemos que T es la topología inicial para la aplicación inclusión $i_{S^1} : (S^1, T') \to (\mathbb{R}^2, T_u^2)$.
Por la propiedad universal de la topología inicial, f es continua si, y solo si, $i_{S^1} \circ f : ([[0,1], T) \to (\mathbb{R}^2, T_u^2)$ es continua. Otra vez, por la propiedad universal de la topología inicial, $i_{S^1} \circ f$ es continua si, y solo si, $p_1 \circ (i_{S^1} \circ f)$, $p_2 \circ (i_{S^1} \circ f)$ son continuas. Pero es claro que $_1 \circ (i_{S^1} \circ f)(z) = \cos(2\pi z)$ y que $p_2 \circ (i_{S^1} \circ f)(z) = \sin(2\pi z)$, que son aplicaciones continuas de $(\mathbb{R}, T_u)$ en $(\mathbb{R}, T_u)$. Por tanto, al restringirlas al intervalo $[0,1]$ siguen siendo continuas. Queda así probado que f es continua.
3. Veamos que f es cerrada. Sea $A \subset [0,1]$ cerrado, y veamos que $f(A)$ es errado en S^1. Sea $p \in \overline{f(A)}$. Tenemos que $(S^1, (T_u^2)_{S^1})$ es AN-I (ya que $(\mathbb{R}^2, T_u^2)$ es AN-I por ser un espacio métrico, y cualquier subconjunto de un espacio AN-I es AN-I). Entonces, existe una sucesión $\{p_i\} \subset f(A)$ tal que $\{p_i\} \to p$. Por ser $p_i \in f(A)$ para todo $i \in \mathbb{N}$, existe $\{a_i\} \subset A$ tal que $f(a_i) = p_i$ para todo $i \in \mathbb{N}$. Como $\{a_i\} \subset [0,1]$, tenemos que tiene una parcial convergente, $\exists \{a_{\sigma(i)}\} \to a \in [0,1]$, por tanto, $a \in \overline{A} = A$ (por ser A cerrado). Como f es continua y $\{a_{\sigma(i)} \to a$, tenemos que $\{p_{\sigma(i)}\} \to f(a)$.
Como $(S^1, (T_u^2)_{S^1})$ es Hausdorff, $p = f(a)$ (los límites de sucesiones son únicos), y entonces $p \in f(A)$. Por tanto, $\overline{f(A)} \subset f(A) \implies f(A)$ cerrado.