Tema3Teoria.pdf

gsmrt

Modelos Matemáticos I

2º Doble Grado en Ingeniería Informática y Matemáticas

Facultad de Ciencias
Universidad de Granada

T3: SIST. DE EC. EN DIFERENCIAS

Introducción

Ejemplo

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= 2x_n - 3y_n \\ y_{n+1} &= x_n - 2y_n \end{aligned} \longrightarrow \begin{pmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix}$$

$$X_n = \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix}, \quad X_{n+1} = A X_n, \quad n \geq 0$$

$$X_{n+1} = A X_n = A(A X_{n-1}) = A^2 X_{n-1} = A^2 (A X_{n-2}) = A^3 X_{n-2} = \dots = \boxed{A^{n-1}} X_0$$

cálculo de potencias de una matriz

$X_0 = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$ condiciones iniciales

Ejemplo (Fibonacci)

$$\begin{aligned} x_n &= f_n \\ y_n &= f_{n+1} \end{aligned} \qquad \begin{aligned} y_{n+1} &= y_n + x_n \\ x_{n+1} &= y_n \end{aligned} \left\{ \begin{aligned} x_{n+1} &= y_n \\ y_{n+1} &= y_n + x_n \end{aligned} \right\} \begin{pmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix}, n \geq 0$$

$$X_0 = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Valores y vectores propios

- λ es valor propio de $A \in M_k(\mathbb{C})$ si y sólo si existe un vector $v \neq 0$ con $Av = \lambda v$
- v se llama vector propio asociado al valor propio λ.
- Espectro de una matriz

  $\sigma(A) = \{\lambda_1, \dots, \lambda_r$, valores propios de $A\}$, $r \leq k$

- Radio espectral de una matriz

  $\rho(A) = \max\{|\lambda_i| : \lambda_i \in \sigma(A)\}$

Ejemplo

$A = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$

Buscamos $\lambda \in \mathbb{C} \,/\, \exists v \neq 0$ con $Av = \lambda v$

$Av = \lambda v \Leftrightarrow Av - \lambda v = 0 \Leftrightarrow (A - \lambda I)\underset{\uparrow \text{ vector}}{v} = \underset{\uparrow \text{ vector}}{0}$

Sistema lineal de ecuaciones homogéneo. Incógnita: v
λ es un parámetro

Buscamos soluciones (v) no nulas ⇒ queremos un sistema compatible indeterminado

⇒ Teorema de Rouché - Frobenius ⇒ $\det(A - \lambda I) = 0$

Cálculo de los valores propios de A.

$$\begin{vmatrix} 2-\lambda & -3 \\ 1 & -2-\lambda \end{vmatrix} = (2-\lambda)(-2-\lambda) + 3 = \lambda^2 - 1$$

Dos raíces reales $\left.\begin{matrix} \lambda_1 = 1 \\ \lambda_2 = -1 \end{matrix}\right\}$ valores propios de A

$\sigma(A) = \{1, -1\}$

$\rho(A) = 1$

Vectores propios

2 sistemas homogéneos

$v = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}$

$(A - I)v = 0 \xrightarrow{\lambda=1} \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 1 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow v_1 = 3v_2 \Rightarrow$ vect. prop $\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$

$(A + I)v = 0 \xrightarrow{\lambda=-1} \begin{pmatrix} 3 & -3 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow v_1 = v_2 \Rightarrow$ vect. prop $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

- Polinomio característico: $p(\lambda) = \det(A - \lambda I)$
- Ecuación característica: $\det(A - \lambda I) = 0$

Teorema de Cayley - Hamilton

Toda matriz cuadrada anula su polin. característico: $p(\lambda) = 0$.

yo elijo cerveza SIN

Sea cual sea
el vehículo que
conduces, elige
cerveza SIN.

WWW.CONDUCCIONRESPONSABLECERVEZASIN.COM

UNA GRAN CERVEZA.
UNA GRAN RESPONSABILIDAD.

© CONDUCCIÓN RESPONSABLE, CERVEZA SIN es una iniciativa de la Asociación de Cerveceros de España con el apoyo de la Dirección General de Tráfico.

Ejemplo (continuación)

$p(\lambda) = \lambda^2 - 1$

Aplicamos el tma de Cayley-Hamilton

$p(A) = 0 \Rightarrow A^2 - I = 0 \Rightarrow A^2 = I$

$A^3 = A \qquad A^3 = A(A^2) = A \cdot I = A$

$\ldots \; A^{2n} = I \qquad A^4 = A^2 \cdot A^2 = I \cdot I = I$

$A^{2n+1} = A$

Matrices diagonalizables

Definición

Dos matrices $A, B \in \mathcal{M}_k(\mathbb{C})$ se dice que son semejantes si existe una matriz regular $P \in \mathcal{M}_k(\mathbb{C})$ verificando

$$A = PBP^{-1}$$

A la matriz P se le suele llamar matriz de paso.

Proposición

Si dos matrices son semejantes también lo serán sus potencias

$$A = PBP^{-1} \Rightarrow A^N = PB^NP^{-1}$$

$$A = PBP^{-1} \Rightarrow A^2 = (PBP^{-1})(PBP^{-1}) = PB\underbrace{P^{-1}P}_{I}BP^{-1} = PB^2P^{-1}$$

Definición

Una matriz $D \in \mathcal{M}_k(\mathbb{C})$ con $D = (d_{i,j})_{i,j=1,\ldots,k}$ se dice que es diagonal si $d_{i,j} = 0, \forall i \neq 0$. Esto es, es de la forma:

$$D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_k \end{pmatrix} \Rightarrow D^n = \begin{pmatrix} \lambda_1^n & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2^n & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_k^n \end{pmatrix}$$

Definición

Una matriz $A \in M_K(\mathbb{C})$ se dice diagonalizable si es semejant a una matriz diagonal. Esto es, existen dos matrices, $P, D \in M_K(\mathbb{C})$ con P regular y D diagonal, verificando:

$$A = PDP^{-1}$$

Si A es diagonalizable es muy fácil calcular sus potenci

$$A^n = PD^nP^{-1}$$

Ejemplo (cont)

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \qquad \lambda_1 = 1,\ v^1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad \lambda_2 = -1,\ v^2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\left.\begin{matrix} Av^1 = \lambda_1 v^1 \\ Av^2 = \lambda_2 v^2 \end{matrix}\right\} \text{"Pegamos"} \quad \underset{\substack{\uparrow\\ A}}{\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}} \left(\underset{\substack{\uparrow\\ v^1}}{\begin{matrix} 3 \\ 1 \end{matrix}} \;\vdots\; \underset{\substack{\uparrow\\ v^2}}{\begin{matrix} 1 \\ 1 \end{matrix}} \right) \overset{\text{multiplico } A\cdot(v_1|v_2)}{=} \left(\underset{\substack{\uparrow\\ \lambda_1 v^1}}{\begin{matrix} 3 \\ 1 \end{matrix}} \;\vdots\; \underset{\substack{\uparrow\\ \lambda_2 v^2}}{\begin{matrix} -1 \\ -1 \end{matrix}} \right) =$$

$$= \left\{ \begin{matrix} \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \overset{\lambda_1}{1} & 0 \\ 0 & \underset{\lambda_2}{-1} \end{pmatrix} \longrightarrow A(v_1 \vdots v_2) = (v_1 \vdots v_2)\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} \\ \Downarrow \\ \begin{pmatrix} \overset{\lambda_1}{1} & 0 \\ 0 & \underset{\lambda_2}{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad P = (v_1 \vdots v_2)_{2\times 2} = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \end{matrix} \right.$$

Tiene que contener vectores propios y ser inversible.

¿P es una matriz de paso? P es la matriz de cambio de base de la usual a la de los vectores propios

Ejemplo 2

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{valores propios: } \det(B - \lambda I) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 0 \\ 1 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)^2$$

Valor propio $\lambda_1 = 1$ (doble)

Vectores propios

$(B-I)v=0$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Downarrow$$

$0v_1+0v_2=0$ no dice nada

$v_1+0v_2=0 \Rightarrow v_1=0 \Rightarrow \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ vector propio

¡No tiene matriz de paso! (con vectores propios lin. indep.)

No es diagonalizable.

Caracterización de la diagonalización

Teorema Sea $A\in M_k(\mathbb{C})$ son equivalentes

- A es una matriz diagonalizable
- Existe una base de $\mathbb{C}^k$ formada por vect propios de A

Corolario

- Una matriz con todos los valores propios simples es diagonalizable.
- Toda matriz simétrica real es diagonalizable.

A diagonalizable si $\exists D$ diagonal
$\exists P$ paso, inversible $\Big|$ $A=PDP^{-1}$

se forma con vectores propios (en columna)

Si $\lambda_i\neq\lambda_j$ y son valores propios de $A \Rightarrow v_i$ y v_j vect. propios asoc. a los valores propios λ_i, λ_j respect.) son linealm. indep.

Matrices no diagonalizables.

Tma de la forma canónica de Jordan

Toda matriz $A\in M_k(\mathbb{C})$ es semejante a una matriz diag. por bloq.

$$J=\begin{pmatrix} J_1 & & \\ & J_2 & \\ & & \ddots\, J_r \end{pmatrix}_{1\leq r\leq k} \quad y \quad J_i=\begin{pmatrix} \lambda_i & 1 & & \\ & \lambda_i & 1 & \\ & & \ddots & 1 \\ & & & \lambda_i \end{pmatrix} \lambda_i\in\sigma(A)$$

¿Qué pasa si no tenemos suficientes vectores propios para construir P?

Suponemos que tenemos una matriz A, con valores propios $\lambda_1, \lambda_2, \dots \lambda_r$ con multiplicidades respectivas $m_1, m_2, \dots, m_r$

Suponemos que los subespacios propios no alcanzan la dimensión esperada:

$$J = m_1\left[\left(\begin{array}{c|c} \begin{matrix}\lambda_1 & 1 & & \\ & \lambda_1 & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ & & & \lambda_1\end{matrix} & 0 \\ & {}_{m_1\times m_1} \\ \hline 0 & \begin{matrix}\lambda_2 & 1 & & \\ & \lambda_2 & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ & & & \lambda_2\end{matrix} \end{array}\right)_{m_2\times m_2}\right. \\ \ddots$$

Proposición Entonces A es semejante a una matriz J.

Esto es, existe P inversible tal que $A = P \cdot J \cdot P^{-1}$

↳ vectores propios y otros vectores.

Ej

$B = \begin{pmatrix}1 & 0\\ 1 & 1\end{pmatrix}$ $|B-\lambda I| = 0$; $\begin{vmatrix}1-\lambda & 0\\ 1 & 1-\lambda\end{vmatrix} = 0$; $(1-\lambda)^2 = 0 \Rightarrow \lambda_1 = 1$ raíz doble

Valores propios

Para ser diagonalizable necesitaría 2 vectores propios.

$\text{Ker}(B-\lambda_1 I) = \{v \in \mathbb{C}^2 \mid (B-I)v = 0\}$

$\begin{pmatrix}0 & 0\\ 1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}v_1\\ v_2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\ 0\end{pmatrix} \Rightarrow v_1 = 0 \Rightarrow \left|\begin{matrix}0\\ 1\end{matrix}\right|$ ← vectores propios

$\lambda_1 = 1$; $m_1 = 2$ (mult. algebraica) $\sigma_1 = 1$ (mult. geometrica) $\Rightarrow$ B no es diagonalizable

Sí admite forma canónica de Jordan

$$J=\begin{pmatrix}1 & \textcircled{1}\\ 0 & 1\end{pmatrix}$$

→ "falta 1 vector propio"

→ $\lambda_1 = 1$ doble

$$\boxed{\text{Se cumple } PJP^{-1}=B}$$

$$P=\begin{pmatrix}0 & \vdots\\ 1 & \vdots\end{pmatrix} \quad \begin{matrix}\uparrow & \uparrow\\ v_1 & ??\end{matrix}$$

vector u solución de: $(B-\lambda_1 I)u = v_1$

$(B-\lambda_1 I)^2 u = (B-\lambda_1 I)v_1 = 0$ → propiedad.

Normas vectoriales

Dado E un espacio vectorial sobre $\mathbb{C}$, una norma es una aplicación $\|\cdot\|: E \to \mathbb{R}$ que verifica las siguientes propiedades:

① $\|x\| \geq 0$, $\forall x \in E$ (definida positiva)

② $\|cx\| = |c|\|x\|$, $\forall c \in \mathbb{C}, \forall x \in E$ (homogeneidad)

③ $\|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|$, $\forall x, y \in E$ (desigualdad triangular)

④ $\|x\| = 0 \iff x = 0$.

Ⓔ $v=\begin{pmatrix}1\\2\\-1\\0\end{pmatrix}$ $\quad \|v\|_e = \sqrt{1^2+2^2+(-1)^2+0^2} = \sqrt{6}$ → n. euclidea

$\|v\|_\infty = \max\{|1|, |2|, |-1|, |0|\} = 2$ → n. del máximo

⊛ $\|v\|_1 = \sum_{i=1}^{4} |v_i| = |1| + |2| + |-1| + |0| = 4$

Norma 1 $\quad \|x\|_1 = |x_1| + |x_2| + \cdots + |x_k| \quad \forall x \in (x_1, x_2, \ldots, x_k)$

Sea E un espacio de dim. k y sea $B = \{u_1, u_2, \ldots, u_k\}$ una base. Cualquier vector $x \in E$ puede ser expresado de forma única en función de los vectores de la base B. $x = \sum_{i=1}^{k} x_i u_i$

donde los escalares $(x_1, x_2, \ldots, x_k)$ se conocen como coordenadas del vector x respecto de la base B.

Normas matriciales

Dado un espacio vectorial de las matrices cuadradas de orden k, $M_k(\mathbb{C})$, una norma matricial es una aplicación

$\|\cdot\| : M_K(\mathbb{C}) \to \mathbb{R}$ que verifica las siguientes propiedades.

① $\|A\| \geq 0 \quad \forall A \in M_K(\mathbb{C})$ (definida positiva)

② $\|cA\| = |c|\,\|A\| \quad \forall c \in \mathbb{C}, \forall A \in M_K(\mathbb{C})$ (homogeneidad)

③ $\|A+B\| \leq \|A\| + \|B\|$, $\forall A, B \in M_K(\mathbb{C})$ (desig. triangular)

④ $\|A\| = 0 \iff A = 0$

⑤ $\|A \cdot B\| \leq \|A\|\|B\|$, $\forall A, B \in M_K(\mathbb{C})$

Norma matricial inducida

Dada una norma vectorial $\|\cdot\|$ se define como norma matricial inducida (o subordinada) en la forma:

$$\|A\| = \max_{x \neq 0} \frac{\|Ax\|}{\|x\|} = \max \{\|Ax\| : \|x\| = 1\}$$

A matriz de dim $K \times K$ $\qquad \|A\|_1 = \max\limits_{1 \leq j \leq K} \{\sum_{i=1}^{K} |a_{ij}|\}$

↳ Norma 1 inducida

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1K} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2K} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{K1} & a_{K2} & \cdots & a_{KK} \end{pmatrix}$$

Proposición

Dada una norma vectorial $\|\cdot\|$ y la correspondiente norma matricial inducida, se verifica

$$\|Ax\| \leq \|A\|\|x\|$$

Relación entre radio espectral y norma inducida.

Dada una matriz cuadrada A arbitraria:

① $\rho(A) \leq \|A\|$ para cualquier norma matricial inducida.

② $\rho(A) = \inf \{\|A\| : \|\cdot\|$ norma matricial inducida$\}$

Corolario $\rho(A) \leq \|A\|_1$

Dem ⓐ.

Sea λ un valor propio de A y sea $v^{\neq 0}$ su vector propio asociado y sea $\|\cdot\|$ inducida.

$$Av = \lambda v$$

$$\left.\begin{array}{l} \|\lambda v\| = |\lambda|\,\|v\| \\ \|Av\| \leq \|A\|\,\|v\| \end{array}\right] \Rightarrow |\lambda|\,\|v\| \leq \|A\|\cdot\|v\| \rightarrow |\lambda| \leq \|A\|$$

$\downarrow$ para cualquier valor propio de A

$$\rho(A) \leq \|A)$$

Comportamiento asintótico de las potencias de una matriz.

Teorema Dada una matriz cuadrada $A = (a_{ij})_{i,j=1}^{K} \in \mathcal{M}_K(\mathbb{C})$, son equivalentes:

ⓘ $\lim_{n\to\infty} A^n = 0$

ⓘⓘ Para cada vector no nulo $v \in \mathbb{C}^K$, se cumple $\lim_{n\to\infty} (A^n v) = 0$

ⓘⓘⓘ $\rho(A) < 1$.

Dem ⓘ ⇒ ⓘⓘ $A^n = \begin{pmatrix} 1/n & 0 \\ 0 & 2^{-n} \end{pmatrix} \Rightarrow \lim_{n\to+\infty} A^n = \lim_{n\to+\infty} (\overset{n \text{ veces}}{A \cdot A \cdot A \cdots A})$

$$\lim_{n\to\infty} A^n = 0 \iff \lim_{n\to+\infty} \|A^n\| = 0 \rightarrow \text{n° real.}$$

$$\lim_{n\to+\infty}(A^n v) \underset{\uparrow}{=} \left(\lim_{n\to+\infty} A^n\right) v = 0v = 0$$

puesto que el producto matriz-vector es continuo

ⓘⓘ ⇒ ⓘⓘⓘ ¿$\rho(A) < 1$?

Sea λ valor propio y v vector propio asociado.

$$Av = \lambda v \Rightarrow A^2 v = A(Av) = A(\lambda v) = \lambda(Av) = \lambda(\lambda v) = \lambda^2 v$$

Por inducción

$\boxed{A^n v = \lambda^n v}$, para $n \geq 1$

$$0 \overset{ii}{=} \lim_{n\to+\infty}(A^n v) = \lim_{n\to+\infty}(\lambda^n \overset{\text{vector}}{v}) = 0$$

⇓ elegimos una componente jésima tal que $v_j \neq 0$.

$$0 = \lim_{n\to+\infty}(\lambda^n v)_j = \lim_{n\to+\infty}(\lambda^n \underbrace{v_j}_{\text{fijo}}) \Rightarrow |\lambda| < 1 \xrightarrow{} \text{cualquiera}$$

$$\Downarrow$$

$$\rho(A) < 1$$

iii→i Supongamos forma canónica de Jordan es.

$$J = \begin{pmatrix} \begin{matrix}\lambda_1 & 1 & \\ & \ddots & 1 \\ & & \lambda_1\end{matrix} & 0 & 0 \\ 0 & \begin{matrix}\lambda_2 & 1 & \\ & \ddots & 1 \\ & & \lambda_2\end{matrix} & 0 \\ 0 & 0 & \ddots \end{pmatrix} \Rightarrow J = \begin{pmatrix} \boxed{J_1} & & 0 \\ & \boxed{J_2} & \\ 0 & & \boxed{J_r} \end{pmatrix}$$

por cajas

$\exists J, \exists P$ inversible tal que $A = PJP^{-1} \Rightarrow A^n = PJ^nP^{-1}$

$$\lim_{n\to\infty} A^n = \lim_{n\to\infty} PJ^nP^{-1} \underset{\substack{\uparrow \\ \text{por continuidad}}}{=} P\underbrace{\left(\lim_{n\to\infty} J^n\right)}_{\text{calcularemos este límite}} P^{-1}$$

→ trabajo por cajas.

$$\text{Además } J^n = \begin{pmatrix} \boxed{J_1^n} & & 0 \\ & \boxed{J_2^n} & \\ 0 & & \boxed{J_r^n} \end{pmatrix}_{K\times K}$$

$m_1 + m_2 + \cdots + m_r = K.$

nº valores propios: $\lambda_1 \to$ mult m_1

$\vdots$

$\lambda_r \to$ mult. m_r

El problema queda reducido a calcular el límite de J_i^n

Si $\rho(A) < 1 \Rightarrow \lim_{n\to+\infty} J_i^n = 0$

$$J_i = \begin{pmatrix} \lambda_i & 1 & 0 \\ & \lambda_i & 1 \\ 0 & & \lambda_i \end{pmatrix}_{m_i\times m_i}, \text{ con } |\lambda_i| < 1.$$

m_i = mult. algebraica de λ_i

$$J_i = \lambda_i I + N = \lambda_i \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ \vdots & & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \ddots & & \\ & & & & 0 \\ & & & & 1 \\ 0 & \cdots & & & 0 \end{pmatrix}$$

→ diag principal de 0s

$$N = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad N^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$N = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad N^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}; \quad N^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

N = matriz nilpotente → se termina haciendo cero.

Si N es de dim $m_i \Rightarrow N^{m_i} = 0$.

↳ (se demuestra por inducción)

solo si A y B conmutan

Recordemos: $(A+B)^2 = (A+B)(A+B) = A^2 + AB + BA + B^2 = A^2 + \overset{\uparrow}{2AB} + B^2$

A, B matrices

$$J_i^n = (\lambda_i I + N)^n \underset{\substack{\uparrow \\ I \text{ y } N \\ \text{conmutan}}}{=} \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} (\lambda_i I)^{n-j} N^j = \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} \lambda_i^{n-j} N^j =$$

$$\underset{\substack{\uparrow \\ N \text{ nilpot.} \\ \text{de orden } m_i}}{=} \sum_{j=0}^{m_i - 1} \binom{n}{j} \lambda_i^{n-j} N^j$$

Sumando a sumando para $n \geq m_i$

$j=0 \Rightarrow \lambda_i^n I \to 0$ pues $\rho(A) < 1$ $(\Rightarrow |\lambda_i| < 1)$

$j=1 \Rightarrow n \lambda_i^{n-1} N \to 0$ pues $\rho(A) < 1$ $(\Rightarrow |\lambda_i| < 1)$

$j=2 \Rightarrow \frac{n(n-1)}{2} \lambda_i^{n-2} N^2 \to 0$ pues $\rho(A) < 1$ cuando $N \to \infty$

$\vdots$

Queremos $\lim_{n\to\infty} J_i^n$

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} J_i^n = 0 \Rightarrow \lim_{n\to+\infty} A^n = 0}$$

Valor propio dominante

Definición Dada una matriz $A \in \mathcal{M}_k(\mathbb{C})$ con espectro

$$\sigma(A) = \{\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_r\}, \quad r \leq k$$

decimos que λ_1 es el valor propio dominante si

ⓘ. $|\lambda_1| > |\lambda_2| \geq \ldots \geq |\lambda_r|$

ⓘⓘ. Es simple.

Ej. $A = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$ Valores propios

$\lambda_1 = -1$, $\lambda_2 = 1$. No hay val. prop. dom.

$B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ $\lambda_1 = 2$ (doble) $\lambda_2 = 1$ (simple) No hay.

$C = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ $\left.\begin{matrix} \lambda_1 = 2 \\ \lambda_2 = 1 \text{ (doble)} \end{matrix}\right\}$ hay valor propio dominante $(\lambda_1 = 2)$

$D = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ $\left.\begin{matrix} \lambda_1 = -3 \\ \lambda_2 = 2 \text{ (doble)} \end{matrix}\right\}$ $\lambda_1 = -3$ es dominante

multi = 2 − 1 uno = 1 vector propio

$$E = \begin{pmatrix} -1 & \textcircled{1} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -4 & \textcircled{1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -4 & \textcircled{1} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -4 \end{pmatrix}_{7\times7}$$

triple − 2 unos = 1

Valores propios

$\lambda_1 = -1$ (doble) 1 vector propio

$\lambda_2 = 2$ (doble) 2 vectores propios.

$\lambda_3 = -4$ (triple) 1 vector propio.

Teorema

Si $A \in M_k(\mathbb{C})$ es una matriz con valor propio dominante λ_1, entonces la solución $\left\{\frac{1}{\lambda_1^n} A^n\right\}_{n\geq 0}$ converge a una matriz $Q \in M_k(\mathbb{C})$ que verifica

① $Im(Q) = Ker(A - \lambda_1 I)$

② $Qv = v$, donde v es el vector propio asociado a λ_1

③ $Q^2 = Q$

④ $QA = AQ$

Forma canónica de Jordan $\exists J, \exists P$ inversible

$$A = PJP^{-1} \Rightarrow A^n = PJ^nP^{-1} \Rightarrow \frac{1}{\lambda_1^n} A^n = P \frac{1}{\lambda_1^n} J^n P^{-1}$$

$$J = \left(\begin{array}{c|c} \lambda_1 & 0 \cdots 0 \\ \hline 0 & \\ \vdots & J^* \\ 0 & \end{array} \right) \; ; \; \frac{1}{\lambda_1} J = \left(\begin{array}{c|c} 1 & 0 \cdots 0 \\ \hline 0 & \\ \vdots & J^* \frac{1}{\lambda_1} \\ 0 & \end{array} \right)$$

cajas de Jordan de los otros valores propios.

$\rho(J^*) < |\lambda_1|$

$\rho\left(\frac{1}{\lambda_1} J^*\right) < 1$

$\Downarrow$ teorema anterior

$$\lim_{n \to \infty} \left(\frac{1}{\lambda_1} J^*\right)^n = 0.$$

$$\lim_{n \to \infty} \frac{1}{\lambda_1^n} A^n = \lim_{n \to \infty} \left(P \frac{1}{\lambda_1^n} J^n P^{-1}\right) = P \left(\lim_{n \to +\infty} \frac{1}{\lambda_1^n} J^n\right) P^{-1} = \underbrace{P \left(\begin{array}{c|c} 1 & 0 \cdots 0 \\ \hline 0 & \\ \vdots & 0 \\ 0 & \end{array} \right)}_{Q}$$

ⓘ $\operatorname{Im} Q = \ker(A - \lambda_1 I)$

λ_1 = simple y dominante

$A = PJP^{-1} \Leftrightarrow AP = PJ$

$$A\underbrace{(P_1 \vdots P_2 \vdots \cdots \vdots P_k)} = \underbrace{(P_1 \vdots P_2 \vdots \cdots \vdots P_k)} \left(\begin{array}{c|c} \lambda_1 & 0 \cdots 0 \\ \hline 0 & \\ \vdots & J^* \\ 0 & \end{array} \right)$$

columnas de P

vector propio asociado al valor propio λ_1

$$AP_1 = P_1 \lambda_1 \Rightarrow AP_1 = \lambda_1 P_1$$

$\Rightarrow P_1 \in \ker(A - \lambda_1 I)$ además $\dim \ker(A - \lambda_1 I)$ (λ_1 simple)

generado por p_1

$\Rightarrow \ker(A - \lambda_1 I) = \langle p_1 \rangle$

$\operatorname{Im} Q$ = espacio vectorial generado por las imágenes de $\mathbb{C}^k$

P = matriz inversible $\Rightarrow$ contiene una base de $\mathbb{C}^k$

$QP = ?$

Dinámica de poblaciones

- Existen dos procesos que afectan al cambio del tamaño de la población < nacimientos y migraciones → aumentan tam.
  defunciones y emigraciones → disminuyen
- En los modelos más simples → no intervienen procesos migratorios
- Hipótesis más simples que podemos plantear.
  - * Todos los individuos son iguales (refer. a la natalidad y superviv.)
  - * Los recursos disponibles son ilimitados
  - * La tasa de mortalidad será mayor entre los individuos de mayor edad que entre los más jóvenes.
  - * La tasa de fecundidad depende de la edad.
- Se suelen estudiar las hembras de la población.
- Vamos a plantear un modelo para el estudio de una población en los que se tienen en cuenta características particulares de cada uno de los individuos
- Según estas características agruparemos en clases que sean homogéneas a efectos reproductivos y de supervivencia.
- El modelo de Leslie describe el crecim. de la parte femenina de una población clasificando a los indiv. por edades

Modelo de Leslie.

L años = edad máx alcanzada por un individuo

N clases de edades, cada clase L/N años de duración.

Clases de edad   N = nº de clases de edad

$$\left[0,\frac{L}{N}\right),\left[\frac{L}{N},\frac{2L}{N}\right),\left[\frac{2L}{N},\frac{3L}{N}\right)\cdots\left[\frac{(N-1)L}{N},\frac{NL}{N}\right]$$

$$x_1^{(n)} \xrightarrow{L/N \text{ años}} x_2^{(n)} \qquad x_3^{(n)} \qquad x_N^{(n)}$$

$$X^{(n)}=\begin{pmatrix} x_1^{(n)} \\ x_2^{(n)} \\ \vdots \\ x_N^{(n)} \end{pmatrix} \rightsquigarrow X^{(n+1)}=\begin{pmatrix} x_1^{(n+1)} \\ x_2^{(n+1)} \\ \vdots \\ x_N^{(n+1)} \end{pmatrix}$$

Esperanza de vida 15 años, 5 clases por edad

[0,3), [3,6), [6,9), [9,12), [12,15]

- Llamamos $x_i^{(n)}$ al tamaño del grupo i en el censo n, para $i=1,2,\dots,N$

$X^{(n+1)}$ → tamaño de la población cuando pasan... años/meses es decir, cuando los individuos de una clase pasan

→ censo, recuento

a la siguiente

$$\begin{cases} x_1^{(n+1)} = a_1 x_1^{(n)} + a_2 x_2^{(n)} + \dots + a_N x_N^{(n)} \\ x_2^{(n+1)} = b_1 x_1^{(n)} \\ x_3^{(n+1)} = b_2 x_2^{(n)} \\ \vdots \\ x_N^{(n+1)} = b_{N-1} x_{N-1}^{(n)} \end{cases}$$

a_i = nº medio de crías de los individuos de la i-és clase ($a_i \in \mathbb{R}_0^+$)

b_1 → tasa de supervivencia ($0 < b_1 \leq 1$)

$$\begin{pmatrix} x_1^{(n+1)} \\ x_2^{(n+1)} \\ \vdots \\ x_N^{(n+1)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_N \\ b_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & b_2 & 0 \cdots & 0 \\ \vdots & & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 \; b_{N-1} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1^{(n)} \\ x_2^{(n)} \\ \vdots \\ x_N^{(n)} \end{pmatrix}$$

$\boxed{X^{(n+1)} = L X^{(n)}}$, $n \geq 0$

ecuación en diferencias matricial

Matriz de leslie

Solución $\boxed{X^{(n)} = L^n X^{(0)}}$, $n \geq 0$, $X^{(0)}$ = población inicial → cuando empieza el estado

Observamos que si $X^{(0)} \geq 0$ ① entonces $X^{(n)} = L^n X^{(0)} \geq 0, \forall n \geq 0$ ②

① Decimos que $v \geq 0$, con $v = (v_1, \dots, v_N)^t$ si $v_i \geq 0$, $i = 1, \dots, N$.

② Se puede demostrar que dada una matriz $A = (a_{ij})_{i,j=1}^N$ y dado $v \geq 0$ se cumple que $Av \geq 0$ sii $a_{ij} \geq 0$, $\forall i,j = 1 \dots N$.

Ejemplo

Describa y estudie la evolución de una población distribuida en grupos de edad cuya matriz de Leslie viene dada por:

$L = \begin{bmatrix} \textcircled{1} & \boxed{3/2} \\ 1/2 & 0 \end{bmatrix}$ $X^{(n)} = \begin{pmatrix} x_1(n) \\ x_2(n) \end{pmatrix}$ → nº individuos 1ª clase, recuento n
→ " 2ª clase "

2 clases de edad < N = nº de clases = 2
L = edad máxima

○ nº medio de crías de los individuos 1ª clase

□ nº medio de crías que tienen los individuos 2ª clase.

△ tasa supervivencia, solo la mitad de los indiv. de la 1ª clase pasa a la 2ª

Valores propios $< \begin{matrix} \lambda_1 = 3/2 \\ \lambda_2 = -1/2 \end{matrix}$ (con dos clases consecutivas que se reproducen)

Siempre hay un valor propio dominante, que es estrictamente positivo

Estudio asintótico del modelo de Leslie

$X^{(n+1)} = LX^{(n)}$, $n \geq 0$

objetivo: estudio de la población asintótica ($\lim_{n\to+\infty} X^{(n)}$ si existe)

$X^{(n+1)} = LX^{(n)} = L^2 X^{(n+1)} = \cdots = L^{n+1} X^{(0)}$, $X^{(0)}$ = población inicial (vector, cada componente $x_i^{(n)}$ es el nº de individ. de la clase i-ésima en la etapa n.

El polinomio característico

El pol. caract. de la matriz de Leslie L_N viene dado por

$$p(\lambda) = \det(L_N - \lambda I)$$
$$= (-1)^N [\lambda^N - a_1 \lambda^{N-1} - a_2 b_1 \lambda^{N-2} - a_3 b_1 b_2 x^{N-3} - \cdots - a_N b_1 b_2 \cdots b_{N-1}]$$

Siendo la matriz de Leslie

$$\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_{N-1} & a_N \\ b_1 & 0 & 0 & & 0 & \\ & b_2 & & & & \\ & & b_3 & & & \\ & 0 & & & & \\ & & & & b_{N-1} & 0 \end{pmatrix}$$

$a_i \geq 0$, nº medio de crías por cada individuo en cada clase de edad

$0 < b_i \leq 1$, tasas de supervivencia

Dem - inducción en N

$N=1$; $L_1 = (a_1)$. $p_1(x) = |a_1 - \lambda| = a_1 - \lambda = -[\lambda - a_1]$

$N=2$; $L_2 = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & 0 \end{pmatrix}$, $p_2 = \begin{vmatrix} a_1 - \lambda & a_2 \\ b_1 & -\lambda \end{vmatrix} = (a_1 - \lambda)(-\lambda) - a_2 b_1 = \lambda^2 - a_1 \lambda - a_2 b_1$

Supongo cierto hasta $N-1$, veámoslo para N

$$p(\lambda)=\begin{vmatrix} a_1-\lambda & a_2 & a_3 & \cdots & a_{N-1} & a_N \\ b_1 & -\lambda & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & b_2 & -\lambda & & 0 & 0 \\ & & b_3 & & & \\ \vdots & & & & & \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & b_{N-1} & -\lambda \end{vmatrix}$$

desarrollamos por la última columna

$$= (-1)^{2N}(-\lambda)P_{N-1}(\lambda)+(-1)^{N+1}a_N \begin{vmatrix} b_1 & -\lambda & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & b_2 & -\lambda & \cdots & 0 \\ \vdots & & & & \vdots \\ 0 & \cdots & & & b_{n-1} \end{vmatrix} =$$

$$=(-\lambda)(-1)^{N-1}\left[\lambda^{N-1}-a_1\lambda^{N-2}-a_2b_1\lambda^{N-3}-\cdots-a_{N-1}b_1b_2\cdots b_{N-2}\right]+(-1)^{N+1}a_Nb_1b_2\cdots$$

$$=(-1)^N\left[\lambda^N-a_1\lambda^{N-1}-a_2b_1\lambda^{N-2}-\cdots-\lambda a_{N-1}b_1b_2\cdots b_{N-2}-a_Nb_1b_2\cdots b_{N-1}\right]=p_N(\lambda)$$

- El sistema $(L-\lambda_1 I)X=0$ se expresa como

$$(a_1-\lambda_1)v_1+a_2v_2+\cdots+a_Nv_N=0$$
$$b_1v_1-\lambda_1v_2=0$$
$$\vdots$$
$$b_{N-1}v_{N-1}-\lambda_1v_N=0$$

- Como λ_1 es simple, $\dim\ker(L-\lambda_1 I)=1$. Eliminando la primera ecuación, y tomando $v_1=1$, obtenemos $v_2=\frac{b_1}{\lambda_1},\ldots,v_N=\frac{b_{N-1}\cdots b_1}{\lambda_1^{N-1}}$

- Observemos que todos los v_i son positivos: $v>>0^3$

⊛ Anexo 1

- Dem - Sea $\lambda\neq0$, se cumple

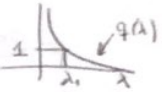
$$p(\lambda)=\lambda^N\left[1-\frac{\beta_{N-1}}{\lambda}-\frac{\beta_{N-2}}{\lambda^2}-\cdots-\frac{\beta_1}{\lambda^{N-1}}-\frac{\beta_0}{\lambda^N}\right]=\lambda^N(1-q(\lambda))$$

$p(\lambda)=0 \Leftrightarrow q(\lambda)=1$

donde $q(\lambda)=\frac{\beta_{N-1}}{\lambda}+\frac{\beta_{N-2}}{\lambda^2}+\cdots+\frac{\beta_1}{\lambda^{N-1}}+\frac{\beta_0}{\lambda^N}$, $q(\lambda)\in C^\infty(0,+\infty)$, $q(\lambda)>0, \forall\lambda>0$

$$\lim_{\lambda\to0^+}q(\lambda)=+\infty;\quad \lim_{\lambda\to+\infty}q(\lambda)=0 \Longrightarrow q'(\lambda)<0,\ \forall\lambda>0$$

$q(\lambda)$ estrictamente decreciente



$\exists_1 \lambda_1 > 0 \,/\, q(\lambda_1) = 1 \iff p(\lambda_1) = 0$

$p(\lambda) = \lambda^N (1 - q(\lambda))$

Teorema de Rolle

$$\left.\begin{array}{l} q \text{ cont. } [a,b] \\ q \text{ deriv. } (a,b) \\ \quad \text{con } q(a) = q(b) \end{array}\right] \Rightarrow \exists c \in (a,b) \,/\, q'(c) = 0$$

Aquí supongamos que $\exists \lambda_1, \lambda_2 \,/\, q(\lambda_1) = q(\lambda_2) = 1$

$\Downarrow$

$\exists c \in (\lambda_1, \lambda_2) / q'(c) = 0$ absurdo!

¿Simple?

$p(\lambda) = \lambda^N (1 - q(\lambda))$

$p'(\lambda) = N\lambda^{N-1}(1 - q(\lambda)) + \lambda^N(-q'(\lambda))$

$p'(\lambda_1) = \cancel{N\lambda_1^{N-1}(1-q(\lambda_1))} \xrightarrow{q(\lambda_1)=1} - \underbrace{\lambda_1^N}_{\oplus} \underbrace{q'(\lambda_1)}_{\ominus} > 0$, luego no es 0 $\Rightarrow$

$\Rightarrow p'(\lambda_1) \neq 0 \Rightarrow \lambda_1$ simple.

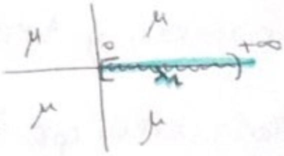
¿Dominante?

Sea μ otro $\left| \begin{array}{l} \text{valor propio de } L \\ \text{raiz de } p(\lambda) \end{array} \right\} \Rightarrow |\mu| \overset{?}{<} |\lambda_1|$ ↗ se lo quito por ser positivo y real

Tomaremos $\mu \neq 0$ (pues $\mu = 0 < \lambda_1$)

→ por ser λ_1 único en los $\oplus$

Además $\mu \in \mathbb{C} \setminus [0, +\infty)$



Entonces:

$\mu = r(\cos\theta + i\,\text{sen}\,\theta)$

$r > 0$ (módulo)

$0 < \theta < 2\pi \rightarrow$ no $\leq$ porque estaría en $\mathbb{R}$

$\mu^{-1} = \frac{1}{r}(\cos\theta - i\,\text{sen}\,\theta)$

$$1 = q(u) = \frac{\beta_{N-1}}{r}(\cos\theta - i\,\text{sen}\,\theta) + \frac{\beta_{N-2}}{r^2}(\cos\theta + i\,\text{sen}\,\theta) + \dots +$$

$$\frac{\beta_1}{r^{N-1}}(\cos((n-1)\theta) - i\,\text{sen}((n-1)\theta)) + \frac{\beta_0}{r^N}(\cos N\theta - i\,\text{sen}\,N\theta) = 1$$

$$1 = \frac{\beta_{N-1}}{r}\cos\theta + \frac{\beta_{N-2}}{r^2}\cos 2\theta + \dots + \frac{\beta_1}{r^{N-1}}\cos((N-1)\theta) + \frac{\beta_0}{r^N}\cos N\theta \quad ⊛$$

Por hipótesis

$$\exists i \,/\, \beta_i - \beta_{i+1} > 0 \Rightarrow \beta_i > 0,\ \beta_{i+1} > 0$$

$$\frac{\beta_i}{r^{N-i}}\cos((N-i)\theta) + \frac{\beta_{i+1}}{r^{N-(i+1)}}\cos((N-(i+1))\theta) \leq \frac{\beta_i}{r^{N-i}} + \frac{\beta_{i+1}}{r^{N-(i+1)}}$$

Veamos que la desigualdad es estricta. Si se diese la =

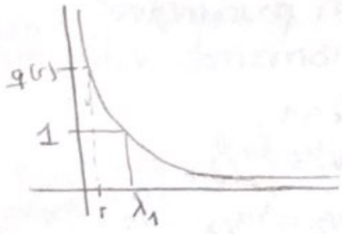
$$\Rightarrow \cos((N-i)\theta) = \cos(N-(i+1)\theta) = 1$$

$$\begin{cases} (N-i)\theta = m\cdot 2\pi & (m\in\mathbb{Z}) \\ (N-(i+1))\theta = k\cdot 2\pi & (k\in\mathbb{Z}) \end{cases}$$

2ª - 1ª

$$\theta = (k-m)\cdot 2\pi \rightarrow \text{imposible pues } 0<\theta<2\pi$$

$$⊛ < \frac{\beta_{N-1}}{r} + \frac{\beta_{N-2}}{r^2} + \dots + \frac{\beta_1}{r^{N-1}} + \frac{\beta_0}{r^N} = q(r) \Rightarrow 1 < q(r) \Rightarrow r < \lambda_1$$



Ejemplo

Describa y estudie la evolución de una población distribuida en grupos de edad cuya matriz de Leslie viene dada por:

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 3/2 \\ 1/2 & 0 \end{pmatrix}$$ Valores propios de L $$\begin{vmatrix} 1-\lambda & 3/2 \\ 1/2 & -\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)(-\lambda) - \frac{3}{2}\cdot\frac{1}{2} = \lambda^2 - \lambda - 3/4$$

$$\lambda = \frac{1 \pm \sqrt{1 + 4 \cdot 3/4}}{2} = \frac{1 \pm 2}{2} < \begin{matrix} 3/2 = \lambda_1 \\ -1/2 \text{ Módulo} < \lambda_1 \end{matrix}$$

Nunca puede ser positivo

Vector propio asociado al valor propio dominante

$(L-\lambda_1 I)v = 0$, λ_1 simple $\Rightarrow$ un vector propio $(\dim(\ker(L-\lambda_1 I)) = 1)$

$$\begin{pmatrix} a_1-\lambda_1 & a_2 & \cdots & a_{N-1} & a_N \\ b_1 & -\lambda_1 & & \bigcirc & \\ & b_2 & \ddots & & \\ & \bigcirc & & \ddots & \\ & & & b_{N-1} & -\lambda_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

~~$(a_1-\lambda_1)v_1 + a_2v_2 + a_3v_3 + \cdots + a_Nv_N = 0$~~ → Sobra esta ecuación

$b_1v_1 - \lambda_1 v_2 = 0$

$b_2v_2 - \lambda_1 v_3 = 0$

$\vdots$

$b_{N-1}v_{N-1} - \lambda_1 v_N = 0$

Damos un valor a un parámetro

Tomamos $v_1 = 1$

$v_1 = 1$

$v_2 = b_1/\lambda_1$

$v_3 = b_2/\lambda_1 \cdot v_2 = b_2b_1/\lambda_1^2$

$\vdots$

$$v_N = \frac{b_{N-1}\cdots b_1}{\lambda_1^{N-1}}$$

Se verifica que $v = \begin{pmatrix} 1 \\ b_1/\lambda_1 \\ b_2b_1/\lambda_1^2 \\ \vdots \\ b_{N-1}b_{N-2}\cdots b_2b_1/\lambda_1^{N-1} \end{pmatrix}$

⊛ Anexo 2

* Anexo 1

Proposición

Se considera el polinomio

$$p(\lambda)=\lambda^N-\beta_{N-1}\lambda^{N-1}-\dots-\beta_1\lambda-\beta_0$$

con $\beta_i \geq 0$, $i=0,\dots,N-1$, y para algún $i\in\{0,\dots,N-2\}$

$\beta_i\cdot\beta_{i+1}>0$

Entonces $p(\lambda)$ tiene una raíz única real positiva $\lambda_1\in(0,\infty)$ que es simple y dominante.

Corolario

Sea L una matriz de Leslie tal que para algún índice $i\in\{1,2,\dots,N-1\}$, $a_i\cdot a_{i+1}>0$. Entonces la matriz de Leslie L tiene un único valor propio real y positivo λ_1 que es simple y dominante.

Anexo 2

Modelo Leslie

L → matriz Leslie

Sup 2 clase $a_i a_{i+1} > 0 \Rightarrow \exists! \lambda_1 > 0$ valor propio simple y dominante

Su vector propio asociado admite la forma anterior

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{\lambda_1^n} L^n = Q = P \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & & & \\ \vdots & & 0 & \\ 0 & & & \end{pmatrix} P^{-1}$$

$$\text{Im}\, Q = \ker (L - \lambda_1 L) = < v >$$

Quiere decir que $Q w = \alpha \cdot v$ (**) w cualquier vector, α cte

$$L v = \lambda_1 v$$

$$L^2 v = L(Lv) = L(\lambda_1 v) = \lambda_1^2 v$$

$$L^n v = \lambda_1^n v \Rightarrow \frac{1}{\lambda_1^n} L^n v = v$$

$$\left(\lim_{n\to\infty} \frac{1}{\lambda_1^n} L^n\right) v = Q v = \alpha v \quad \text{por } (**)$$

$$\parallel$$

$$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{\lambda_1^n} L^n v\right) = v$$

veamos como se comporta $\|x^n\|$: $\frac{1}{\lambda_1^n} \|x^n\| = \left\| \frac{1}{\lambda_1^n} L^n x^0 \right\| =$

$= \left\| \frac{1}{\lambda_1^n} L^n x^0 \right\| \to \|Q x^n\|$ Asintóticamente $\|x^n\| \sim \underline{\lambda_1^n} \|Q x^n\|$

tamaño total de la población

↳ nos dice cómo se comporta la población

Población total

Se cumple $\frac{1}{\lambda_1^n} L^n v = v$, $n \geq 0$

donde v es un vector propio asociado al valor propio λ_1

Además, existe el límite $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{\lambda_1^n} L^n = Q$

Por tanto, para todo vector inicial x_0 (población inicial)

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{\lambda_1^n} L^n x_0 = Q x_0 = \alpha v, \quad \alpha \in \mathbb{R}$$

Lema

Si $x >> 0$, entonces $Qx >> 0$

Sea $x_0 >> 0$ la población inicial. Entonces $\|x_n\| > 0$, y

$\|x_n\| = \|L^n x_0\|$, luego

$$\frac{1}{\lambda_1^n} \|x_n\| = \| \frac{1}{\lambda_1^n} L^n x_0 \| \to \|Q x_0\| , \quad \text{y así}$$

$$\|x_n\| \sim \lambda_1^n \|Q x_0\|$$

Puesto que $\|Q x_0\| > 0$ por el lema anterior, $\|x_n\|$ se comporta asintóticamente como una progresión geométrica de razón λ_1.

Se presentan tres casos dependiendo del valor propio $\oplus$ λ_1

- La población crece si $\lambda_1 > 1$
- La población decrece si $\lambda_1 < 1$
- La población se estabiliza si $\lambda_1 = 1$.

Pirámide de edad.

Dado $x_0 >> 0$ la pirámide de edad viene dada por $\frac{1}{\|x_0\|} x_0$

usando la norma de la suma, e indica las proporciones de cada una de las clases respecto a la poblac. total.

Entonces la pirámide de edad en cada etapa n viene dada por

$$\frac{1}{\|x_n\|} x_n = \frac{1}{\|L^n x_0\|} L^n x_0 = \frac{1}{\frac{1}{\lambda_1^n}\|L^n x_0\|} \left(\frac{1}{\lambda_1^n} L^n\right) x_0 \to \frac{1}{\|Qx_0\|} Q x_0.$$

↳ vector norma 1 y además es el vector propio de norma 1 asociado al valor propio λ_1 dominante.

luego converge a un vector, de norma 1.

Puesto que $\|Qx_0\| > 0$ y $\operatorname{Im} Q = (v)$, entonces $Qx_0 = \alpha v$, con $\alpha > 0$, luego $\frac{1}{\|x_n\|} x_n \to \frac{1}{\|v\|} v$.

$\operatorname{Im} Q = \operatorname{Ker}(L - \lambda_1 I) = \langle v \rangle$

$Qx^{(0)} = \alpha v$ (se puede demostrar que si $x^{(0)}$ tiene todas las componentes positivas $\Rightarrow Q x^{(0)}$ también tiene todas las entradas positivas.

$\Rightarrow \alpha > 0$ (tomando v de entradas positivas)

Reemplazo generacional.

- Para cualquier distribución inicial de las edades, la población tiende a una distribución en el límite que es algún múltiplo del vector propio v_1.
- Puede comprobarse, que la condición $\lambda_1 < 1$ es equivalente a

$$g(1) = a_1 + a_2 b_1 + a_3 b_2 b_1 + \cdots + a_N b_1 b_2 \ldots b_{N-1} < 1$$

$$p(\lambda) = (-1)^N [\lambda^N - a_1\lambda^{N-1} - a_2 b_1 \lambda^{N-2} - \cdots - a_{N-1} b_1 \cdots b_{N-2}\lambda - a_N b_1 b_2 \cdots b_{N-1}]$$

$$= (-1)^N \lambda^N [1 - q(\lambda)]$$

$$q(\lambda) = \frac{a_1}{\lambda} + \frac{a_2 b_1}{\lambda^2} + \cdots + \frac{a_{N-1} b_1 \cdots b_{N-2}}{\lambda^{N-1}} + \frac{a_N b_1 \cdots b_{N-1}}{\lambda^N}$$

Se puede demostrar $\overset{\text{valor propio dominante}}{\lambda_1} < 1 \iff q(1) < 1$

$q(1) = R =$ tasa de reproducción.

- Tasa neta de reproducción

$$R = a_1 + a_2 b_2 + a_3 b_1 b_2 + \cdots + a_n b_1 b_2 \cdots b_{n-1}$$

Se interpreta demográficamente como el promedio de crías que tiene una hembra durante su esperanza de vida.

- Para conocer el comportamiento asintótico de la población no es necesario calcular el valor propio dominante, basta con la tasa neta de reproducción R.