Solución ejercicios Tema 1

Manuel Vicente Bolaños Quesada

1. Comprueba que si $N \in \mathbb{N}$ y $1 \leq p < \infty$, entonces la aplicación $\|\cdot\|_p : \mathbb{R}^N \longrightarrow \mathbb{R}$ definida en cada $x \in \mathbb{R}^N$ como

$$\|x\|_p := \left(\sum_{j=1}^{N} |x_j|^p\right)^{1/p}$$

es una norma en dicho espacio vectorial.

Solución:

Caso 1: $p = 1$

- $\|x\|_1 := \sum_{j=1}^{N} |x_j|$. Por ser una suma de elementos no negativos, $\|x\|_1 \geq 0$, con igualdad si y solo si $x = 0$
- $\|x+y\|_1 = \sum_{j=1}^{N} |x_j + y_j| \leq \sum_{j=1}^{N} |x_j| + \sum_{j=1}^{N} |y_j| = \|x\|_1 + \|y\|_1$
- $\|\lambda x\|_1 = \sum_{j=1}^{N} |\lambda x_j| = \sum_{j=1}^{N} |\lambda||x_j| = |\lambda| \sum_{j=1}^{N} |x_j| = |\lambda| \, \|x\|_1$

Caso 2: $p = \infty$

- $\|x\|_\infty \geq 0$ por ser el máximo de varios valores no negativos. Por la misma razón, $\|x\|_\infty = 0 \iff x = 0$.
- $\|x+y\|_\infty = \max_{1\leq j\leq N} |x_j + y_j| \leq \max_{1\leq j\leq N} |x_i| + \max_{1\leq j\leq N} |y_j| = \|x\|_\infty + \|y\|_\infty$
- $\|\lambda x\|_\infty = \max_{1\leq j\leq N} |\lambda x_j| = |\lambda| \max_{1\leq j\leq N} |x_j| = |\lambda| \, \|x\|_\infty$

Caso 3: $1 < p < \infty$

- $\|x\|_p \geq 0$ por ser una potencia de un número no negativo.
- $\|x\|_p = 0 \iff x = 0$, trivialmente
- $\|\lambda x\|_p = \left(\sum_{j=1}^{N} |\lambda x_j|^p\right)^{1/p} = |\lambda| \left(\sum_{j=1}^{N} |x_j|^p\right)^{1/p} = |\lambda| \, \|x\|_p$

Sea p' el único número real tal que $1/p + 1/p‘ = 1$, o lo que es lo mismo: $p' = \dfrac{p}{p-1}$. Demostremos que se cumple la siguiente desigualdad:

$$x, y \geq 0 \implies xy \leq \frac{x^p}{p} + \frac{y^{p'}}{p'} \tag{1}$$

Para ello consideremos la función $f(x) = \dfrac{x^p}{p} + \dfrac{y^{p'}}{p'} - xy$, para $x \geq 0$, donde $y \geq 0$ lo consideramos fijo.

Tenemos que $f'(x) = x^{p-1} - y$. Entonces:

- $f'(x) \geq 0 \Leftrightarrow x \geq y^{\frac{1}{p-1}} \implies f$ es creciente si $x \geq y^{\frac{1}{p-1}}$

- $f'(x) \leq 0 \Leftrightarrow x \leq y^{\frac{1}{p-1}} \implies f$ es decreciente si $x \leq y^{\frac{1}{p-1}}$

$f(y^{\frac{1}{p-1}}) = \dfrac{y^{\frac{p}{p-1}}}{p} + \dfrac{y^{p'}}{p'} - y^{\frac{p}{p-1}} = y^{p'}\left(\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{p'} - 1\right) = 0$. Teniendo en cuenta esto y la monotonía de la función, deducimos que $f(x) \geq 0\ \forall x, y \geq 0$, tal y como queríamos demostrar.
Probemos ahora que:

$$\sum_{j=1}^{N} |x_j y_j| \leq \left(\sum_{j=1}^{N} |x_j|^p\right)^{1/p} \left(\sum_{j=1}^{N} |y_j|^{p'}\right)^{1/p'} \tag{2}$$

Sea A el primer término del producto de la derecha y B el segundo. Haciendo $x = \dfrac{|x_i|}{A}$, $y = \dfrac{|y_i|}{B}$ en la desigualdad (1) obtenemos lo siguiente:

$$\frac{|x_i|}{A}\frac{|y_i|}{B} \leq \frac{|x_i|^p}{pA^p} + \frac{|y_i|^{p'}}{p'B^{p'}}$$

Sumando esta desigualdad para $i = 1, 2, 3, \ldots, N$, obtenemos

$$\sum_{j=1}^{N} \frac{|x_j y_j|}{AB} = \sum_{j=1}^{N} \frac{|x_j|}{A}\frac{|y_j|}{B} \leq \frac{1}{p}\frac{\sum_{i=1}^{N}|x_i|^p}{A^p} + \frac{1}{p'}\frac{\sum_{i=1}^{N}|y_i|^{p'}}{B^{p'}} = \frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1,$$

de donde

$$\sum_{j=1}^{N} |x_j y_j| \leq AB,$$

tal y como queríamos.

Por otra parte:

$$\begin{aligned}
\sum_{j=1}^{N}(|x_j| + |y_j|)^p &= \sum_{j=1}^{N} |x_j|(|x_j| + |y_j|)^{p-1} + \sum_{j=1}^{N} |y_j|(|x_j| + |y_j|)^{p-1} \\
&\leq \left(\sum_{j=1}^{N} |x_j|^p\right)^{1/p} \left(\sum_{j=1}^{N}(|x_j| + |y_j|)^{(p-1)p'}\right)^{1/p'} + \left(\sum_{j=1}^{N} |y_j|^p\right)^{1/p} \left(\sum_{j=1}^{N}(|x_j| + |y_j|)^{(p-1)p'}\right)^{1/p'} \\
&= \left(\sum_{j=1}^{N}(|x_j| + |y_j|)^p\right)^{1/p'} \left[\left(\sum_{j=1}^{N} |x_j|^p\right)^{1/p} + \left(\sum_{j=1}^{N} |y_j|^p\right)^{1/p}\right]
\end{aligned}$$

$$\iff \|x\|_p + \|y\|_p \geq \left(\sum_{j=1}^{N}(|x_j| + |y_j|)^p\right)^{1/p},$$

donde hemos usado la desigualdad (2) y hemos tenido en cuenta que $(p-1)p' = p$.
Usando la desigualdad triangular para el valor absoluto:

$$\|x\|_p + \|y\|_p \geq \left(\sum_{j=1}^{N}(|x_j| + |y_j|)^p\right)^{1/p} \geq \left(\sum_{j=1}^{N} |x_j + y_j|^p\right)^{1/p} = \|x + y\|_p$$

que es lo que nos faltaba para concluir que, en efecto, es una norma.

2. *Símbolos de Landau.* Sean $N \in \mathbb{N}$, A un subconjunto no vacío de $\mathbb{R}^N$, $f_1, f_2, g_1, g_2 : A \longrightarrow \mathbb{R}$ y supongamos que $x_0 \in \mathbb{R}^N$ es un punto de acumulación de A y que existe $\gamma > 0$ de forma que

$$\left.\begin{array}{c} x \in A \\ 0 < \|x - x_0\| < \gamma \end{array}\right| \implies g(x) \neq 0$$

Comprueba:

(a) $f(x) = o(g(x))$ cuando $x \to x_0 \implies f(x) = O(g(x))$ cuando $x \to x_0$.

(b) $f(x) = O(g_1(x))$ cuando $x \to x_0$ y $g_1(x) = O(g_2(x))$ cuando $x \to x_0 \implies f(x) = O(g_2(x))$ cuando $x \to x_0$ (Ídem para o).

(c) $f_1(x) = O(g_1(x))$ cuando $x \to x_0$ y $g_1(x) = O(g_2(x))$ cuando $x \to x_0 \implies f_1(x)f_2(x) = O(g_1(x)g_2(x))$ cuando $x \to x_0$ (Ídem para o).

(d) Dados $a, b, c \in \mathbb{R}$, $an^2 + bn + c = O(n^2)$ cuando $n \to \infty$

(e) Si $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ es una función polinómica, entonces $f(x) = o(e^x)$ cuando $x \to \infty$.

Solución

(a) $f(x) = o(g(x))$ cuando $x \to x_0 \implies \lim_{x\to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)} = 0 \implies \forall\, \varepsilon > 0,\ \exists\, \lambda > 0$ tal que si $x \in A$ y $0 < \|x - x_0\| < \lambda$, entonces $\left|\dfrac{f(x)}{g(x)}\right| < \varepsilon$. De aquí deducimos que $f(x) = O(g(x))$.

(b) Primera parte

$f(x) = O(g_1(x)) \implies \exists\, M_1 > 0$ y $0 < \delta_1 < \gamma$ tales que si $x \in A$ y $0 < \|x - x_0\| < \delta_1$, entonces $\left|\dfrac{f(x)}{g_1(x)}\right| < M_1$. Similarmente:

$g_1(x) = O(g_2(x)) \implies \exists\, M_2 > 0$ y $0 < \delta_2 < \gamma$ tales que si $x \in A$ y $0 < \|x - x_0\| < \delta_2$, entonces $\left|\dfrac{g_1(x)}{g_2(x)}\right| < M_2$.

Sea $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$ y sea $x \in A$ tal que $0 < \|x - x_0\| < \delta$. Entonces, $\left|\dfrac{f(x)}{g_1(x)}\right| < M_1$ y $\left|\dfrac{g_1(x)}{g_2(x)}\right| < M_2$. Multiplicando estas dos desigualdades, obtenemos $\left|\dfrac{f(x)}{g_2(x)}\right| < M_1 M_2$, y por tanto, $f(x) = O(g_2(x))$.

Segunda parte

$f(x) = o(g_1(x)) \implies \lim_{x\to x_0} \dfrac{f(x)}{g_1(x)} = 0$. Similarmente, $g_1(x) = o(g_2(x)) \implies \lim_{x\to x_0} \dfrac{g_1(x)}{g_2(x)} = 0$.

Entonces, $\lim_{x\to x_0} \dfrac{f(x)}{g_1(x)} \lim_{x\to x_0} \dfrac{g_1(x)}{g_2(x)} = \lim_{x\to x_0} \dfrac{f(x)}{g_1(x)} \dfrac{g_1(x)}{g_2(x)} = \lim_{x\to x_0} \dfrac{f(x)}{g_2(x)} = 0 \cdot 0 = 0$, de donde $f(x) = o(g_2(x))$, tal y como queríamos.

(c) Primera parte

$f_1(x) = O(g_1(x)) \implies \exists\, M_1 > 0$ y $0 < \delta_1 < \gamma$ tales que si $x \in A$ y $0 < \|x - x_0\| < \delta_1$, entonces $\left|\dfrac{f_1(x)}{g_1(x)}\right| < M_1$. Similarmente:

$f_2(x) = O(g_2(x)) \implies \exists\, M_2 > 0$ y $0 < \delta_2 < \gamma$ tales que si $x \in A$ y $0 < \|x - x_0\| < \delta_2$, entonces $\left|\dfrac{f_2(x)}{g_2(x)}\right| < M_2$.

Sea $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$ y sea $x \in A$ tal que $0 < \|x - x_0\| < \delta$. Entonces, $\left|\dfrac{f_1(x)}{g_1(x)}\right| < M_1$ y $\left|\dfrac{f_2(x)}{g_2(x)}\right| < M_2$. Multiplicando estas dos desigualdades, obtenemos $\left|\dfrac{f_1(x)f_2(x)}{g_1(x)g_2(x)}\right| < M_1 M_2$, y por tanto, $f_1(x)f_2(x) = O(g_1(x)g_2(x))$

Segunda parte

$f_1(x) = o(g_1(x)) \implies \lim_{x\to x_0} \dfrac{f_1(x)}{g_1(x)} = 0$. Similarmente, $f_2(x) = o(g_2(x)) \implies \lim_{x\to x_0} \dfrac{f_2(x)}{g_2(x)} = 0$.

Entonces, $\lim_{x\to x_0} \dfrac{f_1(x)}{g_1(x)} \lim_{x\to x_0} \dfrac{f_2(x)}{g_2(x)} = \lim_{x\to x_0} \dfrac{f_1(x)}{g_1(x)} \dfrac{f_2(x)}{g_2(x)} = 0 \cdot 0 = 0$, de donde $f_1(x)f_2(x) = o(g_1(x)g_2(x))$, tal y como queríamos.

(d) $\left|\dfrac{an^2 + bn + c}{n^2}\right| = a + \dfrac{b}{n} + \dfrac{c}{n^2} < a + b + c$, por lo que $an^2 + bn + c = O(n^2)$

(e) Sea n el grado del polinomio $f(x)$, entonces la derivada n-ésima de $f(x)$ es una constante, y por lo tanto, si al límite $\lim_{x\to\infty} \dfrac{f(x)}{e^x}$ le aplicamos L'Hôpital n veces, obtenemos trivialmente que

$$\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{e^x} = 0$$

.

3. Calcula el radio espectral de la matriz
$$A = \begin{bmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 1/4 & 0 \end{bmatrix}.$$
¿Qué podemos afirmar sobre la sucesión $\{A^n\}_{n\geq 1}$?
Solución:
Vamos a hallar los valores propios de la matriz A:
$$0 = \det \begin{pmatrix} 1/2-\lambda & 1/2 \\ 1/4 & -\lambda \end{pmatrix} = -\lambda(1/2-\lambda) - 1/8 = \lambda^2 - \frac{1}{2}\lambda - \frac{1}{8}$$
Las soluciones de esa ecuación son $\lambda_1 = \dfrac{1+\sqrt{3}}{4}$ y $\lambda_2 = \dfrac{1-\sqrt{3}}{4}$.
Entonces, $\rho(A) = \max\{|\lambda_1|, |\lambda_2|\} = |\lambda_1| = \dfrac{1+\sqrt{3}}{4}$
Como $\rho(A) < 1$, lo que podemos afirmar de la sucesión $\{A^n\}_{n\geq 1}$ es que converge a 0.

4. Encuentra una matriz $A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ y una norma matricial $\|\cdot\|$ en $\mathbb{R}^{3\times 3}$ de forma que $\rho(A) < 1$ pero $\|A\| \geq 1$.
Solución:
Consideramos la matriz $A = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 \\ 1 & 0 & 1/2 \end{pmatrix}$. Su único valor propio es $\lambda = 1/2$, con multiplicidad 3, y por tanto $\rho(A) = 1/2 < 1$. Si consideramos la norma $\|\cdot\|_1$ inducida en $\mathbb{R}^{M\times N}$, $\|A\|_1 = 3/2$.

5. Demuestra que toda función real definida en un intervalo y de clase C^1 es estable, pero que el recíproco no es cierto. Comprueba además que la función $f : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}$ definida en cada $x \in \mathbb{R}_+$ como
$$f(x) := \sqrt{x}$$
no es estable en cero. ¿Podemos asegurar que toda función real definida en un intervalo que sea estable en todo su domino es de clase C^1? Justifica tu respuesta.
Solución:
Sea $f : I \longrightarrow Y$, de clase C^1, donde I es un intervalo. Nos preguntamos si existen $M, \delta > 0$ tales que si $y \in Y$ y $|y - y_0| < \delta$, entonces $|g(y) - g(y_0)| < M|y - y_0|$.
Tomemos $\delta = 1$. Por el Teorema del valor medio, sabemos que existe c, entre y e y_0 tal que $f(y) - f(y_0) = f'(c)(y - y_0)$, de donde $|f(y) - f(y_0)| = |f'(c)| \cdot |y - y_0|$.
Como $c \in [y_0 - 1, y_0 + 1]$, tenemos que $|f'(c)| \leq \max\limits_{y\in[y_0-1,y_0+1]} |f'(y)| = S$, máximo cuya existencia está garantizada por el Teorema de Weierstrass.
Si tomamos $M = 1 + S$, tenemos que $g(y) - g(y_0)| < M|y - y_0|$, tal y como queríamos probar.

Comprobemos ahora que la función $f : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}$ definida para cada $x \in \mathbb{R}_+$ como $f(x) := \sqrt{x}$ no es estable en $x = 0$. Dado un $\delta > 0$ tal que $0 < |x - x_0| = x < \delta$, tenemos que
$$\frac{|\sqrt{x} - \sqrt{0}|}{|x - 0|} = \frac{|\sqrt{x}|}{|x|} = \frac{\sqrt{x}}{x} = \frac{1}{\sqrt{x}}$$
Como $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1}{\sqrt{x}} = +\infty$, la función f no es estable en $x = 0$.
La respuesta a la última pregunta es negativa. Si f es estable, entonces es uniformemente continua y, por tanto, continua, pero que sea continua no asegura que sea de clase C^1.

6. Decide en función del parámetro $a \in \mathbb{R}$ si el problema:

$$\text{dado } \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2, \text{ encontrar } \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2 : \begin{bmatrix} 1 & a \\ a & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix}$$

está bien planteado. Para los valores de a que hagan que dicho problema esté bien planteado, estudia su condicionamiento en $\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.1 \\ 0.22 \end{bmatrix}$ y el de la matriz de coeficientes, referidos ambos a una conveniente norma que elijas.

Solución:

Consideremos la norma $\| \cdot \|_1$ a partir de ahora en adelante.

Sea $A = \begin{bmatrix} 1 & a \\ a & 1 \end{bmatrix}$. La resolvente es $g(y) = A^{-1}y$. Para que el problema esté bien planteado, necesitamos que $\det(A) \neq 0 \iff 1 - a^2 \neq 0 \implies a \neq \pm 1$. En ese caso, $A^{-1} = \begin{bmatrix} \dfrac{1}{1-a^2} & \dfrac{-a}{1-a^2} \\ \dfrac{-a}{1-a^2} & \dfrac{1}{1-a^2} \end{bmatrix}$.

Sea $y_0 = \begin{bmatrix} 1.1 \\ 0.22 \end{bmatrix}$. Entonces $x_0 = g(y_0) = A^{-1}y_0 = \begin{bmatrix} \dfrac{1}{1-a^2} & \dfrac{-a}{1-a^2} \\ \dfrac{-a}{1-a^2} & \dfrac{1}{1-a^2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1.1 \\ 0.22 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dfrac{1.1 - 0.22a}{1-a^2} \\ \dfrac{0.22 - 1.1a}{1-a^2} \end{bmatrix}$

Tenemos entonces:

$$\|A^{-1}\|_1 = \left| \frac{1}{1-a^2} \right| + \left| \frac{-a}{1-a^2} \right| = \frac{1 + |a|}{|1-a^2|}$$

$$\|y_0\|_1 = 1.32$$

$$\|x_0\|_1 = \left| \frac{1.1 - 0.22a}{1-a^2} \right| + \left| \frac{0.22 - 1.1a}{1-a^2} \right| = \frac{|1.1 - 0.22a| + |0.22 - 1.1a|}{|1-a^2|}$$

$$\|A\| = 1 + |a|$$

Entonces,

$$c(g, y_0) = \frac{\|A^{-1}\|\|y_0\|}{\|x_0\|} = \frac{1.32 \cdot (1 + |a|)}{|1.1 - 0.22a| + |0.22 - 1.1a|}$$

Y el condicionamiento de la matriz de coeficientes vendrá dado por la expresión:

$$c(A) = \|A^{-1}\|\|A\| = \frac{(1 + |a|)^2}{|1-a^2|}$$

7. Sean $N \in \mathbb{N}$ y $\| \cdot \|$ una norma matricial en $\mathbb{R}^{N \times N}$ inducida por una norma en $\mathbb{R}^N$. Prueba que

$$\min\{c(A) : A \in \mathbb{R}^{N \times N \text{ regular}}\} = 1$$

y que si $A, B \in \mathbb{R}^{N \times N}$ son matrices regulares, entonces

$$c(AB) \leq c(A)c(B)$$

Solución:

$$c(A) = \|A^{-1}\|\|A\| \geq \|A^{-1}A\| = \|I\| = 1$$

Como $c(I) = 1$, donde I es la matriz identidad, tenemos que

$$\min\{c(A) : A \in \mathbb{R}^{N \times N} \text{ regular}\} = 1$$

Por otra parte,

$$c(A)c(B) = \|A^{-1}\|\|A\|\|B^{-1\|}B\| = \|A^{-1}\|\|B^{-1}\|\|A\|\|B\| \geq \|A^{-1}B^{-1}\|\|AB\| = c(AB)$$

8. Estudia el condicionamiento de las siguiente funciones en todos los puntos de su dominio y discute los puntos de mal condicionamiento que eventualmente puedan existir:

   (a) $f(x) = e^x \sin x, \qquad (0 < x < \pi)$.

(b) $f(x) = 2 - 4\cos x, \qquad (-\pi/2 < x < \pi/2)$.

(c) $f(x) = \log\sqrt{x}, \qquad (x > 0)$.

Solución:

(a) Tenemos que $x \neq 0 \neq f(x), \forall x \in (0, \pi)$, así que

$$c(f, x) = \left|\frac{f'(x)x}{f(x)}\right| = \left|\frac{xe^x(\sin(x) + \cos(x))}{e^x \sin(x)}\right| = \left|\frac{x(\sin(x) + \cos(x))}{\sin(x)}\right|$$

Estudiemos los siguientes límites, usando la regla de L'Hôpital:

- $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} \frac{x(\sin(x) + \cos(x))}{\sin(x)} = \lim_{x\to 0^+} x + \frac{x\cos x}{\sin x} = \lim_{x\to 0^+} \frac{x}{\tan x} = \lim_{x\to 0^+} \frac{1}{1 + \tan^2 x} = 1$
- $\displaystyle\lim_{x\to \pi^-} \frac{x(\sin(x) + \cos(x))}{\sin(x)} = \lim_{x\to \pi^-} x + \frac{x\cos x}{\sin x} = \pi + \lim_{x\to \pi^-} \frac{x}{\tan x} = \infty$

Así que la función está mal condicionada en los puntos cercanos a π.

(b) $f'(x) = 4\sin x \ \forall x \in]-\pi/2, \pi/2[$.

En el punto $x = 0$, tenemos que $c(f, 0) = |f'(0)| = 0$.

$f(x) = 0 \Longleftrightarrow \cos x = \dfrac{1}{2} \Longleftrightarrow x = \pm\pi/3$. Tenemos entonces que $c(f, \pm\pi/3) = |f'(\pm\pi/3)| = 2\sqrt{3}$

Supongamos que $x \neq 0, \pm\pi/3$. Entonces

$$c(f, x) = \left|\frac{f'(x)x}{f(x)}\right| = \left|\frac{4x\sin(x)}{2 - 4\cos(x)}\right|$$

Como $\displaystyle\lim_{x\to\pm\pi/3} c(f, x) = +\infty$, deducimos que la función no está bien condicionada en los puntos cercanos a $\pm\pi/3$.

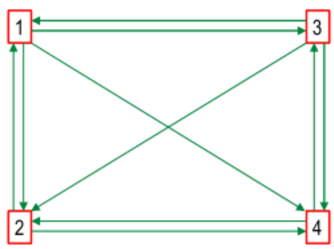
(c) $f(x) = \dfrac{\log x}{2} \implies f'(x) = \dfrac{1}{2x}$

$f(x) = 0 \Longleftrightarrow x = 1$. En este caso, $c(f, 1) = |f'(1)| = \dfrac{1}{2}$. Si $x \neq 1$ tenemos que

$$c(f, x) = \left|\frac{1}{\log(x)}\right|$$

Como $\displaystyle\lim_{x\to 1} = +\infty$ deducimos que la función está mal condicionada en los puntos cercanos al 1, pero no en $x = 1$.

9. Modeliza matemáticamente la relevancia de cada una de las cuatro páginas web que aparecen en la figura, de acuerdo con el algoritmo PageRank de Google y teniendo en cuenta la estructura de enlaces mutuos.



Solución:

La solución tiene que estar normalizada (valor máximo 10)

$$\left.\begin{array}{r} x_1 = \frac{x_2}{2} + \frac{x_3}{3} \\ x_2 = \frac{x_1}{3} + \frac{x_3}{3} + \frac{x_4}{2} \\ x_3 = \frac{x_1}{3} + \frac{x_4}{2} \\ x_4 = \frac{x_1}{3} + \frac{x_2}{2} + \frac{x_3}{3} \end{array}\right\}$$

Restando la segunda y cuarta ecuación obtenemos:

$$x_2 - x_4 = \frac{x_4}{2} - \frac{x_2}{2} \implies x_2 = x_4$$

Como además, de la primera y cuarta ecuación obtenemos que $x_1 = x_4 - \dfrac{x_1}{3} < x_4$, y de la tercera y segunda ecuación obtenemos que $x_3 = x_2 - \dfrac{x_3}{3} < x_2$, tenemos que x_2 y x_4 son los mayores valores, y por tanto $x_2 = x_4 = 10$. Sustituyendo estos valores y resolviendo el sencillo sistema obtenemos que $x_1 = x_3 = 7.5$

Así pues,

$$x_2 = x_4 > x_1 = x_3$$

10. Decide razonadamente la validez del siguiente razonamiento: "En la sucesión de Fibonacci, al ser $n \in \mathbb{N} \implies x_{n+2} = x_{n+1} + x_n$, dividiendo por x_{n+1} obtenemos:

$$\frac{x_{n+2}}{x_{n+1}} = 1 + \frac{1}{\dfrac{x_{n+1}}{x_n}}$$

luego notando $l = \lim_{n\to\infty} \dfrac{x_{n+1}}{x_n}$, se tiene de la igualdad anterior que $l = 1 + \dfrac{1}{l} \iff l^2 - l - 1 = 0$, y como $l \geq 0$, entonces $l = \Phi$

Solución:

El razonamiento estaría perfecto si antes se hubiera demostrado que la sucesión $\left\{\dfrac{x_{n+1}}{x_n}\right\}_{n\in\mathbb{R}}$ es convergente. Sin haber hecho esto, el razonamiento no es correcto, ya que hay sucesiones que verifican una relación de recurrencia y no convergen, como ocurre con la sucesión dada por:

$$x_1 = 1$$

y

$$x_{n+1} = -x_n + 1, \ \forall n \in \mathbb{N}$$

11. Obtén la representación posicional binaria de los números

(a) 8.275

(b) -6.6875

(c) $5/7$.

Solución:

(a) • $8 = 2^3 = (1000)_2$

• $0.275 = \frac{275}{1000} = \frac{11}{40} = \frac{1}{2^2}\frac{44}{40} = \frac{1}{2^2}(1 + \frac{1}{10}) = \frac{1}{2^2}(1 + \frac{1}{2^4}\frac{16}{10}) = \frac{1}{2^2}(1 + \frac{1}{2^4}(1 + \frac{3}{5})$

$= \frac{1}{2^2}(1 + \frac{1}{2^4}(1 + \frac{1}{2}\frac{6}{5})) = \frac{1}{2^2}(1 + \frac{1}{2^4}(1 + \frac{1}{2}\left[1 + \frac{1}{5}\right])) = \frac{1}{2^2}(1 + \frac{1}{2^4}(1 + \frac{1}{2}(1 + \frac{1}{2^3}\frac{8}{5})))$

$= \frac{1}{2^2}(1 + \frac{1}{2^4}(1 + \frac{1}{2}(1 + \frac{1}{2^3}(1 + \frac{3}{5})))) = \frac{1}{2^2}(1 + \frac{1}{2^4}(1 + \frac{1}{2}(1 + \frac{1}{2^3}(1 + \frac{1}{2}\frac{6}{5}))))$

$= \frac{1}{2^2}(1 + \frac{1}{2^4}(1 + \frac{1}{2}(1 + \frac{1}{2^3}(1 + \frac{1}{2}(1 + \frac{1}{5})))))$

$= \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^6}(1 + \frac{1}{2}(1 + \frac{1}{2^3}(1 + \frac{1}{2}(1 + \frac{1}{5}))))$

$= \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^6} + \frac{1}{2^7}(1 + \frac{1}{2^3}(1 + \frac{1}{2}(1 + \frac{1}{5})))$

$= \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^6} + \frac{1}{2^7} + \frac{1}{2^{10}}(1 + \frac{1}{2}(1 + \frac{1}{5}))$

$= \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^6} + \frac{1}{2^7} + \frac{1}{2^{10}} + \frac{1}{2^{11}}\left[1 + \frac{1}{5}\right] = (0.01000\overline{1100})_2$

Entonces, $8.275 = (1000.01000\overline{1100})_2$

(b) • $6 = 2 \cdot 3 = 2(2+1) = 2 + 2^2(110)_2$

- $0.6875 = \frac{11}{16} = \frac{1}{2}\frac{11}{8} = \frac{1}{2}(1+\frac{3}{8}) = \frac{1}{2}(1+\frac{1}{2^2}\frac{3}{2}) = \frac{1}{2}(1+\frac{1}{2^2}(1+\frac{1}{2})$
  $= \frac{1}{2} + \frac{1}{2^3}(1+\frac{1}{2}) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{2^4} = (0.1011)_2$

  Entonces, $-6.6875 = -(110.1011)_2$

(c) $\frac{5}{7} = \frac{1}{2}\frac{10}{7} = \frac{1}{2}(1+\frac{3}{7}) = \frac{1}{2}(1+\frac{1}{2^2}\frac{12}{7}) = \frac{1}{2}(1+\frac{1}{2^2}(1+\frac{5}{7})) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2^3}(1+\frac{5}{7})$
$= \frac{1}{2} + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{2^3}\frac{5}{7} = (0.\overline{101})_2$

12. ¿Es posible encontrar un número real con representación posicional decimal infinita y binaria finita? ¿Por qué? De forma más general, ¿qué debe cumplir una base b para que toda representación posicional finita en dicha base sea también finita en base 10?

    Solución:

    a) Supongamos que x es un número real con representación posicional decimal infinita, y binaria finita. Sin pérdida de generalidad, asumamos que $0 < x < 1$ Entonces, $x = (0.a_1a_2 \dots a_n)_2$
    Entonces, $x = \sum_{i=1}^{n} a_i 2^{-i} = \sum_{i=1}^{n} \frac{5^i a_i}{10^i}$, que es un número real, que tiene representación decimal finita, contradiciendo la hipótesis.

    b) Veamos que la representación posicional decimal en la base b del número x es finita implica que la representación posicional decimal de x es finita si y solo si $b = 2^s 5^t$, para algunos $s, t \in \mathbb{N}_0$.
    $\Longrightarrow$) Sea $x = (0.1)_b$. Entonces, $x = \frac{1}{b}$, que tiene que tener un número real con representación posicional decimal finita. Esto ocurre si y solo si la descomposición en primos del número b solo tiene como factores el 2 y el 5.
    $\Longleftarrow$) Sea $b = 2^s 5^t$, para algunos $s, t \in \mathbb{N}_0$. Sea $m = \min\{s, t\}$. Sea x un número real con representación posicional en la base b finita. Sin pérdida de generalidad, $0 < x < 1$. Entonces, $x = (0.a_1a_2 \dots a_n)_b$.
    Entonces, $x = \sum_{i=1}^{n} \frac{a_i}{b^i} = \sum_{i=1}^{n} \frac{a_i}{(2^s5^t)^i} = \sum_{i=1}^{n} \frac{a_i \cdot 2^{(m-s)i} \cdot 5^{(m-t)i}}{(2^m5^m)^i} = \sum_{i=1}^{n} \frac{a_i \cdot 2^{(m-s)i} \cdot 5^{(m-t)i}}{(10^m)^i}$, número cuya representación decimal es finita claramente.

13. Fijada una base b, sean $k \geq 1, 0 \leq a_{k+1}, a_{k+2}, \dots \leq b-1$ y $0 \leq a_k < b-1$. Demuestra que

$$(0.0\cdots 0a_ka_{k+1}a_{k+2}\cdots)_b \leq (0.0\cdots 0a_k + 1)_b.$$

    Solución:

$$\begin{aligned}
(0.0\cdots 0a_ka_{k+1}a_{k+2}\cdots)_b = \frac{a_k}{b^k} + \frac{a_{k+1}}{b^{k+1}} + \frac{a_{k+2}}{b^{k+2}} + \cdots &\leq \frac{a_k}{b^k} + \frac{b-1}{b^{k+1}} + \frac{b-1}{b^{k+2}} + \cdots \\
&= \frac{a_k}{b^k} + \frac{b-1}{b^{k+1}}\left(1 + \frac{1}{b} + \frac{1}{b^2} + \cdots\right) \\
&= \frac{a_k}{b^k} + \frac{b-1}{b^{k+1}}\frac{b}{b-1} \\
&= \frac{a_k}{b^k} + \frac{1}{b^k} \\
&= \frac{a_k+1}{b^k} \\
&= (0.0\cdots 0\ a_k + 1)_b
\end{aligned}$$

14. Describe todos los números estrictamente positivos del sistema de punto flotante $\mathbb{F}(2, 3, -1, 2)$. Calcula su épsilon máquina y su precisión. Obtén además la truncatura y el redondeo en dicho sistema del número real 3.25, comprobando que los correspondientes errores relativos están acotados por el épsilon máquina y la precisión.

    Solución:

$$(0.111)\cdot 2^2 = \frac{7}{2}, \qquad (0.110)\cdot 2^2 = 3, \qquad (0.101)\cdot 2^2 = \frac{5}{2}, \qquad (0.100)\cdot 2^2 = 2$$

$$(0.111)\cdot 2 = \frac{7}{4}, \qquad (0.110)\cdot = \frac{3}{2}, \qquad (0.101)\cdot = \frac{5}{4}, \qquad (0.100)\cdot 2 = 1$$

$$(0.111)\cdot 2^0 = \frac{7}{8}, \qquad (0.110)\cdot 2^0 = \frac{3}{4}, \qquad (0.101)\cdot 2^0 = \frac{5}{8}, \qquad (0.100)\cdot 2^0 = \frac{1}{2}$$

$$(0.111)\cdot 2^{-1} = \frac{7}{16}, \qquad (0.110)\cdot 2^{-1} = \frac{3}{8}, \qquad (0.101)\cdot 2^{-1} = \frac{5}{16}, \qquad (0.100)\cdot 2^{-1} = \frac{1}{4}$$

Calculamos ahora el épsilon máquina.

$$\varepsilon_M = 2^{1-3} = 0.25$$

Y ahora la precisión:

$$u = \frac{1}{2}\varepsilon_M = 0.125$$

Tenemos que $3 = (11.01)_2 = (0.1101)\cdots 2^2$

Así que:

$$\operatorname{tr}(3.25) = (0.110)\cdot 2^2 = 3 \qquad \left(\frac{|x-\operatorname{tr}(x)|}{|x|} = \frac{0.25}{3.25} = \frac{1}{13} < \varepsilon_M\right)$$

$$\operatorname{rd}(3.25) = (0.111)\cdot 2^2 = 3.5 \qquad \left(\frac{|x-\operatorname{rd}(x)|}{|x|} = \frac{0.25}{3.25} = \frac{1}{13} < u\right)$$

15. Considera un sistema de punto flotante $\mathbb{F}(b,t,L,U)$ con $L < U$. Sean $L \leq e < e' \leq U$ y $(0.a_1\cdots a_t)\cdot b^e$, $(0.\alpha_1\cdots\alpha_t)\cdot b^{e'} \in \mathbb{F}(b,t,L,U)$. Demuestra que

$$(0.a_1\cdots a_t)\cdot b^e < (0.\alpha_1\cdots\alpha_t)\cdot b^{e'}.$$

Deduce la distribución de los puntos del sistema de punto flotante $\mathbb{F}(b,t,L,U)$.

Solución:

Demostremos primero que $b^e - b^{e-t} < b^{e'-1}$.

$$b^e - b^{e-t} - b^{e'-1} = b^e\left(1 - b^{-t} - b^{e'-e-1}\right) \leq b^e\left(1 - b^{-t} - 1\right) = -b^{e-t} < 0$$

tal y como queríamos.

Entonces

$$\begin{aligned}(0.a_1a_2\dots a_t)\cdot b^e = b^e\sum_{i=1}^t a_i b^{-i} \leq b^e\sum_{i=1}^t (b-1)b^{-i} = b^e(b-1)\sum_{i=1}^t b^{-i} &= b^e(b-1)\left(\frac{b^t-1}{b^t(b-1)}\right)\\ &= b^e\left(1-\frac{1}{b^t}\right)\\ &= b^e - b^{e-t}\\ &< b^{e'-1}\\ &\leq b^e\sum_{i=1}^t \alpha_i b^{-i}\\ &= (0.\alpha_1\alpha_2\dots\alpha_t)\cdot b^{e'}\end{aligned}$$

Los puntos de este sistema de punto flotante están distribuidos de forma que si el exponente de la base que multiplica al número es mayor que el de otro, entonces el primero es mayor que el segundo.

16. Sea $\{x_n\}_{n\geq 0}$ la sucesión de números reales definida para cada $n \in \mathbb{N}\cup\{0\}$ como

$$x_n := \int_0^1 \frac{x^n}{x+3}dx.$$

Justifica razonadamente que esta sucesión verifica la recurrencia

$$x_0 = \log(4/3)$$

y

$$n \geq 1 \implies x_n = \frac{1}{n} - 3x_{n-1}.$$

Para estudiar la propagación del error, parte en la recurrencia anterior de un redondeo de x_0 con 5 cifras significativas ($t = 5$). De forma más general, analiza la propagación del error cuando se parte de $x_0 + \delta$, con $\delta \in \mathbb{R}$. Expresa x_n como $f_n(x_0)$, para una conveniente función f_n y halla su condicionamiento en x_0.

Solución:

$x_0 = \displaystyle\int_0^1 \frac{1}{x+3}dx = \log(x+3)|_0^1 = \log(4) - \log(3) = \log(4/3)$ Sea $n \geq 1$. Tenemos entonces que

$$\frac{x}{x+3} = 1 - \frac{3}{x+3} \implies \frac{x^n}{x+3} = x^{n-1} - \frac{3x^{n-1}}{x+3}$$

Entonces

$$\int_0^1 \frac{x^n}{x+3}dx = \int_0^1 \left(x^{n-1} - \frac{3x^{n-1}}{x+3}\right)dx = \int_0^1 x^{n-1}dx - 3\int_0^1 \frac{x^{n-1}}{x+3}dx = \frac{1}{n} - 3\int_0^1 \frac{x^{n-1}}{x+3}dx$$

O, equivalentemente,

$$x_n = \frac{1}{n} - 3x_{n-1}$$

tal y como se pedía demostrar.

Estudiemos la propagación del error, partiendo en la recurrencia anterior de un redondeo de x_0 con 5 cifras significativas. Así pues, $x_0 = 0.28768$.

- $x_1 = 1 - 3x_0 = 0.13696$
- $x_2 = 1/2 - 3x_1 = 0.08912$
- $x_3 = 1/3 - 3x_2 = 0.06597$
- $x_4 = 1/4 - 3x_3 = 0.05208$

Estudiamos el error relativo:

$$\frac{|0.05208 - x_4|}{|x_4|} = \frac{|0.05208 + 93/4 - 81\log(4/3)|}{|-93/4 + 81\log(4/3)|} = 0.0032129$$

Estudiemos ahora la propagación del error, cuando se parte de $x_0 + \delta$, con $\delta \in \mathbb{R}$.

- $x_0 = x_0 + \delta$
- $x_1 = 1 - 3(x_0 + \delta) = 1 - 3x_0 - 3\delta$
- $x_2 = 1/2 - 3x_1 = 1/2 - 3 + 9x_0 + 9\delta$
- $x_3 = 1/3 - 3x_2 = 1/3 - 3/2 + 9 - 27x_0 - 27\delta$

Así vemos que del valor real al obtenido hay una diferencia de $|3^n\delta|$

Vamos a expresar x_n como $f_n(x_0)$, y vamos a hallar su condicionamiento en x_0

Probemos por inducción que $x_n = f_n(x_0) = \alpha_n + (-3)^n x_0$, para alguna constante α_n. Para $n = 1$ tenemos $x_1 = 1 - 3x_0 = f_1(x_0)$. Supongamos ahora que se cumple para un $n \in \mathbb{N}$. Entonces,

$$x_{n+1} = \frac{1}{n+1} - 3x_n = \frac{1}{n+1} - 3(\alpha_n + (-3)^n x_0 = \overbrace{\frac{1}{n+1} - 3\alpha_n}^{\alpha_{n+1}} + (-3)^{n+1}x_0 = \alpha_{n+1} + (-3)^{n+1}x_0$$

tal y como queríamos ver.

Demostremos ahora que $x_n \geq x_{n+1}$ para todo $n \in \mathbb{N}_0$ Como $0 \leq x \leq 1$, $\dfrac{x^n}{x+3} \geq \dfrac{x^{n+1}}{x+3}$, de donde $\displaystyle\int_0^1 \frac{x^n}{x+3}dx \geq \int_0^1 \frac{x^{n+1}}{x+3}dx$, o, equivalentemente, $x_n \geq x_{n+1}$. Además, $x_0 > x_1$, trivialmente. Entonces,

$$c(f_n, x_0) = \left|\frac{f_n'(x_0)x_0}{f_n(x_0)}\right| = \left|\frac{(-3)^n x_0}{x_n}\right| \geq \left|\frac{(-3)^n x_0}{x_0}\right| = |(-3)^n| = 3^n$$

así que la función f_n está mal condicionada en x_0 para todo $n \in \mathbb{N}_0$.

17. Deduce razonadamente la expresión explícita de la norma matricial inducida en el espacio de matrices por la norma 1.

Sean $A \in \mathbb{R}^{N\times M}$ y $x \in \mathbb{R}^N$ tal que $\|x\|_1 = 1$, o, equivalentemente, $\displaystyle\sum_{i=1}^{N} |x_i| = 1$. Entonces

$$\|Ax\|_1 = \sum_{i=1}^{M}\left|\sum_{j=1}^{N} a_{ij}x_j\right| \leq \sum_{i=1}^{M}\sum_{j=1}^{N} |a_{ij}||x_j| = \sum_{j=1}^{N}|x_j|\left(\sum_{i=1}^{M}|a_{ij}|\right) \leq \max_{1\leq j\leq N}\sum_{i=1}^{M}|a_{ij}|\|x\|$$
$$= \max_{1\leq j\leq N}\sum_{i=1}^{M}|a_{ij}|$$

Entonces $\|A\|_1 = \displaystyle\max_{\|x\|_1=1}\|Ax\|_1 \leq \max_{1\leq j\leq N}\sum_{i=1}^{M}|a_{ij}|$, es decir, $\displaystyle\max_{1\leq j\leq N}\sum_{i=1}^{M}|a_{ij}|$ es una cota superior de $\|A\|_1$.

Por otra parte, existe un $k \in \mathbb{N}$ tal que $1 \leq k \leq N$ y $\displaystyle\max_{1\leq j\leq N}\sum_{i=1}^{M}|a_{ij}| = \sum_{i=1}^{M}|a_{ik}|$. Sea entonces $v = (0, \ldots, 1, \ldots, 0)$, donde el 1 está en la posición k-ésima. Es claro que $\|v\|_1 = 1$. Entonces:

$$\|Av\|_1 = \sum_{i=1}^{M}|a_{ik}| = \max_{1\leq j\leq N}\sum_{i=1}^{M}|a_{ij}|.$$

Deducimos entonces que la cota superior se alcanza y por tanto $\|A\|_1 = \displaystyle\max_{1\leq j\leq N}\sum_{i=1}^{M}|a_{ij}|$

18. Deduce razonadamente la expresión explícita del n-ésimo término de la sucesión de Fibonacci.

La sucesión de Fibonacci es la sucesión $\{f_n\}_{n\geq 0}$ definida como

$$f_0 = 0, f_1 = 1 \text{ y } n \geq 1 \implies f_{n+1} = f_n + f_{n+1}$$

Podemos expresar esta recurrencia como

$$\begin{bmatrix}0 & 1\\ 1 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}f_{n-1}\\ f_n\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}f_n\\ f_{n+1}\end{bmatrix}.$$

Probemos primero que $\begin{bmatrix}0 & 1\\ 1 & 1\end{bmatrix}^n\begin{bmatrix}0\\ 1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}f_n\\ f_{n+1}\end{bmatrix}$. Procedemos por inducción. Los casos $n = 0, 1$ son triviales. Sea $n \geq 2$. Entonces:

$$\begin{bmatrix}0 & 1\\ 1 & 1\end{bmatrix}^n\begin{bmatrix}0\\ 1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0 & 1\\ 1 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0 & 1\\ 1 & 1\end{bmatrix}^{n-1}\begin{bmatrix}0\\ 1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0 & 1\\ 1 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}f_{n-1}\\ f_n\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}f_n\\ f_{n+1}\end{bmatrix}$$

tal y como queríamos probar. Llamemos $A = \begin{bmatrix}0 & 1\\ 1 & 1\end{bmatrix}$ para abreviar. Hallemos los valores propios de A.

$$0 = p_A(\lambda) = -\lambda(1-\lambda) - 1 = \lambda^2 - \lambda - 1 \iff (x-\phi)(x-\psi) = 0$$

de donde los valores propios son $\lambda_1 = \phi$ y $\lambda_2 = \psi$. Calculemos ahora los subespacios propios asociados a esos valores propios.

$$V_{\lambda_1} = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 | \begin{bmatrix} -\phi & 1 \\ 1 & 1-\phi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right\} = \big\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 | -\phi \cdot x + y = 0 \big\} = L(\{1, \phi\})$$

$$V_{\lambda_2} = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 | \begin{bmatrix} -\psi & 1 \\ 1 & 1-\psi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right\} = \big\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 | -\psi \cdot x + y = 0 \big\} = L(\{1, \psi\})$$

Sean $D = \begin{bmatrix} \phi & 0 \\ 0 & \psi \end{bmatrix}$ y $P = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ \phi & \psi \end{bmatrix}$. Fácilmente se obtiene que $P^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{5}-1}{2\sqrt{5}} & 1/\sqrt{5} \\ \frac{1+\sqrt{5}}{2\sqrt{5}} & -1/\sqrt{5} \end{bmatrix}$. Tenemos entonces que $A = P \cdot D \cdot P^{-1}$, de donde $A^n = P \cdot D^n \cdot P^{-1}$. Entonces

$$\begin{aligned}
\begin{bmatrix} f_n \\ f_{n+1} \end{bmatrix} = A^n \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = P \cdot D^n \cdot P^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ \phi & \psi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \phi^n & 0 \\ 0 & \psi^n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{5}-1}{2\sqrt{5}} & 1/\sqrt{5} \\ \frac{1+\sqrt{5}}{2\sqrt{5}} & -1/\sqrt{5} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} \phi^n & \psi^n \\ \phi^{n+1} & \psi^{n+1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{5}-1}{2\sqrt{5}} & 1/\sqrt{5} \\ \frac{1+\sqrt{5}}{2\sqrt{5}} & -1/\sqrt{5} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} \alpha & \frac{\phi^n - \psi^n}{\sqrt{5}} \\ \beta & \frac{\phi^{n+1} - \psi^{n+1}}{\sqrt{5}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} \frac{\phi^n - \psi^n}{\sqrt{5}} \\ \frac{\phi^{n+1} - \psi^{n+1}}{\sqrt{5}} \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

donde $\alpha = \phi^n \frac{\sqrt{5}-1}{2\sqrt{5}} + \psi^n \frac{1+\sqrt{5}}{2\sqrt{5}}$, y $\beta = \phi^{n+1} \frac{\sqrt{5}-1}{2\sqrt{5}} + \psi^{n+1} \frac{1+\sqrt{5}}{2\sqrt{5}}$ de donde $\boxed{f_n = \frac{\phi^n - \psi^n}{\sqrt{5}}}$.