Ejercicios4.pdf

gsmrt

Modelos Matemáticos I

2º Doble Grado en Ingeniería Informática y Matemáticas

Facultad de Ciencias
Universidad de Granada

Grado en Ingeniería Informática y Matemáticas

Modelos matemáticos I (curso 18/19)

Relación de Ejercicios 4

1 Se considera la matriz $A = \begin{pmatrix} 0 & p & 0 & \dots & 0 & q \\ q & 0 & p & \dots & 0 & 0 \\ 0 & q & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & p \\ p & 0 & 0 & \dots & q & 0 \end{pmatrix}$, con $p, q \in]0,1[$, $p+q=1$. Se supone que A tiene dimensión $N \geq 4$ par. Demuestre:

a) $AV = -V$ si $V = (1,-1,1,-1,\dots,1,-1)^t$.

b) Si $\mathbf{x} \in \mathbb{C}^N, \mathbf{y} = A\mathbf{x}$, entonces $\sum_{j=1}^{N}(-1)^j x_j = -\sum_{j=1}^{N}(-1)^j y_j$

c) 1 y -1 son valores propios simples de A.

d) Dado $X_0 \in \mathbb{R}^N$, la sucesión $X_n = A^n X_0$ verifica $\{X_{2n}\}_{n\geq 0} \to \mathbf{u}, \{X_{2n+1}\}_{n\geq 0} \to \mathbf{v}$, donde $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^N$ son dos vectores tales que $A\mathbf{u} = \mathbf{v}$ y $A\mathbf{v} = \mathbf{u}$.

2 Responda razonadamente en cada una de las cuestiones siguientes:

a) Justifique que la matriz $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 7 \\ 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 9 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ es irreducible pero no es primitiva.

b) Se considera el sistema en diferencias, $X_{n+1} = \begin{pmatrix} 0 & 0{,}1 & 0{,}5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0{,}9 & 0{,}5 & 0 \end{pmatrix} X_n$ $n \geq 0$. Define una cadena de Markov regular? Es una cadena absorbente?

c) Dada la matriz $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 3 & -5 \\ 1 & -1{,}5 \end{pmatrix}$.

i) ¿Cumple la ecuación $2\mathbf{A}^2 - 3\mathbf{A} + \mathbf{I} = (0)$?

ii) Pruebe que la solución del sistema $X_{n+1} = \mathbf{A}.X_n$ con $X_0 = (3,1)^t$ tiende al vector $\mathbf{v} = (5,2)^t$.

3 Una determinada planta puede presentar flores de uno de estos tres colores: azul (AA), verde (Aa) y amarillo (aa). Se considera el siguiente programa de polinización:

a) Las plantas de flores azules (AA) se fecundan con polen de flores amarillas (aa).

b) Las plantas de flores verdes (Aa) se fecundan con polen de flores verdes (Aa).

c) Las plantas de flores amarillas (aa) se fecundan con polen de flores azules (AA).

¿Cómo evoluciona a largo plazo la distribución de colores en las plantas?

4 Una compañía divide a sus empleados en tres departamentos: Producción, Marketing y Ventas. Anualmente, se produce una reorganización en la distribución de empleados por departamentos, de forma que la mitad de los trabajadores permanecen en el departamento en el que están, mientras que el resto cambia de departamento siguiendo las siguientes directrices: los que dejan el departamento de Producción se distribuyen a partes iguales entre los dos departamentos restantes, los que dejan Marketing van a Ventas y los que dejan Ventas van a Producción.

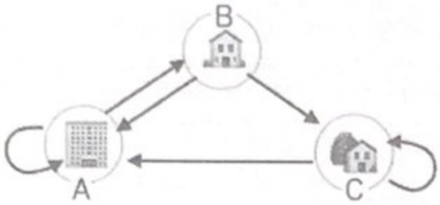
a) Describa el modelo matemático.

b) Pruebe que hay un valor propio dominante.

c) Calcule la distribución a largo plazo de los empleados por departamento.

5 En una universidad elitista del pasado se impartían estudios de Medicina, Farmacia y Derecho, y sólo había estudiantes varones (afortunadamente las cosas han cambiado). Durante generaciones los padres enviaban a su hijo primogénito a la misma universidad en que ellos estudiaron. Se ha estudiado la elección de carrera a lo largo del tiempo y se ha comprobado que: el 80 % de los hijos de médicos estudiaron Medicina y el resto estudió Farmacia, el 40 % de los hijos de farmacéuticos estudió Farmacia y el resto se decidió a partes iguales por Medicina o Derecho; y finalmente, los hijos de los abogados eligieron Derecho en un 70 % Medicina en un 20 % y Farmacia en un 10 %. Estudia a largo plazo cuál será la distribución de estudiantes en estas tres carreras.

6 En cierta ciudad se ha realizado un estudio sobre la dinmica anual de los residentes en rgimen de alquiler. Para ello, se han considerado tres zonas diferentes A, B y C, y se ha observado que los flujos entre las distintas zonas vienen descritos por el grafo siguiente:



Ademas de la informacin del grafo, se estudi el comportamiento de una muestra de 80 inquilinos situados inicialmente en la zona B comprobando que:

- Al cabo de un ao 40 se marchaban a la zona A y 40 a la zona C.
- En el segundo ao se observ que haba 46 en la zona A, 24 en la zona B y 10 en la zona C.

a) Describa el modelo en diferencias, $P_{n+1} = M\,P_n$, $\quad n = 0, 1, \ldots$, donde M es la matriz de transicin y $P_n = \begin{pmatrix} A_n \\ B_n \\ C_n \end{pmatrix}$ es el vector cuyas componentes representan el nmero de inquilinos en cada zona en el n-simo recuento.

b) Define el modelo una cadena de Markov? Admite valor propio dominante la matriz M? Justifica las respuestas.

c) Describa el comportamiento, a largo plazo, de la poblacin de inquilinos considerada indicando el porcentaje de inquilinos en cada zona.

7 Un equipo europeo de biólogos se encuentra realizando unas investigaciones relacionadas con las preferencias que manifiestan los orangutanes del parque natural de Gunung Leuser, en Sumatra, a la hora de confeccionar los nidos en que pasarán la noche en las copas de los árboles. Para ello han elegido una comunidad concreta formada por 40 de estos primates y se han centrado en tres especies de árboles diferentes, a las que haremos mención aquí como A, B y C. Los científicos han propuesto el siguiente modelo matemático para reproducir de modo aproximado la variabilidad sobre la elección diaria que los orangutanes hacen de la especie de árbol en el que construirán su cama:

$$\begin{aligned} A_{n+1} &= 0{,}6A_n + 0{,}2C_n, \\ B_{n+1} &= 0{,}4A_n + 0{,}5B_n, \\ C_{n+1} &= 0{,}5B_n + 0{,}8C_n. \end{aligned}$$

Indique las afirmaciones que sean correctas.

a) El 20 % de los orangutanes que un día construyen su nido en un árbol de la especie A, cambian a un árbol de la especie C al día siguiente.

b) El modelo anterior viene descrito por una matriz estocástica.

c) La matriz que describe el modelo anterior admite un valor propio estrictamente dominante.

d) A largo plazo, la población de orangutanes se distribuye entre las tres especies de árboles según los porcentajes aproximados 26,3 % (para la especie A), 21 % (para la especie B) y 52,6 % (para la especie C).

8 Dos compañías de seguros *Ocaso de Mordor* y *Amanecer de Gondor* se reparten el mercado de seguros de vida en la ciudad de Osgiliath. La tasa de mortalidad anual de la población es del 20 %. Al cabo del año, sólo el 80 % de los que no han fallecido deciden renovar el seguro con la misma compañía, pasándose el resto a la compañía rival. Por otra parte, *Ocaso de Mordor* consigue anualmente un número total de 56 nuevos clientes, mientras que *Amanecer de Gondor* sólo consigue 4.

yo elijo cerveza SIN

Sea cual sea el vehículo que conduces, elige cerveza SIN.

WWW.CONDUCCIONRESPONSABLECERVEZASIN.COM

Cerveceros de España 100 años más

UNA GRAN CERVEZA.
UNA GRAN RESPONSABILIDAD.

DGT Dirección General de Tráfico

a) Escriba el modelo de evolución anual de asegurados de la forma $X_{n+1} = A\,X_n + b$, $n \geq 0$.

b) Encuentre una solución constante X_*.

c) Pruebe que el cambio $Y_n = X_n - X_*$ nos lleva a un sistema de la forma $Y_{n+1} = A\,Y_n$, $n \geq 0$.

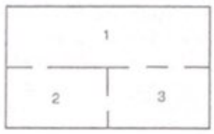
d) Calcule el número de asegurados en cada compañía a largo plazo, y pruebe que es independiente del número inicial.

9 El ascensor de un edificio con bajo y dos pisos realiza viajes de uno a otro piso. Se sabe que la mitad de los viajes que parten del bajo se dirigen a cada uno de los otros dos pisos, mientras que si un viaje comienza en el primer piso, sólo el 25 % de las veces finaliza en el segundo. Por último, si un trayecto comienza en el segundo piso, siempre finaliza en el bajo. Se pide:

a) Calcule la matriz de de transición que determina la probabilidad de que el ascensor esté en un piso determinado.

b) Determine la probabilidad de que, a largo plazo, el ascensor se encuentre en cada uno de los tres pisos.

10 Un psicólogo lleva a cabo un experimento en el que 24 ratas se colocan de forma aleatoria en los compartimentos numerados 1, 2 y 3, en que ha sido dividida una caja tal y como se muestra en la siguiente figura



Observe que hay cuatro puertas en esta configuración. Cada rata puede estar en tres estados posibles: se encuentra en el compartimento 1, 2 o 3. Supongamos que las ratas se mueven siempre de un compartimento a otro y que la probabilidad de trasladarse de un compartimento a otro depende de la distribución de puertas que los conectan. Así una rata en el compartimento 1 tiene las probabilidades $P_{11} = 0, P_{21} = 1/3$, y $P_{31} = 2/3$ de trasladarse, respectivamente, a los compartimentos 1,2 y 3. Determine la distribución a largo plazo de las ratas.

11 El pájaro de fuego es una especie autóctona de la ínsula Fermosa. La población se distribuye en tres colonias situadas en los vértices A, B y C de un triángulo imaginario. El vértice A es muy inhóspito y solo el 20 % de los pájaros consigue sobrevivir después de un año, los vértices B y C tienen mejores condiciones y la tasa de supervivencia es del 80 %. Al finalizar el año, el pájaro de fuego que sobrevive debe decidir si permanece en su colonia o emigra. Se ha observado que un 50 % decide permanecer mientras que el resto emigra y se dirige a una de las otras dos colonias con igual probabilidad. Presente un modelo que describa la evolución de esta población de aves.

12 Los 20 niños y niñas de la clase de primero de infantil (3 años) tienen dos toboganes en su aula, que les gustan mucho, uno rojo y otro amarillo. Cada día se montan una sóla vez uno de los toboganes y van cambiando de uno a otro según la siguiente pauta: de los que un día utilizaron el rojo, un tercio pasa al amarillo, y de los que usaron el amarillo, un cuarto cambia al rojo, mientras que los restantes usan de nuevo el mismo tobogán. Describa la evolución de la distribución de los niños en los dos toboganes, y proporcione la distribución asintótica. ¿Qué tobogán les gusta más?

13 Para beber agua un animal puede ir a un lago, a un río o a una alberca. Se sabe que si toma agua en el río al día siguiente no vuelve al río, y la probabilidad de que beba agua en el lago o en la alberca es la misma. Si bebe agua en el lago, al día siguiente siempre va al río, y si bebe en la alberca, al día siguiente repite en la alberca o bebe en el lago con igual probabilidad.

a) Describa con un grafo el problema anterior.

b) Estudie la distribución asintótica de la probabilidad de que el animal beba agua en cada uno de los tres sitios.

14 Un estudiante despistado del Grado en Matemáticas sabe que cuando anda sin destino fijo va hacia su derecha o a su izquierda con distintas probabilidades, digamos p y q, pero nunca se queda en el mismo sitio. Cuando sale de la cafetería de la Facultad de Ciencias puede ir hacia la derecha, sale de la Facultad y siempre se encuentra con alguien a quien saluda. Después puede seguir a la derecha, con lo que llega a su casa y se queda allí (a ver quién vuelve a la Facultad con el frío que hace), o a su izquierda, y vuelve a la cafetería. Si cuando sale de la cafetería va a su izquierda, entonces se detiene a leer los anuncios del panel del hall y puede ir de nuevo a la derecha o a la izquierda. Si continúa hacia la izquierda otra vez, temina en la sala de estudio, de donde no sale pues recuerda que lo que debe hacer es estudiar para los examenes finales.

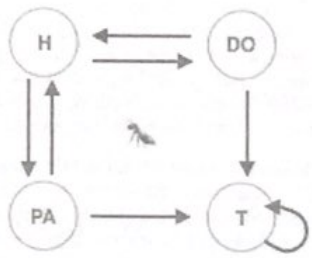
a) Describa con un grafo las aventuras de nuestro compañero.

b) Formule el problema en términos de un sistema de ecuaciones en diferencias.

c) Estudie las propiedades principales de la matriz de transición del sistema de ecuaciones en diferencias dado en b).

d) Describa el comportamiento, a largo plazo, de dicho estudiante.

15 Tras estudiar durante varios das el comportamiento de las hormigas en la cocina de cierta casa, se observ que los lugares favoritos en su recorrido desde su hormiguero (H) eran el armario donde se guardan algunos productos azucarados (PA) y el lugar donde se depositan los desechos orgnicos (DO). Tambin se observ que durante su recorrido pasaban por cierto lugar fijo de la cocina (T). As pues, con objeto de resolver el problema con las hormigas en la cocina, en dicha zona se coloc un producto qumico letal de forma que las hormigas que entran en esa zona mueren. El movimiento de las hormigas en la cocina viene descrito por el grafo siguiente:



Suponiendo que:

- Desde el hormiguero, las hormigas se distribuyen a partes iguales entre la zona PA y la zona DO.
- El 75 % de las hormigas que estn en las zonas PA o DO son atradas a la zona trampa (T).

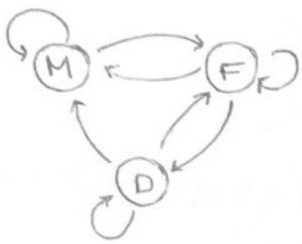
a) Escriba el sistema de ecuaciones en diferencias que modela esta situacin.Define una cadena de Markov?

b) Es absorbente? Razone que $\lim_{n\to\infty} T_n = 1$ siendo T_n la probabilidad de caer en la trampa en el n-simo da.

c) Si inicialmente todas las hormigas parten del hormiguero, cuntos das sern necesarios para que el 90 % o ms de las hormigas vivas se dirijan a la zona trampa (en cuyo caso damos por resuelto el problema)?

$\boxed{5}$ M_n = estudiantes de medicina en la generación n
F_n = " farmacia "
D_n = " derecho "

$$\left.\begin{array}{l} M_{n+1} = 0{,}8M_n + 0{,}3F_n + 0{,}2D_n \\ F_{n+1} = 0{,}2M_n + 0{,}4F_n + 0{,}1D_n \\ D_{n+1} = 0{,}3F_n + 0{,}7D_n \end{array}\right\} \begin{pmatrix} M_{n+1} \\ F_{n+1} \\ D_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0{,}8 & 0{,}3 & 0{,}2 \\ 0{,}2 & 0{,}4 & 0{,}1 \\ 0 & 0{,}3 & 0{,}7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} M_n \\ F_n \\ D_n \end{pmatrix}$$



Grafo fuertemente conectado $\Rightarrow$ Irreduc.

$\lambda_M = 1$ valor propio dominante

$$v_1 = \begin{pmatrix} 5/2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \|v_1\|_1 = \frac{9}{2} \quad \frac{v_1}{\|v_1\|_1} = \begin{pmatrix} 5/9 \\ 2/9 \\ 2/9 \end{pmatrix}$$

5/9 Medicina, 2/9 Farmacia, 2/9 Derecho

$\boxed{7}$ A_n = nº orangutanes que duermen en un árbol tipo A n-ésimo día
B_n = " B "
C_n = " C "

$$\left.\begin{array}{l} A_{n+1} = 0{,}6A_n + 0{,}2C_n \\ B_{n+1} = 0{,}4A_n + 0{,}5B_n \\ C_{n+1} = 0{,}5B_n + 0{,}8C_n \end{array}\right\} \begin{pmatrix} A_{n+1} \\ B_{n+1} \\ C_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0{,}6 & 0 & 0{,}2 \\ 0{,}4 & 0{,}5 & 0 \\ 0 & 0{,}5 & 0{,}8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_n \\ B_n \\ C_n \end{pmatrix}$$

$x_{n+1} = Mx_n \Rightarrow$ Soluc: $x_n = M^n x_0$

a) Falso, el 20% de los que anidan en un árbol C, cambian a un árbol A.

b) Verdadero, las columnas suman 1, es una matriz de Markov.

c) $1 \longrightarrow 1,2 \longrightarrow 1,2,3$
$2 \longrightarrow 2,3 \longrightarrow 1,2,3$
$3 \longrightarrow 1,3 \longrightarrow 1,2,3$ } $M^2 >> 0$

Verdadera, ya que es de Markov y estrictamente positiva (primitiva)

M primitiva $\xrightarrow{T.P.F}$ verdadera

d) Una cadena de Markov regular tiene $\lambda_1 = 1$ como valor propio dominante

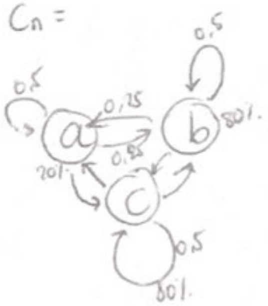
Calculo el vector de Perron → propio

$Mv = 1v \Rightarrow (M - I_3)v = 0$

$v_1 = \ker(M - I_3) = L\left\{\begin{pmatrix} 5 \\ 4 \\ 10 \end{pmatrix}\right\}$ $\quad \|v_1\|_1 = 19 \rightarrow v_1 = \begin{pmatrix} 5/19 \\ 4/19 \\ 10/19 \end{pmatrix}$

Verdadera, se cumplen los porcentajes. < 26,3% A; 21% B; 52,6% C

$\boxed{11}$ a_n = nº de pájaros en la colonia A al comenzar el n-ésimo año
b_n = B
c_n = C



a_{n+1} los que quedan (sobreviven al año ant.) + los que vienen de B y C del año ant.
$b_{n+1} =$ " + A y C
$c_{n+1} =$ " + A y B

$$\begin{pmatrix} 0,1 & 0,2 & 0,2 \\ 0,5 & 0,4 & 0,2 \\ 0,5 & 0,2 & 0,4 \end{pmatrix} M$$

$a_{n+1} = a_n \cdot 0,2 \cdot 0,5 + 0,8\, b_n \cdot 0,5 \cdot 0,5 + 0,8\, c_n \cdot 0,5 \cdot 0,5$

$b_{n+1} = b_n \cdot 0,8 \cdot 0,5 + 0,2 a_n \cdot 0,5 \cdot 0,5 \cdot 0,5 + 0,8 c_n \cdot 0,5 \cdot 0,5$

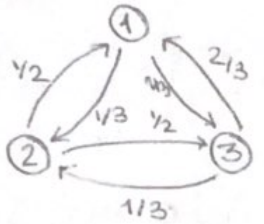
$c_{n+1} = c_n \cdot 0,8 \cdot 0,5 + 0,2 a_n \cdot 0,5 \cdot 0,5 + 0,8 b_n \cdot 0,5 \cdot 0,5$

M no es de Markov por filas ni por columnas.

11 (continuación)

$$x_{n+1} = \begin{pmatrix} 0,5 & 0,25 & 0,25 \\ 0,25 & 0,5 & 0,25 \\ 0,25 & 0,25 & 0,5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0,2\,a_n \\ 0,8\,b_n \\ 0,8\,c_n \end{pmatrix}$$

10



x_n = "Proporción de ratas en 1"
y_n = "Proporción de ratas en 2"
z_n = "Proporción de ratas en 3"

$$\left.\begin{aligned} x_{n+1} &= \tfrac{1}{2} y_n + \tfrac{2}{3} z_n \\ y_{n+1} &= \tfrac{1}{3} x_n + \tfrac{1}{3} z_n \\ z_{n+1} &= \tfrac{2}{3} x_n + \tfrac{1}{2} y_n \end{aligned}\right\} M = \begin{pmatrix} 0 & 1/2 & 2/3 \\ 1/3 & 0 & 1/3 \\ 2/3 & 1/2 & 0 \end{pmatrix}$$ Markov y positiva

$\lambda_M = 1$ mayor valor propio

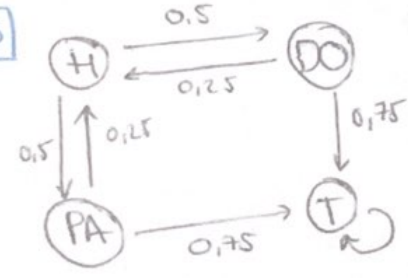
¿Primitiva?

$$\left.\begin{aligned} 1 &\longrightarrow 2,3 \longrightarrow 1,2,3 \\ 2 &\longrightarrow 1,3 \longrightarrow 1,2,3 \\ 3 &\longrightarrow 1,2 \longrightarrow 1,2,3 \end{aligned}\right\} \text{Primitiva} \Rightarrow \text{P-F} \rightarrow \lambda_M = 1 \text{ domin.}$$

$$V = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \quad \frac{V}{\|V\|} = \begin{pmatrix} 3/8 \\ 1/4 \\ 3/8 \end{pmatrix}$$

Tenemos 24 ratas $\Big<$ 9 en 1, 6 en 2, 9 en 3

15



$$\begin{pmatrix} H^{n+1} \\ DO^{n+1} \\ PA^{n+1} \\ T^{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0,25 & 0,25 & 0 \\ 0,5 & 0 & 0 & 0 \\ 0,5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0,75 & 0,75 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} H^n \\ DO^n \\ PA^n \\ T^n \end{pmatrix}$$

Define una cadena de Markov (sup $\|x_0\| = 1$)

b) $\lim_{n\to\infty} T_n = 1$

$M^n = P D^n P^{-1}$ → calculo pol. característico
$\lambda_1 = 0{,}5$
$\lambda_2 = -0{,}5$
$\lambda_3 = 0$
$\lambda_4 = 1$

de vect. propios a la usual

$$M = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & -1/3 \\ -1 & 0 & -1 & -1/3 \\ 1 & 0 & -1 & -1/3 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}}_{P} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & (-0{,}5)^n & 0 \\ 0 & 0 & 0 & (0{,}5)^n \end{pmatrix} \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & -0{,}5 & 0{,}5 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0{,}5 & -0{,}25 & -0{,}25 & 0 \\ -1{,}5 & -0{,}75 & -0{,}75 & 0 \end{pmatrix}}_{P^{-1}}$$

$\lambda = 0 \quad \lambda = 1 \quad \lambda = -0{,}5 \quad \lambda = 0{,}5$

$\ker(M - \lambda I) \Rightarrow \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} : (M - \lambda I)\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$

$$\lim_{n\to\infty} M^n = P \left(\lim_{n\to\infty} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & (-0{,}5)^n & 0 \\ 0 & 0 & 0 & (0{,}5)^n \end{pmatrix} \right) P^{-1} = P \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} P^{-1} =$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad x^n = M^n \cdot x_0$$

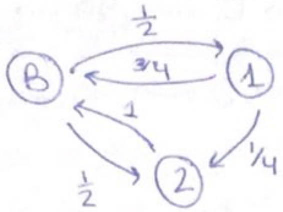
$$\lim_{n\to\infty} x^n = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \to \lim_{n\to\infty} T_n = 1$$

empiezan en el hormiguero.

c) $P \cdot D \cdot P^{-1} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$$M^4 = \begin{pmatrix} 1/16 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/32 & 1/32 & 0 \\ 0 & 1/32 & 1/32 & 0 \\ 15/16 & 15/16 & 15/16 & 1 \end{pmatrix} \to M^4 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/16 \\ 0 \\ 0 \\ 15/16 \end{pmatrix} \to > 90\%$$

$\boxed{9}$



$$M = \begin{array}{c} B \\ 1 \\ 2 \end{array} \begin{pmatrix} 0 & 3/4 & 1 \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 1/4 & 0 \end{pmatrix}$$

$x^{n+1} = Mx^n \qquad x^n = \begin{pmatrix} B^n \\ 1^n \\ 2^n \end{pmatrix}$

B^n = prob. planta baja

1^n = prob. primera planta

2^n = prob. segunda planta

$$V_1 \Rightarrow \begin{pmatrix} -1 & 3/4 & 1 \\ 1/2 & -1 & 0 \\ 1/2 & 1/4 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{cases} -x + \frac{3}{4}y + z = 0 \\ 1/2 x - y = 0 \\ \cancel{\frac{1}{2}x + \frac{1}{4}y - z = 0} \end{cases}$$

$y = 1 \quad x = 2 \quad z = \frac{5}{4}$

$$V_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 5/4 \end{pmatrix} \Rightarrow \|V_1\|_1 = \frac{17}{4}$$

$$\frac{V_1}{\|V_1\|_1} = \begin{pmatrix} 8/17 \\ 4/17 \\ 5/17 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 0{,}47 \\ 0{,}23 \\ 0{,}30 \end{pmatrix} \text{ A largo plazo}$$

$\lambda_1 = 1$ valor propio dominante por ser un grafo fuertemente conectado (irreducible) y ser de Markov por columnas y primitiva.

$\boxed{6}$

$A \longrightarrow 0 \longrightarrow 40 \longrightarrow 46$
$B \longrightarrow 80 \longrightarrow 0 \longrightarrow 24$
$C \longrightarrow 0 \longrightarrow 40 \longrightarrow 10$

$$\begin{pmatrix} a^{n+1} \\ b^{n+1} \\ c^{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & \cancel{a_{22}} & \cancel{a_{23}} \\ \cancel{a_{31}} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a^{n} \\ b^{n} \\ c^{n} \end{pmatrix} \to M = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & 0 & 0 \\ 0 & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

x del grafo

$$\begin{pmatrix} 40 \\ 0 \\ 40 \end{pmatrix} = M \begin{pmatrix} 0 \\ 80 \\ 0 \end{pmatrix} \longrightarrow a_{12} = a_{32} = 0{,}5$$

$$\begin{pmatrix} 46 \\ 24 \\ 10 \end{pmatrix} = M \begin{pmatrix} 40 \\ 0 \\ 40 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{array}{l} a_{11} + a_{13} = 1{,}15 \\ a_{21} = 0{,}6 \ (24/40) \\ a_{33} = 0{,}25 \ (10/40) \end{array}$$

(sobra →)

$$M = \begin{pmatrix} a_{11} & 0{,}5 & a_{13} \\ 0{,}6 & 0 & 0 \\ 0 & 0{,}5 & 0{,}25 \end{pmatrix}$$

Es de Markov con $a_{11} = 0.4$ y $a_{13} = 0.75$

Como el grafo está fuertemente conectado $\Rightarrow$ M irreduc.

M irred, Markov $\Rightarrow \lambda_1 = 1$ vp dominante

$$V_{\lambda_1} = \ker(M - Id) = L\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 0{,}6 \\ 0{,}4 \end{pmatrix}\right\} \quad \frac{x_1}{\|x_1\|} = \begin{pmatrix} 0{,}5 \\ 0{,}3 \\ 0{,}2 \end{pmatrix} \begin{array}{l} 50\%\ A \\ 30\%\ B \\ 20\%\ C \end{array}$$

③. Azules → AA

Amarillas → aa

Verdes → Aa

AA × aa

Aa Aa Aa Aa

100% verdes

Aa × Aa

AA Aa Aa aa

25% azules
50% verdes
25% amarillas

aa × AA

100% verdes

$$\begin{pmatrix} x^{n+1} \\ y^{n+1} \\ z^{n+1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0{,}25 & 0 \\ 1 & 0{,}5 & 1 \\ 0 & 0{,}25 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x^n \\ y^n \\ z^n \end{pmatrix}$$

$$\left.\begin{aligned} x^{n+1} &= 0{,}25y^n \\ y^{n+1} &= x^n + 0{,}5y^n + z^n \\ z^{n+1} &= 0{,}25y^n \end{aligned}\right\}$$ A largo plazo.

Estado — Estado siguiente

$1 \longrightarrow 2 \longrightarrow 1,2,3$ $\quad L^2 >> 0 \rightarrow$ primitiva

$2 \longrightarrow 1,2,3 \longrightarrow 1,2,3$

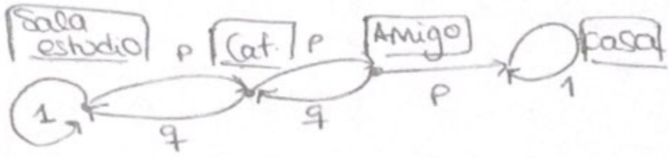
$3 \longrightarrow 2 \longrightarrow 1,2,3$

Por TMa P-F $\lambda_M = 1$ dominante $\Rightarrow$ V_p asociado a λ_1

$$v = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} \rightarrow \frac{v}{\|v\|_1} = \begin{pmatrix} 1/6 \\ 4/6 \\ 1/6 \end{pmatrix}$$

14

a)



b) P_n^1 = probab. sala de estudio en la etapa n

P_n^2 = " casa

P_n^3 = " hall

P_n^4 = " cafetería

P_n^5 = " amigo.

$$\begin{pmatrix} P^1_{n+1} \\ P^2_{n+1} \\ \hline Q^3_{n+1} \\ Q^4_{n+1} \\ Q^5_{n+1} \end{pmatrix} = \left(\begin{array}{cc|ccc} 1 & 0 & q & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & p \\ \hline 0 & 0 & 0 & q & 0 \\ 0 & 0 & p & 0 & q \\ 0 & 0 & 0 & p & 0 \end{array}\right) \qquad A = \left(\begin{array}{c|c} I & B \\ \hline 0 & C \end{array}\right)$$

c) Matriz reducible (ya está reducida (bloque de 0s))

Es de Markov por columnas (estocástica)

Matriz positiva.

No es primitiva

d) $x_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \hline 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ P_0, Q_0 → cafetería $\qquad P_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

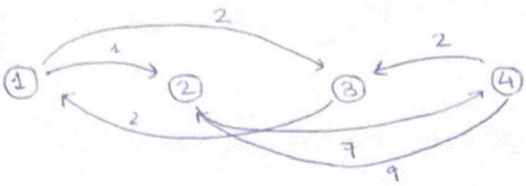
$$\lim_{n\to\infty} P_n = I_2 B (I_3 - C)^{-1} Q_0 =$$

$$= \begin{pmatrix} q & 0 & 0 \\ 0 & 0 & p \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -q & 0 \\ -p & 1 & -q \\ 0 & -p & 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} =$$

$$= \frac{1}{1-2pq} \begin{pmatrix} q(1-pq) & q^2 & q^3 \\ p^3 & p^2 & p(1-pq) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\lim P_n \to \frac{1}{1-2pq} \begin{pmatrix} q^2 \\ p^2 \end{pmatrix}$$

$\boxed{2}$ a) $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 7 \\ 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 9 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ irreducible pero no primitiva.



fuertemente conectado

$A \cdot A = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 & 7 \\ 0 & 63 & 14 & 0 \\ 0 & 2 & 4 & 0 \\ 4 & 0 & 0 & 63 \end{pmatrix}$ $A^3 = \begin{pmatrix} 0 & 67 & 22 & 0 \\ 28 & 0 & 0 & 441 \\ 8 & 0 & 0 & 14 \\ 0 & 571 & 134 & 0 \end{pmatrix}$

$A^4 = \begin{pmatrix} 44 & 0 & 0 & 469 \\ 0 & 3997 & 938 & 0 \\ 0 & 134 & 44 & 0 \\ 628 & 0 & 0 & 3997 \end{pmatrix}$; $A^5 = \begin{pmatrix} 0 & 4265 & 1026 & 0 \\ 1876 & 0 & 0 & 27979 \\ 88 & 0 & 0 & 938 \\ 0 & 36241 & 8530 & 0 \end{pmatrix}$

No es primitiva, los ceros siempre ocupan la misma posición en las iteraciones pares y los mismos en las iteraciones impares

b) $x_{n+1} = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 0,1 & 0,5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0,9 & 0,5 & 0 \end{pmatrix}}_{M} x_n$

Es de Markov regular por ser M una matriz de Markov. Tendría que cumplirse que $\|x_n\|_1 = 1$ y que M sea primitiva. Sabemos que no es absorbente por no tener ningún $\underline{m_{jj} = 1}$.

Veamos si M es primitiva

$$\begin{pmatrix} 0 & 0{,}1 & 0{,}5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0{,}9 & 0{,}5 & 0 \end{pmatrix} = M \quad M^2 = \begin{pmatrix} 0{,}5 & 0 & 0 & 0{,}1 \\ 0 & 0{,}9 & 0{,}5 & 0 \\ 0 & 0{,}1 & 0{,}5 & 0 \\ 0{,}5 & 0 & 0 & 0{,}9 \end{pmatrix}$$

No lo es, la distribución de los 0s es igual en las iteraciones

c) $A = \begin{pmatrix} 3 & -5 \\ 1 & -1{,}5 \end{pmatrix}$

i) $2A^2 - 3A + I = (0)$

$$A^2 = \begin{pmatrix} 4 & -7{,}5 \\ 1{,}5 & -2{,}75 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 8 & -15 \\ 3 & -5{,}5 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 9 & -15 \\ 3 & -4{,}5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

ii) $x_{n+1} = Ax_n \to$ sol $x_n = A^n x_0$ con $x_0 = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} \to v = \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \end{pmatrix}$

Calculamos los valores propios

$$\det \begin{pmatrix} 3-\lambda & -5 \\ 1 & -1{,}5-\lambda \end{pmatrix} = (3-\lambda)(-1{,}5-\lambda) + 5 =$$

$$-4{,}5 - 3\lambda - 1{,}5\lambda + \lambda^2 + 5 =$$

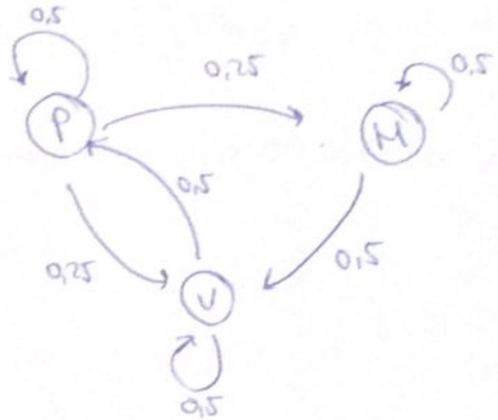
$$\lambda^2 - 4{,}5\lambda + 0{,}5 = 0 < \begin{matrix} \lambda_1 = (9+\sqrt{73})/4 \\ \lambda_2 = (9-\sqrt{75})/4 \end{matrix}$$

si $\rho(A) = 1$ y $x_0 >> 0$, entonces $\lim x_n = x >> 0$, que es el vector propio asociado a $\lambda_1 = 1$.

4. Producción → 0,5 se quedan $\begin{cases} \to 0{,}25 \text{ a Mark} \\ \to 0{,}25 \text{ a ventas} \end{cases}$

Marketing → 0,5 se quedan → 0,5 a ventas

ventas → 0,5 se quedan → 0,5 a Producción



$$\begin{array}{c} \\ P \\ M \\ V \end{array} \begin{array}{c} \text{Salen} \\ \begin{pmatrix} 0{,}5 & 0 & 0{,}5 \\ 0{,}25 & 0{,}5 & 0 \\ 0{,}25 & 0{,}5 & 0{,}5 \end{pmatrix} \end{array}$$

$$\begin{pmatrix} P^{n+1} \\ M^{n+1} \\ V^{n+1} \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 0{,}5 & 0 & 0{,}5 \\ 0{,}25 & 0{,}5 & 0 \\ 0{,}25 & 0{,}5 & 0{,}5 \end{pmatrix}}_{A} \cdot \begin{pmatrix} P^n \\ M^n \\ V \end{pmatrix}$$

Matriz de Markov por columnas → $\rho(A) = 1 = \lambda_M$

Irreducible por estar fuertemente conectada

Por el teorema P.F $\lambda_M = 1 > 0$ simple y dominante, esto último por ser todos los $a_{ii} > 0$.

Calculamos el vector de Perron (único vect. propio $u_1 >> 0$ con $\|u_1\|_1 = 1$)

$(M - I)\, u = 0$

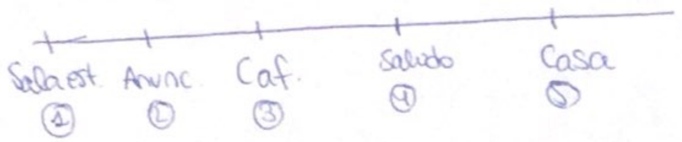
$$\begin{pmatrix} -0{,}5 & 0 & 0{,}5 \\ 0{,}25 & -0{,}5 & 0 \\ 0{,}25 & 0{,}5 & -0{,}5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_1 \\ u_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{array}{l} -0{,}5u_1 + 0{,}5u_3 = 0 \\ \cancel{0{,}25u_1 - 0{,}5u_2 = 0} \\ 0{,}25u_1 + 0{,}5u_2 - 0{,}5u_3 = 0 \\ \hline u_1 = 2 = u_3 \,;\; u_2 = 1 \end{array}$$

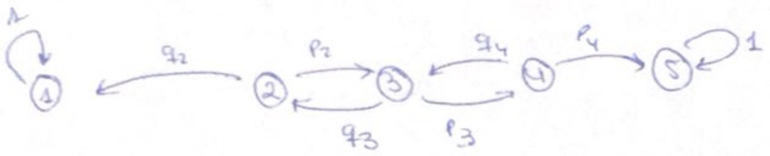
$u = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad \|u\|_1 = 4$

$\frac{1}{\|u\|} u = \begin{pmatrix} 1/4 \\ 1/2 \\ 1/4 \end{pmatrix}$ Interpr $\Rightarrow$ $\begin{cases} 25\% \text{ Prod} \\ 50\% \text{ Mark} \\ 25\% \text{ ventas.} \end{cases}$

Cadena regular $\rightarrow$ a largo plazo iría al vect. propio asociado a $\lambda_1 = 1$.

(14)





$$\begin{pmatrix} 1 & q_2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & q_3 & 0 & 0 \\ 0 & p_2 & 0 & q_4 & 0 \\ 0 & 0 & p_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & p_4 & 1 \end{pmatrix}$$

$q_2 + p_2 = 1$

$q_3 + p_3 = 1 \quad 0 < q_i, p_i < 1$

$q_4 + p_4 = 1$

$$\begin{cases} x^{n+1} = x^n + q_2 y^n \\ y^{n+1} = q_3 z^n \\ z^{n+1} = p_2 y^n + q_4 t^n \\ t^{n+1} = p_3 z^n \\ s^{n+1} = p_4 t^n + s^n \end{cases}$$

Matriz de Markov → Reducible.

Cadena absorbente → $\lambda_M = 1$ (no tiene porqué ser dominante)

Queremos conseguir $\left(\begin{array}{c|c} A_1 & B \\ \hline 0 & A_2 \end{array}\right)$

Renombramos los nodos. (extremos primero)

$A_1 = N1$
$A_2 = N5$
$A_3 = N2$
$A_4 = N3$
$A_5 = N4$

$$\begin{array}{c} A_1 \uparrow \qquad B \uparrow \\ \left(\begin{array}{cc|ccc} 1 & 0 & q_2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & p_4 \\ \hline 0 & 0 & 0 & q_3 & 0 \\ 0 & 0 & p_2 & 0 & q_4 \\ 0 & 0 & 0 & p_3 & 0 \end{array}\right) \\ \downarrow 0 \qquad \downarrow A_2 \end{array}$$

Markov

Reducible

$\lambda_M = 1$ es el mayor valor propio

$P_i^{(n)}$ = probabilidad de estar en el nodo A_i en el instante n $i=1,2$

$Q_i^{(n)}$ = " " A_i " $i=3,4,5$

$$\left(\begin{array}{cc|ccc} 0 & 0 & q_2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & p_4 \\ \hline 0 & 0 & 0 & p_3 & 0 \\ 0 & 0 & p_2 & 0 & q_4 \\ 0 & 0 & 0 & q_3 & 0 \end{array}\right) \underbrace{\begin{pmatrix} P_1^{(n)} \\ P_2^{(n)} \\ \hline Q_3^{(n)} \\ Q_4^{(n)} \\ Q_5^{(n)} \end{pmatrix}}_{= P^{(n)},\ Q^{(n)}} = \begin{pmatrix} P_1^{(n+1)} \\ P_2^{(n+1)} \\ \hline Q_3^{(n+1)} \\ Q_4^{(n+1)} \\ Q_5^{(n+1)} \end{pmatrix}$$

$\mathbb{P}_{n+1} = M \mathbb{P}_n \to \mathbb{P}_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

Está en la cafet.

$\begin{pmatrix} P_1^{(0)} \\ P_2^{(0)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} Q_3^{(0)} \\ Q_4^{(0)} \\ Q_5^{(0)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

Trabajando por bloques
$$\left.\begin{array}{l} A_1 P^{(n)} + B Q^{(n)} = P^{(n+1)} \\ 0\, P^{(n)} + A_2 Q^{(n)} = Q^{(n+1)} \end{array}\right\} \begin{array}{l} ① \\ ② \end{array}$$

Resolvemos ②

$A_2 Q^{(n)} = Q^{(n+1)} \Rightarrow$ sol $Q^{(n)} = A_2^{(n)} Q^{(0)}$ $n \geq 0$

$$A_2^n \Rightarrow \begin{pmatrix} 0 & p_3 & 0 \\ p_2 & 0 & q_4 \\ 0 & q_3 & 0 \end{pmatrix}$$