Solución ejercicios Tema 2

Manuel Vicente Bolaños Quesada

1. ¿Es posible aplicar el método de Gauss al sistema de ecuaciones lineales

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 8.8 \\ 4 & 5 & 6 & 6 & 6 \\ 7 & 8 & 9 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 3 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/2 \\ 2/3 \\ 3/4 \\ 4/5 \\ 5/6 \end{bmatrix}?$$

¿Por qué?

- **Solución.**

Tenemos que

$$\det(A_1) = 1, \quad \det(A_2) = \det \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 5 \end{bmatrix} = -3, \quad \det(A_3) = \det \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix} = 0$$

Como $\det(A_3) = 0$, no se puede completar el método de Gauss hasta el paso 5.

2. Describe en forma de algoritmo la obtención, cuando es factible, de la factorización LU tipo Crout de una matriz regular. Prográmalo y aplícalo a la matriz

$$\begin{bmatrix} 1.1 & 2.2 & 3.3 & 0 & 0 & 1.1 & 0.55 & 1.1 \\ 2 & 5.2 & 6 & 1.2 & 1.2 & 3.2 & 2.2 & 2 \\ 3 & 6 & 10.3 & 0.78 & 0 & 3.91 & 2.54 & 4.17 \\ 0 & 1 & 0.6 & 2.76 & 3.8 & 2.82 & 4.28 & 1.94 \\ 0 & 1 & 0 & 3 & 6.5 & 3 & 6.5 & 2 \\ 1 & 3 & 3.7 & 2.42 & 3 & 5.09 & 15.26 & 15.43 \\ 0.5 & 2 & 2.3 & 3.48 & 6 & 11.06 & 57.59 & 60.92 \\ 1 & 2 & 3.9 & 1.54 & 2 & 10.63 & 60.22 & 69.61 \end{bmatrix}$$

Resuelve a partir de esta factorización el sistema que tiene a esta matriz por matriz de coeficientes y por vector de términos $[1, 0, -1, 0, -2, 1, 2, 2]^T$

- **Solución.**

Resuelto con Maxima:

3. Dada la matriz

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 5 & 8 & 11 \\ 3 & 9 & 16 & 23 \\ 4 & 12 & 24 & 37 \end{bmatrix}$$

y los vectores

$$b_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \\ 10 \\ 16 \end{bmatrix}, \quad b_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 5 \\ 13 \\ 19 \end{bmatrix}, \quad b_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 7 \\ 13 \end{bmatrix}, \quad b_4 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 4 \\ 9 \end{bmatrix},$$

resuelve los cuatro sistemas de ecuaciones lineales $Ax = b_i$, $i = 1, 2, 3, 4$, mediante el método más eficiente.

- **Solución**

Hallemos, si es posible, una factorización LU de la matriz A. Usaremos la de tipo Doolittle.

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 5 & 8 & 11 \\ 3 & 9 & 16 & 23 \\ 4 & 12 & 24 & 37 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ l_{21} & 1 & 0 & 0 \\ l_{31} & l_{32} & 1 & 0 \\ l_{41} & l_{42} & l_{43} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} & u_{13} & u_{14} \\ 0 & u_{22} & u_{23} & u_{24} \\ 0 & 0 & u_{33} & u_{34} \\ 0 & 0 & 0 & u_{44} \end{bmatrix}$$

Tenemos entonces:

$u_{11} = 1, u_{12} = 2, u_{13} = 3, u_{14} = 4$

$2 = l_{21}u_{11} \implies l_{21} = 2$

$5 = l_{21}u_{12} + u_{22} = 4 + u_{22} \implies u_{22} = 1$

$8 = l_{21}u_{13} + u_{23} = 6 + u_{23} \implies u_{23} = 2$

$11 = l_{21}u_{14} + u_{24} = 8 + u_{24} \implies u_{24} = 3$

$3 = l_{31}u_{11} \implies l_{31} = 3$

$9 = l_{31}u_{12} + l_{32}u_{22} = 6 + l_{32} \implies l_{32} = 3$

$16 = l_{31}u_{13} + l_{32}u_{23} + u_{33} = 9 + 6 + u_{33} \implies u_{33} = 1$

$23 = l_{31}u_{14} + l_{32}u_{24} + u_{34} = 12 + 9 + u_{34} \implies u_{34} = 2$

$4 = l_{41}u_{11} \implies l_{41} = 4$

$12 = l_{41}u12 + l_{42}u_{22} = 8 + l_{42} \implies l_{42} = 4$

$24 = l_{41}u_{13} + l_{42}u_{23} + l_{43}u_{33} = 12 + 8 + l_{43} \implies l_{43} = 4$

$37 = l_{41}u_{14} + l_{42}u_{24} + l_{43}u_{34} + u_{44} = 16 + 12 + 8 + u_{44} = 1$

Así que

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 5 & 8 & 11 \\ 3 & 9 & 16 & 23 \\ 4 & 12 & 24 & 37 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 3 & 1 & 0 \\ 4 & 4 & 4 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

- **Primer sistema**. $b_1 = [1, 4, 10, 16]^T$
  Resolvemos el sistema triangular auxiliar:
  $\mathbf{Ly_1} = \mathbf{b_1}$, cuya solución se obtiene fácilmente por ser triangular, y es $y_1 = [1, 2, 1, 0]^T$ Y ahora, resolvemos el sistema $\mathbf{Ux_1} = \mathbf{y_1}$, cuya solución también se obtiene fácilmente, y es $\boxed{x_1 = [-2, 0, 1, 0]^T}$, que también es solución del sistema original, $\mathbf{Ax_1} = \mathbf{b_1}$.

- **Segundo sistema**. $b_2 = [1, 5, 13, 19]^T$
  Resolvemos el sistema triangular auxiliar:
  $\mathbf{Ly_2} = \mathbf{b_2}$, cuya solución se obtiene fácilmente por ser triangular, y es $y_2 = [1, 3, 1, -1]^T$ Y ahora, resolvemos el sistema $\mathbf{Ux_2} = \mathbf{y_2}$, cuya solución también se obtiene fácilmente, y es $\boxed{x_2 = [-4, 0, 3, -1]^T}$, que también es solución del sistema original, $\mathbf{Ax_2} = \mathbf{b_2}$.

- **Tercer sistema**. $b_3 = [1, 3, 7, 13]^T$
  Resolvemos el sistema triangular auxiliar:
  $\mathbf{Ly_3} = \mathbf{b_3}$, cuya solución se obtiene fácilmente por ser triangular, y es $y_3 = [1, 1, 1, 1]^T$ Y ahora, resolvemos el sistema $\mathbf{Ux_3} = \mathbf{y_3}$, cuya solución también se obtiene fácilmente, y es $\boxed{x_3 = [0, 0, -1, 1]^T}$, que también es solución del sistema original, $\mathbf{Ax_3} = \mathbf{b_3}$.
- **Cuarto sistema**. $b_4 = [0, 1, 4, 9]^T$
  Resolvemos el sistema triangular auxiliar:
  $\mathbf{Ly_4} = \mathbf{b_4}$, cuya solución se obtiene fácilmente por ser triangular, y es $y_4 = [0, 1, 1, 1]^T$ Y ahora, resolvemos el sistema $\mathbf{Ux_4} = \mathbf{y_4}$, cuya solución también se obtiene fácilmente, y es $\boxed{x_4 = [-1, 0, -1, 1]^T}$, que también es solución del sistema original, $\mathbf{Ax_4} = \mathbf{b_4}$.

4. Supongamos que una matriz regular y tridiagonal

$$\begin{bmatrix} a_1 & c_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ b_2 & a_2 & c_2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & b_3 & a_3 & c_3 & \cdots & 0 \\ & \cdots & & & \cdots & \\ 0 & \cdots & & b_{N-1} & a_{N-1} & c_{N-1} \\ 0 & \cdots & & 0 & b_N & a_N \end{bmatrix}$$

admite una descomposición LU tipo Doolittle. Prueba que las correspondientes matrices triangulares adoptan la forma

$$L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ l_2 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & l_3 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ & \cdots & & & \cdots & \\ 0 & \cdots & & l_{N-1} & 1 & 0 \\ 0 & \cdots & & 0 & l_N & 1 \end{bmatrix}, \quad U = \begin{bmatrix} d_1 & c_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & d_2 & c_2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & d_3 & c_3 & \cdots & 0 \\ & \cdots & & & \cdots & \\ 0 & \cdots & & 0 & d_{N-1} & c_{N-1} \\ 0 & \cdots & & 0 & 0 & d_N \end{bmatrix}$$

con $d_1 = a_1$, e $i = 2, \ldots, N \implies l_i = \dfrac{b_i}{d_{i-1}}, \quad d_i = a_i - l_i c_{i-1}$.

- <u>**Solución.**</u>

Sean

$$L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ l_{21} & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ l_{N1} & l_{N2} & \cdots & 1 \end{bmatrix}, \quad U = \begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} & \cdots & u_{1N} \\ 0 & u_{22} & \cdots & u_{2N} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & u_{NN} \end{bmatrix}$$

Entonces, si estas son matrices de factorización LU de tipo Doolittle, tenemos que $LU = A$, donde A es la matriz tridiagonal del enunciado.

- Multiplicando la primera fila de L por las columnas de U obtenemos que $u_{11} = a_1, u_{12} = c_1$, y el resto de la fila son ceros.
- Multiplicando la segunda fila de L por las columnas de U, obtenemos que $l_{21} \cdot u_{11} = b_2 \implies l_{21} = \frac{b_2}{a_1}$, y $l_{21} \cdot c_1 + d_2 = a_2 \implies d_2 = a_2 - l_{21} \cdot c_1$.
- Repitiendo este proceso para todas las filas y columnas, obtenemos la solución del enunciado.

5. Decide razonadamente si la matriz

$$A = \begin{bmatrix} 2 & \sqrt{2} & \sqrt{2} \\ \sqrt{2} & 2 & 5 \\ \sqrt{2} & 5 & 18 \end{bmatrix}$$

es o no definida positiva, y aplica tu argumento para resolver el sistema de ecuaciones lineales

$$Ax = \begin{bmatrix} 2 \\ 6 + \sqrt{2} \\ 26 + \sqrt{2} \end{bmatrix}$$

- **Solución.**

Sabemos que una matriz es definida si y solo si admite una factorización tipo Cholesky. Comprobemos que, en efecto, admite dicha factorización.

$$\begin{bmatrix} 2 & \sqrt{2} & \sqrt{2} \\ \sqrt{2} & 2 & 5 \\ \sqrt{2} & 5 & 18 \end{bmatrix} A = U^T \cdot U = \begin{bmatrix} u_{11} & 0 & 0 \\ u_{21} & u_{22} & 0 \\ u_{31} & u_{32} & u_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{11} & u_{21} & u_{31} \\ 0 & u_{22} & u_{32} \\ 0 & 0 & u_{33} \end{bmatrix}$$

de donde obtenemos las siguientes ecuaciones y soluciones:

- $u_{11}^2 = 2 \implies u_{11} = \sqrt{2}$
- $u_{11}u_{21} = \sqrt{2} \implies u_{21} = 1$
- $u_{11}u_{31} = \sqrt{2} \implies u_{31} = 1$
- $u_{21}^2 + u_{22}^2 = 2 \implies u_{22} = 1$
- $u_{21}u_{31} + u_{22}u_{32} = 5 \implies u_{32} = 4$
- $u_{31}^2 + u_{32}^2 + u_{33}^2 = 18 \implies u_{33} = 1$

de donde $A = U^T \cdot U$, donde $U = \begin{bmatrix} \sqrt{2} & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, y por tanto A es definida positiva. Para resolver el sistema pedido, resolveremos primero el sistema auxiliar $U^t y = \begin{bmatrix} 2 \\ 6+\sqrt{2} \\ 26+\sqrt{2} \end{bmatrix}$. La solución a este sistema es inmediata, por ser U^T una matriz triangular inferior, y es $y = [\sqrt{2}, 6, 2]^T$. Ahora, resolvemos el sistema $Ux = y$, cuya solución también es fácil, por ser U una matriz triangular superior, $\boxed{x = [1, -2, 2]^T}$, que es también solución del sistema original.

6. Se considera el sistema de ecuaciones lineales

$$\begin{bmatrix} 5 & -2 \\ 2 & 7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 13 \\ 13 \end{bmatrix}$$

cuya solución exacta es $x_1 = 3, x_2 = 1$.

- Demuestra que los correspondientes métodos de Jacobi y Gauss-Seidel convergen para cualquier elección de la estimación inicial.
- Si modificamos el sistema anterior aplicándole una transformación elemental que consiste en intercambiar de posición sus ecuaciones obtenemos este otro equivalente

$$\begin{bmatrix} 2 & 7 \\ 5 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 13 \\ 13 \end{bmatrix}$$

  Estudia la convergencia de los métodos de Jacobi y Gauss-Seidel asociados.
- Ilustra los resultados anteriores realizando 5 iteraciones con ambos métodos iterativos, partiendo en el primer sistema de la estimación inicial $x_0 = [-50, -40]^T$, y en el segundo de $x_0 = [1.1, 1.1]^T$

Solución.

- Sean B y B' las matrices asociadas a los métodos de Jacobi y Gauss-Seidel, respectivamente. Sean $D = \begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 7 \end{bmatrix}, E = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -2 & 0 \end{bmatrix}, F = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$. Entonces

$$B = D^{-1}(E+F) = \begin{bmatrix} 0 & 2/5 \\ -2/7 & 0 \end{bmatrix} \implies p_B(\lambda) = \lambda^2 + \frac{4}{35} \implies \lambda = \pm\frac{2}{\sqrt{35}}i \implies \rho(B) < 1$$

$$B' = (D-E)^{-1}F = \begin{bmatrix} 0 & 2/5 \\ 0 & -4/35 \end{bmatrix} \implies p_{B'}(\lambda) = \lambda^2 - \frac{4}{35}\lambda = \lambda(\lambda - \frac{4}{35}) \implies \rho(B') = \frac{4}{35} < 1$$

  Como los dos radios espectrales son menores que 1, los métodos de Jacobi y Gauss-Seidel convergen para cualquier elección de la estimación inicial.

- Sean B y B' las matrices asociadas a los métodos de Jacobi y Gauss-Seidel, respectivamente. Sean $D = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}, E = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -5 & 0 \end{bmatrix}, F = \begin{bmatrix} 0 & -7 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$. Entonces

  $$B = D^{-1}(E+F) = \begin{bmatrix} 0 & -7/2 \\ 5/2 & 0 \end{bmatrix} \Longrightarrow p_B(\lambda) = \lambda^2 + \frac{35}{4} \Longrightarrow \lambda = \pm\frac{\sqrt{35}}{2}i \Longrightarrow \rho(B) = \frac{\sqrt{35}}{2} > 1$$

  $$B' = (D-E)^{-1}F = \begin{bmatrix} 0 & -7/2 \\ 0 & -35/4 \end{bmatrix} \Longrightarrow p_{B'}(\lambda) = \lambda^2 + \frac{35}{4}\lambda = \lambda(\lambda + \frac{35}{4}) \Longrightarrow \rho(B') = \frac{35}{4} > 1$$

  Como los dos radios espectrales son mayores que 1, no podemos afirmar que los métodos de Jacobi y Gauss-Seidel converjan para cualquier elección de la estimación inicial.

- Solución con Maxima:

7. Para las matrices A_1 y A_2 de la sección 2.2, ilustra con los sistemas de ecuaciones lineales que se describen a continuación la velocidad de convergencia calculada para dichas matrices. En concreto, considera los dos sistemas s_1 y s_2 cuyas matrices de coeficientes son A_1 y A_2, respectivamente, y tienen por vectores de términos independientes los que hacen que la solución sea $x = [1, 1, 1]^T$. Construye para estos sistemas s_1 y s_2 los 4 y 6 primeros iteradores, respectivamente, generados tanto por el método de Jacobi como por el de Gauss-Seidel, partiendo de la estimación inicial nula.

   - **<u>Solución.</u>**

   Resuelto con Maxima:

8. Decide razonadamente cuáles de los siguientes métodos iterativos es convergente para cualquier estimación inicial:

   - Jacobi y Gauss-Seidel para el sistema $\begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 9/2 & 0.5 & -1 \\ 1 & 2 & 3000 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 40 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ \pi \\ \sqrt{21} \\ -1234 \end{bmatrix}$
   - Jacobi y Gauss-Seidel para el sistema $\begin{bmatrix} 0.5 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$

   Solución.

   - Sabemos que si un sistema de ecuaciones lineales tiene por matriz de coeficientes una matriz diagonalmente estrictamente dominante, entonces los correspondientes métodos de Jacobi y Gauss-Seidel convergen para cualquier estimación inicial. Como $|3| > |1|+|0|+|-1|$, $|9/2| > |1|+|0.5|+|-1|$, $|3000| > |1|+|2|+|4|$, $|40| > |1|+|2|+|3|$, la matriz de coeficientes es diagonalmente estrictamente decreciente, por lo que los métodos de Jacobi y Gauss-Seidel convergen para cualquier estimación inicial.
   - Sean B y B' las matrices asociadas a los métodos de Jacobi y Gauss-Seidel, respectivamente. Sean $D = \begin{bmatrix} 0.5 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$, $E = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \end{bmatrix}$, $F = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$. Entonces

     $$B = D^{-1}(E+F) = \begin{bmatrix} 0 & -2 & 0 \\ 0.5 & 0 & -0.5 \\ 1/3 & -1/3 & 0 \end{bmatrix} \implies p_B(\lambda) = \lambda^3 - \frac{7}{6}\lambda + \frac{1}{3} = 0 \implies \rho(B) \approx 1.202 > 1$$

     $$B' = (D-E)^{-1}F = \begin{bmatrix} 0 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & -0.5 \\ 0 & 1/3 & 1/6 \end{bmatrix} \implies p_{B'}(\lambda) = 6\lambda^3 - 7\lambda^2 + 2\lambda = \lambda(\lambda - 2/3)(\lambda - 1/3)$$

     $\implies \rho(B') = 2/3 < 1$

     Entonces, el método de Jacobi no converge para todas las estimaciones iniciales, pero el método de Gauss-Seidel, sí.

9. Dado el sistema de ecuaciones lineales

   $$\begin{bmatrix} 10 & 9 & 1 \\ 1 & 5 & 4 \\ 7 & 3 & 11 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 27 \\ 7 \\ 2 \end{bmatrix}$$

   - prueba que el correspondiente método de Jacobi es convergente y mide su velocidad de convergencia,
   - aplica el método de Jacobi al sistema anterior, partiendo de la iteración inicial $x_0 = [0,0,0]^T$ y realizando 12, 45 y 100 iteraciones, y
   - calcula la solución exacta mediante un adecuado comando de Maxima. ¿Guardan relación los razonamientos del primer apartado y los resultados numéricos del segundo?¿Por qué?

   Solución.

   - Sea B la matriz asociada al método de Jacobi. Sean $D = \begin{bmatrix} 10 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 11 \end{bmatrix}$, $E = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ -7 & -3 & 0 \end{bmatrix}$, $F = \begin{bmatrix} 0 & -9 & -1 \\ 0 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$. Entonces

     $$B = D^{-1}(E+F) = \begin{bmatrix} 0 & -9/10 & -1/10 \\ -1/5 & 0 & -4/5 \\ -7/11 & -3/11 & 0 \end{bmatrix}$$

     Resolvemos $p_B(\lambda) = 0$, y la solución con mayor valor absoluto es $\lambda \approx 0.97 \implies \rho(B) \approx 0.97 < 1$. Entonces, el método de Jacobi es convergente. Como $\rho(B)$ es un número muy cercano a 1, la velocidad de convergencia será lenta.

- Resuelto con Maxima.
- Resuelto con Maxima

10. Para el sistema de ecuaciones lineales

$$\begin{bmatrix} 1/10 & 2/11 & 3/7 \\ 4 & 5 & 4 \\ 7 & 3 & 8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 547/770 \\ 13 \\ 18 \end{bmatrix}$$

- estudia la convergencia del correspondiente método de Gauss-Seidel,
- aplica el método de Gauss-Seidel al sistema anterior, partiendo de la iteración inicial $x_0 = [0,0,0]^T$ y realizando 9 iteraciones y
- resuelve el sistema anterior mediante un adecuado comando de Maxima y halla el error relativo (norma $\|\cdot\|_\infty$ del máximo) que se comete al tomar x_0 como aproximación de la solución exacta x. Interpreta dicho error a la luz del primer apartado.

Solución.

- Sea B la matriz asociada al método de Gauss-Seidel. Sean $D = \begin{bmatrix} 1/10 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 8 \end{bmatrix}$, $E = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -4 & 0 & 0 \\ -7 & -3 & 0 \end{bmatrix}$, $F = \begin{bmatrix} 0 & -2/11 & -3/7 \\ 0 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$. Entonces

$$B = (D-E)^{-1}F = \begin{bmatrix} 0 & -20/11 & -30/7 \\ 0 & 16/19 & 92/35 \\ 0 & 23/28 & 387/140 \end{bmatrix} \implies \rho(B) \approx 3.89 > 1$$

  Por tanto, el método no converge para todas las estimaciones iniciales.
- Resuelto con Maxima.
- Resuelto con Maxima.

11. Sea $A \in \mathbb{R}^{N\times N}$ una matriz regular con $a_{11}\cdots a_{NN} \neq 0$

- Comprueba que la correspondiente matriz del método de Jacobi $M^{-1}N = D^{-1}(E+F)$ tiene norma infinito menor estrictamente que 1 si, y solo si, A es diagonalmente estrictamente dominante.
- Deduce que si A es diagonalmente estrictamente dominante, entonces el método de Jacobi correspondiente es convergente, cualquiera sean el vector de términos independientes y la estimación inicial fijados.

Solución.

- Sean: $D = \begin{bmatrix} a_{11} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & a_{33} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{NN} \end{bmatrix}$, $E = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ -a_{21} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ -a_{31} & -a_{32} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -a_{N1} & -a_{N2} & -a_{N3} & \cdots & 0 \end{bmatrix}$, y $F = \begin{bmatrix} 0 & -a_{12} & -a_{13} & \cdots & -a_{1N} \\ 0 & 0 & -a_{23} & \cdots & -a_{1N} \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -a_{3N} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}$. Entonces, $D^{-1} = \begin{bmatrix} 1/a_{11} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1/a_{22} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1/a_{33} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1/a_{NN} \end{bmatrix}$.

  Tenemos así que $D^{-1}(E+F) = \begin{bmatrix} 0 & -a_{12}/a_{11} & -a_{13}/a_{11} & \cdots & -a_{1N}/a_{11} \\ -a_{21}/a_{22} & 0 & -a_{23}/a_{22} & \cdots & -a_{2N}/a_{22} \\ -a_{31}/a_{33} & -a_{32}/a_{33} & 0 & \cdots & -a_{3N}/a_{33} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -a_{N1}/a_{NN} & -a_{N2}/a_{NN} & -a_{N3}/a_{NN} & \cdots & 0 \end{bmatrix}$.

  Entonces,

$$\begin{aligned} \|D^{-1}(E+F)\|_\infty < 1 &\iff \frac{|a_{i1}|+|a_{i2}|+\cdots+|a_{i,i-1}|+|a_{i,i+1}|+\cdots+|a_{iN}|}{|a_{ii}|} < 1 \ \forall i \in \{1,2,\ldots,N\} \\ &\iff |a_{i1}|+|a_{i2}|+\cdots+|a_{i,i-1}|+|a_{i,i+1}|+\cdots+|a_{iN}| < |a_{ii}| \ \forall i \in \{1,2,\ldots,N\} \\ &\iff A \text{ es diagonalmente estrictamente dominante} \end{aligned}$$

- A es diagonalmente estrictamente dominante $\Longrightarrow$ la matriz del método de Jacobi tiene norma infinito menor estrictamente que 1, y como sabemos que si la matriz de un método iterativo tiene alguna norma matricial menor que 1, el método converge, deducimos que el método de Jacobi es convergente.

12. Considera un sistema formado por 5 muelles alineados verticalmente y 4 cuerpos entre los mismos de masas $m_1 = 5$ kg, $m_2 = 4$ kg, $m_3 = 3$ kg, $m_4 = 2$ kg, de forma que el extremo superior del muelle de arriba y el extremo inferior del que está abajo permanecen fijos: véase la figura adjunta. Suponemos además que los cuerpos están sometidos únicamente a la acción de sus pesos p_1, p_2, p_3 y p_4 y que el sistema está en equilibrio.

- Sabiendo que los coeficientes de elasticidad de los muelles son $c_1 = 1Nw/m, c_2 = 1.1Nw/m, c_3 = 0.9Nw/m, c_4 = 0.2Nw/m$ y $c_5 = 3Nw/m$, expresa los desplazamientos x_1, x_2, x_3 y x_4 de los cuerpos en función de sus pesos mediante un conveniente sistema de ecuaciones lineales $Kx = p$.
- ¿Admite la matriz K de coeficientes, conocida en este contexto como matriz de rigidez, una factorización LU tipo Cholesky? En caso afirmativo determínala y úsala para resolver el sistema anterior.
- Demuestra que tanto el método de Jacobi como el de Gauss-Seidel convergen hacia la solución del sistema, a pesar de que la matriz de rigidez no es diagonalmente estrictamente dominante, y calcula para cada uno de dichos métodos iterativos las 7 primeras iteraciones, partiendo de la estimación inicial $x_0 = [0, 0, 0, 0]^T$.
- Comprueba que para la iteración séptima del método de Gauss-Seidel se verifican las 3 estimaciones del error absoluto establecidas en la Sección 2.3.

Solución.

- $d_1 = x_1, \quad d_2 = x_2 - x_1, \quad d_3 = x_3 - x_2, \quad d_4 = x_4 - x_3, d_5 = -x_4 \Longleftrightarrow Ax = d$. Entonces,

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

y además,

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1.1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.9 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

Tenemos también que $p = [9.81m_1, 9.81m_2, 9.81m_3, 9.81m_4]^T = [49.05, 39.24, 29.43, 19.62]^T$.
Hay que resolver entonces el sistema de ecuaciones:

$$Kx = p \Longleftrightarrow A^T CAx = p \Longleftrightarrow \begin{bmatrix} 2.1 & -1.1 & 0 & 0 \\ -1.1 & 2 & -0.9 & 0 \\ 0 & -0.9 & 1.1 & -0.2 \\ 0 & 0 & -0.2 & 3.2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 49.05 \\ 39.24 \\ 29.43 \\ 19.62 \end{bmatrix} \Longrightarrow \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 93.02 \\ 133 \\ 138.26 \\ 14.77 \end{bmatrix}$$

- Intentemos hallar dicha factorización tipo Cholesky:
  Veamos si existe una matriz triangular superior, U, tal que $U^T U = K$. Para ello, sea

$$U = \begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} & u_{13} & u_{14} \\ 0 & u_{22} & u_{23} & u_{24} \\ 0 & 0 & u_{33} & u_{34} \\ 0 & 0 & 0 & u_{44} \end{bmatrix}$$

. Entonces,

$$U^T U = \begin{bmatrix} u_{11} & 0 & 0 & 0 \\ u_{12} & u_{22} & 0 & 0 \\ u_{13} & u_{23} & u_{33} & 0 \\ u_{14} & u_{24} & u_{34} & u_{44} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} & u_{13} & u_{14} \\ 0 & u_{22} & u_{23} & u_{24} \\ 0 & 0 & u_{33} & u_{34} \\ 0 & 0 & 0 & u_{44} \end{bmatrix}$$

de donde, multiplicando la primera fila por las columnas:

  - $u_{11}^2 = 2.1 \Longrightarrow u_{11} = 1.45$
  - $u_{11}u_{12} = -1.1 \Longrightarrow u_{12} = -0.76$
  - $u_{11}u_{13} = u_{11}u_{14} = 0 \Longrightarrow u_{13} = u_{14} = 0$

multiplicando la segunda fila por las columnas:

  - $u_{12}^2 + u_{22}^2 = 2 \Longrightarrow u_{22} = 1.19$
  - $u_{12}u_{13} + u_{22}u_{23} = -0.9 \Longrightarrow u_{23} = -0.76$
  - $u_{12}u_{14} + u_{22}u_{24} = 0 \Longrightarrow u_{24} = 0$

multiplicando la tercera fila por las columnas:

  - $u_{13}^2 + u_{23}^2 + u_{33}^2 = 1.1 \Longrightarrow u_{33} = 0.73$
  - $u_{13}u_{14} + u_{23}u_{24} + u_{33}u_{34} = -0.2 \Longrightarrow u_{34} = -0.274$

multiplicando la cuarta fila por la cuarta columna:

  - $u_{14}^2 + u_{24}^2 + u_{34}^2 + u_{44}^2 = 3.2 \Longrightarrow 1.79$

Entonces, $U = \begin{bmatrix} 1.45 & -0.76 & 0 & 0 \\ 0 & 1.19 & -0.76 & 0 \\ 0 & 0 & 0.73 & -0.274 \\ 0 & 0 & 0 & 1.79 \end{bmatrix}$ cumple que $U^T U = K$, y por tanto, K admite una factorización tipo Cholesky.

Para resolver el sistema, resolvemos primero el sistema auxiliar $U^T x' = p \Longleftrightarrow \begin{bmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ x'_3 \\ x'_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 33.82 \\ 54.58 \\ 97.14 \\ 25.83 \end{bmatrix}$

y ahora, el sistema $Ux = x' \Longleftrightarrow \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 93.72 \\ 134.3 \\ 138.48 \\ 14.43 \end{bmatrix}$, que es la solución que nos piden. No coincide con la solución exacta debido a errores de redondeo.

- Resuelto con Maxima
- Resuelto con Maxima