

# **GEOMETRÍA III**

Francisco J. López  
Departamento de Geometría y Topología  
Universidad de Granada  
[fjlopez@ugr.es](mailto:fjlopez@ugr.es)

## **TEMA 1: Espacios afines**

En Matemáticas, un espacio afín es una estructura geométrica que da sentido a los conceptos clásicos de la geometría euclíadiana, como el paralelismo o la incidencia. Esta estructura se construye sobre un espacio vectorial, aunque en un espacio afín no hay elementos privilegiados (como sí ocurría con el vector cero en los espacios vectoriales). Usualmente a los elementos de un espacio afín se les llama puntos, y a los vectores del espacio vectorial asociado direcciones. La idea básica de la geometría afín es que cualquier vector se puede apoyar sobre un punto, que funciona como origen del mismo, determinando automáticamente un punto final o extremo, y simétricamente dos puntos ordenados definen un único vector de forma que algunas reglas básicas de aditividad se satisfacen. Esta asignatura Geometría III es una asignatura finalista, en el sentido de que supone la culminación del conocimiento científico en el ámbito de las geometrías lineal y afín, que alcanzan en la geometría proyectiva el céñit de su desarrollo.

### **1. INTRODUCCIÓN**

Pensemos en un plano de naturaleza física tal y como lo entendían los antiguos griegos. Para poder modelarlo y hacer geometría sobre él, Euclides (ca. 325 a. C.-ca. 265 a. C.) en *Los Elementos* distinguía entre *Axiomas* (verdades absolutas universales) y *Postulados* (enunciados que, no necesitando demostración, se admitían como verdades para el desarrollo de una ciencia en particular).



Figura 1: Euclides

Los axiomas eran comunes a todas las ciencias, entre los mismos encontramos enunciados como "*Cosas iguales a una misma cosa son iguales entre sí*", "*Si se añaden*

*iguales a iguales, los todos son iguales”, “Si se sustraen iguales a iguales, los restos son iguales”, “Las cosas que coinciden una con otra son iguales entre sí”, “El todo es mayor que la parte”.*

Los postulados sin embargo variaban con cada ciencia. Los de la Geometría, la ciencia por excelencia en la cosmovisión helénica, eran los siguientes:

- (I) *Una línea recta puede ser dibujada uniendo dos puntos cualesquiera.*
- (II) *Un segmento de línea recta se puede extender indefinidamente en una línea recta.*
- (III) *Dado un segmento de línea recta, puede dibujarse un círculo con cualquier centro y distancia.*
- (IV) *Todos los ángulos rectos son iguales entre sí.*
- (V) **Postulado de las paralelas.** *Si una línea recta corta a otras dos, de tal manera que la suma de los dos ángulos interiores del mismo lado sea menor que dos rectos, las otras dos rectas se cortan, al prolongarlas, por el lado en el que están los ángulos menores que dos rectos.*

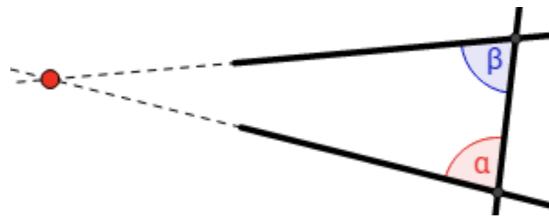


Figura 2: V Postulado: de las paralelas

Este postulado admite el siguiente enunciado equivalente:

*Por un punto exterior a una recta se puede trazar una única paralela.*

El (V) postulado resultó trascendental para la geometría euclíadiana. Durante siglos se pensó que realmente era consecuencia lógica de los anteriores, aunque finalmente supimos que no era así gracias a los trabajos de Bolyai, Lobachevsky y Gauss (que dieron lugar a la aparición de las geometrías no-euclidianas).

Naturalmente, la correcta comprensión de los anteriores postulados requiere de un gran número de *definiciones* previas. A modo de curiosidad aquí presentamos un listado amplio de las que utilizaba Euclides para la Geometría:

- *Un punto es lo que no tiene partes.*
- *Una línea es una longitud sin anchura.*
- *Una línea recta es aquella que yace por igual respecto de los puntos que están en ella.*
- *Una superficie es lo que solo tiene longitud y anchura.*
- *Los extremos de una superficie son líneas.*
- *Una superficie plana es aquella que yace por igual respecto de las líneas que están en ella.*

- *Un ángulo plano es la inclinación mutua de dos líneas que se encuentran una a otra en un plano y no están en línea recta.*
- *Cuando las líneas que comprenden el ángulo son rectas, el ángulo se llama rectilíneo.*
- *Cuando una recta levantada sobre otra recta forma ángulos adyacentes iguales entre sí, cada uno de los ángulos iguales es recto y la levantada se llama perpendicular a aquella sobre la que está.*
- *Ángulo obtuso es el mayor que un recto.*
- *Ángulo agudo es el menor que un recto.*
- *Un límite es aquello que es extremo de algo.*
- *Una figura es lo contenido por uno o varios límites.*
- *Un círculo es una figura plana comprendida por una línea tal que todas las rectas caen sobre ella desde un punto de los que están dentro de la figura son iguales entre sí. El punto se llama el «centro» del círculo.*
- *Un diámetro del círculo es una recta cualquiera trazada a través del centro y limitado en ambos sentidos por la circunferencia del círculo, recta que también divide el círculo en dos partes iguales.*
- *Un semicírculo es la figura comprendida entre el diámetro y la circunferencia por él cortada. Y el centro del semicírculo es el mismo que el del círculo.*
- *Figuras rectilíneas son las comprendidas por rectas, triláteras las comprendidas por 3, cuadriláteras las comprendidas por 4, multiláteras las comprendidas por más de 4 rectas.*
- *Entre las figuras triláteras, el triángulo equilátero es la que tiene los tres lados iguales, triángulo isósceles la que tiene dos lados iguales, y el triángulo escaleno la que tiene los tres lados desiguales.*
- *Entre las figuras triláteras, triángulo rectángulo es la que tiene un ángulo recto, obtusángulo la que tiene un ángulo obtuso, acutángulo la que tiene los tres ángulos agudos.*
- *De entre las figuras cuadriláteras, cuadrado es la que es equilátera y rectangular, rectángulo la que es rectangular pero no equilátera, rombo la que es equilátera pero no rectangular, romboide la que tiene los ángulos y los lados opuestos iguales entre sí, pero no es equilátera ni rectangular; y trapecios las demás figuras cuadriláteras.*
- *Son rectas paralelas las que estando en el mismo plano y siendo prolongado indefinidamente en ambos sentidos, no se encuentran una a otra en ninguno de ellos.*

El desarrollo del conocimiento en la Grecia clásica era de *naturaleza sintética*, esto es, a partir de los axiomas, definiciones y postulados adoptados se demostraban proposiciones, lemas, teoremas, corolarios... utilizando la lógica aristotélica o lógica matemática como norma fundamental para el buen razonamiento. Los postulados eran útiles en la

medida en que la ciencia que se desarrollaba a partir de ellos se ajustaba a la percepción de nuestro universo físico.

La geometría moderna sin embargo es de *naturaleza analítica* como consecuencia de los trabajos de Fermat y Descartes, y el manejo del lenguaje de las aplicaciones. Esencialmente, nosotros entendemos los puntos del plano como pares de números (sus coordenadas cartesianas en unos ejes) que son susceptibles de ser sometidos a operaciones, lo que permite sustituir todo el aparato lógico de Euclides por el análisis y el álgebra. Así, las rectas, planos, etc se identifican con el conjunto de soluciones de los sistemas de ecuaciones lineales, mientras que por ejemplo las cónicas (y en general las hipercuádricas) se corresponden con los ceros de ecuaciones cuadráticas. De esta forma, cálculos aritméticos sencillos en los que aparecen involucradas ecuaciones de diversa naturaleza (lineal, cuadrática,...) sustituyen mágicamente a teoremas complejos de la geometría sintética clásica. Una de las claves para construir este aparato matemático será aprovechar el álgebra lineal, asignando a cada pareja de puntos  $p, q$  de nuestro plano euclíadiano clásico  $\mathcal{A}$  un vector  $\vec{pq}$  con origen  $p$  y extremo  $q$ . Para que estos vectores no estén fijos o rígidamente anclados en su origen y extremo, se identifican aquellos vectores fijos  $\vec{pq}$  y  $\vec{p'q'}$  que, teniendo la misma longitud, estén contenidos en rectas paralelas y apunten en el mismo sentido sobre éstas (vectores equipolentes).

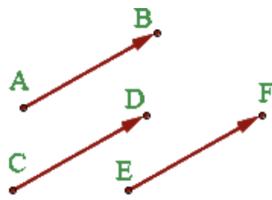


Figura 3: Vectores fijos equipolentes

Usando el lenguaje algebraico de las relaciones binarias (de equivalencia), si escribimos como  $[\vec{pq}]$  el conjunto de todos los vectores fijos en  $\mathcal{A}$  con el mismo *módulo, dirección y sentido* que  $\vec{pq}$ , el espacio cociente

$$V = \{[\vec{pq}] : p, q \in \mathcal{A}\}$$

tiene de forma natural estructura de espacio vectorial y es conocido como *espacio de los vectores libres del plano*. Observemos que de esta forma hemos definido una aplicación

$$\rightarrow : \mathcal{A} \times \mathcal{A} \rightarrow V, \quad (p, q) \mapsto [\vec{pq}]$$

satisfaciendo las siguientes dos propiedades elementales:

- $[\vec{pq}] + [\vec{qr}] = [\vec{pr}]$ .
- $\forall p \in \mathcal{A}, \forall v \in V, \exists! q \in \mathcal{A} : [\vec{pq}] = v$ .

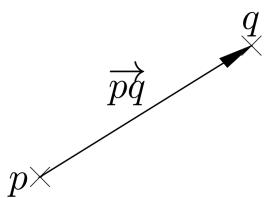
Esta construcción por supuesto se puede generalizar a espacios euclídeos de dimensión arbitraria, y sirve de inspiración para la noción moderna de espacio afín que trataremos en la siguiente sección.

## 2. EL ESPACIO AFÍN

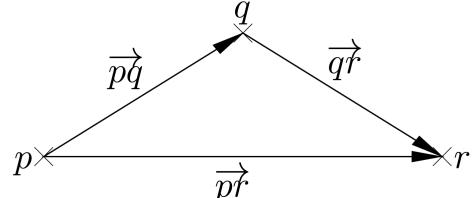
La definición formal es la siguiente

**Definición 2.1** Un espacio afín es una tripleta  $(\mathcal{A}, V, \rightarrow)$  donde

- $\mathcal{A}$  es un conjunto no vacío (llamado conjunto de puntos).
- $V \equiv (V, +, \cdot \mathbb{R})$  es un espacio vectorial real (aunque podría serlo sobre cualquier otro cuerpo, como  $\mathbb{C}$ ).
- $\rightarrow : \mathcal{A} \times \mathcal{A} \rightarrow V$ ,  $(p, q) \mapsto \vec{pq}$ , es una aplicación satisfaciendo
  - A1 :  $\vec{pq} + \vec{qr} = \vec{pr}$  (Igualdad Triangular o Regla de Chasles).
  - A2 :  $\forall p \in \mathcal{A}, \forall v \in V, \exists! q \in \mathcal{A} : \vec{pq} = v$ .



(a) Vector  $\vec{pq}$ .



(b) Axioma 1.

Al espacio vectorial  $V$  se le llama *variedad de dirección* del espacio afín  $\mathcal{A}$ , y se suele denotar como  $\overrightarrow{\mathcal{A}}$ . Por definición, la dimensión de  $\mathcal{A}$  es la de  $\overrightarrow{\mathcal{A}}$ :  $\dim \mathcal{A} = \dim \overrightarrow{\mathcal{A}}$ . Al vector  $\vec{pq} \in \overrightarrow{\mathcal{A}}$  se le llama vector determinado por los puntos  $p$  y  $q$  de  $\mathcal{A}$ , siendo  $p$  y  $q$  respectivamente un punto origen y un extremo (o punto final) de  $\vec{pq}$ .

**Observación 2.2** Como regla mnemotécnica, a veces es útil usar la notación

$$\vec{pq} \equiv q - p \in \overrightarrow{\mathcal{A}},$$

siendo la expresión  $q - p$  meramente formal (no se apela a ninguna sustracción, que obviamente no tiene sentido en  $\mathcal{A}$  a tenor de la axiomática). Esta notación tendría la ventaja de darle una apariencia de cancelación algebraica al axioma A1:

$$(q - p) + (r - q) = r - p.$$

En lo que sigue  $(\mathcal{A}, \overrightarrow{\mathcal{A}}, \rightarrow)$  será un espacio afín.

**Propiedades 2.3** Los siguientes enunciados son ciertos:

(I) Si  $\vec{pq} = \vec{pr}$  entonces  $q = r$ ,  $\forall p, q, r \in \mathcal{A}$ .

Trivial de A2.

(II)  $\vec{pp} = \vec{0}$ ,  $\forall p \in \mathcal{A}$ .

En efecto, de A1 se tiene que  $\vec{pp} + \vec{pp} = \vec{pp}$ , de donde  $\vec{pp} = \vec{0}$ .

(III) Si  $\vec{pq} = \vec{0}$  entonces  $p = q$ .

Trivial de (ii) y A2.

(IV)  $\vec{pq} = -\vec{qp}$ ,  $\forall p, q \in \mathcal{A}$ .

En efecto, de A1 y (ii) se tiene que  $\vec{pq} + \vec{qp} = \vec{pp} = \vec{0}$ , de donde  $\vec{pq} = -\vec{qp}$ .

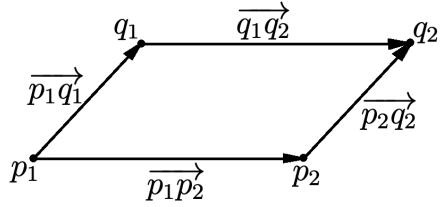


Figura 5: Regla del paralelogramo

(v) (Regla del paralelogramo) Si  $\overrightarrow{p_1q_1} = \overrightarrow{p_2q_2}$  entonces  $\overrightarrow{p_1p_2} = \overrightarrow{q_1q_2}$ .

Se tiene de A1 que  $\overrightarrow{p_1p_2} + \overrightarrow{p_2q_2} = \overrightarrow{p_1q_2} = \overrightarrow{p_1q_1} + \overrightarrow{q_1q_2}$ , de donde usando que  $\overrightarrow{p_1q_1} = \overrightarrow{p_2q_2}$  y cancelando deducimos que  $\overrightarrow{p_1p_2} = \overrightarrow{q_1q_2}$ .

(vi) Si  $p_1, \dots, p_k \in \mathcal{A}$ ,  $k \geq 2$ , entonces  $\sum_{j=1}^{k-1} \overrightarrow{p_j p_{j+1}} = \overrightarrow{p_1 p_k}$ .

El resultado es cierto para  $k = 3$  por el axioma A1. Inductivamente, si  $k > 3$  se tiene que  $\sum_{j=1}^{k-1} \overrightarrow{p_j p_{j+1}} = (\sum_{j=1}^{k-2} \overrightarrow{p_j p_{j+1}} + \overrightarrow{p_{k-1} p_k}) = \overrightarrow{p_1 p_{k-1}} + \overrightarrow{p_{k-1} p_k} = \overrightarrow{p_1 p_k}$ .

**Definición 2.4** Fijado  $p \in \mathcal{A}$ , denotaremos por  $F_p: \mathcal{A} \rightarrow \overline{\mathcal{A}}$  a la aplicación dada por

$$F_p(q) = \overrightarrow{pq}.$$

Nótese que del axioma A2 se deduce que  $F_p$  es una biyección.

En un espacio vectorial se puede introducir una estructura afín de forma natural o canónica.

**Definición 2.5 (Estructura afín canónica sobre un espacio vectorial)** Dado un espacio vectorial  $V$ , la aplicación

$$\rightarrow: V \times V \rightarrow V, \quad \overrightarrow{uv} := v - u.$$

satisface trivialmente los axiomas A1 y A2 y define una estructura de espacio afín  $(V, V, \rightarrow)$ , conocida como la estructura afín canónica en el espacio vectorial  $V$ . En este caso  $\mathcal{A} = V$  como espacio de puntos y  $\overline{\mathcal{A}} = V$  como espacio vectorial.

Cuando  $V = \mathbb{R}^n$ ,  $(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n, \rightarrow)$  es el espacio afín usual  $n$ -dimensional. La estructura afín canónica o usual en  $\mathbb{R}^n$  sigue la fórmula clásica

$$\overrightarrow{(x_1, \dots, x_n), (y_1, \dots, y_n)} = (y_1, \dots, y_n) - (x_1, \dots, x_n) = (y_1 - x_1, \dots, y_n - x_n).$$

Es conveniente comparar la siguiente definición con la Observación 2.2.

**Definición 2.6 (Suma de un punto y un vector)** Si  $p \in \mathcal{A}$  y  $v \in \mathcal{A}$ , el único punto  $q \in \mathcal{A}$  dado por el axioma A2 tal que  $\overrightarrow{pq} = v$  será denotado como  $p + v$ . Como consecuencia las siguientes identidades son inmediatas:

$$q = p + \overrightarrow{pq}, \quad \overrightarrow{p(p+v)} = v.$$

Si escribimos

$$G_p: \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}, \quad G_p(v) = p + v,$$

es claro que  $G_p = F_p^{-1}$  (ver Definición 2.4), y por tanto  $G_p$  es biyectiva.

**Propiedades 2.7** *Como consecuencia de Definición 2.6, los siguientes enunciados son ciertos:*

$$(I) \ p + \overrightarrow{0} = p, \forall p \in \mathcal{A}.$$

Trivial de Propiedades 2.3-(ii).

$$(II) \ p + (u + v) = (p + u) + v, \forall p \in \mathcal{A}, \forall u, v \in \overrightarrow{\mathcal{A}}.$$

Por definición, el punto  $q = p + (u + v)$  está determinado únicamente por la identidad  $\overrightarrow{pq} = u + v$ . Por otra parte, un cálculo directo dice

$$\overrightarrow{p((p+u)+v)} = \overrightarrow{p(p+u)} + \overrightarrow{(p+u)(p+u)+v} = u+v = \overrightarrow{pq},$$

de donde  $q = (p+u)+v$ .

$$(III) \ \forall p \in \mathcal{A}, \forall u, v \in \overrightarrow{\mathcal{A}}, \text{ se tiene que } \overrightarrow{(p+u)(p+v)} = v - u.$$

Usando el axioma A1 y Propiedades 2.3-(iv)

$$\overrightarrow{(p+u)(p+v)} = \overrightarrow{(p+u)p} + \overrightarrow{p(p+v)} = -\overrightarrow{p(p+u)} + \overrightarrow{p(p+v)} = -u + v.$$

Para culminar esta sección presentaremos las traslaciones afines.

**Definición 2.8 (Traslación de vector  $v$ )** *Dado  $v \in \overrightarrow{\mathcal{A}}$ , la traslación de vector  $v$  es la aplicación*

$$\tau_v: \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}, \quad \tau_v(p) = p + v.$$

**Propiedades 2.9** *Los siguientes enunciados son ciertos:*

$$(I) \ \tau_{\overrightarrow{0}} = \text{Id}_{\mathcal{A}}.$$

$$(II) \ \tau_u \circ \tau_v = \tau_v \circ \tau_u = \tau_{u+v}, \forall u, v \in \overrightarrow{\mathcal{A}}.$$

$$(III) \ \tau_v \text{ es una biyección con inversa } \tau_{-v}, \forall v \in \overrightarrow{\mathcal{A}}.$$

$$(IV) \ \text{El conjunto de las traslaciones } \mathcal{T}(\mathcal{A}) = \{\tau_v: v \in \overrightarrow{\mathcal{A}}\} \text{ es un grupo abeliano respecto a la composición de aplicaciones.}$$

**DEMOSTRACIÓN :** Como  $\tau_{\overrightarrow{0}}(p) = p + \overrightarrow{0} = p$  para todo  $p \in \mathcal{A}$ , (i) se sigue trivialmente. Análogamente  $(\tau_u \circ \tau_v)(p) = \tau_u(\tau_v(p)) = \tau_u(p+v) = (p+v) + u = p + (v+u) = \tau_{u+v}(p)$  para todo  $p \in \mathcal{A}$ , lo que prueba (ii). Los items (iii) y (iv) son una consecuencia trivial de (i) y (ii). ■

## 2.1. Subespacios afines

Como en otras categorías, los espacios afines admiten sub-objetos naturales conocidos como subespacios afines. Presentemos la definición.

**Definición 2.10** *Se dice que un subconjunto no vacío  $S$  de un espacio afín  $\mathcal{A}$  es un subespacio afín si existen un punto  $p \in \mathcal{A}$  y un subespacio vectorial  $U \subseteq \overrightarrow{\mathcal{A}}$  tales que*

$$S = p + U := \{p + u: u \in U\}.$$

*En otras palabras, si  $S = G_p(U)$  para algún punto  $p \in \mathcal{A}$  y subespacio  $U \subseteq \overrightarrow{\mathcal{A}}$ .*

Nótese que si  $S = p + U$  es un subespacio afín de  $\mathcal{A}$ , la identidad  $p + \vec{0} = p$  garantiza que  $p \in S$ . Para comprender la naturaleza geométrica de los subespacios afines es conveniente enunciar la siguiente proposición.

**Proposición 2.11** *Si  $S = p + U$  es un subespacio afín de  $\mathcal{A}$ , entonces son ciertas las siguientes afirmaciones:*

- (I)  $U = \{\overrightarrow{pq}: q \in S\}$ .
- (II)  $U = \{\overrightarrow{qr}: q, r \in S\}$ .
- (III)  $S = q + U$  para todo  $q \in S$ .

**DEMOSTRACIÓN:** Sabemos que  $q \in S$  si y solo si  $q = p + u$  para algún  $u \in U$ , esto es, si y solo si  $u = \overrightarrow{pq} \in U$ , lo que prueba (i). Para probar (ii), nótese que

$$\{\overrightarrow{qr}: q, r \in S\} = \{\overrightarrow{(p+u)(p+v)}: u, v \in U\} = \{v - u: u, v \in U\} = U.$$

Finalmente, si  $q \in S$  se tiene que  $q = p + v$  para algún  $v \in U$ , de donde

$$q + U = \{(p + v) + u: u \in U\} = \{p + (v + u): u \in U\} = \{p + u: u \in U\} = S,$$

donde hemos usado que  $\{v + u: u \in U\} = U$ . ■

Es conveniente reflexionar sobre el contenido de la proposición. El ítem (iii) nos dice que el punto  $p$  por el que pasa  $S$  no es especial, puede usarse cualquiera otro punto de  $S$  para describirlo:  $S = q + U$  para todo  $q \in S$ . Sin embargo, el ítem (ii) nos dice que el subespacio de direcciones  $U$  de  $S$  está únicamente determinado por  $S$ . Como la aplicación restricción  $\rightarrow: S \times S \rightarrow U$  es interna al par  $(S, U)$ , la tripleta  $(S, U, \rightarrow)$  es un espacio afín que tiene a  $U$  como variedad de dirección. De aquí que se suela escribir  $\vec{S} = U$ , y por tanto  $S = p + \vec{S}$ .

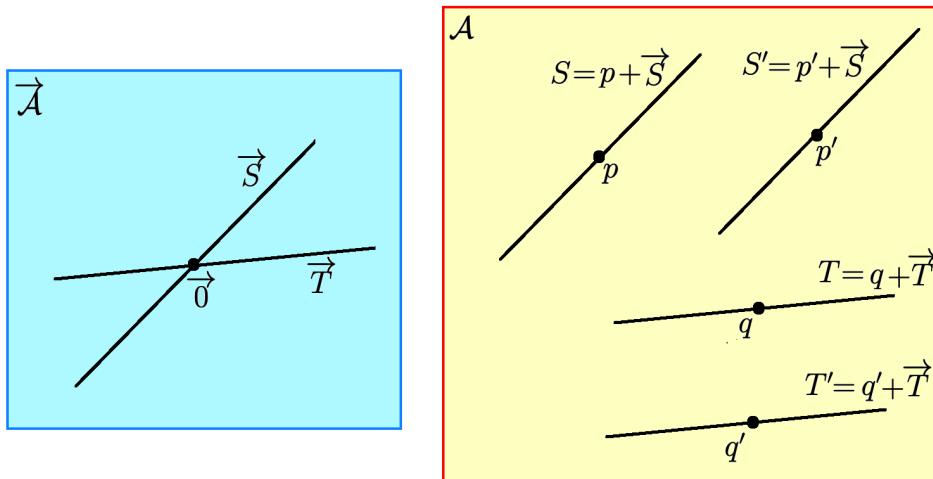


Figura 6: Subespacios afines

**Definición 2.12** *Dado un subespacio afín  $S = p + U$  de  $\mathcal{A}$ , diremos que  $\vec{S} := U$  es la variedad de dirección de  $S$  y escribiremos  $\dim S = \dim \vec{S}$ .*

- (I) Si  $\dim S = 1$  se dice que  $S$  es una recta afín.

- (II) Si  $\dim S = 2$  se dice que  $S$  es un *plano afín*.  
 (III) Si  $\dim S = \dim \mathcal{A} - 1$  se dice que  $S$  es un *hiperplano afín*.

Claramente  $0 \leq \dim S \leq \dim \mathcal{A}$ ,  $\dim S = 0$  si y solo si  $S$  es un punto de  $\mathcal{A}$ , y  $\dim S = \dim \mathcal{A}$  si y solo si  $S = \mathcal{A}$ . Como consecuencia de Proposición 2.11-(ii), si  $S \subseteq T$  son subespacios de  $\mathcal{A}$  entonces  $\vec{S} \subseteq \vec{T}$  y  $\dim S \leq \dim T$ .

**Ejercicio 2.13** Es fácil poner ejemplos de subespacios afines:

- En el *plano afín usual*  $\mathbb{R}^2$ , el conjunto

$$S = (0, -1) + L(\{(2, -3)\}) = \{(2\lambda, -1 - 3\lambda) : \lambda \in \mathbb{R}\}$$

es la recta afín que pasa por el punto  $p = (0, -1)$  con dirección  $\vec{S} = L(\{(2, -3)\})$ .

- En el espacio afín asociado al espacio vectorial  $\mathcal{S}_2(\mathbb{R})$  de las matrices cuadradas simétricas de orden 2, el conjunto

$$T = \left( \begin{array}{cc} 1 & -1 \\ -1 & 0 \end{array} \right) + L\left(\left\{\left( \begin{array}{cc} 0 & 2 \\ 2 & -1 \end{array} \right), \left( \begin{array}{cc} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{array} \right) \right\}\right),$$

esto es

$$T = \left\{ \left( \begin{array}{cc} 1+\mu & -1+2\lambda \\ -1+2\lambda & -\lambda \end{array} \right) : \lambda, \mu \in \mathbb{R} \right\},$$

es el *plano afín* que pasa por

$$p = \left( \begin{array}{cc} 1 & -1 \\ -1 & 0 \end{array} \right) \text{ con dirección } \vec{T} = L\left(\left\{\left( \begin{array}{cc} 0 & 2 \\ 2 & -1 \end{array} \right), \left( \begin{array}{cc} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{array} \right) \right\}\right).$$

La siguiente proposición se corresponde con uno de los postulados clásicos de la geometría euclíadiana.

**Proposición 2.14** Dados dos puntos distintos  $p, q \in \mathcal{A}$ , existe una única recta afín  $R$  que pasa por  $p$  y  $q$  (esto es, contiene a los puntos  $p$  y  $q$ ).

**DEMOSTRACIÓN :** Como  $\vec{pq} \neq \vec{0}$  ya que  $p \neq q$ , el subespacio afín

$$R := p + L(\{\vec{pq}\}) = \{p + \lambda\vec{pq} : \lambda \in \mathbb{R}\}$$

es una recta afín que contiene a  $p$  y a  $q = p + \vec{pq}$ .

Para probar la unicidad, supongamos que  $S$  es otra recta afín que pasa por  $p$  y  $q$ . En ese caso necesariamente  $\vec{0} \neq \vec{pq} \in S$  y por tanto  $\vec{S} = L(\{\vec{pq}\})$  al ser la variedad de dirección de  $S$  de dimensión 1. Como  $S$  pasa por  $p$  deducimos que  $S = p + \vec{S} = p + L(\{\vec{pq}\}) = R$ . ■

### 2.1.1. Operaciones con subespacios afines

Como ocurría en Álgebra Lineal con los subespacios vectoriales, existen dos operaciones básicas con subespacios afines: *la intersección y la suma*. Vamos a describirlas con detalle a continuación.

De forma genérica, la intersección de subespacios afines es un subespacio afín (salvo que sea vacía). Los detalles están contenidos en la siguiente proposición.

**Proposición 2.15** Sea  $\{S_i\}_{i \in I}$  una familia de subespacios afines de un espacio afín  $\mathcal{A}$ . Entonces  $S = \bigcap_{i \in I} S_i$  es o bien vacío o bien un subespacio afín con variedad de dirección  $\overrightarrow{S} = \bigcap_{i \in I} \overrightarrow{S}_i$ .

DEMOSTRACIÓN: Supongamos que  $S = \bigcap_{i \in I} S_i \neq \emptyset$  y tomemos  $p \in S$ . Como  $p \in S_i$  para todo  $i \in I$  podemos escribir  $S_i = p + \overrightarrow{S}_i$ , para todo  $i \in I$ . Por tanto

$$S = \bigcap_{i \in I} S_i = \bigcap_{i \in I} (p + \overrightarrow{S}_i) = p + \bigcap_{i \in I} \overrightarrow{S}_i,$$

de donde por definición  $S$  es un subespacio afín con variedad de dirección el subespacio vectorial  $\bigcap_{i \in I} \overrightarrow{S}_i \subseteq \mathcal{A}$ . ■

La noción de suma de subespacios afines es más elaborada.

**Definición 2.16** Si  $\mathcal{S} = \{S_i : i \in I\}$  es una familia de subespacios afines de un espacio afín  $\mathcal{A}$  y llamamos

$$\mathcal{F}_{\mathcal{S}} = \{T \subseteq \mathcal{A} : T \text{ subespacio afín con } \bigcup_{i \in I} S_i \subseteq T\},$$

se define la suma afín de los subespacios  $\{S_i : i \in I\}$  como el subespacio afín

$$\bigvee_{i \in I} S_i := \bigcap_{T \in \mathcal{F}_{\mathcal{S}}} T.$$

Nótese que  $\mathcal{F}_{\mathcal{S}} \neq \emptyset$  ya que  $\mathcal{A} \in \mathcal{F}_{\mathcal{S}}$ , por lo que la suma  $\bigvee_{i \in I} S_i$  está bien definida como consecuencia de la Proposición 2.15. Por definición  $\bigvee_{i \in I} S_i$  es el más pequeño subespacio afín que contiene a  $\bigcup_{i \in I} S_i$ , esto es, si  $T \subseteq \mathcal{A}$  es un subespacio afín contenido a  $\bigcup_{i \in I} S_i$  entonces  $\bigvee_{i \in I} S_i \subseteq T$ .

Cuando se trata de una cantidad finita de subespacios  $\{S_1, \dots, S_k\}$ , se suele escribir

$$\bigvee_{i=1}^k S_i \equiv S_1 \vee \cdots \vee S_k.$$

También se suele utilizar la notación

$$\langle \{q_0, \dots, q_k\} \rangle = \bigvee_{i=0}^k \{q_i\}$$

para denotar al menor subespacio afín que contiene a los puntos  $q_0, \dots, q_k \in \mathcal{A}$ .

La siguiente proposición proporciona un algoritmo de cálculo de la suma de subespacios.

**Notación 2.17** Recordemos que si  $V$  es un espacio vectorial y  $X \subseteq V$  es un subconjunto arbitrario,  $L(X)$  denota el menor subespacio vectorial de  $V$  que contiene a  $X$ . Los vectores de  $L(X)$  son las combinaciones lineales (de longitud finita) de vectores en  $X$ , esto es,

$$L(X) = \left\{ \sum_{j=1}^k \lambda_j x_j : x_1, \dots, x_k \in X, \lambda_1, \dots, \lambda_k \in \mathbb{R}, k \in \mathbb{N} \right\}.$$

Si  $\{U_i\}_{i \in I}$  son subespacios vectoriales de  $V$  suele escribirse

$$\sum_{i \in I} U_i = L(\bigcup_{i \in I} U_i).$$

**Proposición 2.18** Sea  $\{S_i : i \in I\}$  una familia de subespacios afines de un espacio afín  $\mathcal{A}$ , escribamos  $S_i = p_i + \vec{S}_i$  para todo  $i \in I$ , y tomemos  $p \in \bigvee_{i \in I} S_i$  un punto arbitrario (se suele elegir  $p = p_i$  para algún  $i \in I$ ). Entonces

$$\bigvee_{i \in I} S_i = p + (L(\{\overrightarrow{p_i p_j} : i, j \in I\}) + \sum_{i \in I} \vec{S}_i)$$

En particular

$$\overrightarrow{\bigvee_{i \in I} S_i} = L(\{\overrightarrow{p_i p_j} : i, j \in I\}) + \sum_{i \in I} \vec{S}_i.$$

Como consecuencia, cuando  $\bigcap_{i \in I} S_i \neq \emptyset$  entonces  $\overrightarrow{\bigvee_{i \in I} S_i} = p + (\sum_{i \in I} \vec{S}_i)$  para todo  $p \in \bigvee_{i \in I} S_i$  (se suele elegir  $p = p_i$  para algún  $i \in I$ ) y  $\overrightarrow{\bigvee_{i \in I} S_i} = \sum_{i \in I} \vec{S}_i$ .

DEMOSTRACIÓN: Consideremos

$$\vec{T} = L(\{\overrightarrow{p_i p_j} : i, j \in I\}) + \sum_{i \in I} \vec{S}_i \subseteq \overrightarrow{\mathcal{A}}$$

y démonos cuenta de que

$$p_j + \vec{T} = (p_i + \overrightarrow{p_i p_j}) + \vec{T} = p_i + \vec{T} \quad \text{para todo } i, j \in I.$$

Por tanto, podemos definir

$$T = p_i + \vec{T},$$

y la expresión no depende de  $p_i$ ,  $i \in I$ .

Si comprobamos que

$$T = \bigvee_{i \in I} S_i$$

se seguiría que  $\overrightarrow{\bigvee_{i \in I} S_i} = p + \vec{T}$  para todo  $p \in \bigvee_{i \in I} S_i$ , y por tanto la tesis de la proposición. La prueba de que  $T = \bigvee_{i \in I} S_i$  la haremos por doble inclusión.

Como  $\vec{S}_i \subseteq \vec{T}$  para todo  $i \in I$  tenemos que

$$S_i = p_i + \vec{S}_i \subseteq p_i + \vec{T} = T$$

para todo  $i \in I$ , esto es,  $\bigcup_{i \in I} S_i \subseteq T$  de donde

$$\bigvee_{i \in I} S_i \subseteq T$$

por definición de  $\bigvee_{i \in I} S_i$ . Para la otra inclusión comprobemos primero que

$$\vec{T} \subseteq \overrightarrow{\bigvee_{i \in I} S_i}.$$

En efecto, como  $S_i \subseteq \bigvee_{i \in I} S_i$  entonces  $\vec{S}_i \subseteq \overrightarrow{\bigvee_{i \in I} S_i}$  para todo  $i \in I$ , de donde

$$\sum_{i \in I} \vec{S}_i \subseteq \overrightarrow{\bigvee_{i \in I} S_i}.$$

Como para cualesquiera  $i_1, i_2 \in I$  se tiene que  $p_{i_1}, p_{i_2} \in \bigcup_{i \in I} S_i \subseteq \bigvee_{i \in I} S_i$ , y por tanto que  $\overrightarrow{p_{i_1}p_{i_2}} \in \overrightarrow{\bigvee_{i \in I} S_i}$ , inferimos que

$$L(\{\overrightarrow{p_ip_j}: i, j \in I\}) \subseteq \overrightarrow{\bigvee_{i \in I} S_i}.$$

En conclusión  $\vec{T} = L(\{\overrightarrow{p_ip_j}: i, j \in I\}) + \sum_{i \in I} \vec{S}_i \subseteq \overrightarrow{\bigvee_{i \in I} S_i}$  como habíamos afirmado. Pero para todo  $i \in I$  tenemos que  $p_i \in T \cap S_i \subseteq T \cap (\bigvee_{i \in I} S_i)$ , de donde

$$T = p_i + \vec{T} \subseteq p_i + \overrightarrow{\bigvee_{i \in I} S_i} = \bigvee_{i \in I} S_i$$

concluyendo la demostración.

Para el comentario final del caso particular  $\bigcap_{i \in I} S_i \neq \emptyset$ , elijamos un punto  $q \in \bigcap_{i \in I} S_i$  y escribamos  $S_i = q + \vec{S}_i$  ( $p_i = q$ ) para todo  $i \in I$ . Lo ya demostrado nos diría que

$$\overrightarrow{\bigvee_{i \in I} S_i} = \vec{T} = L(\{\overrightarrow{p_ip_j}: i, j \in I\}) + \sum_{i \in I} \vec{S}_i = \sum_{i \in I} \vec{S}_i,$$

ya que  $\overrightarrow{p_ip_j} = \overrightarrow{qq} = \vec{0}$  para todo  $i, j \in I$ . De aquí que  $\bigvee_{i \in I} S_i = p + (\sum_{i \in I} \vec{S}_i)$  para todo  $p \in \bigvee_{i \in I} S_i$ , concluyendo la demostración. ■

**Corolario 2.19** *Si  $q_0, q_1, \dots, q_k \in \mathcal{A}$  entonces*

$$\langle \{q_0, q_1, \dots, q_k\} \rangle = q_0 + L(\{\overrightarrow{q_0q_1}, \dots, \overrightarrow{q_0q_k}\}).$$

La prueba es trivial teniendo en cuenta Proposición 2.18 y la identidad genérica  $\overrightarrow{q_iq_j} = -\overrightarrow{q_0q_i} + \overrightarrow{q_0q_j}$ ; se dejan los detalles como ejercicio.

**Corolario 2.20** *Si  $S_1 = p_1 + \vec{S}_1$  y  $S_2 = p_2 + \vec{S}_2 \subseteq \mathcal{A}$  son dos subespacios afines:*

(I)  *$S_1 \vee S_2 = p + (L(\{\overrightarrow{p_1p_2}\}) + \vec{S}_1 + \vec{S}_2)$  para todo  $p \in S_1 \vee S_2$  (luego para todo  $p \in S_1 \cup S_2$ ; se suele elegir  $p = p_1$  o  $p = p_2$ ). En particular*

$$\overrightarrow{S_1 \vee S_2} = L(\{\overrightarrow{p_1p_2}\}) + \vec{S}_1 + \vec{S}_2.$$

(II) *Es cierta la siguiente equivalencia*

$$S_1 \cap S_2 \neq \emptyset \iff \overrightarrow{p_1p_2} \in \vec{S}_1 + \vec{S}_2 \iff \overrightarrow{S_1 \vee S_2} = \vec{S}_1 + \vec{S}_2,$$

*y si se da cualquiera de esas condiciones equivalentes entonces*

$$S_1 \vee S_2 = p + (\vec{S}_1 + \vec{S}_2)$$

*para todo  $p \in S_1 \vee S_2$  (se suele elegir  $p = p_1$  o  $p = p_2$ ).*

(III) **Fórmulas de dimensiones:**

- *Si  $S_1 \cap S_2 \neq \emptyset$  entonces  $\dim(S_1 \vee S_2) + \dim(S_1 \cap S_2) = \dim S_1 + \dim S_2$ .*
- *Si  $S_1 \cap S_2 = \emptyset$  entonces  $\dim(S_1 \vee S_2) + \dim(\vec{S}_1 \cap \vec{S}_2) = \dim S_1 + \dim S_2 + 1$ .*

DEMOSTRACIÓN: Item (i) se ha demostrado en la Proposición 2.18.

En relación al item (ii), la equivalencia  $\overrightarrow{p_1p_2} \in \vec{S}_1 + \vec{S}_2 \iff \overrightarrow{S_1 \vee S_2} = \vec{S}_1 + \vec{S}_2$  es trivial del item (i). Bastará con comprobar que  $S_1 \cap S_2 \neq \emptyset \iff \overrightarrow{p_1p_2} \in \vec{S}_1 + \vec{S}_2$ . En efecto, si  $S_1 \cap S_2 \neq \emptyset$  y tomamos  $q \in S_1 \cap S_2$ , se tiene que  $\overrightarrow{qp_i} \in \vec{S}_i$ ,  $i = 1, 2$ , y por tanto  $\overrightarrow{p_1p_2} = \overrightarrow{p_1q} + \overrightarrow{qp_2} \in \vec{S}_1 + \vec{S}_2$ . Recíprocamente, si  $\overrightarrow{p_1p_2} \in \vec{S}_1 + \vec{S}_2$  y escribimos  $\overrightarrow{p_1p_2} = u_1 - u_2$  con  $u_i \in \vec{S}_i$ ,  $i = 1, 2$ , los puntos  $q_1 = p_1 + u_1 \in S_1$  y  $q_2 = p_2 + u_2 \in S_2$  satisfacen

$$\overrightarrow{q_1q_2} = \overrightarrow{(p_1 + u_1)(p_2 + u_2)} = \overrightarrow{(p_1 + u_1)p_1} + \overrightarrow{p_1p_2} + \overrightarrow{p_2(p_2 + u_2)} = -u_1 + \overrightarrow{p_1p_2} + u_2 = \overrightarrow{0},$$

lo que prueba que  $q_1 = q_2 \in S_1 \cap S_2 \neq \emptyset$  y prueba (ii).

En relación con (iii), supongamos primero que  $S_1 \cap S_2 \neq \emptyset$ . En este caso  $\dim S_i = \dim \vec{S}_i$ ,  $i = 1, 2$ ,  $\dim(S_1 \vee S_2) = \dim \overrightarrow{S_1 \vee S_2} = \dim(\vec{S}_1 + \vec{S}_2)$ , y  $\dim(S_1 \cap S_2) = \dim \overrightarrow{S_1 \cap S_2} = \dim(\vec{S}_1 \cap \vec{S}_2)$ , por lo que la fórmula en cuestión no es sino la clásica fórmula de dimensiones del álgebra lineal. Supongamos ahora que  $S_1 \cap S_2 = \emptyset$ , y como antes observemos que  $\dim S_i = \dim \vec{S}_i$ ,  $i = 1, 2$ , y  $\dim(S_1 \vee S_2) = \dim \overrightarrow{S_1 \vee S_2} = \dim(L(\{\overrightarrow{p_1p_2}\}) + \vec{S}_1 + \vec{S}_2) = \dim(L(\{\overrightarrow{p_1p_2}\})) + \dim(\vec{S}_1 + \vec{S}_2) = 1 + \dim(\vec{S}_1 + \vec{S}_2)$ ; aquí hemos usado que  $L(\{\overrightarrow{p_1p_2}\}) \cap (\vec{S}_1 + \vec{S}_2) = \{\overrightarrow{0}\}$  como consecuencia de (ii). La fórmula clásica de dimensiones del álgebra lineal nos dice pues que

$$\dim(S_1 \vee S_2) = 1 + \dim(\vec{S}_1 + \vec{S}_2) = 1 + \dim \vec{S}_1 + \dim \vec{S}_2 - \dim(\vec{S}_1 \cap \vec{S}_2)$$

y por tanto

$$\dim(S_1 \vee S_2) = 1 + \dim S_1 + \dim S_2 - \dim(\vec{S}_1 \cap \vec{S}_2).$$

Démonos cuenta que en este caso  $S_1 \cap S_2$  no es un subespacio afín al ser vacío (carece de sentido hablar por tanto de su dimensión), por eso en su lugar aparece el número  $\dim(\vec{S}_1 \cap \vec{S}_2)$ . ■

Estamos en condiciones de formalizar el concepto de paralelismo, fundamental en la geometría afín.

**Definición 2.21** Sea  $\mathcal{A}$  un espacio afín, y sean  $S, T \subseteq \mathcal{A}$  dos subespacios afines de  $\mathcal{A}$ .

- Se dice que  $S$  es paralelo a  $T$  si  $\vec{S} \subseteq \vec{T}$ .
- Se dice que  $S$  y  $T$  son paralelos, y se escribe  $S \parallel T$ , si  $\vec{S} = \vec{T}$  (esto es, si  $S$  es paralelo a  $T$  y  $T$  es paralelo a  $S$ ).
- Se dice que  $S$  y  $T$  son secantes si  $S \cap T \neq \emptyset$ .
- Se dice que  $S$  y  $T$  se cruzan si

$$S \cap T = \emptyset \quad y \quad \dim(S \vee T) = \dim S + \dim T + 1.$$

Equivalentemente,  $S$  y  $T$  se cruzan si  $S$  y  $T$  no son secantes y  $\vec{S} + \vec{T} = \vec{S} \oplus \vec{T}$ ; ver Corolario 2.20.

Es claro que si dos subespacios  $S, T \subseteq \mathcal{A}$  se cruzan entonces no son secantes y no hay ninguna relación de paralelismo entre ambos ( $\vec{S} \not\subseteq \vec{T}$  y  $\vec{T} \not\subseteq \vec{S}$ ).

Por ejemplo, en  $\mathbb{R}^3$  se tiene que:

- La recta  $S = (1, 1, 1) + L(\{(1, 0, 0)\})$  es paralela al plano  $T = (1, -1, 1) + L(\{(1, 1, 0), (0, 1, 0)\})$ .

- $S = (1, 1, 1) + L(\{(1, 0, 0), (0, 0, 1)\})$  y  $T = (0, 1, -2) + L(\{(1, 0, 0), (-1, 0, 1)\})$  son planos paralelos.
- $S = (1, 1, 1) + L(\{(1, 0, 0)\})$  y  $T = (1, 0, 1) + L(\{(0, -1, 0)\})$  son rectas secantes:  $S \cap T = \{(1, 1, 1)\}$ .
- Las rectas  $S = (1, 1, 1) + L(\{(1, 0, 0)\})$  y  $T = (1, 0, 0) + L(\{(0, 1, 0)\})$  se cruzan.

**Proposición 2.22** *Sea  $\mathcal{A}$  un espacio afín y sean  $S, T$  dos subespacios afines de  $\mathcal{A}$ .*

- Si  $S$  es paralelo a  $T$  entonces  $S \subseteq T$  o  $S \cap T = \emptyset$ .*
- Si  $S \parallel T$  entonces  $S = T$  o  $S \cap T = \emptyset$ .*
- Si  $p \in \mathcal{A}$ , existe un único subespacio afín  $S_p$  de  $\mathcal{A}$  tal que  $p \in S_p$  y  $S \parallel S_p$ .*

**DEMOSTRACIÓN:** Para probar (i) supongamos que  $S$  es paralelo a  $T$  y  $S \cap T \neq \emptyset$ . Basta Tomar  $q \in S \cap T$  y observar que  $S = q + \vec{S} \subseteq q + \vec{T} = T$ . Item (ii) se sigue de (i). Para probar (iii) notemos que  $S_p = p + \vec{S}$  satisface lo requerido. La unicidad se sigue de que un subespacio afín está determinado únicamente por uno de sus puntos y su variedad de dirección. ■

## 2.2. Sistemas de referencia afines

En el álgebra lineal analizábamos los vectores de un espacio vectorial asignándoles sus coordenadas en una base. De esta forma es posible reducir los problemas algebraicos o geométricos abstractos a cálculos analíticos (con números reales) y asignar ecuaciones analíticas a los objetos geométricos, simplificando considerablemente su tratamiento. Este es el espíritu de la geometría cartesiana que procedemos a desarrollar en el contexto de la geometría afín. Necesitaremos alguna terminología previa.

**Definición 2.23** *Una colección de puntos  $\{p_0, \dots, p_k\}$ ,  $k \in \mathbb{N}$ , en un espacio afín  $\mathcal{A}$  se dice afínmente independiente si los vectores  $\{\overrightarrow{p_0p_1}, \dots, \overrightarrow{p_0p_k}\}$  son linealmente independientes, o equivalentemente (ver Corolario 2.19), si*

$$\dim\langle\{p_0, p_1, \dots, p_k\}\rangle = k.$$

*En caso contrario se dice que los puntos son afínmente dependientes.*

Dado  $p_0 \in \mathcal{A}$ , un sistema de vectores  $\{u_1, \dots, u_k\}$  en  $V$  es linealmente independiente (dependiente) si y sólo si  $\{p_0, p_0 + u_1, \dots, p_0 + u_k\}$  son afínmente independientes (dependientes) en  $\mathcal{A}$ .

La ordenación elegida para la presentación de los puntos (indicada por el subíndice) no altera el carácter de dependencia o independencia afín del sistema, ya que éste está encerrado en el valor de la dimensión del subespacio  $\langle\{p_0, p_1, \dots, p_k\}\rangle$ , y ésta no depende de la ordenación de los puntos.

**Definición 2.24** *Dado un espacio afín  $\mathcal{A}$  con  $\dim \mathcal{A} = n \in \mathbb{N}$ , un sistema de referencia  $\mathcal{R}$  en  $\mathcal{A}$  es un sistema ordenado  $\{p_0, \dots, p_n\}$  de  $n+1$  puntos afínmente independientes, o equivalentemente satisfaciendo*

$$\langle\{p_0, p_1, \dots, p_n\}\rangle = \mathcal{A}.$$

*Al punto  $p_0$  se le llama origen del sistema, y a la base ordenada  $B = \{\overrightarrow{p_0p_1}, \dots, \overrightarrow{p_0p_n}\}$  de  $\mathcal{A}$  se la llama base asociada de las direcciones de  $\mathcal{R}$ .*

Obsérvese que si  $B = \{v_1, \dots, v_n\}$  es una base ordenada de  $\overrightarrow{\mathcal{A}}$  y  $p_0 \in \mathcal{A}$ , el sistema ordenado de puntos

$$\mathcal{R} = \{p_0, p_0 + v_1, \dots, p_0 + v_n\}$$

es un sistema de referencia de  $\mathcal{A}$  con origen  $p_0$  y base asociada de direcciones  $B$ . Por tanto, y de forma alternativa, podríamos definir un sistema de referencia como un par

$$\mathcal{R} = \{p_0, B\}$$

donde  $p_0$  es un punto de  $\mathcal{A}$  (origen de  $\mathcal{R}$ ) y  $B$  una base ordenada de  $\overrightarrow{\mathcal{A}}$  (base de direcciones de  $\mathcal{R}$ ).

**Notación 2.25** En lo que sigue, dada una base ordenada  $B = \{v_1, \dots, v_n\}$  de  $\overrightarrow{\mathcal{A}}$ , denotaremos por

$$\Phi_B: \overrightarrow{\mathcal{A}} \rightarrow \mathbb{R}^n$$

al isomorfismo asignación de coordenadas en la base  $B$  escrito con notación columna. En otras palabras,

$$\Phi_B(v) = (x_1, \dots, x_n)^t \iff v = \sum_{j=1}^n x_j v_j = (v_1, \dots, v_n) \cdot (x_1, \dots, x_n)^t.$$

A veces también escribiremos  $\Phi_B(v) = v_B$  de forma simplificada para todo  $v \in \overrightarrow{\mathcal{A}}$ .

Los sistemas de referencia se utilizan para asignar coordenadas a los puntos del espacio afín.

**Definición 2.26** Sea  $\mathcal{A}$  un espacio afín, y consideremos un sistema de referencia afín  $\mathcal{R} = \{p_0, \dots, p_n\} \equiv \{p_0, B\}$ , donde  $B = \{\overrightarrow{p_0 p_1}, \dots, \overrightarrow{p_0 p_n}\}$ . La aplicación biyectiva (ver Definición 2.4)

$$\Phi_{\mathcal{R}}: \mathcal{A} \rightarrow \mathbb{R}^n, \quad \Phi_{\mathcal{R}} = \Phi_B \circ F_{p_0}$$

es conocida como la aplicación asignación de coordenadas (con notación columna) en el sistema de referencia  $\mathcal{R}$ . De forma simplificada escribiremos

$$p_{\mathcal{R}} := \Phi_B(F_{p_0}(p)) \equiv (\overrightarrow{p_0 p})_B \in \mathbb{R}^n,$$

y diremos que  $p_{\mathcal{R}}$  son las coordenadas de  $p \in \mathcal{A}$  en  $\mathcal{R}$ .

De forma más explícita, si  $p \in \mathcal{A}$  y  $\mathcal{R} = \{p_0, \dots, p_n\}$  es un sistema de referencia en  $\mathcal{A}$ ,

$$p_{\mathcal{R}} = (x_1, \dots, x_n)^t \iff \overrightarrow{p_0 p} = \sum_{j=1}^n x_j \overrightarrow{p_0 p_j} \iff p = p_0 + \sum_{j=1}^n x_j \overrightarrow{p_0 p_j}.$$

**Definición 2.27** En el espacio afín euclíadiano  $\mathbb{R}^n$  dotado de su estructura afín canónica, el sistema de referencia

$$\mathcal{R}_0 = \{(0, \dots, 0), B_0\},$$

donde  $B_0 = \{(1, 0, \dots, 0), \dots, (0, \dots, 0, 1)\}$  es la base canónica de  $\mathbb{R}^n$ , es conocido como el sistema de referencia canónico o natural de  $\mathbb{R}^n$ . Para todo punto  $p = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$  se tiene que

$$p_{\mathcal{R}_0} = (x_1, \dots, x_n)^t,$$

esto es, las coordenadas en  $\mathcal{R}_0$  de un punto de  $\mathbb{R}^n$  coinciden con las que definen al mismo punto.

Otros espacios afines clásicos como  $\mathcal{P}_n(\mathbb{R})$  (polinomios con coeficientes reales en una variable de grado  $\leq n$ ),  $\mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{R})$  (matrices reales de orden  $n \times m$ ),  $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$  (matrices simétricas reales de orden  $n$ ),.... admiten también de forma natural sistemas de referencia canónicos.

**Propiedades 2.28** *Sea  $\mathcal{A}$  un espacio afín y  $\mathcal{R} = \{p_0, \dots, p_n\} \equiv \{p_0, B\}$  un sistema de referencia afín, donde  $B = \{\overrightarrow{p_0p_1}, \dots, \overrightarrow{p_0p_n}\}$ . Entonces*

$$(I) \quad (p + v)_{\mathcal{R}} = p_{\mathcal{R}} + v_B.$$

$$(II) \quad (\overrightarrow{pq})_B = q_{\mathcal{R}} - p_{\mathcal{R}}.$$

DEMOSTRACIÓN: Usando Definición 2.26 y que  $\Phi_B$  es lineal, tenemos que

$$(p + v)_{\mathcal{R}} = (\overrightarrow{p_0(p+v)})_B = (\overrightarrow{p_0p} + v)_B = (\overrightarrow{p_0p})_B + v_B = p_{\mathcal{R}} + v_B,$$

lo que prueba (i). Análogamente,

$$q_{\mathcal{R}} - p_{\mathcal{R}} = (\overrightarrow{p_0q})_B - (\overrightarrow{p_0p})_B = (\overrightarrow{p_0q} - \overrightarrow{p_0p})_B = (\overrightarrow{pp_0} + \overrightarrow{p_0q})_B = (\overrightarrow{pq})_B,$$

lo que prueba (ii). ■

Es fácil comprobar que Propiedades 2.28-(ii) simplemente expresa la commutatividad del diagrama

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{A} \times \mathcal{A} & \xrightarrow{\Phi_{\mathcal{R}} \times \Phi_{\mathcal{R}}} & \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \\ \downarrow \rightarrow & & \downarrow \rightarrow \\ \overrightarrow{\mathcal{A}} & \xrightarrow{\Phi_B} & \mathbb{R}^n \end{array}$$

donde en  $\mathbb{R}^n$  se considera la estructura afín usual. El significado de esta commutatividad de diagramas es que la estructura de espacio afín abstracta  $\rightarrow$  en  $\mathcal{A}$  es equivalente a la canónica o usual  $\rightarrow$  de  $\mathbb{R}^n$ , salvo las asignaciones naturales de coordenadas  $\Phi_{\mathcal{R}} \times \Phi_{\mathcal{R}}$  y  $\Phi_B$  inducidas por un sistema de referencia  $\mathcal{R}$  y su base de direcciones  $B$ .

### 2.2.1. Cambio de sistema de referencia

Las coordenadas de un mismo punto en sistemas de referencia diferentes son en general distintas, y por tanto, es natural preguntarse cómo cambian al cambiar de sistema de referencia. Estas fórmulas son conocidas en la literatura como *fórmulas del cambio de sistema de referencia*. Expliquemos con detalle cómo son.

Recordemos que dado un espacio vectorial  $\overrightarrow{\mathcal{A}}$  con  $\dim \overrightarrow{\mathcal{A}} = n \in \mathbb{N}$  y dos bases  $B$  y  $B'$  en él, las ecuaciones del cambio de base de  $B$  a  $B'$  se escribían, en notación columna, de la siguiente forma

$$v_{B'} = M(\text{Id}_{\overrightarrow{\mathcal{A}}}, B, B') \cdot v_B,$$

donde  $M(\text{Id}_{\overrightarrow{\mathcal{A}}}, B, B')$  es la matriz del cambio de base de  $B$  a  $B'$  (notación columna). A modo de recordatorio, en la columna  $j$ -ésima de  $M(\text{Id}_{\overrightarrow{\mathcal{A}}}, B, B')$  aparecían las coordenadas en  $B'$  del vector  $j$ -ésimo de  $B$  para todo  $j = 1, \dots, n$ .

Consideremos a continuación un espacio afín  $\mathcal{A}$  con  $\dim \mathcal{A} = n \in \mathbb{N}$ , y dentro de él dos sistemas de referencia  $\mathcal{R} = \{p_0, B\}$  y  $\mathcal{R}' = \{p'_0, B'\}$ , donde como bien sabemos  $B$  y  $B'$  son bases de la variedad de dirección  $\overrightarrow{\mathcal{A}}$  de  $\mathcal{A}$ .

Tomemos un punto  $p \in \mathcal{A}$  genérico, e intentemos relacionar las coordenadas  $p_{\mathcal{R}}$  y  $p_{\mathcal{R}'}$  en los sistemas de referencia  $\mathcal{R}$  y  $\mathcal{R}'$  de forma similar a como se hacía con el cambio de base en  $\overrightarrow{\mathcal{A}}$ . Teniendo en cuenta Definición 2.26 y Propiedades 2.28, es inmediato que

$$p_{\mathcal{R}'} = (p_0 + \overrightarrow{p_0p})_{\mathcal{R}'} = (p_0)_{\mathcal{R}'} + (\overrightarrow{p_0p})_{B'} = (p_0)_{\mathcal{R}'} + M(\text{Id}_{\overrightarrow{\mathcal{A}}}, B, B') \cdot (\overrightarrow{p_0p})_B,$$

y por tanto

$$p_{\mathcal{R}'} = (p_0)_{\mathcal{R}'} + M(\text{Id}_{\mathcal{A}}, B, B')p_{\mathcal{R}}.$$

**Definición 2.29 (Fórmula del cambio de sistema de referencia)** *La fórmula*

$$p_{\mathcal{R}'} = (p_0)_{\mathcal{R}'} + M(\text{Id}_{\mathcal{A}}, B, B')p_{\mathcal{R}}$$

*es conocida como la expresión matricial de las ecuaciones del cambio de sistema de referencia de  $\mathcal{R}$  a  $\mathcal{R}'$  (en ese orden). Esta ecuación matricial puede escribirse de una forma más compacta con ayuda de la matriz cuadrada de orden  $n+1$*

$$M(\text{Id}_{\mathcal{A}}, \mathcal{R}, \mathcal{R}') := \left( \begin{array}{c|c} 1 & 0 \\ \hline (p_0)_{\mathcal{R}'} & M(\text{Id}_{\mathcal{A}}, B, B') \end{array} \right),$$

*conocida en la literatura como matriz del cambio de sistema de referencia de  $\mathcal{R}$  a  $\mathcal{R}'$ . En efecto, basta observar que la anterior ecuación matricial es equivalente a la expresión:*

$$\begin{pmatrix} 1 \\ p_{\mathcal{R}'} \end{pmatrix} = M(\text{Id}_{\mathcal{A}}, \mathcal{R}, \mathcal{R}') \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ p_{\mathcal{R}} \end{pmatrix}$$

La ecuación del cambio de sistema de referencia permite conocer las coordenadas en un sistema de referencia  $\mathcal{R}'$  de un punto  $p \in \mathcal{A}$  a partir de las coordenadas de  $p$  en otro sistema de referencia  $\mathcal{R}'$  a partir de los datos:

- Coordenadas en  $\mathcal{R}'$  del origen  $p_0$  de  $\mathcal{R}$ .
- Matriz del cambio de base en  $\overrightarrow{\mathcal{A}}$  de la base  $B$  de las direcciones de  $\mathcal{R}$  a la base  $B'$  de las direcciones de  $\mathcal{R}'$ .

**Definición 2.30 (Grupo afín)** *El conjunto de matrices*

$$\text{Aff}_n(\mathbb{R}) = \left\{ \left( \begin{array}{c|c} 1 & 0 \\ \hline b & A \end{array} \right) : A \in \text{GL}(n, \mathbb{R}), b \in \mathbb{R}^n \right\}$$

*es conocido como el grupo afín de orden  $n$ .*

Claramente  $\text{Aff}_n(\mathbb{R})$  está contenido en el grupo lineal  $\text{GL}(n+1, \mathbb{R})$ , ya que

$$\det \left( \begin{array}{c|c} 1 & 0 \\ \hline b & A \end{array} \right) = \det A \neq 0,$$

y de hecho es un subgrupo de  $\text{GL}(n+1, \mathbb{R})$  respecto al producto de matrices.

El anterior cálculo nos dice que para cualesquiera sistemas de referencia  $\mathcal{R}, \mathcal{R}'$  en  $\mathcal{A}$  la matriz  $M(\text{Id}_{\mathcal{A}}, \mathcal{R}, \mathcal{R}')$  pertenece a  $\text{Aff}_n(\mathbb{R})$ . Además, no es difícil ver que:

**Observación 2.31** *Si  $\mathcal{R}$  es un sistema de referencia en  $\mathcal{A}$  y  $\left( \begin{array}{c|c} 1 & 0 \\ \hline b & A \end{array} \right) \in \text{Aff}_n(\mathbb{R})$  entonces existe un único sistema de referencia  $\mathcal{R}'$  en  $\mathcal{A}$  tal que*

$$M(\text{Id}_{\mathcal{A}}, \mathcal{R}, \mathcal{R}') = \left( \begin{array}{c|c} 1 & 0 \\ \hline b & A \end{array} \right).$$

La demostración se deja como ejercicio. Las siguientes propiedades son inmediatas:

**Propiedades 2.32** Dado un espacio afín  $\mathcal{A}$  con  $\dim \mathcal{A} = n$  y sistemas de referencia  $\mathcal{R} = \{p_0, B\}$ ,  $\mathcal{R}' = \{p'_0, B'\}$  y  $\mathcal{R}'' = \{p''_0, B''\}$  en  $\mathcal{A}$ , se tiene que:

- (I)  $M(\text{Id}_{\mathcal{A}}, \mathcal{R}, \mathcal{R}) = \text{I}_{n+1}$ .
- (II)  $M(\text{Id}_{\mathcal{A}}, \mathcal{R}, \mathcal{R}'') = M(\text{Id}_{\mathcal{A}}, \mathcal{R}', \mathcal{R}'') \cdot M(\text{Id}_{\mathcal{A}}, \mathcal{R}, \mathcal{R}')$ .
- (III)  $M(\text{Id}_{\mathcal{A}}, \mathcal{R}, \mathcal{R}') = M(\text{Id}_{\mathcal{A}}, \mathcal{R}', \mathcal{R})^{-1}$ .

DEMOSTRACIÓN: El ítem (i) es consecuencia de que  $M(\text{Id}_{\mathcal{A}}, B, B) = \text{I}_n$  y  $(p_0)_{\mathcal{R}} = 0$ . Para ver (ii), notemos que

$$\begin{pmatrix} 1 \\ p_{\mathcal{R}''} \end{pmatrix} = M(\text{Id}_{\mathcal{A}}, \mathcal{R}', \mathcal{R}'') \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ p_{\mathcal{R}'} \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad \begin{pmatrix} 1 \\ p_{\mathcal{R}'} \end{pmatrix} = M(\text{Id}_{\mathcal{A}}, \mathcal{R}, \mathcal{R}') \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ p_{\mathcal{R}} \end{pmatrix}$$

para todo  $p \in \mathcal{A}$ , de donde

$$\begin{pmatrix} 1 \\ p_{\mathcal{R}''} \end{pmatrix} = (M(\text{Id}_{\mathcal{A}}, \mathcal{R}', \mathcal{R}'') \cdot M(\text{Id}_{\mathcal{A}}, \mathcal{R}, \mathcal{R}')) \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ p_{\mathcal{R}} \end{pmatrix}$$

para todo  $p \in \mathcal{A}$  y se tiene el resultado. El ítem (iii) es trivial de (i) y (ii). ■

**Ejercicio 2.33** Consideremos el espacio  $\mathcal{S}_2(\mathbb{R})$  de las matrices simétricas de orden dos con coeficientes reales, dotado de su estructura afín natural, y en él los siguientes sistemas de referencia:

$$\begin{aligned} \mathcal{R}_0 &= \left\{ p_0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, B_0 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\} \right\} \\ \mathcal{R}_1 &= \left\{ q_0 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}, B_1 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right\} \right\} \end{aligned}$$

Determina las ecuaciones del cambio de sistema de referencia de  $\mathcal{R}_0$  a  $\mathcal{R}_1$ .

SOLUCIÓN: Como  $\mathcal{R}_0$  es el sistema de referencia natural o canónico de  $\mathcal{S}_2(\mathbb{R})$ , lo más sencillo es calcular las ecuaciones del cambio de  $\mathcal{R}_1$  a  $\mathcal{R}_0$ , esto es, la matriz  $M(\text{Id}_{\mathcal{S}_2(\mathbb{R})}, \mathcal{R}_1, \mathcal{R}_0)$ . Comenzaremos por este cálculo.

El punto origen origen de  $\mathcal{R}_1$  tiene coordenadas  $(q_0)_{\mathcal{R}_0} = (1, 2, -1)^t$  en  $\mathcal{R}_0$ . Análogamente, la matriz del cambio de base de  $B_1$  a  $B_0$  en el espacio vectorial  $\mathcal{S}_2(\mathbb{R})$  viene dada por

$$M(\text{Id}_{\mathcal{S}_2(\mathbb{R})}, B_1, B_0) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Por tanto la matriz del cambio de sistema de referencia de  $\mathcal{R}_1$  a  $\mathcal{R}_0$  queda:

$$M(\text{Id}_{\mathcal{S}_2(\mathbb{R})}, \mathcal{R}_1, \mathcal{R}_0) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

de donde

$$M(\text{Id}_{\mathcal{S}_2(\mathbb{R})}, \mathcal{R}_0, \mathcal{R}_1) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ -3 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Por tanto las ecuaciones del cambio de sistema de referencia de  $\mathcal{R}_0$  a  $\mathcal{R}_1$  quedan:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ -3 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix},$$

donde  $p_{\mathcal{R}_1} = (x'.y', z')^t$  y  $p_{\mathcal{R}_0} = (x, y, z)^t$  representan las coordenadas genéricas de un punto  $p \in \mathcal{S}_2(\mathbb{R})$  en  $\mathcal{R}_1$  y  $\mathcal{R}_0$ , respectivamente. ■

### 2.2.2. Ecuaciones paramétricas e implícitas de subespacios

Una de las ventajas de la asignación de coordenadas en sistemas de referencia es que se puede representar los subespacios afines mediante distintos tipos de ecuaciones analíticas. Expliquemoslo con detalle.

Consideremos un espacio afín  $\mathcal{A}$  con  $\dim \mathcal{A} = n \in \mathbb{N}$ , y un sistema de referencia  $\mathcal{R} = \{p_0, B\}$ . Como siempre  $p_0$  es el origen de  $\mathcal{R}$  y  $B$  la base de  $\overrightarrow{\mathcal{A}}$  asociada a  $\mathcal{R}$ . Sea  $S = q + \vec{S}$  un subespacio afín con  $\dim S = k \leq n$ , y escribamos

$$\vec{S} = L(\{u_1, \dots, u_k\}),$$

donde  $B' = \{u_1, \dots, u_k\}$  es una base ordenada de  $\vec{S}$ . Tenemos que

$$p \in S \iff p = q + u, \quad u \in \vec{S} \iff \exists \lambda_1, \dots, \lambda_k \in \mathbb{R} : p = q + \sum_{j=1}^k \lambda_j u_j.$$

Por tanto

$$p \in S \iff \exists \lambda_1, \dots, \lambda_k \in \mathbb{R} : p_{\mathcal{R}} = q_{\mathcal{R}} + \left( \sum_{j=1}^k \lambda_j u_j \right)_B = q_{\mathcal{R}} + \sum_{j=1}^k \lambda_j (u_j)_B.$$

Si consideramos el monomorfismo inclusión  $i_{\vec{S}} : \vec{S} \rightarrow \overrightarrow{\mathcal{A}}$ , recordemos que la matriz de  $i_{\vec{S}}$  en las bases  $B'$  y  $B$ , que escribiremos  $M(i_{\vec{S}}, B', B)$ , tiene por columna  $j$ -ésima justo el vector  $(u_j)_B$ ,  $j = 1, \dots, k$ . Por tanto, la anterior expresión se puede reescribir de forma matricial así

$$p \in S \iff \exists \lambda_1, \dots, \lambda_k \in \mathbb{R} : p_{\mathcal{R}} = q_{\mathcal{R}} + M(i_{\vec{S}}, B', B) \cdot (\lambda_1, \dots, \lambda_k)^t.$$

**Definición 2.34** *La expresión analítica*

$$(x_1, \dots, x_n)^t = q_{\mathcal{R}} + M(i_{\vec{S}}, B', B) \cdot (\lambda_1, \dots, \lambda_k)^t.$$

es conocida como las ecuaciones paramétricas de  $S$  en el sistema de referencia  $\mathcal{R}$  (definidas por el punto  $q \in S$  y la base ordenada  $B'$  de  $\vec{S}$ ). Expresa que un punto  $p$  de  $\mathcal{A}$  pertenece a  $S$  si y sólo si existen valores para los parámetros  $\lambda_1, \dots, \lambda_k$  haciendo válida la anterior expresión cuando  $(x_1, \dots, x_n)^t$  son las coordenadas de  $p$  en  $\mathcal{R}$ .

La interpretación geométrica de las ecuaciones paramétricas es sencilla: las variables  $\lambda_1, \dots, \lambda_k$  son parámetros que, al variar libremente en  $\mathbb{R}$ , determinan las coordenadas en  $\mathcal{R}$  de todos los puntos de  $S$ .

**Ejercicio 2.35** En el espacio afín natural asociado al espacio vectorial

$$\mathcal{P}_2(\mathbb{R}) = \{a_0 + a_1x + a_2x^2 : a_0, a_1, a_2 \in \mathbb{R}\}$$

de los polinomios de grado  $\leq 2$ , determina unas ecuaciones paramétricas del subespacio  $S = \{p(x) \in \mathcal{P}_2(\mathbb{R}) : p'(1) = 1\}$  en el sistema de referencia canónico  $\mathcal{R}_0 = \{0, B_0 = \{1, x, x^2\}\}$  de  $\mathcal{P}_2(\mathbb{R})$ .

**SOLUCIÓN:** Si  $p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2$ , la condición  $p'(1) = 1$  se escribe  $a_1 + 2a_2 = 1$ . Inferimos de aquí que  $q(x) = x \in S$  y  $p(x) \in S$  si y sólo si  $p(x) - q(x) \in \vec{S}$ , donde

$$\vec{S} = \{p(x) \in \mathcal{P}_2(\mathbb{R}) : p'(1) = 0\} = \{a_0 + a_1x + a_2x^2 : a_1 + 2a_2 = 0\}.$$

En otras palabras  $S = q(x) + \vec{S}$  es el subespacio afín que pasa por  $q(x) = x \in \mathcal{P}_2(\mathbb{R})$  y tiene por variedad de dirección el subespacio vectorial  $\vec{S} \subseteq \mathcal{P}_2(\mathbb{R}) \equiv \overrightarrow{\mathcal{P}_2(\mathbb{R})}$ .

Una ecuación implícita de  $\vec{S}$  en la base canónica  $B_0 = \{1, x, x^2\}$  de  $\mathcal{P}_2(\mathbb{R})$  es  $a_1 + 2a_2 = 0$ , que tiene por conjunto de soluciones en  $\mathbb{R}^3$

$$\{(\lambda_1, -2\lambda_2, \lambda_2) \in \mathbb{R}^3 : \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}\}.$$

Por tanto  $B' = \{q_1(x) = 1, q_2(x) = -2x + x^2\}$  es base de  $\vec{S}$  y claramente

$$M(i_{\vec{S}}, B', B_0) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

donde  $i_{\vec{S}} : \vec{S} \rightarrow \mathcal{P}_2(\mathbb{R})$  es la aplicación inclusión. Por otra parte, el punto  $q(x) = x$  tiene por coordenadas en  $\mathcal{R}_0$

$$q(x)_{\mathcal{R}_0} = (0, 1, 0)^t.$$

Por tanto las ecuaciones paramétricas de  $S$  en la base  $B'$  de  $\vec{S}$  y el sistema de referencia  $\mathcal{R}_0$  de  $\mathcal{P}_2(\mathbb{R})$  son

$$(x_1, x_2, x_3)^t = (0, 1, 0)^t + M(i_{\vec{S}}, B', B_0) \cdot (\lambda_1, \lambda_2)^t = (0, 1, 0)^t + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot (\lambda_1, \lambda_2)^t,$$

donde  $(x_1, x_2, x_3)^t$  representa las coordenadas genéricas  $p(x)_{\mathcal{R}_0}$  en  $\mathcal{R}_0$  de un punto  $p(x)$  de  $S$ . ■

Los parámetros en las anteriores ecuaciones paramétricas pueden ser cancelados por un proceso de eliminación estándar que explicaremos a continuación, y que nos llevará a la existencia de ecuaciones implícitas o cartesianas de  $S$  de acuerdo a la siguiente definición.

**Definición 2.36** Un sistema de  $n - k$  ( $0 \leq k < n$ ) ecuaciones lineales linealmente independientes

$$\left. \begin{array}{lclclclclclcl} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & \cdots & a_{1n}x_n & = & b_1 \\ \vdots & & \vdots & & & \vdots & & \vdots \\ a_{n-k1}x_1 & + & a_{n-k2}x_2 & + & \cdots & a_{n-kn}x_n & = & b_{n-k} \end{array} \right\} \quad (I)$$

se dice que representa unas ecuaciones implícitas o cartesianas para un subespacio afín  $S$  de  $\mathcal{A}$  respecto de un sistema de referencia  $\mathcal{R}$  en  $\mathcal{A}$  si es cierto el siguiente enunciado:

$$(x_1, \dots, x_n) \text{ es solución de (I)} \iff (x_1, \dots, x_n)^t = p_{\mathcal{R}} \text{ para algún } p \in S.$$

Observa que, de existir, las ecuaciones implícitas respecto de  $\mathcal{R}$  no son únicas: basta transformar el sistema de ecuaciones anterior en otros equivalentes.

**Proposición 2.37** *Todo subespacio afín  $S$  de  $\mathcal{A}$  con  $1 \leq \dim S < n = \dim \mathcal{A}$  admite unas ecuaciones implícitas respecto de cualquier sistema de referencia  $\mathcal{R}$  de  $\mathcal{A}$ .*

DEMOSTRACIÓN: Escribamos  $\dim S = k$  y describamos  $S$  como al inicio de esta sección, aprovechando la notación anterior. De las ecuaciones paramétricas para  $S$  respecto de  $\mathcal{R}$  definidas por un punto  $q \in S$  y una base  $B'$  ordenada de  $\vec{S}$  (ver Definición 2.34) se deduce que:

$$p \in S \iff \exists \lambda_1, \dots, \lambda_k \in \mathbb{R} : p_{\mathcal{R}} - q_{\mathcal{R}} = M(\mathbf{i}_{\vec{S}}, B', B) \cdot (\lambda_1, \dots, \lambda_k)^t,$$

esto es,

$$p \in S \iff \text{rang}(M(\mathbf{i}_{\vec{S}}, B', B) \mid p_{\mathcal{R}} - q_{\mathcal{R}}) = \text{rang}(M(\mathbf{i}_{\vec{S}}, B', B)) = \dim S = k.$$

Siguiendo el procedimiento estándar del álgebra lineal, tras elegir una submatriz  $M_0$  de orden  $k$  de  $M(\mathbf{i}_{\vec{S}}, B', B)$  con menor asociado (determinante) no nulo, todas las  $n - k$  submatrices de  $(M(\mathbf{i}_{\vec{S}}, B', B) \mid p_{\mathcal{R}} - q_{\mathcal{R}})$  de orden  $k + 1$  conteniendo a  $M_0$  han de tener determinante nulo. Escribiendo  $p_{\mathcal{R}} = (x_1, \dots, x_n)^t$  y  $q_{\mathcal{R}} = (c_1, \dots, c_n)^t$ , esos  $n - k$  menores nulos generan un sistema de ecuaciones lineales de la forma

$$\left. \begin{array}{lclclclclcl} a_{11}(x_1 - c_1) & + & a_{12}(x_2 - c_2) & + & \cdots & a_{1n}(x_n - c_n) & = & 0 \\ \vdots & & \vdots & & & \vdots & & \vdots \\ a_{n-k1}(x_1 - c_1) & + & a_{n-k2}(x_2 - c_2) & + & \cdots & a_{n-kn}(x_n - c_n) & = & 0 \end{array} \right\},$$

o si se prefiere tras operar convenientemente

$$\left. \begin{array}{lclclclclcl} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & \cdots & a_{1n}x_n & = & b_1 \\ \vdots & & \vdots & & & \vdots & & \vdots \\ a_{n-k1}x_1 & + & a_{n-k2}x_2 & + & \cdots & a_{n-kn}x_n & = & b_{n-k} \end{array} \right\} \quad (\text{I})$$

Solo nos resta garantizar que las ecuaciones en (I) son linealmente independientes. Notemos que la misma argumentación anterior (salvo hacer  $q_{\mathcal{R}} \equiv 0$ , o  $c_j = 0$  para todo  $j = 1, \dots, n$ ) nos dice que unas ecuaciones implícitas para  $\vec{S}$  respecto de la base  $B$  de  $\vec{\mathcal{A}}$  vienen dadas por el correspondiente sistema homogéneo asociado a (I), a saber,

$$\left. \begin{array}{lclclclclcl} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & \cdots & a_{1n}x_n & = & 0 \\ \vdots & & \vdots & & & \vdots & & \vdots \\ a_{n-k1}x_1 & + & a_{n-k2}x_2 & + & \cdots & a_{n-kn}x_n & = & 0 \end{array} \right\} \quad (\text{I})_0$$

Por la teoría de resolución de sistemas de ecuaciones lineales, esta apreciación nos garantiza que las  $n - k$  ecuaciones de  $(\text{I})_0$  son linealmente independientes (ya que su conjunto de soluciones es de dimensión  $k$  al ser  $\dim \vec{S} = k$ ), y por tanto lo mismo ocurre para las ecuaciones en (I) concluyendo la prueba. ■

**Observación 2.38** *La Proposición 2.37 es formalmente válida para  $\dim S = 0$ . En efecto, los subespacios  $S = \{q\}$ ,  $q \in \mathcal{A}$ , admiten como ecuaciones implícitas en  $\mathcal{R}$  cualquier sistema de  $n$  ecuaciones con  $n$  incógnitas ( $n = \dim \mathcal{A}$ ) con solución única  $q_{\mathcal{R}}$ .*

La anterior proposición y subsiguiente observación tienen un recíproco natural muy interesante que nos proporciona un mecanismo analítico sencillo para presentar todos subespacios afines de  $\mathcal{A}$  (distintos del propio  $\mathcal{A}$ ).

**Proposición 2.39** Sean  $b \in \mathbb{R}^{n-k}$  y  $C \in \mathcal{M}_{(n-k) \times n}(\mathbb{R})$  ( $0 \leq k < n$ ) con  $\text{rang}(C) = n - k$  tales que el sistema de ecuaciones lineales  $C \cdot x^t = b$ , donde  $x = (x_1, \dots, x_n)$ , es compatible. Sean  $\mathcal{A}$  un espacio afín  $n$  dimensional y  $\mathcal{R} = \{p_0, B\}$  un sistema de referencia en  $\mathcal{A}$ , y definamos

$$S := \{p \in \mathcal{A}: C \cdot p_{\mathcal{R}} = b\}.$$

Entonces  $S$  es un subespacio afín de dimensión  $k$  en  $\mathcal{A}$  y  $C \cdot x^t = b$  son unas ecuaciones implícitas de  $S$  en el sistema de referencia  $\mathcal{R}$ . Además,  $C \cdot x^t = 0$  son unas ecuaciones implícitas de  $\vec{S}$  en la base  $B$  de  $\vec{\mathcal{A}}$ .

**DEMOSTRACIÓN :** La estrategia básica consiste en probar que  $S$  es de la forma  $q + U$  para algún  $q \in \mathcal{A}$  y  $U \leq \vec{\mathcal{A}}$  subespacio vectorial.

Definamos

$$U := \{v \in \vec{\mathcal{A}}: C \cdot v_B = 0\}.$$

Trivialmente  $U$  es un subespacio vectorial  $k$ -dimensional de  $\vec{\mathcal{A}}$  (de hecho el definido con ecuaciones implícitas  $C \cdot x^t = 0$  respecto de la base  $B$ ).

Por otra parte, como el sistema  $C \cdot x^t = b$  es compatible podemos elegir una solución  $x_0 \in \mathbb{R}^n$  del mismo y definir  $q = \Phi_{\mathcal{R}}^{-1}(x_0)$ . Claramente el punto  $q \in S \neq \emptyset$  por construcción.

Para concluir probaremos que  $S$  es el subespacio afín  $q + U$ . En efecto, como  $C \cdot q_{\mathcal{R}} = b$  tenemos que

$$p \in S \iff C \cdot (p_{\mathcal{R}} - q_{\mathcal{R}}) = 0 \iff C \cdot (\vec{pq})_B = 0 \iff \vec{pq} \in U \iff p \in q + U.$$

De la definición de  $S$  y la Definición 2.36 se sigue que  $C \cdot x^t = b$  son unas ecuaciones implícitas de  $S$  respecto de  $\mathcal{R}$ . Por definición también  $\vec{S} = U$ , y por tanto  $C \cdot x^t = 0$  son unas ecuaciones implícitas de  $\vec{S}$  en la base  $B$  de  $\vec{\mathcal{A}}$ . Esto acaba la prueba. ■

**Corolario 2.40** Si  $S$  es un subespacio afín de  $\mathcal{A}$  con  $0 \leq \dim S = k < n = \dim \mathcal{A}$ , entonces todas las ecuaciones implícitas de  $S$  respecto de cualquier sistema de referencia  $\mathcal{R}$  de  $\mathcal{A}$  consisten en  $n - k$  ecuaciones lineales linealmente independientes.

**Ejercicio 2.41** En el espacio afín natural asociado al espacio vectorial  $\mathcal{P}_2(\mathbb{R})$  de los polinomios de grado  $\leq 2$ , determina unas ecuaciones implícitas del subespacio

$$S = 1 - x + L(\{-1 + x^2, x + 2x^2\})$$

en el sistema de referencia canónico  $\mathcal{R}_0 = \{0, B_0 = \{1, x, x^2\}\}$  de  $\mathcal{P}_2(\mathbb{R})$ .

**SOLUCIÓN :** Es claro que  $\vec{S} = L(\{-1 + x^2, x + 2x^2\})$ , de donde  $B = \{-1 + x^2, x + 2x^2\}$  es una base de  $\vec{S}$ . Como y  $1 - x \in S$ , unas ecuaciones paramétricas de  $S$  en  $B$  y  $\mathcal{R}_0 = \{1, x, x^2\}$  son

$$(x_1, x_2, x_3)^t = (1, -1, 0)^t + M(i_{\vec{S}}, B, B_0) \cdot (\lambda_1, \lambda_2)^t = (1, -1, 0)^t + \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot (\lambda_1, \lambda_2)^t.$$

Por el algoritmo explicado,  $S$  tiene como ecuación implícita en  $\mathcal{R}_0$

$$\det \begin{pmatrix} x_1 - 1 & -1 & 0 \\ x_2 + 1 & 0 & 1 \\ x_3 & 1 & 2 \end{pmatrix} = 3 - x_1 + 2x_2 - x_3 = 0.$$

■

## 2.3. Rectas en espacios afines tridimensionales

En lo que sigue  $(\mathcal{A}, \overrightarrow{\mathcal{A}}, \rightarrow)$  será un espacio afín con  $\dim \mathcal{A} = 3$ . El concepto de haz de planos simplifica mucho la resolución del problema de encontrar el plano de  $\mathcal{A}$  contenido a una recta y un punto exterior a la misma.

**Definición 2.42** *Dada una recta afín  $R \subset \mathcal{A}$ , el haz de planos con base la recta  $R$ , denotado  $\mathcal{H}_R$ , es el conjunto de todos los planos afines en  $\mathcal{A}$  que contienen a  $R$ :*

$$\mathcal{H}_R = \{T \subset \mathcal{A} \text{ plano afín: } R \subset T\}.$$

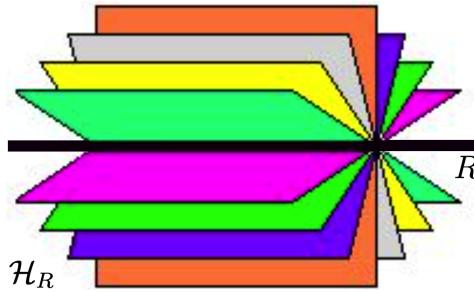


Figura 7: Haz de planos  $\mathcal{H}_R$  determinado por la recta  $R$ .

La siguiente proposición nos proporciona un algoritmo sencillo para determinar  $\mathcal{H}_R$ .

**Proposición 2.43** *Sea  $\mathcal{A}$  un espacio afín con  $\dim \mathcal{A} = 3$ ,  $\mathcal{R}$  un sistema de referencia en  $\mathcal{A}$  y  $R \subset \mathcal{A}$  una recta afín con ecuaciones implícitas*

$$a_1x + a_2y + a_3z + a_0 = b_1x + b_2y + b_3z + b_0 = 0.$$

*Los siguientes enunciados son ciertos:*

(I) *Un plano  $S \in \mathcal{H}_R$  si y sólo si  $S$  tiene ecuación implícita en  $\mathcal{R}$  de la forma*

$$\lambda(a_1x + a_2y + a_3z + a_0) + \mu(b_1x + b_2y + b_3z + b_0) = 0$$

*para alguna pareja  $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ .*

(II) *Dado  $q \in \mathcal{A} \setminus R$ ,  $S_q = \{q\} \vee R$  es el único plano en  $\mathcal{H}_R$  con  $q \in S_q$ .*

(III) *Si  $q_{\mathcal{R}} = (x_0, y_0, z_0)^t$  y  $(\lambda_0, \mu_0) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$  satisface*

$$\lambda_0(a_1x_0 + a_2y_0 + a_3z_0 + a_0) + \mu_0(b_1x_0 + b_2y_0 + b_3z_0 + b_0) = 0,$$

*entonces  $S_q$  tiene por ecuaciones implícitas*

$$\lambda_0(a_1x + a_2y + a_3z + a_0) + \mu_0(b_1x + b_2y + b_3z + b_0) = 0.$$

**DEMOSTRACIÓN :** Para probar (i), observemos que si  $S$  es un plano que admite por ecuación implícita en  $\mathcal{R}$

$$\lambda(a_1x + a_2y + a_3z + a_0) + \mu(b_1x + b_2y + b_3z + b_0) = 0, \quad (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\},$$

entonces es claro que  $R \subset S$ , y por tanto que  $S \in \mathcal{H}_R$  (los puntos que satisfacen las ecuaciones implícitas de  $R$  en el enunciado también satisfacen la de  $S$ ).

Recíprocamente, sea  $S \in \mathcal{H}_R$  y tomemos una ecuación implícita de  $S$  en  $\mathcal{R}$

$$c_1x + c_2y + c_3z + c_0 = 0.$$

Por simplicidad introduzcamos la siguiente notación

$$\vec{a} = (a_1, a_2, a_3, a_0), \vec{b} = (b_1, b_2, b_3, b_0), \vec{c} = (c_1, c_2, c_3, c_0).$$

Al ser  $S \in \mathcal{H}_R$  todo punto de  $R$  ha de pertenecer a  $S$ , esto es,

$$\vec{a} \cdot (x, y, z, 1)^t = \vec{b} \cdot (x, y, z, 1)^t = 0 \Rightarrow \vec{c} \cdot (x, y, z, 1)^t = 0.$$

Por tanto el sistema de ecuaciones lineales

$$\vec{a} \cdot (x, y, z, 1)^t = \vec{b} \cdot (x, y, z, 1)^t = \vec{c} \cdot (x, y, z, 1)^t = 0$$

es equivalente (tiene el mismo conjunto de soluciones) al sistema

$$\vec{a} \cdot (x, y, z, 1)^t = \vec{b} \cdot (x, y, z, 1)^t = 0,$$

en el que sus dos ecuaciones son linealmente independientes. Del método de Gauss para la resolución de sistemas, deducimos que la ecuación  $\vec{c} \cdot (x, y, z, 1)^t = 0$  ha de ser combinación lineal de las ecuaciones  $\vec{a} \cdot (x, y, z, 1)^t = 0, \vec{b} \cdot (x, y, z, 1)^t = 0$ , de donde se sigue (i).

Item (ii) es consecuencia trivial de que  $\dim S_q = 2$  (ver Corolario 2.20-(iii)).

Comprobemos (iii). Si  $q_{\mathcal{R}} = (x_0, y_0, z_0)^t$ , la condición  $q \notin R$  garantiza que alguno de los números reales  $a_1x_0 + a_2y_0 + a_3z_0 + a_0, b_1x_0 + b_2y_0 + b_3z_0 + b_0$  ha de ser no nulo, y por tanto el sistema de ecuaciones lineales con incógnitas  $\lambda, \mu$

$$\lambda(a_1x_0 + a_2y_0 + a_3z_0 + a_0) + \mu(b_1x_0 + b_2y_0 + b_3z_0 + b_0) = 0$$

es compatible e indeterminado. Sus soluciones son un subespacio vectorial 1-dimensional  $L\{(\lambda_0, \mu_0)\} \leq \mathbb{R}^2$ ,  $(\lambda_0, \mu_0) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0, 0\}$ , y por construcción el plano de ecuación implícita

$$\lambda_0(a_1x + a_2y + a_3z + a_0) + \mu_0(b_1x + b_2y + b_3z + b_0) = 0$$

coincide con  $S_q$ ; ver (i) y (ii). ■

En un espacio afín  $(\mathcal{A}, \overrightarrow{\mathcal{A}}, \rightarrow)$  tridimensional, dos rectas  $R_1, R_2 \subset \mathcal{A}$  que no sean ni paralelas ni secantes se han de cruzar. Esto es consecuencia de que  $\dim(\vec{R}_1 \cap \vec{R}_2) = 0$  y por tanto

$$\dim(R_1 \vee R_2) = \dim R_1 + \dim R_2 - \dim(\vec{R}_1 \cap \vec{R}_2) + 1 = \dim R_1 + \dim R_2 + 1 = 3,$$

donde hemos usado la conocida fórmula de dimensiones.

Pretendemos resolver el problema geométrico de determinar la recta en  $\mathcal{A}$  que se apoya en dos rectas dadas y que pasa por un punto exterior a las mismas. El manejo del haz de planos asociado a una recta será el ingrediente geométrico necesario para su resolución.

**Definición 2.44** *Dadas dos rectas  $R_1, R_2$  en un espacio afín  $\mathcal{A}$  con  $\dim \mathcal{A} = 3$  y un punto  $p_0 \in \mathcal{A}$ , se dice que una recta afín  $R \subseteq \mathcal{A}$  pasa por  $p_0$  y se apoya en  $R_1$  y  $R_2$  si satisface las condiciones*

$$p_0 \in R \quad y \quad R \cap R_j \neq \emptyset, \quad j = 1, 2.$$

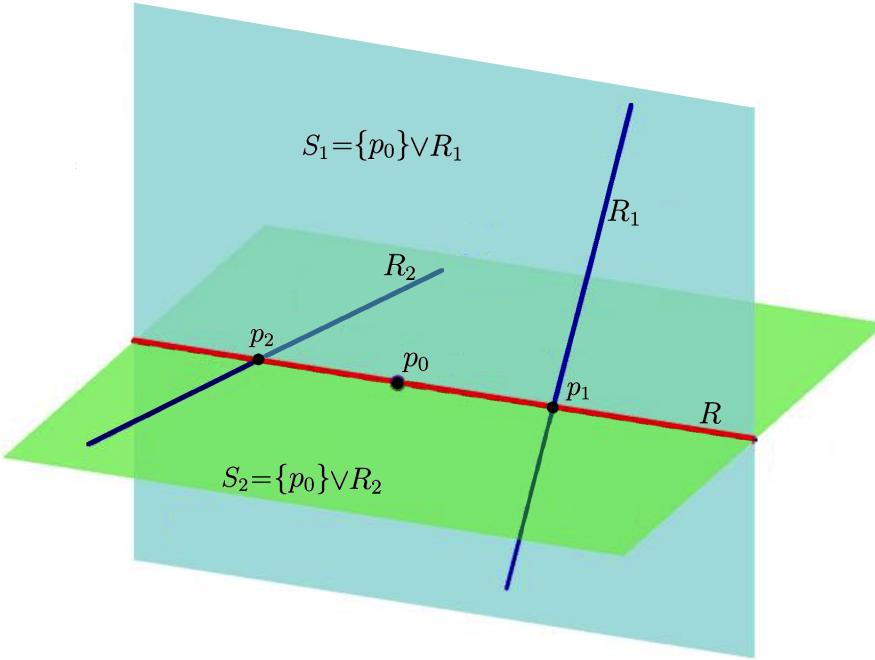


Figura 8: Recta  $R$  que pasa por  $p_0$  y se apoya en  $R_1$  y  $R_2$ .

**Proposición 2.45** Sean  $R_1, R_2 \subset \mathcal{A}$  rectas que se cruzan y  $p_0 \in \mathcal{A}$  punto tal que

$$p_0 \notin R_1 \cup R_2 \quad y \quad R_i \text{ no es paralela al plano } S_j = \{p_0\} \vee R_j, \{i, j\} = \{1, 2\}.$$

Entonces  $R = S_1 \cap S_2$  es la única recta afín en  $\mathcal{A}$  que se apoya en  $R_1$  y  $R_2$ .

**DEMOSTRACIÓN :** Para empezar observemos que las fórmulas de dimensiones en Corolario 2.20-(iii) garantizan que  $\dim S_j = 2$ ,  $j = 1, 2$ . Comprobemos que  $R = S_1 \cap S_2$  es una recta que se apoya en  $R_1$  y  $R_2$  (obviamente  $p_0 \in R$ ). En efecto, como las rectas  $R_1, R_2$  se cruzan (y por tanto no son coplanarias), las condiciones  $R_j \subset S_j$ ,  $j = 1, 2$ , implican que  $S_1 \neq S_2$ . Además, como  $p_0 \in S_1 \cap S_2 \neq \emptyset$ , las fórmulas de dimensiones en Corolario 2.20-(iii) implican que  $R = S_1 \cap S_2$  es una recta pasando por  $p_0$ . Las hipótesis de que  $R_i$  no es paralelo a  $S_j = \{p_0\} \vee R_j$ ,  $\{i, j\} = \{1, 2\}$ , y las fórmulas de dimensiones de nuevo garantizan que  $S_j \cap R_i$  es un punto  $\{p_j\}$ ,  $j = 1, 2$ . Pero  $S_j \cap R_i \subseteq S_1 \cap S_2 = R$ , de donde  $p_j \in R \cap R_i \subseteq S_j \cap R_i$  y por tanto  $\{p_j\} = R \cap R_i = S_j \cap R_i$ ,  $j = 1, 2$ . Ésto prueba que  $R$  se apoya en  $R_1$  y  $R_2$  como deseábamos.

Para la unicidad, observemos que si  $R'$  es otra recta apoyándose en  $R_1$  y  $R_2$  y contenido a  $p_0$  entonces  $R' \vee R_j$  es un plano por Corolario 2.20-(iii), y como  $p_0 \in R' \vee R_j$  necesariamente  $R' \vee R_j = \{p_0\} \vee R_j = S_j$ ,  $j = 1, 2$ . De aquí que

$$R = S_1 \cap S_2 = (R' \vee R_1) \cap (R' \vee R_2) = R'.$$

■

## 2.4. Algunos ejercicios resueltos

**Ejercicio 2.46** Se consideran las rectas afines en  $\mathbb{R}^3$

$$R_1 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x + y + z - 1 = x - y = 0\},$$

$$R_2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : y + z - 1 = 2x - y - z - 3 = 0\}.$$

Encontrar la recta  $R$  en  $\mathbb{R}^3$  que se apoya en  $R_1, R_2$  y pasa por  $p_0 = (0, 0, -1)$ .

SOLUCIÓN: Es fácil comprobar que  $p_0$ ,  $R_1$  y  $R_2$  están en las condiciones de la Proposición 2.45, por lo que el ejercicio tiene sentido.

El plano  $S_1$  del haz  $\mathcal{H}_{R_1}$  que contiene a  $p_0$  se calcula imponiendo que la ecuación

$$\lambda(x + y + z - 1) + \mu(x - y) = 0$$

se satisfaga para  $x = 0, y = 0, z = -1$ . Tras un cálculo inmediato obtenemos  $-2\lambda = 0$ , esto es  $\lambda = 0$  ( $\mu$  puede tomar cualquier valor no nulo). Por tanto  $S_1$  es el plano de ecuación implícita

$$x - y = 0.$$

Análogamente, el plano  $S_2$  del haz  $\mathcal{H}_{R_2}$  que contiene a  $p_0$  se calcula imponiendo que la ecuación

$$\lambda(y + z - 1) + \mu(2x - y - z - 3) = 0$$

se satisfaga para  $x = 0, y = 0, z = -1$ . Tras un cálculo inmediato obtenemos  $-2\lambda - 2\mu = 0$ , esto es  $\lambda = -\mu$  ( $\mu$  puede tomar cualquier valor no nulo). Por tanto  $S_2$  es el plano de ecuación implícita

$$\mu((y + z - 1) - (2x - y - z - 3)) = 0, \quad \text{esto es,} \quad -x + z + 1 = 0.$$

La recta  $R$  es la de ecuaciones implícitas en el sistema de referencia  $\mathcal{R}_0$  usual de  $\mathbb{R}^3$

$$x - y = -x + z + 1 = 0.$$

■

**Ejercicio 2.47** Encontrar la recta del espacio afín  $\mathbb{R}^3$  que pasa por  $p_0 = (1, 1, 1)$  y se apoya en las rectas  $R_1 = (0, 0, 1) + L\{(1, 0, 1)\}$  y  $R_2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x + y = z - y + 1 = 0\}$ .

SOLUCIÓN: Unas ecuaciones paramétricas de  $R_1$  en el sistema de referencia usual  $\mathcal{R}_0 = \{(0, 0, 0), B_0\}$  de  $\mathbb{R}^3$  ( $B_0$  es la base canónica de  $\mathbb{R}^3$ ) son

$$(x, y, z)^t = (0, 0, 1)^t + (1, 0, 1)^t \lambda = (\lambda, 0, 1 + \lambda)^t.$$

Para encontrar unas ecuaciones paramétricas de  $R_2$  en  $\mathcal{R}_0$  resolvemos el sistema compatible e indeterminado

$$x + y = z - y + 1 = 0,$$

que nos lleva al conjunto de soluciones

$$(x, y, z)^t = (0, 0, -1)^t + (-1, 1, 1)^t \mu = (-\mu, \mu, -1 + \mu)^t.$$

Bastará con encontrar puntos en  $R_1$  y  $R_2$  alineados con  $p_0 = (1, 1, 1)$ , esto es, encontrar valores de  $\lambda$  y  $\mu$  para los cuales los puntos

$$(\lambda, 0, 1 + \lambda), (-\mu, \mu, -1 + \mu), (1, 1, 1)$$

estén alineados (no sean afínmente independientes). La condición de alineación se expresa diciendo que

$$\text{rang} \begin{pmatrix} \lambda - 1 & -\mu - 1 \\ -1 & \mu - 1 \\ \lambda & \mu - 2 \end{pmatrix} = 1,$$

lo que fuerza a que

$$\det \begin{pmatrix} \lambda - 1 & -\mu - 1 \\ -1 & \mu - 1 \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} -1 & \mu - 1 \\ \lambda & \mu - 2 \end{pmatrix} = 0.$$

Este sistema de ecuaciones tiene como soluciones únicas  $\lambda = -4$ ,  $\mu = 2/3$ , de donde la recta buscada es:

$$R = \langle \{(-4, 0, -3), (-2/3, 2/3, -1/3), (1, 1, 1)\} \rangle = \langle \{(-4, 0, -3), (1, 1, 1)\} \rangle,$$

esto es  $R = (-4, 0, -3) + L(\{(5, 1, 4)\})$ . ■

**Ejercicio 2.48** Calcular un sistema de referencia afín, unas ecuaciones paramétricas y unas ecuaciones implícitas de:

- (a) El hiperplano afín  $S$  de  $\mathbb{R}^4$  que pasa por los puntos  $p = (1, 0, 0, 0)$ ,  $q = (0, 1, 0, 0)$ ,  $r = (0, 0, 1, 0)$  y  $s = (0, 0, 0, 1)$ ,
- (b) Un plano afín de  $\mathbb{R}^3$  que contenga a las rectas afines  $S = (1, 0, 2) + L((1, -1, 0))$  y  $T = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / x + y - z = -1, y - z = 2\}$ ,
- (c) El hiperplano afín de  $\mathbb{R}^4$  paralelo al de ecuación  $x - y + z - t = 7$  y que pasa por el punto  $p = (1, -2, 3, -2)$ .

SOLUCIÓN: Resolvamos (a). Como  $S = \langle \{(1, 0, 0, 0), (0, 1, 0, 0), (0, 0, 1, 0), (0, 0, 0, 1)\} \rangle$ , y los puntos  $\{(1, 0, 0, 0), (0, 1, 0, 0), (0, 0, 1, 0), (0, 0, 0, 1)\}$  son afínmente independientes,

$$\mathcal{R} = \{(1, 0, 0, 0), (0, 1, 0, 0), (0, 0, 1, 0), (0, 0, 0, 1)\}$$

es un sistema de referencia de  $S$  con origen  $(1, 0, 0, 0)$  y base de direcciones  $B = \{(-1, 1, 0, 0), (-1, 0, 1, 0), (-1, 0, 0, 1)\}$ .

Si denotamos por  $\mathcal{R}_0$  el sistema de referencia usual o canónico de  $\mathbb{R}^4$ , unas ecuaciones paramétricas de  $S$  en  $\mathcal{R}_0$  vienen dadas por:

$$(x_1, x_2, x_3, x_4)^t = (1, 0, 0, 0)^t + \begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot (\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)^t.$$

Por último, una ecuación implícita para  $S$  en  $\mathcal{R}_0$  surge de la condición

$$\text{rang} \begin{pmatrix} x_1 - 1 & -1 & -1 & -1 \\ x_2 & 1 & 0 & 0 \\ x_3 & 0 & 1 & 0 \\ x_4 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = 3,$$

esto es,

$$\det \begin{pmatrix} x_1 - 1 & -1 & -1 & -1 \\ x_2 & 1 & 0 & 0 \\ x_3 & 0 & 1 & 0 \\ x_4 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = x_1 + x_2 + x_3 + x_4 - 1 = 0.$$

Para resolver (b) observemos que  $S$  y  $T$  son secantes. En efecto, los puntos de  $(x, y, z) \in S$  se describen por las ecuaciones paramétricas

$$(x, y, z) = (1 + \lambda, -\lambda, 2).$$

Sustituyendo  $x$  por  $1 + \lambda$ ,  $y$  por  $-\lambda$  y  $z$  por 2 en las ecuaciones implícitas que definen  $T$  queda

$$-1 = -1, \quad -2 - \lambda = 2 \iff -4 - \lambda = 0,$$

que se resuelve para  $\lambda = -4$ . El punto obtenido en las ecuaciones paramétricas de  $S$  para  $\lambda = -4$  es  $q = (-3, 4, 2)$ , de donde

$$S \cap T = \{(-3, 4, 2)\}$$

y las rectas son secantes. Por otra parte es inmediato comprobar que

$$\vec{T} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x + y - z = 0, y - z = 0\} = L(\{(0, 1, 1)\}).$$

Como  $\vec{S} = L(\{(1, -1, 0)\})$ , es claro que el plano que contiene a  $S$  y  $T$  es el subespacio afín

$$S \vee T = (-3, 4, 2) + L(\{(0, 1, 1), (1, -1, 0)\}).$$

Como los vectores  $\{(0, 1, 1), (1, -1, 0)\}$  son linealmente independientes,

$$\mathcal{R} = \{(-3, 4, 2), B = \{(0, 1, 1), (1, -1, 0)\}\}$$

es un sistema de referencia de  $S \vee T$ .

Unas ecuaciones paramétricas de  $S \vee T$  en el sistema de referencia usual de  $\mathbb{R}^3$  son

$$(x, y, z)^t = (-3, 4, 2)^t + \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot (\lambda_1, \lambda_2)^t.$$

De aquí que sus ecuaciones implícitas vengan dadas por la condición

$$\text{rang} \begin{pmatrix} x+3 & 0 & 1 \\ y-4 & 1 & -1 \\ z-2 & 1 & 0 \end{pmatrix} = 2,$$

esto es,

$$\det \begin{pmatrix} x+3 & 0 & 1 \\ y-4 & 1 & -1 \\ z-2 & 1 & 0 \end{pmatrix} = x + y - z + 1 = 0.$$

Por último resolvamos (c). Un hiperplano afín  $S$  de  $\mathbb{R}^4$  paralelo al de ecuación  $x - y + z - t = 7$  ha de tener su misma variedad de dirección

$$\vec{S} = \vec{T} = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 : x - y + z - t = 0\},$$

y por tanto tiene por ecuación implícita  $x - y + z - t = k$  para algún  $k \in \mathbb{R}$ . Como además pasa por el punto  $p = (1, -2, 3, -2)$ , este punto ha de satisfacer la ecuación implícita anterior, esto es,

$$8 = 1 + 2 + 3 + 2 = k.$$

Por tanto el hiperplano buscado es el de ecuación implícita

$$S = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 : x - y + z - t = 8\}.$$

Como  $\vec{S} = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 : x - y + z - t = 0\} = L(\{(1, 1, 0, 0)(0, 0, 1, 1), (1, 0, -1, 0)\})$  y el punto  $p_0 = (8, 0, 0, 0) \in S$ , deducimos que

$$S = (8, 0, 0, 0) + L(\{(1, 1, 0, 0)(0, 0, 1, 1), (1, 0, -1, 0)\})$$

y  $\mathcal{R} = \{(8, 0, 0, 0), B = L(\{(1, 1, 0, 0)(0, 0, 1, 1), (1, 0, -1, 0)\})\}$  es un sistema de referencia de  $S$ .

Las ecuaciones paramétricas de  $S$  en el sistema de referencia usual de  $\mathbb{R}^4$  son

$$(x_1, x_2, x_3, x_4)^t = (8, 0, 0, 0)^t + \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot (\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)^t.$$

■

**Ejercicio 2.49** Se consideran los subespacios afines de  $\mathbb{R}^4$  dados por:

$$S = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 \mid x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 1, x_1 - x_2 = 1\},$$

$$T = (1, 0, 1, 0) + L(\{(1, 1, -1, -1), (0, 0, 0, 1)\}).$$

Obtener unas ecuaciones paramétricas e implícitas para  $S \cap T$  y de  $S \vee T$ .

**SOLUCIÓN :** Para determinar las ecuaciones implícitas (en el sistema de referencia usual  $\mathcal{R}_0$  de  $\mathbb{R}^4$ ) de  $S \cap T$  vamos a necesitar las ecuaciones implícitas de  $S$  y  $T$ . Las de  $S$  ya las conocemos, faltan sólo las de  $T$ . Procedemos como siempre, determinamos primero las ecuaciones paramétricas de  $T$ :

$$(x_1, x_2, x_3, x_4)^t = (1, 0, 1, 0)^t + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \\ -1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \cdot (\lambda_1, \lambda_2)^t.$$

Unas ecuaciones implícitas para  $T$  en  $\mathcal{R}_0$  surge de la condición

$$\text{rang} \begin{pmatrix} x_1 - 1 & 1 & 0 \\ x_2 & 1 & 0 \\ x_3 - 1 & -1 & 0 \\ x_4 & -1 & 1 \end{pmatrix} = 2,$$

esto es,

$$\det \begin{pmatrix} x_2 & 1 & 0 \\ x_3 - 1 & -1 & 0 \\ x_4 & -1 & 1 \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} x_1 - 1 & 1 & 0 \\ x_3 - 1 & -1 & 0 \\ x_4 & -1 & 1 \end{pmatrix} = 0.$$

Queda por tanto

$$T = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 \mid x_2 + x_3 - 1 = x_1 + x_3 - 2 = 0\}.$$

De aquí que

$$S \cap T = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 \mid x_2 + x_3 - 1 = x_1 + x_3 - 2 = x_1 + x_2 + x_3 + x_4 - 1 = x_1 - x_2 - 1 = 0\},$$

de donde eliminando la última ecuación para que el sistema sea de ecuaciones linealmente independientes queda equivalentemente

$$S \cap T = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 \mid x_2 + x_3 - 1 = x_1 + x_3 - 2 = x_1 + x_2 + x_3 + x_4 - 1 = 0\},$$

siendo estas últimas tres ecuaciones las implícitas en  $\mathcal{R}_0$  para  $S \cap T$ . Con estas ecuaciones se calculan fácilmente las ecuaciones paramétricas de  $S \cap T$  sin más que resolver el sistema y expresar sus soluciones en función de parámetros:

$$S \cap T = \{(\lambda, \lambda - 1, 2 - \lambda, \lambda) : \lambda \in \mathbb{R}\} = (0, -1, 2, 0) + L(\{(1, 1, -1, 1)\}).$$

De aquí que

$$S \cap T = (0, -1, 2, 0) + L(\{(1, 1, -1, 1)\})$$

y sus ecuaciones paramétricas en forma matricial se escriban

$$(x_1, x_2, x_3, x_4)^t = (0, -1, 2, 0)^t + (1, 1, -1, 1)^t \cdot \lambda.$$

De forma dual, para determinar las ecuaciones paramétricas (en el sistema de referencia usual  $\mathcal{R}_0$  de  $\mathbb{R}^4$ ) de  $S \vee T$  vamos a necesitar las ecuaciones paramétricas de  $S$  y  $T$ . Las de  $T$  esencialmente ya las conocemos de la expresión

$$T = (1, 0, 1, 0) + L(\{(1, 1, -1, -1), (0, 0, 0, 1)\}),$$

faltan sólo las de  $S$ . Como

$$S = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 / x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 1, x_1 - x_2 = 1\},$$

como antes bastará con resolver el sistema y expresar sus soluciones en función de parámetros:

$$S = \{(\lambda, \lambda - 1, \mu, 2 - 2\lambda - \mu) : \lambda, \mu \in \mathbb{R}\} = (0, -1, 2, 0) + L(\{(1, 1, 0, -2), (0, 0, 1, -1)\}).$$

Por tanto, teniendo en cuenta que  $\overrightarrow{(1, 0, 1, 0), (0, -1, 2, 0)} = (-1, -1, 1, 0)$  y

$$L(\{(1, 1, -1, -1), (0, 0, 0, 1), (1, 1, 0, -2), (0, 0, 1, -1)\}) = L(\{(0, 0, 0, 1), (1, 1, 0, -2), (0, 0, 1, -1)\}),$$

el Corolario 2.20-(i) nos da

$$S \vee T = (1, 0, 1, 0) + (L(\{(-1, -1, 1, 0)\}) + L(\{(0, 0, 0, 1), (1, 1, 0, -2), (0, 0, 1, -1)\})),$$

esto es,

$$S \vee T = (1, 0, 1, 0) + L(\{(0, 0, 0, 1), (1, 1, 0, -2), (0, 0, 1, -1)\})$$

con  $\{(0, 0, 0, 1), (1, 1, 0, -2), (0, 0, 1, -1)\}$  base de  $\overrightarrow{S \vee T}$  al ser vectores linealmente independientes. Nótese que, como  $S \cap T \neq \emptyset$ , podríamos haber obtenido la última expresión de una forma más directa sin más que usar Corolario 2.20-(ii).

Unas ecuaciones paramétricas de  $S \vee T$  en el sistema de referencia usual de  $\mathbb{R}^4$  son

$$(x_1, x_2, x_3, x_4)^t = (1, 0, 1, 0)^t + \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & -2 & -1 \end{pmatrix} \cdot (\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)^t.$$

Por tanto, una ecuación implícita para  $S \vee T$  en  $\mathcal{R}_0$  surge de la condición

$$\text{rang} \begin{pmatrix} x_1 - 1 & 0 & 1 & 0 \\ x_2 & 0 & 1 & 0 \\ x_3 - 1 & 0 & 0 & 1 \\ x_4 & 1 & -2 & -1 \end{pmatrix} = 3,$$

esto es,

$$\det \begin{pmatrix} x_1 - 1 & 0 & 1 & 0 \\ x_2 & 0 & 1 & 0 \\ x_3 - 1 & 0 & 0 & 1 \\ x_4 & 1 & -2 & -1 \end{pmatrix} = x_1 - x_2 - 1 = 0.$$

Así  $\{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 : x_1 - x_2 - 1 = 0\}$  es una ecuación implícita de  $S \vee T$  en  $\mathcal{R}_0$ . ■

## 2.5. Aplicaciones afines

Al igual que en cualquier otra categoría de objetos, en la geometría afín es natural preguntarse por las transformaciones naturales entre espacios afines.

**Definición 2.50** Sea  $f: \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}'$  una aplicación entre espacios afines. Diremos que  $f$  es una aplicación afín si existe una aplicación lineal  $\vec{f}: \overrightarrow{\mathcal{A}} \rightarrow \overrightarrow{\mathcal{A}'}$  para la cual es cierta cualquiera de las siguientes condiciones equivalentes

- (I)  $\vec{f}(\vec{pq}) = \overrightarrow{f(p)f(q)}$  para todo  $p, q \in \mathcal{A}$ .
- (II)  $f(q) = f(p) + \vec{f}(\vec{pq})$  para todo  $p, q \in \mathcal{A}$ .
- (III)  $\vec{f}(v) = \overrightarrow{f(p)f(p+v)}$  para todo  $p \in \mathcal{A}, v \in \overrightarrow{\mathcal{A}}$ .
- (IV)  $f(p+v) = f(p) + \vec{f}(v)$  para todo  $p \in \mathcal{A}, v \in \overrightarrow{\mathcal{A}}$ .

En ese caso, diremos que  $\vec{f}$  es la aplicación lineal asociada a  $f$ .

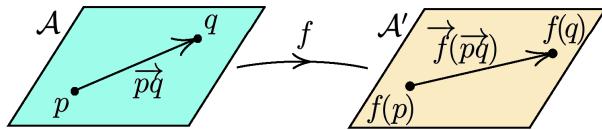


Figura 9: Aplicación afín  $f: \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}'$ .

Usando un lenguaje más global,  $f: \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}'$  es afín con lineal asociada  $\vec{f}: \overrightarrow{\mathcal{A}} \rightarrow \overrightarrow{\mathcal{A}'}$  si y sólo si el siguiente diagrama es comutativo:

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{A} \times \mathcal{A} & \xrightarrow{f \times f} & \mathcal{A}' \times \mathcal{A}' \\ \downarrow \rightarrow & & \downarrow \rightarrow \\ \overrightarrow{\mathcal{A}} & \xrightarrow{\vec{f}} & \overrightarrow{\mathcal{A}'} \end{array}$$

Esto es,  $\rightarrow \circ (f \times f) = \vec{f} \circ \rightarrow: \mathcal{A} \times \mathcal{A} \rightarrow \overrightarrow{\mathcal{A}'}$ .

Ejemplos triviales de aplicaciones afines son:

- La aplicación identidad:  $\text{Id}_{\mathcal{A}}: \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}$ , con  $\overrightarrow{\text{Id}_{\mathcal{A}}} = \text{Id}_{\overrightarrow{\mathcal{A}}}$ . En efecto, basta con observar que

$$\text{Id}_{\mathcal{A}}(q) = q = p + \vec{pq} = \text{Id}_{\mathcal{A}}(p) + \text{Id}_{\overrightarrow{\mathcal{A}}}(\vec{pq}).$$

- Las aplicaciones constantes:  $f_q: \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}', f_q(p) = q$  para todo  $p \in \mathcal{A}$ , con  $\vec{f}_q = \mathbf{0}$ , donde  $\mathbf{0}: \overrightarrow{\mathcal{A}} \rightarrow \overrightarrow{\mathcal{A}'}$  es la aplicación lineal nula. En efecto basta con observar que

$$f_c(q) = c = c + \vec{0} = f_c(p) + \mathbf{0}(\vec{pq}).$$

El siguiente enunciado expresa que toda aplicación afín está únicamente determinada por la imagen de un punto y su aplicación lineal asociada.

**Proposición 2.51** Dados  $p_0 \in \mathcal{A}$ ,  $p'_0 \in \mathcal{A}'$  y  $h: \overrightarrow{\mathcal{A}} \rightarrow \overrightarrow{\mathcal{A}'}$  lineal, la aplicación

$$f: \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}', \quad f(p) = p'_0 + h(\overrightarrow{p_0 p})$$

es la única aplicación afín con  $f(p_0) = p'_0$  y  $\vec{f} = h$ .

En particular, si  $f, g: \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}'$  son afines entonces

$$f = g \iff \vec{f} = \vec{g} \quad y \quad f(p_0) = g(p_0) \text{ para algún } p_0 \in \mathcal{A}.$$

DEMOSTRACIÓN: Para cualesquiera  $p, q \in \mathcal{A}$  se tiene que

$$\overrightarrow{f(p)f(q)} = \overrightarrow{(p'_0 + h(\overrightarrow{p_0 p}))(p'_0 + h(\overrightarrow{p_0 q}))} = h(\overrightarrow{p_0 q}) - h(\overrightarrow{p_0 p}) = h(\overrightarrow{p_0 q} - \overrightarrow{p_0 p}) = h(\overrightarrow{p q}),$$

y de aquí que  $f$  es afín con lineal asociada  $\vec{f} = h$ . Como  $f(p_0) = p'_0 + h(\overrightarrow{p_0 p_0}) = p'_0 + h(\vec{0}) = p'_0$ , la aplicación  $f$  satisface lo requerido. La unicidad es trivial de Definición 2.50-(ii). ■

**Corolario 2.52** Sea  $f: \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}'$  una aplicación entre espacios afines, y para cada  $p \in \mathcal{A}$  definamos

$$\vec{f}_p: \overrightarrow{\mathcal{A}} \rightarrow \overrightarrow{\mathcal{A}'}, \quad \vec{f}_p(v) = \overrightarrow{f(p)f(p+v)}.$$

Los siguientes enunciados son equivalentes:

- (I)  $f$  es afín.
- (II) Para todo  $p \in \mathcal{A}$  la aplicación  $\vec{f}_p$  es lineal.
- (III) Existe  $q \in \mathcal{A}$  tal que  $\vec{f}_q$  es lineal.

Además, si  $f$  es afín entonces  $\vec{f} = \vec{f}_p$  para todo  $p \in \mathcal{A}$ .

DEMOSTRACIÓN: Comencemos observando que si  $f$  es afín entonces

$$\vec{f}_p(v) = \overrightarrow{f(p)f(p+v)} = \vec{f}(p\overrightarrow{p+v}) = \vec{f}(v),$$

esto es,  $\vec{f} = \vec{f}_p$  para todo  $p \in \mathcal{A}$ . Esto prueba que (i)  $\Rightarrow$  (ii)  $\Rightarrow$  (iii). Por último (iii)  $\Rightarrow$  (i) es consecuencia de la Proposición 2.51 para  $p_0 = q$ ,  $p'_0 = f(q)$  y  $h = \vec{f}_q$ . ■

**Corolario 2.53** Sean  $V, V'$  espacios vectoriales dotados de estructura afín de la forma usual, y sea  $f: V \rightarrow V'$  una aplicación. Entonces son equivalentes

- (I) Existen  $v'_0 \in V'$  y  $h: V \rightarrow V'$  lineal tales que  $f(v) = v'_0 + h(v) \quad \forall v \in V$ .
- (II)  $f$  es afín con  $\vec{f} = h$  y  $f(\vec{0}) = v'_0$ .

Además, en ese caso  $\vec{f} = h$ .

DEMOSTRACIÓN: La implicación (i)  $\Rightarrow$  (ii) es consecuencia trivial de la Proposición 2.51 aplicada a  $p_0 = \vec{0} \in V$ ,  $p'_0 = v'_0 \in V'$  y aplicación lineal  $h: V \rightarrow V'$ .

La implicación (ii)  $\Rightarrow$  (i) se sigue de la expresión

$$f(v) = f(\vec{0} + v) = f(\vec{0}) + \vec{f}(v) \quad \forall v \in V;$$

ver Definición 2.50-(iv). ■

Como consecuencia inmediata del Corolario 2.53 podemos caracterizar las aplicaciones afines entre los espacios afines clásicos  $\mathbb{R}^n$  y  $\mathbb{R}^k$ . Recordemos que las aplicaciones lineales  $h: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^k$  son de la forma

$$h: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^k, \quad h(x) = A \cdot x, \quad \text{para alguna matriz } A \in \mathcal{M}_{k,n}(\mathbb{R}).$$

**Corolario 2.54** *Dados  $A \in \mathcal{M}_{k,n}(\mathbb{R})$  y  $b \in \mathbb{R}^k$ , la aplicación*

$$f_{A,b}: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^k, \quad f_{A,b}(x) = A \cdot x + b$$

*es la única aplicación afín de  $\mathbb{R}^n$  en  $\mathbb{R}^k$  con*

$$f_{A,b}(0) = b \quad \text{y} \quad \overrightarrow{f_{A,b}}: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^k, \quad \overrightarrow{f_{A,b}}(x) = A \cdot x.$$

*(Estamos utilizando la notación columna  $x = (x_1, \dots, x_n)^t$  y  $b = (b_1, \dots, b_k)^t$ ).*

Este corolario nos proporciona no sólo ejemplos de aplicaciones afines entre los espacios afines canónicos  $\mathbb{R}^n$  y  $\mathbb{R}^k$ , sino de hecho todas ellas. Observemos que en este contexto una aplicación afín no es sino una aplicación lineal seguida de una traslación. Se suele usar la siguiente notación más compacta para escribir la expresión analítica de  $f_{A,b}$ :

$$\begin{pmatrix} 1 \\ f_{A,b}(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ b & A \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ x \end{pmatrix},$$

donde  $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ b & A \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{k+1,n+1}(\mathbb{R})$ .

**Ejercicio 2.55** *La aplicación  $f: \mathcal{P}_2(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}^2$ ,  $f(p(x)) = (p(1) + 2, p'(2) - 1)$ , es afín con aplicación lineal asociada  $\vec{f}: \mathcal{P}_2(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}^2$ ,  $\vec{f}(p(x)) = (p(1), p'(2))$ .*

SOLUCIÓN: Si  $p_0(x) = 0$  es polinomio nulo en  $\mathcal{P}_2(\mathbb{R})$ , la aplicación  $\vec{f}_{p_0(x)}: \mathcal{P}_2(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}^2$  viene dada por

$$\vec{f}_{p_0(x)}(p(x)) = \overrightarrow{f(p_0(x)), f(p_0(x) + p(x))} = \overrightarrow{(2, -1), (p(1) + 2, p'(2) - 1)} = (p(1), p'(2)).$$

Como  $\vec{f}_{p_0(x)}$  es claramente lineal, la aplicación  $f$  es afín con lineal asociada  $\vec{f} = \vec{f}_{p_0(x)}$ . ■

El siguiente enunciado es un compendio de las propiedades generales más interesantes de las aplicaciones afines.

**Propiedades 2.56** *Los siguientes enunciados son ciertos:*

- (I) *Si  $V, V'$  son espacios vectoriales y  $f: V \rightarrow V'$  es una aplicación lineal, entonces  $f$  es afín (dotados  $V, V'$  de su estructura afín canónica) y  $\vec{f} = f$ .*
- (II) *Si  $\mathcal{A}$  es un espacio afín y  $p \in \mathcal{A}$ , la aplicación  $F_p: \mathcal{A} \rightarrow \overrightarrow{\mathcal{A}}$ ,  $F_p(q) = \vec{pq}$ , es afín con  $\overrightarrow{F_p} = \text{Id}_{\overrightarrow{\mathcal{A}}}$  (dotado  $\overrightarrow{\mathcal{A}}$  de su estructura afín canónica).*
- (III) *Si  $\mathcal{A}$  es un espacio afín y  $p \in \mathcal{A}$ , la aplicación  $G_p = F_p^{-1}: \overrightarrow{\mathcal{A}} \rightarrow \mathcal{A}$  es afín con  $\overrightarrow{G_p} = \text{Id}_{\overrightarrow{\mathcal{A}}}$  (dotado  $\overrightarrow{\mathcal{A}}$  de su estructura afín canónica).*
- (IV) *Si  $f: \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}'$  es afín entonces  $f = G_{f(q)} \circ \vec{f} \circ F_q$  para todo  $q \in \mathcal{A}$ . En particular,  $f$  es injectiva (sobreyectiva, biyectiva)  $\iff \vec{f}$  es injectiva (sobreyectiva, biyectiva).*

- (v) Si  $f: \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}'$ ,  $g: \mathcal{A}' \rightarrow \mathcal{A}''$  son afines entonces  $g \circ f$  es afín y  $\overrightarrow{g \circ f} = \vec{g} \circ \vec{f}$ .
- (vi)  $f: \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}'$  es afín biyectiva si y solo si  $f^{-1}: \mathcal{A}' \rightarrow \mathcal{A}$  es afín biyectiva, y en este caso  $\overrightarrow{(f^{-1})} = (\vec{f})^{-1}$ .
- (vii) Si  $S$  es un subespacio de  $\mathcal{A}$  entonces la aplicación inclusión  $i_S: S \rightarrow \mathcal{A}$  es afín y  $\overrightarrow{i_S} = i_{\tilde{S}}$ , donde  $i_{\tilde{S}}: \tilde{S} \rightarrow \tilde{\mathcal{A}}$  es el monomorfismo inclusión. Como consecuencia, si  $f: \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}'$  es afín entonces la restricción  $f|_S: S \rightarrow \mathcal{A}'$  es afín con  $\overrightarrow{f|_S} = \vec{f}|_{\tilde{S}}$ .

**DEMOSTRACIÓN:** Para demostrar (i) basta con comprobar que  $\overrightarrow{f_0}: V \rightarrow V'$  coincide con  $f$ . Esto implicaría que  $\overrightarrow{f_0}$  sería lineal, de donde usando Corolario 2.52, la aplicación  $f$  sería afín con  $\vec{f} = \overrightarrow{f_0} = f$ , y concluiríamos la prueba. En efecto, para todo  $v \in V$  tenemos que

$$\overrightarrow{f_0}(v) = \overrightarrow{f(\vec{0})f(\vec{0} + v)} = \overrightarrow{f(\vec{0})f(v)} = \overrightarrow{\vec{0}'f(v)} = f(v) - \overrightarrow{0}' = f(v).$$

Nótese que la identidad  $f(\vec{0}) = \overrightarrow{0}'$  se sigue de la linealidad de  $f$ .

Probemos (ii) demostrando que  $(\vec{f}_p)_p: \tilde{\mathcal{A}} \rightarrow \tilde{\mathcal{A}}$  es la aplicación identidad  $\text{Id}_{\tilde{\mathcal{A}}}$  (luego lineal), y por tanto  $F_p$  es afín con  $\overrightarrow{F_p} = (\vec{F}_p)_p = \text{Id}_{\tilde{\mathcal{A}}}$ ; ver Corolario 2.52. En efecto, para todo  $v \in \tilde{\mathcal{A}}$  se tiene que

$$(\vec{f}_p)_p(v) = \overrightarrow{F_p(p)F_p(p + v)} = \overrightarrow{\vec{0}'v} = v - \overrightarrow{0}' = v.$$

Análogamente, para probar (iii) basta con demostrar que  $(\overrightarrow{G_p})_{\vec{0}}: \tilde{\mathcal{A}} \rightarrow \tilde{\mathcal{A}}$  es la aplicación identidad  $\text{Id}_{\tilde{\mathcal{A}}}$ . Para todo  $v \in \tilde{\mathcal{A}}$  se tiene que

$$(\overrightarrow{G_p})_{\vec{0}}(v) = \overrightarrow{G_p(\vec{0})G_p(\vec{0} + v)} = \overrightarrow{G_p(\vec{0})G_p(v)} = \overrightarrow{(p + \vec{0})(p + v)} = \overrightarrow{p(p + v)} = v.$$

Item (iv) es consecuencia del siguiente cálculo elemental

$$(G_{f(q)} \circ \vec{f} \circ F_q)(p) = G_{f(q)}(\overrightarrow{\vec{f}(qp)}) = G_{f(q)}(\overrightarrow{f(q)f(p)}) = f(q) + \overrightarrow{f(q)f(p)} = f(p)$$

para todo  $p \in \mathcal{A}$ . Como  $G_{f(q)}$  y  $F_q$  son biyectivas, es claro que  $f$  es injectiva (sobreyectiva, biyectiva) si y solo si  $\vec{f}$  es injectiva (sobreyectiva, biyectiva).

Para probar (v), tengamos en cuenta que  $g$  y  $f$  son afines y observemos que, para todo  $p, q \in \mathcal{A}$ ,

$$\overrightarrow{(g \circ f)(p)(g \circ f)(q)} = \overrightarrow{g(f(p))g(f(q))} = \overrightarrow{\vec{g}(f(p)f(q))} = \overrightarrow{\vec{g}(\vec{f}(pq))} = (\vec{g} \circ \vec{f})(\vec{p}\vec{q}).$$

Como  $\vec{g} \circ \vec{f}$  es lineal la aplicación  $g \circ f$  es afín y  $\overrightarrow{g \circ f} = \vec{g} \circ \vec{f}$ .

Item (vi) se sigue trivialmente de la identidad  $f^{-1} = G_q \circ \vec{f}^{-1} \circ F_{f(q)}$  y de los items (i), (ii), (iii), (iv) y (v).

Por último, la prueba de (vii) es trivial sin más que observar que

$$i_{\tilde{S}}(\overrightarrow{p_1 p_2}) = \overrightarrow{p_1 p_2} = \overrightarrow{i_S(p_1)i_S(p_2)} \quad \forall p_1, p_2 \in \mathcal{S}.$$

La segunda parte relativa a la restricción  $f|_S$  es trivial a partir de (v), toda vez que  $f|_S = f \circ i_S$  y por tanto  $\overrightarrow{f|_S} = \vec{f} \circ \overrightarrow{i_S} = \vec{f}|_{\tilde{S}}$ . ■

El concepto de isomorfismo es fundamental en cualquiera categoría matemática, ya que encierra la idea de igualdad o equivalencia necesaria para la clasificación de objetos. En el contexto de la geometría afín estas transformaciones se llaman afinidades, comentemos los detalles en la siguiente definición.

**Definición 2.57** *Las aplicaciones afines biyectivas  $f: \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}'$  entre espacios afines serán llamadas afinidades. Si denotamos*

$$\text{Aff}(\mathcal{A}) = \{f: \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}: f \text{ afinidad}\},$$

*el conjunto  $\text{Aff}(\mathcal{A})$  es un grupo respecto de la composición de aplicaciones, conocido en la literatura como grupo afín sobre  $\mathcal{A}$ .*

Es obvio que dos espacios afínmente equivalentes (esto es, entre los que existe una afinidad) tienen necesariamente la misma dimensión. Veremos más adelante que el recíproco también es cierto.

Finalizaremos con la siguiente proposición, que explica el comportamiento de los subespacios afines respecto de la imagen directa e inversa por aplicaciones afines. La prueba es rutinaria y se deja como ejercicio.

**Proposición 2.58** *Sea  $f: \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}'$  una aplicación afín entre espacios afines, y sean  $S = p + \vec{S} \subseteq \mathcal{A}$  y  $S' = p' + \vec{S}' \subseteq \mathcal{A}'$  subespacios afines.*

- (I)  *$f(S)$  es el subespacio afín  $f(p) + \vec{f}(\vec{S})$  de  $\mathcal{A}'$  (en particular,  $\text{Im}(f)$  es el subespacio afín  $f(p) + \text{Im}(\vec{f})$  de  $\mathcal{A}'$ ).*
- (II) *Si  $p \in f^{-1}(p')$  entonces  $f^{-1}(S')$  es el subespacio afín  $p + (\vec{f})^{-1}(\vec{S}')$  de  $\mathcal{A}$ .*

### 2.5.1. Aplicaciones afines notables

En este apartado repasaremos las aplicaciones afines básicas en geometría, a saber, traslaciones, homotecias, proyecciones y simetrías.

Para la descripción geométrica de las mismas resulta especialmente útil manejar algunos conceptos y propiedades elementales, como los relativos al punto medio de un segmento y el conjunto de puntos fijos de una aplicación afín.

**Definición 2.59** *Dados dos puntos  $p, q$  en un espacio afín  $\mathcal{A}$ , definimos el segmento que determinan como*

$$[p, q] = \{p + t\vec{p}q: t \in [0, 1]\} = \{q + t\vec{qp}: t \in [0, 1]\}.$$

*Es fácil ver que  $[p, q] = \{a + (t\vec{ap} + (1 - t)\vec{aq}: t \in [0, 1]\}$  para todo  $a \in \mathcal{A}$ .*

*El punto medio del segmento  $[p, q]$  viene dado por la expresión:*

$$\mathbf{m}_{pq} = p + \frac{1}{2}\vec{pq} = q + \frac{1}{2}\vec{qp},$$

*o bien  $\mathbf{m}_{pq} = a + \frac{1}{2}(\vec{ap} + \vec{aq})$  para todo  $a \in \mathcal{A}$ .*

**Definición 2.60** *Dada  $f: \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}$  una aplicación afín en un espacio afín  $\mathcal{A}$ , denotaremos por*

$$\mathcal{P}_f = \{p \in \mathcal{A}: f(p) = p\} \subseteq \mathcal{A}$$

*al conjunto de puntos fijos de  $f$ .*

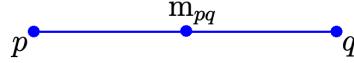


Figura 10: Punto medio del segmento  $[p, q]$ .

**Proposición 2.61** *Sea  $f: \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}$  una aplicación afín en un espacio afín  $\mathcal{A}$ .*

(I) *Si  $\mathcal{P}_f \neq \emptyset$  entonces  $\mathcal{P}_f$  es un subespacio afín de  $\mathcal{A}$  con variedad con dirección*

$$\overrightarrow{\mathcal{P}_f} = \text{Ker}(\vec{f} - \text{Id}_{\mathcal{A}}).$$

(II)  *$\text{Ker}(\vec{f} - \text{Id}_{\mathcal{A}}) = \{\vec{0}\} \iff \mathcal{P}_f = \{q\}, q \in \mathcal{A}$  (en particular  $\mathcal{P}_f \neq \emptyset$ ).*

DEMOSTRACIÓN: Para demostrar (i) fijemos  $q \in \mathcal{P}_f \neq \emptyset$ . Tenemos que

$$p \in \mathcal{P}_f \iff f(p) = p \iff \overrightarrow{qp} = \overrightarrow{qf(p)} \iff \overrightarrow{qp} = \overrightarrow{f(q)f(p)} \iff \overrightarrow{qp} = \vec{f}(\overrightarrow{qp}),$$

de donde

$$p \in \mathcal{P}_f \iff \vec{f}(\overrightarrow{qp}) - \overrightarrow{qp} = \vec{0} \iff (\vec{f} - \text{Id}_{\mathcal{A}})(\overrightarrow{qp}) = \vec{0} \iff \overrightarrow{qp} \in \text{Ker}(\vec{f} - \text{Id}_{\mathcal{A}}).$$

Como  $p = q + \overrightarrow{qp}$ , deducimos que

$$p \in \mathcal{P}_f \iff p \in q + \text{Ker}(\vec{f} - \text{Id}_{\mathcal{A}}).$$

Esto prueba que  $\mathcal{P}_f = q + \text{Ker}(\vec{f} - \text{Id}_{\mathcal{A}})$ , y como  $\text{Ker}(\vec{f} - \text{Id}_{\mathcal{A}})$  es un subespacio vectorial de  $\mathcal{A}$ , que  $\mathcal{P}_f$  es un subespacio afín de  $\mathcal{A}$  con variedad de dirección  $\text{Ker}(\vec{f} - \text{Id}_{\mathcal{A}})$ . Esto concluye la prueba de (i).

Para demostrar (ii), primero observemos que, de (i), si  $\mathcal{P}_f$  consiste de un único punto entonces  $\{\vec{0}\} = \overrightarrow{\mathcal{P}_f} = \text{Ker}(\vec{f} - \text{Id}_{\mathcal{A}})$ . Supongamos ahora que  $\text{Ker}(\vec{f} - \text{Id}_{\mathcal{A}}) = \{\vec{0}\}$ . Para acabar bastará con ver que que  $\mathcal{P}_f \neq \emptyset$  y usar (i). Fijemos un punto arbitrario  $p \in \mathcal{A}$ . Si existiese un punto fijo  $q$  de  $f$ , tendríamos que:

$$\begin{aligned} f(q) = q &\iff \overrightarrow{qf(q)} = \vec{0} \iff \overrightarrow{qp} + \overrightarrow{pf(p)} + \overrightarrow{f(p)f(q)} = \vec{0} \iff (\vec{f} - \text{Id}_{\mathcal{A}})(\overrightarrow{pq}) = \overrightarrow{f(p)p} \iff \\ &\iff \overrightarrow{pq} = (\vec{f} - \text{Id}_{\mathcal{A}})^{-1}(\overrightarrow{f(p)p}) \iff q = p + \overrightarrow{pq} = p + (\vec{f} - \text{Id}_{\mathcal{A}})^{-1}(\overrightarrow{f(p)p}). \end{aligned}$$

Este razonamiento heurístico nos demuestra que elegido  $p \in \mathcal{A}$  arbitrario, el punto

$$q := p + (\vec{f} - \text{Id}_{\mathcal{A}})^{-1}(\overrightarrow{f(p)p}) \in \mathcal{P}_f,$$

probando que  $\mathcal{P}_f \neq \emptyset$  y por tanto (ii). ■

**Las traslaciones afines.** Las traslaciones (ver Definición 2.8) están caracterizadas por ser las únicas aplicaciones afines con aplicación lineal asociada la identidad.

**Proposición 2.62** *Sea  $\mathcal{A}$  un espacio afín y  $f: \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}$  una aplicación. Entonces*

$$f = \tau_v \in \mathcal{T}(\mathcal{A}), v \in \overrightarrow{\mathcal{A}} \iff f \text{ es afín y } \vec{f} = \text{Id}_{\mathcal{A}}.$$

Además, en ese caso  $v = \overrightarrow{qf(q)} \in \overrightarrow{\mathcal{A}}$  para todo  $q \in \mathcal{A}$  (el vector  $v$  no depende de  $q \in \mathcal{A}$ ).

**DEMOSTRACIÓN:** Consideremos  $v \in \overrightarrow{\mathcal{A}}$  arbitrario y comprobemos que  $\tau_v$  es afín con  $\overrightarrow{\tau_v} = \text{Id}_{\overrightarrow{\mathcal{A}}}$ . Por la Corolario 2.52 bastará con tomar  $q \in \mathcal{A}$  y probar que  $(\overrightarrow{\tau_v})_q$  es la aplicación lineal  $\text{Id}_{\overrightarrow{\mathcal{A}}}$ . En efecto, si  $u \in \overrightarrow{\mathcal{A}}$  es un vector arbitrario se tiene que

$$(\overrightarrow{\tau_v})_q(u) = \overrightarrow{(\tau_v)(q)(\tau_v)(q+u)} = \overrightarrow{(q+v)((q+u)+v)} = \overrightarrow{(q+v)(q+v+u)} = u,$$

y de aquí lo buscado.

Para el recíproco, considemos  $f: \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}$  afín con  $\vec{f} = \text{Id}_{\overrightarrow{\mathcal{A}}}$ . Para cualesquiera  $p, q \in \mathcal{A}$  se tiene que

$$f(p) = q + \overrightarrow{qf(p)} = q + (\overrightarrow{qf(q)} + \overrightarrow{f(q)f(p)}) = q + (\overrightarrow{qf(q)} + \vec{f}(\overrightarrow{qp})).$$

Como  $\vec{f} = \text{Id}_{\overrightarrow{\mathcal{A}}}$  entonces  $\vec{f}(\overrightarrow{qp}) = \overrightarrow{qp}$ , y por tanto

$$f(p) = q + (\overrightarrow{qf(q)} + \overrightarrow{qp}) = (q + \overrightarrow{qp}) + \overrightarrow{qf(q)} = p + \overrightarrow{qf(q)} = (\tau_v)(p)$$

para  $v = \overrightarrow{qf(q)}$ , como queríamos demostrar. ■

Es relevante reseñar que

$$\mathcal{P}_{\tau_v} \neq \emptyset \iff v = \overrightarrow{0}.$$

En otras palabras, la única traslación con algún punto fijo es  $\tau_{\overrightarrow{0}} = \text{Id}_{\mathcal{A}}$ . La comprobación es rutinaria.

**Las homotecias afines.** Otras de las transformaciones afines clásicas son las homotecias, que materializan la idea básica de contracción-dilatación y permiten la conceptualización de la semejanza de figuras. Los dos elementos geométricos que determinan una homotecia son su centro o único punto fijo y su razón.

**Definición 2.63** Definimos la homotecia de centro  $a \in \mathcal{A}$  y razón  $r \in \mathbb{R} \setminus \{0, 1\}$  como la aplicación

$$h_{a,r}: \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}, \quad h_{a,r}(p) := a + r\overrightarrow{ap}.$$

**Proposición 2.64** Sea  $\mathcal{A}$  un espacio afín y  $h: \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}$  una aplicación. Entonces

$$h \text{ es homotecia de razón } r \in \mathbb{R} \setminus \{0, 1\} \iff h \text{ es afín y } \vec{h} = r \cdot \text{Id}_{\overrightarrow{\mathcal{A}}}.$$

En este caso el único punto fijo de  $h$  es su centro  $a \in \mathcal{A}$ , que obedece a la fórmula

$$a = q + \frac{1}{1-r} \overrightarrow{qh(q)}$$

para cualquier  $q \in \mathcal{A}$  (en particular esa expresión no depende de  $q \in \mathcal{A}$ ).

**DEMOSTRACIÓN:** Supongamos que  $h = h_{a,r}$  para algunos  $a \in \mathcal{A}$  y  $r \in \mathbb{R}$ . Es claro que  $h_{a,r}(a) = a + r\overrightarrow{aa} = a + r\overrightarrow{0} = a$ , esto es,  $a$  es un punto fijo de  $h_{a,r}$ . Comprobemos que  $h_{a,r}$  es afín demostrando que  $(\overrightarrow{h_{a,r}})_a$  es la aplicación lineal  $r \cdot \text{Id}_{\overrightarrow{\mathcal{A}}}$ . En efecto, para cualquier  $v \in \overrightarrow{\mathcal{A}}$  se tiene que

$$(\overrightarrow{h_{a,r}})_a(v) = \overrightarrow{h_{a,r}(a)h_{a,r}(a+v)} = \overrightarrow{a(a+r \cdot \overrightarrow{a(a+v)})} = \overrightarrow{a(a+rv)} = rv,$$

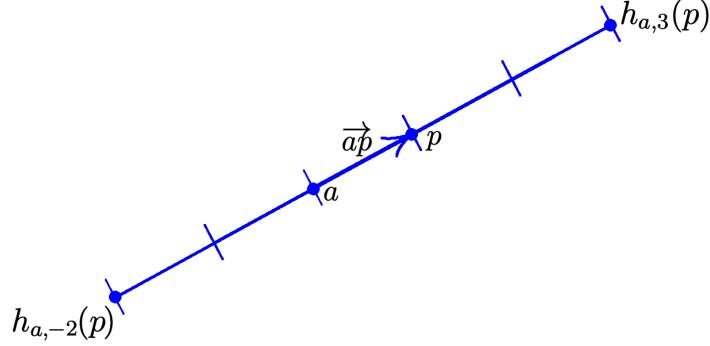


Figura 11: Acción de las homotecias de centro  $a$  y razones  $-2$  y  $3$ .

de donde se sigue que  $\overrightarrow{(h_{a,r})_a} = r \cdot \text{Id}_{\mathcal{A}}$ . Para comprobar que  $\mathcal{P}_{h_{a,r}} = \{a\}$ , usemos Proposición 2.61 para inferir que  $\mathcal{P}_{h_{a,r}}$  es un subespacio afín con

$$\overrightarrow{\mathcal{P}_{h_{a,r}}} = \text{Ker}(\overrightarrow{h_{a,r}} - \text{Id}_{\mathcal{A}}) = \text{Ker}((r-1) \cdot \text{Id}_{\mathcal{A}}) = \{\overrightarrow{0}\}.$$

Por tanto  $\dim \mathcal{P}_{h_{a,r}} = 0$  y consiste de un único punto, a saber  $\mathcal{P}_{h_{a,r}} = \{a\}$ .

Para el recíproco, supongamos que  $h: \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}$  es afín con  $\vec{h} = r \cdot \text{Id}_{\mathcal{A}}$ ,  $r \in \mathbb{R} \setminus \{0, 1\}$ . Como  $\text{Ker}(\overrightarrow{h} - \text{Id}_{\mathcal{A}}) = \text{Ker}((r-1) \cdot \text{Id}_{\mathcal{A}}) = \{\overrightarrow{0}\}$ , de la Proposición 2.61 inferimos que  $\mathcal{P}_h = \{a\}$ ,  $a \in \mathcal{A}$ . Por tanto

$$h(p) = h(a) + \vec{h}(\vec{ap}) = a + r\vec{ap} = h_{a,r}(p) \quad \forall p \in \mathcal{A},$$

y de aquí que  $h = h_{a,r}$ .

Para acabar comprobemos la fórmula de cálculo del centro dada en la proposición. En efecto, tomemos  $q \in \mathcal{A}$  un punto cualquiera y veamos que  $q + \frac{1}{1-r} \overrightarrow{qh(q)}$  es el centro  $a$  de  $h$ , esto es, que  $q + \frac{1}{1-r} \overrightarrow{qh(q)} \in \mathcal{P}_h$ . En efecto,

$$h\left(q + \frac{1}{1-r} \overrightarrow{qh(q)}\right) = h(q) + \vec{h}\left(\frac{1}{1-r} \overrightarrow{qh(q)}\right) = h(q) + \frac{1}{1-r} \vec{h}(\overrightarrow{qh(q)}) = h(q) + \frac{r}{1-r} \cdot \overrightarrow{qh(q)},$$

donde hemos usado que  $\vec{h} = r \cdot \text{Id}_{\mathcal{A}}$ . Deducimos por tanto que

$$h\left(q + \frac{1}{1-r} \overrightarrow{qh(q)}\right) = q + \left(\overrightarrow{qh(q)} + \frac{r}{1-r} \cdot \overrightarrow{qh(q)}\right) = q + \frac{1}{1-r} \overrightarrow{qh(q)} = q + \frac{1}{1-r} \overrightarrow{qh(q)}$$

y  $q + \frac{1}{1-r} \overrightarrow{qh(q)} \in \mathcal{P}_h = \{a\}$  como queríamos demostrar. ■

**Definición 2.65** La afinidad  $h_{a,-1}$  es conocida como la simetría central respecto de (o con centro)  $a \in \mathcal{A}$ .

Por supuesto, de la Proposición 2.64 se sigue que una aplicación afín  $f: \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}$  es una simetría central si y sólo si  $\vec{f} = -\text{Id}_{\mathcal{A}}$ . También podemos enunciar el siguiente resultado.

**Corolario 2.66** Sea  $\mathcal{A}$  un espacio afín y  $f: \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}$  una aplicación. Entonces

$$f \text{ es una simetría central} \iff \exists a \in \mathcal{A}: m_{pf(p)} = a \quad \forall p \in \mathcal{A}.$$

Además, en ese caso el punto  $a$  es el centro de  $f$ .

**DEMOSTRACIÓN:** Recordemos que  $m_{pf(p)} = a + \frac{1}{2}(\overrightarrow{ap} + \overrightarrow{af(p)})$  para todo  $p \in \mathcal{A}$  y  $a \in \mathcal{A}$ . Por tanto,

$$\begin{aligned} \exists a \in \mathcal{A} : m_{pf(p)} = a \quad \forall p \in \mathcal{A} &\iff \exists a \in \mathcal{A} : \overrightarrow{ap} + \overrightarrow{af(p)} = \overrightarrow{0} \quad \forall p \in \mathcal{A} \iff \\ &\iff \exists a \in \mathcal{A} : f(p) = a - \overrightarrow{ap} \quad \forall p \in \mathcal{A} \iff f = h_{a,-1}, \end{aligned}$$

y de aquí el corolario. ■

**Proyecciones y simetrías afines.** Antes de presentar las proyecciones y simetrías afines recordemos sus equivalentes vectoriales estudiados en el álgebra lineal.

Sea  $V$  un espacio vectorial, y sean  $U, W \subseteq V$  subespacios vectoriales tales que

$$V = U \oplus W.$$

La proyección sobre  $U$  en la dirección del suplementario algebraico  $W$  es la aplicación lineal dada por

$$\vec{\pi}_{U,W} : V \rightarrow V : \vec{\pi}_{U,W}(v) = u,$$

donde  $v = u + w$  es la descomposición única de  $v$  como suma de vectores  $u \in U$  y  $w \in W$  (aquí hemos usado que  $V$  es la suma directa de  $U$  y  $W$ ).

Análogamente, la simetría respecto de  $U$  en la dirección de  $W$  es el isomorfismo lineal

$$\vec{\sigma}_{U,W} : V \rightarrow V, \quad \vec{\sigma}_{U,W}(v) = u - w,$$

donde  $v = u + w$  es la descomposición única de  $v$  como suma de vectores  $u \in U$  y  $w \in W$ . Es claro de las definiciones anteriores que:

- $\vec{\pi}_{U,W} \circ \vec{\pi}_{U,W} = \vec{\pi}_{U,W}$ ,
- $\vec{\sigma}_{U,W} \circ \vec{\sigma}_{U,W} = 2\vec{\pi}_{U,W} - \vec{\sigma}_{U,W} = \text{Id}_V$ ,
- $\vec{\pi}_{U,W} + \vec{\pi}_{W,U} = \text{Id}_V$ .

Las proyecciones y simetrías lineales admiten la siguiente caracterización natural.

**Proposición 2.67** Si  $h : V \rightarrow V$  es una aplicación lineal tal que  $h \circ h = r \cdot h$ ,  $r \neq 0$  entonces  $V = U_r \oplus U_0$ , donde

$$U_r = \text{Ker}(h - r \cdot \text{Id}_V) = \text{Im}(h) \quad y \quad U_0 = \text{Ker}(h).$$

Como consecuencia los siguientes enunciados son ciertos:

- (I) Si  $h : V \rightarrow V$  es lineal y  $h \circ h = h$  entonces  $V = V_1 \oplus V_0$  y  $h = \vec{\pi}_{V_1,V_0}$ , donde  $V_1 = \text{Ker}(h - \text{Id}_V) = \text{Im}(h)$  y  $V_0 = \text{Ker}(h)$ .
- (II) Si  $f : V \rightarrow V$  es lineal y  $f \circ f = \text{Id}_V$  entonces  $V = V_1 \oplus V_{-1}$  y  $f = \vec{\sigma}_{V_1,V_{-1}}$ , donde  $V_1 = \text{Ker}(f - \text{Id}_V)$  y  $V_{-1} = \text{Ker}(f + \text{Id}_V)$ .

**DEMOSTRACIÓN:** Supongamos que  $h : V \rightarrow V$  es lineal y  $h \circ h = r \cdot h$ ,  $r \neq 0$ . Notemos que la identidad

$$h(h(v)) - rh(v) = h(h(v) - rv) = \overrightarrow{0}$$

es cierta para todo  $v \in V$ , y por tanto

$$\text{Im}(h) \ni h(v) \in U_r = \text{Ker}(h - r\text{Id}_V), \quad v - h\left(\frac{1}{r}v\right) \in U_0 = \text{Ker}(h) \quad \forall v \in V.$$

De lo primero  $\text{Im}(h) \subseteq U_r$ , y como la otra inclusión es trivialmente cierta ya que  $v = h(\frac{1}{r}v) \in \text{Im}(h)$  para todo  $v \in U_r$ , deducimos que  $\text{Im}(h) = U_r$ . La identidad

$$v = h\left(\frac{1}{r}v\right) + \left(v - h\left(\frac{1}{r}v\right)\right) \quad (1)$$

prueba que  $V = U_r + U_0$ , y de hecho la suma es directa ya que  $v \in U_0 \cap U_r$  si y sólo si  $rv = h(v) = \vec{0}$ . Esto demuestra lo deseado.

Item (i) es consecuencia de lo visto para  $r = 1$ ; en este caso  $U_1 = V_1$  y  $U_0 = V_0$ . Para la identidad  $h = \vec{\pi}_{V_1, V_0}$  ver (1) para  $r = 1$  y la definición de  $\vec{\pi}_{V_1, V_0}$ .

Para probar item (ii) observemos que la aplicación  $h = f + \text{Id}_V$  satisface  $h \circ h = 2h$ . Por la primera parte de la proposición,

$$V = U_2 \oplus U_0, \text{ donde } U_2 = \text{Ker}(h - 2 \cdot \text{Id}_V) = \text{Im}(h) \text{ y } U_0 = \text{Ker}(h),$$

donde ahora  $U_2 = \text{Ker}(f - \text{Id}_V) = V_1$  y  $U_0 = \text{Ker}(h) = \text{Ker}(f + \text{Id}_V) = V_{-1}$  como deseábamos. La ecuación (1) se escribe para  $r = 2$  y  $h = f + \text{Id}_V$  como

$$v = \frac{1}{2}(v + f(v)) + \frac{1}{2}(v - f(v))$$

donde claramente  $\frac{1}{2}(v + f(v)) \in V_1$  y  $\frac{1}{2}(v - f(v)) \in V_{-1}$ . Usando que  $f \circ f = \text{Id}_V$  inferimos que

$$f(v) = f\left(\frac{1}{2}(v + f(v)) + \frac{1}{2}(v - f(v))\right) = \frac{1}{2}(v + f(v)) - \frac{1}{2}(v - f(v)),$$

y por tanto que  $f = \vec{\sigma}_{V_1, V_{-1}}$ . ■

Tras este breve recordatorio de álgebra lineal, procedamos a presentar los correspondientes conceptos afines. Necesitamos la siguiente definición.

**Definición 2.68** Dos subespacios afines  $S, T$  de un espacio afín  $\mathcal{A}$  se dicen suplementarios o complementarios si satisfacen  $S \vee T = \mathcal{A}$  y  $S \cap T = \{q\}$ ,  $q \in \mathcal{A}$ .

La complementariedad afín se puede presentar de otras formas equivalentes.

**Proposición 2.69** Sean  $S, T$  dos subespacios afines de un espacio afín  $\mathcal{A}$ . Los siguientes enunciados equivalentes:

(I)  $S \vee T = \mathcal{A}$  y  $S \cap T = \{q\}$ ,  $q \in \overrightarrow{\mathcal{A}}$  (son complementarios).

(II)  $\dim S + \dim T = \dim \mathcal{A}$  y  $S \cap T = \{q\}$ ,  $q \in \overrightarrow{\mathcal{A}}$ .

(III)  $\overrightarrow{\mathcal{A}} = \vec{S} \oplus \vec{T}$ .

**DEMOSTRACIÓN :** Para comprobar que los enunciados (i) y (ii) son equivalentes, recordemos las formulas de dimensiones en Corolario 2.20. Como tanto en (i) como en (ii) se tiene que  $S \cap T \neq \emptyset$  y  $\dim(S \cap T) = 0$ , la correspondiente formula de dimensiones nos da

$$\dim(S \vee T) = \dim S + \dim T - \dim(S \cap T) = \dim S + \dim T.$$

Por tanto  $\dim S + \dim T = \dim \mathcal{A}$  si y solo si  $\dim(S \vee T) = \dim \mathcal{A}$  (esto es,  $S \vee T = \mathcal{A}$ ), y por tanto (i)  $\iff$  (ii).

Probemos que (ii)  $\implies$  (iii). Como  $S \cap T = \{q\}$  para algún  $q \in \overrightarrow{\mathcal{A}}$  deducimos que  $\{\vec{0}\} = \overline{S \cap T} = \vec{S} \cap \vec{T}$ . La condición  $\dim S + \dim T = \dim \mathcal{A}$  es equivalente a  $\dim \vec{S} + \dim \vec{T} = \dim \overrightarrow{\mathcal{A}}$ , y por tanto  $\overrightarrow{\mathcal{A}} = \vec{S} \oplus \vec{T}$  ya que  $\vec{S} \cap \vec{T} = \{\vec{0}\}$ .

Para demostrar que (iii)  $\implies$  (ii), observemos primero que  $S \cap T \neq \emptyset$ ; de lo contrario la fórmula de dimensiones en Corolario 2.20 diría que

$$\begin{aligned}\dim \mathcal{A} &= \dim \overrightarrow{\mathcal{A}} \geq \dim(S \vee T) = \dim S + \dim T - \dim(\vec{S} \cap \vec{T}) + 1 = \\ &= \dim \vec{S} + \dim \vec{T} - \dim(\vec{S} \cap \vec{T}) + 1 = \dim \vec{S} + \dim \vec{T} + 1 = \dim \overrightarrow{\mathcal{A}} + 1,\end{aligned}$$

lo que es absurdo. Por tanto  $S \cap T \neq \emptyset$  es un subespacio afín con  $\overline{S \cap T} = \vec{S} \cap \vec{T} = \{\vec{0}\}$ , de donde  $\dim(S \cap T) = 0$  y  $S \cap T$  es un punto. La correspondiente fórmula de dimensiones en Corolario 2.20 nos da ahora que

$$\dim(S \vee T) = \dim S + \dim T - \dim(S \cap T) = \dim \vec{S} + \dim \vec{T} = \dim \overrightarrow{\mathcal{A}} = \dim \mathcal{A},$$

lo que prueba (ii). ■

**Corolario 2.70** Si  $S, T$  son dos subespacios afines complementarios de  $\mathcal{A}$  y  $S' \parallel S$ ,  $T' \parallel T$  entonces  $S', T'$  son también subespacios complementarios de  $\mathcal{A}$ .

Estamos en condiciones de poder definir el concepto de proyección afín.

**Definición 2.71** Sean  $S, T$  dos subespacios afines complementarios de un espacio afín  $\mathcal{A}$ , y para cada  $p \in \mathcal{A}$  denotemos por  $T_p$  al único subespacio afín de  $\mathcal{A}$  con  $p \in T_p$  y  $T \parallel T_p$  (ver Proposición 2.22-(iii)).

La proyección afín sobre  $S$  en la dirección de  $T$  es la aplicación definida por

$$\pi_{S,T}: \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}, \quad \pi_{S,T}(p) := S \cap T_p.$$

Nótese que los subespacios afines  $S, T_p$  son complementarios, y por tanto  $T_p \cap S$  es un punto de  $\mathcal{A}$  únicamente determinado; ver Corolario 2.70.

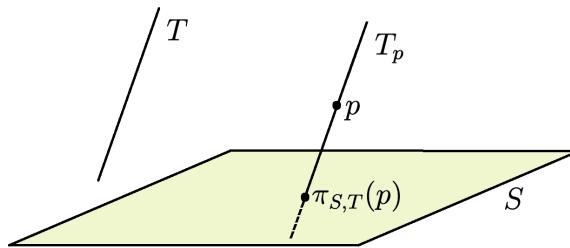


Figura 12: Proyección afín

**Observación 2.72** Hemos preferido introducir la nomenclatura proyección sobre  $S$  en la dirección de  $T$  por comodidad, aunque mas apropiado sería hablar de proyección sobre  $S$  en la dirección  $\vec{T}$ . Si se reflexiona con cuidado, lo único necesario del subespacio afín  $T$  en la anterior definición es su variedad de dirección  $\vec{T}$  (que gobierna el paralelismo).

La siguiente proposición aclara las propiedades geométricas de las proyecciones afines.

**Proposición 2.73** Si  $S, T$  son dos subespacios afines complementarios de  $\mathcal{A}$ , entonces:

- (I)  $\pi_{S,T}: \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}$  es una aplicación afín y  $\overrightarrow{\pi_{S,T}} = \vec{\pi}_{\vec{S},\vec{T}}$ .
- (II)  $\mathcal{P}_{\pi_{S,T}} = \text{Im}(\pi_{S,T}) = S$  y  $\pi_{S,T} \circ \pi_{S,T} = \pi_{S,T}$ .
- (III)  $\pi_{S,T}$  es constante sobre cada subespacio  $T' \parallel T$ .

DEMOSTRACIÓN: Para probar (i) será suficiente con ver que si  $s \in S$  entonces

$$\pi_{S,T}(p) = s + \vec{\pi}_{\vec{S},\vec{T}}(\overrightarrow{sp}) \quad \forall p \in \mathcal{A}, \quad (2)$$

lo que en particular implicará también que

$$\pi_{S,T}(s) = s \quad \forall s \in S, \quad \text{esto es, } S \subseteq \mathcal{P}_{\pi_{S,T}}.$$

En efecto, como  $\pi_{S,T}(p)$  es el único punto en  $S \cap T_p$  solo hay que demostrar que

$$s + \vec{\pi}_{\vec{S},\vec{T}}(\overrightarrow{sp}) \in S \cap T_p.$$

Para comprobarlo, primero observemos que

$$s + \vec{\pi}_{\vec{S},\vec{T}}(\overrightarrow{sp}) \in T_p = p + \vec{T},$$

lo que es consecuencia de que

$$\overrightarrow{p(s + \vec{\pi}_{\vec{S},\vec{T}}(\overrightarrow{sp}))} = \overrightarrow{ps} + \vec{\pi}_{\vec{S},\vec{T}}(\overrightarrow{sp}) = \vec{\pi}_{\vec{S},\vec{T}}(\overrightarrow{sp}) - \overrightarrow{sp} = -\vec{\pi}_{\vec{T},\vec{S}}(\overrightarrow{sp}) \in \vec{T} = \vec{T}_p.$$

Análogamente  $s + \vec{\pi}_{\vec{S},\vec{T}}(\overrightarrow{sp}) \in S$  ya que  $S = s + \vec{S}$  y  $\vec{\pi}_{\vec{S},\vec{T}}(\overrightarrow{sp}) \in \vec{S}$ , por lo que se tiene (2).

De la Proposición 2.51 inferimos que  $\pi_{S,T}$  es la única aplicación afín con  $\overrightarrow{\pi_{S,T}} = \vec{\pi}_{\vec{S},\vec{T}}$  y  $\pi_{S,T}(s) = s$  para todo  $s \in S$ , lo que prueba (i) y que  $S \subseteq \mathcal{P}_{\pi_{S,T}}$ .

Item (ii) será consecuencia inmediata de las identidades

$$\text{Im}(\pi_{S,T}) = S = \mathcal{P}_{\pi_{S,T}}.$$

Para comprobarlas, nótese que de la definición de  $\pi_{S,T}$  y lo ya demostrado se tiene la cadena de inclusiones

$$\text{Im}(\pi_{S,T}) \subseteq S \subseteq \mathcal{P}_{\pi_{S,T}}.$$

La inclusión  $\mathcal{P}_{\pi_{S,T}} \subseteq \text{Im}(\pi_{S,T})$  que cierra el ciclo es trivial ya que por comprobación directa  $\mathcal{P}_f \subseteq \text{Im}(f)$  para cualquier aplicación afín  $f: \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}$ .

Por último veamos (iii). Para comprobar que  $\pi_{S,T}|_{T'}$  es constante sobre cada subespacio afín  $T' \parallel T$ , recordemos (ver Proposición 2.58) que  $\pi_{S,T}(T') \subseteq \mathcal{A}$  es un subespacio afín con variedad de dirección

$$\overrightarrow{\pi_{S,T}(T')} = \overrightarrow{\pi_{S,T}}(\vec{T}') = \vec{\pi}_{\vec{S},\vec{T}}(\vec{T}) = \{\overrightarrow{0}\},$$

y por tanto es un punto. ■

La anterior proposición tiene un recíproco natural.

**Proposición 2.74** *Sea  $f: \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}$  una aplicación afín en un espacio afín  $\mathcal{A}$  satisfaceciendo  $f \circ f = f$ . Entonces  $f$  es la proyección afín sobre  $\text{Im}(f)$  en la dirección  $q + \text{Ker}(\vec{f})$ , donde  $q \in \mathcal{A}$  es un punto arbitrario.*

**DEMOSTRACIÓN:** De la identidad  $f \circ f = f$  inferimos que  $\vec{f} \circ \vec{f} = \vec{f}$ , de donde  $\vec{f} = \vec{\pi}_{V_1, V_0}$  para  $V_1 = \text{Im}(\vec{f})$  y  $V_0 = \text{Ker}(\vec{f})$ ; ver Proposición 2.67. Llamemos  $S = \text{Im}(f)$  (obviamente subespacio afín de  $\mathcal{A}$  con  $\vec{S} = \text{Im}(\vec{f}) = V_1$ ; ver Proposición 2.58) y  $T = q + \text{Ker}(\vec{f})$ , donde  $q \in \mathcal{A}$  es un punto arbitrario, y démonos cuenta de que  $S$  y  $T$  son subespacios afines complementarios ya que

$$\vec{\mathcal{A}} = V_1 \oplus V_0 = \vec{S} \oplus \vec{T}.$$

(ver Proposición 2.69). Por otra parte, como  $f \circ f = f$  entonces  $\text{Im}(f) \subseteq \mathcal{P}_f$ , y como la otra inclusión siempre es cierta deducimos que  $\text{Im}(f) = \mathcal{P}_f$ . Por tanto  $f$  y  $\pi_{S,T}$  son dos aplicaciones afines con la misma aplicación lineal asociada, a saber  $\vec{\pi}_{V_1, V_0}$ , y que coinciden al menos en un punto (ambas fijan todos los puntos de  $S = \text{Im}(f)$ ). Por la Proposición 2.51 deducimos que  $f = \pi_{S,T}$ , lo concluye la prueba. ■

**Ejercicio 2.75** Consideremos los subespacios afines de  $\mathbb{R}^3$  dados por

$$S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x - y + z = 2\}, \quad T = (0, -1, 0) + L(\{(1, 1, 1)\}).$$

Comprueba que  $S$  y  $T$  son suplementarios (o complementarios) afines. Calcula la proyección afín  $\pi_{S,T}$  sobre  $S$  en la dirección de  $T$ , dando sus ecuaciones analíticas respecto del sistema de referencia canónico  $\mathcal{R}_0 = \{(0, 0, 0), B_0\}$  ( $B_0$  base canónica de  $\mathbb{R}^3$ ) de  $\mathbb{R}^3$ .

**SOLUCIÓN:** Es claro que  $\vec{T} = L(\{(1, 1, 1)\})$ , y análogamente

$$\vec{S} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x - y + z = 0\} = L(\{(1, 1, 0), (1, 0, -1)\}).$$

Como los vectores  $B = \{(1, 1, 0), (1, 0, -1), (1, 1, 1)\}$  forman una base de  $\mathbb{R}^3$  deducimos que  $\vec{S}$  y  $\vec{T}$  están en suma directa y  $\mathbb{R}^3 = \vec{S} \oplus \vec{T}$ . De aquí que  $S$  y  $T$  sean subespacios afines suplementarios de  $\mathbb{R}^3$ .

Necesitaremos las ecuaciones implícitas de  $S$  y de  $T$  en la referencia canónica  $\mathcal{R}_0$ . Como conocemos las de  $S$ , calculamos las de  $T$  por el procedimiento estándar

$$T = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \text{rang} \begin{pmatrix} x & 1 \\ y+1 & 1 \\ z & 1 \end{pmatrix} = 1\} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x - y - 1 = x - z = 0\}.$$

y por tanto

$$\vec{T} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x - y = x - z = 0\}.$$

Dado  $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ , recordemos que el punto proyección  $\pi_{S,T}((x, y, z))$  está caracterizado por estas propiedades:

- $\pi_{S,T}((x, y, z)) \in S$ .
- $\overrightarrow{(x, y, z)\pi_{S,T}((x, y, z))} \in \vec{T}$ .

Por tanto, si denotamos por  $(a, b, c) = \pi_{S,T}((x, y, z))$ , tenemos que

- $(a, b, c) \in S$ , esto es,  $a - b + c = 2$ .
- $\overrightarrow{(x, y, z)(a, b, c)} = (a - x, b - y, c - z) \in \vec{T}$ , esto es,  $a - x - b + y = a - x - c + z = 0$ .

Resolviendo el sistema con incógnitas  $a, b, c$  obtenemos

$$a = 2 + y - z, \quad b = 2 - x + 2y - z, \quad c = 2 - x + y,$$

de donde la proyección buscada queda:

$$\pi_{S,T}: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3, \quad \pi_{S,T}((x, y, z)) = (2 + y - z, 2 - x + 2y - z, 2 - x + y).$$

■

El concepto de simetría afín está íntimamente ligado con el de proyección que acabamos de estudiar.

**Definición 2.76** Sean  $S, T$  dos subespacios afines complementarios de un espacio afín  $\mathcal{A}$ , y denotemos por  $T_p$  al único subespacio afín de  $\mathcal{A}$  con  $p \in T_p$  y  $T \parallel T_p$ ,  $p \in \mathcal{A}$ .

La simetría afín sobre  $S$  en la dirección de  $T$  es la aplicación  $\sigma_{S,T}: \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}$  definida, punto a punto, por la identidad geométrica

$$m_{p\sigma_{S,T}(p)} = \pi_{S,T}(p) \quad \forall p \in \mathcal{A}.$$

De forma más explícita,

$$\sigma_{S,T}: \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}, \quad \sigma_{S,T}(p) := p + 2 \overrightarrow{p\pi_{S,T}(p)} = \pi_{S,T}(p) + \overrightarrow{p\pi_{S,T}(p)}.$$

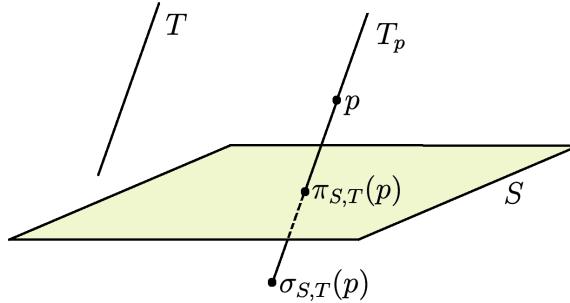


Figura 13: Simetría afín

La definición de  $\sigma_{S,T}$  expresa que  $\sigma_{S,T}(p)$  es el único punto del espacio afín  $\mathcal{A}$  tal que  $\pi_{S,T}(p)$  es el punto medio del segmento  $[p, \sigma_{S,T}(p)]$ . La lógica heurística que hay debajo de ese enunciado es la siguiente: un punto  $q \in \mathcal{A}$  para el que  $m_{pq} = \pi_{S,T}(p)$  ha de satisfacer

$$p + \frac{1}{2}\vec{pq} = \pi_{S,T}(p) \iff \vec{pq} = 2\overrightarrow{p\pi_{S,T}(p)} \iff q = p + 2\overrightarrow{p\pi_{S,T}(p)},$$

y de ahí la definición de  $\sigma_{S,T}(p)$ .

Por otra parte, la identidad  $p + 2\overrightarrow{p\pi_{S,T}(p)} = \pi_{S,T}(p) + \overrightarrow{p\pi_{S,T}(p)}$  es trivial como consecuencia del cálculo:

$$p + 2\overrightarrow{p\pi_{S,T}(p)} = (p + \overrightarrow{p\pi_{S,T}(p)}) + \overrightarrow{p\pi_{S,T}(p)} = \pi_{S,T}(p) + \overrightarrow{p\pi_{S,T}(p)}.$$

**Proposición 2.77** Si  $S, T$  son dos subespacios afines complementarios de  $\mathcal{A}$ , entonces:

- (I)  $\sigma_{S,T}: \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}$  es una aplicación afín y  $\overrightarrow{\sigma_{S,T}} = \vec{\sigma}_{S,T}$ .

$$(II) \quad \sigma_{S,T} \circ \sigma_{S,T} = \text{Id}_{\mathcal{A}}.$$

(III)  $\mathcal{P}_{\sigma_{S,T}} = S$  y  $\sigma_{S,T}(T') = T'$  para todo subespacio  $T' \parallel T$ , siendo  $\sigma_{S,T}|_{T'}: T' \rightarrow T'$  la simetría central en  $T'$  con centro el punto  $S \cap T'$ .

**DEMOSTRACIÓN :** De la Proposición 2.73 tenemos  $\pi_{S,T}(p) = s + \vec{\pi}_{S,\vec{T}}(\overrightarrow{sp})$  para todo  $s \in S$ ,  $p \in \mathcal{A}$ . De aquí que

$$\begin{aligned} \sigma_{S,T}(p) &= p + 2\overrightarrow{p\pi_{S,T}(p)} = (s + \overrightarrow{sp}) + 2\overrightarrow{p(s + \vec{\pi}_{S,\vec{T}}(\overrightarrow{sp}))} = (s + \overrightarrow{sp}) + 2(\overrightarrow{ps} + \vec{\pi}_{S,\vec{T}}(\overrightarrow{sp})) = \\ &= (s + \overrightarrow{sp}) + 2(\vec{\pi}_{S,\vec{T}}(\overrightarrow{sp}) - \overrightarrow{sp}) = s + (2\vec{\pi}_{S,\vec{T}}(\overrightarrow{sp}) - \overrightarrow{sp}) = s + \vec{\sigma}_{S,\vec{T}}(\overrightarrow{sp}). \end{aligned}$$

Por tanto

$$\sigma_{S,T}(p) = s + \vec{\sigma}_{S,\vec{T}}(\overrightarrow{sp}) \quad \forall s \in S, p \in \mathcal{A},$$

y además en particular también

$$\sigma_{S,T}(s) = s \quad \forall s \in S.$$

De la Proposición 2.51 inferimos que  $\sigma_{S,T}$  es la única aplicación afín con  $\overrightarrow{\sigma_{S,T}} = \vec{\sigma}_{S,\vec{T}}$  y  $\sigma_{S,T}(s) = s$  para todo  $s \in S$ , lo que prueba (i) (y que  $S \subseteq \mathcal{P}_{\sigma_{S,T}}$ ).

Para probar (ii), observemos que  $\overrightarrow{\sigma_{S,T} \circ \sigma_{S,T}} = \vec{\sigma}_{S,\vec{T}} \circ \vec{\sigma}_{S,\vec{T}} = \text{Id}_{\mathcal{A}}$  y que  $\sigma_{S,T} \circ \sigma_{S,T}$  tiene puntos fijos (todos los de  $S$ ). De Proposición 2.51 concluimos que  $\sigma_{S,T} \circ \sigma_{S,T} = \text{Id}_{\mathcal{A}}$ .

En relación a (iii), tengamos en cuenta que

$$p \in \mathcal{P}_{\sigma_{S,T}} \iff \sigma_{S,T}(p) = p + 2\overrightarrow{p\pi_{S,T}(p)} = p \iff \overrightarrow{p\pi_{S,T}(p)} = \overrightarrow{0} \iff p \in \mathcal{P}_{\pi_{S,T}} = S,$$

donde hemos usado Proposición 2.73-(ii).

Por último, como  $\overrightarrow{\sigma_{S,T}} = \vec{\sigma}_{S,\vec{T}}$  entonces  $\overrightarrow{\sigma_{S,T}}|_{\vec{T}}: \vec{T} \rightarrow \vec{T}$  coincide con  $-\text{Id}_{\vec{T}}$ . Además, si  $T'$  es un subespacio afín con  $\vec{T}' = \vec{T}$  y  $s' = S \cap T' \in \mathcal{P}_{\sigma_{S,T}}$ , de la Proposición 2.58 inferimos que

$$\sigma_{S,T}(T') = \sigma_{S,T}(s' + \vec{T}) = \sigma_{S,T}(s') + \overrightarrow{\sigma_{S,T}}(\vec{T}) = s' + \vec{\sigma}_{S,\vec{T}}(\vec{T}) = s' + \vec{T} = T'.$$

Esto implica que  $\sigma_{S,T}|_{T'}: T' \rightarrow T'$  es una simetría central (ver Definición 2.65) con centro el punto  $s'$ , lo que concluye la prueba.  $\blacksquare$

La anterior proposición tiene un recíproco natural.

**Proposición 2.78** *Sea  $f: \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}$  una aplicación afín en un espacio afín  $\mathcal{A}$  satisfaciendo  $f \circ f = \text{Id}_{\mathcal{A}}$ . Entonces  $\mathcal{P}_f \neq \emptyset$  y  $f$  es la simetría afín sobre  $\mathcal{P}_f$  en la dirección del subespacio afín  $q + \text{Kef}(\vec{f} + \text{Id}_{\mathcal{A}})$ , donde  $q \in \mathcal{A}$  es un punto arbitrario.*

**DEMOSTRACIÓN :** Veamos que  $\mathcal{P}_f \neq \emptyset$  comprobando que

$$\mathcal{P}_f = \{m_{pf(p)}: p \in \mathcal{A}\}.$$

Si  $p \in \mathcal{P}_f$  es obvio que  $p = m_{pf(p)}$ , por lo que bastará con garantizar que  $m_{pf(p)} \in \mathcal{P}_f$  para todo  $p \in \mathcal{A}$ . En efecto, usando que  $f \circ f = \text{Id}_{\mathcal{A}}$  tenemos:

$$\begin{aligned} f(m_{pf(p)}) &= f\left(p + \frac{1}{2}\overrightarrow{pf(p)}\right) = f(p) + \vec{f}\left(\frac{1}{2}\overrightarrow{pf(p)}\right) = f(p) + \frac{1}{2}\vec{f}(\overrightarrow{pf(p)}) = \\ &= f(p) + \frac{1}{2}\overrightarrow{f(p)f(f(p))} = f(p) + \frac{1}{2}\overrightarrow{f(p)p} = p + \left(\overrightarrow{pf(p)} + \frac{1}{2}\overrightarrow{f(p)p}\right) = p + \frac{1}{2}\overrightarrow{pf(p)} = m_{pf(p)}. \end{aligned}$$

De la identidad  $f \circ f = \text{Id}_{\mathcal{A}}$  inferimos que  $\vec{f} \circ \vec{f} = \text{Id}_{\overrightarrow{\mathcal{A}}}$ , por lo que  $\vec{f} = \vec{\sigma}_{V_1, V_{-1}}$  para  $V_1 = \text{Kef}(\vec{f} - \text{Id}_{\overrightarrow{\mathcal{A}}})$  y  $V_{-1} = \text{Kef}(\vec{f} + \text{Id}_{\overrightarrow{\mathcal{A}}})$ ; ver Proposición 2.67. Por otra parte, la Proposición 2.61 nos dice que  $\overrightarrow{\mathcal{P}_f} = V_1 = \text{Kef}(\vec{f} - \text{Id}_{\overrightarrow{\mathcal{A}}})$ , de donde al ser  $\overrightarrow{\mathcal{A}} = V_1 \oplus V_{-1}$  deducimos que los subespacios afines  $S := \mathcal{P}_f$  y  $T := q + \text{Kef}(\vec{f} + \text{Id}_{\overrightarrow{\mathcal{A}}})$  ( $q \in \mathcal{A}$  arbitrario) son complementarios (ver Proposición 2.69). Como conclusión  $f$  y  $\sigma_{S,T}$  son dos aplicaciones afines con la misma aplicación lineal asociada, a saber  $\vec{\sigma}_{V_1, V_{-1}}$ , y que coinciden en al menos un punto (ambas fijan de hecho todos los puntos de  $S$ ). La Proposición 2.51 garantiza que  $f = \sigma_{S,T}$ , lo que concluye la prueba. ■

**Ejercicio 2.79** Consideremos los subespacios afines de  $\mathbb{R}^3$  dados por

$$S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x - y + z = 2\}, \quad T = (0, -1, 0) + L(\{(1, 1, 1)\}).$$

Comprueba que  $S$  y  $T$  son suplementarios (o complementarios) afines. Calcula la simetría afín  $\sigma_{S,T}$  sobre  $S$  en la dirección de  $T$ , dando sus ecuaciones analíticas respecto del sistema de referencia canónico  $\mathcal{R}_0 = \{(0, 0, 0), B_0\}$  ( $B_0$  base canónica de  $\mathbb{R}^3$ ) de  $\mathbb{R}^3$ .

**SOLUCIÓN:** Recordemos que si  $\pi_{S,T}: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  es la proyección sobre  $S$  en la dirección de  $T$ , entonces la simetría  $\sigma_{S,T}$  viene dada por la expresión

$$\sigma_{S,T}(p) := p + 2 \overrightarrow{p\pi_{S,T}(p)} \quad \text{para todo } p \in \mathbb{R}^3.$$

Escribiendo como es habitual  $p = (x, y, z)$  ya que estamos trabajando en coordenadas en  $\mathcal{R}_0$ , quedaría

$$\sigma_{S,T}((x, y, z)) = 2\pi_{S,T}((x, y, z)) - (x, y, z) \quad \text{para todo } (x, y, z) \in \mathbb{R}^3.$$

Como ya calculamos  $\pi_{S,T}: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  en el Ejercicio 2.75, y obtuvimos la expresión

$$\pi_{S,T}((x, y, z)) = (2 + y - z, 2 - x + 2y - z, 2 - x + y),$$

un cálculo directo nos dice que la simetría  $\sigma_{S,T}: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  viene dada por

$$\sigma_{S,T}((x, y, z)) = (4 + 2y - 2z - x, 4 - 2x + 3y - 2z, 4 - 2x + 2y - z).$$

■

## 2.6. El Teorema Fundamental de la Geometría Afín

El siguiente resultado es clave para la comprensión de la naturaleza de las aplicaciones afines y la herramienta básica para la construcción de las mismas.

**Teorema 2.80 (Fundamental de la Geometría Afín)** Sean  $\mathcal{A}$  y  $\mathcal{A}'$  dos espacios afines, y escribamos  $\dim \mathcal{A} = n$ . Consideremos un sistema de referencia  $\mathcal{R} = \{p_0, \dots, p_n\}$  de  $\mathcal{A}$  y un conjunto de  $n+1$  puntos  $\{q_0, \dots, q_n\}$  (no necesariamente distintos, se permiten repeticiones) de  $\mathcal{A}'$ . Entonces existe una única aplicación afín  $f: \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}'$  tal que  $f(p_j) = q_j$  para todo  $j = 0, 1, \dots, n$ . Además

- (I) Si  $\{q_0, \dots, q_n\}$  son afíñamente independientes entonces  $f$  es injectiva.
- (II) Si  $\langle \{q_0, \dots, q_n\} \rangle = \mathcal{A}'$  entonces  $f$  es sobreyectiva.
- (III) Si  $\{q_0, \dots, q_n\}$  es un sistema de referencia de  $\mathcal{A}'$  (y en particular  $\dim \mathcal{A}' = n$ ) entonces  $f$  es una afinidad.

**DEMOSTRACIÓN:** Llamemos  $B = \{v_1, \dots, v_n\}$  a la base de las direcciones de  $\mathcal{R}$ ; recordemos que  $v_j = \overrightarrow{p_0 p_j} \in \overrightarrow{\mathcal{A}}$  para todo  $j = 1, \dots, n$ . Análogamente llamemos  $u_j = \overrightarrow{q_0 q_j} \in \overrightarrow{\mathcal{A}'}$  para todo  $j = 1, \dots, n$ . Por el Teorema Fundamental del Álgebra Lineal existe una única aplicación lineal

$$h: \overrightarrow{\mathcal{A}} \rightarrow \mathcal{A}', \quad h(v_j) = u_j \quad \forall j = 1, \dots, n.$$

Siguiendo la Proposición 2.51, afirmamos que la única aplicación afín (con  $\vec{f} = h$  y  $f(p_0) = q_0$ ) definida por

$$f: \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}', \quad f(p) = q_0 + h(\overrightarrow{p_0 p})$$

realiza  $f(p_j) = q_j$  para todo  $j = 0, 1, \dots, n$ . En efecto, la identidad  $f(p_0) = q_0$  es trivial toda vez que  $h(\overrightarrow{0}) = \overrightarrow{0}'$ . Para cada  $j \in \{1, \dots, n\}$  tenemos que

$$f(p_j) = q_0 + h(\overrightarrow{p_0 p_j}) = q_0 + h(v_j) = q_0 + u_j = q_0 + \overrightarrow{q_0 q_j} = q_j,$$

y por tanto  $f$  satisface lo requerido. Para comprobar la unicidad, tomemos  $g: \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}'$  afín satisfaciendo  $g(p_j) = q_j$  para todo  $j = 0, \dots, n$ , y observemos que

$$\vec{g}(v_j) = \vec{g}(\overrightarrow{p_0 p_j}) = \overrightarrow{g(p_0) g(p_j)} = \overrightarrow{q_0 q_j} = u_j = \vec{f}(v_j), \quad j = 1, \dots, n.$$

Como las aplicaciones lineales  $\vec{g}$  y  $\vec{f}$  coinciden sobre los vectores de la base  $B$  deducimos que  $\vec{g} = \vec{f}$ , y como además  $g(p_0) = f(p_0) = q_0$  que  $f = g$ . Esto concluye la primera parte de existencia y unicidad del teorema.

Proposición 2.56-(iv) nos dice que  $f$  es injectiva si y solo si  $\vec{f} = h$  es inyectiva, lo que sabemos es equivalente a que  $\{u_1, \dots, u_n\}$  sean linealmente independientes, esto es, a que  $\{q_0, \dots, q_n\}$  sean afínmente independientes. Esto prueba (i). Por un razonamiento análogo  $f$  es sobreyectiva si y solo si  $\{u_1, \dots, u_n\}$  es un sistema de generadores de  $\mathcal{A}'$ , o equivalentemente  $\langle \{q_0, \dots, q_n\} \rangle = \mathcal{A}'$  (ver Corolario 2.19), lo que prueba (ii). Item (iii) es consecuencia de (i) y (ii). ■

**Corolario 2.81** *Dos espacios afines son afínmente equivalentes (esto es, existe una afinidad de uno en el otro) si y solo si tienen la misma dimensión.*

**DEMOSTRACIÓN:** Si  $\mathcal{A}$  y  $\mathcal{A}'$  son espacios con  $\dim \mathcal{A} = \dim \mathcal{A}'$ , basta con tomar sistemas de referencia  $\mathcal{R} = \{p_0, \dots, p_n\}$  de  $\mathcal{A}$  y  $\mathcal{R}' = \{q_0, \dots, q_n\}$  de  $\mathcal{A}'$ , y considerar la única aplicación afín  $f: \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}'$  con  $f(p_j) = q_j$ ,  $j = 0, 1, \dots, n$ . Esta aplicación es una afinidad por el Teorema 2.80-(iii). Recíprocamente, si  $f: \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}'$  es una afinidad entonces  $\vec{f}: \overrightarrow{\mathcal{A}} \rightarrow \overrightarrow{\mathcal{A}'}$  es un isomorfismo y por tanto  $\dim \mathcal{A} = \dim \overrightarrow{\mathcal{A}} = \dim \overrightarrow{\mathcal{A}'} = \dim \mathcal{A}'$ . ■

## 2.7. Ecuaciones analíticas de las aplicaciones afines

Dada una aplicación lineal  $h: V \rightarrow V'$  entre espacios vectoriales con dimensiones  $\dim V = n$ ,  $\dim V' = k$ , y elegidas bases ordenadas  $B = \{v_1, \dots, v_n\}$  de  $V$  y  $B' = \{u_1, \dots, u_k\}$  de  $V'$ , escribiremos por  $M(h, B, B')$  la matriz de  $h$  en las bases  $B$  y  $B'$  (en notación columna). Recordemos que  $M(h, B, B')$  es la matriz de orden  $k \times n$  cuya  $j$ -ésima columna es el vector columna  $\Phi_{B'}(h(v_j)) \equiv h(v_j)_{B'} \in \mathbb{R}^k$  de las coordenadas de  $h(v_j)$  en la base  $B'$ , lo que matricialmente se puede escribir:

$$h(v_j) = (u_1, \dots, u_k) \cdot (h(v_j)_{B'})^t.$$

Esta matriz era el ingrediente fundamental de las ecuaciones analíticas de  $h$  en las bases  $B$  y  $B'$ , que adoptaban la forma matricial

$$h(v)_{B'} = M(h, B, B') \cdot v_B \quad \forall v \in V.$$

La interpretación de la fórmula es sencilla, conocidas las coordenadas  $v_B$  de un vector  $v \in V$  en la base  $B$  de  $V$ , nos proporciona salvo multiplicar por  $M(h, B, B')$  las coordenadas  $h(v)_{B'}$  de su imagen  $h(v) \in V'$  en la base  $B'$  de  $V'$ .

Para hacer lo equivalente con aplicaciones afines  $f: \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}'$  entre espacios afines y fijemos sistemas de referencia  $\mathcal{R} = \{p_0, B\}$  de  $\mathcal{A}$  y  $\mathcal{R}' = \{p'_0, B'\}$  de  $\mathcal{A}'$ . El cálculo que permite relacionar las coordenadas  $p_{\mathcal{R}}$  de un punto  $p \in \mathcal{A}$  en  $\mathcal{R}$  con las coordenadas  $f(p)_{\mathcal{R}'}$  de su imagen  $f(p) \in \mathcal{A}'$  en  $\mathcal{R}'$  es el siguiente.

Como  $f(p) = f(p_0) + \vec{f}(\overrightarrow{p_0 p})$ , tomando coordenadas en  $\mathcal{R}'$  tenemos

$$f(p)_{\mathcal{R}'} = (f(p_0) + \vec{f}(\overrightarrow{p_0 p}))_{\mathcal{R}'} = f(p_0)_{\mathcal{R}'} + (\vec{f}(\overrightarrow{p_0 p}))_{B'} = f(p_0)_{\mathcal{R}'} + M(\vec{f}, B, B') \cdot (\overrightarrow{p_0 p})_B,$$

donde hemos usado las ecuaciones analíticas de  $\vec{f}$  en las bases  $B$  y  $B'$ . Como  $p_{\mathcal{R}} = (\overrightarrow{p_0 p})_B$ , obtenemos finalmente que

$$f(p)_{\mathcal{R}'} = f(p_0)_{\mathcal{R}'} + M(\vec{f}, B, B') \cdot p_{\mathcal{R}},$$

o equivalentemente

$$\begin{pmatrix} 1 \\ f(p)_{\mathcal{R}'} \end{pmatrix} = \left( \begin{array}{c|c} 1 & 0 \\ \hline f(p_0)_{\mathcal{R}'} & M(\vec{f}, B, B') \end{array} \right) \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ p_{\mathcal{R}} \end{pmatrix}.$$

**Definición 2.82** Dada  $f: \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}'$  afín y sistemas de referencia  $\mathcal{R} = \{p_0, B\}$  de  $\mathcal{A}$  y  $\mathcal{R}' = \{p'_0, B'\}$  de  $\mathcal{A}'$ , la matriz

$$M(f, \mathcal{R}, \mathcal{R}') := \left( \begin{array}{c|c} 1 & 0 \\ \hline f(p_0)_{\mathcal{R}'} & M(\vec{f}, B, B') \end{array} \right)$$

es conocida como la matriz de  $f$  en los sistemas de referencia  $\mathcal{R} = \{p_0, B\}$  de  $\mathcal{A}$  y  $\mathcal{R}' = \{p'_0, B'\}$  de  $\mathcal{A}'$ . Asimismo, la expresión matricial

$$\begin{pmatrix} 1 \\ f(p)_{\mathcal{R}'} \end{pmatrix} = M(f, \mathcal{R}, \mathcal{R}') \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ p_{\mathcal{R}} \end{pmatrix}.$$

es conocida como las ecuaciones analíticas de  $f$  en los sistemas de referencia  $\mathcal{R} = \{p_0, B\}$  de  $\mathcal{A}$  y  $\mathcal{R}' = \{p'_0, B'\}$  de  $\mathcal{A}'$ .

Nótese que si  $\dim \mathcal{A} = n$  y  $\dim \mathcal{A}' = k$  entonces  $M(f, \mathcal{R}, \mathcal{R}')$  es de orden  $(k+1) \times (n+1)$ .

Se deja como ejercicio la comprobación de las siguientes propiedades.

**Propiedades 2.83** Dadas aplicaciones afines  $\mathcal{A} \xrightarrow{f} \mathcal{A}' \xrightarrow{g} \mathcal{A}''$  entre espacios afines y sistemas de referencia  $\mathcal{R}$  en  $\mathcal{A}$ ,  $\mathcal{R}'$  en  $\mathcal{A}'$  y  $\mathcal{R}''$  en  $\mathcal{A}''$ , los siguientes enunciados son ciertos:

$$(I) \quad M(g \circ f, \mathcal{R}, \mathcal{R}'') = M(g, \mathcal{R}', \mathcal{R}'') \circ M(f, \mathcal{R}, \mathcal{R}').$$

$$(II) \quad M(\text{Id}_{\mathcal{A}}, \mathcal{R}, \mathcal{R}) = I_{n+1}, \text{ donde } n = \dim \mathcal{A}.$$

$$(III) \quad \text{Si } f \text{ es una afinidad entonces } M(f^{-1}, \mathcal{R}', \mathcal{R}) = M(f, \mathcal{R}, \mathcal{R}')^{-1}.$$

(IV) Si  $R_1$  y  $R'_1$  son otros sistemas de referencia en  $\mathcal{A}$  y  $\mathcal{A}'$ , respectivamente, entonces

$$M(f, \mathcal{R}_1, \mathcal{R}'_1) = M(\text{Id}_{\mathcal{A}'}, \mathcal{R}', \mathcal{R}'_1) \cdot M(f, \mathcal{R}, \mathcal{R}') \cdot M(\text{Id}_{\mathcal{A}}, \mathcal{R}_1, \mathcal{R}).$$

**Notación 2.84** Dado un espacio afín  $\mathcal{A}$ , un sistema de referencia  $\mathcal{R}$  de  $\mathcal{A}$  y una aplicación afín  $f: \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}$ , se suele escribir

$$M(f, \mathcal{R}) = M(f, \mathcal{R}, \mathcal{R}).$$

**Ejercicio 2.85** Dados los subespacios afines supplementarios de  $\mathbb{R}^3$

$$S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x - y + z = 2\}, \quad T = (0, -1, 0) + L(\{(1, 1, 1)\}),$$

determina la expresión matricial de la proyección afín  $\pi_{S,T}$  sobre  $S$  en la dirección de  $T$  en el sistema de referencia  $\mathcal{R} = \{(-1, 1, -1), B = \{(1, 1, 1), (1, 1, 0), (1, 0, 0)\}\}$ .

**SOLUCIÓN:** Recordemos que en el Ejercicio 2.75 probamos que la expresión analítica de  $\pi_{S,T}: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  en el sistema de referencia canónico  $\mathcal{R}_0$  de  $\mathbb{R}^3$  viene dada por

$$\pi_{S,T}((x, y, z)) = (2 + y - z, 2 - x + 2y - z, 2 - x + y),$$

y por tanto

$$\overrightarrow{\pi_{S,T}}((x, y, z)) = (y - z, -x + 2y - z, -x + y).$$

En consecuencia,

$$M(\pi_{S,T}, \mathcal{R}_0) \equiv M(\pi_{S,T}, \mathcal{R}_0, \mathcal{R}_0) = \left( \begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 2 & 0 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 1 & 0 \end{array} \right).$$

Por otra parte, sabemos que

$$M(\text{Id}_{\mathbb{R}^3}, \mathcal{R}, \mathcal{R}_0) = \left( \begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline -1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \end{array} \right),$$

y por tanto

$$M(\text{Id}_{\mathbb{R}^3}, \mathcal{R}_0, \mathcal{R}) = M(\text{Id}_{\mathbb{R}^3}, \mathcal{R}, \mathcal{R}_0)^{-1} = \left( \begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 1 & 0 & 0 & 1 \\ -2 & 0 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & -1 & 0 \end{array} \right).$$

Como  $M(\pi_{S,T}, \mathcal{R}) = M(\text{Id}_{\mathbb{R}^3}, \mathcal{R}_0, \mathcal{R}) \cdot M(\pi_{S,T}, \mathcal{R}_0) \cdot M(\text{Id}_{\mathbb{R}^3}, \mathcal{R}, \mathcal{R}_0)$ , inferimos que

$$M(\pi_{S,T}, \mathcal{R}) = \left( \begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 1 & 0 & 0 & 1 \\ -2 & 0 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & -1 & 0 \end{array} \right) \cdot \left( \begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 2 & 0 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 1 & 0 \end{array} \right) \cdot \left( \begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline -1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \end{array} \right),$$

esto es,

$$M(\pi_{S,T}, \mathcal{R}) = \left( \begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 5 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right).$$

La interpretación de este cálculo es que si  $p \in \mathbb{R}^3$  es un punto con  $p_{\mathcal{R}} = (x', y', z')$ , entonces  $\pi_{S,T}(p) \in \mathbb{R}^3$  es el punto con

$$\pi_{S,T}(p)_{\mathcal{R}} = (5 - z', y', z').$$

■

## 2.8. Algunos ejercicios resueltos

**Ejercicio 2.86** Determinar la expresión matricial en el sistema de referencia usual de la aplicación afín  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  que tiene como puntos fijos a los del plano afín  $x + y - z = -2$ , y tal que  $f(0, 0, 0) = (1, 2, -1)$ . ¿Es  $f$  un isomorfismo afín?

SOLUCIÓN: Llamemos  $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x + y - z = -2\}$ . Resolviendo la ecuación  $x + y - z = -2$ , podemos describir paramétricamente  $S$  como sigue

$$S = \{(\lambda + \mu, -\mu, \lambda + 2) : \lambda, \mu \in \mathbb{R}\},$$

y por tanto

$$S = (0, 0, 2) + L\{(1, 0, 1), (1, -1, 0)\}.$$

Un sistema de referencia en  $S$  viene dado por los puntos

$$\{p_1 = (0, 0, 2), p_2 = (0, 0, 2) - (1, 0, 1) = (-1, 0, 1), p_3 = (0, 0, 2) + (1, -1, 0) = (1, -1, 2)\}.$$

Si llamamos  $p_0 = (0, 0, 0)$ , es claro que  $\mathcal{R} = \{p_0, p_1, p_2, p_3\}$  son afínmente independientes en  $\mathbb{R}^3$ , y por tanto

$$\mathcal{R} \equiv \{p_0, B = \{\overrightarrow{p_0p_1}, \overrightarrow{p_0p_2}, \overrightarrow{p_0p_3}\}\} = \{(0, 0, 0), B = \{(0, 0, 2), (-1, 0, 1), (1, -1, 2)\}\}$$

es un sistema de referencia afín de  $\mathbb{R}^3$ .

Por el Teorema 2.80, la aplicación afín  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  que resuelve el ejercicio está determinada por las condiciones siguientes

$$f(p_0) = (1, 2, -1), \quad f(p_j) = p_j, \quad j = 1, 2, 3.$$

Por tanto, si llamamos

$$v_1 = \overrightarrow{p_0p_1} = (0, 0, 2), v_2 = \overrightarrow{p_0p_2} = (-1, 0, 1), v_3 = \overrightarrow{p_0p_3} = (1, -1, 2),$$

deducimos que

$$\begin{aligned} \vec{f}(v_1) &= \overrightarrow{f(p_0)f(p_1)} = (0, 0, 2) - (1, 2, -1) = (-1, -2, 3) \\ \vec{f}(v_2) &= \overrightarrow{f(p_0)f(p_2)} = (-1, 0, 1) - (1, 2, -1) = (-2, -2, 2) \\ \vec{f}(v_3) &= \overrightarrow{f(p_0)f(p_3)} = (1, -1, 2) - (1, 2, -1) = (0, -3, 3). \end{aligned}$$

De aquí que

$$M(\vec{f}, B, B_0) = \begin{pmatrix} -1 & -2 & 0 \\ -2 & -2 & -3 \\ 3 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

donde  $B_0$  es la base canónica de  $\mathbb{R}^3$ . Recordemos que  $\mathcal{R}_0 = \{p_0, B_0\}$  es el sistema de referencia usual o canónico de  $\mathbb{R}^3$ . Al ser  $f(p_0)_{\mathcal{R}_0} = (1, 2, -1)$ , tenemos que

$$M(f, \mathcal{R}, \mathcal{R}_0) = \left( \begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & -2 & 0 \\ 2 & -2 & -2 & -3 \\ -1 & 3 & 2 & 3 \end{array} \right)$$

Como

$$M(\text{Id}_{\mathbb{R}^3}, \mathcal{R}, \mathcal{R}_0) = \left( \begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 1 & 2 \end{array} \right),$$

deducimos que

$$\begin{aligned} M(f, \mathcal{R}_0, \mathcal{R}_0) &= M(f, \mathcal{R}, \mathcal{R}_0) \cdot M(\text{Id}_{\mathbb{R}^3}, \mathcal{R}_0, \mathcal{R}) = M(f, \mathcal{R}, \mathcal{R}_0) \cdot M(\text{Id}_{\mathbb{R}^3}, \mathcal{R}, \mathcal{R}_0)^{-1} = \\ &\left( \begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 1 & -1 & -2 & 0 \\ 2 & -2 & -2 & -3 \\ -1 & 3 & 2 & 3 \end{array} \right) \cdot \left( \begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 1 & 2 \end{array} \right)^{-1} = \left( \begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 1 & \frac{3}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 2 & 1 & 2 & -1 \\ -1 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{3}{2} \end{array} \right). \end{aligned}$$

La expresión matricial de  $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  en  $\mathcal{R}_0$  queda

$$\left( \begin{array}{c} 1 \\ f \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}_{\mathcal{R}_0} \end{array} \right) = \left( \begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 1 & \frac{3}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 2 & 1 & 2 & -1 \\ -1 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{3}{2} \end{array} \right) \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix}.$$

Por último, obsérvese que

$$\det(M(\vec{f}, B, B_0)) = 6 \neq 0,$$

de donde  $\vec{f}$  es un isomorfismo de espacios vectoriales y, por tanto,  $f$  es una afinidad o isomorfismo afín. ■

**Ejercicio 2.87** Consideremos en  $\mathbb{R}^3$  los planos

$$S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : -x - y + z = 1\}, \quad S' = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x + y + z = -1\}$$

y las rectas

$$T = (0, 0, 1) + L(\{(1, 1, 0)\}), \quad T' = (0, 0, -1) + L(\{(1, 1, 0)\}).$$

Justifica que existe una afinidad  $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  tal que  $f(S) = S'$  y  $f(T) = T'$ . Determina la expresión matricial de  $f$  en el sistema de referencia usual  $\mathcal{R}_0$  de  $\mathbb{R}^3$ .

SOLUCIÓN: Para responder correctamente a la pregunta, es importante conocer la posición relativa de  $S$  y  $T$ , y compararla con la de  $S'$  y  $T'$ .

Estudiemos si  $S$  y  $T$  son secantes. Los puntos de  $T$  se parametrizan

$$T = \{(\lambda, \lambda, 1) : \lambda \in \mathbb{R}\},$$

de donde teniendo en cuenta que la ecuación implícita  $-x - y + z = 1$  caracteriza las coordenadas en  $\mathcal{R}_0$  de los puntos de  $S$ ,

$$S \cap T = \{(\lambda, \lambda, 1) : -\lambda - \lambda + 1 = 1\} = \{(0, 0, 1)\}.$$

Esto prueba que  $S$  y  $T$  se cortan en el punto  $p_0 = (0, 0, 1)$ , de donde por la fórmula de dimensiones  $\dim S \vee T = \dim S + \dim T = 3$ , esto es,  $S \vee T = \mathbb{R}^3$ .

Un cálculo análogo dice que

$$T' = \{(\lambda, \lambda, -1) : \lambda \in \mathbb{R}\} \quad \text{y} \quad S' \cap T' = \{(\lambda, \lambda, -1) : \lambda + \lambda - 1 = -1\} = \{(0, 0, -1)\},$$

por lo que  $S'$  y  $T'$  se cortan en el punto  $q_0 = (0, 0, -1)$  y  $S' \vee T' = \mathbb{R}^3$ .

Dada una aplicación afín  $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ , es claro que  $f$  será una afinidad satisfaciendo  $f(T) = T'$ ,  $f(S) = S'$  si y sólo si se cumplen los siguientes requerimientos:

- (a)  $f(S \cap T) = S' \cap T'$ , esto es,  $f(p_0) = q_0$ .
- (b)  $f$  aplica un sistema de referencia de  $T$  en otro de  $T'$ . Por ejemplo, el sistema de referencia  $\{p_0, p_1 = (1, 1, 1)\}$  de  $T$  en un sistema de referencia  $\{q_0 = f(p_0), q_1 = f(p_1)\}$  de  $T'$  (esto es,  $f(p_1)$  ha de ser un punto de  $T'$  distinto de  $q_0$ ).
- (c)  $f$  aplica un sistema de referencia de  $S$  en otro de  $S'$ . Por ejemplo, el sistema de referencia  $\{p_0, p_2 = (1, -1, 1), p_3 = (-1, 0, 0)\}$  de  $S$  en un sistema de referencia  $\{q_0 = f(p_0), q_2 = f(p_2), q_3 = f(p_3)\}$  de  $S'$  (esto es,  $f(p_2), f(p_3)$  han de ser puntos de  $S'$  que, junto con  $q_0$ , formen un sistema afínmente independiente).

Lo que vamos a hacer para resolver el ejercicio es elegir puntos  $q_1 \in T'$ ,  $q_2, q_3 \in S'$  tales que  $\{q_0, q_1\}$  sea un sistema de referencia de  $T'$  y  $\{q_0, q_2, q_3\}$  sea un sistema de referencia de  $S'$ , y construir por el Teorema Fundamental de la Geometría afín la única aplicación afín

$$f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3 \text{ tal que } f(p_j) = q_j, \quad j = 0, 1, 2, 3.$$

Nótese que en este contexto  $\{p_0, p_1, p_2, p_3\}$  y  $\{q_0, q_1, q_2, q_3\}$  son sistemas de referencia de  $\mathbb{R}^3$ . Hay muchas elecciones posibles de los puntos  $q_1, q_2, q_3$ , y por tanto, muchas afinidades resolviendo el ejercicio. Nosotros vamos a elegir:

$$q_1 = (1, 1, -1) \in T', \quad q_2 = (1, -1, -1), \quad q_3 = (-1, 0, 0) \in S'.$$

La comprobación de que  $\{q_0, q_1\}$  y  $\{q_0, q_2, q_3\}$  son afínmente independientes (y por tanto sistemas de referencia de  $T'$  y  $S'$  respectivamente) es rutinaria.

Resumiendo, sólo nos resta construir la única afinidad  $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  que lleva el sistema de referencia

$$\begin{aligned} \mathcal{R} &= \{p_0 = (0, 0, 1), p_1 = (1, 1, 1), p_2 = (1, -1, 1), p_3 = (-1, 0, 0)\} \equiv \\ &\equiv \{p_0 = (0, 0, 1), B = \{v_1 = (1, 1, 0), v_2 = (1, -1, 0), v_3 = (-1, 0, -1)\}\} \end{aligned}$$

en el sistema de puntos (también sistema de referencia en este caso)

$$\{q_0 = (0, 0, -1), q_1 = (1, 1, -1), q_2 = (1, -1, -1), q_3 = (-1, 0, 0)\}$$

Si llamamos

$$u_1 = \overrightarrow{q_0 q_1} = (1, 1, 0), \quad u_2 = \overrightarrow{q_0 q_2} = (1, -1, 0), \quad u_3 = \overrightarrow{q_0 q_3} = (-1, 0, 1),$$

una tal  $f$  tiene como aplicación lineal asociada  $\vec{f}: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  al único isomorfismo en  $\mathbb{R}^3$  que aplica  $\vec{f}(v_j) = u_j$ ,  $j = 1, 2, 3$ , esto es, satisfaciendo

$$M(\vec{f}, B, B_0) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

donde  $B_0$  es la base canónica de  $\mathbb{R}^3$ . Por tanto, la afinidad  $f$  viene representada en los sistemas de referencia  $\mathcal{R}$  y  $\mathcal{R}_0$  (sistema de referencia canónico de  $\mathbb{R}^3$ ) por la matriz

$$M(f, \mathcal{R}, \mathcal{R}_0) = \left( \begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right).$$

Como  $M(f, \mathcal{R}_0) \equiv M(f, \mathcal{R}_0, \mathcal{R}_0) = M(f, \mathcal{R}, \mathcal{R}_0) \cdot M(\text{Id}_{\mathbb{R}^3}, \mathcal{R}_0, \mathcal{R})$  y

$$M(\text{Id}_{\mathbb{R}^3}, \mathcal{R}_0, \mathcal{R}) = M(\text{Id}_{\mathbb{R}^3}, \mathcal{R}, \mathcal{R}_0)^{-1} = \left( \begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \end{array} \right)^{-1} = \left( \begin{array}{c|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \end{array} \right),$$

queda

$$M(f, \mathcal{R}_0) = \left( \begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array} \right) \cdot \left( \begin{array}{c|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \end{array} \right) = \left( \begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \end{array} \right).$$

■

**Ejercicio 2.88** Se considera la aplicación

$$f: \mathcal{P}_2(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}^3, \quad f(p(x)) = (p(0) + 1, p(1), p'(1) - 1).$$

- (a) Demuestra que  $f$  es afín y encuentra la matriz que la representa en los sistemas de referencia canónicos  $\mathcal{R}'_0 = \{0, \{1, x, x^2\}\}$  de  $\mathcal{P}_2(\mathbb{R})$  y  $\mathcal{R}_0$  de  $\mathbb{R}^3$ .
- (b) Comprueba que  $S = \{p(x) \in \mathcal{P}_2(\mathbb{R}): p(0) + p(1) = 2\}$  es un subespacio afín de  $\mathcal{P}_2(\mathbb{R})$  y determina sus ecuaciones implícitas en  $\mathcal{R}'_0$ .
- (c) Considera el sistema de referencia  $\mathcal{R} = \{(1, 0, 1), B = \{(1, 1, -1), (1, -1, 0), (1, 1, 0)\}\}$  de  $\mathbb{R}^3$  y calcula las ecuaciones implícitas de  $f(S)$  en  $\mathcal{R}$ .

SOLUCIÓN: Es claro que  $f(p(x)) = (1, 0, -1) + h(p(x))$ , donde  $h$  es la aplicación lineal

$$h: \mathcal{P}_2(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}^3, \quad h(p(x)) = (p(0), p(1), p'(1)).$$

De la Proposición 2.51 deducimos que  $f$  es afín con  $\vec{f} = h$  y  $f(0) = (1, 0, -1)$ . Por otra parte, es claro que

$$\vec{f}(1) = (1, 1, 0), \quad \vec{f}(x) = (0, 1, 1), \quad \vec{f}(x^2) = (0, 1, 2),$$

lo que unido a que  $f(0) = (1, 0, -1)$  nos dice que

$$M(f, \mathcal{R}'_0, \mathcal{R}_0) = \left( \begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 2 & 0 \end{array} \right)$$

concluyendo (a).

Para probar (b), basta con observar que  $1 \in S$  y  $S = 1 + U$ , donde  $U$  es el subespacio vectorial de  $\mathcal{P}_2(\mathbb{R})$  dado por

$$U = \{p(x): p(0) + p(1) = 0\}.$$

Por tanto

$$\vec{S} = U = \{a_0 + a_1x + a_2x^2: 2a_0 + a_1 + a_2 = 0\},$$

y

$$S = U = \{a_0 + a_1x + a_2x^2 : 2a_0 + a_1 + a_2 = 2\}.$$

siendo la segunda expresión las ecuaciones implícitas de  $S$  en  $\mathcal{R}'_0$ . Esto resuelve (b).

Finalmente, para probar (c) recordemos que

$$f(S) = f(1 + \vec{S}) = f(1) + \vec{f}(\vec{S}) = (1, 1, 0) + \vec{f}(\vec{S}).$$

Por otra parte, resolviendo el sistema  $2a_0 + a_1 + a_2 = 0$  que se corresponde con las ecuaciones implícitas en  $\mathcal{R}'_0$  de  $\vec{S}$ , deducimos que

$$\vec{S} = L(\{x - x^2, 1 - 2x\}).$$

Por tanto

$$\vec{f}(\vec{S}) = \vec{f}(L(\{x - x^2, 1 - 2x\})) = L(\{\vec{f}(x - x^2), \vec{f}(1 - 2x)\}) = L(\{(0, 0, -1), (1, -1, -2)\}).$$

Las ecuaciones implícitas de  $f(S)$  en  $\mathcal{R}_0$  se deducen, por el procedimiento estándard, imponiendo

$$\text{rang} \begin{pmatrix} x - 1 & 0 & 1 \\ y - 1 & 0 & -1 \\ z & -1 & -2 \end{pmatrix} = 2 \iff \det \begin{pmatrix} x - 1 & 0 & 1 \\ y - 1 & 0 & -1 \\ z & -1 & -2 \end{pmatrix} = -x - y + 2 = 0.$$

Para calcular las correspondientes ecuaciones implícitas de  $f(S)$  en  $\mathcal{R}$  hemos de realizar el conveniente cambio de sistema de referencia, en concreto nos interesa el cambio de  $\mathcal{R}$  a  $\mathcal{R}_0$  gobernado por la matriz

$$M(\text{Id}_{\mathbb{R}^3}, \mathcal{R}, \mathcal{R}_0) = \left( \begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \end{array} \right).$$

Si  $p \in \mathbb{R}^3$  y escribimos  $p_{\mathcal{R}} = (x', y', z')$  y  $p_{\mathcal{R}_0} = (x, y, z)$ , inferimos que

$$\begin{pmatrix} 1 \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \left( \begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \end{array} \right) \cdot \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix},$$

esto es,

$$x = 1 + x' + y' + z', \quad y = x' - y' + z', \quad z = 1 - x'.$$

Como  $-x - y + 2 = 0$  es la ecuación implícita de  $f(S)$  en  $\mathcal{R}_0$ , sustituyendo

$$-(1 + x' + y' + z') - (x' - y' + z') + 2 = 2x' - 2z' + 1 = 0$$

es la ecuación implícita de  $f(S)$  en  $\mathcal{R}$ . ■

**Ejercicio 2.89** Probar que la aplicación afín  $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  definida por  $f(x, y) = (1 - 2x, 3 - 2y)$  es una homotecia. Calcular su centro y su razón.

SOLUCIÓN: Es claro que  $f(x, y) = (1, 3) + f_0(x, y)$ , donde  $f_0$  es la aplicación lineal

$$f_0: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2, \quad f_0(x, y) = -2(x, y).$$

De la Proposición 2.51 deducimos que  $f$  es afín con  $\vec{f} = f_0$  y  $f(0, 0) = (1, 3)$ . Como  $\vec{f} = -2\text{Id}_{\mathbb{R}^2}$ ,  $f$  es una homotecia de razón  $-2$ . Su único punto fijo o centro  $(a, b)$  satisface

$$f(a, b) = (a, b) \iff (1 - 2a, 3 - 2b) = (a, b) \iff (a, b) = (1/3, 1).$$

Po tanto  $f$  es la homotecia  $h_{(1/3, 1), -2}$ . ■

**Ejercicio 2.90** Calcular explícitamente una homotecia en  $\mathbb{R}^3$  de centro  $(a, b, c)$  y razón  $r \neq 0, 1$ .

SOLUCIÓN: La homotecia buscada  $h: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  satisface  $\vec{h} = r\text{Id}_{\mathbb{R}^3}$ . Si escribimos  $h(0, 0, 0) = (a', b', c')$ , la Proposición 2.51 nos dice entonces que

$$h: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3, \quad h(x, y, z) = (a', b', c') + r(x, y, z).$$

Como  $h(a, b, c) = (a, b, c)$  inferimos que

$$(a', b', c') + r(a, b, c) = (a, b, c) \iff (a', b', c') = (r - 1)(a, b, c).$$

Finalmente queda

$$h \equiv h_{(a, b, c), r}: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3, \quad h_{(a, b, c), r}(x, y, z) = (r - 1)(a, b, c) + r(x, y, z). ■$$

**Ejercicio 2.91** Sea  $f: \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}$  un endomorfismo afín de un plano afín. Supongamos que existen tres rectas afines  $S_1, S_2$  y  $S_3$  en  $\mathcal{A}$  de las que no hay dos paralelas, y tales que  $f(S_i) = S_i$  para cada  $i = 1, 2, 3$ . Demostrar que  $f$  es la identidad o una homotecia de razón  $r \neq 1$ .

SOLUCIÓN: Escribamos  $S_j = p_j + L(\{v_j\})$ ,  $j = 1, 2, 3$ . Como  $f(S_j) = f(p_j) + L(\{\vec{f}(v_j)\}) = p_j + L(\{v_j\}) = S_j$ , deducimos que  $\vec{f}(v_j) = r_j v_j$ ,  $r_j \neq 0$ ,  $j = 1, 2, 3$ . Como las rectas no son paralelas dos a dos, deducimos que:

- $\{v_1, v_2\}$  son linealmente independientes y por tanto una base de  $\overrightarrow{\mathcal{A}}$ .
- $v_3 = \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2$  con  $\lambda_1, \lambda_2 \neq 0$ .

Por tanto

$$r_3(\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2) = r_3 v_3 = \vec{f}(v_3) = \vec{f}(\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2) = \lambda_1 \vec{f}(v_1) + \lambda_2 \vec{f}(v_2) = \lambda_1 r_1 v_1 + \lambda_2 r_2 v_2,$$

de donde  $r_3 \lambda_1 = r_1 \lambda_1$ ,  $r_3 \lambda_2 = r_2 \lambda_2$ , esto es  $r := r_3 = r_2 = r_1 \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ .

Si  $r \neq 1$  deducimos que  $\vec{f} = r\text{Id}_{\overrightarrow{\mathcal{A}}}$ , y por tanto  $f$  es una homotecia de razón  $r$  (y centro  $a \in S_1 \cap S_2 \cap S_3$ ).

Si  $r = 1$  entonces  $f$  es una traslación  $\tau_v$ ,  $v \in \overrightarrow{\mathcal{A}}$ . Al ser  $\tau_v(S_j) = S_j = p_j + L(\{v_j\})$  inferimos que  $p_j + v \in S_j$ , o equivalentemente  $v = \mu_j v_j$ ,  $\mu_j \in \mathbb{R}$ ,  $j = 1, 2, 3$ . Como cada pareja de vectores  $\{v_i, v_j\}$  son linealmente independientes necesariamente  $\mu_j = 0$ ,  $j = 1, 2, 3$ , y  $v = \vec{0}$ . Esto prueba que  $f = \text{Id}_{\mathcal{A}}$ . ■

**Ejercicio 2.92** Sea  $\mathcal{A}$  un espacio afín. Demuestra los siguientes enunciados.

- (a) La composición de una traslación y de una homotecia es una homotecia. Calcula el centro y la razón de esta homotecia resultante.
- (b) La composición de dos homotecias es una homotecia o una traslación. De ser una homotecia calcula su razón y centro, y de ser una traslación el vector de traslación.

Como consecuencia, el conjunto unión de todas las homotecias y traslaciones es un grupo con operación la composición de aplicaciones.

SOLUCIÓN : Para resolver (a), tomemos una traslación  $\tau$  y una homotecia  $h$  en  $\mathcal{A}$ . Recordemos que  $\vec{h} = r\text{Id}_{\mathcal{A}}$  ( $r \neq 0, 1$ ) y  $\vec{\tau} = \text{Id}_{\mathcal{A}}$ , y por tanto  $\overrightarrow{h \circ \tau} = r\text{Id}_{\mathcal{A}}$ . Por la Proposición 2.64, esto prueba que  $f := h \circ \tau$  es una homotecia de razón  $r$ . Recordemos que el centro  $c$  de  $f$  se calcula por la fórmula

$$c = q + \frac{1}{1-r} \overrightarrow{qf(q)}, \quad q \in \mathcal{A} \text{ punto arbitrario.}$$

Si escribimos  $h = h_{a,r}$  ( $a$  es el centro de  $h$ ) y  $\tau = \tau_v$  ( $v$  es el vector de traslación de  $\tau$ ), y elegimos  $q = a + (-v)$ , la fórmula anterior nos dice que

$$\begin{aligned} c &= (a+(-v)) + \frac{1}{1-r} \overrightarrow{(a+(-v))f(a+(-v))} = (a+(-v)) + \frac{1}{1-r} \overrightarrow{(a+(-v))h(\tau(a+(-v)))} = \\ &= (a+(-v)) + \frac{1}{1-r} \overrightarrow{(a+(-v))h(a)} = (a+(-v)) + \frac{1}{1-r} \overrightarrow{(a+(-v))a} = (a+(-v)) + \frac{1}{1-r} v, \end{aligned}$$

y por tanto

$$c = a + \frac{r}{1-r} v.$$

Una discusión similar se puede llevar a cabo para la homotecia  $\tau \circ h$ .

Para resolver (b), tomemos dos homotecias  $h_1 = h_{a_1, r_1}$  y  $h_2 = h_{a_2, r_2}$  en  $\mathcal{A}$ . Discutiremos dos casos,  $r := r_1 r_2 \neq 1$  y  $r := r_1 r_2 = 1$ .

Si  $r \neq 1$  entonces  $\overrightarrow{h_2 \circ h_1} = \overrightarrow{h_2} \circ \overrightarrow{h_1} = (r_2 \text{Id}_{\mathcal{A}}) \circ (r_1 \text{Id}_{\mathcal{A}}) = r \text{Id}_{\mathcal{A}}$ , y por tanto la Proposición 2.64 nos garantiza que  $h := h_2 \circ h_1$  es una homotecia de razón  $r$ . Para calcular el centro  $c$  de  $h$  usamos la fórmula

$$c = q + \frac{1}{1-r} \overrightarrow{qh(q)}, \quad q \in \mathcal{A} \text{ punto arbitrario.}$$

Eligiendo  $q = a_1$  nos quedará

$$\begin{aligned} c &= a_1 + \frac{1}{1-r} \overrightarrow{a_1 h(a_1)} = a_1 + \frac{1}{1-r} \overrightarrow{a_1 h_2(a_1)} = a_1 + \frac{1}{1-r} \overrightarrow{a_1 (a_2 + r_2 \overrightarrow{a_2 a_1})} = \\ &= a_1 + \frac{1}{1-r} (\overrightarrow{a_1 a_2} + r_2 \overrightarrow{a_2 a_1}) = a_1 + \frac{1-r_2}{1-r_1 r_2} \overrightarrow{a_1 a_2}. \end{aligned}$$

Supongamos ahora que  $r = 1$ . En este caso razonando como antes  $\tau := h_2 \circ h_1$  satisface  $\vec{\tau} = \text{Id}_{\mathcal{A}}$ , y por tanto la Proposición 2.62 nos dice que  $\tau$  es una traslación en  $\mathcal{A}$ . El vector de traslación  $v$  de  $\tau$  se calcula de la fórmula

$$v = \overrightarrow{q\tau(q)}, \quad q \in \mathcal{A} \text{ punto arbitrario.}$$

Eligiendo  $q = a_1$  y razonando como arriba queda

$$v = \overrightarrow{a_1 \tau(a_1)} = \overrightarrow{a_1 h_2(a_1)} = \overrightarrow{a_1 (a_2 + r_2 \overrightarrow{a_2 a_1})} = (1-r_2) \overrightarrow{a_1 a_2}.$$

■

**Ejercicio 2.93** En un espacio afín  $\mathcal{A}$  se consideran  $(n+1)$ -puntos  $\{p_0, \dots, p_n\} \subseteq \mathcal{A}$  y fijemos  $O \in \mathcal{A}$ . Se define el baricentro de estos puntos como

$$b = O + \frac{1}{n+1} \sum_{j=0}^n \overrightarrow{Op_j}.$$

Probar que  $b$  no depende del punto  $O$  fijado. Probar además que si  $f: \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}'$  es afín entonces  $f(b)$  es el baricentro de  $\{f(p_0), \dots, f(p_n)\}$ .

SOLUCIÓN: Para probar que  $b$  no depende del punto  $O$  observemos que

$$O' + \frac{1}{n+1} \sum_{j=0}^n \overrightarrow{O'p_j} = (O + \overrightarrow{OO'}) + \frac{1}{n+1} \sum_{j=0}^n (\overrightarrow{O'O} + \overrightarrow{Op_j}) = O + (\overrightarrow{OO'} + \overrightarrow{O'O} + \frac{1}{n+1} \sum_{j=0}^n \overrightarrow{Op_j}),$$

de donde

$$O' + \frac{1}{n+1} \sum_{j=0}^n \overrightarrow{O'p_j} = O + \frac{1}{n+1} \sum_{j=0}^n \overrightarrow{Op_j}$$

como queríamos demostrar.

Para la segunda parte del ejercicio, obsérvese que por ser  $f$  afín

$$f(O + \frac{1}{n+1} \sum_{j=0}^n \overrightarrow{Op_j}) = f(O) + \vec{f}\left(\frac{1}{n+1} \sum_{j=0}^n \overrightarrow{Op_j}\right) = f(O) + \frac{1}{n+1} \sum_{j=0}^n \vec{f}(\overrightarrow{Op_j}),$$

esto es

$$f(O + \frac{1}{n+1} \sum_{j=0}^n \overrightarrow{Op_j}) = f(O) + \frac{1}{n+1} \sum_{j=0}^n \overrightarrow{f(O)f(p_j)},$$

y por tanto  $f$  lleva el baricentro de  $\{p_0, \dots, p_n\}$  en el baricentro de  $\{f(p_0), \dots, f(p_n)\}$ .

■

**Ejercicio 2.94** Un triángulo en un espacio afín  $\mathcal{A}$  con  $\dim \mathcal{A} \geq 2$  son tres puntos afínmente independientes, llamados vértices, y sus lados se definen como los segmentos que determinan las parejas de vértices. Probar que los puntos medios de los lados de un triángulo  $\{a, b, c\}$  en  $\mathcal{A}$  forman un triángulo cuyos lados son paralelos a los de  $\{a, b, c\}$  y cuyo baricentro es el mismo que el de  $\{a, b, c\}$ .

SOLUCIÓN: Los lados de  $\{a, b, c\}$  son por definición las rectas

$$\langle\{a, b\}\rangle, \quad \langle\{a, c\}\rangle, \quad \langle\{b, c\}\rangle.$$

Por definición, los puntos medios de los lados de  $\{a, b, c\}$  son los de los segmentos  $[a, b]$ ,  $[a, c]$  y  $[b, c]$ , a saber

$$m_{ab} = O + \frac{1}{2}(\overrightarrow{Oa} + \overrightarrow{Ob}), \quad m_{ac} = O + \frac{1}{2}(\overrightarrow{Oa} + \overrightarrow{Oc}), \quad m_{bc} = O + \frac{1}{2}(\overrightarrow{Ob} + \overrightarrow{Oc}), \quad (3)$$

donde  $O \in \mathcal{A}$  cualquier punto auxiliar. Por tanto

$$\overrightarrow{m_{ab}m_{ac}} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{Oa} + \overrightarrow{Oc}) - \frac{1}{2}(\overrightarrow{Oa} + \overrightarrow{Ob}) = \frac{1}{2}(\overrightarrow{Oc} - \overrightarrow{Ob}) = \overrightarrow{bc} \quad \text{y}$$

$$\overrightarrow{m_{ab}m_{bc}} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{Ob} + \overrightarrow{Oc}) - \frac{1}{2}(\overrightarrow{Oa} + \overrightarrow{Ob}) = \frac{1}{2}(\overrightarrow{Oc} - \overrightarrow{Oa}) = \overrightarrow{ac}.$$

Como  $\{a, b, c\}$  son afínmente independientes los vectores  $\{\vec{bc}, \vec{ac}\}$  son linealmente independientes, de donde  $\{\mathbf{m}_{ab}, \mathbf{m}_{ac}, \mathbf{m}_{bc}\}$  son afínmente independientes y determinan un triángulo. Sus lados son las rectas,

$$\langle\{\mathbf{m}_{ab}, \mathbf{m}_{ac}\}\rangle, \quad \langle\{\mathbf{m}_{ab}, \mathbf{m}_{bc}\}\rangle, \quad \langle\{\mathbf{m}_{ac}, \mathbf{m}_{bc}\}\rangle,$$

cuyos vectores de directores son respectivamente

$$\overrightarrow{\mathbf{m}_{ab}\mathbf{m}_{ac}} = \vec{bc}, \quad \overrightarrow{\mathbf{m}_{ab}\mathbf{m}_{bc}} = \vec{ac}, \quad \overrightarrow{\mathbf{m}_{ac}\mathbf{m}_{bc}} = \vec{ab},$$

que efectivamente coinciden respectivamente con los de los lados

$$\langle\{b, c\}\rangle, \quad \langle\{a, c\}\rangle, \quad \langle\{a, b\}\rangle,$$

por lo que se dan las relaciones de paralelismo

$$\langle\{\mathbf{m}_{ab}, \mathbf{m}_{ac}\}\rangle \parallel \langle\{b, c\}\rangle, \quad \langle\{\mathbf{m}_{ab}, \mathbf{m}_{bc}\}\rangle \parallel \langle\{a, c\}\rangle, \quad \langle\{\mathbf{m}_{ac}, \mathbf{m}_{bc}\}\rangle \parallel \langle\{a, b\}\rangle.$$

Por último, teniendo en cuenta (3), el baricentro de  $\{\mathbf{m}_{ab}, \mathbf{m}_{ac}, \mathbf{m}_{bc}\}$  obedece a la fórmula

$$O + \frac{1}{3}(\overrightarrow{O\mathbf{m}_{ab}} + \overrightarrow{O\mathbf{m}_{ac}} + \overrightarrow{O\mathbf{m}_{bc}}) = O + \frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}(\overrightarrow{Oa} + \overrightarrow{Ob}) + \frac{1}{2}(\overrightarrow{Oa} + \overrightarrow{Oc}) + \frac{1}{2}(\overrightarrow{Ob} + \overrightarrow{Oc})\right) =$$

de donde

$$O + \frac{1}{3}(\overrightarrow{O\mathbf{m}_{ab}} + \overrightarrow{O\mathbf{m}_{ac}} + \overrightarrow{O\mathbf{m}_{bc}}) = O + \frac{1}{3}(\overrightarrow{Oa} + \overrightarrow{Ob} + \overrightarrow{Oc})$$

por lo que los baricentros de  $\{\mathbf{m}_{ab}, \mathbf{m}_{ac}, \mathbf{m}_{bc}\}$  y  $\{a, b, c\}$  coinciden. ■

**Ejercicio 2.95** Sea  $\{a, b, c\}$  un triángulo en un espacio afín  $\mathcal{A}$  con baricentro  $o$ . Demostrar que la homotecia  $h = h_{o, -1/2}$  lleva cada vértice de  $\{a, b, c\}$  en el punto medio de su lado opuesto.

**SOLUCIÓN:** Veamos que  $h(c) = \mathbf{m}_{ab}$  (análogamente se comprobaría que  $h(b) = \mathbf{m}_{ac}$  y  $h(a) = \mathbf{m}_{bc}$ ). Fijemos un punto  $O \in \mathcal{A}$  y recordemos que

$$o = O + \frac{1}{3}(\overrightarrow{Oa} + \overrightarrow{Ob} + \overrightarrow{Oc}).$$

Por tanto

$$\begin{aligned} h(c) &= o - \frac{1}{2}\overrightarrow{oc} = \left(O + \frac{1}{3}(\overrightarrow{Oa} + \overrightarrow{Ob} + \overrightarrow{Oc})\right) - \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{\left(O + \frac{1}{3}(\overrightarrow{Oa} + \overrightarrow{Ob} + \overrightarrow{Oc})\right)c}\right) = \\ &= \left(O + \frac{1}{3}(\overrightarrow{Oa} + \overrightarrow{Ob} + \overrightarrow{Oc})\right) + \frac{1}{2}\left(c\left(O + \frac{1}{3}(\overrightarrow{Oa} + \overrightarrow{Ob} + \overrightarrow{Oc})\right)\right) = \\ &= \left(O + \frac{1}{3}(\overrightarrow{Oa} + \overrightarrow{Ob} + \overrightarrow{Oc})\right) + \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{Oc} + \frac{1}{3}(\overrightarrow{Oa} + \overrightarrow{Ob} + \overrightarrow{Oc})\right) = \\ &= \left(O + \frac{1}{3}(\overrightarrow{Oa} + \overrightarrow{Ob} + \overrightarrow{Oc})\right) + \frac{1}{6}(\overrightarrow{Oa} + \overrightarrow{Ob} - 2\overrightarrow{Oc}) = \\ &= O + \frac{1}{2}(\overrightarrow{Oa} + \overrightarrow{Ob}) = \mathbf{m}_{ab} \end{aligned}$$

como queríamos demostrar. ■

**Ejercicio 2.96** Dado un espacio afín  $\mathcal{A}$ , demostrar las siguientes afirmaciones:

- (a) Una homotecia  $h \neq \text{Id}_{\mathcal{A}}$  queda determinada por la imagen de dos puntos.
- (b) Las constantes, las traslaciones y las homotecias son las únicas aplicaciones afines  $f : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}$  tales que  $f(S)$  es paralelo a  $S$ , para todo subespacio afín  $S$  de  $\mathcal{A}$ .

**SOLUCIÓN:** Sea  $h = h_{a,r}$  la homotecia de centro  $a \in \mathcal{A}$  y razón  $r \neq 0, 1$ . Consideremos dos puntos distintos  $p_0, q_0 \in \mathcal{A}$ , y supongamos que conocemos los puntos  $p_1 := h(p_0)$  y  $q_1 := h(q_0)$ . Veamos qué podemos deducir quienes son  $a \in \mathcal{A}$  y  $r \in \mathbb{R}$  a partir de  $p_0, p_1, q_0, q_1$ . En efecto, sabemos que  $p_1 = a + r\overrightarrow{ap_0}$ , y  $q_1 = a + r\overrightarrow{aq_0}$ , por lo que

$$\overrightarrow{p_1q_1} = \overrightarrow{(a + r\overrightarrow{ap_0})(a + r\overrightarrow{aq_0})} = r(\overrightarrow{aq_0} - \overrightarrow{ap_0}) = r\overrightarrow{p_0q_0}$$

y los vectores  $\overrightarrow{p_1q_1}$  y  $\overrightarrow{p_0q_0}$  son linealmente dependientes siendo la razón  $r$  el factor de proporcionalidad

$$r = \frac{\overrightarrow{p_1q_1}}{\overrightarrow{p_0q_0}}.$$

Para determinar el centro  $a$  de  $h$  observemos que

$$p_1 = a + r\overrightarrow{ap_0} = (p_0 + \overrightarrow{p_0a}) + r\overrightarrow{ap_0} = p_0 + (1 - r)\overrightarrow{p_0a},$$

de donde

$$\overrightarrow{p_0p_1} = \overrightarrow{p_0(p_0 + (1 - r)\overrightarrow{p_0a})} = (1 - r)\overrightarrow{p_0a}.$$

De aquí que el centro  $a$  de  $h$  venga determinado por la expresión formal

$$a = p_0 + \overrightarrow{p_0a} = p_0 + \frac{1}{1 - r}\overrightarrow{p_0p_1} = p_0 + \frac{\overrightarrow{p_0q_0}}{\overrightarrow{p_0q_0} - \overrightarrow{p_1q_1}}\overrightarrow{p_0p_1},$$

donde  $\overrightarrow{p_0q_0}/(\overrightarrow{p_0q_0} - \overrightarrow{p_1q_1})$  expresa el factor de proporcionalidad entre los vectores linealmente dependientes  $\overrightarrow{p_0q_0} - \overrightarrow{p_1q_1}$  y  $\overrightarrow{p_0p_1}$ . ■

**Ejercicio 2.97** Una cuaterna de puntos  $\{a, b, c, d\}$  se dice un cuadrilátero si no contiene tres puntos alineados; si además sus lados opuestos  $\langle\{a, b\}\rangle, \langle\{d, c\}\rangle$  y  $\langle\{a, d\}\rangle, \langle\{b, c\}\rangle$  son paralelos entonces la cuaterna se dice ser un paralelogramo. Probar que si  $\{a, b, c, d\}$  es un paralelogramo entonces  $\overrightarrow{ab} = \overrightarrow{dc}$  y  $\overrightarrow{bc} = \overrightarrow{ad}$ .

**SOLUCIÓN:** Si  $\{a, b, c, d\}$  es un paralelogramo entonces

$$\overrightarrow{ab} = \lambda\overrightarrow{dc}, \quad \overrightarrow{bc} = \mu\overrightarrow{ad},$$

donde  $\lambda, \mu \neq 0$  ya que los puntos son distintos dos a dos. Tenemos que

$$\overrightarrow{ac} = \overrightarrow{ab} + \overrightarrow{bc} = \lambda\overrightarrow{dc} + \mu\overrightarrow{ad}.$$

Como también  $\overrightarrow{ac} = \overrightarrow{ad} + \overrightarrow{dc}$ , deducimos que

$$\lambda\overrightarrow{dc} + \mu\overrightarrow{ad} = \overrightarrow{ad} + \overrightarrow{dc}.$$

Al ser los vectores  $\{\overrightarrow{ad}, \overrightarrow{dc}\}$  son linealmente independientes, ya que  $\{a, b, c, d\}$  es un cuadrilátero (los puntos  $\{a, d, c\}$  no están alineados), concluimos que  $\lambda = \mu = 1$  y de aquí se sigue el ejercicio. ■

## Ejercicios del Tema 1

1. Sea  $V$  un espacio vectorial real. Se considera la aplicación

$$\rightarrow : V \times V \rightarrow V, \quad \overrightarrow{uv} := 2u - v.$$

Estudiar si  $\Phi$  induce o no una estructura de espacio afín en  $V$ .

2. Sean  $a, b : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  funciones continuas. Definimos los siguientes conjuntos:

$$V = \{f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}) / f'(x) + a(x)f(x) = 0, \forall x \in \mathbb{R}\},$$

$$A = \{f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}) / f'(x) + a(x)f(x) = b(x), \forall x \in \mathbb{R}\},$$

donde  $\mathcal{C}^1(\mathbb{R})$  es el espacio vectorial real de las funciones de clase  $C^1$  sobre los reales. Se pide lo siguiente:

- a) Demostrar que  $V$  es un espacio vectorial real.
- b) Supongamos sabido que  $A \neq \emptyset$ . Probar que  $A$  es un espacio afín sobre  $V$  cuando, para cada par de funciones  $g, g \in A$ , definimos  $\overrightarrow{fg} = g(x) - f(x)$ .

3. (Producto de espacios afines). Sean  $A_1$  y  $A_2$  dos espacios afines sobre espacios vectoriales reales  $V_1$  y  $V_2$ . Se pide lo siguiente:

- a) Demostrar que el producto cartesiano  $A_1 \times A_2$  es un espacio afín sobre  $V_1 \times V_2$  cuando definimos:

$$\overrightarrow{(p_1, p_2)(q_1, q_2)} = (\overrightarrow{p_1q_1}, \overrightarrow{p_2q_2}).$$

- b) Supongamos que  $\dim A_1 = m$  y  $\dim A_2 = n$ . Sea  $R_i = \{o_i; B_i\}$  un sistema de referencia cartesiano en  $A_i$  para cada  $i = 1, 2$ . Pongamos  $B_1 = \{u_1, \dots, u_m\}$  y  $B_2 = \{v_1, \dots, v_n\}$ . Demostrar que el par  $R_1 \times R_2 = \{(o_1, o_2); B_1 \times B_2\}$ , donde:

$$B_1 \times B_2 = \{(u_1, 0), \dots, (u_m, 0), (0, v_1), \dots, (0, v_n)\}$$

es un sistema de referencia cartesiano en  $A_1 \times A_2$ . A partir de aquí concluir que  $\dim(A_1 \times A_2) = m + n$ .

- c) Sea  $(p_1, p_2) \in A_1 \times A_2$ . Cómo se relacionan las coordenadas de  $(p_1, p_2)$  en  $R_1 \times R_2$  con las coordenadas de  $p_1$  en  $R_1$  y de  $p_2$  en  $R_2$ ?

4. En  $\mathbb{R}^3$  consideramos el conjunto  $R = \{p_0, p_1, p_2, p_3\}$  formado por los puntos:

$$p_0 = (1, 2, 1), \quad p_1 = (2, 1, 0), \quad p_2 = (0, 1, 0), \quad p_3 = (1, -1, 2).$$

Demostrar que  $R$  es un sistema de referencia afín de  $\mathbb{R}^3$ . Calcular las coordenadas afines del punto  $p = (0, 0, 0)$  con respecto a  $R$ .

- 5. Consideraremos el punto  $p = (1, -7, 4)$  de  $\mathbb{R}^3$ . Encontrar un sistema de referencia cartesiano  $R$  de  $\mathbb{R}^3$  de forma que  $p_R = (-1, -2, 2)^t$ . ¿Cuántos sistemas de referencia cartesianos en estas condiciones existen?
- 6. En  $\mathbb{R}^2$  se consideran los sistemas de referencia cartesianos dados por  $R = \{o; B = \{v_1, v_2\}\}$  y  $R' = \{o'; B' = \{v_1 + v_2, v_1 - v_2\}\}$ . Supongamos que  $\overrightarrow{o'o} = v_1 + v_2$ .

- a) Escribir la ecuación matricial del cambio de sistema de referencia de  $R$  a  $R'$ .  
b) Calcular las coordenadas en  $R'$  del punto  $p \in \mathbb{R}^2$  tal que  $p_R = (1, 1)^t$ .
7. – En un plano afín  $\mathcal{A}$  se considera el sistema de referencia afín  $\mathcal{R} = \{a, b, c\}$  y los puntos  

$$a' = a + 2\vec{ab}, \quad b' = a + \vec{ab} - \vec{ac}, \quad c' = a - \vec{ab} - \vec{ac}.$$
 Probar que  $\mathcal{R}' = \{a', b', c'\}$  es un sistema de referencia afín en  $\mathcal{A}$ . Calcular las coordenadas de un punto en  $\mathcal{R}'$  en función de las coordenadas en  $\mathcal{R}$ .
8. Sea  $A$  un espacio afín y  $S \subseteq A$  un subespacio afín. Dado un punto  $p \in A$ , demostrar que  $S = p + \overrightarrow{S}$  si y sólo si  $p \in S$ . Además, si  $p \notin S$ , probar que  $S \cap T = \emptyset$ , donde  $T = p + \overrightarrow{S}$ .
9. Demostrar que toda recta afín de  $\mathbb{R}^3$  es la intersección de dos planos afines. ¿Es cierta esta afirmación en  $\mathbb{R}^n$ ?
10. Sean  $L$  una recta afín y  $S$  un hiperplano afín de un espacio afín  $\mathcal{A}$ . Supongamos que  $\overrightarrow{L} + \overrightarrow{S} = \mathcal{A}$ . Probar que  $L \cap S$  es un único punto.
11. En cada uno de estos casos decidir razonadamente si  $S$  es o no un subespacio afín de  $A$ :
- a)  $A = \mathbb{R}^5, \quad S = \{(x, y, z, t, s) \in \mathbb{R}^5 / -y = 2x + z + 1\}$ .
  - b)  $A = \mathbb{R}^3, \quad S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / x^2 + y^2 + z^2 = 0\}$ .
  - c)  $A = \mathbb{R}^2, \quad S = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / x^2 = y^2\}$ .
  - d)  $A = \mathbb{R}^2, \quad S = \{(0, 1), (1, 0)\}$ .
  - e)  $A = \mathbb{R}^2, \quad S = \langle \{(0, 1), (1, 0)\} \rangle$ .
  - f)  $A = \mathbb{R}^3, \quad S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / x^2 + y^2 \geq 0\}$ .
  - g)  $A = \mathbb{R}^3, \quad S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / x = y = z\}$ .
  - h)  $A = \mathbb{R}^n, \quad S = \mathbb{Q}^n$ .
  - i)  $A = \mathcal{M}_2(\mathbb{R}), \quad S = \left\{ \begin{pmatrix} a-2 & a \\ 0 & 0 \end{pmatrix} / a \in \mathbb{R} \right\}$ .
  - j)  $V = \mathbb{R}[x], \quad S = \{p(x) \in \mathbb{R}[x] / \text{grado}(p(x)) = n\} \quad (n \in \mathbb{N})$ .
- Aclaración: en el apartado i) representamos por  $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$  al espacio vectorial real de las matrices cuadradas de orden 2 con coeficientes reales. En el apartado j) usamos  $\mathbb{R}[x]$  para denotar al espacio vectorial real de los polinomios en  $x$  con coeficientes reales.
12. Es siempre la unión de dos subespacios afines un subespacio afín? Si la respuesta es afirmativa, probarlo. Si es negativa, mostrar un contraejemplo.
13. Encontrar la recta del espacio afín  $\mathbb{R}^3$  que pasa por  $p_0 = (1, 1, 1)$  y se apoya en las rectas  $R_1 = (0, 0, 1) + L\{(1, 0, 1)\}$  y  $R_2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x + y = z - y + 1 = 0\}$ .
14. Demostrar que todo subespacio afín  $S$  de  $\mathbb{R}^n$  es cerrado para la topología usual. Demostrar también que si  $S \neq \mathbb{R}^n$ , entonces  $S$  tiene interior vacío.

15. ¿Para qué valores de  $t \in \mathbb{R}$  los puntos  $p = (1, 0, -1)$ ,  $q = (-2, 0, 2)$  y  $r = (t, 0, 3)$  de  $\mathbb{R}^3$  están alineados? Para dichos valores, calcular una recta afín que los contenga. Es la recta única? Pertenece el punto  $s = (-2, 2, 0)$  a dicha recta?
16. Calcular un sistema de referencia afín, unas ecuaciones paramétricas y unas ecuaciones implícitas de:
- La recta afín de  $\mathbb{R}^4$  que pasa por los puntos  $p = (1, -1, 1, 2)$  y  $q = (0, 1, 0, -1)$ ,
  - El hiperplano afín de  $\mathbb{R}^4$  que pasa por los puntos  $p = (1, 0, 0, 0)$ ,  $q = (0, 1, 0, 0)$ ,  $r = (0, 0, 1, 0)$  y  $s = (0, 0, 0, 1)$ ,
  - Un plano afín de  $\mathbb{R}^3$  que contenga a las rectas afines  $S = (1, 0, 2) + L((1, -1, 0))$  y  $T = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x + y - z = -1, y - z = 2\}$ ,
  - El hiperplano afín de  $\mathbb{R}^4$  paralelo al de ecuación  $x - y + z - t = 7$  y que pasa por el punto  $p = (1, -2, 3, -2)$ .
17. Calcular ecuaciones paramétricas e implícitas de los subespacios afines de  $\mathbb{R}^4$  generados por los puntos:
- $p_0 = (1, 1, 0, 1)$ ,  $p_1 = (1, -1, 1, 0)$ .
  - $p_0 = (1, 1, 0, 1)$ ,  $p_1 = (1, 0, 1, 0)$ ,  $p_2 = (0, 1, 0, 1)$ .
18. En cada uno de los siguientes casos calcula la intersección  $S \cap T$  y la suma  $S \vee T$  de los subespacios afines  $S, T$  de  $\mathbb{R}^3$ :
- $S = (1, 2, -1) + L(\{(1, 0, -2)\})$ ,  $T = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 2x + z - 1 = 4x + y + 2z - 4 = 0\}$ .
  - $S = (-1, 0, 1) + L(\{(1, 1, 1)\})$ ,  $T = (1, 1, 1) + L(\{(-1, -1, -1)\})$ .
  - $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x + y + z = 1\}$ ,  $T = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x + y + z - 2 = y - z - 1 = 0\}$ .
19. Probar que si  $S$  es una recta afín en un espacio afín  $A$  y  $p \notin S$ , entonces existe un único plano afín  $T$  que pasa por  $p$  y contiene a  $S$ . Calcular unas ecuaciones paramétricas y una ecuación implícita del plano afín en  $\mathbb{R}^3$  que pasa por  $p = (1, -2, 1)$  y contiene a la recta afín  $S = (1, 1, 1) + L((0, 1, 1))$ .
20. Se consideran los subespacios afines de  $\mathbb{R}^4$  dados por:
- $$S = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 : x + y + z + t = 1, x - y = 1\},$$
- $$T = (1, 0, 1, 0) + L(\{(1, 1, -1, -1), (0, 0, 0, 1)\}).$$
- Obtener un sistema de referencia cartesiano de  $S \cap T$  y de  $S \vee T$ . Calcular también unas ecuaciones implícitas de  $S \vee T$  si es posible.
21. Se consideran los subespacios afines  $S_1, S_2$  de  $\mathbb{R}^4$  dados por

$$S_1 = \{(x_2, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 : x_1 - x_2 - x_3 = x_1 + x_3 + x_4 - 2 = 0\}$$

$$S_2 = (1, 0, \lambda, 0) + L(\{(0, 1, -1, 1), (1, 0, -1, 1)\}).$$

Calcular  $S_1 \cap S_2$  y  $S_1 \vee S_2$  en función del parámetro  $\lambda$ .

22. Sea  $S$  el plano afín de  $\mathbb{R}^3$  con ecuación implícita  $x + y + z = 2$ . ¿Qué ecuación implícita satisfacen las coordenadas de los puntos de  $S$  con respecto al sistema de referencia afín  $R = \{(-1, 1, 2), (1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1)\}$ ?
23. Estudiar la intersección y la suma de dos rectas afines en un espacio afín.
24. Probar que en un plano afín dos rectas son, o bien iguales, o paralelas y distintas, o se cortan en un único punto.
25. Se consideran las rectas  $S_a$  y  $T_b$  de  $\mathbb{R}^3$  siguientes:

$$S_a = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / x - 2z = a, y + z = 3\},$$

$$T_b = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / x + z = 1, y - 2z = b\},$$

donde  $a$  y  $b$  son parámetros reales. ¿Qué condiciones deben de cumplir  $a$  y  $b$  para que  $S_a$  y  $T_b$  estén dentro de un mismo plano afín, es decir, sean copланarias? Calcular los valores de  $a$  y  $b$  para que el plano que contiene a  $S_a$  y  $T_b$  pase por  $p = (1, 1, 1)$ .

26. Sea  $S$  una recta afín y  $T$  un subespacio afín con  $\dim T \geq 2$  en un espacio afín  $A$ . Probar que se da una y sólo una de las siguientes posibilidades:
- a)  $S \cap T = \emptyset$ ,
  - b)  $S \cap T$  es un único punto,
  - c)  $S \subseteq T$ .

En particular, deducir que si  $T$  es un hiperplano afín, entonces a) implica que  $S$  es paralela a  $T$ . Además, si  $\dim A = 3$  entonces  $S$  es paralela a  $T$  o  $S \cap T$  es un único punto.

27. Sean  $S$  y  $T$  dos hiperplanos afines en un espacio afín  $A$  de dimensión  $n \geq 2$ . Probar que se da una y sólo una de las siguientes posibilidades:
- a)  $S \cap T = \emptyset$  y los hiperplanos afines son paralelos,
  - b)  $\dim(S \cap T) = n - 2$ ,
  - c)  $S = T$ .
28. Sea  $A$  un espacio afín con  $\dim A \geq 3$ . Decidir de forma razonada si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas:
- a) Tres planos afines distintos no se cortan, o bien su intersección es un punto o una recta afín.
  - b) Dos planos afines distintos son paralelos o su intersección contiene al menos una recta afín.
  - c) Dos rectas afines  $S = p + L(u)$  y  $T = q + L(v)$  en  $A$  se cruzan si y sólo si los vectores  $\{u, v, \vec{pq}\}$  son linealmente independientes.
29. En cada uno de estos casos decidir de forma razonada si  $f$  es o no una aplicación afín

- a)  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ ,  $f(x, y) = (x, y^3, x + y)$ .  
 b)  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ ,  $f(x, y, z) = (x + y, x - z + 1)$ .  
 c)  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ ,  $f(x, y, z) = (x, y, z^5 - 1)$ .  
 d)  $f : \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(A) = \text{traza}(A) + 1$ .  
 e)  $f : \mathbb{R}[x] \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(p(x)) = \text{grado}(p(x))$ .
30. (Producto de aplicaciones afines). Sean  $A_1$ ,  $A_2$ ,  $A'_1$  y  $A'_2$  espacios afines y  $f_i : A_i \rightarrow A'_i$  una aplicación afín para cada  $i = 1, 2$ . Demostrar que la aplicación  $f_1 \times f_2 : A_1 \times A_2 \rightarrow A'_1 \times A'_2$  dada por  $(f_1 \times f_2)(p_1, p_2) = (f_1(p_1), f_2(p_2))$  es una aplicación afín y  $\overrightarrow{f_1 \times f_2} = \vec{f_1} \times \vec{f_2}$ .
31. Dadas  $f : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}'$  aplicación afín,  $q \in \mathcal{A}$  y  $h : \overrightarrow{\mathcal{A}} \rightarrow \overrightarrow{\mathcal{A}'}$  aplicación lineal, probar que la aplicación
- $$g : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}', \quad g(p) = f(p) + h(\vec{qp})$$
- es la única aplicación afín con  $g(q) = f(q)$  y  $\vec{g} = h + \vec{f}$ .
32. Se considera la aplicación  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$  dada por:
- $$f(x, y, z) = (2x - y + 3z - 1, -x - y + z + 1).$$
- a) Demostrar que  $f$  es una aplicación afín y calcular  $\vec{f}$ .  
 b) Estudiar si  $f$  es inyectiva, sobreyectiva o biyectiva.  
 c) Dadas las rectas afines  $S = (1, 1, 2) + L((2, 0, 1))$  y  $T = (0, 1, 1) + L((1, 0, -1))$ , calcular  $f(S) \cap f(T)$ .  
 d) Calcular  $f^{-1}(\{(1, 1)\})$ .
33. Consideremos en  $\mathbb{R}^3$  los planos
- $$S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : -x - y + z = 1\}, \quad S' = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x + y + z = -1\}$$
- y las rectas
- $$T = (0, 0, 1) + L(\{(1, 1, 0)\}), \quad T' = (0, 0, -1) + L(\{(1, 1, 0)\}).$$
- Justifica que existe una afinidad  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  tal que  $f(S) = S'$  y  $f(T) = T'$ . Determina la expresión matricial de  $f$  en el sistema de referencia usual  $\mathcal{R}_0$  de  $\mathbb{R}^3$ .
34. Determinar la expresión matricial en el sistema de referencia usual de la aplicación afín  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  que tiene como puntos fijos a los del plano afín  $x + y - z = -2$ , y tal que  $f(0, 0, 0) = (1, 2, -1)$ . ¿Es  $f$  un isomorfismo afín?
35. Consideremos el sistema de referencia afín en  $\mathbb{R}^2$  dado por  $R = \{(1, 1), (2, 1), (2, 2)\}$ . Sea  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  la única aplicación afín tal que:

$$f(1, 1) = (-1, 3), \quad f(2, 1) = (-1, 4), \quad f(2, 2) = (-3, 7).$$

- a) Obtener la expresión matricial de  $f$  con respecto a  $R$ . Calcular  $f(4, 4)$ .  
 b) Obtener la expresión matricial de  $f$  y  $f \circ f$  con respecto a  $R_u$ .

- c) Determinar el conjunto de puntos fijos de  $f$ .
36. Sea  $f : A \rightarrow A$  un endomorfismo afín y  $S = p_0 + \overrightarrow{S}$  un subespacio afín. Se dice que  $S$  es *invariante por  $f$*  si  $f(S) \subseteq S$ . Demostrar que  $S$  es invariante por  $f$  si y solo si  $\vec{f}(\overrightarrow{S}) \subseteq \overrightarrow{S}$  y  $\overrightarrow{p_0 f(p_0)} \in \overrightarrow{S}$ .
37. Determinar el conjunto de puntos fijos de la aplicación afín  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  definida por  

$$f(x, y, z) = (x + 3y + 3/2, -2y - 3/2, -4x - 4y - z - 2).$$
38. Consideremos los subespacios afines de  $\mathbb{R}^3$  dados por  

$$S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x - y + z = 2\}, \quad T = (0, -1, 0) + L(\{(1, 1, 1)\}).$$
- Comprueba que  $S$  y  $T$  son suplementarios (o complementarios) afines. Calcula la proyección y simetría afines  $\pi_{S,T}, \sigma_{S,T}$  sobre  $S$  en la dirección de  $T$ , dando sus ecuaciones matriciales respecto del sistema de referencia canónico  $\mathcal{R}_0 = \{(0, 0, 0), B_0\}$  ( $B_0$  base canónica de  $\mathbb{R}^3$ ) de  $\mathbb{R}^3$ . Haz lo mismo para  $\pi_{T,S}, \sigma_{T,S}$ .
39. Probar que la aplicación afín  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  definida por  $f(x, y) = (1 - 2x, 3 - 2y)$  es una homotecia. Calcular su centro y su razón.
40. Calcular explícitamente una homotecia en  $\mathbb{R}^3$  de centro  $(a, b, c)$  y razón  $r \neq 0, 1$ .
41. Sea  $f : A \rightarrow A$  un endomorfismo afín de un plano afín. Supongamos que existen tres rectas afines  $S_1, S_2$  y  $S_3$  en  $A$  de las que no hay dos paralelas, y tales que  $f(S_i) = S_i$  para cada  $i = 1, 2, 3$ . Demostrar que  $f$  es la identidad o una homotecia de razón  $\lambda \neq 1$ .
42. Demostrar las siguientes afirmaciones:
- a) Una homotecia  $h \neq I_A$  queda determinada por la imagen de dos puntos.
  - b) Si  $A$  es una recta afín y  $f : A \rightarrow A$  es una aplicación afín entonces, o bien  $f$  es constante, o es una traslación, o es una homotecia.
  - c) Las constantes, las traslaciones y las homotecias son los únicos endomorfismos afines  $f : A \rightarrow A$  tales que  $f(S)$  es paralelo a  $S$ , para todo subespacio afín  $S$  de  $A$ .
43. Decidir de manera razonada si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas.
- a) La composición de una traslación  $t$  y de una homotecia  $h \neq I_A$  es una homotecia. En caso afirmativo, calcular el centro y la razón de la homotecia resultante.
  - b) La composición de dos homotecias es una homotecia. De ser así, calcular la razón de la homotecia resultante. Cuando ésta sea distinta de 1, calcular también su centro.
  - c) Si  $f : A \rightarrow A'$  es una aplicación afín y  $p, q, r \in A$  son tres puntos alineados (esto es, contenidos en una línea recta), entonces  $f(p), f(q), f(r)$  son tres puntos alineados de  $A'$ .

- d) Si  $A$  es un espacio afín y  $\dim(A) = n$ , entonces existe un isomorfismo afín  $f : A \rightarrow \mathbb{R}^n$ .
- e) Toda aplicación afín de  $\mathbb{R}^n$  en  $\mathbb{R}^{n'}$  es diferenciable. Además, todo isomorfismo afín de  $\mathbb{R}^n$  en  $\mathbb{R}^n$  es un difeomorfismo.
- f) Si una aplicación afín  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  tiene al menos 4 puntos fijos afínnamente independientes, entonces es la identidad.
44. En un espacio afín  $\mathcal{A}$  se consideran  $(n + 1)$ -puntos  $\{p_0, \dots, p_n\} \subseteq \mathcal{A}$  y fijemos  $O \in \mathcal{A}$ . Se define el baricentro de estos puntos como
- $$b = O + \frac{1}{n+1} \sum_{j=0}^n \overrightarrow{Op_j}.$$
- Probar que  $b$  no depende del punto  $O$  fijado. Probar además que si  $f : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}'$  es afín entonces  $f(b)$  es el baricentro de  $\{f(p_0), \dots, f(p_n)\}$ .
45. Probar que los puntos medios de los lados de un triángulo  $\{a, b, c\}$  (tres puntos afínnamente independientes) en un espacio afín  $\mathcal{A}$  forman un triángulo cuyos lados son paralelos a los de  $\{a, b, c\}$  y cuyo baricentro es el mismo que el de  $\{a, b, c\}$ .
46. Sea  $\{a, b, c\}$  un triángulo. Probar que las paralelas a dos de los lados que pasan por el baricentro dividen al tercer lado en tres segmentos de la misma longitud (Si tres puntos  $p, q, r$  están alineados, diremos que los segmentos  $[p, q], [q, r]$  tienen la misma longitud si  $\vec{pq} = \pm \vec{qr}$ ).
47. Sea  $\{a, b, c\}$  un triángulo en un espacio afín  $\mathcal{A}$  con baricentro  $o$ . Demostrar que la homotecia  $h = h_{o,-1/2}$  lleva cada vértice de  $\{a, b, c\}$  en el punto medio de su lado opuesto.
48. Dado un triángulo  $\{a, b, c\}$  y  $\{a', b', c'\} = \{m_{ab}, m_{ac}, m_{bc}\}$  el triángulo formado por los puntos medios de sus lados, describir las siguientes aplicaciones afines:
- $h_{b',2} \circ h_{a,3/4} \circ h_{c,2/3}$ .
  - $h_{a',-1} \circ h_{b',-1} \circ h_{c',-1}$ .
  - $h_{a',-1} \circ h_{b',-1}$ .

Como siempre  $h_{a,r}$  denota la homotecia de centro  $a$  y razón  $r$ .

49. Una cuaterna de puntos  $\{a, b, c, d\}$  se dice un cuadrilátero si no contiene tres puntos alineados; si además sus lados opuestos  $\langle\{a, b\}\rangle, \langle\{d, c\}\rangle$  y  $\langle\{a, d\}\rangle, \langle\{b, c\}\rangle$  son paralelos entonces la cuaterna se dice ser un paralelogramo. Probar que si  $\{a, b, c, d\}$  es un paralelogramo entonces  $\vec{ab} = \vec{dc}$  y  $\vec{bc} = \vec{ad}$ .

# TEMA 2: Espacios afines euclídeos

El impulso civilizador que supuso el helenismo, periodo iniciado por Alejandro Magno en el siglo IV AC, tuvo entre otras muchas consecuencias la creación de importantes centros de conocimiento en el área mediterránea, el más conocido de ellos la ciudad de Alejandría en el norte de Egipto. En este contexto histórico se inscriben *Los Elementos*, uno de los escritos más influyentes de la Historia Occidental atribuido a Euclides de Alejandría alrededor del año 300 A.C. La obra consiste de 13 tomos en los que se describe de forma razonablemente rigurosa la geometría de su época. Euclides compiló con bastante acierto conceptos, definiciones, postulados, teoremas y corolarios acerca de rectas, ángulos, triángulos, circunferencias y otras figuras planas y del espacio. Durante muchos siglos se creyó que la Geometría Euclídea era la única posible, fracasándose en múltiples ocasiones en el intento de demostrar el V Postulado de Euclides (por un punto exterior a una recta pasa una única paralela) a partir de los otros cuatro postulados previos sobre los que se cimentaban los pilares lógicos de Los Elementos. De hecho, la Geometría Euclídea llegó a influir en los tratados de grandes pensadores como Descartes o Kant. Finalmente, a principios del s. XIX y de forma independiente, Karl Gauss, Nicolai Lobachevsky y Janos Bolyai crearon las Geometrías Elíptica e Hiperbólica, en las que el V Postulado de Euclides no se sostiene (aunque sí el resto de la arquitectura lógica de la geometría). Éste fue el nacimiento de las geometrías no euclidianas, y en definitiva, el origen de la geometría moderna. En este Tema 2 del curso nos vamos a dedicar a estudiar la Geometría Euclídea desde un punto de vista actual, más cartesiano, revisando algunas de las aportaciones más importantes a lo largo de estos 23 siglos con un lenguaje mucho más estructurado desde la modernidad matemática. Por ejemplo, Euclides desconocía el concepto de aplicación, y por tanto le era imposible interpretar la primitiva idea de «igualdad de figuras» a través del concepto de movimiento rígido.

## 3. EL ESPACIO AFÍN EUCLÍDEO

En esta sección presentaremos la formulación moderna del concepto de espacio afín euclídeo o espacio afín dotado de una métrica euclíadiana en su variedad de dirección.

### 3.1. Repaso de espacios vectoriales métricos euclidianos

Para un correcto tratamiento de lo que sigue, necesitamos recordar algunas notaciones y conceptos básicos de la teoría de espacios vectoriales euclídeos estudiadas en cursos anteriores.

En lo que sigue  $V$  será un espacio vectorial real de  $\dim V = n$ .

Si  $\mathcal{B}$  denota la familia de todas las bases ordenadas de  $V$ , dos bases  $B, B' \in \mathcal{B}$  se dirá que tienen el mismo carácter de orientabilidad, y escribiremos  $B \sim B'$ , si

$$\det M(\text{Id}_V, B, B') > 0.$$

La relación  $\sim$  es de equivalencia en  $\mathcal{B}$  y el cociente  $\mathcal{B}/\sim$  tiene exactamente dos clases de equivalencia. En efecto, si  $B = \{v_1, \dots, v_n\} \in \mathcal{B}$  y  $B' = \{-v_1, v_2, \dots, v_n\}$ , es fácil ver que  $B \not\sim B'$  y  $(\mathcal{B}/\sim) = \{[B], [B']\}$ .

**Definición 3.1** Una orientación en  $V$  es una clase de equivalencia  $\mathcal{O} \in \mathcal{B}/\sim$ . Un par  $(V, \mathcal{O})$ , donde  $\mathcal{O}$  es una orientación en  $V$ , es un espacio vectorial orientado.

Una base ordenada  $B$  de  $V$  se dice positiva en un espacio vectorial orientado  $(V, \mathcal{O})$  si  $[B] = \mathcal{O}$ , y negativa si  $[B] \neq \mathcal{O}$ .

Recordemos que un espacio vectorial euclídeo es un par  $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ , donde  $V$  es un espacio vectorial real y  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  es una métrica euclídea en  $V$ , esto es, una aplicación bilineal y simétrica

$$\langle \cdot, \cdot \rangle: V \times V \rightarrow \mathbb{R}$$

satisfaciendo

$$\langle v, v \rangle \geq 0 \quad \forall v \in V \quad \text{y} \quad \langle v, v \rangle = 0 \iff v = \vec{0}.$$

Denotaremos por

$$\| \cdot \|: V \rightarrow \mathbb{R}, \quad \|v\| = +\sqrt{\langle v, v \rangle}.$$

su norma asociada a  $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ .

**Propiedades 3.2** Sea  $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$  un espacio vectorial euclídeo. Se satisfacen las siguientes propiedades:

- (a)  $\|v\| \geq 0 \quad \forall v \in V$ , y la igualdad se da si y solo si  $v = \vec{0}$ .
- (b)  $\|\lambda v\| = |\lambda| \|v\| \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}, v \in V$ .
- (c) **Desigualdad de Cauchy-Schwarz:**  $|\langle u, v \rangle| \leq \|u\| \|v\| \quad \forall u, v \in V$ , y la igualdad se da si y solo si  $\{u, v\}$  son linealmente dependientes.
- (d) **Desigualdad triangular:**  $\|u + v\| \leq \|u\| + \|v\| \quad \forall u, v \in V$ .

La ortogonalidad de vectores  $u, v$  en  $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$  se define

$$v \perp u \iff \langle v, u \rangle = 0.$$

Si  $U \subseteq V$  es un subespacio vectorial, su complemento ortogonal  $U^\perp$  de  $U$  en  $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$  viene dado por

$$U^\perp = \{v \in V: v \perp u \quad \forall u \in U\}.$$

De forma análoga, la ortogonalidad de subespacios vectoriales  $U, W \subseteq V$  se define

$$U \perp W \iff u \perp w \quad \forall u \in U, \forall w \in W \iff U \subseteq W^\perp \iff W \subseteq U^\perp.$$

**Propiedades 3.3** Dado  $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$  un espacio vectorial euclídeo, son ciertas las satisfacon propiedades:

- (a) Si  $X \subseteq V$  es un subconjunto arbitrario entonces  $X^\perp = \{v \in V: v \perp x \quad \forall x \in X\}$  es un subespacio vectorial de  $V$ . Además  $L(X)^\perp = X^\perp$ , donde como siempre  $L(X)$  representa la intersección de todos los subespacios vectoriales de  $V$  que contienen a  $X$  (menor subespacio vectorial de  $V$  contenido a  $X$ ).
- (b)  $U \subseteq W \iff W^\perp \subseteq U^\perp$  para cualesquiera subespacios  $U, W \subseteq V$ .
- (c)  $V = U \oplus U^\perp$  para todo subespacio  $U \subseteq V$ .
- (d)  $(U^\perp)^\perp = U$  para todo subespacio  $U \subseteq V$ .
- (e)  $(U + W)^\perp = U^\perp \cap W^\perp$  y  $(U \cap W)^\perp = U^\perp + W^\perp$  para cualesquiera subespacios  $U, W \subseteq V$ .

El hecho de que  $U$  y  $U^\perp$  sean subespacios vectoriales supplementarios en  $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$  da sentido a la siguiente definición.

**Notación 3.4** La proyección  $\vec{\pi}_{U,U^\perp}$  y la simetría  $\vec{\sigma}_{U,U^\perp}$  sobre  $U$  en la dirección de  $U^\perp$  en un espacio vectorial euclídeo  $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$  se denotan

$$\vec{\pi}_U^\perp \equiv \vec{\pi}_{U,U^\perp}, \quad \vec{\sigma}_U^\perp \equiv \vec{\sigma}_{U,U^\perp},$$

y se denominan proyección y simetría ortogonales sobre  $U$  en  $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ , respectivamente.

Las bases naturales para  $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$  son las ortonormales, esto es, las bases  $B = \{e_1, \dots, e_n\}$  para las que la matriz de la métrica

$$M(\langle \cdot, \cdot \rangle, B) := (\langle e_i, e_j \rangle)_{i,j=1,\dots,n} = I_n.$$

El grupo de matrices ortogonales de orden  $n$

$$O(n, \mathbb{R}) := \{A \in GL(n, \mathbb{R}) : A \cdot A^t = I_n\}$$

gobierna la geometría de los espacios vectoriales euclidianos  $n$ -dimensionales. De hecho, si  $B$  es una base ortonormal de  $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$  y  $B'$  es una base de  $V$  se tiene que

$$B' \text{ es ortonormal en } (V, \langle \cdot, \cdot \rangle) \iff M(I_V, B, B') \in O(n, \mathbb{R}).$$

**Definición 3.5** Sea  $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle, \mathcal{O})$  un plano euclídeo orientado ( $\dim V = 2$ ), sea  $\{u_1, u_2\}$  una dupla ordenada de vectores de  $V \setminus \{\vec{0}\}$ , y sea  $B = \{w_1, w_2\}$  la única base ortonormal positiva en  $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle, \mathcal{O})$  con  $w_1 = \frac{1}{\|u_1\|}u_1$ . El ángulo orientado que forman  $u_1$  y  $u_2$  en  $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle, \mathcal{O})$  es el único elemento  $\alpha$  del grupo aditivo  $\mathbb{R}/(2\pi\mathbb{Z})$  tal que

$$u_2 = \|u_2\|(\cos(\alpha)w_1 + \sin(\alpha)w_2).$$

Usualmente se considera  $\alpha \in \mathbb{R}$ , entendiendo que como número real está determinado salvo la suma de un múltiplo entero de  $2\pi$ . También usaremos la notación

$$\angle_o(u_1, u_2) := \alpha \in \mathbb{R}/(2\pi\mathbb{Z}).$$

Recordemos que  $\mathbb{R}/(2\pi\mathbb{Z})$  como grupo aditivo es el cociente del grupo  $(\mathbb{R}, +)$  por el subgrupo  $2\pi\mathbb{Z} \leq \mathbb{R}$ . La existencia y unicidad del ángulo orientado está garantizada por el hecho de que  $\frac{1}{\|u_2\|}u_2 = xw_1 + yw_2$  con  $x^2 + y^2 = 1$ , y por tanto del análisis existe de un único  $\alpha \in \mathbb{R}/(2\pi\mathbb{Z})$  con  $\cos(\alpha) = x, \sin(\alpha) = y$ .

Es inmediato que

$$u_1 \perp u_2 \iff \cos(\angle_o(u_1, u_2)) = 0 \iff \angle_o(u_1, u_2) = \pm\pi/2 \pmod{2\pi}.$$

**Propiedades 3.6** Los siguientes enunciados son ciertos:

- (I) Si  $u_1, u_2, u_3 \in V \setminus \{\vec{0}\}$  entonces  $\angle_o(u_1, u_2) + \angle_o(u_2, u_3) = \angle_o(u_1, u_3)$ . En particular,  $\angle_o(u_1, u_2) = -\angle_o(u_2, u_1)$  para todo  $u_1, u_2 \in V \setminus \{\vec{0}\}$ .
- (II) Si  $B$  es una base ortonormal positiva de  $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle, \mathcal{O})$  y  $u_1, u_2 \in V \setminus \{\vec{0}\}$ , entonces

$$\det_B(u_1, u_2) := \det((u_1)_B, (u_2)_B) = \|u_1\| \|u_2\| \sin(\angle_o(u_1, u_2)),$$

donde  $\det_B$  es el tensor alternado  $\varphi_1 \wedge \varphi_2 := \varphi_1 \otimes \varphi_2 - \varphi_2 \otimes \varphi_1 \in \Lambda_2(V)$  generado a partir de la base  $B^* = \{\varphi_1, \varphi_2\}$  dual de  $B$  en el espacio dual  $V^*$  de  $V$ .

DEMOSTRACIÓN: Escribamos  $\alpha = \angle_o(u_1, u_2)$  y  $\beta = \angle_o(u_2, u_3)$

Si  $B = \{w_1, w_2\}$  es la única base ortonormal positiva en  $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle, \mathcal{O})$  con  $w_1 = \frac{1}{\|u_1\|}u_1$ , sabemos que

$$\frac{1}{\|u_2\|}u_2 = (\cos(\alpha)w_1 + \sin(\alpha)w_2).$$

Observemos que la base

$$B' = \{w'_1 = \frac{1}{\|u_2\|}u_2, w'_2 = -\sin(\alpha)w_1 + \cos(\alpha)w_2\}$$

satisface  $\det M(\text{Id}_V, B, B') = \sin(\alpha)^2 + \cos(\alpha)^2 = 1 > 0$ , y por tanto es también ortonormal y positiva. Por tanto, por definición,

$$\frac{1}{\|u_3\|}u_3 = (\cos(\beta)w'_1 + \sin(\beta)w'_2),$$

esto es

$$\begin{aligned} \frac{1}{\|u_3\|}u_3 &= (\cos(\beta)(\cos(\alpha)w_1 + \sin(\alpha)w_2) + \sin(\beta)(-\sin(\alpha)w_1 + \cos(\alpha)w_2)) = \\ &= ((\cos(\beta)\cos(\alpha) - \sin(\beta)\sin(\alpha))w_1 + (\cos(\beta)\sin(\alpha) + \sin(\beta)\cos(\alpha))w_2), \end{aligned}$$

de donde

$$\frac{1}{\|u_3\|}u_3 = (\cos(\alpha + \beta)w_1 + \sin(\alpha + \beta)w_2)$$

y  $\angle_o(u_1, u_3) = \alpha + \beta$ , lo que prueba (i).

Para demostrar (ii), observemos que

$$\begin{aligned} \det_B(u_1, u_2) &:= \det((u_1)_B, (u_2)_B) = \det_B(\|u_1\|w_1, \|u_2\|(\cos(\alpha)w_1 + \sin(\alpha)w_2)) = \\ &= \|u_1\|\|u_2\| \det_B(w_1, \cos(\alpha)w_1 + \sin(\alpha)w_2) = \|u_1\|\|u_2\| \sin(\alpha) \det_B(w_1, w_2), \end{aligned}$$

y como  $\det_B(w_1, w_2) = \det(M(\text{Id}_V, B', B)) = 1$  para  $B' = \{w_1, w_2\}$  (usar que  $M(\text{Id}_V, B', B) \in O_2(\mathbb{R})$  y ambas bases son positivas), finalmente queda  $\det_B(u_1, u_2) = \|u_1\|\|u_2\| \sin(\alpha)$ .

■

La desigualdad de Cauchy-Schwarz  $|\langle u_1, u_2 \rangle| \leq \|u_1\|\|u_2\|$  y el análisis real garantizan la existencia de un único número real  $\beta \in [0, \pi]$  tal que  $\langle u_1, u_2 \rangle = \|u_1\|\|u_2\| \cos(\beta)$  para cualesquiera  $u_1, u_2 \in V \setminus \{\vec{0}\}$ .

**Definición 3.7** Dados dos vectores  $u_1, u_2 \in V \setminus \{\vec{0}\}$  en un espacio vectorial euclíadiano  $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ , el ángulo no orientado que forman es el único número real  $\angle(u_1, u_2) \in [0, \pi]$  tal que  $\langle u_1, u_2 \rangle = \|u_1\|\|u_2\| \cos(\angle(u_1, u_2))$ .

Dados  $u_1, u_2 \in V \setminus \{\vec{0}\}$ , es trivial comprobar que:

- $\angle(u_1, u_2) = \angle(u_2, u_1)$  y  $\angle(u_1, -u_2) = \pi - \angle(u_1, u_2)$ .
- $u_1 \perp u_2 \iff \angle(u_1, u_2) = \frac{\pi}{2}$ .
- Si  $\mathcal{O}$  es una orientación en  $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$  y  $\angle_o(u_1, u_2)$  es la determinación en  $[0, 2\pi[$  del ángulo orientado que forman  $u_1$  y  $u_2$ , entonces

$$\angle(u_1, u_2) = \min\{\angle_o(u_1, u_2), 2\pi - \angle_o(u_1, u_2)\}.$$

En efecto, como  $u_2 = \|u_2\|(\cos(\angle_o(u_1, u_2))w_1 + \sin(\angle_o(u_1, u_2))w_2)$  para  $\{w_1 = \frac{u_1}{\|u_1\|}, w_2\}$  base ortonormal positiva de  $(V, \mathcal{O}, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ , es inmediato que  $\langle u_1, u_2 \rangle = \|u_1\|\|u_2\| \cos(\angle_o(u_1, u_2))$ , de donde  $\cos(\angle_o(u_1, u_2)) = \cos(\angle(u_1, u_2))$ . Como  $\angle(u_1, u_2) \in [0, \pi]$ , de aquí el resultado.

## 3.2. Espacios afines euclídeos: distancia, ángulo y perpendicularidad

Comencemos con la definición fundamental de este tema.

**Definición 3.8** Un espacio afín euclídeo es una cuaterna  $(\mathcal{A}, \overrightarrow{\mathcal{A}}, \rightarrow, \langle , \rangle)$  donde  $(\mathcal{A}, \overrightarrow{\mathcal{A}}, \rightarrow)$  es un espacio afín y  $(\overrightarrow{\mathcal{A}}, \langle , \rangle)$  es un espacio vectorial euclídeo. Si no hay lugar para la ambigüedad, es común relajar la notación y escribir  $(\mathcal{A}, \langle , \rangle)$  en vez de  $(\mathcal{A}, \overrightarrow{\mathcal{A}}, \rightarrow, \langle , \rangle)$ .

Por ejemplo, si  $(V, \langle , \rangle)$  es un espacio vectorial euclídeo, la cuaterna  $(V, V, \rightarrow, \langle , \rangle)$  es un espacio afín euclidiano, donde como siempre  $(V, V, \rightarrow)$  es el espacio afín natural asociado al espacio vectorial  $V$ . Se dirá que  $(V, V, \rightarrow, \langle , \rangle)$  es el espacio afín euclídeo natural o canónico asociado al espacio vectorial euclidiano  $(V, \langle , \rangle)$ . El ejemplo más sencillo es el espacio afín euclídeo usual  $(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n, \rightarrow, \langle , \rangle)$ , donde  $\langle , \rangle$  el producto escalar clásico:

$$\langle x, y \rangle = x^t \cdot y, \quad x, y \in \mathbb{R}^n \text{ (vectores columna).}$$

**Definición 3.9** La función distancia en un espacio afín euclídeo  $(\mathcal{A}, \langle , \rangle)$  se define:

$$d: \mathcal{A} \times \mathcal{A} \rightarrow \mathbb{R}, \quad d(p, q) = \|\overrightarrow{pq}\|,$$

donde  $\|\cdot\|$  es la norma en  $(\overrightarrow{\mathcal{A}}, \langle , \rangle)$ .

Como consecuencia de la axiomática de espacio afín y de las propiedades de la norma  $\|\cdot\|$ , es inmediato comprobar que  $(\mathcal{A}, d)$  es un espacio métrico, esto es:

- (I)  $d(p, q) \geq 0$  para todo  $p, q \in \mathcal{A}$ , y se da la igualdad si y solo si  $p = q$ .
- (II)  $d(p, q) = d(q, p)$  para todo  $p, q \in \mathcal{A}$ .
- (III)  $d(p, r) \leq d(p, q) + d(q, r)$  para todo  $p, q, r \in \mathcal{A}$ .

**Definición 3.10** Dos subespacios afines  $S, T$  en un espacio afín euclídeo  $(\mathcal{A}, \langle , \rangle)$  se dicen perpendiculares (u ortogonales) si  $\vec{S} \perp \vec{T}$  en  $(\overrightarrow{\mathcal{A}}, \langle , \rangle)$ . En ese caso se escribiremos  $S \perp T$ .

Presentamos a continuación los sistemas de referencia naturales en los espacios afines euclídeos, llamados rectangulares. Precisemos la definición.

**Definición 3.11** Un sistema de referencia  $\mathcal{R} = \{p_0, B\}$  en un espacio afín euclídeo  $(\mathcal{A}, \langle , \rangle)$  se dice rectangular u ortonormal si la base de sus direcciones  $B$  es una base ortonormal de  $(\overrightarrow{\mathcal{A}}, \langle , \rangle)$ .

Como consecuencia de la definición, si  $\mathcal{R}, \mathcal{R}'$  son sistemas de referencia en  $\mathcal{A}$  y  $\mathcal{R}$  es rectangular, entonces

$$\mathcal{R}' \text{ es rectangular} \iff M(\text{Id}_V, B, B') \in O(n, \mathbb{R}) \quad (n = \dim \mathcal{A}).$$

Por tanto, si  $\mathcal{R}, \mathcal{R}'$  son sistemas de referencia rectangulares,

$$M(\text{Id}_{\mathcal{A}}, \mathcal{R}, \mathcal{R}') = \left( \begin{array}{c|c} 1 & 0 \\ \hline b & A \end{array} \right), \quad A \in O(n, \mathbb{R}).$$

**Definición 3.12** Si  $S, T$  son rectas secantes en un espacio afín euclídeo  $(\mathcal{A}, \langle \cdot, \cdot \rangle)$  y  $\vec{S} = L(\{u\})$ ,  $\vec{T} = L(\{v\})$ , el ángulo que forman  $S$  y  $T$  en  $(\mathcal{A}, \langle \cdot, \cdot \rangle)$  es el número

$$\angle(S, T) := \min\{\angle(u, v), \angle(u, -v)\} = \min\{\angle(u, v), \pi - \angle(u, v)\} \in [0, \pi/2],$$

donde los ángulos no orientados  $\angle(u, v), \angle(u, -v) \in [0, \pi]$  se calculan en  $(\overrightarrow{\mathcal{A}}, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ .

A tenor de la anterior definición, es evidente que

**Proposición 3.13** Si  $S, R$  son dos rectas paralelas en  $(\mathcal{A}, \langle \cdot, \cdot \rangle)$  y  $T$  es secante a ambas entonces  $\angle(S, T) = \angle(R, T)$ .

**Proposición 3.14 (Complemento ortogonal)** Si  $S$  es un subespacio afín en  $(\mathcal{A}, \langle \cdot, \cdot \rangle)$  y  $p \in \mathcal{A}$ , entonces existe un único subespacio afín  $T$  que contiene a  $p$ , es suplemento de  $S$  y es perpendicular a  $S$ :

$$p \in T, \quad \dim S + \dim T = \dim \mathcal{A}, \quad T \perp S.$$

**DEMOSTRACIÓN:** Veamos que  $T = p + \vec{S}^\perp$  resuelve la proposición. En efecto, claramente  $p \in T$ ,  $S \perp T$ , y  $\dim S + \dim T = \dim \mathcal{A}$  toda vez que  $\overrightarrow{\mathcal{A}} = \vec{S} \oplus \vec{S}^\perp$ . Solo resta comprobar la unicidad. Supongamos que  $T'$  satisface también la tesis de la proposición. La condición  $T' \perp S$  implica  $\vec{T}' \subseteq \vec{S}^\perp$ , mientras que la identidad  $\dim S + \dim T' = \dim \mathcal{A}$  garantiza que  $\vec{T}' = \vec{S}^\perp$  toda vez que  $\dim \vec{T}' = \dim T' = \dim \mathcal{A} - \dim S = \dim \overrightarrow{\mathcal{A}} - \dim \vec{S} = \dim \vec{S}^\perp$ . Como  $p \in T'$  concluimos que  $T' = p + \vec{S} = T$ . ■

Como hemos visto en su demostración, el subespacio  $T$  en la tesis de la proposición anterior está caracterizado por las condiciones

$$p \in T, \quad \vec{T} = \vec{S}^\perp.$$

Se le suele denominar el complemento (o suplemento) ortogonal a  $S$  que pasa por  $p$ .

**Definición 3.15** Sea  $S$  es un subespacio afín en  $(\mathcal{A}, \langle \cdot, \cdot \rangle)$  y  $T$  es un complemento ortogonal de  $S$ . La proyección afín

$$\pi_S^\perp: \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}, \quad \pi_S^\perp := \pi_{S,T},$$

(que no depende de complemento ortogonal  $T$  utilizado) es conocida como la proyección ortogonal sobre  $S$  en  $(\mathcal{A}, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ . Análogamente, la simetría afín

$$\sigma_S^\perp: \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}, \quad \sigma_S^\perp := \sigma_{S,T},$$

no depende de complemento ortogonal  $T$  utilizado, y es conocida como la simetría ortogonal sobre  $S$  en  $(\mathcal{A}, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ .

Tiene sentido hablar de distancia entre subespacios afines  $S, T$  en un espacio afín euclídeo  $(\mathcal{A}, \langle \cdot, \cdot \rangle)$  de acuerdo con la siguiente definición

$$d(S, T) := \inf\{d(p, q): p \in S, q \in T\}.$$

La siguiente proposición nos proporciona una interpretación geométrica de este concepto, además de un mecanismo de cálculo directo. Entre otras cosas nos dirá que  $d(S, T)$  es de hecho un mínimo, y que éste se alcanza justo en puntos formando vectores ortogonales a ambos subespacios.

**Proposición 3.16** Sean  $S, T$  subespacios afines de un espacio afín euclídeo  $(\mathcal{A}, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ . Entonces

- (I) Existen puntos  $p_0 \in S, q_0 \in T$  tales que  $\overrightarrow{p_0q_0} \in \vec{S}^\perp \cap \vec{T}^\perp$ .
- (II) Si  $p_0 \in S, q_0 \in T$  son tales que  $\overrightarrow{p_0q_0} \in \vec{S}^\perp \cap \vec{T}^\perp$  entonces  $d(S, T) = d(p_0, q_0)$ .

Además, los puntos  $p_0 \in S$  y  $q_0 \in T$  en las anteriores condiciones son únicos si y sólo si  $\vec{S} \cap \vec{T} = \{\vec{0}\}$ .

DEMOSTRACIÓN: Escribiendo  $S = p + \vec{S}$ ,  $T = q + \vec{T}$  y usando que  $\overrightarrow{pq} \in \vec{\mathcal{A}} = (\vec{S} + \vec{T}) \oplus (\vec{S} + \vec{T})^\perp$ , podemos encontrar  $u \in \vec{S}$ ,  $w \in \vec{T}$  y  $v \in (\vec{S} + \vec{T})^\perp$  tales que

$$\overrightarrow{pq} = u + w + v.$$

Si elegimos  $p_0 = p + u \in S$  y  $q_0 = q - w \in T$ , un cálculo directo da

$$\overrightarrow{p_0q_0} = \overrightarrow{(p+u)(q-w)} = \overrightarrow{pq} - w - u = \lambda v \in (\vec{S} + \vec{T})^\perp = \vec{S}^\perp \cap \vec{T}^\perp,$$

probando (i).

Para probar (ii), supongamos que  $p_0 \in S, q_0 \in T$  son tales que  $\overrightarrow{p_0q_0} \in \vec{S}^\perp \cap \vec{T}^\perp$ . Si tomamos  $p \in S$  y  $q \in T$  arbitrarios,

$$\begin{aligned} d(p, q)^2 &= \|\overrightarrow{pq}\|^2 = \|\overrightarrow{pp_0} + \overrightarrow{p_0q_0} + \overrightarrow{q_0q}\|^2 = \langle \overrightarrow{pp_0} + \overrightarrow{p_0q_0} + \overrightarrow{q_0q}, \overrightarrow{pp_0} + \overrightarrow{p_0q_0} + \overrightarrow{q_0q} \rangle = \\ &\|\overrightarrow{pp_0} + \overrightarrow{q_0q}\|^2 + \|\overrightarrow{p_0q_0}\|^2 + 2\langle \overrightarrow{pp_0} + \overrightarrow{q_0q}, \overrightarrow{p_0q_0} \rangle = \|\overrightarrow{pp_0} + \overrightarrow{q_0q}\|^2 + \|\overrightarrow{p_0q_0}\|^2 \geq \|\overrightarrow{p_0q_0}\|^2 = d(p_0, q_0)^2, \end{aligned}$$

donde hemos usado que  $\overrightarrow{p_0q_0} \perp (\overrightarrow{pp_0} + \overrightarrow{q_0q})$  ya que  $\overrightarrow{pp_0} + \overrightarrow{q_0q} \in \vec{S} + \vec{T}$ . Esto prueba que  $d(p, q) \geq d(p_0, q_0)$  para todo  $p \in S, q \in T$ , y por tanto

$$d(S, T) := \inf\{d(p, q) : p \in S, q \in T\} = \min\{d(p, q) : p \in S, q \in T\} = d(p_0, q_0).$$

En cuanto al apéndice sobre la unicidad de los puntos  $p_0 \in S, q_0 \in T$  que realizan la distancia, supongamos que  $\vec{S} \cap \vec{T} = \{\vec{0}\}$ . En estas condiciones

$$\vec{\mathcal{A}} = (\vec{S} \oplus \vec{T}) \oplus (\vec{S} \oplus \vec{T})^\perp,$$

y por tanto, si como arriba ponemos  $S = p + \vec{S}, T = q + \vec{T}$ , los vectores  $u \in \vec{S}, w \in \vec{T}$  y  $v \in (\vec{S} \oplus \vec{T})^\perp$  tales que

$$\overrightarrow{pq} = u + w + v$$

son únicos. En consecuencia las expresiones  $p_0 = p + u \in S, q_0 = q - w \in T$  determinan los únicos puntos  $p_0 \in S$  y  $q_0 \in T$  para los que  $\overrightarrow{p_0q_0} \in (\vec{S} + \vec{T})^\perp$ , resolviendo el problema.

■

**Corolario 3.17** Si  $S, T$  son subespacios afines de  $(\mathcal{A}, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ ,

$$d(S, T) = 0 \iff S \cap T \neq \emptyset.$$

**Corolario 3.18** Si  $S$  es un subespacio afín de  $(\mathcal{A}, \langle \cdot, \cdot \rangle)$  y  $p \in \mathcal{A}$ , entonces

$$d(p, S) = d(p, \pi_S^\perp(p)).$$

En particular, si  $S$  es un hiperplano afín,  $\mathcal{R} = \{p_0, B = \{e_1, \dots, e_n\}\}$  es un sistema de referencia rectangular de  $\mathcal{A}$ ,  $p_{\mathcal{R}} = (y_1, \dots, y_n)^t$  son las coordenadas de un punto  $p \in \mathcal{A}$  en  $\mathcal{R}$ , y

$$\sum_{j=1}^n a_j x_j + a_0 = 0$$

es la una ecuación implícita de  $S$  en  $\mathcal{R}$ , entonces

$$d(p, S) = \frac{\left| \sum_{j=1}^n a_j y_j + a_0 \right|}{\sqrt{\sum_{j=1}^n a_j^2}}.$$

**DEMOSTRACIÓN:** Sea  $T_p$  el único subespacio afín de  $\mathcal{A}$  con  $p \in T_p$  y  $\vec{T}_p = \vec{S}^\perp$ , esto es,  $T_p = p + \vec{S}^\perp$  (el suplemento ortogonal de  $S$  pasando por  $p$ ). Recordemos que por definición

$$\pi_S^\perp(p) = T_p \cap S.$$

Como  $\pi_S^\perp(p) \in S$  y  $\overrightarrow{p\pi_S^\perp(p)} \in \vec{S}^\perp \cap \overrightarrow{\{p\}}^\perp = \vec{S}^\perp \cap \overrightarrow{\{0\}}^\perp = \vec{S}^\perp \cap \vec{\mathcal{A}} = \vec{S}^\perp$ , de la Proposición 3.16 aplicada a los subespacios afines  $S$  y  $\{p\}$  deducimos que

$$d(p, S) = d(p, \pi_S^\perp(p)).$$

Para probar la segunda parte del corolario notemos que, dados  $\mathcal{R}$  sistema de referencia ortogonal y  $S$  hiperplano en las condiciones del enunciado,

$$\sum_{j=1}^n a_j x_j = \left\langle \sum_{j=1}^n a_j e_j, \sum_{j=1}^n x_j e_j \right\rangle = 0$$

es una ecuación implícita de  $\vec{S}$  en la base ortonormal  $B = \{e_1, \dots, e_n\}$  de  $(\vec{\mathcal{A}}, \langle \cdot, \cdot \rangle)$  de las direcciones de  $\mathcal{R}$ , de donde

$$\vec{S}^\perp = L(\left\{ \sum_{j=1}^n a_j e_j \right\}).$$

Fijemos  $q \in S$  un punto arbitrario. La expresión  $\overrightarrow{qp} = \overrightarrow{q\pi_S^\perp(p)} + \overrightarrow{\pi_S^\perp(p)p}$ , donde

$$\overrightarrow{q\pi_S^\perp(p)} \in \vec{S} \quad \text{y} \quad \overrightarrow{\pi_S^\perp(p)p} \in \vec{S}^\perp,$$

describe la descomposición del vector  $\overrightarrow{qp}$  de acuerdo a la suma directa  $\vec{\mathcal{A}} = \vec{S} \oplus \vec{S}^\perp$ . Llamando

$$\nu = \frac{1}{\sqrt{\sum_{j=1}^n a_j^2}} \sum_{j=1}^n a_j e_j$$

y teniendo en cuenta que  $\overrightarrow{\pi_S^\perp(p)p} \in \vec{S}^\perp = L(\{\nu\})$  y  $\|\nu\| = 1$ , inferimos que

$$\|\overrightarrow{p\pi_S^\perp(p)}\| = |\langle \overrightarrow{\pi_S^\perp(p)p}, \nu \rangle| = |\langle \overrightarrow{qp}, \nu \rangle|.$$

Escribiendo  $q_{\mathcal{R}} = (z_1, \dots, z_n)^t$  las coordenadas de  $q$  en  $\mathcal{R}$ , deducimos que

$$\langle \overrightarrow{qp}, \nu \rangle = \langle \overrightarrow{qp_0} + \overrightarrow{p_0p}, \nu \rangle = \frac{1}{\sqrt{\sum_{j=1}^n a_j^2}} \left\langle \sum_{j=1}^n y_j e_j - \sum_{j=1}^n z_j e_j, \sum_{j=1}^n a_j e_j \right\rangle =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{\sum_{j=1}^n a_j^2}} \left( \sum_{j=1}^n y_j a_j - \sum_{j=1}^n z_j a_j \right) = \frac{1}{\sqrt{\sum_{j=1}^n a_j^2}} \left( \sum_{j=1}^n y_j a_j + a_0 \right),$$

donde hemos usado que  $B$  es una base ortonormal de  $(\vec{\mathcal{A}}, \langle \cdot, \cdot \rangle)$  y que  $a_0 = -\sum_{j=1}^n z_j a_j$  al ser  $q \in S$ . Por tanto,

$$d(p, S) = d(p, \pi_S^\perp(p)) = \|\overrightarrow{p\pi_S^\perp(p)}\| = |\langle \overrightarrow{qp}, \nu \rangle| = \frac{1}{\sqrt{\sum_{j=1}^n a_j^2}} \left| \sum_{j=1}^n y_j a_j + a_0 \right|$$

como queríamos demostrar. ■

**Corolario 3.19 (Perpendicular común a dos rectas)** *Si  $S, T$  son rectas afines distintas en un espacio afín euclídeo  $(\mathcal{A}, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ , entonces existe una recta  $R$  en  $\mathcal{A}$  secante y perpendicular a  $S$  y a  $T$ .*

Además  $R$  es única si se da cualquiera de estas condiciones:

- (a)  $S, T$  se cruzan.
- (b)  $\dim \mathcal{A} = 3$  y  $S, T$  son secantes.
- (c)  $\dim \mathcal{A} = 2$ ,  $S, T$  son paralelas y  $R$  contiene a un punto  $p \in \mathcal{A}$  prefijado.

**DEMOSTRACIÓN :** Sean  $p_0 \in S$  y  $q_0 \in T$  tales que  $\overrightarrow{p_0 q_0} \in (\vec{S} + \vec{T})^\perp$  (y por tanto  $d(S, T) = d(p_0, q_0)$ ); ver Proposición 3.16. Si  $p_0 \neq q_0$  ( $S, T$  no secantes) entonces  $R = p_0 + L\{\overrightarrow{p_0 q_0}\}$  resuelve el problema. Si  $p_0 = q_0$  ( $S, T$  secantes) entonces elegimos  $R = p_0 + (\vec{S} + \vec{T})^\perp$ .

Para la unicidad, supongamos primero que  $S, T$  se cruzan, y por tanto  $\dim(\vec{S} + \vec{T}) = 2$ . En este caso basta con observar que, por la Proposición 3.16 (démonos cuenta de que  $\vec{S} \cap \vec{T} = \{\vec{0}\}$ ), los puntos  $p_0 \in S$  y  $q_0 \in T$  tales que  $\overrightarrow{p_0 q_0} \in (\vec{S} + \vec{T})^\perp = \vec{S}^\perp \cap \vec{T}^\perp$  son distintos y únicos, y por tanto han de estar en cualquier recta que se apoye en  $S, T$  y sea perpendicular a ambas. Esto implica que  $p_0, q_0 \in R$ , quedando la recta únicamente determinada. Esto prueba (a).

Para demostrar (b), obsérvemos que  $\dim(\vec{S} + \vec{T}) = 2$  y  $\dim(\vec{S} + \vec{T})^\perp = 1$ . Si  $p_0 = S \cap T$ , como necesariamente  $p_0 \in R$  y  $R = (\vec{S} + \vec{T})^\perp$  deducimos que  $R = p_0 + (\vec{S} + \vec{T})^\perp$  está únicamente determinada.

Razonamientos similares prueba que  $R = p + \vec{S} = p + \vec{T}$  es la solución única en (c). ■

**Ejercicio 3.20** En el espacio afín euclídeo clásico  $(\mathbb{R}^4, \langle \cdot, \cdot \rangle)$  calcula  $d(S, T)$ , donde  $S, T$  son los subespacios afines

$$S = (1, 0, 0, 0) + L(\{(0, 0, 1, -1)\}), \quad T = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 : x + y + z = y - t = 1\}.$$

**SOLUCIÓN :** Resolviendo el sistema que nos proporcionan las ecuaciones implícitas de  $T$  tenemos que

$$T = (0, 1, 0, 0) + L(\{(-1, 1, 0, 1), (1, 0, -1, 0)\}) = \{(-\lambda + \mu, 1 + \lambda, -\mu, \lambda) : \lambda, \mu \in \mathbb{R}\}.$$

Análogamente

$$S = (1, 0, 0, 0) + L(\{(0, 0, 1, -1)\}) = \{(1, 0, \delta, -\delta) : \delta \in \mathbb{R}\}.$$

Tomemos

$$p_0 = (1, 0, \delta, -\delta) \in S, \quad q_0 = (-\lambda + \mu, 1 + \lambda, -\mu, \lambda) \in T$$

genéricos e impongamos

$$\overrightarrow{p_0q_0} = (-\lambda + \mu - 1, 1 + \lambda, -\mu - \delta, \lambda + \delta) \in \overrightarrow{S}^\perp \cap \overrightarrow{T}^\perp.$$

Es claro que  $\vec{T} = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 : x + y + z = y - t = 0\}$ , esto es

$$\vec{T} = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 : \langle(x, y, z, t), (1, 1, 1, 0) \rangle = \langle(x, y, z, t), (0, 1, 0, -1) \rangle = 0\}.$$

Por tanto  $\vec{T} = L(\{(1, 1, 1, 0), (0, 1, 0, -1)\})^\perp$ , de donde

$$\vec{T}^\perp = (L(\{(1, 1, 1, 0), (0, 1, 0, -1)\})^\perp)^\perp = L(\{(1, 1, 1, 0), (0, 1, 0, -1)\})$$

y podemos escribir

$$\vec{T}^\perp = \{(\lambda_1, \lambda_1 + \lambda_2, \lambda_1, -\lambda_2) : \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}\}.$$

Análogamente

$$\overrightarrow{S}^\perp = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 : \langle(x, y, z, t), (0, 0, 1, -1) \rangle = 0\} = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 : z - t = 0\}.$$

De aquí que

$$\overrightarrow{S}^\perp \cap \overrightarrow{T}^\perp = \{(\lambda_1, \lambda_1 + \lambda_2, \lambda_1, -\lambda_2) \in \mathbb{R}^4 : \lambda_1 + \lambda_2 = 0\} = \{(\lambda_1, 0, \lambda_1, \lambda_1) : \lambda_1 \in \mathbb{R}\},$$

o en otras palabras

$$\overrightarrow{S}^\perp \cap \overrightarrow{T}^\perp = L(\{(1, 0, 1, 1)\}) = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 : y = z - x = t - x = 0\}.$$

Finalmente la condición

$$\overrightarrow{p_0q_0} = (-\lambda + \mu - 1, 1 + \lambda, -\mu - \delta, \lambda + \delta) \in \overrightarrow{S}^\perp \cap \overrightarrow{T}^\perp$$

equivale a que

$$1 + \lambda = -\mu - \delta + \lambda - \mu = \lambda + \delta + \lambda - \mu = 0,$$

esto es  $\lambda = \mu = -1, \delta = 1$ .

Esto lleva a

$$p_0 = (1, 0, 1, -1), \quad q_0 = (0, 0, 1, -1), \quad \overrightarrow{p_0q_0} = (-1, 0, 0, 0).$$

$$\text{y } \text{dist}(S, T) = \|\overrightarrow{p_0q_0}\| = \sqrt{(-1)^2 + 0^2 + 0^2 + 0^2} = 1. \quad \blacksquare$$

### 3.3. Repaso de isometrías lineales en espacios vectoriales euclidianos

Recordemos algunos resultados básicos sobre espacios vectoriales euclídeos estudiados en cursos anteriores. Como siempre trabajaremos con espacios vectoriales reales de dimensión finita.

Sean  $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ ,  $(V', \langle \cdot, \cdot \rangle')$  espacios vectoriales euclídeos. Una aplicación

$$h: (V, \langle \cdot, \cdot \rangle) \rightarrow (V', \langle \cdot, \cdot \rangle')$$

es una *isometría lineal o vectorial* si es un isomorfismo lineal y satisface

$$\langle h(v), h(u) \rangle' = \langle v, u \rangle \quad \forall v, u \in V.$$

Si  $\dim V = \dim V' = n$ , el grupo ortogonal  $O(n, \mathbb{R})$  gobierna de nuevo este tipo de transformaciones, en el sentido de que si  $B, B'$  son bases ortonormales de  $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ ,  $(V', \langle \cdot, \cdot \rangle')$  entonces:

$$h: (V, \langle \cdot, \cdot \rangle) \rightarrow (V', \langle \cdot, \cdot \rangle') \text{ es isometría vectorial} \iff M(h, B, B') \in O(n, \mathbb{R}).$$

Las isometrías dejan invarianta la norma de vectores, esto es,

$$\|h(v)\|' = \|v\| \quad \forall v \in V.$$

Como consecuencia, también preservan ángulos no orientados

$$\angle'(h(v), h(u)) = \arccos \left( \frac{\langle h(u), h(v) \rangle'}{\|h(u)\|' \|h(v)\|'} \right) = \arccos \left( \frac{\langle u, v \rangle}{\|u\| \|v\|} \right) = \angle(v, u).$$

Igual ocurre con los orientados si  $h$  preserva las orientaciones fijadas  $\mathcal{O}$  en  $V$  y  $\mathcal{O}'$  e  $V'$ . En particular, respetan la ortogonalidad

$$u \perp v \iff h(u) \perp h(v) \quad \forall u, v \in V.$$

Por tanto  $h(U^\perp) = h(U)^\perp$  para todo subespacio  $U \subseteq V$ .

Centremos nuestro interés en los endomorfismos isométricos  $h: (V, \langle \cdot, \cdot \rangle) \rightarrow (V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ . La siguiente proposición no da información sobre la estructura básica de estas isometrías.

**Proposición 3.21** *Sea  $h: V \rightarrow V$  una isometría vectorial en un espacio vectorial euclídeo  $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$  de  $\dim V = n$ . Los siguientes enunciados son ciertos:*

- (I)  $\det(h) = \pm 1$ .
- (II) *Los únicos posibles valores propios de  $h$  son 1 y -1.*
- (III) *Si  $V_1 = \text{Ker}(h - \text{Id}_V)$  y  $V_{-1} = \text{Ker}(h + \text{Id}_V)$  entonces  $V_1 \perp V_{-1}$ , y por tanto*

$$V_1 + V_{-1} = V_1 \oplus V_{-1}.$$

- (IV) *Escribiendo  $V = (V_1 \oplus V_{-1}) \oplus (V_1 \oplus V_{-1})^\perp$ , se tiene que*

$$h(V_1 \oplus V_{-1}) = V_1 \oplus V_{-1}, \quad h((V_1 \oplus V_{-1})^\perp) = (V_1 \oplus V_{-1})^\perp.$$

- (V)  $\dim(V_1 + V_{-1})^\perp$  es par y  $\det(h) = (-1)^{\dim V_{-1}}$ .

**DEMOSTRACIÓN:** Si  $A \in O(n, \mathbb{R})$  es una matriz ortogonal entonces  $1 = \det(I_n) = \det(A \cdot A^t) = \det(A)^2$ , y por tanto  $\det(A) = \pm 1$ . Como  $M(h, B) \equiv M(h, B, B) \in O(n, \mathbb{R})$  para cualquier base  $B$  ortonormal de  $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ , se sigue que  $\det(h) = \det(M(h, B)) = \pm 1$  probando (i).

Si  $\lambda$  es un valor propio de  $h$  y  $v \in V \setminus \{\vec{0}\}$  un vector propio asociado, esto es, tal que  $h(v) = \lambda v$ , entonces  $\lambda^2 \|v\|^2 = \|h(v)\|^2 = \|v\|^2$ . Como  $\|v\|^2 \neq 0$  deducimos que  $\lambda^2 = 1$ , probando (ii).

Si  $v \in V_1$  y  $u \in V_{-1}$  entonces

$$\langle v, u \rangle = \langle h(v), h(u) \rangle = \langle v, -u \rangle = -\langle v, u \rangle,$$

esto es  $\langle v, u \rangle = 0$  y  $v \perp u$ , lo que prueba (iii).

Es claro que  $h(V_1 + V_{-1}) = h(V_1) + h(V_{-1}) = V_1 + V_{-1}$ , y por tanto

$$h((V_1 + V_{-1})^\perp) = (h(V_1 + V_{-1}))^\perp = (V_1 + V_{-1})^\perp,$$

de donde se sigue (iv).

Finalmente, como  $V = (V_1 \oplus V_{-1}) \oplus (V_1 \oplus V_{-1})^\perp$  y  $h$  deja invariantes los tres sumandos de esa suma directa, es claro que

$$\det(h) = \det(h|_{V_1}) \det(h|_{V_{-1}}) \det(h|_{(V_1 + V_{-1})^\perp}) = (-1)^{\dim V_{-1}} \det(h|_{(V_1 + V_{-1})^\perp}),$$

donde entendemos  $h|_{V_\pm}: V_\pm \rightarrow V_\pm$  y  $h|_{(V_1 + V_{-1})^\perp}: (V_1 + V_{-1})^\perp \rightarrow (V_1 + V_{-1})^\perp$ . Para acabar basta con ver que  $\dim(V_1 + V_{-1})^\perp$  es par y  $\det(h|_{(V_1 + V_{-1})^\perp}) = 1$ . La isometría lineal  $h|_{(V_1 + V_{-1})^\perp}$  no tiene valores propios (los únicos valores propios posibles de  $h$  son 1 y  $-1$  y  $(V_1 + V_{-1})^\perp \cap V_\pm = \emptyset$ ), y por tanto su polinomio característico

$$p(t) = \det(h|_{(V_1 + V_{-1})^\perp} - t\text{Id}_{(V_1 + V_{-1})^\perp})$$

no tiene raíces reales. El Teorema de Bolzano fuerza a que  $p(t)$  sea un polinomio de grado  $k = \dim(V_1 + V_{-1})^\perp$  par, y como su término líder es  $t^k$ , a que su término independiente  $\det(h|_{(V_1 + V_{-1})^\perp})$  sea positivo. Por (i), al ser  $h|_{(V_1 + V_{-1})^\perp}$  una isometría  $\det(h|_{(V_1 + V_{-1})^\perp}) = \pm 1$ , de donde  $\det(h|_{(V_1 + V_{-1})^\perp}) = 1$  probando (v). ■

**Definición 3.22** Sea  $h: V \rightarrow V$  una isometría lineal en un espacio vectorial euclídeo  $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ .

- $h$  se dirá directa o positiva si  $\det(h) = 1$ .
- $h$  se dirá inversa o negativa si  $\det(h) = -1$ .

Cerraremos este repaso de las propiedades básicas de las isometrías lineales con la siguiente proposición.

**Proposición 3.23** Si  $h: (V, \langle \cdot, \cdot \rangle) \rightarrow (V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$  es una isometría lineal entonces

$$\text{Ker}(h - \text{Id}_V) = \text{Im}(h - \text{Id}_V)^\perp.$$

**DEMOSTRACIÓN:** Si  $v \in \text{Ker}(h - \text{Id}_V)$  y  $u \in \text{Im}(h - \text{Id}_V)$  entonces

$$h(v) = v \quad \text{y} \quad u = h(w) - w \quad \text{para algún } w \in V.$$

Por tanto, usando que  $h$  es una isometría vectorial,

$$\langle v, u \rangle = \langle v, h(w) - w \rangle = \langle v, h(w) \rangle - \langle v, w \rangle = \langle h(v), h(w) \rangle - \langle v, w \rangle = 0,$$

lo que demuestra que  $\text{Ker}(h - \text{Id}_V) \subseteq \text{Im}(h - \text{Id}_V)^\perp$ . Si probamos que  $\dim \text{Ker}(h - \text{Id}_V) = \dim \text{Im}(h - \text{Id}_V)^\perp$  serían iguales y acabaríamos la proposición.

En efecto, como  $h - \text{Id}_V$  es un endomorfismo del primer teorema de isomorfía en el álgebra lineal deducimos que

$$\dim \text{Ker}(h - \text{Id}_V) + \dim \text{Im}(h - \text{Id}_V) = \dim V,$$

y como  $V = \text{Im}(h - \text{Id}_V) \oplus \text{Im}(h - \text{Id}_V)^\perp$  también

$$\dim \text{Im}(h - \text{Id}_V) + \dim \text{Im}(h - \text{Id}_V)^\perp = \dim V.$$

Por tanto  $\dim \text{Ker}(h - \text{Id}_V) = \dim V - \dim \text{Im}(h - \text{Id}_V) = \dim \text{Im}(h - \text{Id}_V)^\perp$ , lo que concluye la prueba. ■

Un parte relevante de la teoría de isometrías vectoriales en un espacio vectorial euclídeo es su clasificación. Repasemos brevemente la misma en los casos de dimensiones 2 y 3.

### 3.3.1. Isometrías lineales en un plano vectorial euclídeo

En lo que sigue  $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$  será un espacio vectorial euclidiano de dimensión 2.

**Proposición 3.24** Si  $h: V \rightarrow V$  es una isometría lineal positiva y  $B = \{v_1, v_2\}$  una base ortonormal en el plano  $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ , entonces existe un único  $\theta \in [0, 2\pi[$  tal que

$$M(h, B) = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}.$$

En este caso diremos que  $h$  es el giro vectorial de ángulo orientado  $\theta \in ]0, 2\pi[$  respecto de la orientación  $\mathcal{O}$  inducida por  $B$  en  $V$ , y se escribe  $h = G_\theta$ .

DEMOSTRACIÓN: En efecto, si escribimos

$$h(v_j) = \sum_{i=1}^2 a_{ij} v_i, \quad j = 1, 2,$$

al ser

$$M(h, B) = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \in O(2, \mathbb{R})$$

deducimos que

$$\|(a_{11}, a_{21})\| = \|(a_{12}, a_{22})\| = 1, \quad \langle (a_{11}, a_{21}), (a_{11}, a_{21}) \rangle = 0, \quad a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} = 1,$$

donde  $\|\cdot\|$  y  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  son la norma y producto escalar clásicos en  $\mathbb{R}^2$ .

Como  $\|(a_{11}, a_{21})\| = 1$ , por las propiedades de las funciones trigonométricas existe un único  $\theta \in ]0, 2\pi[$  tal que  $a_{11} = \cos \theta$ ,  $a_{21} = \sin \theta$ . Despejando arriba deducimos que  $a_{12} = -\sin \theta$ ,  $a_{22} = \cos \theta$  como habíamos afirmado. ■

Por convenio, la aplicación identidad  $Id_V$  es el giro de ángulo 0 respecto de cualquier orientación fijada en  $V$ . Con el lenguaje de la anterior proposición:

- $\angle_o(v, G_\theta(v)) = \theta$  respecto de  $\mathcal{O}$  para todo vector  $v \in V \setminus \{\vec{0}\}$ .
- $\text{Ker}(h - Id_V) = \{\vec{0}\}$  para todo giro vectorial (isometría positiva)  $h \neq Id_V$  en  $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ .
- El ángulo orientado  $\theta$  de un giro vectorial  $h$  respecto a una orientación en  $V$  cambia a su conjugado  $2\pi - \theta$  si se revierte la misma.
- Como ángulos conjugados tienen el mismo coseno, tiene sentido definir el *ángulo no orientado* de un giro vectorial  $h$  (isometría positiva) en  $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$  como el único  $\alpha \in ]0, \pi]$  tal que

$$\text{Trazo}(h) = 2 \cos(\alpha).$$

Es claro que  $\alpha = \min\{\theta, 2\pi - \theta\}$ , donde  $\theta$  es el ángulo orientado del giro  $h$  respecto de cualquiera orientación  $\mathcal{O}$  en  $V$ , y por tanto  $\alpha$  está bien definido al margen del concepto de orientación en  $V$ .

El elemento geométrico que determina un giro vectorial es su ángulo en cualquiera de sus acepciones.

**Proposición 3.25** Si  $h: V \rightarrow V$  es una isometría lineal negativa en el plano  $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$  entonces existe una base ortonormal  $B$  de  $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$  en la que

$$M(h, B) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix},$$

y por tanto  $h = \bar{\sigma}_U^\perp$  para  $U = V_1 = \text{Ker}(h - \text{Id}_V)$ .

**DEMOSTRACIÓN:** Recordemos que el polinomio característico de  $h$  es de la forma

$$p_h(t) := \det(M(h, B) - tI_2) = t^2 - \text{Traza}(h)t + \det(h)$$

para cualquier base  $B$  de  $V$ , donde

$$\text{Traza}(h) = \text{Traza}(M(h, B)) \quad \text{y} \quad \det(h) = \det(M(h, B))$$

no dependen de la base  $B$ . Al ser el término independiente del polinomio  $p_h(t)$  igual a  $\det(h) = -1 < 0$ , inferimos que  $p_h(t)$  ha de descomponer en los reales. Como además  $\det(h)$  es el producto de las raíces de  $p_h(t)$  (valores propios de  $h$ ) y  $h$  es una isometría, esas raíces han de ser justamente  $1$  y  $-1$ . Por tanto  $h$  diagonaliza con valores propios  $1$  y  $-1$ , ambos de multiplicidad  $1$ . Elegidos vectores propios *unitarios* (de norma  $1$ )  $v_1$  y  $v_2$  para los valores propios  $1$  y  $-1$ , respectivamente, y formando la base ortonormal  $B = \{v_1, v_2\}$ , se tiene que

$$M(h, B) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

y  $h$  es la simetría ortogonal  $\bar{\sigma}_U^\perp$  respecto de la recta vectorial  $U := V_1 = \text{Ker}(h - \text{Id}_V)$  (ver Notación 3.4). Esto concluye la prueba. ■

El elemento geométrico que determina una simetría ortogonal es la recta vectorial respecto de la cual se simetriza.

### 3.3.2. Estructura general de las isometrías lineales

Vamos a estudiar la estructura básica de las isometrías en un espacio vectorial métrico euclídeo de dimensión arbitraria. Para ello será fundamental la Proposición 3.21 y el siguiente lema.

**Lema 3.26** Sean  $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$  ( $\dim V \geq 2$ ) un espacio vectorial métrico euclídeo y sea  $f: V \rightarrow V$  una isometría sin valores propios reales. Entonces existe  $U \leq V$  plano vectorial tal que  $f(U) = U$ . En particular,  $f|_U: U \rightarrow U$  es una isometría positiva (giro vectorial) de ángulo  $\theta \in ]0, 2\pi[ \setminus \{\pi\}$  en  $(U, \langle \cdot, \cdot \rangle|_{U \times U})$ .

**DEMOSTRACIÓN:** Como los únicos valores propios de una isometría son  $1, -1$ , nuestra hipótesis es equivalente a que

$$V_1 = \text{Ker}(f - \text{Id}_V) = \{\vec{0}\}, \quad V_{-1} = \text{Ker}(f + \text{Id}_V) = \{\vec{0}\}.$$

Fijemos  $B$  base ortonormal en  $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$  y llamemos  $A = M(f, B) \in O(n)$ , donde  $n = \dim V$ . Llamemos  $p(t) = \det(f - t\text{Id}_V)$  al polinomio característico de  $f$ , del que por nuestras hipótesis sabemos que no tiene raíces reales. Por el Teorema Fundamental del Álgebra sabemos que existe  $a \in \mathbb{C}$  raíz compleja de  $p(t)$ ,  $a \neq \bar{a}$ , y como  $p(t)$  tiene coeficientes reales  $\bar{a} \in \mathbb{C}$  es también raíz compleja de  $p(t)$ . Por tanto existe  $z \in \mathbb{C}^n$

tal que  $A \cdot z = a \cdot z$  (notación columna), y también  $A \cdot \bar{z} = \bar{a} \cdot \bar{z}$ . Llamemos  $u_0 = 2\Re(z), v_0 = 2\Im(z) \in \mathbb{R}^n$ , y observemos que como  $a \neq \bar{a}$  entonces  $\{u_0, v_0\}$  son linealmente independientes y  $U_0 = L(\{u_0, v_0\})$  es un plano vectorial; en efecto, en otro caso  $z = \lambda r$  para ciertos  $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$  y  $r \in \mathbb{R}^2$ , y por tanto  $A \cdot r = a \cdot r$ , esto es,  $a \in \mathbb{R}$ , lo que es absurdo. Tenemos pues que

$$\begin{aligned} A \cdot u_0 &= A \cdot (z + \bar{z}) = A \cdot z + A \cdot \bar{z} = a \cdot z + \bar{a} \cdot \bar{z} = \\ &= 2(\Re(a) \cdot \Re(z) - \Im(a)\Im(z)) = \Re(a) \cdot u_0 - \Im(a) \cdot v_0 \in U_0, \end{aligned}$$

y análogamente

$$\begin{aligned} A \cdot v_0 &= A \cdot i(\bar{z} - z) = i(A \cdot \bar{z} - A \cdot z) = i(\bar{a} \cdot \bar{z} - a \cdot z) = \\ &= 2(\Re(a) \cdot \Im(z) + \Im(a)\Re(z)) = \Re(a) \cdot v_0 + \Im(a) \cdot u_0 \in U_0. \end{aligned}$$

Si llamamos  $u, v \in V$  a los únicos vectores tales que  $u_B = u_0, v_B = v_0$ , y  $U = L(\{u, v\})$  al plano que generan, entonces

$$w \in U \iff w_B \in U_0.$$

De aquí se sigue que si  $w = \lambda u + \mu v \in U$  entonces

$$\begin{aligned} f(w)_B &= f(\lambda u + \mu v)_B = \lambda f(u)_B + \mu f(v)_B = \lambda(A \cdot u_B) + \mu(A \cdot v_B) = \\ &= \lambda(A \cdot u_0) + \mu(A \cdot v_0) \in U_0, \end{aligned}$$

y por tanto  $f(w) \in U$ . Esto prueba que  $f(U) \subseteq U$ , y como  $\dim f(U) = \dim U = 2$ , que  $f(U) = U$ .

Finalmente, observemos que  $f|_U: U \rightarrow U$  es una isometría sin valores propios en el plano vectorial euclídeo  $(U, \langle \cdot, \cdot \rangle|_{U \times U})$ , y por tanto ha de ser un giro de ángulo  $\theta \in ]0, 2\pi[ \setminus \{\pi\}$ , (los casos  $\theta = 0, \pi$  se excluyen por no ser  $\pm 1$  valores propios de  $f$ ). Esto concluye el resultado. ■

**Teorema 3.27** *Sea  $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$  un espacio vectorial métrico euclídeo con  $\dim V = n \geq 1$  y sea  $h: V \rightarrow V$  una isometría en  $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ . Entonces existe una base ortonormal  $B$  de  $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$  en la que:*

$$M(h, B) = \left( \begin{array}{c|c|c|c|c} R_{\theta_1} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \hline 0 & \ddots & 0 & \cdots & 0 \\ \hline 0 & 0 & R_{\theta_m} & \ddots & \vdots \\ \hline \vdots & \vdots & \ddots & I_s & 0 \\ \hline 0 & 0 & \cdots & 0 & -I_k \end{array} \right),$$

donde  $s, k, m \in \mathbb{N} \cup \{0\}$  son enteros tales que  $s + k + 2m = n$  y

$$R_{\theta_j} = \begin{pmatrix} \cos(\theta_j) & -\sin(\theta_j) \\ \sin(\theta_j) & \cos(\theta_j) \end{pmatrix}, \quad \theta_j \in ]0, 2\pi[ \setminus \{\pi\}, \quad j = 1, \dots, m.$$

DEMOSTRACIÓN: Llamemos

$$V_1 = \text{Ker}(h - \text{Id}_V), \quad s = \dim V_1, \quad V_{-1} = \text{Ker}(h + \text{Id}_V), \quad k = \dim V_{-1}.$$

Denotemos por

$$W_1 = (V_1 + V_{-1})^\perp.$$

De la Proposición 3.21 tenemos que  $h(W_1) = W_1$ ,  $\dim W_1 = 2m$ ,  $m \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ ; llamemos

$$h_1: W_1 \rightarrow W_1, \quad h_1 := h|_{W_1}.$$

Si  $m \geq 1$  el Lema 3.26 puede aplicarse a  $h_1$  y existe  $U_1 \leq W_1$  plano vectorial tal que

- $h_1(U_1) = h(U_1) = U_1$  y
- $h_1|_{U_1} \equiv h|_{U_1}$  es un giro de ángulo orientado  $\theta_1 \in ]0, 2\pi[ \setminus \{\pi\}$  en  $(U_1, \langle \cdot, \cdot \rangle|_{U_1 \times U_1})$  respecto a una orientación en  $U_1$ .

Si ocurriese que  $m - 1 \geq 1$  escribimos  $W_1 = U_1 \oplus W_2$  para  $W_2$  el complemento ortogonal de  $U_1$  relativo a  $(W_1, \langle \cdot, \cdot \rangle|_{W_1 \times W_1})$ . Como la isometría  $h_1: W_1 \rightarrow W_1$  preserva ortogonalidad en  $(W_1, \langle \cdot, \cdot \rangle|_{W_1 \times W_1})$ , deducimos que  $h_1(W_2) = W_2$  y por tanto

$$h_2: W_2 \rightarrow W_2, \quad h_2 := h_1|_{W_2} = h|_{W_2},$$

es una isometría en  $(W_2, \langle \cdot, \cdot \rangle|_{W_2 \times W_2})$  que, por nuestras hipótesis, no tiene valores propios. Si  $m - 1 \geq 2$ , por el Lema 3.26 de nuevo existe  $U_2 \leq W_2$  plano vectorial tal que

- $h_2(U_2) = h(U_2) = U_2$  y
- $h_2|_{U_2} \equiv h|_{U_2}$  es un giro de ángulo orientado  $\theta_2 \in ]0, 2\pi[ \setminus \{\pi\}$  en  $(U_2, \langle \cdot, \cdot \rangle|_{U_2 \times U_2})$  respecto a una orientación en  $U_2$ .

Al igual que antes  $W_2 = U_2 \oplus W_3$ , donde  $W_3$  es el complemento ortogonal de  $U_2$  relativo a  $(W_2, \langle \cdot, \cdot \rangle|_{W_2 \times W_2})$ , y por tanto  $W_1 = U_1 \oplus U_2 \oplus W_3$  siendo las sumas directas ortogonales dos a dos.

Como la isometría  $h_2: W_2 \rightarrow W_2$  preserva ortogonalidad en  $(W_2, \langle \cdot, \cdot \rangle|_{W_2 \times W_2})$ , deducimos que  $h_2(W_3) = W_3$  y por tanto

$$h_3: W_3 \rightarrow W_3, \quad h_3 = h_2|_{W_3} = h|_{W_3},$$

es una isometría en  $(W_3, \langle \cdot, \cdot \rangle|_{W_3 \times W_3})$  sin valores propios.

Si  $m - 1 \geq 3$  podemos reiterar el procedimiento anterior con  $W_3$  y así sucesivamente. Tras un procedimiento inductivo finito, finalmente descomponemos  $W_1$  en suma directa por subespacios ortogonales dos a dos

$$W_1 = U_1 \oplus \cdots \oplus U_m$$

de forma que

- $h(U_j) = U_j$  y
- $h|_{U_j}$  es un giro de ángulo orientado  $\theta_j \in ]0, 2\pi[ \setminus \{\pi\}$  en  $(U_j, \langle \cdot, \cdot \rangle|_{U_j \times U_j})$  respecto a una orientación en  $U_j$

para todo  $j = 1, \dots, m$ . En consecuencia,

$$V = W_1 \oplus V_1 \oplus V_{-1} = U_1 \oplus \cdots \oplus U_m \oplus V_1 \oplus V_{-1},$$

siendo todos los subespacios ortogonales ortogonales dos a dos. Para acabar, basta elegir bases ortonormales

$B'_j$  de  $(U_j, \langle \cdot, \cdot \rangle|_{U_j \times U_j})$ ,  $j = 1, \dots, m$ ,  $B_1$  de  $(V_1, \langle \cdot, \cdot \rangle|_{V_1 \times V_1})$ ,  $B_{-1}$  de  $(V_{-1}, \langle \cdot, \cdot \rangle|_{V_{-1} \times V_{-1}})$ ,

definir la base ortonormal  $B = B'_1 \cup \cdots \cup B'_m \cup B_1 \cup B_{-1}$  de  $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ , y observar que por construcción  $M(h, B)$  es la matriz por cajas del enunciado. ■

### 3.3.3. Isometrías lineales en espacios tridimensionales

Sea  $h: V \rightarrow V$  una isometría vectorial en un espacio vectorial euclíadiano  $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$  de dimensión 3. Si  $h \neq \text{Id}_V$ , caben tres posibilidades:

- (I)  $\det(h) = 1$ . Del Teorema 3.27 es inmediato que existe una base ortonormal  $B = \{v_1, v_2, v_3\}$  de  $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$  en la que

$$M(h, B) = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) & 0 \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

En este caso  $V_1 = \text{Ker}(h - \text{Id}_V) = L(\{v_3\})$ ,  $W_1 = L(\{v_1, v_2\}) = L(\{v_3\})^\perp$ , y  $h|_{W_1}: W_1 \rightarrow W_1$  es un giro de ángulo orientado  $\theta$  en  $(W_1, \langle \cdot, \cdot \rangle|_{W_1 \times W_1})$  respecto de la orientación que induce la base  $\{v_1, v_2\}$ .

Se dice que  $h$  es un giro con eje la recta vectorial  $V_3$  y de ángulo orientado  $\theta \in ]0, 2\pi[$  respecto de la orientación  $\mathcal{O}$  inducida por  $\{v_1, v_2\}$  en  $V_3^\perp$ . Si no se desea enfatizar orientación, el correspondiente ángulo no orientado  $\theta \in ]0, \pi]$  del giro  $h$  se determina por la ecuación

$$\text{Traza}(h) = 1 + 2 \cos(\theta).$$

Los elementos geométricos que determinan un giro son su eje y su ángulo.

- (II)  $\det(h) = -1$ . En este caso el Teorema 3.27 nos da dos posibilidades:

- (II)<sub>1</sub>  $h$  es la simetría ortogonal  $\vec{\sigma}_{V_1}^\perp$  respecto del plano vectorial  $V_1 = \text{Ker}(h - \text{Id}_V)$  (ver Notación 3.4). Elegida una base ortonormal  $\{v_1, v_2\}$  de  $V_1$  y  $v_3 \in V_1^\perp$  unitario, la base  $B = \{v_1, v_2, v_3\}$  es ortonormal en  $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$  y

$$M(h, B) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

En este caso  $h$  diagonaliza con valores propios  $-1$  y  $1$  de multiplicidades  $2$  y  $1$ , respectivamente. El elemento geométrico que determina una simetría ortogonal respecto de un plano es el plano vectorial respecto del cual se simetriza.

- (II)<sub>2</sub>  $h$  tiene la expresión matricial

$$M(h, B) = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) & 0 \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

en una base ortonormal  $B = \{v_1, v_2, v_3\}$  de  $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ .

En este caso  $h$  es la composición del giro de eje  $U = L\{v_3\} \subseteq V_{-1} := \text{Ker}(h + \text{Id}_V)$  y ángulo orientado  $\theta$  respecto a la orientación  $\mathcal{O}$  inducida por  $\{v_1, v_2\}$  en  $L\{v_3\}^\perp = L(\{v_1, v_2\})$ , y la simetría ortogonal  $\vec{\sigma}_{L\{v_3\}^\perp}^\perp$  respecto del plano  $L\{v_3\}^\perp$ . Nótese que  $L\{v_3\} = V_{-1}$  si y solo si  $\theta \neq \pi$ , y si  $\theta = \pi$  entonces  $h = -\text{Id}_V = V_{-1}$ . Los elementos geométricos de  $h$  son los mismos que los del giro involucrado.

### 3.4. Isometrías afines

El concepto de isometría afín es una traslación natural del de isometría vectorial a espacios afines euclídeos.

**Definición 3.28** Una isometría afín entre espacios afines euclidianos  $(\mathcal{A}, \langle \cdot, \cdot \rangle)$  y  $(\mathcal{A}', \langle \cdot, \cdot \rangle')$  es una afinidad  $f: \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}'$  cuya aplicación lineal asociada  $\vec{f}: \overrightarrow{\mathcal{A}} \rightarrow \overrightarrow{\mathcal{A}'}$  es una isometría vectorial entre los espacios vectoriales euclidianos  $(\overrightarrow{\mathcal{A}}, \langle \cdot, \cdot \rangle)$  y  $(\overrightarrow{\mathcal{A}'}, \langle \cdot, \cdot \rangle')$ .

La siguiente proposición recoge las propiedades fundamentales de las isometrías afines.

**Proposición 3.29** Si  $f: (\mathcal{A}, \langle \cdot, \cdot \rangle) \rightarrow (\mathcal{A}', \langle \cdot, \cdot \rangle')$  es una isometría afín entonces:

- (I)  $d'(f(p), f(q)) = d(p, q)$  para todo  $p, q \in \mathcal{A}$ , donde  $d, d'$  son las distancias en  $(\mathcal{A}, \langle \cdot, \cdot \rangle)$  y  $(\mathcal{A}', \langle \cdot, \cdot \rangle')$ .
- (II)  $\angle'(f(S), f(T)) = \angle(S, T)$  para cualesquiera rectas secantes  $S, T$  en  $\mathcal{A}$ , donde  $\angle, \angle'$  representan los ángulos en  $(\mathcal{A}, \langle \cdot, \cdot \rangle)$  y  $(\mathcal{A}', \langle \cdot, \cdot \rangle')$ .
- (III) Dos subespacios  $S, T$  son ortogonales en  $(\mathcal{A}, \langle \cdot, \cdot \rangle)$  si y solo si sus imágenes  $f(S)$  y  $f(T)$  son ortogonales en  $(\mathcal{A}', \langle \cdot, \cdot \rangle')$ .

DEMOSTRACIÓN: Item (i) es consecuencia del siguiente cálculo

$$d'(f(p), f(q)) = \|\overrightarrow{f(p)f(q)}\|' = \|\vec{f}(\overrightarrow{pq})\|' = \|\overrightarrow{pq}\| = d(p, q),$$

donde  $\|\cdot\|$  y  $\|\cdot\|'$  son las normas en  $(\overrightarrow{\mathcal{A}}, \langle \cdot, \cdot \rangle)$  y  $(\overrightarrow{\mathcal{A}'}, \langle \cdot, \cdot \rangle')$ .

Como la isometría vectorial  $\vec{f}: (\overrightarrow{\mathcal{A}}, \langle \cdot, \cdot \rangle) \rightarrow (\overrightarrow{\mathcal{A}'}, \langle \cdot, \cdot \rangle')$  preserva ángulos, es inmediato deducir que  $f: (\mathcal{A}, \langle \cdot, \cdot \rangle) \rightarrow (\mathcal{A}', \langle \cdot, \cdot \rangle')$  preserva ángulos entre rectas secantes, de donde se sigue (ii). Por análogo razonamiento  $f: (\mathcal{A}, \langle \cdot, \cdot \rangle) \rightarrow (\mathcal{A}', \langle \cdot, \cdot \rangle')$  preserva la ortogonalidad de subespacios afines, probando (iii). ■

Enunciaremos la siguiente caracterización analítica de las isometrías afines.

**Proposición 3.30** Si  $(\mathcal{A}, \langle \cdot, \cdot \rangle), (\mathcal{A}', \langle \cdot, \cdot \rangle')$  son espacios afines euclidianos  $n$ -dimensionales,  $\mathcal{R} = \{p_0, B\}$  y  $\mathcal{R}' = \{p'_0, B'\}$  son sistemas de referencia rectangulares en  $(\mathcal{A}, \langle \cdot, \cdot \rangle)$  y  $(\mathcal{A}', \langle \cdot, \cdot \rangle')$  respectivamente, y  $f: \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}'$  es afín, entonces

$$f: (\mathcal{A}, \langle \cdot, \cdot \rangle) \rightarrow (\mathcal{A}', \langle \cdot, \cdot \rangle') \text{ es una isometría afín} \iff A := M(\vec{f}, B, B') \in O(n, \mathbb{R}).$$

En otras palabras, si  $\mathcal{R}$  y  $\mathcal{R}'$  son referencias rectangulares en  $(\mathcal{A}, \langle \cdot, \cdot \rangle)$  y  $(\mathcal{A}', \langle \cdot, \cdot \rangle')$ ,

$$f: (\mathcal{A}, \langle \cdot, \cdot \rangle) \rightarrow (\mathcal{A}', \langle \cdot, \cdot \rangle') \text{ isometría afín} \iff M(f, \mathcal{R}, \mathcal{R}') = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ b & A \end{pmatrix}, \quad A \in O(n, \mathbb{R}).$$

Como consecuencia, las traslaciones  $\tau: \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}$  en un espacio afín euclídeo  $(\mathcal{A}, \langle \cdot, \cdot \rangle)$  son isometrías afines; basta observar que  $M(\tau, \mathcal{R}) \equiv M(\tau, \mathcal{R}, \mathcal{R}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ b & I_n \end{pmatrix}$  para todo sistema de referencia rectangular  $\mathcal{R}$  en  $(\mathcal{A}, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ .

### 3.5. Semejanzas

Las aplicaciones afines que preservan ángulos se llaman semejanzas. Hagamos una pequeña introducción a este tipo de transformaciones.

**Proposición 3.31** Una homotecia  $h: \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}$  de razón  $r \neq 0, 1$  en un espacio afín euclídeo  $(\mathcal{A}, \langle \cdot, \cdot \rangle)$  satisface:

- (I)  $d(h(p), h(q)) = |r|d(p, q)$  para todos  $p, q \in \mathcal{A}$ .
- (II)  $\angle(h(S), h(T)) = \angle(S, T)$  para cualesquiera rectas secantes  $S, T$  en  $\mathcal{A}$ .
- (III) Si  $S, T$  son subespacios de  $\mathcal{A}$ ,  $h(S) \perp h(T) \iff S \perp T$ .

DEMOSTRACIÓN: Es claro que

$$d(h(p), h(q)) = \|\overrightarrow{h(p)h(q)}\| = \|\vec{h}(\vec{pq})\| = \|r\vec{pq}\| = |r|\|\vec{pq}\| = |r|d(p, q),$$

lo que demuestra (i). Para probar (ii), tomemos rectas afines  $S, T$ , tomemos  $u \in \vec{S}, v \in \vec{T}$  no nulos tales que  $\angle(S, T) = \angle(u, v) \in [0, \pi/2]$ . Como  $\vec{h} = r\text{Id}_V$ , se tiene que para los vectores  $u \in \overrightarrow{h(S)}, v \in \overrightarrow{h(T)}$  también

$$\angle(h(S), h(T)) = \angle(u, v) \in [0, \pi/2]$$

lo que prueba (ii). Item (iii) es trivial o consecuencia de (ii) ya que  $S \perp T$  si y solo si  $\angle(S, T) = \pi/2$ . ■

La generalización natural de homotecia es el concepto de semejanza.

**Definición 3.32** Una aplicación afín biyectiva  $f: (\mathcal{A}, \langle \cdot, \cdot \rangle) \rightarrow (\mathcal{A}', \langle \cdot, \cdot \rangle')$  entre espacios afines euclidianos se dice que es una semejanza de razón  $r \neq 0, 1$ ,  $r > 0$ , si y sólo si

$$d'(f(p), f(q)) = r d(p, q) \quad \forall p, q \in \mathcal{A},$$

o equivalentemente

$$\langle \vec{f}(u), \vec{f}(v) \rangle' = r^2 \langle u, v \rangle \quad \forall u, v \in \mathcal{A}.$$

Es inmediato comprobar que:

- Las homotecias en  $(\mathcal{A}, \langle \cdot, \cdot \rangle)$  son semejanzas.
- Una aplicación afín  $(\mathcal{A}, \langle \cdot, \cdot \rangle) \rightarrow (\mathcal{A}', \langle \cdot, \cdot \rangle')$  es una semejanza si y sólo sí es la composición de una isometría  $(\mathcal{A}, \langle \cdot, \cdot \rangle) \rightarrow (\mathcal{A}', \langle \cdot, \cdot \rangle')$  y una homotecia (en  $(\mathcal{A}, \langle \cdot, \cdot \rangle)$  o en  $(\mathcal{A}', \langle \cdot, \cdot \rangle')$  dependiendo del orden de composición).
- La composición de semejanzas entre espacios afines euclidianos es una semejanza o una isometría.

Por tanto, el conjunto formado por la unión de las semejanzas y las isometrías en un espacio afín euclídeo  $(\mathcal{A}, \langle \cdot, \cdot \rangle)$  es un grupo con la composición. Estos comentarios y la Proposición 3.31 nos dan el siguiente:

**Corolario 3.33** Si  $f: (\mathcal{A}, \langle \cdot, \cdot \rangle) \rightarrow (\mathcal{A}', \langle \cdot, \cdot \rangle')$  es una semejanza de razón  $r > 0$  entonces

- (I)  $\angle(f(S), f(T)) = \angle(S, T)$  para cualesquiera rectas secantes  $S, T$  en  $\mathcal{A}$ .
- (II) Si  $S, T$  son subespacios de  $\mathcal{A}$ ,  $f(S) \perp f(T) \iff S \perp T$ .

Se puede probar como ejercicio que una aplicación afín biyectiva  $f: (\mathcal{A}, \langle \cdot, \cdot \rangle) \rightarrow (\mathcal{A}', \langle \cdot, \cdot \rangle')$  es una semejanza si y sólo si preserva la ortogonalidad de rectas secantes (o equivalentemente, preserva el ángulo de rectas secantes).

### 3.6. Movimientos rígidos

El concepto de movimiento rígido es fundamental en la geometría euclídea ya que permite expresar con rigor la idea clásica de igualdad de figuras: dos figuras en un espacio afín euclídeo son equivalentes o iguales si existe un movimiento rígido que lleva una en la otra.

**Definición 3.34** *Un movimiento rígido en un espacio afín euclídeo  $(\mathcal{A}, \langle \cdot, \cdot \rangle)$  es una isometría afín  $f: (\mathcal{A}, \langle \cdot, \cdot \rangle) \rightarrow (\mathcal{A}, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ . Un movimiento rígido se dice directo o positivo si  $\det(\vec{f}) = 1 > 0$ , e inverso o negativo si  $\det(\vec{f}) = -1 < 0$ .*

Para la comprensión de la naturaleza geométrica de un movimiento rígido es fundamental conocer su conjunto de puntos fijos. El siguiente lema, cuya demostración es muy ilustrativa, resultará de gran ayuda para la clasificación de movimientos rígidos que veremos con posterioridad. Expresa que todo isometría  $f: \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}$  se descompone de forma única como la composición de un movimiento rígido con puntos fijos y una traslación con dirección en  $\text{Ker}(\vec{f} - \text{Id}_{\mathcal{A}})$ .

**Lema 3.35** *Dado un movimiento rígido  $f: (\mathcal{A}, \langle \cdot, \cdot \rangle) \rightarrow (\mathcal{A}, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ , existe un único vector  $u \in \text{Ker}(\vec{f} - \text{Id}_{\mathcal{A}})$  y un único movimiento rígido  $g: (\mathcal{A}, \langle \cdot, \cdot \rangle) \rightarrow (\mathcal{A}, \langle \cdot, \cdot \rangle)$  con  $\mathcal{P}_g \neq \emptyset$  tales que*

$$f = \tau_u \circ g,$$

donde  $\tau_u$  es la traslación de vector  $u$ . Además:

- $u = \text{Ker}(\vec{f} - \text{Id}_{\mathcal{A}}) \cap \{\overrightarrow{qf(q)}: q \in \mathcal{A}\}$ , y es conocido como el vector de deslizamiento asociado a la isometría  $f$ .
- $\mathcal{P}_g = \{q \in \mathcal{A}: \overrightarrow{qf(q)} \in \text{Ker}(\vec{f} - \text{Id}_{\mathcal{A}})\}$ , y es conocido como el subespacio afín invariante por la isometría  $f$ .

Obsérvese que, por la unicidad en Lema 3.35,  $\mathcal{P}_f \neq \emptyset$  si y solo si  $u = \vec{0}$  y  $g = f$ .

DEMOSTRACIÓN: Llamemos

$$S = \{\overrightarrow{qf(q)}: q \in \mathcal{A}\} \subseteq \overrightarrow{\mathcal{A}},$$

y veamos que  $S$  es un subespacio afín de  $\overrightarrow{\mathcal{A}}$  (dotado de su estructura afín canónica como espacio vectorial) con  $\overrightarrow{S} = \text{Im}(\vec{f} - \text{Id}_{\mathcal{A}})$ . Para ello bastará con demostrar que, fijado  $p \in \mathcal{A}$  arbitrario,

$$S = \overrightarrow{pf(p)} + \text{Im}(\vec{f} - \text{Id}_{\mathcal{A}}).$$

En efecto, para todo  $q \in \mathcal{A}$  se tiene que

$$\overrightarrow{qf(q)} = \overrightarrow{qp} + \overrightarrow{pf(p)} + \overrightarrow{f(p)f(q)} = \overrightarrow{pf(p)} + \vec{f}(\overrightarrow{pq}) - \overrightarrow{pq} = \overrightarrow{pf(p)} + (\vec{f} - \text{Id}_{\mathcal{A}})(\overrightarrow{pq}),$$

de donde  $S \subseteq \overrightarrow{pf(p)} + \text{Im}(\vec{f} - \text{Id}_{\mathcal{A}})$ . La otra inclusión se sigue del cálculo inverso, ya que si tomamos  $\overrightarrow{pf(p)} + (\vec{f} - \text{Id}_{\mathcal{A}})(u) \in \overrightarrow{pf(p)} + \text{Im}(\vec{f} - \text{Id}_{\mathcal{A}})$  arbitrario entonces

$$\overrightarrow{pf(p)} + (\vec{f} - \text{Id}_{\mathcal{A}})(u) = \overrightarrow{pf(p)} + \vec{f}(u) - u = \overrightarrow{pf(p)} + \overrightarrow{f(p)f(p+u)} - \overrightarrow{p(p+u)} = \overrightarrow{(p+u)f(p+u)}$$

pertenece a  $S$ .

Como  $\overrightarrow{\mathcal{A}} = \overrightarrow{S} \oplus \overrightarrow{S}^\perp$ , los subespacios afines  $S$  y  $\overrightarrow{S}^\perp$  de  $\overrightarrow{\mathcal{A}}$  son complementarios y por tanto  $S \cap \overrightarrow{S}^\perp$  contiene un único punto (o vector)  $u$  (ver Proposición 2.69):

$$S \cap \overrightarrow{S}^\perp = \{u\}.$$

Por definición:

- Viendo  $u$  como punto del espacio afín  $\overrightarrow{\mathcal{A}}$ , éste ha de coincidir con la *proyección ortogonal afín*  $\pi_{\vec{S}^\perp}^\perp(\overrightarrow{pf(p)})$  para todo  $\overrightarrow{pf(p)} \in S$  (o  $p \in \mathcal{A}$ ).
- Viendo  $u$  como vector de  $\overrightarrow{\mathcal{A}}$ , éste coincide con la proyección ortogonal lineal  $\vec{\pi}_{\vec{S}^\perp}^\perp(\overrightarrow{pf(p)})$  para todo  $p \in \mathcal{A}$  (usar que  $\vec{S}^\perp$  es un subespacio vectorial de  $\overrightarrow{\mathcal{A}}$ ).

La ventaja de esta reflexión es que podemos utilizar cualquiera de las proyecciones ortogonales (afín o vectorial) sobre  $\vec{S}^\perp$  para presentar  $u$  porque el resultado es el mismo.

Por otra parte la Proposición 3.23 nos dice además que

$$\vec{S}^\perp = \text{Im}(\vec{f} - \text{Id})^\perp = \text{Ker}(\vec{f} - \text{Id}),$$

por lo que finalmente

$$u = \text{Ker}(\vec{f} - \text{Id}) \cap S = \vec{\pi}_{\text{Ker}(\vec{f} - \text{Id})}^\perp(\overrightarrow{pf(p)}) \quad \forall p \in \mathcal{A}.$$

Ahora podemos concluir la prueba:

- Existencia de  $u \in \text{Ker}(\vec{f} - \text{Id})$  y  $g$  isometría con  $\mathcal{P}_g \neq \emptyset$  tal que  $f = \tau_u \circ g$ . Tomemos  $u := \vec{\pi}_{\text{Ker}(\vec{f} - \text{Id})}^\perp(\overrightarrow{pf(p)}) \in \text{Ker}(\vec{f} - \text{Id})$ ,  $p \in \mathcal{A}$  arbitrario, y definamos

$$g = \tau_{-u} \circ f.$$

Como también  $u \in S$  ha de existir  $p_0 \in \mathcal{A}$  tal que  $\overrightarrow{p_0f(p_0)} = u$ , y el siguiente cálculo muestra que  $p_0 \in \mathcal{P}_g$ :

$$g(p_0) = p_0 + \overrightarrow{p_0g(p_0)} = p_0 + \overrightarrow{p_0\tau_{-u}(f(p_0))} = p_0 + \overrightarrow{p_0(f(p_0) + (-u))} = p_0 + \overrightarrow{p_0f(p_0)} - u = p_0.$$

- Unicidad de  $u \in \text{Ker}(\vec{f} - \text{Id})$  y  $g$  isometría con  $\mathcal{P}_g \neq \emptyset$  tal que  $f = \tau_u \circ g$ : Supongamos que  $f = \tau_{u'} \circ g'$  con  $u' \in \text{Ker}(\vec{f} - \text{Id}) = \vec{S}^\perp$  y  $\mathcal{P}_{g'} \neq \emptyset$ . Como existe  $q \in \mathcal{A}$  tal que  $g'(q) = q$  deducimos que  $u' = \overrightarrow{q\tau_{u'}(q)} = \overrightarrow{qf(q)} \in S$ , y de aquí que  $u' \in S \cap \vec{S}^\perp = \{u\}$ . Por tanto  $u = u'$  y  $g' = \tau_{-u'} \circ f = \tau_{-u} \circ f = g$ .

Para acabar nos resta observar que

$$\mathcal{P}_g = \{q \in \mathcal{A}: \overrightarrow{qf(q)} = u\} = \{q \in \mathcal{A}: \overrightarrow{qf(q)} \in \text{Ker}(\vec{f} - \text{Id})\}.$$

La identidad  $\mathcal{P}_g = \{q \in \mathcal{A}: \overrightarrow{qf(q)} = u\}$  es trivial de la definición de  $g$ , y la identidad  $\{q \in \mathcal{A}: \overrightarrow{qf(q)} = u\} = \{q \in \mathcal{A}: \overrightarrow{qf(q)} \in \text{Ker}(\vec{f} - \text{Id})\}$  se sigue inmediatamente de que  $S \cap \text{Ker}(\vec{f} - \text{Id}) = \{u\}$ . ■

**Observación 3.36** Con la notación del Lema 3.35, el vector de deslizamiento  $u$  de  $f$  se calcula como  $\overrightarrow{p_0f(p_0)}$  para cualquier  $p_0 \in \mathcal{P}_g = \{q \in \mathcal{A}: \overrightarrow{qf(q)} \in \text{Ker}(\vec{f} - \text{Id})\}$ .

Además  $f(\mathcal{P}_g) = \tau_u(\mathcal{P}_g) = \mathcal{P}_g$ , ya que  $u \in \text{Ker}(\vec{f} - \text{Id}) = \text{Ker}(\vec{g} - \text{Id}) = \overrightarrow{\mathcal{P}_g}$ . Por esta razón se refiere a  $\mathcal{P}_g$  como el subespacio afín invariante por  $f$ .

### 3.6.1. Clasificación de los movimientos rígidos en un plano afín euclíadiano

Sea  $f: \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}$  un movimiento rígido en un plano afín euclíadiano  $(\mathcal{A}, \langle \cdot, \cdot \rangle)$  ( $\dim \mathcal{A} = 2$ ). Se pueden dar los siguientes casos:

- (a)  $f$  es directo y  $\mathcal{P}_f = \emptyset$ . Como  $\det(\vec{f}) = 1$ , de la clasificación de isometrías lineales de un plano vectorial deducimos que o bien  $\vec{f} = \text{Id}_V$  ó  $\vec{f}$  es un giro de ángulo orientado  $\theta \in ]0, 2\pi[$  respecto de una orientación fijada en  $\overrightarrow{\mathcal{A}}$ . Si se diese el segundo caso tendríamos  $\text{Ker}(\vec{f} - \text{Id}_{\overrightarrow{\mathcal{A}}}) = \{\vec{0}\}$ , y por tanto de la Proposición 2.61  $\mathcal{P}_f \neq \emptyset$  consistiría de un punto, absurdo. Por tanto  $\vec{f} = \text{Id}_{\overrightarrow{\mathcal{A}}}$  y  $f$  es una **traslación**  $\tau_u$ ,  $u \in \overrightarrow{\mathcal{A}}$ .

En cualquier sistema de referencia  $\mathcal{R} = \{p_0, B\}$  de  $\mathcal{A}$  ( $B$  base de las direcciones de  $\mathcal{R}$ ), se tiene que

$$M(f, \mathcal{R}) = \left( \begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ \hline b_1 & 1 & 0 \\ b_2 & 0 & 1 \end{array} \right),$$

donde  $(b_1, b_2)$  son las coordenadas  $u_B$  de  $u$  en la base  $B$  de  $\overrightarrow{\mathcal{A}}$ .

- (b)  $f$  es directo y  $\mathcal{P}_f \neq \emptyset$ . Razonando como antes deducimos que  $\vec{f} = \text{Id}_V$  o  $\vec{f}$  es un giro de ángulo  $\theta \in ]0, 2\pi[$ . Como  $\mathcal{P}_f \neq \emptyset$ , si  $\vec{f} = \text{Id}_V$  entonces  $f = \text{Id}_{\mathcal{A}}$ . Si  $\vec{f}$  es un giro de ángulo orientado  $\theta \in ]0, 2\pi[$  respecto de una orientación fijada en  $\overrightarrow{\mathcal{A}}$  entonces  $\text{Ker}(\vec{f} - \text{Id}_{\overrightarrow{\mathcal{A}}}) = \{\vec{0}\}$  y  $\mathcal{P}_f = \{q\}$  es un punto por la Proposición 2.61; en este caso decimos que  $f$  es un **giro de centro**  $q \in \mathcal{A}$  y **ángulo orientado**  $\theta \in ]0, 2\pi[$  respecto de la orientación fijada en  $\overrightarrow{\mathcal{A}}$ . En cualquier sistema de referencia rectangular  $\mathcal{R} = \{q, B\}$  de  $\mathcal{A}$  con origen en el único punto fijo  $q$  ( $B$  representa la base ortonormal en  $\overrightarrow{\mathcal{A}}$  de las direcciones de  $\mathcal{R}$ , que supondremos positiva respecto de la orientación en  $\overrightarrow{\mathcal{A}}$ ), se tiene que

$$M(f, \mathcal{R}) = \left( \begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta & -\sin \theta \\ 0 & \sin \theta & \cos \theta \end{array} \right).$$

- (c)  $f$  es inverso y  $\mathcal{P}_f \neq \emptyset$ . Por la clasificación de isometrías lineales de un plano vectorial, como  $\det(\vec{f}) = -1$  deducimos que  $\vec{f}$  es la simetría ortogonal  $\vec{\sigma}_{V_1}^\perp$  respecto de la recta vectorial  $V_1 = \text{Ker}(\vec{f} - \text{Id}_{\overrightarrow{\mathcal{A}}})$ . Como  $\mathcal{P}_f \neq \emptyset$ , tomado  $q \in \mathcal{P}_f$  tenemos que

$$f(p) = f(q) + \vec{f}(\vec{pq}) = q + \vec{\sigma}_{V_1}^\perp(\vec{pq}) \quad \forall p \in \mathcal{A},$$

y por tanto por definición  $f$  es la **simetría respecto de la recta afín**  $S = q + V_1 = \mathcal{P}_f$  en la dirección de  $V_1^\perp = V_{-1} = \text{Ker}(\vec{f} + \text{Id}_{\overrightarrow{\mathcal{A}}})$ , o simplemente  $f$  es la **simetría ortogonal respecto de la recta afín**  $S = \mathcal{P}_f$ , y es denotada como  $\sigma_S^\perp$ . En cualquier sistema de referencia rectangular  $\mathcal{R} = \{q, B\}$  de  $\mathcal{A}$  con origen en  $q \in S = \mathcal{P}_f$  y base ortonormal de direcciones  $B = \{v_1, v_{-1}\}$  con  $v_1 \in \vec{S} = V_1$  y  $v_{-1} \in \vec{S}^\perp = V_{-1}$ , se tiene que

$$M(f, \mathcal{R}) = \left( \begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{array} \right).$$

(d)  $f$  es inverso y  $\mathcal{P}_f = \emptyset$ . Como antes  $\vec{f}$  es la simetría ortogonal  $\vec{\sigma}_{V_1}^\perp$  respecto de la recta vectorial  $V_1 = \text{Ker}(\vec{f} - \text{Id}_{\mathcal{A}})$ . Usemos el Lema 3.35 y pongamos

$$f = \tau_u \circ g$$

donde  $u \in V_1 \setminus \{0\}$ ,  $\mathcal{P}_g \neq \emptyset$  y  $\vec{f} = \vec{g}$ . Por el caso anterior  $g$  es la simetría ortogonal respecto de la recta afín  $S = \mathcal{P}_g$ , y por tanto  $f$  es la composición de la simetría ortogonal afín  $\sigma_S^\perp$  respecto de la recta  $S = \mathcal{P}_g$  y la translación de vector  $u \in V_1 = \text{Ker}(\vec{g} - \text{Id}_{\mathcal{A}}) = \vec{S}$  no nulo. Este movimiento rígido se llama **simetría deslizante respecto de la recta afín  $S$  con vector de deslizamiento  $u \in \vec{S}$** . En cualquier sistema de referencia rectangular  $\mathcal{R} = \{q, B\}$  de  $\mathcal{A}$  con origen en  $q \in S = \mathcal{P}_g$  y base ortonormal de direcciones  $B = \{v_1, v_2\}$  con  $v_1 \in \vec{S} = V_1$  y  $v_2 \in \vec{S}^\perp = V_{-1}$ , se tiene que

$$M(f, \mathcal{R}) = \left( \begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ b_1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{array} \right),$$

donde  $(b_1, 0) \neq (0, 0)$  son las coordenadas  $u_B$  de  $u$  en  $B$ .

**Observación 3.37** Si  $f = \tau_u \circ g$  es una simetría deslizante con  $g = \sigma_S^\perp$  y  $u \in \vec{S}$ , hemos probado que (ver el Lema 3.35):

- La recta de simetría  $S$  de  $f$  coincide con  $\mathcal{P}_g$ .
- El vector de deslizamiento  $u = \overrightarrow{pf(p)}$  para cualquier  $p \in S$ .

A efectos de cálculo,  $S = \{p \in \mathcal{A}: \overrightarrow{pf(p)} \in \vec{S} = \text{Ker}(\vec{f} - \text{Id}_V)\}$ .

También puede ser descrita también como el lugar geométrico

$$S = \{\mathbf{m}_{pf(p)}: p \in \mathcal{A}\}.$$

En efecto, para todo  $p \in \mathcal{A}$

$$\mathbf{m}_{p,f(p)} = p + \frac{1}{2}\overrightarrow{pf(p)} = (p + \frac{1}{2}\overrightarrow{pg(p)}) + \frac{1}{2}u = \mathbf{m}_{p,g(p)} + \frac{1}{2}u,$$

de donde usando que  $S = \mathcal{P}_g = \{\mathbf{m}_{p,g(p)}: p \in \mathcal{A}\}$  y  $u \in \vec{S}$  se sigue lo enunciado.

**Ejercicio 3.38** Se considera la aplicación afín  $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  cuya expresión matricial con respecto a  $R_0$  es:

$$f(x, y) = \begin{pmatrix} -3/5 & -4/5 \\ -4/5 & 3/5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Demuestra que es un movimiento rígido, clasifícalo y describe sus elementos geométricos.

**SOLUCIÓN :** Observemos que

$$M(\vec{f}, B_0) = \begin{pmatrix} -3/5 & -4/5 \\ -4/5 & 3/5 \end{pmatrix}$$

y claramente  $M(\vec{f}, B_0) \cdot M(\vec{f}, B_0)^t = I_2$ , esto es,  $M(\vec{f}, B_0) \in O(2, \mathbb{R})$  (es una matriz ortogonal). Como el sistema de referencia usual  $\mathcal{R}_0 = \{(0, 0), B_0\}$  en  $\mathbb{R}^2$  es rectangular

respecto del producto escalar clásico  $\langle \cdot, \cdot \rangle$ , y por tanto la base usual  $B_0$  es una base ortonormal en  $(\mathbb{R}^2, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ , inferimos que efectivamente  $f$  es un movimiento rígido.

Escrito con nuestra notación habitual  $f$  está determinado por la siguiente expresión matricial

$$\begin{pmatrix} 1 \\ f(x, y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & -3/5 & -4/5 \\ 1 & -4/5 & 3/5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ x \\ y \end{pmatrix}$$

Como  $\det M(\vec{f}, B_0) = -1$  se trata de un movimiento inverso.

Además la ecuación  $f(x, y) = (x, y)$ , que se escribe

$$\left( -\frac{3}{5}x - \frac{4}{5}y + 3, -\frac{4}{5}x + \frac{3}{5}y + 1 \right) = (x, y),$$

no tiene ninguna solución por lo que  $\mathcal{P}_f = \emptyset$ .

Mirando la clasificación de movimientos rígidos en el plano  $f$  ha de ser una *simetría deslizante*. Describamos a continuación sus elementos geométricos. Para ello hemos de encontrar la recta  $S$  respecto a la que simetrizamos y el vector  $u \in \vec{S}$  con el que trasladamos, de forma que  $f = \tau_u \circ \sigma_S^\perp$ . De la Observación 3.37, la recta de simetría descrita en forma paramétrica se calcula de la siguiente forma

$$\begin{aligned} S = \{m_{(a,b)f(a,b)} : (a, b) \in \mathbb{R}^2\} &= \left\{ \frac{1}{2}(a, b) + \frac{1}{2} \left( -\frac{3}{5}a - \frac{4}{5}b + 3, -\frac{4}{5}a + \frac{3}{5}b + 1 \right) : (a, b) \in \mathbb{R}^2 \right\} = \\ &= \left\{ \frac{1}{10}(2a - 4b + 15, -4a + 8b + 5) : (a, b) \in \mathbb{R}^2 \right\}. \end{aligned}$$

Llamando  $\lambda = 2a - 4b$  para eliminar la redundancia de parámetros queda

$$S = \left\{ \frac{1}{10}(\lambda + 15, -2\lambda + 5) : \lambda \in \mathbb{R} \right\} = (3/2, 1/2) + L(\{(1, -2)\}).$$

Otra forma alternativa de calcular  $S$  es coger un punto de  $\mathbb{R}^2$  arbitrario, por ejemplo el  $(0, 0)$  por simplicidad de cálculo, determinar su imagen  $f(0, 0) = (3, 1)$ , y tener en cuenta que el punto medio

$$m_{(0,0)f(0,0)} = (3/2, 1/2) \in S.$$

Como de la Observación 3.37 la variedad de dirección de  $S$  viene dada por

$$\begin{aligned} \vec{S} &= \text{Ker}(\vec{f} - \text{Id}_{\mathbb{R}^2}) = \{(x, y) : (M(\vec{f}, B_0) - I_2)(x, y)^t = (0, 0)^t\} = \\ &\{(x, y) : \begin{pmatrix} -\frac{8}{5} & -\frac{4}{5} \\ -\frac{4}{5} & -\frac{2}{5} \end{pmatrix} (x, y)^t = (0, 0)^t\} = \{(x, y) : y = -2x\} = L(\{(1, -2)\}), \end{aligned}$$

se sigue también que  $S = (3/2, 1/2) + L(\{(1, -2)\})$ .

Para calcular el vector de desplazamiento  $u \in \vec{S}$  de  $f$ , basta con elegir cualquier punto de  $S$ , por sencillez de cálculo elegiremos el  $(3/2, 1/2)$ , calcular su imagen  $f(3/2, 1/2) = (17/10, 1/10)$  por  $f$ , y usar la fórmula (ver Observación 3.37)

$$u = \overrightarrow{(3/2, 1/2), f(3/2, 1/2)} = \overrightarrow{(3/2, 1/2), (17/10, 1/10)} = (1/5, -2/5).$$

■

**Ejercicio 3.39** Calcular en coordenadas usuales de  $\mathbb{R}^2$  los siguientes movimientos:

- (a) *El giro de centro el punto  $O = (1, 2)$  y ángulo orientado  $\theta = 2\pi/3$  respecto de la orientación usual.*
- (b) *La simetría ortogonal deslizante respecto de la recta afín  $S = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x - y = 1\}$  con vector de deslizamiento  $u = (1, 1)$ .*

**SOLUCIÓN :** Resolvamos (a). Recordemos que la orientación usual en  $\mathbb{R}^2$  es la que tiene por base positiva a la base usual  $B_0$ . Por tanto, si fijamos el sistema de referencia rectangular  $\mathcal{R} = \{(1, 2), B_0\}$ , la matriz que representa al giro  $G: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  en el plano euclíadiano usual  $(\mathbb{R}^2, \langle \cdot, \cdot \rangle)$  viene dada por

$$M(G, \mathcal{R}) = \left( \begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(2\pi/3) & -\sin(2\pi/3) \\ 0 & \sin(2\pi/3) & \cos(2\pi/3) \end{array} \right) = \left( \begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & -\sqrt{3}/2 \\ 0 & \sqrt{3}/2 & 1/2 \end{array} \right).$$

Si  $\mathcal{R}_0$  es el sistema de referencia usual entonces

$$M(\text{Id}_{\mathbb{R}^2}, \mathcal{R}, \mathcal{R}_0) = \left( \begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{array} \right),$$

de donde

$$M(G, \mathcal{R}_0) = M(\text{Id}_{\mathbb{R}^2}, \mathcal{R}, \mathcal{R}_0) \cdot M(G, \mathcal{R}) \cdot M(\text{Id}_{\mathbb{R}^2}, \mathcal{R}, \mathcal{R}_0)^{-1} = \left( \begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ \sqrt{3} + \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ 1 - \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{array} \right).$$

Resolvamos ahora (b) con un razonamiento similar. En este caso hemos de encontrar la expresión analítica del movimiento  $\tau_u \circ \sigma_S^\perp$ .

Primero observemos que

$$S = (1, 0) + L(\{(1, 1)\}) \quad \text{y} \quad \vec{S} = L(\{(1, 1)\}),$$

por lo que la condición natural  $u = (1, 1) \in \vec{S}$  para el vector de deslizamiento se satisface. Es claro que  $\vec{S}^\perp = L(\{(1, 1)\})^\perp = L\{(1, -1)\}$ , de donde

$$B = \{v_1 = (\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}), v_{-1} = (\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}})\}$$

es una base ortonormal de  $(\mathbb{R}^2, \langle \cdot, \cdot \rangle)$  con  $v_1 \in \vec{S}, v_{-1} \in \vec{S}^\perp$ .

Teniendo en cuenta que  $q = (1, 0) \in S$ , en el sistema de referencia  $\mathcal{R} = \{q, B\}$  la simetría ortogonal  $\sigma_S^\perp$  respecto de la recta  $S$  viene representada por la matriz

$$M(\sigma_S^\perp, \mathcal{R}) = \left( \begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{array} \right).$$

Razonando como antes, si  $\mathcal{R}_0$  es el sistema de referencia usual entonces

$$M(\text{Id}_{\mathbb{R}^2}, \mathcal{R}, \mathcal{R}_0) = \left( \begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ 1 & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{array} \right),$$

de donde

$$M(\sigma_S^\perp, \mathcal{R}_0) = M(\text{Id}_{\mathbb{R}^2}(\mathcal{R}, \mathcal{R}_0) \cdot M(\sigma_S^\perp, \mathcal{R}) \cdot M(\text{Id}_{\mathbb{R}^2}(\mathcal{R}, \mathcal{R}_0)^{-1} = \left( \begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ \hline 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{array} \right).$$

Como la traslación  $\tau_u$  satisface

$$M(\tau_u, \mathcal{R}_0) = \left( \begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ \hline 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{array} \right),$$

la simetría deslizante  $f = \tau_u \circ \sigma_S^\perp: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  que resuelve el ejercicio viene determinada por la expresión

$$M(f, \mathcal{R}_0) = M(\tau_u, \mathcal{R}_0) \cdot M(\sigma_S^\perp, \mathcal{R}_0) = \left( \begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ \hline 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{array} \right) \cdot \left( \begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ \hline 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{array} \right) = \left( \begin{array}{ccc} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{array} \right).$$

■

**Ejercicio 3.40** Construir un movimiento rígido de  $(\mathbb{R}^2, \langle \cdot, \cdot \rangle)$  que transforme la recta afín  $S$  de ecuación  $x + y = 2$  en la recta afín  $R = (1, -1) + L((1, 1))$ . Clasificar el movimiento obtenido.

SOLUCIÓN: Estudiemos la posición relativa de  $S$  y  $R$ . Para ello observemos que

$$S = \{(x, y): x + y = 2\} = (1, 1) + L(\{(1, -1)\}), \quad R = (1, -1) + L(\{(1, 1)\}) = \{(x, y): x - y = 2\},$$

de donde  $S \cap R = \{(x, y): x + y = x - y = 2\} = \{(2, 0)\}$ . Se trata pues de dos rectas secantes en el punto  $p_0 = (2, 0)$ . Los vectores  $u = (1, -1)$  y  $v = (1, 1)$  directores de  $S$  y  $R$ , respectivamente, satisfacen  $\langle u, v \rangle = 0$ , esto es,  $u \perp v$  y  $L(\{u\})^\perp = L(\{v\})$ , por lo que las rectas son ortogonales. Resumiendo

$$S \cap R = \{p_0\} \quad \text{y} \quad S \perp T.$$

Cualquier giro  $G$  con centro  $p_0$  y ángulo orientado  $\pm\pi/2$  respecto de la orientación usual en  $\mathbb{R}^2$  llevará  $S$  en  $R$  ya que

$$G(S) = G(p_0) + \vec{g}(S) = G(p_0) + \vec{g}(L(\{u\})) = p_0 + L(\{\vec{g}(u)\}) = p_0 + L(\{v\}) = R,$$

y análogamente  $G(R) = S$ . Aquí hemos tenido en cuenta que  $\angle(u, \vec{g}(u)) = \pi/2$ , esto es  $u \perp \vec{g}(u)$ , y por tanto  $\vec{g}(u) \in \vec{R} = L(\{v\})$ .

Por lo demás, para determinar un tal giro  $G$  se sigue el procedimiento habitual. Consideramos cualquier sistema de referencia rectangular con origen  $p_0$ , por ejemplo  $\mathcal{R} = \{p_0, B_0\}$ , y escribimos

$$M(G, \mathcal{R}) = \left( \begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & \cos(\pi/2) & -\sin(\pi/2) \\ 0 & \sin(\pi/2) & \cos(\pi/2) \end{array} \right) = \left( \begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{array} \right).$$

Como

$$M(\text{Id}_{\mathbb{R}^3}, \mathcal{R}, \mathcal{R}_0) = \left( \begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ \hline 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

y  $M(G, \mathcal{R}_0) = M(\text{Id}_{\mathbb{R}^3}, \mathcal{R}, \mathcal{R}_0) \cdot M(G, \mathcal{R}) \cdot M(\text{Id}_{\mathbb{R}^3}, \mathcal{R}, \mathcal{R}_0)^{-1}$ , quedará

$$M(G, \mathcal{R}_0) = \left( \begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ \hline 2 & 0 & -1 \\ -2 & 1 & 0 \end{array} \right).$$

La solución proporcionada no es única, por ejemplo al principio podíamos haber elegido  $G$  con

$$M(G, \mathcal{R}) = \left( \begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & \cos(-\pi/2) & -\sin(-\pi/2) \\ 0 & \sin(-\pi/2) & \cos(-\pi/2) \end{array} \right) = \left( \begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{array} \right),$$

y proceder de forma similar.

Otra posibilidad para resolver el ejercicio es encontrar una simetría ortogonal  $\sigma_T^\perp$  en  $\mathbb{R}^2$  que lleve  $S$  en  $R$ . La idea es considerar una recta  $T$  que contenga a  $p_0$  y satisfaga  $\vec{\sigma}_{\vec{T}}^\perp(\vec{S}) = \vec{R}$ . En efecto, en ese caso se tendría

$$\sigma_T^\perp(S) = \sigma_T^\perp(p_0 + \vec{S}) = \sigma_T^\perp(p_0) + \vec{\sigma}_{\vec{T}}^\perp(\vec{S}) = p_0 + \vec{R} = R.$$

Encontrar esa recta en este caso es fácil, bastará encontrar un subespacio vectorial  $U \subset \mathbb{R}^2$  tal que

$$\vec{\sigma}_U^\perp(1, -1) = (1, 1),$$

por ejemplo  $U = L\{(0, 1)\}$  (también valdría  $U = L\{(1, 0)\}$ ), y simplemente tomar  $T = p_0 + U = (2, 0) + L\{(0, 1)\}$ . Como hemos explicado antes la simetría  $\sigma_T^\perp$  resolvería el ejercicio. Por otra parte, es inmediato demostrar que

$$M(\sigma_T^\perp, \mathcal{R}_0) = \left( \begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ \hline 4 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{array} \right).$$

■

### 3.6.2. Clasificación de los movimientos rígidos en un espacio afín euclíadiano tridimensional

Sea  $f: \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}$  un movimiento rígido en un espacio afín euclíadiano  $(\mathcal{A}, \vec{\mathcal{A}}, \langle \cdot, \cdot \rangle)$  de  $\dim \mathcal{A} = 3$ . Se pueden dar los siguientes casos:

- (A)  $f$  es directo y  $\mathcal{P}_f \neq \emptyset$ . De la clasificación de isometrías lineales de espacios vectoriales euclidianos tridimensionales con  $\det(\vec{f}) = 1$  deducimos que  $\vec{f} = \text{Id}_V$  ó  $\vec{f}$  es un giro con eje la recta vectorial  $V_1 = \text{Ker}(\vec{f} - \text{Id}_{\vec{\mathcal{A}}})$  de ángulo orientado  $\theta \in ]0, 2\pi[$  respecto de una orientación  $\mathcal{O}$  en el plano vectorial  $V_1^\perp$ . En el primer caso claramente  $f = \text{Id}_{\mathcal{A}}$ . En el segundo caso, fijado  $q \in \mathcal{P}_f$ , tenemos que

$$\mathcal{P}_f = q + V_1 \text{ y } f(p) = q + \vec{f}(\vec{qp}) \text{ para todo } p \in \mathcal{A}.$$

Por definición se dice que  $f$  es un giro con eje la recta afín  $S = \mathcal{P}_f$  de ángulo orientado  $\theta \in ]0, 2\pi[$  respecto de la orientación  $\mathcal{O}$  adoptada en  $\vec{S}^\perp$ . En cualquier sistema de referencia rectangular  $\mathcal{R} = \{q, B\}$  de  $\mathcal{A}$  con origen en  $q \in S$  y base

ortonormal de direcciones  $B = \{v_1, v_2, v_3\}$  tal que  $v_3 \in \vec{S} = V_1$  y  $\{v_1, v_2\}$  es base positiva en  $(\vec{S}^\perp = V_1^\perp, \mathcal{O})$ , se tiene que

$$M(f, \mathcal{R}) = \left( \begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & \cos \theta & -\sin \theta & 0 \\ 0 & \sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right).$$

Si no enfatizamos orientación, el ángulo  $\alpha \in ]0, \pi]$  no orientado asociado al giro  $f$  obedece a la fórmula

$$2 \cos \alpha + 1 = \text{Traza}(M(\vec{f}, B)).$$

- (B)  $f$  es directo y  $\mathcal{P}_f = \emptyset$ . Aquí tenemos en cuenta Lema 3.35 y descomponemos  $f = \tau_u \circ g$ , donde  $u \in V_1 = \text{Ker}(\vec{f} - \text{Id}_{\vec{\mathcal{A}}})$ ,  $u \neq \vec{0}$ , y  $\mathcal{P}_g \neq \emptyset$ . Del caso anterior  $\vec{g} = \text{Id}_{\vec{\mathcal{A}}}$  ó  $\vec{g}$  es un giro con eje la recta vectorial  $\text{Ker}(\vec{g} - \text{Id}_{\vec{\mathcal{A}}}) = V_1$  de ángulo orientado  $\theta \in ]0, 2\pi[$  respecto a una orientación dada en  $V_1^\perp$  (recordar que  $\vec{f} = \vec{g}$ ). Al ser  $\mathcal{P}_f = \emptyset$ , en el primer caso  $\vec{g} = \text{Id}_{\vec{\mathcal{A}}}$  se tiene que  $f$  es **una translación**  $\tau_u$ ,  $u \in \vec{\mathcal{A}}$ . En cualquier sistema de referencia  $\mathcal{R} = \{q, B\}$  de  $\mathcal{A}$  obtenemos

$$M(f, \mathcal{R}) = \left( \begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline b_1 & 1 & 0 & 0 \\ b_2 & 0 & 1 & 0 \\ b_3 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right),$$

donde  $(b_1, b_2, b_3)$  son las coordenadas  $u_B$  de  $u$  en la base  $B$ .

En el caso de que  $\vec{g}$  sea un giro, por lo visto en (A) inferimos que  $g$  es un giro con eje la recta afín  $S = \mathcal{P}_g$  de ángulo orientado  $\theta \in ]0, 2\pi[$  respecto a una orientación prefijada en  $V_1^\perp = \vec{S}^\perp$ , y por tanto  $f$  es la composición de ese giro con una traslación de vector  $u \in \vec{S} = V_1$ ,  $u \neq \vec{0}$ . Se dice que  $f$  es **un movimiento helicoidal de eje la recta afín  $S$** , ángulo orientado  $\theta \in ]0, 2\pi[$  (respecto de la orientación fijada en  $V_1^\perp$ ) y **vector de deslizamiento**  $u \in \vec{S}$ . En cualquier sistema de referencia rectangular  $\mathcal{R} = \{q, B\}$  de  $\mathcal{A}$  con origen en  $q \in S$  y base ortonormal de direcciones  $B = \{v_1, v_2, v_3\}$  tal que  $v_3 \in \vec{S} = V_1$  y  $\{v_2, v_3\}$  es positiva en  $V_1^\perp$ , se tiene que

$$M(f, \mathcal{R}) = \left( \begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & \cos \theta & -\sin \theta & 0 \\ 0 & \sin \theta & \cos \theta & 0 \\ b_3 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right),$$

donde  $(0, 0, b_3)$  son las coordenadas  $u_B$  de  $u$  en la base  $B$ .

Si no enfatizamos orientación, el ángulo  $\alpha \in ]0, \pi]$  no orientado asociado al movimiento helicoidal  $f$  obedece a la fórmula

$$2 \cos \alpha + 1 = \text{Traza}(M(\vec{f}, B)).$$

**Observación 3.41** Los puntos  $p$  del eje  $S$  del movimiento helicoidal  $f = \tau_u \circ g$  son los puntos fijos del giro  $g$ , y se caracterizan del Lema 3.35 por la propiedad  $\overrightarrow{pf(p)} \in \vec{S} = V_1 = \text{Ker}(\vec{f} - \text{Id}_V)$ , siendo el vector de deslizamiento  $u = \overrightarrow{pf(p)}$  para cualquier  $p \in S$ .

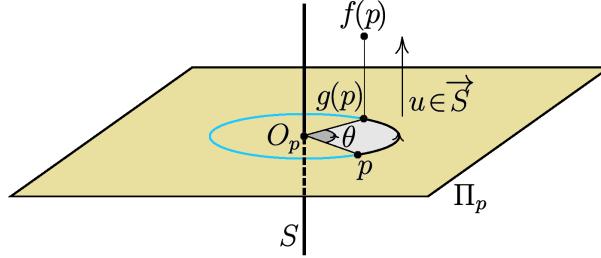


Figura 14: Movimiento Helicoidal

Se puede visualizar un movimiento helicoidal  $f$  con eje  $S$ , ángulo  $\theta$  y vector de deslizamiento  $u \in \vec{S}$  de la siguiente manera. Dibuja el eje  $S$  y coge un punto  $p$  cualquiera del espacio. Toma el plano  $\Pi_p$  perpendicular a  $S$  que contiene a  $p$  y llama  $O_p$  al punto de corte  $S \cap \Pi_p$ . Luego, dentro del plano  $\Pi_p$ , con un compás pinchas en  $O_p$  y abres el compás hasta alcanzar en el extremo a  $p$ , realizando a continuación el giro en  $\Pi_p$  del punto  $p$  con centro  $O_p$  y ángulo  $\theta$  de la forma tradicional. Te saldrá un nuevo punto  $g(p) \in \Pi_p$ , justo la imagen de  $p$  por el giro  $g$  con eje  $S$  y ángulo  $\theta$ , al que luego solo tienes que sumar el vector de deslizamiento  $u$  (ortogonal a  $\Pi_p$  y en la dirección de  $\vec{S}$ ): el punto  $f(p)$  es el  $g(p) + u$ .

- (C)  $f$  es inverso y  $\mathcal{P}_f \neq \emptyset$ . Por la clasificación de isometrías lineales de un espacio vectorial euclídeo tridimensional, como  $\det(\vec{f}) = -1$  surgen dos posibilidades para  $\vec{f}$ :

- $\vec{f}$  es la simetría ortogonal  $\vec{\sigma}_{V_1}^\perp$  respecto de un plano vectorial  $V_1 = \text{Ker}(\vec{f} - \text{Id}_{\mathcal{A}})$ . En este caso, como  $\mathcal{P}_f \neq \emptyset$ , tomado  $q \in \mathcal{P}_f$  tenemos que

$$f(p) = f(q) + \vec{f}(\vec{pq}) = q + \vec{\sigma}_{V_1}^\perp(\vec{pq}) \quad \forall p \in \mathcal{A}.$$

y por tanto por definición  $f$  es la simetría respecto del plano afín  $S = q + V_1 = \mathcal{P}_f$  en la dirección de  $V_1^\perp = V_{-1} = \text{Ker}(\vec{f} + \text{Id}_{\mathcal{A}})$ , o simplemente  $f$  es la simetría ortogonal respecto del plano afín  $S = \mathcal{P}_f$ , que será denotada como  $\sigma_S^\perp$ . En cualquier sistema de referencia rectangular  $\mathcal{R} = \{q, B\}$  de  $\mathcal{A}$  con origen en  $q \in S$  y base ortonormal de direcciones  $B = \{v_1, v_2, v_3\}$  con  $v_1, v_2 \in \vec{S} = V_1$  y  $v_3 \in V_{-1} = V_1^\perp$ , se tiene que

$$M(f, \mathcal{R}) = \left( \begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{array} \right).$$

- $\vec{f}$  es un giro con eje una recta vectorial  $U \subseteq V_{-1} = \text{Ker}(\vec{f} + \text{Id}_{\mathcal{A}})$  y ángulo orientado  $\theta \in ]0, 2\pi[$  respecto a una orientación en  $U^\perp$ , seguido de la simetría ortogonal  $\vec{\sigma}_{U^\perp}^\perp$  respecto del plano vectorial  $U^\perp$ . En este caso  $\text{Ker}(\vec{f} - \text{Id}_{\mathcal{A}}) = \{\vec{0}\}$ , por lo que la Proposición 2.61 garantiza que  $f$  tiene un único punto fijo que llamaremos  $p_0$ . Resulta por tanto que  $f$  es la composición del giro de eje  $S = p_0 + U$  y ángulo orientado  $\theta$  respecto de una orientación en  $U^\perp$ , y la simetría ortogonal  $\sigma_T^\perp$  respecto a  $T = p_0 + U^\perp$ . En cualquier sistema de referencia rectangular  $\mathcal{R} = \{p_0, B\}$  de  $\mathcal{A}$  con origen en el único punto fijo

$p_0$  de  $f$  y base ortonormal de direcciones  $B = \{v_1, v_2, v_3\}$  con  $v_3 \in \vec{S} = U$  y  $\{v_2, v_3\}$  base positiva de  $U^\perp$ , se tiene que

$$M(f, \mathcal{R}) = \left( \begin{array}{c|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & \cos \theta & -\sin \theta & 0 \\ 0 & \sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{array} \right).$$

Nótese que  $U = L\{v_3\} = V_{-1} = \text{Ker}(\vec{f} + \text{Id}_{\mathcal{A}})$  si y solo si  $\theta \neq \pi$ , y si  $\theta = \pi$  entonces  $\vec{f} = -\text{Id}_{\mathcal{A}} = V_{-1}$ . Cuando  $\theta = \pi$  el movimiento  $f$  se denomina también *simetría central* respecto al punto  $p_0$ , y se corresponde con la homotecia  $h_{p_0, -1}$ .

Si no enfatizamos orientación, el ángulo  $\alpha \in ]0, \pi]$  no orientado asociado a  $f$  obedece a la fórmula

$$2 \cos \alpha - 1 = \text{Traza}(M(\vec{f}, B)).$$

(D)  $f$  es inverso y  $\mathcal{P}_f = \emptyset$ . Razonamos como en el caso anterior, solo que como  $\mathcal{P}_f = \emptyset$  la Proposición 2.61 nos dice que el caso  $\text{Ker}(\vec{f} - \text{Id}_{\mathcal{A}}) = \{\vec{0}\}$  no se puede darse, y  $\vec{f}$  ha de ser necesariamente la simetría ortogonal  $\vec{\sigma}_{V_1}^\perp$  respecto del plano vectorial  $V_1 = \text{Ker}(\vec{f} - \text{Id}_{\mathcal{A}})$ . Por el Lema 3.35

$$f = \tau_u \circ g,$$

donde  $u \in V_1 \setminus \{0\}$  y  $\mathcal{P}_g \neq \emptyset$ . Siguiendo lo visto en (C),  $g$  ha de ser la simetría ortogonal  $\sigma_S^\perp$  respecto del plano afín  $S = \mathcal{P}_g$ , y por tanto  $f$  es la composición de  $\sigma_S^\perp$  y la translación de vector  $u \in V_1 = \text{Ker}(\vec{g} - \text{Id}_V) = \text{Ker}(\vec{f} - \text{Id}_V) = \vec{S}$ . Este movimiento rígido se llama **simetría ortogonal deslizante respecto del plano afín  $S$  con vector de deslizamiento  $u \in \vec{S}$** .

En cualquier sistema de referencia rectangular  $\mathcal{R} = \{q, B\}$  de  $\mathcal{A}$  con origen en  $q \in S$  y base ortonormal de direcciones  $B = \{v_1, v_2, v_3\}$  con  $v_1, v_2 \in \vec{S} = V_1 = \text{Ker}(\vec{f} - \text{Id}_{\mathcal{A}})$  y  $v_3 \in V_{-1} = \text{Ker}(\vec{f} + \text{Id}_{\mathcal{A}})$ , se tiene que

$$M(f, \mathcal{R}) = \left( \begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline b_1 & 1 & 0 & 0 \\ b_2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{array} \right),$$

donde  $(b_1, b_2, 0)$  son las coordenadas  $u_B$  de  $u$  en  $B$ .

**Observación 3.42** Si  $f = \tau_u \circ g$  es una simetría deslizante con  $g = \sigma_S^\perp$  y  $u \in \vec{S}$ , hemos probado que (ver el Lema 3.35):

- El plano de simetría  $S$  de  $f$  coincide con  $\mathcal{P}_g$ .
- El vector de deslizamiento  $u = \overrightarrow{pf(p)}$  para cualquier  $p \in S$ .

A efectos de cálculo,  $S = \{p \in \mathcal{A}: \overrightarrow{pf(p)} \in \vec{S} = \text{Ker}(\vec{f} - \text{Id}_V)\}$ .

El plano  $S$  puede ser descrito también como el lugar geométrico

$$S = \{\mathbf{m}_{pf(p)}: p \in \mathcal{A}\}.$$

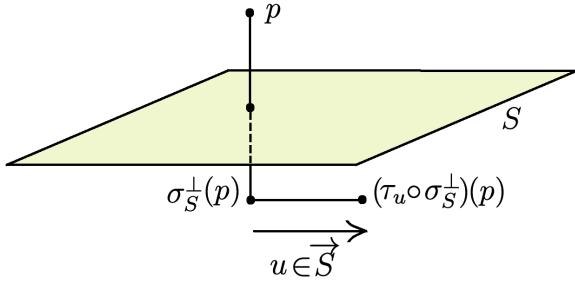


Figura 15: Simetría ortogonal con deslizamiento

En efecto, para todo  $p \in \mathcal{A}$

$$\mathbf{m}_{p,f(p)} = p + \frac{1}{2} \overrightarrow{pf(p)} = (p + \frac{1}{2} \overrightarrow{pg(p)}) + \frac{1}{2} u = \mathbf{m}_{p,g(p)} + \frac{1}{2} u,$$

de donde usando que  $S = \mathcal{P}_g = \{\mathbf{m}_{p,g(p)} : p \in \mathcal{A}\}$  y  $u \in \vec{S}$  se sigue lo enunciado.

Es conveniente dibujar los elementos geométricos de los movimientos estudiados en cada caso (rectas o planos de simetría, ángulos de giro y vectores de deslizamiento) en una cuartilla de papel. Intenta visualizar cómo actúa cada uno de ellos, entendiendo la posición relativa de un punto genérico y su imagen. Este ejercicio geométrico sencillo es importante, te ayudará a comprender mejor la naturaleza de todos estos movimientos.

**Ejercicio 3.43** Demuestra que la siguiente aplicación afín  $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$

$$f(x, y, z) = \left( \frac{1+\sqrt{3}}{2} + \frac{x-\sqrt{3}y}{2}, \frac{1-\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{3}x+y}{2}, z+1 \right).$$

es un movimiento rígido del espacio afín euclídeo  $\mathbb{R}^3$  y clasifícalo determinando sus elementos geométricos.

SOLUCIÓN: La aplicación lineal asociada  $\vec{f}$  satisface

$$M(\vec{f}, B_0) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} & 0 \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Claramente  $M(\vec{f}, B_0) \cdot M(\vec{f}, B_0)^t = I_3$ , esto es,  $M(\vec{f}, B_0) \in O(3, \mathbb{R})$  (es una matriz ortogonal). Como el sistema de referencia usual  $\mathcal{R}_0 = \{(0, 0, 0), B_0\}$  en  $\mathbb{R}^3$  es rectangular respecto del producto escalar clásico  $\langle \cdot, \cdot \rangle$ , y por tanto la base usual  $B_0$  es una base ortonormal en  $(\mathbb{R}^3, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ , inferimos que efectivamente  $f$  es un movimiento rígido.

Además  $\det M(\vec{f}, B_0) = 1$ , por lo que es un movimiento directo. Su conjunto de puntos fijos viene dado por  $\mathcal{P}_f = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : f(x, y, z) = (x, y, z)\}$ , esto es,

$$\begin{aligned} \mathcal{P}_f = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \left( \frac{1+\sqrt{3}}{2} + \frac{x-\sqrt{3}y}{2}, \frac{1-\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{3}x+y}{2}, z+1 \right) = (x, y, z) \} = \\ \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \left( \frac{1+\sqrt{3}}{2} + \frac{-x-\sqrt{3}y}{2}, \frac{1-\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{3}x-y}{2}, 1 \right) = (0, 0, 0) \} = \emptyset. \end{aligned}$$

Como  $\vec{f} \neq \text{Id}_{\mathbb{R}^3}$ , la clasificación de los movimientos rígidos en espacios euclidianos tridimensionales nos dice que  $f$  es un movimiento helicoidal. Determinemos sus elementos geométricos, esto es, eje  $S$ , ángulo de giro  $\theta$  y vector de deslizamiento  $u \in \vec{S}$ .

Recordemos que  $\vec{S} = \text{Ker}(\vec{f} - \text{Id}_V)$ , esto es,

$$\begin{aligned}\vec{S} &= \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : (M(\vec{f}, B_0) - I_3) \cdot (x, y, z)^t = (0, 0, 0)^t\} = \\ &= \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} & 0 \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot (x, y, z)^t = (0, 0, 0)^t\} = \\ &= \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x = y = 0\} = L(\{(0, 0, 1)\}).\end{aligned}$$

De la Observación 3.41, los puntos  $(x, y, z)$  del eje  $S$  de  $f$  se caracterizan por la propiedad  $\overrightarrow{(x, y, z)f(x, y, z)} \in \vec{S}$ , esto es,

$$\overrightarrow{(x, y, z)f(x, y, z)} = \left( \frac{1 + \sqrt{3}}{2} + \frac{-x - \sqrt{3}y}{2}, \frac{1 - \sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{3}x - y}{2}, 1 \right) \in \vec{S}.$$

Como  $x = y = 0$  son las ecuaciones implícitas de  $\vec{S}$  en  $B_0$ , Imponiendo que las dos primeras coordenadas de  $\overrightarrow{(x, y, z)f(x, y, z)}$  se anulen nos queda

$$(x, y, z) \in S \iff \frac{1 + \sqrt{3}}{2} + \frac{-x - \sqrt{3}y}{2} = \frac{1 - \sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{3}x - y}{2} = 0,$$

esto es,

$$S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x = y = 1\} = (1, 1, 0) + L(\{(0, 0, 1)\}).$$

El ángulo no orientado  $\alpha \in ]0, \pi]$  del movimiento helicoidal se calcula de la fórmula

$$\text{Traza}(M(\vec{f}, B_0)) = 2 \cos \alpha + 1 \iff 2 = 2 \cos \alpha + 1 \iff \cos \alpha = 1/2 \iff \alpha = \pi/3.$$

Para calcular el ángulo orientado  $\theta$  respecto de una orientación elegida en  $\vec{S}^\perp$  procedemos así. En  $\vec{S}^\perp$ , elegimos una base ortonormal  $B$  que determine la orientación positiva  $\mathcal{O}$  en  $\vec{S}^\perp$  que vamos a fijar. Como  $\vec{S}^\perp = L(\{(0, 0, 1)\})^\perp = L(\{(1, 0, 0), (0, 1, 0)\})$  en este caso tomaremos

$$B = \{v_1, v_2\} = \{(1, 0, 0), (0, 1, 0)\}.$$

Luego calculamos la matriz  $M(\vec{f}|_{\vec{S}^\perp}, B)$ , que queda

$$M(\vec{f}|_{\vec{S}^\perp}, B) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

Por definición, el ángulo orientado de  $f$  respecto de la orientación  $\mathcal{O}$  fijada en  $\vec{S}^\perp$  es el único real  $\theta \in ]0, 2\pi[$  tal que  $\cos \theta = \frac{1}{2}$ ,  $\sin \theta = \frac{\sqrt{3}}{2}$ , esto es  $\theta = \pi/3$ .

Por último, el vector de deslizamiento  $u$  de  $f$  se calcula de la expresión  $u = \overrightarrow{pf(p)}$  para cualquier  $p \in S$ . Elegimos por sencillez  $p = (1, 1, 0)$ , calculamos  $f(1, 1, 0) = (1, 1, 1)$ , y deducimos que

$$u = \overrightarrow{(1, 1, 0)f(1, 1, 0)} = \overrightarrow{(1, 1, 0)(1, 1, 1)} = (0, 0, 1).$$

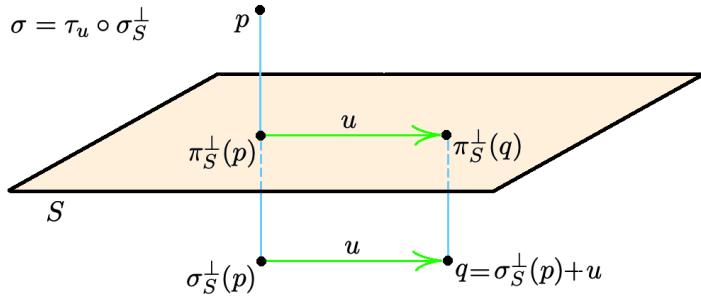
**Ejercicio 3.44** Sean  $S$  plano y  $p, q$  puntos en  $\mathbb{R}^3$ . Probar que son equivalentes los siguientes enunciados:

1. Existe  $\sigma: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  simetría ortogonal deslizante respecto del plano  $S$  tal que  $\sigma(p) = q$ .
2.  $\vec{pq} \notin \vec{S}^\perp$  y  $\overrightarrow{p\pi_S^\perp(p)} = -\overrightarrow{q\pi_S^\perp(q)}$ , donde  $\pi_S^\perp: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  representa a la proyección ortogonal sobre  $S$ .

Prueba que existe una simetría deslizante  $\sigma: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  con  $\sigma(S) = S$  y  $\sigma(p) = q$  cuando

$$S = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 : x_1 - x_2 = 1\}, \quad p = (2, -1, 0), \quad q = (-1, 0, 0).$$

Determinala dando su matriz en la referencia usual de  $\mathbb{R}^3$ .



**SOLUCIÓN:** a)  $\Rightarrow$  b) Sea  $\sigma: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  simetría ortogonal deslizante respecto de  $S$  tal que  $\sigma(p) = q$ . En principio sabemos que existe un vector  $u \in \vec{S} \setminus \{\vec{0}\}$  tal que  $\sigma$  es la composición de la simetría ortogonal respecto del plano  $S$  seguida de la traslación de vector  $u$ :

$$\sigma = \tau_u \circ \sigma_S^\perp.$$

Veamos que  $\vec{pq}$  no pertenece a  $\vec{S}^\perp$ . En efecto, la identidad

$$q = \sigma(p) = (\tau_u \circ \sigma_S^\perp)(p) = \sigma_S^\perp(p) + u = p + (\overrightarrow{p\sigma_S^\perp(p)} + u)$$

implica que  $\vec{pq} = \overrightarrow{p\sigma_S^\perp(p)} + u$ , y la definición de simetría ortogonal implica que  $\overrightarrow{p\sigma_S^\perp(p)} \in \vec{S}^\perp$ . Como la descomposición  $\mathbb{R}^3 = \vec{S} \oplus \vec{S}^\perp$  es en suma directa, deducimos de lo anterior que  $\vec{pq} \in \vec{S}^\perp$  si y sólo si el vector  $u \in \vec{S}$  es el vector nulo  $\vec{0}$ , lo que contradice que  $\sigma$  es deslizante.

Por tanto  $\vec{pq}$  no pertenece a  $\vec{S}^\perp$ .

Veamos ahora que  $\overrightarrow{-q\pi_S^\perp(q)} = \overrightarrow{p\pi_S^\perp(p)}$ . Para ello, observemos que de la definición de simetría ortogonal  $\overrightarrow{p\sigma_S^\perp(p)} = 2\overrightarrow{p\pi_S^\perp(p)}$ , de donde volviendo a la ecuación de arriba

$$\begin{aligned} q &= p + (\overrightarrow{p\sigma_S^\perp(p)} + u) = p + (2\overrightarrow{p\pi_S^\perp(p)} + u) = \\ &= (p + \overrightarrow{p\pi_S^\perp(p)}) + (\overrightarrow{p\pi_S^\perp(p)} + u) = \pi_S^\perp(p) + (\overrightarrow{p\pi_S^\perp(p)} + u) = (\pi_S^\perp(p) + u) + \overrightarrow{p\pi_S^\perp(p)}. \end{aligned}$$

Ahora podemos demostrar que el punto  $z := \pi_S^\perp(p) + u$  coincide con la proyección  $\pi_S^\perp(q)$ , ya que satisface:

- $z \in S$ : usar que  $\pi_S^\perp(p) \in S$  y  $u \in \vec{S}$ .

- $\overrightarrow{zq} \in \vec{S}^\perp$ : usar que de la expresión  $q = z + \overrightarrow{p\pi_S^\perp(p)}$  probada anteriormente  $\overrightarrow{zq} = \overrightarrow{p\pi_S^\perp(p)} \in \vec{S}^\perp$ .

En conclusión

$$\overrightarrow{-q\pi_S^\perp(q)} = \overrightarrow{\pi_S^\perp(q)q} = \overrightarrow{(\pi_S^\perp(p) + u)q} = \overrightarrow{p\pi_S^\perp(p)},$$

lo que concluye la prueba.

b)  $\Rightarrow$  a)

Sea  $S \subset \mathbb{R}^3$  plano y  $p, q \in \mathbb{R}^3$  puntos tales que  $\overrightarrow{pq} \notin \vec{S}^\perp$  y  $\overrightarrow{p\pi_S^\perp(p)} = -\overrightarrow{q\pi_S^\perp(q)}$ . Consideremos los puntos  $\pi_S^\perp(p), \pi_S^\perp(q) \in S$  y llamemos

$$u = \overrightarrow{\pi_S^\perp(p)\pi_S^\perp(q)} \in \vec{S}.$$

Veamos que  $u \neq \overrightarrow{0}$ . Para ello basta con observar que

$$\overrightarrow{pq} = \overrightarrow{p\pi_S^\perp(p)} + \overrightarrow{\pi_S^\perp(p)\pi_S^\perp(q)} + \overrightarrow{\pi_S^\perp(q)q} = (\overrightarrow{p\pi_S^\perp(p)} + \overrightarrow{\pi_S^\perp(q)q}) + u,$$

y tener en cuenta que  $\overrightarrow{p\pi_S^\perp(p)} + \overrightarrow{\pi_S^\perp(q)q} \in \vec{S}^\perp$  y  $\overrightarrow{pq} \notin \vec{S}^\perp$ .

Comprobemos finalmente que la simetría deslizante  $\sigma = \tau_u \circ \sigma_S^\perp$  resuelve el ejercicio; para ello bastará con demostrar que  $\sigma(p) = q$ . En efecto,

$$\begin{aligned} \sigma(p) &= \sigma_S^\perp(p) + u = p + (\overrightarrow{p\sigma_S^\perp(p)} + u) = p + (\overrightarrow{2p\pi_S^\perp(p)} + u) = \pi_S^\perp(p) + (\overrightarrow{p\pi_S^\perp(p)} + u) = \\ &= (\pi_S^\perp(p) + u) + \overrightarrow{p\pi_S^\perp(p)} = (\pi_S^\perp(p) + \overrightarrow{\pi_S^\perp(p)\pi_S^\perp(q)}) + \overrightarrow{p\pi_S^\perp(p)} = \pi_S^\perp(q) + \overrightarrow{p\pi_S^\perp(p)} = \\ &= \pi_S^\perp(q) + (-\overrightarrow{q\pi_S^\perp(q)}) = \pi_S^\perp(q) + \overrightarrow{\pi_S^\perp(q)q} = q. \end{aligned}$$

En cuanto a la parte práctica, vamos a justificar que existe una simetría deslizante  $\sigma: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  con  $\sigma(S) = S$  y  $\sigma(p) = q$  cuando

$$S = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 : x_1 - x_2 = 1\}, \quad p = (2, -1, 0), \quad q = (-1, 0, 0).$$

Para una respuesta afirmativa, y usando lo demostrado, será suficiente con ver que

$$\overrightarrow{pq} \notin \vec{S}^\perp \text{ y } \overrightarrow{p\pi_S^\perp(p)} = -\overrightarrow{q\pi_S^\perp(q)},$$

donde  $\pi_S^\perp: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  representa a la proyección ortogonal sobre  $S$ . Determinemos por tanto la expresión analítica de  $\pi_S^\perp$ . Tomemos  $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$  genérico y escribamos  $\pi_S^\perp(x, y, z) = (a, b, c)$ . Sabemos que

- $(a, b, c) \in S$ , esto es,  $a - b = 1$ .
- $\overrightarrow{(x, y, z)(a, b, c)} = (a - x, b - y, c - z) \in \vec{S}^\perp$ ; como  $\vec{S} = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 : x_1 - x_2 = 0\}$  entonces  $\vec{S}^\perp = L(\{(1, -1, 0)\}) = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 : x_3 = x_1 + x_2 = 0\}$ , y por tanto  $c - z = a - x + b - y = 0$ .

Resolviendo  $a = \frac{1}{2}(x + y + 1)$ ,  $b = \frac{1}{2}(x + y - 1)$ ,  $c = z$ , y por tanto

$$\pi_S^\perp: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3, \quad \pi_S^\perp(x, y, z) = \left(\frac{1}{2}(x + y + 1), \frac{1}{2}(x + y - 1), z\right).$$

Ahora queda claro que

$$\overrightarrow{pq} = \overrightarrow{(2, -1, 0)(-1, 0, 0)} = (-3, 1, 0) \notin \vec{S}^\perp = L(\{(1, -1, 0)\}) = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 : x_3 = x_1 + x_2 = 0\}$$

y

$$\begin{aligned}\overrightarrow{p\pi_S^\perp(p)} &= \overrightarrow{(2, -1, 0)\pi_S^\perp(2, -1, 0)} = \overrightarrow{(2, -1, 0)(1, 0, 0)} = (-1, 1, 0) = \\ &- \overrightarrow{(-1, 0, 0)(0, -1, 0)} = -\overrightarrow{(-1, 0, 0)\pi_S^\perp(-1, 0, 0)} = -\overrightarrow{q\pi_S^\perp(q)}.\end{aligned}$$

De lo demostrado en la parte teórica del ejercicio deducimos que existe una simetría deslizante  $\sigma: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  con  $\sigma(S) = S$  y  $\sigma(p) = q$ . Para determinar la expresión matricial de  $\sigma$  en  $\mathcal{R}_0$ , recordemos que  $\sigma = \tau_u \circ \sigma_S^\perp$  para cierto vector  $u \in \vec{S}$ . Como probamos en el anterior razonamiento, el vector  $u$  puede calcularse mediante la expresión

$$u = \overrightarrow{\pi_S^\perp(p)\pi_S^\perp(\sigma(p))} = \overrightarrow{\pi_S^\perp(p)\pi_S^\perp(q)} = \overrightarrow{(1, 0, 0)(0, -1, 0)} = (-1, -1, 0).$$

La expresión analítica de  $\sigma_S^\perp$  se puede determinar usando la fórmula  $\overrightarrow{p\sigma_S^\perp(p)} = 2\overrightarrow{p\pi_S^\perp(p)}$ , esto es,  $\sigma_S^\perp(p) = 2\pi_S^\perp(p) - p$ , que nos da

$$\sigma_S^\perp(x, y, z) = 2\pi_S^\perp(x, y, z) - (x, y, z) = 2\left(\frac{1}{2}(x+y+1), \frac{1}{2}(x+y-1), z\right) - (x, y, z) = (y+1, x-1, z).$$

De aquí que

$$\sigma(x, y, z) = (\tau_u \circ \sigma_S^\perp)(x, y, z) = (y+1, x-1, z) + (-1, -1, 0) = (y, x-2, z),$$

esto es,

$$M(\sigma, \mathcal{R}_0) = \left( \begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right).$$

■

**Ejercicio 3.45** Determinar la expresión analítica en el sistema de referencia usual del espacio euclíadiano  $\mathbb{R}^3$  del movimiento helicoidal  $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  con los siguientes elementos geométricos:

- Eje  $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x - y - 1 = y - z + 1 = 0\}$ .
- Ángulo orientado  $\theta = \pi/4$  respecto a la orientación  $\mathcal{O}$  inducida por la base ordenada  $B' = \{(1, -1, 0), (0, 1, -1)\}$  de  $\vec{S}^\perp$ .
- Vector de deslizamiento  $u = (-1, -1, -1) \in \vec{S}$ .

SOLUCIÓN : Observemos que

$$S = (0, -1, 0) + L(\{(1, 1, 1)\}), \quad \vec{S} = L(\{(1, 1, 1)\}), \quad \vec{S}^\perp = L(\{(1, -1, 0), (0, 1, -1)\}).$$

El ejercicio está bien planteado ya que  $B'$  es una base ordenada de  $S^\perp$ , determinando por tanto una orientación en ese plano vectorial, y el vector de deslizamiento  $u$  pertenece a  $\vec{S}$ . Necesitaremos un sistema de referencia rectangular  $\mathcal{R} = \{q, B = \{v_1, v_2, v_3\}\}$  adaptado al movimiento helicoidal, esto es, tal que  $q \in S$ ,  $\{v_1, v_2\}$  sea base ortonormal positiva de  $(\vec{S}^\perp, \mathcal{O})$ , y  $v_3 \in \vec{S}$  sea unitario.

Elegimos

$$q = (0, -1, 0), \quad \{v_1, v_2\} = \left\{ \frac{1}{\sqrt{2}}(1, -1, 0), \frac{1}{\sqrt{6}}(1, 1, -2) \right\}, \quad v_3 = 1/\sqrt{3}(1, 1, 1).$$

Notemos que, si llamamos  $B'' = \{v_1, v_2\}$ , la matriz

$$M(\text{Id}_{\vec{S}^\perp}, B'', B') = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ 0 & \sqrt{\frac{2}{3}} \end{pmatrix}$$

tiene determinante  $> 0$ , y por tanto  $B''$  es una base ortonormal positiva en  $(\vec{S}^\perp, \mathcal{O})$ .

Como  $u = -\sqrt{3}v_3$ , y por tanto  $u_B = (0, 0, -1)^t$ , la matriz del movimiento helicoidal  $f$  en la referencia  $\mathcal{R}$  adaptada ha de ser:

$$M(f, \mathcal{R}) = \left( \begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & \cos(\pi/4) & -\sin(\pi/4) & 0 \\ 0 & \sin(\pi/4) & \cos(\pi/4) & 0 \\ -\sqrt{3} & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) = \left( \begin{array}{c|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} & 0 & 0 \\ 0 & 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} & 0 & 0 \\ -\sqrt{3} & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array} \right).$$

Como

$$M(\text{Id}_{\mathbb{R}^3}, \mathcal{R}, \mathcal{R}_0) = \left( \begin{array}{c|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 1/\sqrt{2} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 \\ -1 & -1/\sqrt{2} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 \\ 0 & 0 & -\sqrt{\frac{2}{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 \end{array} \right),$$

la identidad  $M(f, \mathcal{R}_0) = M(\text{Id}_{\mathbb{R}^3}, \mathcal{R}, \mathcal{R}_0) \cdot M(f, \mathcal{R}) \cdot M(\text{Id}_{\mathbb{R}^3}, \mathcal{R}, \mathcal{R}_0)^{-1}$  nos da finalmente

$$M(f, \mathcal{R}_0) = \left( \begin{array}{c|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline -\frac{\sqrt{\sqrt{3}+2}-2}{3} & \frac{\sqrt{2}+1}{3} & \frac{1-\sqrt{\sqrt{3}+2}}{3} & \frac{-\sqrt{2}+\sqrt{6}+2}{6} & 0 \\ \frac{\sqrt{2}-5}{3} & \frac{-\sqrt{2}+\sqrt{6}+2}{6} & \frac{\sqrt{2}+1}{3} & \frac{1-\sqrt{\sqrt{3}+2}}{3} & 0 \\ \frac{-\sqrt{2}+\sqrt{6}-4}{6} & \frac{1-\sqrt{\sqrt{3}+2}}{3} & \frac{-\sqrt{2}+\sqrt{6}+2}{6} & \frac{\sqrt{2}+1}{3} & 0 \end{array} \right).$$

■

**Ejercicio 3.46** Determinar la expresión analítica en el sistema de referencia usual del espacio euclíadiano  $\mathbb{R}^3$  del movimiento rígido definido por la composición  $\sigma_T^\perp \circ G$ , donde:

- $G$  es el giro con eje  $S = (0, 0, 1) + L(\{(1, -1, 0)\})$  de ángulo orientado  $\pi/3$  respecto de la orientación en  $\vec{S}^\perp$  inducida por  $B' = \{(1, 1, 0), (0, 0, 1)\}$ .
- $T = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z - 1 = 0\}$ .

Clasifica el movimiento resultante.

**SOLUCIÓN:** Determinemos la expresión analítica de  $G$  en  $\mathcal{R}_0$ . Para ello, determinemos primero un sistema de referencia rectangular  $\mathcal{R} = \{q, B = \{v_1, v_2, v_3\}\}$  adaptado a  $G$ . Esto significa que  $q \in S$ ,  $\{v_1, v_2\}$  es base ortonormal positiva de  $(\vec{S}^\perp, \mathcal{O})$ , y  $v_3 \in \vec{S}$  es unitario. En este caso tomaremos

$$q = (0, 0, 1), \quad B'' = \{v_1, v_2\} = \left\{ \frac{1}{\sqrt{2}}(1, 1, 0), (0, 0, 1) \right\}, \quad v_3 = \frac{1}{\sqrt{2}}(1, -1, 0).$$

La comprobación de que  $B''$  es positiva en  $(\vec{S}, \mathcal{O})$  es trivial toda vez que la matriz

$$M(\text{Id}_{\vec{S}^\perp}, B'', B') = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

tiene determinante  $> 0$ .

La matriz del giro  $G$  en la referencia  $\mathcal{R}$  adaptada ha de ser:

$$M(G, \mathcal{R}) = \left( \begin{array}{c|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & \cos(\pi/3) & -\sin(\pi/3) & 0 \\ 0 & \sin(\pi/3) & \cos(\pi/3) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) = \left( \begin{array}{c|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 1/2 & -\sqrt{3}/2 & 0 \\ 0 & \sqrt{3}/2 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right).$$

Como

$$M(\text{Id}_{\mathbb{R}^3}, \mathcal{R}, \mathcal{R}_0) = \left( \begin{array}{c|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 1/\sqrt{2} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & 1/\sqrt{2} & 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{array} \right),$$

la identidad  $M(G, \mathcal{R}_0) = M(\text{Id}_{\mathbb{R}^3}, \mathcal{R}, \mathcal{R}_0) \cdot M(G, \mathcal{R}) \cdot M(\text{Id}_{\mathbb{R}^3}, \mathcal{R}, \mathcal{R}_0)^{-1}$  nos da finalmente

$$M(G, \mathcal{R}_0) = \left( \begin{array}{c|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline \sqrt{\frac{3}{8}} & \frac{3}{4} & -\frac{1}{4} & -\sqrt{\frac{3}{8}} \\ \sqrt{\frac{3}{8}} & -\frac{1}{4} & \frac{3}{4} & -\sqrt{\frac{3}{8}} \\ \frac{1}{2} & \sqrt{\frac{3}{8}} & \sqrt{\frac{3}{8}} & \frac{1}{2} \end{array} \right).$$

Por otra parte, un cálculo elemental nos dice que la matriz que representa a  $\sigma_T^\perp$  en  $\mathcal{R}_0$  es

$$M(\sigma_T^\perp, \mathcal{R}_0) = \left( \begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & -1 \end{array} \right),$$

de donde si llamamos  $f = \sigma_T^\perp \circ G$  se deduce que la expresión analítica de  $f$  en  $\mathcal{R}_0$  está determinada por la matriz

$$M(f, \mathcal{R}_0) = M(\sigma_T^\perp, \mathcal{R}_0) \cdot M(G, \mathcal{R}_0) = \left( \begin{array}{c|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline \sqrt{\frac{3}{8}} & \frac{3}{4} & -\frac{1}{4} & -\sqrt{\frac{3}{8}} \\ \sqrt{\frac{3}{8}} & -\frac{1}{4} & \frac{3}{4} & -\sqrt{\frac{3}{8}} \\ \frac{3}{2} & -\sqrt{\frac{3}{8}} & -\sqrt{\frac{3}{8}} & -\frac{1}{2} \end{array} \right).$$

Esto acaba la primera parte del ejercicio.

Consideremos ahora el movimiento rígido  $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  dado por la expresión matricial

$$\begin{pmatrix} 1 \\ f(x) \\ f(y) \\ f(z) \end{pmatrix} = \left( \begin{array}{c|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline \sqrt{\frac{3}{8}} & \frac{3}{4} & -\frac{1}{4} & -\sqrt{\frac{3}{8}} \\ \sqrt{\frac{3}{8}} & -\frac{1}{4} & \frac{3}{4} & -\sqrt{\frac{3}{8}} \\ \frac{3}{2} & -\sqrt{\frac{3}{8}} & -\sqrt{\frac{3}{8}} & -\frac{1}{2} \end{array} \right) \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

Para clasificarlo observemos que  $f$  es inverso al ser composición de un giro (directo) y una isometría (inverso). El conjunto  $\mathcal{P}_f$  de puntos fijos de  $f$  surge de resolver la ecuación  $f(x, y, z) = (x, y, z)$ , y da por soluciones el plano afín

$$\mathcal{P}_f = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \sqrt{6}z + x + y = \sqrt{6}\}.$$

Por la clasificación de los movimientos rígidos  $f$  es la simetría ortogonal  $\sigma_\Pi^\perp$  respecto del plano  $\Pi = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \sqrt{6}z + x + y = \sqrt{6}\}$ . ■

**Ejercicio 3.47** Demuestra que la siguiente aplicación  $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  es un movimiento rígido del espacio afín euclídeo  $(\mathbb{R}^3, \langle \cdot, \cdot \rangle)$  y clasifícalo:

$$f(x, y, z) = (2y/\sqrt{5} + z/\sqrt{5}, \sqrt{5}x/3 - 2y/(3\sqrt{5}) + 4z/(3\sqrt{5}), -2x/3 - y/3 + 2z/3).$$

SOLUCIÓN: De la definición de  $f$  se deduce que

$$M(f, \mathcal{R}_0) = \left( \begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & \frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{5}} \\ 0 & \frac{\sqrt{5}}{3} & -\frac{2}{3\sqrt{5}} & \frac{4}{3\sqrt{5}} \\ 0 & -\frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{array} \right)$$

Al ser  $f$  es lineal tenemos que  $\vec{f} = f$ . Como

$$M(\vec{f}, B_0) = \left( \begin{array}{ccc} 0 & \frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{5}} \\ \frac{\sqrt{5}}{3} & -\frac{2}{3\sqrt{5}} & \frac{4}{3\sqrt{5}} \\ -\frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{array} \right)$$

$B_0$  es una base ortonormal de  $(\mathbb{R}^3, \langle \cdot, \cdot \rangle)$  y  $M(\vec{f}, B_0) \cdot M(\vec{f}, B_0)^t = I_3$  deducimos que  $M(\vec{f}, B_0) \in O(3, \mathbb{R})$  y  $f$  es un movimiento rígido. Además como  $\det M(\vec{f}, B_0) = -1$  se trata de un movimiento inverso. El conjunto de puntos fijos  $\mathcal{P}_f$  surge de resolver la ecuación  $f(x, y, z) = (x, y, z)$ , y como  $\det(M(\vec{f}, B_0) - I_3) \neq 0$  en este caso resulta

$$\mathcal{P}_f = \{(0, 0, 0)\}.$$

De la clasificación de los movimientos rígidos,  $f$  ha de ser de la forma

$$f = \sigma_T^\perp \circ G,$$

donde  $G$  es un giro respecto de una recta  $S$  y  $\sigma_T^\perp$  la simetría ortogonal respecto del plano  $T$  ortogonal a  $S$  con  $S \cap T = \{p_0\}$ . Determinemos los elementos geométricos de  $f$ .

Recordemos que

$$\begin{aligned} \vec{S} &= \text{Ker}(f + \text{Id}_{\mathbb{R}^3}) = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : (M(\vec{f}, B_0) + I_3).(x, y, z)^t = (0, 0, 0)^t\} = \\ &= \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \begin{pmatrix} 1 & \frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{5}} \\ \frac{\sqrt{5}}{3} & 1 - \frac{2}{3\sqrt{5}} & \frac{4}{3\sqrt{5}} \\ -\frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & 1 + \frac{2}{3} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\}. \end{aligned}$$

Resolviendo el sistema

$$\vec{S} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : y + \frac{1}{11}(2 + 5\sqrt{5})x = z + \frac{1}{11}(-4 + \sqrt{5})x = 0\},$$

esto es  $\vec{S} = L(\{(11, -2 - 5\sqrt{5}, 4 - \sqrt{5})\})$ . Por tanto

$$S = p_0 + \vec{S} = (0, 0, 0) + L(\{(11, -2 - 5\sqrt{5}, 4 - \sqrt{5})\}) = L(\{(11, -2 - 5\sqrt{5}, 4 - \sqrt{5})\}),$$

El ángulo  $\alpha \in ]0, \pi]$  no orientado del giro  $G$  se deduce de la expresión

$$-1 + 2 \cos \alpha = \text{Traza}(M(\vec{f}, B_0)) = -\frac{2}{3\sqrt{5}} + 2/3 \iff \alpha = \arccos\left(-\frac{1}{3\sqrt{5}} + \frac{5}{6}\right) \in ]0, \pi[.$$

El plano  $T$  ortogonal a  $S$  pasando por  $p_0$  viene dado por la expresión

$$T = p_0 + \vec{S}^\perp = (0, 0, 0) + \vec{S}^\perp.$$

Como

$$\begin{aligned}\vec{S}^\perp &= \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \langle (x, y, z), (11, -2 - 5\sqrt{5}, 4 - \sqrt{5}) \rangle = 0\} = \\ &= \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 11x - (2 + 5\sqrt{5})y + (4 - \sqrt{5})z = 0\} = \\ &= \{(\lambda, \mu, -(4 + \sqrt{5})\lambda + (3 + 2\sqrt{5})\mu) : \lambda, \mu \in \mathbb{R}\}\end{aligned}$$

se tiene que

$$T = L(\{(-1, 0, 4 + \sqrt{5}), (0, 1, 3 + 2\sqrt{5})\}).$$

Si queremos el ángulo orientado  $\theta \in [0, 2\pi[$  de  $G$  respecto de una orientación  $\mathcal{O}$  en  $\vec{S}^\perp$ , tomaremos primero una base ortonormal ordenada  $B$  de  $\vec{S}^\perp$  que fije  $\mathcal{O}$  y calcularemos la matriz  $M(\vec{f}|_{\vec{S}^\perp}, B)$ , que será la típica matriz  $\begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$  determinando únicamente  $\theta$ . Los cálculos son muy penosos y los omitiremos. ■

**Ejercicio 3.48** Demuestra que la siguiente aplicación  $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  es un movimiento rígido del espacio afín euclídeo  $(\mathbb{R}^3, \langle \cdot, \cdot \rangle)$  y clasifícalo:

$$f(x, y, z) = (x/2 - \sqrt{3}z/2 + 2, y + 2, -\sqrt{3}x/2 - z/2 + 2).$$

**SOLUCIÓN:** La matriz de  $f$  en el sistema de referencia  $\mathcal{R}_0$  viene dada por la expresión

$$M(f, \mathcal{R}_0) = \left( \begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 2 & \frac{1}{2} & 0 & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ 2 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & -\frac{\sqrt{3}}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \end{array} \right).$$

Como

$$M(\vec{f}, B_0) = \left( \begin{array}{ccc} \frac{1}{2} & 0 & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \end{array} \right)$$

$B_0$  es una base ortonormal de  $(\mathbb{R}^3, \langle \cdot, \cdot \rangle)$  y  $M(\vec{f}, B_0) \cdot M(\vec{f}, B_0)^t = I_3$  deducimos que  $M(\vec{f}, B_0) \in O(3, \mathbb{R})$  y  $f$  es un movimiento rígido. Además como  $\det M(\vec{f}, B_0) = -1$  se trata de un movimiento inverso. El conjunto de puntos fijos  $\mathcal{P}_f$  surge de resolver la ecuación  $f(x, y, z) - (x, y, z) = (0, 0, 0)$ , que en este caso resulta el sistema

$$\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : (2 - \frac{1}{2}x - \frac{\sqrt{3}}{2}z, 2, 2 - \frac{\sqrt{3}}{2}x - \frac{1}{2}z) = (0, 0, 0)\} = \emptyset.$$

Por la clasificación de movimientos rígidos  $f$  es una simetría deslizante de la forma  $\tau_u \circ \sigma_S^\perp$ , donde  $S$  es un plano afín y  $u \in S$ . Determinemos sus elementos geométricos.

Sabemos que  $\vec{S} = \text{Ker}(\vec{f} - \text{Id}_{\mathbb{R}^3})$ , esto es,

$$\begin{aligned}\vec{S} &= \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : (M(\vec{f}, B_0) - I_3).(x, y, z)^t = (0, 0, 0)\} = \\ &\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \left( \begin{array}{ccc} -\frac{1}{2} & 0 & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \end{array} \right) \cdot (x, y, z)^t = (0, 0, 0) \} = \{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x = -\sqrt{3}z \},\end{aligned}$$

esto es,

$$\vec{S} = L(\{(0, 1, 0), (-\sqrt{3}, 0, 1)\}).$$

Sabemos que  $m_{p,f(p)} \in S$  para todo  $p \in \mathbb{R}^3$ . Eligiendo  $p = (0, 0, 0)$ , como  $f(0, 0, 0) = (2, 2, 2)$  ese cálculo nos dice que

$$m_{(0,0,0),f(0,0,0)} = m_{(0,0,0),(2,2,2)} = (1, 1, 1) \in S.$$

Como  $S = (1, 1, 1) + \vec{S}$ , de aquí que

$$S = (1, 1, 1) + L(\{(0, 1, 0), (-\sqrt{3}, 0, 1)\}) = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x + \sqrt{3}z - 1 - \sqrt{3} = 0\}.$$

El vector de deslizamiento  $u \in \vec{S}$  se calcula de la forma  $u = \overrightarrow{pf(p)}$ ,  $p \in S$ . Tomando  $p = (1, 1, 1) \in S$  y calculando  $f(1, 1, 1) = (\frac{1}{2}(5 - \sqrt{3}), 3, \frac{1}{2}(3 - \sqrt{3}))$  se tiene que

$$u = \overrightarrow{(1, 1, 1), f(1, 1, 1)} = \left(\frac{1}{2}(3 - \sqrt{3}), 2, \frac{1}{2}(1 - \sqrt{3})\right).$$

■

### 3.7. Geometría de triángulos en el plano afín euclíadiano

Vamos a recordar algunos de los resultados clásicos acerca de triángulos en el plano euclidiano.

**Definición 3.49** Un triángulo en un espacio afín  $\mathcal{A}$  son tres puntos  $\{a, b, c\}$  afínmente independientes, que se suelen llamar vértices del triángulo. Normalmente, se suele hablar de triángulos  $\{a, b, c\}$  en planos afines, ya que sus propiedades se pueden circunscribir al plano  $\Pi = \langle\{a, b, c\}\rangle \subseteq \mathcal{A}$  que lo contiene. Comencemos con algunas definiciones básicas.

**Definición 3.50** Si  $T = \{a, b, c\}$  es un triángulo en un plano afín euclidiano  $(\mathcal{A}, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ , se definen los ángulos interiores  $\hat{A}$ ,  $\hat{B}$  y  $\hat{C}$  de  $T$  en los vértices  $a$ ,  $b$  y  $c$  respectivamente como los ángulos orientados

$$\hat{A} = \angle_o(\vec{ab}, \vec{ac}), \quad \hat{B} = \angle_o(\vec{bc}, \vec{ba}) \quad y \quad \hat{C} = \angle_o(\vec{ca}, \vec{cb})$$

respecto de la orientación  $\mathcal{O}$  del plano  $\mathcal{A}$  inducida por la base ordenada  $\{\vec{ab}, \vec{ac}\}$ .

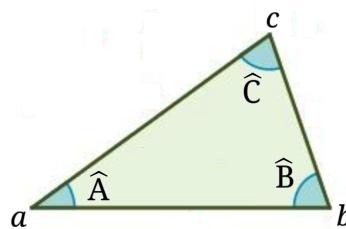


Figura 16: Triángulo

La ordenación de vértices y vectores en la anterior definición es crucial. Aparentemente, el vértice  $a$  juega un papel relevante respecto de los otros dos al fijar la orientación  $\mathcal{O}$  en  $\overrightarrow{\mathcal{A}}$ , pero esto no es así. De hecho, las bases ordenadas  $B_2 = \{\overrightarrow{bc}, \overrightarrow{ba}\}$  y  $B_3 = \{\overrightarrow{ca}, \overrightarrow{cb}\}$  inducen la misma orientación  $\mathcal{O}$  en  $\overrightarrow{\mathcal{A}}$  que  $B_1 = \{\overrightarrow{ab}, \overrightarrow{ac}\}$ . En efecto, como  $\overrightarrow{bc} = \overrightarrow{ba} + \overrightarrow{ac} = -\overrightarrow{ab} + \overrightarrow{ac}$  y  $\overrightarrow{ba} = -\overrightarrow{ab}$  se tiene que

$$M(\text{Id}_{\overrightarrow{\mathcal{A}}}, B_2, B_1) = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},$$

y por tanto  $\det(M(\text{Id}_{\overrightarrow{\mathcal{A}}}, B_2, B_1)) = 1 > 0$ . De forma análoga se comprueba que  $\det(M(\text{Id}_{\overrightarrow{\mathcal{A}}}, B_3, B_1)) = 1 > 0$ .

**Observación 3.51** Es conveniente recordar que, por definición, el ángulo orientado está bien definido salvo múltiplos enteros de  $2\pi$ , y por tanto siempre podemos tomar una determinación del mismo que pertenezca al intervalo  $[0, 2\pi[$ . Por este motivo, y en lo sucesivo, dado un triángulo  $\{a, b, c\}$  siempre supondremos

$$\widehat{A}, \widehat{B}, \widehat{C} \in ]0, 2\pi[.$$

El siguiente resultado recoge las propiedades básicas de los ángulos de un triángulo (Euclides siglo III A.C.).

**Teorema 3.52** Sea  $\{a, b, c\}$  un triángulo en un plano afín euclidiano  $(\mathcal{A}, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ . Son ciertos los siguientes enunciados:

$$(I) \quad \widehat{A}, \widehat{B}, \widehat{C} \in ]0, \pi[.$$

$$(II) \quad \widehat{A} + \widehat{B} + \widehat{C} = \pi.$$

**DEMOSTRACIÓN :** Demostremos (i). Calculemos  $\widehat{A}$  (análogamente se razonaría con  $\widehat{B}$  y  $\widehat{C}$ ), para lo cual llamemos  $B = \{\overrightarrow{ab}, \overrightarrow{ac}\}$  y escribamos

$$w_1 = \frac{1}{\|\overrightarrow{ab}\|} \overrightarrow{ab}, \text{ y } w_2 = \frac{1}{\|u_2\|} u_2, \text{ donde } u_2 = \overrightarrow{ac} - \langle w_1, \overrightarrow{ac} \rangle w_1.$$

Un cálculo sencillo nos dice que  $B_0 = \{w_1, w_2\}$  es una base ortonormal de  $(\overrightarrow{\mathcal{A}}, \langle \cdot, \cdot \rangle)$  y

$$\det(M(\text{Id}_{\overrightarrow{\mathcal{A}}}, B, B_0)) = \det \begin{pmatrix} \frac{1}{\|\overrightarrow{ab}\|} & \langle w_1, \overrightarrow{ac} \rangle \\ 0 & \|u_2\| \end{pmatrix} > 0,$$

esto es,  $B_0$  induce la misma orientación que  $B$  en  $\overrightarrow{\mathcal{A}}$ . Por definición,  $\widehat{A}$  es el único real en  $]0, 2\pi[$  satisfaciendo

$$\frac{1}{\|\overrightarrow{ac}\|} \overrightarrow{ac} = \cos(\widehat{A}) w_1 + \sin(\widehat{A}) w_2,$$

de donde como  $\overrightarrow{ac} = \langle w_1, \overrightarrow{ac} \rangle w_1 + \|u_2\| w_2$  inferimos que  $\sin \widehat{A} = \frac{\|u_2\|}{\|\overrightarrow{ac}\|} > 0$ , esto es,  $\widehat{A} \in ]0, \pi[$ . Esto prueba (i).

Para probar (ii), recordemos que  $\angle_o(u, v) = \angle_o(-u, -v)$ , y que salvo sumar un múltiplo de  $2\pi$  la regla de aditividad  $\angle_o(u, v) + \angle_o(v, w) = \angle_o(u, w)$  es válida.

Usando estas fórmulas, y respecto de la orientación  $\mathcal{O}$  en  $\overrightarrow{\mathcal{A}}$  inducida por  $\{\overrightarrow{ab}, \overrightarrow{ac}\}$ , se tiene que:

$$\widehat{A} + \widehat{B} + \widehat{C} = \angle_o(\overrightarrow{ab}, \overrightarrow{ac}) + \angle_o(\overrightarrow{ca}, \overrightarrow{cb}) + \angle_o(\overrightarrow{bc}, \overrightarrow{ba}) = \angle_o(\overrightarrow{ab}, \overrightarrow{ac}) + \angle_o(-\overrightarrow{ca}, -\overrightarrow{cb}) + \angle_o(\overrightarrow{bc}, \overrightarrow{ba}) =$$

$$= \angle_o(\vec{ab}, \vec{ac}) + \angle(\vec{ac}, \vec{bc}) + \angle_o(\vec{bc}, \vec{ba}) = \angle_o(\vec{ab}, \vec{ba}) + 2k\pi = \pi + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

En la última identidad hemos usado que  $\angle_o(\vec{ab}, \vec{ba}) = \pi$ . Como  $\widehat{A}, \widehat{B}, \widehat{C} \in ]0, \pi[$ , necesariamente  $\pi + 2k\pi = \widehat{A} + \widehat{B} + \widehat{C} < 3\pi$ , por lo que  $k = 0$  y se tiene lo deseado. ■

**Teorema 3.53 (Teorema de Pitágoras)** *Dado un triángulo  $\{a, b, c\}$  con ángulo  $\widehat{A} = \pi/2$ ,*

$$d(a, b)^2 + d(a, c)^2 = d(b, c)^2.$$

Este tipo de triángulos se llaman *rectángulos* con ángulo recto en el vértice  $a$ . Los segmentos  $[a, b]$  y  $[a, c]$  se denominan *catetos* de  $\{a, b, c\}$ , y el segmento  $[b, c]$  *hipotenusa* de  $\{a, b, c\}$ .

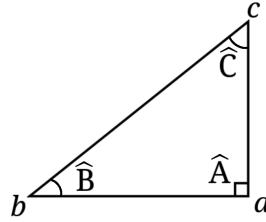


Figura 17: Triángulo rectángulo

**DEMOSTRACIÓN :** La prueba del teorema de Pitágoras es muy simple para nosotros:

$$d(b, c)^2 = \|\vec{bc}\|^2 = \langle \vec{ba} + \vec{ac}, \vec{ba} + \vec{ac} \rangle = \|\vec{ba}\|^2 + \|\vec{ac}\|^2 + 2\langle \vec{ba}, \vec{ac} \rangle = d(a, b)^2 + d(a, c)^2,$$

donde simplemente hemos tenido en cuenta que  $\widehat{A} = \pi/2$  si y solo si  $\langle \vec{ba}, \vec{ac} \rangle = 0$  (esto es,  $\vec{ab} \perp \vec{ac}$ ). ■

**Proposición 3.54** *Dados dos triángulos  $\{a, b, c\}$  y  $\{a', b', c'\}$  en un plano afín euclíadiano  $(\mathcal{A}, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ , si  $d(a, b) = d(a', b')$ ,  $d(a, c) = d(a', c')$ , y  $d(b, c) = d(b', c')$ , entonces*

$$\widehat{A} = \widehat{A}', \quad \widehat{B} = \widehat{B}', \quad \widehat{C} = \widehat{C}'.$$

**DEMOSTRACIÓN :** La única afinidad  $f: \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}$  tal que

$$f(a) = a', \quad f(b) = b', \quad f(c) = c'$$

satisface

$$\|\vec{f}(\vec{ab})\| = \|\vec{a'b'}\| = \|\vec{ab}\|, \quad \|\vec{f}(\vec{ac})\| = \|\vec{a'c'}\| = \|\vec{ac}\|, \quad \|\vec{f}(\vec{bc})\| = \|\vec{b'c'}\| = \|\vec{bc}\|,$$

y por tanto es una isometría lineal. De aquí que  $f$  sea un movimiento rígido y preserve ángulos. ■

### 3.7.1. Puntos notables de un triángulo

Los tres puntos notables de un triángulo que trataremos en esta sección son el *baricentro*, el *circuncentro* y el *ortocentro* (dejaremos el *incentro* para un tratamiento posterior más específico). Explicamos a continuación cómo se generan y sus propiedades básicas.

**Definición 3.55** *Dado un triángulo  $\{a, b, c\}$ , la mediana asociada al vértice  $a$  es la recta  $M_a = \langle\{a, m_{bc}\}\rangle$  que une  $a$  y el punto medio  $m_{bc}$  o centro de masas del lado opuesto  $[b, c]$ . Análogamente se define las medianas  $M_b$  y  $M_c$  asociadas a  $b$  y  $c$ .*

El punto

$$B = q + \frac{1}{3}(\vec{qa} + \vec{qb} + \vec{qc})$$

no depende de  $q \in \mathcal{A}$ , y es fácil comprobar que está contenido en las tres medianas del triángulo  $\{a, b, c\}$ :

$$\{B\} = M_a \cap M_b \cap M_c.$$

En efecto, bastará con ver que  $B \in M_a = a + L(\{\overrightarrow{am_{bc}}\})$  (análogamente se razonaría para comprobar que  $B \in M_b$  y  $B \in M_c$ ). Como  $m_{bc} = q + (\frac{1}{2}\vec{qb} + \frac{1}{2}\vec{qc})$  se tiene que

$$\overrightarrow{am_{bc}} = \overrightarrow{a(q + (\frac{1}{2}\vec{qb} + \frac{1}{2}\vec{qc}))} = -\vec{qa} + \frac{1}{2}\vec{qb} + \frac{1}{2}\vec{qc},$$

de donde  $\overrightarrow{aB} = \overrightarrow{aq} + \frac{1}{3}(\vec{qa} + \vec{qb} + \vec{qc}) = -\frac{2}{3}\vec{qa} + \frac{1}{3}(\vec{qb} + \vec{qc}) = \frac{2}{3}\overrightarrow{am_{bc}} \in \overrightarrow{M_a}$  y  $B \in M_a$  como queríamos demostrar.

**Definición 3.56 (Baricentro)** *El punto  $B = q + \frac{1}{3}(\vec{qa} + \vec{qb} + \vec{qc})$  es conocido como el centro de masas o baricentro del triángulo  $\{a, b, c\}$ .*

El concepto de baricentro es puramente afín, se puede definir sin apelar a ninguna métrica euclídea en  $\overrightarrow{\mathcal{A}}$ .

**Definición 3.57** *Dados dos puntos  $p, q$  en un plano afín euclíadiano euclíadiano  $(\mathcal{A}, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ , la mediatrix del segmento  $[p, q]$  es la recta  $R$  que pasa por  $m_{pq}$  y es ortogonal a la recta  $\langle\{p, q\}\rangle$  que generan  $p$  y  $q$ . Explícitamente,*

$$R = m_{pq} + L\{\overrightarrow{pq}\}^\perp.$$

Si  $r$  es un punto de la mediatrix  $R$  de  $[p, q]$ , se tiene que

$$r = m_{pq} + v = (p + \frac{1}{2}\overrightarrow{pq}) + v = (q + \frac{1}{2}\overrightarrow{qp}) + v$$

para un vector  $v \perp \overrightarrow{pq}$ , y por tanto

$$d(p, r)^2 = \|\overrightarrow{pr}\|^2 = \|\frac{1}{2}\overrightarrow{pq} + v\|^2 = \|\frac{1}{2}\overrightarrow{pq}\|^2 + \|v\|^2 = \|\frac{1}{2}\overrightarrow{qp} + v\|^2 = \|\overrightarrow{qr}\|^2 = (q, r)^2.$$

No es difícil ver el recíproco, esto es, si  $r \in \mathcal{A}$  es un punto que equidista de  $p$  y  $q$  (a saber,  $d(p, r) = d(q, r)$ ) entonces  $r$  está contenido en la mediatrix  $R$  de  $[p, q]$ . En efecto, si  $d(p, r) = d(q, r)$  entonces

$$\|\overrightarrow{pr}\|^2 = \|\overrightarrow{qr}\|^2 = \|\overrightarrow{qp} + \overrightarrow{pr}\|^2 \iff \langle \overrightarrow{qp}, \overrightarrow{qp} + 2\overrightarrow{pr} \rangle = 0,$$

de donde  $v := \frac{1}{2}\overrightarrow{qp} + \overrightarrow{pr} \in L\{\overrightarrow{pq}\}^\perp$ . Por tanto

$$r = p + \overrightarrow{pr} = (p + \frac{1}{2}\overrightarrow{pq}) + v = m_{pq} + v \in m_{pq} + L\{\overrightarrow{pq}\}^\perp = R$$

como queríamos comprobar.

**Proposición 3.58** *Sea  $\{a, b, c\}$  un triángulo, y llamemos  $R_a$  a la mediatrix del lado  $[b, c]$ ,  $R_b$  a la mediatrix del lado  $[a, c]$  y  $R_c$  a la mediatrix del lado  $[a, b]$ . Entonces existe un único punto  $C \in \mathcal{A}$  tal que*

$$C = R_a \cap R_b \cap R_c.$$

**DEMOSTRACIÓN:** Si  $R_a$  y  $R_b$  fuesen paralelas tendríamos que las rectas vectoriales  $L\{\vec{bc}\}^\perp$  y  $L\{\vec{ac}\}^\perp$  en  $\mathcal{A}$  serían iguales, y por tanto  $\{\vec{bc}, \vec{ac}\}$  serían linealmente dependientes, lo que es absurdo ya que  $\{a, b, c\}$  es un triángulo. Por tanto  $R_a$  y  $R_b$  no son paralelas, y de igual forma ocurre con las parejas de rectas  $R_a, R_c$  y  $R_b, R_c$ . Esto garantiza que  $C := R_a \cap R_b$  es un único punto caracterizado por la propiedad de equidistar de  $a, b$  y  $c$ , de donde necesariamente

$$C = R_a \cap R_b \cap R_c.$$

■

**Definición 3.59 (Circuncentro)** *Con la notación de la Proposición 3.58, al punto  $C$  se le llama circuncentro del triángulo  $\{a, b, c\}$ .*

Su nombre deriva de la propiedad geométrica que lo caracteriza: es el centro de la circunferencia que contiene a los tres vértices del triángulo  $\{a, b, c\}$ .

**Definición 3.60** *Dado un triángulo  $\{a, b, c\}$  en un plano afín euclíadiano  $(\mathcal{A}, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ , la altura  $H_a$  del vértice  $a$  es la recta que pasa por  $a$  y es ortogonal al lado opuesto  $[b, c]$ :*

$$H_a = a + L\{\vec{bc}\}^\perp.$$

Análogamente se definen las alturas asociadas a los vértices  $b$  y  $c$ :

$$H_b = b + L\{\vec{ac}\}^\perp \quad y \quad H_c = c + L\{\vec{ab}\}^\perp.$$

**Proposición 3.61** *Si  $\{a, b, c\}$  en un triángulo en un plano  $(\mathcal{A}, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ , entonces existe un único punto  $O$  tal que*

$$O = H_a \cap H_b \cap H_c.$$

**DEMOSTRACIÓN:** Como los vectores  $\vec{ac}$  y  $\vec{bc}$  son linealmente independientes ( $\{a, b, c\}$  es un triángulo), las rectas  $H_a$  y  $H_b$  no son paralelas y se cortan en un único punto  $O$ . Comprobemos que  $O \in H_c$ , o equivalentemente, que  $\vec{Oc} \perp \vec{ab}$ . En efecto,

$$\begin{aligned} \langle \vec{Oc}, \vec{ab} \rangle &= \langle \vec{Oa} + \vec{ac}, \vec{aO} + \vec{Ob} \rangle = \langle \vec{Oa}, \vec{aO} + \vec{Ob} \rangle + \langle \vec{ac}, \vec{aO} \rangle + \langle \vec{ac}, \vec{Ob} \rangle = \\ &= \langle \vec{Oa}, \vec{aO} + \vec{Ob} \rangle - \langle \vec{Oa}, \vec{ac} \rangle + \langle \vec{ac}, \vec{Ob} \rangle = \langle \vec{Oa}, \vec{aO} + \vec{Ob} - \vec{ac} \rangle + \langle \vec{ac}, \vec{Ob} \rangle = \\ &= \langle \vec{Oa}, \vec{ca} + \vec{aO} + \vec{Ob} \rangle + \langle \vec{ac}, \vec{Ob} \rangle = \langle \vec{Oa}, \vec{cb} \rangle + \langle \vec{ac}, \vec{Ob} \rangle = 0, \end{aligned}$$

donde hemos tenido en cuenta que  $\langle \vec{ac}, \vec{Ob} \rangle = \langle \vec{cb}, \vec{Oa} \rangle = 0$  al ser  $O \in H_b \cap H_a$ . ■

**Definición 3.62 (Ortocentro)** *Al punto  $O \in \mathcal{A}$  intersección de las tres alturas de un triángulo  $\{a, b, c\}$  en un plano afín euclídeo  $(\mathcal{A}, \langle \cdot, \cdot \rangle)$  se le llama ortocentro de  $\{a, b, c\}$ .*

Estamos en condiciones de enunciar y probar el *Teorema clásico de Euler*, que da información sobre la posición relativa de los tres puntos notables de un triángulo.

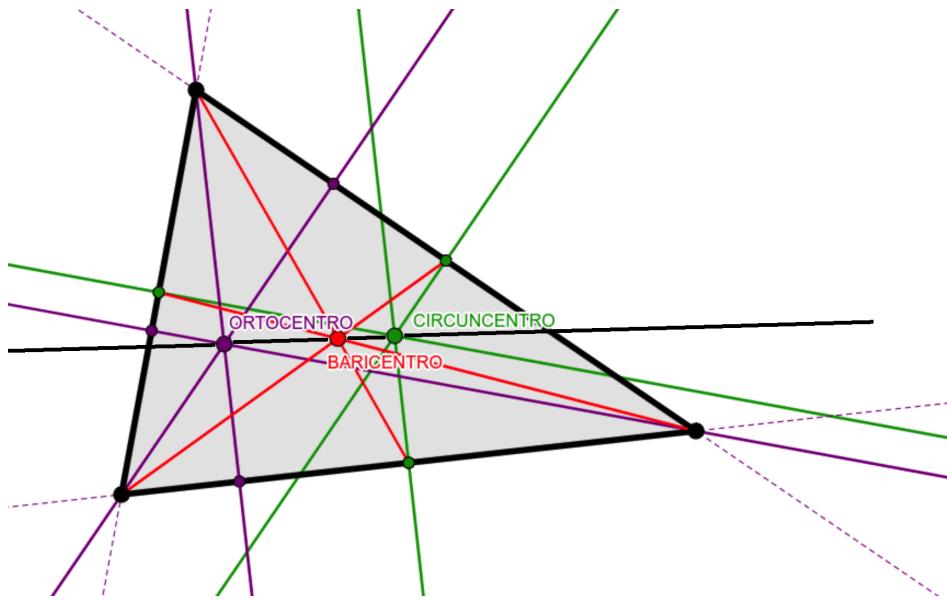


Figura 18: Recta de Euler

**Teorema 3.63 (Euler)** *Dado un triángulo  $\{a, b, c\}$  en un plano afín euclíadiano  $(\mathcal{A}, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ , el baricentro  $B$ , circuncentro  $C$  y ortocentro  $O$  de  $\{a, b, c\}$  están alineados.*

*Si  $\{B, C, O\}$  contiene al menos dos puntos distintos, la recta pasando por  $B, C$  y  $O$  se denomina recta de Euler de  $\{a, b, c\}$ .*

**DEMOSTRACIÓN:** Llamemos  $h: \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}$  a la homotecia con centro  $B$  y razón  $-1/2$ . La clave es observar que  $h$  lleva cada vértice de  $\{a, b, c\}$  en el punto medio de su lado opuesto. En efecto, como  $B = a + \frac{1}{3}(\vec{ab} + \vec{ac})$ , es claro que

$$\begin{aligned} h(a) &= B + \left(-\frac{1}{2}\right)\vec{Ba} = B + \frac{1}{2}\vec{aB} = \left(a + \frac{1}{3}(\vec{ab} + \vec{ac})\right) + \frac{1}{6}(\vec{ab} + \vec{ac}) = \\ &= a + \frac{1}{2}(\vec{ab} + \vec{ac}) = m_{bc}, \end{aligned}$$

o en otras palabras,  $h$  lleva el vértice  $a$  en el punto medio de  $[b, c]$ , y el mismo razonamiento se aplica a los otros dos vértices.

Veamos que  $h$  lleva las alturas de  $\{a, b, c\}$  en las mediatrixes de  $\{a, b, c\}$ . En efecto

$$h(H_a) = h(a + \vec{h}_a) = h(a) + \vec{h}(h_a) = h(a) + \left(-\frac{1}{2}\text{Id}_{\mathcal{A}}\right)(\vec{h}_a) = m_{bc} + \vec{h}_a = m_{bc} + \vec{R}_a = R_a,$$

donde hemos usado que  $\vec{h}_a = \vec{R}_a = L(\{\vec{bc}\})^\perp$ . Análogamente se prueba que  $h(H_b) = R_b$  y  $h(H_c) = R_c$ .

Finalmente, como el ortocentro de  $\{a, b, c\}$  es el cruce de las tres alturas  $O = H_a \cap H_b \cap H_c$ , deducimos que  $h(O) = h(H_a) \cap h(H_b) \cap h(H_c) = R_a \cap R_b \cap R_c = C$ . Pero un punto y su imagen por una homotecia están siempre alineados con el centro de la misma, por lo que  $O$  y  $C = h(O)$  están alineados con  $B$  como queríamos demostrar. ■

### 3.7.2. Bisectrices e incentro de un triángulo

Para introducir el concepto de bisectriz asociada a cada vértice de un triángulo en un plano afín euclíadiano  $(\mathcal{A}, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ , y posteriormente definir el incentro del mismo como el punto de corte de sus tres bisectrices, necesitamos alguna notación previa.

**Definición 3.64** Un espacio afín orientado es un espacio afín  $(\mathcal{A}, \overrightarrow{\mathcal{A}}, \rightarrow)$  en el que se ha fijado una orientación  $\mathcal{O}$  en  $\overrightarrow{\mathcal{A}}$ . Se suele representar  $(\mathcal{A}, \overrightarrow{\mathcal{A}}, \mathcal{O}, \rightarrow)$ , o simplemente  $(\mathcal{A}, \mathcal{O})$ . Análogamente se define el concepto de espacio afín euclíadiano orientado  $(\mathcal{A}, (\overrightarrow{\mathcal{A}}, \langle , \rangle), \mathcal{O}, \rightarrow)$ , que de forma simplificada se suele escribir  $(\mathcal{A}, \langle , \rangle, \mathcal{O})$ .

Dados  $p \in \mathcal{A}$  y  $v \in \overrightarrow{\mathcal{A}} \setminus \{0\}$  unitario ( $\|v\| = 1$ ), el conjunto

$$L_p(v) := \{p + \lambda v : \lambda \geq 0\} \subseteq p + L(\{v\})$$

es la *semirrecta con origen p en la dirección de v*. Fijada una orientación  $\mathcal{O}$  en  $\overrightarrow{\mathcal{A}}$  y tomados  $p \in \mathcal{A}$  y  $u, v \in \overrightarrow{\mathcal{A}} \setminus \{0\}$  unitarios, el ángulo orientado que forman las semirrectas  $L_p(u), L_p(v)$  (en ese orden) se define como

$$\angle_o(L_p(u), L_p(v)) := \angle_o(u, v).$$

**Proposición 3.65** Fijada una orientación  $\mathcal{O}$  en  $\overrightarrow{\mathcal{A}}$  y dados vectores  $u, v \in \overrightarrow{\mathcal{A}} \setminus \{0\}$  unitarios, existe un único vector unitario  $w \in \overrightarrow{\mathcal{A}} \setminus \{0\}$  tal que

$$\angle_o(u, w) = \angle_o(w, v) = \frac{1}{2} \angle_o(u, v).$$

DEMOSTRACIÓN: Consideremos  $\{w_1 = u, w_2\}$  base ortonormal positiva en  $(\overrightarrow{\mathcal{A}}, \langle , \rangle, \mathcal{O})$ . Recordemos que si  $\angle_o(u, v) = \alpha$ , el número  $\alpha$  es el único real en  $[0, 2\pi[$  tal que

$$v = \cos(\alpha)w_1 + \sin(\alpha)w_2.$$

Si definimos

$$w = \cos(\alpha/2)w_1 + \sin(\alpha/2)w_2,$$

claramente  $\angle_o(u, w) = \alpha/2$ . La proposición se sigue de la identidad

$$\angle_o(u, w) + \angle_o(w, v) = \angle_o(u, v) = \alpha;$$

ver Propiedades 3.6. ■

**Definición 3.66** Sean  $L_p(u_1)$  y  $L_p(u_2)$  dos semirrectas en el plano afín euclíadiano orientado  $(\mathcal{A}, \langle , \rangle, \mathcal{O})$  tales  $\angle_o(L_1, L_2) \in ]0, \pi[$ . Por definición, la bisectriz que forman  $L_p(u_1)$  y  $L_p(u_2)$  (en ese orden) es la semirrecta

$$b_{L_p(u_1), L_p(u_2)} := L_p(w),$$

donde  $w \in \overrightarrow{\mathcal{A}}$  es el único vector unitario con  $\angle_o(u_1, w) = \angle_o(w, u_2) = \frac{1}{2} \angle_o(u_1, u_2)$  en  $(\mathcal{A}, \langle , \rangle, \mathcal{O})$ .

**Observación 3.67** Es importante reparar en que el concepto de bisectriz sólo se ha definido para semirrectas  $L_p(u_1), L_p(u_2)$  formando un ángulo orientado menor que un llano (esto es, en  $]0, \pi[$ ) en  $(\mathcal{A}, \langle , \rangle, \mathcal{O})$ , o equivalentemente, cuando la base ordenada  $\{u_1, u_2\}$  es positiva en  $(\overrightarrow{\mathcal{A}}, \mathcal{O})$ .

La siguiente proposición identifica la bisectriz con el lugar de puntos equidistantes a las semirrectas.

**Proposición 3.68** Sean  $L_p(u_1)$  y  $L_p(u_2)$  dos semirrectas en el plano afín euclíadiano orientado  $(\mathcal{A}, \langle \cdot, \cdot \rangle, \mathcal{O})$  tales que  $\angle_o(L_p(u_1), L_p(u_2)) \in ]0, \pi[$ . Un punto  $q \in \mathcal{A}$ ,  $q \neq p$ , pertenece a la bisectriz  $b_{L_p(u_1), L_p(u_2)}$  si y sólo si se satisfacen las dos siguientes condiciones:

(I)  $\{u_1, \overrightarrow{pq}\}, \{\overrightarrow{pq}, u_2\}$  son bases positivas en  $(\mathcal{A}, \mathcal{O})$ .

(II)  $d(q, p + L(\{u_1\})) = d(q, p + L(\{u_2\})) > 0$ .

DEMOSTRACIÓN: Consideremos  $\{w_1 = u_1, w_2\}$  base ortonormal positiva en  $(\mathcal{A}, \langle \cdot, \cdot \rangle, \mathcal{O})$ . Si llamamos  $\angle_o(u_1, u_2) = \alpha \in ]0, \pi[$ , sabemos que

$$u_2 = \cos(\alpha)u_1 + \operatorname{sen}(\alpha)w_2 \quad (\operatorname{sen}(\alpha) > 0) \quad \text{y}$$

$$b_{L_1, L_2} = \{p + \mu(\cos(\alpha/2)u_1 + \operatorname{sen}(\alpha/2)w_2) : \mu \geq 0\}.$$

Supongamos que

$$q = p + \mu(\cos(\alpha/2)u_1 + \operatorname{sen}(\alpha/2)w_2) \in b_{L_1, L_2}.$$

Entonces, es inmediato comprobar que las bases

$$\{u_1, \overrightarrow{pq}\} = \{u_1, \cos(\alpha/2)u_1 + \operatorname{sen}(\alpha/2)w_2\} \quad \text{y}$$

$$\{\overrightarrow{pq}, u_2\} = \{\cos(\alpha/2)u_1 + \operatorname{sen}(\alpha/2)w_2, u_2 = \cos(\alpha)u_1 + \operatorname{sen}(\alpha)w_2\}$$

son positivas (inducen la misma orientación que  $\{u_1, w_2\}$ ), de donde se sigue (i).

De otro lado, el punto  $q_1 := p + \mu \cos(\alpha/2)u_1 \in L_p(u_1) \subset p + L(\{u_1\})$  satisface

$$\overrightarrow{q_1 q} = \overrightarrow{(p + \mu \cos(\alpha/2)u_1)(p + \mu(\cos(\alpha/2)u_1 + \operatorname{sen}(\alpha/2)w_2))} = \mu \operatorname{sen}(\alpha/2)w_2 \in L(\{u_1\})^\perp,$$

por lo que la Proposición 3.16 implica que

$$d(q, p + L(\{u_1\})) = \|\overrightarrow{q_1 q}\| = \|\mu \operatorname{sen}(\alpha/2)w_2\| = \mu \operatorname{sen}(\alpha/2) > 0.$$

De forma similar, el punto  $q_2 = p + \mu \cos(\alpha/2)u_2 \in L_p(u_2) \subset p + L(\{u_2\})$  satisface

$$\begin{aligned} \overrightarrow{q_2 q} &= \overrightarrow{(p + \mu \cos(\alpha/2)u_2)(p + \mu(\cos(\alpha/2)u_1 + \operatorname{sen}(\alpha/2)w_2))} = \\ &= \mu(\cos(\alpha/2)u_1 + \operatorname{sen}(\alpha/2)w_2 - \cos(\alpha/2)u_2) = \\ &= \mu(\cos(\alpha/2)(1 - \cos(\alpha))u_1 + (\operatorname{sen}(\alpha/2) - \cos(\alpha/2)\operatorname{sen}(\alpha))w_2) = \\ &= \mu \operatorname{sen}(\alpha/2)(\operatorname{sen}(\alpha)u_1 - \cos(\alpha)w_2) \in L(\{u_2\})^\perp, \end{aligned}$$

y por tanto

$$d(q, p + L(\{u_2\})) = \|\overrightarrow{q_2 q}\| = \|\mu \operatorname{sen}(\alpha/2)(\operatorname{sen}(\alpha)u_1 - \cos(\alpha)w_2)\| = \mu \operatorname{sen}(\alpha/2).$$

Esto demuestra que

$$d(q, p + L(\{u_1\})) = d(q, p + L(\{u_2\})) = \mu \operatorname{sen}(\alpha/2) > 0,$$

y por tanto (ii).

**Observación 3.69** Notemos que para todo punto  $q \in b_{L_1, L_2}$  su proyección ortogonal  $\pi_{L_j}^\perp(q)$  sobre la recta  $L_j = p + L(\{u_j\})$  está contenida  $L_p(u_j)$ , esto es,

$$q_j := \pi_{L_j}^\perp(q) = (q + L(\{u_j\})^\perp) \cap (p + L(\{u_j\})) \in L_p(u_j), \quad j = 1, 2.$$

Supongamos ahora que  $q \in \mathcal{A}$ ,  $q \neq p$ , satisface (i) y (ii). Si escribimos

$$q = p + \mu(\operatorname{sen}(\beta)u_1 + \cos(\beta)w_2),$$

donde  $\mu = d(p, q)$  y  $\beta \in [0, 2\pi[$ , es fácil ver que la condición (i) equivale a que  $\beta \in ]0, \alpha[$ .

Observemos que como  $d(q, p + L(\{u_1\})) = d(q, p + L(\{u_2\})) > 0$  entonces  $q \notin (p + L(\{u_1\})) \cup (p + L(\{u_2\}))$ . Es más, las rectas  $q + L(\{u_j\})^\perp$  y  $L_j := p + L(\{u_j\})$  se cortan en un único punto, a saber  $q_j := \pi_{L_j}^\perp(q)$ ,  $j = 1, 2$ , siendo

$$d(q, q_1) = d(q, p + L(\{u_1\})) = d(q, p + L(\{u_2\})) = d(q, q_2) > 0.$$

Por tanto  $q_1, q_2 \neq p, q$  y los conjuntos  $T_j = \{p, q, q_j\}$ ,  $j = 1, 2$ , definen sendos triángulos rectángulos. Como  $T_1$  y  $T_2$  tienen uno de sus catetos de igual longitud (a saber, el  $[q, q_1]$  de  $T_1$  y el  $[q, q_2]$  de  $T_2$ ) y comparten la misma hipotenusa  $[p, q]$ , por el Teorema de Pitágoras los catetos  $[p, q_1] \subseteq L_p(u_1)$  de  $T_1$  y  $[p, q_2] \subseteq L_p(u_2)$  de  $T_2$  han de tener también igual longitud. Por tanto la afinidad en  $h: \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}$  que lleva

$$p \mapsto p, \quad q \mapsto q, \quad q_1 \mapsto q_2$$

es una isometría en  $(\mathcal{A}, \langle \cdot, \cdot \rangle)$  satisfaciendo  $h(T_1) = T_2$ , y en consecuencia  $T_1$  y  $T_2$  tienen los mismos ángulos en vértices correspondientes por  $h$ . En particular, tienen el mismo ángulo en  $p$ , que claramente coincide con  $\beta$ . Nótese que por (i) las orientaciones naturales de  $\vec{\mathcal{A}}$  utilizadas para calcular el ángulo  $\beta$  en el vértice  $p$  en  $T_1$  y  $T_2$  coinciden con la orientación  $\mathcal{O}$  fijada en  $\vec{\mathcal{A}}$ . Como consecuencia, la semirrecta  $L_0 = L_p(\frac{1}{pq}\vec{pq})$  satisface  $\angle_o(L_p(u_1), L_0) = \angle_o(L_0, L_p(u_2)) = \beta$ , y Propiedades 3.6 garantiza que

$$\angle_o(L_p(u_1), L_0) + \angle_o(L_0, L_p(u_2)) = 2\beta = \angle_o(L_p(u_1), L_p(u_2)) = \alpha \in ]0, \pi[.$$

Esto implica  $\beta = \frac{1}{2}\alpha$  y  $q = p + \mu(\operatorname{sen}(\beta)u_1 + \cos(\beta)w_2) \in b_{L_p(u_1), L_p(u_2)}$ , concluyendo la prueba. ■

**Definición 3.70** Sea  $\{a, b, c\}$  es un triángulo en  $(\mathcal{A}, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ , y fijemos en  $\vec{\mathcal{A}}$  la orientación  $\mathcal{O}$  inducida por  $\{\vec{ab}, \vec{ac}\}$  (equivalente a  $\{\vec{bc}, \vec{ba}\}$  y  $\{\vec{ca}, \vec{cb}\}$ ). Las bisectrices en los vértices  $a, b$  y  $c$  se definen como

$$b_a := b_{L_a(\vec{ab}), L_a(\vec{ac})}, \quad b_b := b_{L_b(\vec{bc}), L_b(\vec{ba})}, \quad b_c := b_{L_c(\vec{ca}), L_c(\vec{cb})}.$$

**Proposición 3.71** Si  $\{a, b, c\}$  es un triángulo en  $(\mathcal{A}, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ , entonces entonces existe un único punto  $I \in \mathcal{A}$  tal que

$$I = b_a \cap b_b \cap b_c.$$

DEMOSTRACIÓN: Como siempre denotemos por

$$\widehat{A} = \angle_o(\vec{ab}, \vec{ac}), \quad \widehat{B} = \angle_o(\vec{bc}, \vec{ba}), \quad \widehat{C} = \angle_o(\vec{ca}, \vec{cb}) \in ]0, \pi[,$$

y llamemos  $\mathcal{O}$  a la orientación en  $\mathcal{A}$  inducida por cualquiera de las bases ordenadas  $\{\vec{ab}, \vec{ac}\}, \{\vec{bc}, \vec{ba}\}, \{\vec{ca}, \vec{cb}\}$  (es la misma).

Si consideramos  $\{\frac{1}{\|\vec{ab}\|}\vec{ab}, w_2\}$  base ordenada ortogonal y positiva en  $(\mathcal{A}, \langle \cdot, \cdot \rangle, \mathcal{O})$  y escribimos

$$\frac{1}{\|\vec{ac}\|}\vec{ac} = \cos(\widehat{A})\frac{1}{\|\vec{ab}\|}\vec{ab} + \operatorname{sen}(\widehat{A})w_2,$$

tenemos que

$$b_a := b_{L_a(\vec{ab}), L_a(\vec{ac})} = \{a + \mu (\cos(\widehat{A}/2) \frac{1}{\|\vec{ab}\|} \vec{ab} + \operatorname{sen}(\widehat{A}/2) w_2) : \mu \geq 0\}.$$

Como

$$\cos(\widehat{A}/2) \frac{1}{\|\vec{ab}\|} \vec{ab} + \operatorname{sen}(\widehat{A}/2) w_2 = \frac{\operatorname{sen}(\widehat{A}/2)}{\operatorname{sen}(\widehat{A})} \left( \frac{\vec{ab}}{\|\vec{ab}\|} + \frac{\vec{ac}}{\|\vec{ab}\|} \right)$$

y  $\frac{\operatorname{sen}(\widehat{A}/2)}{\operatorname{sen}(\widehat{A})} > 0$ , deducimos que

$$b_a = \{a + \mu \left( \frac{1}{\|\vec{ac}\|} \vec{ac} + \frac{1}{\|\vec{ab}\|} \vec{ab} \right) : \mu \geq 0\}.$$

Análogamente  $b_c = \{c + \mu \left( \frac{1}{\|\vec{ca}\|} \vec{ca} + \frac{1}{\|\vec{cb}\|} \vec{cb} \right) : \mu \geq 0\}$ .

No es difícil ver que las semirrectas  $b_a$  y  $b_c$  se cortan en un único punto, esto es, el punto de corte de las rectas que contienen a  $b_a$  y  $b_c$  está en  $b_a \cap b_c$ . Una forma sencilla de comprobarlo es considerar la única afinidad  $F: \mathcal{A} \rightarrow \mathbb{R}^2$  determinada por

$$F(a) = (-1, 0), \quad F(c) = (1, 0), \quad F(b) = (-1, 2)$$

y darse cuenta de que las semirrectas  $F(b_a)$  y  $F(b_c)$  de  $\mathbb{R}^2$  son secantes dentro del semiplano  $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y \geq 0\}$ ; de ahí lo deseado. Por el mismo razonamiento  $b_a \cap b_b, b_b \cap b_c \neq \emptyset$ .

Llamemos  $I$  al punto de corte  $b_a \cap b_c$ .

Como  $I \in b_a$ , de la Proposición 3.68

- $\{\vec{ab}, \vec{aI}\}, \{\vec{aI}, \vec{ac}\}$  son bases positivas en  $(\overline{\mathcal{A}}, \mathcal{O})$  y
- $d(I, a + L(\{\vec{ab}\})) = d(I, a + L(\{\vec{ac}\}))$ .

Análogamente, como  $I \in b_c$  entonces

- $\{\vec{ca}, \vec{cI}\}, \{\vec{cI}, \vec{cb}\}$  son bases positivas en  $(\overline{\mathcal{A}}, \mathcal{O})$  y
- $d(I, c + L(\{\vec{ca}\})) = d(I, c + L(\{\vec{cb}\}))$ .

Usando que  $c + L(\{\vec{ca}\}) = a + L(\{\vec{ac}\})$ ,  $a + L(\{\vec{ab}\}) = b + L(\{\vec{ba}\})$  y  $c + L(\{\vec{cb}\}) = b + L(\{\vec{bc}\})$ , deducimos de lo anterior que

$$d(I, b + L(\{\vec{ba}\})) = d(I, b + L(\{\vec{bc}\})).$$

Además, la base

$$\{\vec{bc}, \vec{bI}\} = \{-\vec{cb}, -\vec{cb} + \vec{cI}\}$$

induce la misma orientación que  $\{\vec{cI}, \vec{cb}\}$ , luego es positiva en  $(\overline{\mathcal{A}}, \mathcal{O})$ , y lo mismo ocurre con  $\{\vec{bI}, \vec{ba}\}$ . Por la Proposición 3.68 concluimos que  $I \in b_b$ , esto es,  $I \in b_a \cap b_b \cap b_c$ . Esto concluye la demostración. ■

**Definición 3.72 (Incentro)** Al punto  $I \in \mathcal{A}$  intersección de las tres bisectrices de un triángulo  $\{a, b, c\}$  en un plano afín euclídeo  $(\mathcal{A}, \langle \cdot, \cdot \rangle)$  se le llama incentro de  $\{a, b, c\}$ .

Démonos cuenta de que la distancia desde el incentro a los tres lados de un triángulo  $\{a, b, c\}$  es constante, y esta constante define el radio de la circunferencia inscrita en el triángulo (con centro el incentro). Para ello téngase e cuenta que, por la Observación 3.69, la proyección ortogonal del incentro sobre la recta  $a + L(\{\vec{ab}\})$  está contenida en  $[a, b]$ , e igual con los otros lados. Compárese esta propiedad geométrica con la que define al circuncentro.

### 3.7.3. El Teorema de Tales

Concluiremos el tema de espacios afines euclidianos demostrando el *Teorema de Tales* (siglo VII A.C.). Nuestro enunciado será con un lenguaje más moderno.

**Teorema de Tales:** *Sea  $(\mathcal{A}, \langle \cdot, \cdot \rangle)$  un espacio afín euclíadiano de dimensión  $\geq 2$ . Sean  $\Pi_1, \Pi_2$  y  $\Pi_3$  tres hiperplanos en  $\mathcal{A}$  paralelos y distintos dos a dos. Sean  $R$  y  $S$  dos rectas distintas en  $\mathcal{A}$  no paralelas a los hiperplanos, y llamemos  $r_i = \Pi_i \cap R$ ,  $s_i = \Pi_i \cap S$ ,  $i = 1, 2, 3$ , a los correspondientes puntos de corte. Entonces*

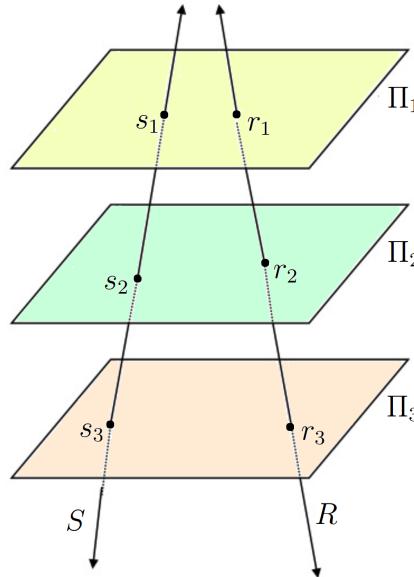
$$\frac{d(s_1, s_3)}{d(s_1, s_2)} = \frac{d(r_1, r_3)}{d(r_1, r_2)}.$$

**DEMOSTRACIÓN:** Llamemos  $\pi: \mathcal{A} \rightarrow S \subseteq \mathcal{A}$  a la proyección afín sobre  $S$  en la dirección  $\vec{\pi} := \vec{\pi}_i$ ,  $i = 1, 2, 3$  (no depende de  $i$  porque son paralelos). Por la definición de esta proyección afín,

$$\pi(r_i) = S \cap (r_i + \vec{\pi}) = S \cap \Pi_i = s_i, \quad i = 1, 2, 3.$$

Como  $r_1, r_2$  y  $r_3$  están alineados, existe  $\lambda \in \mathbb{R}$  único y no nulo tal que  $\overrightarrow{r_1 r_3} = \lambda \overrightarrow{r_1 r_2}$ , y por tanto

$$d(r_1, r_3) = \|\overrightarrow{r_1 r_3}\| = |\lambda| \|\overrightarrow{r_1 r_2}\| = |\lambda| d(r_1, r_2).$$



Como  $\pi$  es afín

$$\vec{\pi}(\overrightarrow{r_1 r_3}) = \overrightarrow{\pi(r_1) \pi(r_3)} = \overrightarrow{s_1 s_3} \quad \text{y} \quad \vec{\pi}(\overrightarrow{r_1 r_2}) = \overrightarrow{\pi(r_1) \pi(r_2)} = \overrightarrow{s_1 s_2},$$

de donde al ser  $\vec{\pi}(\overrightarrow{r_1 r_3}) = \lambda \vec{\pi}(\overrightarrow{r_1 r_2})$  inferimos que  $\overrightarrow{s_1 s_3} = \lambda \overrightarrow{s_1 s_2}$ .

Así

$$d(s_1, s_3) = \|\overrightarrow{s_1 s_3}\| = |\lambda| \|\overrightarrow{s_1 s_2}\| = |\lambda| d(s_1, s_2),$$

por lo que

$$\frac{1}{|\lambda|} = \frac{d(s_1, s_2)}{d(s_1, s_3)} = \frac{d(r_1, r_2)}{d(r_1, r_3)}.$$

Esto concluye el teorema. ■

**Ejercicio 3.73** En el plano euclíadiano  $\mathbb{R}^2$  se consideran dos triángulos  $abc$  y  $a'b'c'$  tales que  $\{\vec{ab}, \vec{a'b'}\}$  son linealmente dependientes y  $\{\vec{ab}, \vec{ac}\}$  y  $\{\vec{a'b'}, \vec{a'c'}\}$  inducen la misma orientación en  $\mathbb{R}^2$ .

Demostrar que la condición necesaria y suficiente para que exista una homotecia afín  $h: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  satisfaciendo  $h(a) = a', h(b) = b', h(c) = c'$  es que

$$\frac{d(a, b)}{d(a', b')} = \frac{d(a, c)}{d(a', c')} = \frac{d(b, c)}{d(b', c')}.$$

SOLUCIÓN: Tras una traslación y una homotecia podemos suponer que

- $a = a'$  y  $d(a, b) = \|\vec{ab}\| = 1$ .
- $\vec{ab}' = r\vec{ab}$  para algún  $r > 0$ .
- $\{\vec{ab}, \vec{ac}\}$  y  $\{\vec{ab}', \vec{ac}'\}$  son bases positivas de  $\mathbb{R}^2$ .

Supongamos que

$$\frac{1}{r} = \frac{\|\vec{ac}\|}{\|\vec{ac}'\|} = \frac{\|\vec{bc}\|}{\|\vec{b'c'}\|}$$

y probemos que existe una homotecia  $h$  de centro  $a$  y razón  $r$  satisface  $h(a) = a', h(b) = b', h(c) = c'$ . Como las identidades  $h(a) = a', h(b) = b'$  son triviales basta comprobar que  $h(c) = c'$ . Un cálculo directo nos da que

$$\|\vec{b'c'}\|^2 = \|\vec{b'a} + \vec{ac'}\|^2 = \|\vec{b'a}\|^2 + \|\vec{ac'}\|^2 + 2\langle \vec{b'a}, \vec{ac'} \rangle = r^2\|\vec{ba}\|^2 + r^2\|\vec{ac}\|^2 + 2\langle \vec{ba}, \vec{ac} \rangle,$$

y como

$$\|\vec{b'c'}\|^2 = r^2\|\vec{bc}\|^2 = r^2(\|\vec{ba}\|^2 + \|\vec{ac}\|^2 + 2\langle \vec{ba}, \vec{ac} \rangle)$$

deducimos que  $r^2\langle \vec{ba}, \vec{ac} \rangle = \langle \vec{b'a}, \vec{ac'} \rangle$ . Teniendo en cuenta que  $\vec{ab}' = r\vec{ab}$  finalmente queda

$$\langle \vec{ba}, \vec{ac'} \rangle = \langle \vec{ba}, r\vec{ac} \rangle.$$

Concluimos que  $r\vec{ac}, \vec{ac'}$  son dos vectores del mismo módulo con  $\langle \vec{ab}, \vec{ac'} \rangle = \langle \vec{ab}, r\vec{ac} \rangle$ . Como además  $\{\vec{ab}, \vec{ac}\}$  y  $\{\vec{ab}', \vec{ac}'\}$  son bases positivas de  $\mathbb{R}^2$ , los correspondientes ángulos orientados coinciden

$$\angle_o(\vec{ab}, \vec{ac}) = \angle_o(\vec{ab}, \vec{ac'}),$$

y por tanto  $\vec{ac'} = r\vec{ac}$ , esto es,  $h(c) = c'$  como queríamos demostrar.

El recíproco es trivial ya que si  $h$  es una homotecia de razón  $r$  satisfaciendo  $h(a) = a', h(b) = b', h(c) = c'$ , entonces

$$d(a', b') = \|\vec{a'b'}\| = \|\vec{h(a)b'}\| = \|\vec{h(ab)}\| = \|r\vec{ab}\| = |r|\|\vec{ab}\| = |r|d(a, b),$$

y análogamente  $d(a', c') = |r|d(a, c)$ ,  $d(b', c') = |r|d(b, c)$ . ■

## Ejercicios del Tema 2

1. Sea  $A$  un espacio afín euclídeo y  $p, q \in A$ . Recordemos que el *punto medio* entre  $p$  y  $q$  se definía como  $m_{pq} = p + (1/2) \vec{pq}$ . Demostrar que  $d(p, m_{pq}) = d(q, m_{pq})$ .
2. (Hiperplano afín de puntos equidistantes). Dados tres puntos  $p, q, r \in \mathbb{R}^n$ , demostrar que se cumple la igualdad

$$d(p, r)^2 - d(q, r)^2 = 2 < \overrightarrow{rm_{pq}}, \overrightarrow{qp} >,$$

donde  $m_{pq}$  es el punto medio entre  $p$  y  $q$ . Utilizar esta igualdad para probar lo siguiente: si  $p \neq q$ , entonces el conjunto de los puntos de  $\mathbb{R}^n$  que se encuentran a la misma distancia de  $p$  y de  $q$  coincide con el hiperplano afín  $m_{pq} + L(\vec{pq})^\perp$ .

3. Calcular las proyecciones y las simetrías ortogonales de  $\mathbb{R}^2$  con respecto de los ejes coordenados.
4. Calcular, según el valor del parámetro  $a \in \mathbb{R}$ , la distancia del punto  $p = (1, 1, 1)$  de  $\mathbb{R}^3$  a la recta afín  $S$  de ecuaciones  $x - y - z = 0$  y  $x - y + z = a$ .
5. En  $\mathbb{R}^3$ , calcular, según los valores de  $a, b \in \mathbb{R}$ , la distancia entre la recta afín  $S$  de ecuaciones  $x + y = 0$  y  $x - y + z = 1$ , y la recta afín  $S'$  de ecuaciones  $x + y = a$  y  $x - y + bz = 1$ .
6. Dados los siguientes pares de rectas estudia su posición relativa. Si se cortan determina el ángulo que forma, y en caso contrario calcula la distancia entre ellas.
  - $R = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x = y\}$ ,  $S = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 2x = y\}$ .
  - $R = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x = y + 1\}$ ,  $S = \{(2\lambda, 1 + 2\lambda) \in \lambda \in \mathbb{R}\}$ .
7. Consideremos el espacio vectorial  $\mathcal{P}_2(\mathbb{R})$  de los polinomios de grado  $\leq 2$  con coeficientes reales, dotado de su estructura afín canónica. Introduzcamos en el espacio vectorial  $\mathcal{P}_2(\mathbb{R})$  la métrica euclidiana

$$\langle p(x), q(x) \rangle = \int_0^1 p(x)q(x)dx$$

y convirtamos al espacio afín  $\mathcal{P}_2(\mathbb{R})$  en euclídeo. Comprueba que las rectas

$$S = \{p(x) \in \mathcal{P}_2(\mathbb{R}) : p(0) = 5, p''(8) = 4\}, T = \{p(x) \in \mathcal{P}_2(\mathbb{R}) : p'(0) = 0, p'(1) = 4\}$$

se cortan en un punto y calcula el ángulo que forman.

8. Una aplicación afín  $f: (\mathcal{A}, \langle \cdot, \cdot \rangle) \rightarrow (\mathcal{A}', \langle \cdot, \cdot \rangle')$  entre espacios afines euclidianos se dice que preserva la ortogonalidad si para cualesquiera rectas secantes  $R, S$  en  $(\mathcal{A}, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ ,

$$R \perp S \implies f(R) \perp f(S).$$

Probar que si  $f: (\mathcal{A}, \langle \cdot, \cdot \rangle) \rightarrow (\mathcal{A}', \langle \cdot, \cdot \rangle')$  es una aplicación afín biyectiva, entonces  $f$  es una semejanza si y sólo si  $f$  preserva la ortogonalidad.

9. Encuentra si existe un movimiento rígido de  $\mathbb{R}^2$  que lleve la recta  $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x = 0\}$  en la recta  $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y = 1\}$  y la recta  $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y = 0\}$  en la recta  $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x = 1\}$ .
10. Sean  $f_1, f_2$  las simetrías ortogonales en el plano euclídeo  $\mathbb{R}^2$  respecto de las rectas  $R_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x - y = 2\}$  y  $R_2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x - 2y = 1\}$ , respectivamente. Calcula  $f_1 \circ f_2$  y descríbela.
11. En  $\mathbb{R}^4$  calcular, según los valores de  $a \in \mathbb{R}$ , la distancia entre  $S = (0, 1, 1, 0) + L((a, 0, 1, 1))$  y el plano afín de ecuaciones  $x + y + z + t = 1$  y  $x - y = 0$ .
12. Demostrar que si  $A$  es un espacio afín euclídeo de dimensión  $n$ , entonces existe un movimiento rígido  $f : A \rightarrow \mathbb{R}^n$ .
13. Demostrar que todo movimiento rígido de una recta afín en sí misma es una traslación o una simetría central.
14. Sea  $f : A \rightarrow A$  un movimiento rígido. Dadas dos rectas afines  $S$  y  $S'$  en  $A$ , demostrar que  $f(S)$  y  $f(S')$  son dos rectas afines en  $A$  que determinan el mismo ángulo que  $S$  y  $S'$ .
15. Sea  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  la aplicación afín tal que:
- $$f(-1, -1) = (0, 0), \quad f(-1, -2) = (1, 0), \quad f(0, -1) = (0, 1).$$
- Demostrar que  $f$  es un movimiento rígido y clasificarlo.
16. Demostrar que si  $p$  y  $q$  son dos puntos de un espacio afín euclídeo  $A$ , entonces siempre existe un movimiento rígido  $f : A \rightarrow A$  tal que  $f(p) = q$ . De forma más general, probar que si  $A$  tiene dimensión finita y  $S, S'$  son dos subespacios afines de  $A$  con dimensión  $m$ , entonces existe un movimiento rígido  $f : A \rightarrow A$  tal que  $f(S) = S'$ .
17. Construir un movimiento rígido de  $\mathbb{R}^2$  que transforme la recta afín  $S$  de ecuación  $x + y = 2$  en la recta afín  $S' = (1, -1) + L((1, 1))$ . Clasificar el movimiento obtenido.
18. Sean  $\sigma_1$  y  $\sigma_2$  las simetrías en  $\mathbb{R}^2$  respecto de las rectas afines  $x + y = 0$  y  $x + 2y = 2$ , respectivamente. Calcular de forma explícita el movimiento rígido  $f = \sigma_1 \circ \sigma_2$  en coordenadas usuales. Clasificarlo.
19. ¿Son movimientos rígidos las aplicaciones  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  definidas por:

$$f(x, y) = (y - 2, x + 1) \quad y \quad g(x, y) = (2y - 1, -2x + 3)?$$

Si alguna de ellas lo es, clasificarlo.

20. Calcular en coordenadas usuales de  $\mathbb{R}^2$  los siguientes movimientos:
- a) El giro de centro el punto  $o = (1, 2)$  y ángulo orientado  $\theta = 2\pi/3$  respecto de la orientación usual.

- b) La simetría ortogonal deslizante respecto de la recta afín  $x - y = 1$  con vector de deslizamiento  $u = (1, 1)$ .
21. Se considera la aplicación afín  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  cuya expresión matricial con respecto a  $R_0$  es:
- $$f(x, y) = \begin{pmatrix} -3/5 & -4/5 \\ -4/5 & 3/5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}.$$
- a) Demostrar que  $f$  es una simetría deslizante.  
b) Calcular la recta afín de simetría y el vector de traslación.
22. Demostrar que la composición de dos simetrías ortogonales en  $\mathbb{R}^2$  es un giro, una traslación o la identidad. ¿De qué depende que se obtenga un giro, una traslación o la identidad?
23. Calcular las proyecciones y las simetrías de  $\mathbb{R}^3$  con respecto a los ejes coordenados y a los planos coordenados.
24. Sean  $\sigma_1$  y  $\sigma_2$  las simetrías en  $\mathbb{R}^3$  respecto de los planos afines  $x + y = 1$  y  $x - z = 2$ , respectivamente. Calcula de forma explícita el movimiento rígido  $f = \sigma_1 \circ \sigma_2$  en coordenadas usuales. Clasifícalo.
25. Demuestra que las siguientes aplicaciones afines son movimientos rígidos del plano afín euclídeo  $\mathbb{R}^2$  y clasifícalas:
- a)  $f(x, y) = (3 - 3x/5 + 4y/5, 1 - 4x/5 - 3y/5)$ .  
b)  $f(x, y) = (x/2 - \sqrt{3}y/2 + 1, \sqrt{3}x/2 + y/2 + 2)$ .  
c)  $f(x, y) = (-x/2 + \sqrt{3}y/2 + 1, \sqrt{3}x/2 + y/2 - 1)$ .  
d)  $f(x, y) = (3x/5 + 4y/5 + 2, 4x/5 - 3y/5 + 5)$ .
26. Calcular en coordenadas usuales de  $\mathbb{R}^3$  los siguientes movimientos:
- a) el movimiento helicoidal de eje  $S = (1, 2, 1) + L((1, 0, -1))$  y ángulo  $\pi/2$  con vector de traslación  $v = (-3, 0, 3)$ .  
b) la simetría deslizante respecto del plano afín  $x + y + z = 1$  con vector de traslación  $v = (1, -1, 0)$ .  
c) la composición de la rotación de eje  $S = (1, 2, 0) + L((0, 1, 0))$  y ángulo  $\pi/2$  con la simetría respecto del plano afín  $y = -1$ .
27. Se consideran las aplicaciones afines  $f, g : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  dadas por:

$$f(x, y, z) = \frac{1}{3}(2x + 2y + z + 2, x - 2y + 2z - 2, 2x - y - 2z - 4),$$

$$g(x, y, z) = \frac{1}{3}(2x + 2y + z + 3, -2x + y + 2z, -x + 2y - 2z - 3).$$

Demostrar que son movimientos rígidos de  $\mathbb{R}^3$  y clasificarlos.

28. Demuestra que las siguientes aplicaciones afines son movimientos rígidos del espacio afín euclídeo  $\mathbb{R}^3$  y clasifícalas:

- a)  $f(x, y, z) = (2 + y, x, 1 + z).$
- b)  $f(x, y, z) = \left(\frac{1+\sqrt{3}}{2} + \frac{x-\sqrt{3}y}{2}, \frac{1-\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{3}x+y}{2}, z + 1\right).$
- c)  $f(x, y, z) = (x/2 + \sqrt{3}z/2 + 1, y, -\sqrt{3}x/2 + z/2 - 1).$
- d)  $f(x, y, z) = (x/2 - \sqrt{3}z/2 + 2, y + 2, -\sqrt{3}x/2 - z/2 + 2).$
- e)  $f(x, y, z) = (-4x/5 + 3z/5 + 3, y, 3x/5 + 4z/5 - 1).$
- f)  $f(x, y, z) = (-4x/5 + 3z/5 + 3, y + 4, 3x/5 + 4z/5 - 1).$
- g)  $f(x, y, z) = (2y/\sqrt{5} + z/\sqrt{5}, \sqrt{5}x/3 - 2y/(3\sqrt{5}) + 4z/(3\sqrt{5}), -2x/3 - y/3 + 2z/3).$
- h)  $f(x, y, z) = (\sqrt{5}x/3 - 2y/(3\sqrt{5}) + 4z/(3\sqrt{5}), 2y/\sqrt{5} + z/\sqrt{5}, -2x/3 - y/3 + 2z/3).$
- i)  $f(x, y, z) = (1 + 2x/3 - 2y/3 + z/3, x/3 + 2y/3 + 2z/3, 1 + 2x/3 + y/3 - 2z/3).$

29. Se considera la aplicación afín  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  cuya expresión matricial con respecto a  $R_u$  es:

$$f(x, y, z) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

- a) Demostrar que  $f$  es una simetría ortogonal deslizante.
- b) Calcular el plano afín de simetría y el vector de traslación.

30. Se considera la aplicación afín  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  cuya expresión matricial con respecto a  $R_u$  es:

$$f(x, y, z) = \begin{pmatrix} 1/2 & -\sqrt{3}/2 & 0 \\ \sqrt{3}/2 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} (1 - \sqrt{3})/2 \\ -(1 + \sqrt{3})/2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

- a) Demostrar que  $f$  es un movimiento helicoidal.
- b) Calcular el eje, el ángulo y el vector de traslación.

31. Para cada  $\alpha \in \mathbb{R}$  se considera el movimiento rígido de  $\mathbb{R}^3$  dado por:

$$f_\alpha(x, y, z) = \frac{1}{3}(-x + 2y + 2z + 2, 2x + 2y - z - 1, 2x - y + 2z - \alpha).$$

Clasificar, según los valores de  $\alpha$ , qué tipo de movimiento es  $f_\alpha$ , calculando en cada caso el conjunto de puntos fijos.

32. Discutir de forma razonada si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas:

- a) Dados dos puntos  $p, q \in \mathbb{R}^3$  con  $p \neq q$ , existe un único plano afín  $S$  tal que  $\sigma_S(p) = q$ .
- b) En  $\mathbb{R}^3$ , la composición de una simetría ortogonal y una traslación siempre es una simetría ortogonal o una simetría ortogonal deslizante.

- c) La composición de dos rotaciones en  $\mathbb{R}^3$  nunca puede tener un único punto fijo.
33. Decide de forma razonada qué tipo de movimiento rígido es:
- La composición de dos simetrías ortogonales en el plano euclídeo  $\mathbb{R}^2$ .
  - La composición de dos simetrías ortogonales con deslizamiento en el plano euclídeo  $\mathbb{R}^2$ .
  - La composición de un giro y una simetría en el plano euclídeo  $\mathbb{R}^2$ .
  - La composición de un giro y una simetría con deslizamiento en el plano euclídeo  $\mathbb{R}^2$ .
  - La composición de dos simetrías ortogonales en el espacio euclídeo  $\mathbb{R}^3$ .
  - La composición de un giro y una simetría en el espacio euclídeo  $\mathbb{R}^3$ .
  - La composición de un giro y una traslación en el espacio euclídeo  $\mathbb{R}^3$ .
  - La composición de dos simetrías centrales en el espacio euclídeo  $\mathbb{R}^3$ .
34. Sea  $f: (\mathcal{A}, \langle \cdot, \cdot \rangle) \rightarrow (\mathcal{A}', \langle \cdot, \cdot \rangle)$  una aplicación afín entre espacios afines euclídeos, y sea  $\mathcal{R} = \{p_0, p_1, \dots, p_n\}$  un sistema de referencia rectangular en  $(\mathcal{A}, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ . Demostrar que  $f$  es una isometría si y sólo si  $f(\mathcal{R}) = \{f(p_0), f(p_1), \dots, f(p_n)\}$  es un sistema de referencia rectangular en  $(\mathcal{A}', \langle \cdot, \cdot \rangle)$ .
35. Consideremos un triángulo  $\{a, b, c\}$  en un plano afín euclídeo  $(\mathcal{A}, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ . Definimos el ángulo exterior en el vértice  $a$  como el suplementario del interior en  $a$
- $$\angle_e(\vec{ab}, \vec{ac}) = \pi - \hat{A} = \pi - \angle_o(\vec{ab}, \vec{ac}),$$
- y análogamente para los otros dos vértices. Prueba que cada ángulo exterior es estrictamente mayor que los dos ángulos internos no adyacentes.
36. Prueba que en un triángulo isósceles (esto es, con dos lados de igual longitud) en un plano afín euclídeo la recta de Euler contiene al incentro.
37. Encuentra un triángulo en el plano afín euclidiano  $\mathbb{R}^2$  en el que la recta de Euler no contenga al incentro.

## TEMA 3: Hipercuádricas Afines

La geometría griega se fundamentó en el uso de la regla y el compás, esto es, se centró esencialmente en aquellas construcciones basadas en la recta y el círculo. El trasfondo analítico detrás de todo ello son las ecuaciones lineales y cuadráticas. Con esto queremos decir que los griegos resolvieron mediante la geometría axiomática o sintética eucladiana problemas que con una formulación moderna o cartesiana son modelados a través de las ecuaciones de segundo grado. Las cónicas son los objetos naturales desde este punto de vista ya que se generan cortando el cono (superficie de revolución basada en la recta y la circunferencia) con planos.

Apolonio de Perga (Perga, c. 262 - Alejandría, c. 190 a. C.), geómetra y astrónomo griego, recopiló en su obra *Sobre las secciones cónicas* todo el conocimiento clásico sobre este tipo de objetos, ofreciendo una descripción geométrica tan precisa de los mismos que ha llegado a ser considerado un precursor de la geometría cartesiana. A él debemos la solución completa de la ecuación general de segundo grado por medio de la geometría, y la introducción de la nomenclatura clásica de elipse, parábola e hipérbola para las cónicas.

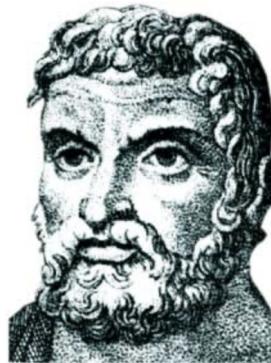


Figura 19: Apolonio de Perga

En esta sección vamos a presentar el tratamiento moderno de las hipercuádricas en espacios afines. Formalmente, las hipercuádricas se definirán como los ceros de los polinomios de grado dos en varias variables, y el objetivo fundamental de su estudio será la clasificación. Para ello tendremos que profundizar en aquellas herramientas del álgebra lineal relacionadas con procesos de diagonalización de matrices. Fundamentalmente probaremos que toda matriz simétrica se puede ser diagonalizada por congruencia a través de matrices del grupo afín.

### 4. DIAGONALIZACIÓN DE MATRICES

Comenzaremos repasando la teoría clásica de diagonalización matrices y fijaremos alguna notación.

En lo que sigue denotaremos por  $M_n(\mathbb{R})$  al espacio de las matrices cuadradas reales de orden  $n$ .

**Definición 4.1** Una matriz  $D = (d_{i,j})_{i,j=1,\dots,n} \in M_n(\mathbb{R})$  (espacio de las matrices cuadradas de orden  $n$ ) se dice diagonal si  $d_{i,j} = 0$ ,  $i \neq j$ . Si  $a_1, \dots, a_k \in \mathbb{R}$  ( $k \leq n$ ) son

números reales distintos y  $n_1, \dots, n_k \in \mathbb{N}$  son enteros positivos tales que  $\sum_{i=1}^k n_i = n$ , denotaremos por  $D(a_1^{(n_1)}, \dots, a_k^{(n_k)})$  a la matriz diagonal  $(d_{i,j})_{i,j=1,\dots,n}$  con entradas ordenadas en la diagonal

$$(d_{1,1}, \dots, d_{n,n}) = ((a_1, \dots, a_1), \dots, (a_i, \dots, a_i), \dots, (a_k, \dots, a_k)),$$

esto es,

$$D(a_1^{(n_1)}, \dots, a_k^{(n_k)}) = \begin{pmatrix} a_1 I_{n_1} & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & a_k I_{n_k} \end{pmatrix}$$

**Definición 4.2** Dada una matriz  $C \in M_n(\mathbb{R})$  cuadrada de orden  $n$ , un número  $a \in \mathbb{R}$  se dice un valor propio de  $C$  si existe  $y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$  tal que  $C \cdot y = ay$ . A tal vector  $y \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$  se le denominará vector propio del valor propio  $a$ . Si  $a$  es un valor propio de  $C$ , al subespacio vectorial de  $\mathbb{R}^n$

$$V_a = \{y \in \mathbb{R}^n : C \cdot y = ay\}$$

se le llamará subespacio propio de  $a$ .

Los valores propios de  $C$  coinciden son las raíces reales del polinomio característico

$$p_C(x) = \det(C - x \cdot I_n)$$

de  $C$ . La multiplicidad algebraica de un valor propio  $a$  de  $C$  es, por definición, la multiplicidad  $m_a \geq 1$  de  $a$  como raíz de  $p_C(x)$ . Asimismo, el entero  $\dim V_a \geq 1$  es conocido como la multiplicidad geométrica de  $a$ . No es difícil ver que  $\dim V_a \leq m_a$  para todo valor propio  $a$  de  $C$ .

**Definición 4.3 (Semejanza de matrices)** Dos matrices  $C_1$  y  $C_2$  se dicen semejantes si existe  $Q \in GL(n, \mathbb{R})$  tal que  $Q^{-1}C_1Q = C_2$ . La relación binaria de semejanza en  $M_n(\mathbb{R})$  es de equivalencia. Una matriz  $C \in M_n(\mathbb{R})$  se dice diagonalizable por semejanza si existe  $Q \in GL(n, \mathbb{R})$  tal que  $Q^{-1}CQ$  es diagonal.

No es difícil probar que:

**Teorema 4.4** Una matriz  $C \in M_n(\mathbb{R})$  es diagonalizable por semejanza si y solo si

$$\sum_{i=1}^k \dim V_{a_i} = n,$$

donde  $a_1, \dots, a_k$  son sus valores propios. De forma equivalente,  $C \in M_n(\mathbb{R})$  es diagonalizable por semejanza si y solo si  $p_C(x)$  descompone en  $\mathbb{R}$  y  $m_a = \dim V_a$  para todo valor propio  $a$  de  $C$ .

Como consecuencia del Teorema 4.4, dos matrices  $C_1$  y  $C_2$  diagonalizables son semejantes si y solo si tienen los mismos valores propios con las mismas multiplicidades.

El procedimiento estándar para la diagonalización por semejanza de una matriz  $C \in M_n(\mathbb{R})$  es el siguiente. Resolviendo la ecuación  $p_C(x) = 0$  se calculan los distintos valores propios  $a_1, \dots, a_k$  de  $C$ , y para cada  $a_i$  se determina una base  $B_i = \{u_1^i, \dots, u_{n_i}^i\}$

del subespacio propio  $V_{a_i}$ , donde hemos escrito  $n_i = \dim V_{a_i}$ . Finalmente se forma la matriz  $Q \in \mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$  que distribuye por columnas los vectores de la base ordenada

$$B = B_1 \cup \dots \cup B_k = \{u_1^1, \dots, u_{n_1}^1, \dots, u_1^k, \dots, u_{n_k}^k\}$$

de  $\mathbb{R}^n$ , en la que claramente  $Q^{-1}CQ = D(a_1^{(n_1)}, \dots, a_k^{(n_k)})$ .

En lo que sigue denotemos por

$$\mathrm{S}_n(\mathbb{R}) = \{C \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R}) : C = C^t\}$$

al espacio de las matrices simétricas. El siguiente teorema recuerda que toda matriz simétrica es diagonalizable por semejanza, siendo sus subespacios propios mutuamente ortogonales en el espacio vectorial euclídeo  $(\mathbb{R}^n, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ , donde  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  es el producto escalar clásico

$$\langle x, y \rangle = x \cdot y^t, \quad x, y \in \mathbb{R}^n.$$

**Teorema 4.5** *Si  $C \in \mathrm{S}_n(\mathbb{R})$  es una matriz simétrica entonces:*

- *C tiene al menos un valor propio real.*
- *Si  $a \in \mathbb{R}$  es valor propio de C y  $V_a^\perp \subseteq \mathbb{R}^n$  es el subespacio ortogonal a  $V_a$  en  $(\mathbb{R}^n, \langle \cdot, \cdot \rangle)$  entonces  $C \cdot v \in V_a^\perp$  para todo  $v \in V_a^\perp$ .*
- *Si  $a_1, a_2 \in \mathbb{R}$  son valores propios de C distintos entonces  $V_{a_1} \perp V_{a_2}$  en  $(\mathbb{R}^n, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ .*
- *C es diagonalizable por semejanza.*

Dos matrices simétricas  $C_1, C_2 \in \mathrm{S}_n(\mathbb{R})$  se dicen *ortogonalmente equivalentes* si existe  $P \in \mathrm{O}(n, \mathbb{R})$  tal que  $C_2 = P^t \cdot C_1 \cdot P$ . Como consecuencia de lo anterior es posible la diagonalización ortogonal de cualquier matriz simétrica en los términos que recoge el siguiente teorema.

**Teorema 4.6 (Diagonalización ortogonal)** *Toda matriz  $C \in \mathrm{S}_n(\mathbb{R})$  es ortogonalmente equivalente a una matriz diagonal, esto es, existe una matriz  $P \in \mathrm{O}(n, \mathbb{R})$  tal que*

$$P^t \cdot C \cdot P = D(a_1^{(n_1)}, \dots, a_k^{(n_k)}),$$

donde  $a_1, \dots, a_k$  son los valores propios de C y  $n_1, \dots, n_k$  sus correspondientes multiplicidades (geométricas o algebraicas, coinciden).

Del Teorema 4.6 se concluye que dos matrices simétricas son ortogonalmente equivalentes si y sólo si tienen polinomios característicos proporcionales, o equivalentemente, tienen los mismos valores propios con las mismas multiplicidades.

El procedimiento para realizar la diagonalización ortogonal  $C \in \mathrm{S}_n(\mathbb{R})$  es el siguiente. Por el Teorema 4.5 la matriz C es diagonalizable por semejanza. Por el Teorema 4.4, el polinomio  $p_C(x)$  descompone sobre  $\mathbb{R}$  y podemos calcular sus distintas raíces  $a_1, \dots, a_k \in \mathbb{R}$  (valores propios de C). Para cada  $a_i$  buscamos una base  $B_{a_i} = \{u_1^i, \dots, u_{n_i}^i\}$  de  $V_{a_i}$  (escribimos  $n_i = \dim V_{a_i}$ ), a la que sometemos al procedimiento de ortonormalización de Gram-Schmidt para el producto escalar  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  de  $\mathbb{R}^n$ , hasta generar una base ortonormal

$$B'_{a_i} = \{v_1^i, \dots, v_{n_i}^i\}$$

de  $(V_{a_i}, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ . Como

$$B' = B'_{a_1} \cup \dots \cup B'_{a_k}$$

es una base ortonormal de  $(\mathbb{R}^n, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ , entonces la matriz ortogonal  $P \in O(n, \mathbb{R})$  que distribuye ordenadamente por columnas los vectores de  $B'$  satisface

$$P^t \cdot C \cdot P = D(a_1^{(n_1)}, \dots, a_k^{(n_k)}).$$

La diagonalización por congruencia es la más natural para el espacio de las matrices simétricas. Recordemos los conceptos fundamentales.

**Definición 4.7 (Congruencia de matrices)** Dos matrices  $C_1$  y  $C_2$  se dicen congruentes si existe  $Q \in GL(n, \mathbb{R})$  tal que  $Q^t C_1 Q = C_2$ . La relación binaria de congruencia en  $M_n(\mathbb{R})$  es de equivalencia. Una matriz  $C \in M_n(\mathbb{R})$  se dice diagonalizable por congruencia si existe  $Q \in GL(n, \mathbb{R})$  tal que  $Q^t C Q$  es diagonal.

**Teorema 4.8 (Sylvester)** Para toda  $C \in S_n(\mathbb{R})$  existe  $Q \in GL(n, \mathbb{R})$  tal que

$$Q^t \cdot C \cdot Q = D(1^{(t)}, (-1)^{(s)}, 0^{(c)}),$$

donde  $c, s, t \in \mathbb{N} \cup \{0\}$  y  $c + s + t = n$ . (Si alguno de esos enteros es nulo no interviene en la matriz diagonal.) Además:

- Si  $D(1^{(t)}, (-1)^{(s)}, 0^{(c)})$  y  $D(1^{(t')}, (-1)^{(s')}, 0^{(c')})$  son congruentes entonces  $c = c', s = s', t = t'$ . Por tanto, los números  $c, s, t$  de arriba son únicos y  $C$  es congruente a una única matriz diagonal con entradas 1, -1 y 0 ordenadas en la diagonal.

En particular  $\text{rang}(C) = s + t$ .

- Los números  $t$  y  $s$  de la forma de Sylvester de una matriz simétrica  $C$  coinciden con el número de raíces + y - de su polinomio característico  $p_C(x)$ , respectivamente, y el número  $c$  con la multiplicidad de 0 como raíz de  $p_C(x)$ .

**Definición 4.9** Si  $C \in S_n(\mathbb{R})$ , la única matriz de la forma  $D(1^{(t)}, (-1)^{(s)}, 0^{(c)})$  congruente con  $C$  se la llama matriz o forma de Sylvester de  $C$ .

Como consecuencia del Teorema 4.8, dos matrices  $C_1$  y  $C_2$  son congruentes si y solo si tienen la misma forma de Sylvester.

Si  $C \in S_n(\mathbb{R})$ , un procedimiento para realizar la diagonalización por congruencia que nos lleve a su forma de Sylvester es el siguiente. Como explicábamos arriba en el proceso de diagonalización ortogonal de  $C$ , primero generamos bases ortonormales

$$B'_{a_i} = \{v_1^i, \dots, v_{n_i}^i\}$$

de  $(V_{a_i}, \langle \cdot, \cdot \rangle)$  para cada  $i = 1, \dots, k$ . Si  $a_i \neq 0$ , normalizamos cada  $v_j^i$  de  $B'_{a_i}$  multiplicando por el número real  $\frac{1}{\sqrt{|a_i|}}$ , formando la nueva base

$$B''_{a_i} = \left\{ \frac{1}{\sqrt{|a_i|}} v_1^i, \dots, \frac{1}{\sqrt{|a_i|}} v_{n_i}^i \right\}$$

de  $V_{a_i}$ . Si 0 es uno de los valores propios de  $C$  el último paso para pasar de la base  $B'_0$  a la base  $B''_0$  en  $V_0$  carece de sentido, y escribimos  $B''_0 = B'_0$ .

Finalmente se construye la matriz  $Q$  que distribuye por columnas de forma ordenada los vectores de la base ordenada

$$B'' = B''_{a_1} \cup \dots \cup B''_{a_k}$$

de  $\mathbb{R}^n$ . Por construcción  $B''$  es una base *ortogonal* de  $(\mathbb{R}^n, \langle \cdot, \cdot \rangle)$  (ya que  $B' = B'_{a_1} \cup \dots \cup B'_{a_k}$  es ortonormal) y

$$Q^t \cdot C \cdot Q = D(1^{(t)}, (-1)^{(s)}, 0^{(c)}),$$

si previamente hemos tenido la precaución de ordenar la lista de autovalores  $a_1, \dots, a_k$  de forma que aparezcan primero los positivos, después los negativos, y por último el 0.

## 4.1. Hipercuádricas afines

En lo que sigue  $(\mathcal{A}, \overrightarrow{\mathcal{A}}, \rightarrow)$  será un espacio afín con  $\dim \mathcal{A} = n$  y  $\mathcal{R}$  un sistema de referencia en  $\mathcal{A}$ .

**Definición 4.10** *Dada una matriz simétrica*

$$\widehat{C} = \left( \begin{array}{c|c} a & z^t \\ \hline z & C \end{array} \right) \in S_{n+1}(\mathbb{R}),$$

donde  $a \in \mathbb{R}$ ,  $z = (z_1, \dots, z_n)^t \in \mathbb{R}^n$ , y  $C = (c_{i,j})_{i,j=1,\dots,n} \in S_n(\mathbb{R}) \setminus \{0\}$ , y un sistema de referencia  $\mathcal{R}$  en  $\mathcal{A}$ , el conjunto

$$H = \{p \in \mathcal{A}: (1, p_{\mathcal{R}}^t) \cdot \widehat{C} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ p_{\mathcal{R}} \end{pmatrix} = 0\} \quad (4)$$

se dice ser la hipercuádrlica del espacio afín  $\mathcal{A}$  asociada a la matriz simétrica  $\widehat{C}$  en el sistema de referencia  $\mathcal{R}$  (o simplemente al par  $(\widehat{C}, \mathcal{R})$ ).

En la anterior definición  $p_{\mathcal{R}} = (x_1, \dots, x_n)^t$  indica las coordenadas del punto  $p \in \mathcal{A}$  en  $\mathcal{R}$  en notación columna.

Con el lenguaje de la Definición 4.10, se dice que  $\widehat{C} = \left( \begin{array}{c|c} a & z^t \\ \hline z & C \end{array} \right)$  es una matriz de  $H$  en el sistema de referencia  $\mathcal{R}$ , y que  $C$  es la matriz del núcleo cuadrático asociado a  $\widehat{C}$ . Como la matriz  $\lambda \widehat{C}$ ,  $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ , determina igualmente el conjunto de puntos  $H \subset \mathcal{A}$  por sus coordenadas en  $\mathcal{R}$  (ver (4)), es conveniente definir

$$M_{\mathcal{R}}(H) = \{\lambda \widehat{C}: \lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}\}$$

como el conjunto de matrices de la hipercuádrlica  $H$  asociada a  $(\widehat{C}, \mathcal{R})$ , y análogamente

$$N_{\mathcal{R}}(H) = \{\lambda C: \lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}\}$$

como el conjunto de los núcleos cuadráticos asociados a matrices de  $H$  en  $M_{\mathcal{R}}(H)$ .

**Observación 4.11** Nótese que el concepto de hipercuádrlica no sólo refiere al conjunto  $H \subset \mathcal{A}$ , sino también a la matriz  $\widehat{C}$  que lo define en el sistema de referencia  $\mathcal{R}$ . Formalmente es apropiado identificar la hipercuádrlica con el par  $(\widehat{C}, \mathcal{R})$  que la determina, o incluso con  $(M_{\mathcal{R}}(H), \mathcal{R})$ , aunque si no hay lugar para ambigüedades se piensa en ella como el subconjunto de puntos  $H \subset \mathcal{A}$ . No obstante como veremos más adelante esta mentalidad es en ocasiones imprecisa.

Desarrollando (4), un cálculo elemental nos dice que el conjunto  $H \subset \mathcal{A}$  consiste de los puntos de  $p \in \mathcal{A}$  cuyas coordenadas  $p_{\mathcal{R}}$  en  $\mathcal{R}$  satisfacen la ecuación cuadrática

$$p_{\mathcal{R}}^t \cdot C \cdot p_{\mathcal{R}} + 2\langle z, p_{\mathcal{R}} \rangle + a = 0,$$

o equivalentemente escribiendo  $p_{\mathcal{R}} = (x_1, \dots, x_n)^t$

$$\sum_{i,j=1}^n c_{i,j} x_i x_j + 2 \sum_{i=1}^n z_i x_i + a = 0. \quad (5)$$

Por tanto los puntos de  $H$  se caracterizan en coordenadas en  $\mathcal{R}$  como los ceros del polinomio de grado dos en  $n$  variables

$$P_{\widehat{C}}(x_1, \dots, x_n) = \sum_{i,j=1}^n c_{i,j} x_i x_j + 2 \sum_{i=1}^n z_i x_i + a$$

asociado a la matriz simétrica  $\hat{C} \in M_{\mathcal{R}}(H)$ . Al igual que arriba, para cada  $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$  los ceros del polinomio cuadrático  $\lambda P_{\hat{C}} = P_{\lambda \hat{C}}$  se corresponden con las coordenadas en  $\mathcal{R}$  de los puntos de  $H$ . Denotaremos por

$$\mathcal{P}_{\mathcal{R}}(H) = \{\lambda P_{\hat{C}} : \lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}\}$$

a la familia de polinomios de  $H = (\hat{C}, \mathcal{R})$ .

Veamos que el sistema de referencia  $\mathcal{R}$  utilizado para la definición de la hipercuádrica  $H$  es irrelevante, en el sentido de que en cualquier otro sistema de referencia  $\mathcal{R}'$  los puntos de  $H$  se caracterizan en coordenadas en  $\mathcal{R}'$  por una ecuación matricial (que dependerá de  $\mathcal{R}'$ ) como la de (4), o equivalentemente, se corresponden con el conjunto de ceros de otro polinomio cuadrático (que dependerá de  $\mathcal{R}'$ ) como el de (5).

Sea  $H$  la hipercuádrica en  $\mathcal{A}$  con matriz

$$\hat{C} = \left( \begin{array}{c|c} a & z^t \\ \hline z & C \end{array} \right) \in M_{\mathcal{R}}(H)$$

en  $\mathcal{R}$ . Tomemos otro sistema de referencia  $\mathcal{R}'$  y escribamos la matriz de cambio de sistema de referencia de  $\mathcal{R}'$  a  $\mathcal{R}$  de la forma

$$M(\text{Id}_{\mathcal{A}}, \mathcal{R}', \mathcal{R}) = \left( \begin{array}{c|c} 1 & 0 \\ \hline b & A \end{array} \right) \in \text{Aff}_n(\mathbb{R}).$$

donde  $A = M(\text{Id}_{\mathcal{A}}, B', B)$  siendo  $B$  y  $B'$  las bases de las direcciones de  $\mathcal{R}$  y  $\mathcal{R}'$ , respectivamente. Recordemos que

$$\begin{pmatrix} 1 \\ p_{\mathcal{R}} \end{pmatrix} = M(\text{Id}_{\mathcal{A}}, \mathcal{R}', \mathcal{R}) \begin{pmatrix} 1 \\ p_{\mathcal{R}'} \end{pmatrix},$$

de donde sustituyendo el vector  $\begin{pmatrix} 1 \\ p_{\mathcal{R}} \end{pmatrix}$  por la expresión

$$M(\text{Id}_{\mathcal{A}}, \mathcal{R}', \mathcal{R}) \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ p_{\mathcal{R}'} \end{pmatrix} = \left( \begin{array}{c|c} 1 & 0 \\ \hline b & A \end{array} \right) \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ p_{\mathcal{R}'} \end{pmatrix}$$

en (4) , deducimos que el conjunto  $H$  consiste de los puntos  $p \in \mathcal{A}$  cuyas coordenadas  $p_{\mathcal{R}'}$  en  $\mathcal{R}'$  satisfacen  $M(\text{Id}_{\mathcal{A}}, \mathcal{R}', \mathcal{R})^t \cdot \hat{C} \cdot M(\text{Id}_{\mathcal{A}}, \mathcal{R}', \mathcal{R}) = 0$ , esto es,

$$(1, p_{\mathcal{R}'}^t) \cdot \left( \begin{array}{c|c} 1 & b^t \\ \hline 0 & A^t \end{array} \right) \cdot \left( \begin{array}{c|c} a & z^t \\ \hline z & C \end{array} \right) \cdot \left( \begin{array}{c|c} 1 & 0 \\ \hline b & A \end{array} \right) \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ p_{\mathcal{R}'} \end{pmatrix} = 0.$$

Desarrollando el anterior producto de matrices queda la ecuación

$$(1, p_{\mathcal{R}'}^t) \cdot \left( \begin{array}{c|c} a + b^t \cdot z + z^t \cdot b + b^t \cdot C \cdot b & z^t \cdot A + b^t \cdot C \cdot A \\ \hline A^t \cdot z + A^t \cdot C \cdot b & A^t \cdot C \cdot A \end{array} \right) \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ p_{\mathcal{R}'} \end{pmatrix} = 0,$$

donde en el cálculo hemos tenido en cuenta que  $C^t = C$ .

Definiendo

$$\hat{C}' = \left( \begin{array}{c|c} 1 & b^t \\ \hline 0 & A^t \end{array} \right) \cdot \left( \begin{array}{c|c} a & z^t \\ \hline z & C \end{array} \right) \cdot \left( \begin{array}{c|c} 1 & 0 \\ \hline b & A \end{array} \right) = \left( \begin{array}{c|c} a' & (z')^t \\ \hline z' & C' \end{array} \right) \in S_{n+1}(\mathbb{R}), \quad (6)$$

donde

$$\begin{aligned} a' &= a + b^t \cdot z + z^t \cdot b + b^t \cdot C \cdot b \in \mathbb{R}, \\ z' &= A^t \cdot z + A^t \cdot C \cdot b \in \mathbb{R}^n, \\ C' &= A^t \cdot C \cdot A \in S_n(\mathbb{R}) \setminus \{0\}, \end{aligned} \quad (7)$$

inferimos que  $H$  se describe en términos de coordenadas en  $\mathcal{R}'$  como

$$H = \{p \in \mathcal{A}: (1, p_{\mathcal{R}'}^t) \cdot \hat{C}' \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ p_{\mathcal{R}'} \end{pmatrix} = 0\},$$

esto es, como los ceros del polinomio cuadrático

$$P_{\hat{C}'}(x_1, \dots, x_n) = \sum_{i,j=1}^n c'_{i,j} x'_i x'_j + 2 \sum_{i=1}^n z'_i x'_i + a' = 0$$

donde hemos escrito  $z' = (z'_1, \dots, z'_n)$  y  $C' = (c'_{i,j})_{i,j=1,\dots,n}$ .

A modo de resumen hemos probado que:

**Proposición 4.12** *Si  $H$  es la hipercuádrica en  $\mathcal{A}$  asociada al par  $(\hat{C}, \mathcal{R} = \{p_0, B\})$  y  $\mathcal{R}' = \{p'_0, B'\}$  es otro sistema de referencia en  $\mathcal{A}$ , entonces  $H$  es la hipercuádrica en  $\mathcal{A}$  asociada al par  $(\hat{C}', \mathcal{R}')$  donde*

$$\hat{C}' = M(\text{Id}_{\mathcal{A}}, \mathcal{R}', \mathcal{R})^t \cdot \hat{C} \cdot M(\text{Id}_{\mathcal{A}}, \mathcal{R}', \mathcal{R}).$$

Además, si  $C$  es el núcleo cuadrático de  $\hat{C}$  entonces

$$C' = M(\text{Id}_{\mathcal{A}}, B', B)^t \cdot C \cdot M(\text{Id}_{\mathcal{A}}, B', B)$$

es el núcleo cuadrático de la matriz  $\hat{C}'$ . Los conjuntos  $M_{\mathcal{R}'}(H), N_{\mathcal{R}'}(H)$ , y  $\mathcal{P}_{\mathcal{R}'}(H)$  de matrices, núcleos cuadráticos de matrices y polinomios de  $H$  asociados al par  $(\hat{C}', \mathcal{R}')$  se definen de forma natural y satisfacen:

$$M_{\mathcal{R}'}(H) = M(\text{Id}_{\mathcal{A}}, \mathcal{R}', \mathcal{R})^t \cdot M_{\mathcal{R}}(H) \cdot M(\text{Id}_{\mathcal{A}}, \mathcal{R}', \mathcal{R})$$

$$N_{\mathcal{R}'}(H) = M(\text{Id}_{\mathcal{A}}, B', B)^t \cdot N_{\mathcal{R}}(H) \cdot M(\text{Id}_{\mathcal{A}}, B', B).$$

Como las matrices de cambio de sistema de referencia  $M(\text{Id}_{\mathcal{A}}, \mathcal{R}', \mathcal{R})$  pertenecen al grupo afín  $\text{Aff}_n(\mathbb{R})$ , la anterior observación expresa que las matrices que definen una hipercuádrica cambian *por congruencia en el grupo afín* al cambiar de sistema de referencia. Esto implica que sus rangos y formas de Sylvester, salvo revertir las cantidades de 1 y  $-1$  en la diagonal, son universales (ver Teorema 4.8). Como consecuencia tenemos la siguiente proposición.

**Proposición 4.13** *Dada una hipercuádrica  $H \equiv (\hat{C}, \mathcal{R})$  en  $\mathcal{A}$ , se tiene que:*

- (I) *El rango  $R_H := \text{rang}(\hat{C})$  es común a todas las matrices  $\hat{C} \in M_{\mathcal{R}}(H)$ , y por la Proposición 4.12 es común a todas las matrices en  $M_{\mathcal{R}'}(H)$  para cualquier otro sistema de referencia  $\mathcal{R}'$ .*
- (II) *Si  $D(1^{(\hat{t})}, (-1)^{(\hat{s})}, 0^{(\hat{c})})$  es la forma de Sylvester de una matriz  $\hat{C} \in M_{\mathcal{R}}(H)$  para algún sistema de referencia  $\mathcal{R}$ , el número*

$$S_H := |\hat{t} - \hat{s}|$$

*no depende ni de la matriz  $\hat{C} \in M_{\mathcal{R}}(H)$ , y por la Proposición 4.12 es común a todas las formas de Sylvester de matrices en  $M_{\mathcal{R}'}(H)$  para cualquier otro sistema de referencia  $\mathcal{R}'$ .*

(III) El rango  $r_H := \text{rang}(C)$  es común a todas las matrices  $C \in N_{\mathcal{R}}(H)$ , y por la Proposición 4.12 es común a todas las matrices en  $N_{\mathcal{R}'}(H)$  para cualquier otro sistema de referencia  $\mathcal{R}'$ .

(IV) Si  $D(1^{(t)}, (-1)^{(s)}, 0^{(c)})$  es la forma de Sylvester de una matriz  $C \in N_{\mathcal{R}}(H)$  para algún sistema de referencia  $\mathcal{R}$ , el número

$$s_H := |t - s|$$

no depende ni de la matriz  $C \in N_{\mathcal{R}}(H)$ , y por la Proposición 4.12 es común a todas las formas de Sylvester de matrices en  $N_{\mathcal{R}'}(H)$  para cualquier otro sistema de referencia  $\mathcal{R}'$ .

La diferencia entre el número de 1 y el de  $-1$  en la forma de Sylvester de una matriz simétrica  $A$  cambia de signo cuando se calculan para la matriz  $\lambda A$ ,  $\lambda < 0$ . Por ese motivo hemos definido  $S_H$  y  $s_H$  en valor absoluto en la anterior Proposición.

La siguiente definición jugará un papel importante.

**Definición 4.14** Dos hipercuádricas  $H_1 = (\hat{C}_1, \mathcal{R}_1)$ ,  $H_2 = (\hat{C}_2, \mathcal{R}_2) \subseteq \mathcal{A}$  se dicen afínmente equivalentes si satisface cualquiera de las siguientes condiciones equivalentes:

- Existen sistemas de referencia  $\mathcal{R}$  y  $\mathcal{R}'$  de  $\mathcal{A}$  en los que  $M_{\mathcal{R}}(H_1) = M_{\mathcal{R}'}(H_2)$ .
- Existen un sistema de referencia  $\mathcal{R}$  de  $\mathcal{A}$  y una matriz  $Q \in \text{Aff}_n(\mathbb{R})$  tales que  $Q^t \cdot \hat{C} \cdot Q \in M_{\mathcal{R}}(H_2)$  para toda  $\hat{C} \in M_{\mathcal{R}}(H_1)$ , o equivalentemente

$$M_{\mathcal{R}}(H_2) = Q^t \cdot M_{\mathcal{R}}(H_1) \cdot Q.$$

- Para todo sistema de referencia  $\mathcal{R}$  de  $\mathcal{A}$  existe una matriz  $Q \in \text{Aff}_n(\mathbb{R})$  tal que  $Q^t \cdot \hat{C} \cdot Q \in M_{\mathcal{R}}(H_2)$  para toda  $\hat{C} \in M_{\mathcal{R}}(H_1)$ , o equivalentemente

$$M_{\mathcal{R}}(H_2) = Q^t \cdot M_{\mathcal{R}}(H_1) \cdot Q.$$

Aunque es algo rutinario, es importante comprobar que las condiciones anteriores son equivalentes entre sí. Las Proposiciones 4.12, 4.13 nos dan el siguiente corolario:

**Corolario 4.15** Si  $H_1, H_2$  son hipercuádricas afínmente equivalentes en  $\mathcal{A}$  entonces

$$(R_{H_1}, r_{H_1}, S_{H_1}, s_{H_1}) = (R_{H_2}, r_{H_2}, S_{H_2}, s_{H_2}).$$

Es importante observar que las afinidades transforman hipercuádricas en hipercuádricas. En efecto, recordemos que dado un sistema de referencia  $\mathcal{R}$  en  $\mathcal{A}$  se tiene que

$$\begin{pmatrix} 1 \\ f(p)_{\mathcal{R}} \end{pmatrix} = M(f, \mathcal{R}) \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ p_{\mathcal{R}} \end{pmatrix} \quad \forall p \in \mathcal{A}.$$

Por tanto, si  $H$  es la hipercuádrica asociada a  $(\hat{C}, \mathcal{R})$ ,

$$p \in H \iff (1, f(p)_{\mathcal{R}}) \cdot (M(f, \mathcal{R})^{-1})^t \cdot \hat{C} \cdot M(f, \mathcal{R})^{-1} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ f(p)_{\mathcal{R}} \end{pmatrix} = 0,$$

esto es, los puntos  $f(p)$  de  $f(H)$  se caracterizan por pertenecer a la hipercuádrica que en  $\mathcal{R}$  está definida por la matriz  $M(f^{-1}, \mathcal{R})^t \cdot \hat{C} \cdot M(f^{-1}, \mathcal{R})$ . Como conclusión,  $f(H)$

es la hipercuádrica asociada al par  $(M(f^{-1}, \mathcal{R})^t \cdot \hat{C} \cdot M(f^{-1}, \mathcal{R}), \mathcal{R})$ , esto es, la que en coordenadas en  $\mathcal{R}$  viene asociada a las matrices

$$M_{\mathcal{R}}(f(H)) = \{\lambda \left( M(f^{-1}, \mathcal{R})^t \cdot \hat{C} \cdot M(f^{-1}, \mathcal{R}) \right) : \lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}\}.$$

Esta información se suele escribir formalmente de la forma

$$M_{\mathcal{R}}(f(H)) = M(f^{-1}, \mathcal{R})^t \cdot M_{\mathcal{R}}(H) \cdot M(f^{-1}, \mathcal{R}),$$

o equivalentemente,

$$M_{\mathcal{R}}(H) = M(f, \mathcal{R})^t \cdot M_{\mathcal{R}}(f(H)) \cdot M(f, \mathcal{R}). \quad (8)$$

Como consecuencia de este cálculo, el concepto de equivalencia de hipercuádricas también se puede reformular en términos de afinidades.

**Proposición 4.16** *Dos hipercuádricas  $H_1 = (\hat{C}_1, \mathcal{R}_1)$ ,  $H_2 = (\hat{C}_2, \mathcal{R}_2) \subseteq \mathcal{A}$  son equivalentes si y sólo si existe una afinidad  $f: \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}$  tal que*

$$M_{\mathcal{R}}(H_2) = M(f^{-1}, \mathcal{R})^t \cdot M_{\mathcal{R}}(H_1) \cdot M(f^{-1}, \mathcal{R})$$

para cualquier sistema de referencia  $\mathcal{R}$  en  $\mathcal{A}$  (en particular,  $f(H_1) = H_2$ ).

**DEMOSTRACIÓN :** Fijemos  $\mathcal{R}$  sistema de referencia en  $\mathcal{A}$  arbitrario y tomemos  $\hat{C} \in M_{\mathcal{R}}(H_1)$ ,  $\hat{C}' \in M_{\mathcal{R}}(H_2)$ . La equivalencia entre las hipercuádricas  $H_1$  y  $H_2$  se traduce en que existe  $Q \in \text{Aff}_n(\mathbb{R})$  tal que  $\hat{C}' = \lambda(Q^t \cdot \hat{C} \cdot Q)$  para algún  $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ , lo que por la fórmula (8) equivale a que  $f(H_2) = H_1$  para la única afinidad  $f: \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}$  con  $M(f, \mathcal{R}) = Q$ . ■

Las hipercuádricas en  $\mathbb{R}^2$  definidas por los polinomios

$$H_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + 1 = 0\}, \quad H_2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 + 1 = 0\}$$

son vacías, y no son equivalentes pues sus matrices asociadas

$$\hat{C}_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \in M_{\mathcal{R}_0}(H_1), \quad \hat{C}_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in M_{\mathcal{R}_0}(H_2)$$

no son congruentes. Sin embargo existe  $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  afinidad tal que  $f(H_1) = f(\emptyset) = \emptyset = H_2$  (cualquiera nos vale). La equivalencia de hipercuádricas es por tanto un concepto que afecta a las matrices que las definen, no sólo a los conjuntos de puntos que determinan (ver Observación 4.11).

## 4.2. Clasificación afín de las hipercuádricas

Ya estamos en condiciones de abordar el teorema fundamental de clasificación de hipercuádricas. La idea básica será probar que toda hipercuádrica  $H$  viene representada en un sistema de referencia adecuado por una matriz canónica simplificada. Necesitaremos para ello alguna notación.

En lo que sigue supondremos fijado un sistema de referencia  $\mathcal{R}_0$  en  $\mathcal{A}$  ( $\dim \mathcal{A} = n$ ).

**Definición 4.17** *Las hipercuádricas  $H \subseteq \mathcal{A}$  con matrices respecto de  $\mathcal{R}_0$  descritas en la siguiente lista se llamarán hipercuádricas canónicas en  $\mathcal{A}$  con respecto a  $\mathcal{R}_0$ :*

$$(I) \quad M_{\mathcal{R}_0}(H) = \left\{ \lambda \left( \begin{array}{c|c} 0 & 0 \\ \hline 0 & D(1^{(t)}, (-1)^{(s)}, 0^{(c)}) \end{array} \right) : \lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \right\}, \text{ o equivalentemente}$$

$$\mathcal{P}_{\mathcal{R}}(H) = \left\{ \lambda \left( \sum_{i=1}^t x_i^2 - \sum_{j=1}^s x_j^2 \right) = 0 : \lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \right\},$$

donde  $t, s, c \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ ,  $|t| + |s| > 0$ ,  $t + s + c = n$  y  $t - s \geq 0$ .

En este caso  $R_H = r_H = t + s$  y  $S_H = s_H = t - s \geq 0$ .

$$(II) \quad M_{\mathcal{R}_0}(H) = \left\{ \lambda \left( \begin{array}{c|c} 1 & 0 \\ \hline 0 & D(1^{(t)}, (-1)^{(s)}, 0^{(c)}) \end{array} \right) : \lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \right\}, \text{ o equivalentemente}$$

$$\mathcal{P}_{\mathcal{R}}(H) = \left\{ \lambda \left( 1 + \sum_{i=1}^t x_i^2 - \sum_{j=1}^s x_j^2 \right) = 0 : \lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \right\},$$

donde  $t, s, c \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ ,  $|t| + |s| > 0$ ,  $t + s + c = n$ .

En este caso  $R_H = r_H + 1 = t + s + 1$ ,  $S_H = |t - s + 1|$  y  $s_H = |t - s|$ .

$$(III) \quad M_{\mathcal{R}_0}(H) = \left\{ \lambda \left( \begin{array}{c|c} 0 & e_n^t \\ \hline e_n & D(1^{(t)}, (-1)^{(s)}, 0^{(c)}) \end{array} \right) : \lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \right\}, \text{ o equivalentemente}$$

$$\mathcal{P}_{\mathcal{R}}(H) = \left\{ \lambda \left( 2x_n + \sum_{i=1}^t x_i^2 - \sum_{j=1}^s x_j^2 \right) = 0 : \lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \right\},$$

donde  $e_n = (0, \dots, 0, 1)^t \in \mathbb{R}^n$  es el último vector de la base canónica de  $\mathbb{R}^n$ ,  $t, s, c \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ ,  $|t| + |s| > 0$ ,  $t + s + c = n$ ,  $c > 0$  y  $t - s \geq 0$ .

En este caso  $R_H = r_H + 2 = t + s + 2$  y  $S_H = s_H = t - s \geq 0$ .

**Observación 4.18** Obsérvese que las cuádruplas de números enteros  $(R_H, r_H, S_H, s_H)$  discriminan las matrices presentadas en la Definición 4.17, por lo que no hay dos matrices equivalencias en la anterior lista (ver Corolario 4.15).

Hablando a grosso modo, el siguiente teorema expresa que dada una matriz simétrica de orden  $n + 1$  (típicamente la de una hipercuádrica en un sistema de referencia de  $\mathcal{A}$ ), ella o su opuesta pueden ser transformadas por congruencia en  $\text{Aff}_n(\mathbb{R})$  en una de las matrices canónicas del listado anterior.

**Teorema 4.19** Toda hipercuádrica  $H = (\hat{C}_0, \mathcal{R}_0)$  de  $\mathcal{A}$  es equivalente a una y sólo una de las hipercuádricas canónicas descritas en la Definición 4.17.

**DEMOSTRACIÓN :** Lo que hemos de probar es que existe un sistema de referencia  $\mathcal{R}$  de  $\mathcal{A}$  en el que  $H$  puede ser representada por alguna de las matrices canónicas descritas en Definición 4.17- (I)-(II)-(III).

Tomemos una matriz que represente a  $H$  en  $\mathcal{R}_0$ , por ejemplo

$$\hat{C}_0 = \left( \begin{array}{c|c} a_0 & z_0^t \\ \hline z_0 & C_0 \end{array} \right) \in M_{\mathcal{R}_0}(H).$$

Recordemos que, dado un sistema de referencia  $\mathcal{R}_1$  con  $M(\text{Id}_{\mathcal{A}}, \mathcal{R}_1, \mathcal{R}_0) = \left( \begin{array}{c|c} 1 & 0 \\ \hline b_1 & A_1 \end{array} \right)$ , la matriz  $\left( \begin{array}{c|c} 1 & b_1^t \\ \hline 0 & A_1^t \end{array} \right) \cdot \left( \begin{array}{c|c} a_0 & z_0^t \\ \hline z_0 & C_0 \end{array} \right) \cdot \left( \begin{array}{c|c} 1 & 0 \\ \hline b_1 & A_1 \end{array} \right) \in M_{\mathcal{R}_1}(H)$ , esto es,

$$\left( \begin{array}{c|c} a_0 + b_1^t \cdot z_0 + z_0^t \cdot b_1 + b_1^t \cdot C_0 \cdot b_1 & z_0^t \cdot A_1 + b_1^t \cdot C_0 \cdot A_1 \\ \hline A_1^t \cdot z_0 + A_1^t \cdot C_0 \cdot b_1 & A_1^t \cdot C_0 \cdot A_1 \end{array} \right) \in M_{\mathcal{R}_1}(H).$$

Por el Teorema 4.8, podemos elegir  $A_1 \in \text{Gl}(n, \mathbb{R})$  tal que

$$A_1^t \cdot C_0 \cdot A_1 = D(1^{(t)}, (-1)^{(s)}, 0^{(c)}),$$

donde  $|t| + |s| > 0$  ya que  $H$  es una hipercuádrica.

Fijada esta  $A_1$ , un cálculo directo nos dice que

$$A_1^t \cdot z_0 + A_1^t \cdot C \cdot b_1 = A_1^t \cdot z_0 + D(1^{(t)}, (-1)^{(s)}, 0^{(c)}) \cdot (A_1^{-1} \cdot b_1).$$

Escribamos

$$A_1^t \cdot z_0 = \left( \begin{array}{c} z' \\ \hline z_1 \end{array} \right), \quad z' \in \mathbb{R}^{t+s}, z_1 \in \mathbb{R}^c,$$

llamemos  $x' \in \mathbb{R}^{t+s}$  al único vector tal que

$$z' + D(1^{(t)}, (-1)^{(s)}) \cdot x' = 0 \in \mathbb{R}^{t+s},$$

y usando la regularidad  $A_1$  elijamos  $b_1 \in \mathbb{R}^n$  el único vector tal que

$$A_1^{-1} \cdot b_1 = \left( \begin{array}{c} x' \\ \hline 0 \end{array} \right) \in \mathbb{R}^n.$$

Para esta elección de  $b_1$  se tiene que

$$A_1^t \cdot z_0 + A_1^t \cdot C \cdot b_1 = \left( \begin{array}{c} z' \\ \hline z_1 \end{array} \right) + D(1^{(t)}, (-1)^{(s)}, 0^{(c)}) \cdot \left( \begin{array}{c} x' \\ \hline 0 \end{array} \right) = \left( \begin{array}{c} 0 \\ \hline z_1 \end{array} \right).$$

En el sistema de referencia  $\mathcal{R}_1$  determinado por la condición  $M(\text{Id}_{\mathcal{A}}, \mathcal{R}_1, \mathcal{R}_0) = \left( \begin{array}{c|c} 1 & 0 \\ \hline b_1 & A_1 \end{array} \right)$  queda

$$\left( \begin{array}{c|c|c} a_1 & 0 & z_1^t \\ \hline 0 & D(1^{(t)}, (-1)^{(s)}) & 0 \\ \hline z_1 & 0 & 0 \end{array} \right) \in M_{\mathcal{R}_1}(H),$$

donde

$$a_1 = a_0 + b_1^t \cdot z_0 + z_0^t \cdot b_1 + b_1^t \cdot C_0 \cdot b_1, \quad \left( \begin{array}{c} 0 \\ \hline z_1 \end{array} \right) = A_1^t \cdot z_0 + A_1^t \cdot C_0 \cdot b_1.$$

Si  $a_1 = 0 \in \mathbb{R}$  y  $z_1 = 0 \in \mathbb{R}^c$ , se sigue el caso (I). Obsérvese que podemos garantizar que  $s_H = t - s \geq 0$  sin más que cambiar de inicio  $\left( \begin{array}{c|c} a_0 & z_0^t \\ \hline z_0 & C_0 \end{array} \right) \in M_{\mathcal{R}_0}(H)$  por su matriz opuesta.

Si  $a_1 \neq 0$  y  $z_1 = 0 \in \mathbb{R}^c$  se sigue el caso (II). En efecto, al igual que antes salvo cambiar al inicio  $\left( \begin{array}{c|c} a_0 & z_0^t \\ \hline z_0 & C_0 \end{array} \right) \in M_{\mathcal{R}_0}(H)$  por su opuesta podemos suponer  $a_1 > 0$ . Considerando el sistema de referencia  $\mathcal{R}_2$  para el que

$$M(\text{Id}_{\mathcal{A}}, \mathcal{R}_2, \mathcal{R}_1) = \left( \begin{array}{c|c} 1 & 0 \\ \hline 0 & \sqrt{a_1} I_n \end{array} \right)$$

y usando que

$$\left( \begin{array}{c|cc|c} a_1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & D(1^{(t)}, (-1)^{(s)}) & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \in M_{\mathcal{R}_1}(H),$$

de la fórmula  $M_{\mathcal{R}_2}(H) = M(\text{Id}_{\mathcal{A}}, \mathcal{R}_2, \mathcal{R}_1)^t \cdot M_{\mathcal{R}_1}(H) \cdot M(\text{Id}_{\mathcal{A}}, \mathcal{R}_2, \mathcal{R}_1)$  deducimos que

$$\left( \begin{array}{c|c} 1 & 0 \\ \hline 0 & \sqrt{a_1} I_n \end{array} \right) \cdot \left( \begin{array}{c|cc|c} a_1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & D(1^{(t)}, (-1)^{(s)}) & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \cdot \left( \begin{array}{c|c} 1 & 0 \\ \hline 0 & \sqrt{a_1} I_n \end{array} \right) \in M_{\mathcal{R}_2}(H),$$

esto es,

$$a_1 \left( \begin{array}{c|cc|c} 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & D(1^{(t)}, (-1)^{(s)}) & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \in M_{\mathcal{R}_2}(H).$$

Llegamos a la matriz canónica del caso (II) (obsérvese que en este caso no podemos garantizar que  $t - s \geq 0$  por la rigidez que impone la condición  $a_1 > 0$  anterior).

Finalmente supongamos que  $z_1 \neq 0$ , y observemos de nuevo que salvo cambiar al principio  $\left( \begin{array}{c|c} a_0 & z_0^t \\ \hline z_0 & C_0 \end{array} \right) \in M_{\mathcal{R}_0}(H)$  por su matriz opuesta podemos suponer que  $s_H = t - s \geq 0$ . Consideraremos ahora un sistema de referencia  $\mathcal{R}_2$  para el que

$$M(\text{Id}_{\mathcal{A}}, \mathcal{R}_2, \mathcal{R}_1) = \left( \begin{array}{c|cc|c} 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & I_{t+s} & 0 \\ b_2 & 0 & A_2 \end{array} \right),$$

donde  $b_2 \in \mathbb{R}^c$  y  $A_2 \in \text{GL}(c, \mathbb{R})$  se determinarán posteriormente. Un cálculo directo siguiendo la fórmula

$$M_{\mathcal{R}_2}(H) = M(\text{Id}_{\mathcal{A}}, \mathcal{R}_2, \mathcal{R}_1)^t \cdot M_{\mathcal{R}_1}(H) \cdot M(\text{Id}_{\mathcal{A}}, \mathcal{R}_2, \mathcal{R}_1)$$

nos da que

$$\left( \begin{array}{c|cc|c} 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & I_{t+s} & 0 \\ b_2 & 0 & A_2 \end{array} \right)^t \cdot \left( \begin{array}{c|cc|c} a_1 & 0 & z_1^t \\ \hline 0 & D(1^{(t)}, (-1)^{(s)}) & 0 \\ z_1 & 0 & 0 \end{array} \right) \cdot \left( \begin{array}{c|cc|c} 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & I_{t+s} & 0 \\ b_2 & 0 & A_2 \end{array} \right) \in M_{\mathcal{R}_2}(H),$$

esto es,

$$\left( \begin{array}{c|cc|c} a_2 & 0 & z_2^t \\ \hline 0 & D(1^{(t)}, (-1)^{(s)}) & 0 \\ z_2 & 0 & 0 \end{array} \right) \in M_{\mathcal{R}_2}(H),$$

donde  $a_2 = a_1 + b_2^t \cdot z_1 + z_1^t \cdot b_2$  y  $z_2 = A_2^t \cdot z_1$ .

Como  $z_1 \neq 0$  siempre podemos encontrar una matriz  $A_2 \in \text{Gl}(c, \mathbb{R})$  tal que

$$z_2 = A_2^t \cdot z_1 = e_d = (0, \dots, 0, 1)^t \in \mathbb{R}^d$$

sea el último vector de la base canónica de  $\mathbb{R}^d$ . Una vez fijada esta matriz  $A_2$ , elegimos cualquier  $b_2 \in \mathbb{R}^c$  para que

$$a_2 = a_1 + b_2^t \cdot z_1 + z_1^t \cdot b_2 = 0.$$

Con estas elecciones nos quedaría finalmente

$$\left( \begin{array}{c|c} 0 & e_n^t \\ \hline e_n & D(1^{(t)}, (-1)^{(s)}, 0^{(c)}) \end{array} \right) \in M_{\mathcal{R}_2}(H),$$

lo que nos lleva al caso (III) y concluye la prueba. ■

**Observación 4.20** La parte de la prueba final correspondiente al caso (III) puede realizarse de otra forma alternativa más útil para los ejercicios prácticos.

En efecto, como en  $\mathcal{R}_1$  sabemos que

$$\left( \begin{array}{c|cc|c} a_1 & 0 & z_1^t \\ \hline 0 & D(1^{(t)}, (-1)^{(s)}) & 0 \\ z_1 & 0 & 0 \end{array} \right) \in M_{\mathcal{R}_1}(H),$$

un punto  $p \in \mathcal{A}$  pertenece a  $H$  si y solo si sus coordenadas  $p_{\mathcal{R}_1} = (x_1, \dots, x_n)^t$  satisfacen

$$\sum_{i=1}^t x_i^2 - \sum_{i=1}^s x_i^2 + 2\langle z_1, (x_{s+t+1}, \dots, x_n)^t \rangle + a_1 = 0.$$

Como  $z_1 \in \mathbb{R}^c$  no es el vector nulo, el sistema de ecuaciones lineales

$$y_i = x_i, \quad i = 1, \dots, n-1, \quad y_n = \langle z_1, (x_{s+t+1}, \dots, x_n)^t \rangle + \frac{1}{2}a_1,$$

son las ecuaciones analíticas del cambio de sistema de referencia de  $\mathcal{R}_1$  a un sistema de referencia  $\mathcal{R}_2$  en el que  $p_{\mathcal{R}_2} = (y_1, \dots, y_n)^t$ , justo el que matricialmente se determina por la expresión

$$M(\text{Id}_{\mathcal{A}}, \mathcal{R}_1, \mathcal{R}_2) = \left( \begin{array}{c|cc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & I_{t+s} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I_{c-1} & 0 \\ \hline \frac{1}{2}a_1 & 0 & z'_1 & z''_1 \end{array} \right)$$

donde hemos escrito  $z_1 = (z'_1, z''_1) \in \mathbb{R}^{c-1} \times \mathbb{R}$ . Claramente  $p \in H$  si y solo si las coordenadas

$$p_{\mathcal{R}_2} = (y_1, \dots, y_n)^t \text{ satisfacen } \sum_{i=1}^t y_i^2 - \sum_{i=1}^s y_i^2 + 2y_n = 0,$$

de donde  $M_{\mathcal{R}_2}(H)$  se corresponde con el caso (III) como habíamos afirmado.

#### 4.2.1. Cónicas en un plano afín

En este apartado supondremos que  $(\mathcal{A}, \rightarrow)$  es un plano afín:  $\dim \mathcal{A} = 2$ . Recordemos que en un plano afín las hipercuádricas reciben el nombre de *cónicas*. Nuestra intención es describir la tabla de la clasificación afín, salvo equivalencias, de las cónicas de  $\mathcal{A}$ . No vamos a hacer nada nuevo, solo particularizar la información que nos da el teorema de clasificación general Teorema 4.19 y recordar alguna notación clásica.

Para ello fijemos una referencia  $\mathcal{R}_0$  en  $\mathcal{A}$  y consideremos las cónicas canónicas relativas a  $\mathcal{R}_0$  descritas en Definición 4.17. A la luz del Teorema 4.19, toda cónica  $H \subseteq \mathcal{A}$  es equivalente a una única de las cónicas canónicas que se listan a continuación, representada cada una de ellas por su matriz y ecuación analítica (polinomio cuadrático) en coordenadas  $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$  respecto de  $\mathcal{R}_0$ :

- Caso (I),  $R_H = r_H = 1$ ,  $S_H = s_H = 1$  ( $t = 1$ ,  $s = 0$ ):

$$\left( \begin{array}{c|cc} 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \text{ ecuación } x^2 = 0 \text{ (recta doble).}$$

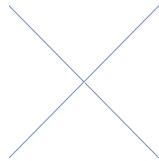
- 
- Caso (I),  $R_H = r_H = 2$ ,  $S_H = s_H = 2$  ( $t = 2$ ,  $s = 0$ ):

$$\left( \begin{array}{c|cc} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \quad \text{ecuación} \quad x^2 + y^2 = 0 \quad (\text{punto}).$$

•

- Caso (I),  $R_H = r_H = 2$ ,  $S_H = s_H = 0$  ( $t = 1$ ,  $s = 1$ ):

$$\left( \begin{array}{c|cc} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{array} \right) \quad \text{ecuación} \quad x^2 - y^2 = 0 \quad (\text{par de rectas secantes}).$$



- Caso (II),  $R_H = r_H + 1 = 2$ ,  $S_H = s_H - 1 = 1$  ( $t = 1$ ,  $s = 0$ ):

$$\left( \begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \quad \text{ecuación} \quad x^2 + 1 = 0 \quad (\text{vacío}).$$

- Caso (II),  $R_H = r_H + 1 = 2$ ,  $S_H = s_H - 1 = 0$  ( $t = 0$ ,  $s = -1$ ):

$$\left( \begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{array} \right) \quad \text{ecuación} \quad 1 - y^2 = 0 \quad (\text{par de rectas paralelas}).$$


---



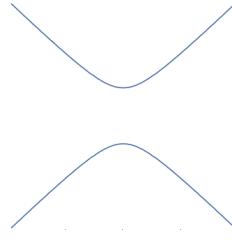
---

- Caso (II),  $R_H = r_H + 1 = 3$ ,  $S_H = s_H + 1 = 3$  ( $t = 2$ ,  $s = 0$ ):

$$\left( \begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \quad \text{ecuación} \quad 1 + x^2 + y^2 = 0 \quad (\text{vacío}).$$

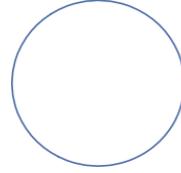
- Caso (II),  $R_H = r_H + 1 = 3$ ,  $S_H = s_h + 1 = 1$  ( $t = 1$ ,  $s = 1$ ):

$$\left( \begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{array} \right) \quad \text{ecuación} \quad 1 + x^2 - y^2 = 0 \quad (\text{hipérbola}).$$



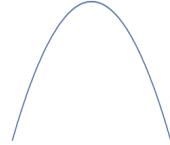
- Caso (II),  $R_H = r_H + 1 = 3$ ,  $S_H = s_H - 1 = 1$  ( $t = 0$ ,  $s = 2$ ):

$$\left( \begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{array} \right) \quad \text{ecuación} \quad 1 - x^2 - y^2 = 0 \quad (\text{elipse}).$$



- Caso (III),  $R_H = r_H + 2 = 3$ ,  $S_H = s_H = 1$  ( $t = 1$ ,  $s = 0$ ):

$$\left( \begin{array}{c|cc} 0 & 0 & 1 \\ \hline 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{array} \right) \quad \text{ecuación} \quad x^2 + 2y = 0 \quad (\text{parábola}).$$



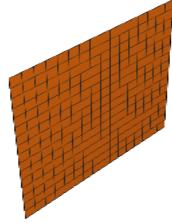
	Tipo (I) $R_H = r_H = 1$	Tipo (I) $R_H = r_H = 2$	Tipo (II) $R_H = r_H + 1 = 2$	Tipo (II) $R_H = r_H + 1 = 3$	Tipo (III) $R_H = r_H + 2 = 3$
$S_H = s_H = 0$		Rectas secantes			
$S_H = s_H = 1$	Recta doble				
$S_H = s_H = 2$		Punto			
$S_H = s_H - 1 = 0$			Rectas paralelas		
$S_H = s_H - 1 = 1$				Elipse	
$S_H = s_H - 1 = 2$				Vacío	
$S_H = s_H + 1 = 1$				Hipérbola	
$S_H = s_H + 1 = 2$			Vacío		
$S_H = s_H = 1$					Parábola

#### 4.2.2. Cuádricas en un espacio afín tridimensional

En este apartado supondremos que  $(\mathcal{A}, \rightarrow)$  tiene  $\dim \mathcal{A} = 3$ . En este caso, las hipercuádricas de  $\mathcal{A}$  reciben el nombre de *cuádricas*. Al igual que en el caso de las cónicas, vamos a describir la tabla de la clasificación afín, salvo equivalencias, de las cuádricas de  $\mathcal{A}$ . Para ello fijaremos una referencia  $\mathcal{R}_0$  en  $\mathcal{A}$  y consideraremos las cuádricas canónicas relativas a  $\mathcal{R}_0$  descritas en Definición 4.17. A la luz del Teorema 4.19, toda cuádrica  $H = (\hat{C}_0, \mathcal{R}_0)$  en  $\mathcal{A}$  es equivalente a una única de las cuádricas canónicas que se listan a continuación, representada cada una de ellas por su matriz y ecuación analítica (polinomio cuadrático) en coordenadas  $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$  respecto de  $\mathcal{R}_0$ :

- Caso (I),  $R_H = r_H = 1$ ,  $S_H = s_H = 1$  ( $t = 1$ ,  $s = 0$ ):

$$\left( \begin{array}{c|ccc} 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \quad \text{ecuación} \quad x^2 = 0 \quad (\text{plano doble}).$$



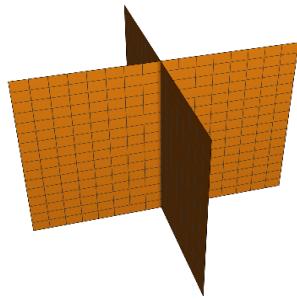
- Caso (I),  $R_H = r_H = 2$ ,  $S_H = s_H = 2$  ( $t = 2$ ,  $s = 0$ ):

$$\left( \begin{array}{c|ccc} 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \quad \text{ecuación} \quad x^2 + y^2 = 0 \quad (\text{recta}).$$



- Caso (I),  $R_H = r_H = 2$ ,  $S_H = s_H = 0$  ( $t = 1$ ,  $s = 1$ ):

$$\left( \begin{array}{c|ccc} 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \quad \text{ecuación} \quad x^2 - y^2 = 0 \quad (\text{par de planos secantes}).$$



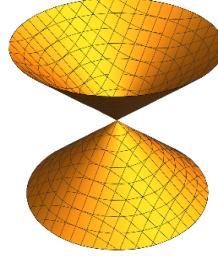
- Caso (I),  $R_H = r_H = 3$ ,  $S_H = s_H = 3$  ( $t = 3$ ,  $s = 0$ ):

$$\left( \begin{array}{c|ccc} 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \quad \text{ecuación} \quad x^2 + y^2 + z^2 = 0 \quad (\text{punto}).$$



- Caso (I),  $R_H = r_H = 3$ ,  $S_H = s_H = 1$  ( $t = 2$ ,  $s = 1$ ):

$$\left( \begin{array}{c|ccc} 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{array} \right) \quad \text{ecuación} \quad x^2 + y^2 - z^2 = 0 \quad (\text{cono}).$$



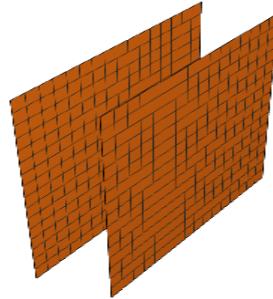
<b>Tipo (I)</b>	$R_H = r_H = 1$	$R_H = r_H = 2$	$R_H = r_H = 3$
$S_H = s_H = 0$		Planos secantes	
$S_H = s_H = 1$	Plano doble		Cono
$S_H = s_H = 2$		Recta	
$S_H = s_H = 3$			Punto

- Caso (II),  $R_H = r_H + 1 = 2$ ,  $S_H = s_H + 1 = 2$  ( $t = 1$ ,  $s = 0$ ):

$$\left( \begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \quad \text{ecuación} \quad 1 + x^2 = 0 \quad (\text{vacío}).$$

- Caso (II),  $R_H = r_H + 1 = 2$ ,  $S_H = s_H - 1 = 0$  ( $t = 0$ ,  $s = 1$ ):

$$\left( \begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \quad \text{ecuación} \quad 1 - x^2 = 0 \quad (\text{par de planos paralelos}).$$

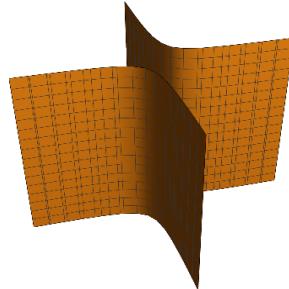


- Caso (II),  $R_H = r_H + 1 = 3$ ,  $S_H = s_H + 1 = 3$  ( $t = 2$ ,  $s = 0$ ):

$$\left( \begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \quad \text{ecuación} \quad 1 + x^2 + y^2 = 0 \quad (\text{vacío}).$$

- Caso (II),  $R_H = r_H + 1 = 3$ ,  $S_H = s_H + 1 = 1$  ( $t = 1$ ,  $s = 1$ ):

$$\left( \begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \quad \text{ecuación} \quad 1 + x^2 - y^2 = 0 \quad (\text{cilindro hiperbólico}).$$



- Caso (II),  $R_H = r_H + 1 = 3$ ,  $S_H = s_H - 1 = 1$  ( $t = 0$ ,  $s = 2$ ):

$$\left( \begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \quad \text{ecuación} \quad 1 - x^2 - y^2 = 0 \quad (\text{cilindro elíptico}).$$

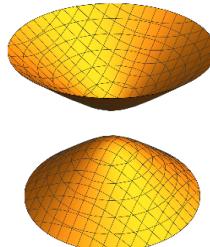


- Caso (II),  $R_H = r_H + 1 = 4$ ,  $S_H = s_H + 1 = 4$  ( $t = 3$ ,  $s = 0$ ):

$$\left( \begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \quad \text{ecuación} \quad 1 + x^2 + y^2 + z^2 = 0 \quad (\text{vacío}).$$

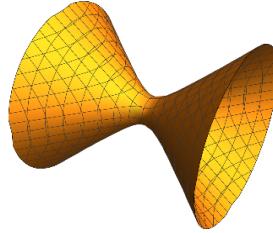
- Caso (II),  $R_H = r_H + 1 = 4$ ,  $S_H = s_H + 1 = 2$  ( $t = 2$ ,  $s = 1$ ):

$$\left( \begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{array} \right) \quad \text{ecuación} \quad 1 + x^2 + y^2 - z^2 = 0 \quad (\text{hiperbololoide de dos hojas}).$$



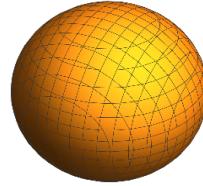
- Caso (II),  $R_H = r_H + 1 = 4$ ,  $S_H = s_H - 1 = 0$  ( $t = 1$ ,  $s = 2$ ):

$$\left( \begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{array} \right) \quad \text{ecuación} \quad 1 + x^2 - y^2 - z^2 = 0 \quad (\text{hiperbolóide de una hoja}).$$



- Caso (II),  $R_H = r_H + 1 = 4$ ,  $S_H = s_H - 1 = 2$  ( $t = 0$ ,  $s = 3$ ):

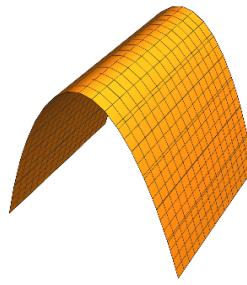
$$\left( \begin{array}{c|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \end{array} \right) \quad \text{ecuación} \quad 1 - x^2 - y^2 - z^2 = 0 \quad (\text{elipsoide}).$$



<b>Tipo (II)</b>	$R_H = r_H + 1 = 2$	$R_H = r_H + 1 = 3$	$R_H = r_H + 1 = 4$
$S_H = s_H + 1 = 1$		Cilindro hiperbólico	
$S_H = s_H + 1 = 2$	vacío		Hiperbolóide de dos hojas
$S_H = s_H + 1 = 3$		vacío	
$S_H = s_H + 1 = 4$			vacío
$S_H = s_H - 1 = 0$	Planos paralelos		Hiperbolóide de una hoja
$S_H = s_H - 1 = 1$		Cilindro elíptico	
$S_H = s_H - 1 = 2$			Elipsoide

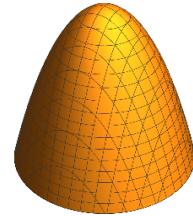
- Caso (III),  $R_H = r_H + 2 = 3$ ,  $S_H = s_H = 1$  ( $t = 1$ ,  $s = 0$ ):

$$\left( \begin{array}{c|ccc} 0 & 0 & 0 & 1 \\ \hline 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \quad \text{ecuación} \quad x^2 + 2z = 0 \quad (\text{cilindro parabólico}).$$



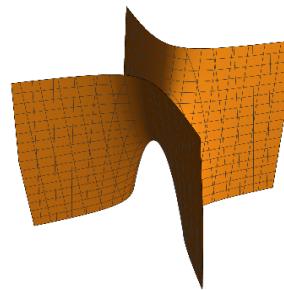
- Caso (III),  $R_H = r_H + 2 = 4$ ,  $S_H = s_H = 2$  ( $t = 1$ ,  $s = 0$ ):

$$\left( \begin{array}{c|ccc} 0 & 0 & 0 & 1 \\ \hline 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \quad \text{ecuación} \quad x^2 + y^2 + 2z = 0 \quad (\text{paraboloi de elíptico}).$$



- Caso (III),  $R_H = r_H + 2 = 4$ ,  $S_H = s_H = 0$  ( $t = 1$ ,  $s = 1$ ):

$$\left( \begin{array}{c|cccc} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ \hline 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \quad \text{ecuación} \quad x^2 - y^2 + 2z = 0 \quad (\text{paraboloi de hiperbólico}).$$



<b>Tipo (III)</b>	$R_H = r_H + 2 = 3$	$R_H = r_H + 2 = 4$
$S_H = s_H = 0$		Paraboloi de hiperbólico
$S_H = s_H = 1$	Cilindro parabólico	
$S_H = s_H = 2$		Paraboloi de elíptico

### 4.2.3. Algoritmo para la clasificación afín de hipercuádricas

Expliquemos el procedimiento práctico general para la clasificación afín de una hipercuádrica de forma sencilla. Entenderemos por clasificar afínmente una hipercuádrica  $H = (\hat{C}, \mathcal{R}_0)$  en  $\mathcal{A}$  el encontrar la hipercuádrica canónica respecto de un sistema de referencia fijado  $\mathcal{R}_0$  en  $\mathcal{A}$ , tabuladas en Definicion 4.17, a la que  $H$  es equivalente.

La herramienta más útil para este cálculo es la Regla de Descartes sobre el número de raíces positivas de un polinomio. Recordemos su enunciado:

**Teorema 4.21 (Regla de Descartes)** *El número de raíces positivas contadas con multiplicidad de un polinomio con coeficientes reales es, como máximo, el número de cambios de signo de la secuencia ordenada (de mayor a menor exponente) de sus coeficientes no nulos.*

Por ejemplo, el polinomio  $p(x) = 3x^5 - x^3 - 2x^2 + 4x - 6$  tiene por coeficientes no nulos ordenados de mayor a menor exponente a  $3, -1, -2, 4, -6$ . En esa secuencia se observan tres cambios de signo (de  $3$  a  $-1$ , de  $-2$  a  $4$  y de  $4$  a  $-6$ ), por lo que a lo más puede tener tres raíces positivas. Si consideramos  $q(x) = p(-x) = 3x^5 + x^3 - 2x^2 - 4x - 6$ , la misma regla nos dice que  $q(x)$  tiene a lo más una raíz positiva, esto es,  $p(x)$  tiene a lo más una raíz negativa. Por tanto  $p(x)$  tiene a lo más cuatro raíces, y en particular no descompone sobre  $\mathbb{R}$ .

Genéricamente, cuando  $p(x)$  es el polinomio característico de una matriz simétrica, las raíces no nulas detectadas por regla de Descartes para  $p(x)$  y  $p(-x)$  (positivas y negativas) son todas las raíces no nulas que posee  $p(x)$  (que como bien sabemos descompone sobre  $\mathbb{R}$ ). En este contexto puede ayudar el siguiente corolario.

**Corolario 4.22** *Sea  $p(x)$  un polinomio con coeficientes reales de grado  $n \geq 1$  satisfaciendo:*

- *$p(x)$  descompone en el cuerpo de los números reales (por ejemplo, si  $p(x)$  es el polinomio característico de una matriz simétrica real).*
- *$p(x)$  tiene a lo más  $t \geq 0$  raíces positivas contadas con multiplicidad (por ejemplo, detectadas por aplicación de la Regla de Descartes a  $p(x)$ ).*
- *$p(x)$  tiene a lo más  $s \geq 0$  raíces negativas contadas con multiplicidad (por ejemplo, detectadas por aplicación de la Regla de Descartes a  $p(-x)$ ).*
- *$x = 0$  es raíz de  $p(x)$  con multiplicidad  $c \geq 0$ .*
- *$t + s + c = n$ .*

*Entonces  $p(x)$  tiene exactamente  $t$  raíces positivas y  $s$  raíces negativas contadas con multiplicidad.*

El algoritmo general para clasificar una hipercuádrica  $H \subseteq \mathcal{A}$  es el siguiente. Primero determinaremos una matriz  $\hat{C} \in M_{\mathcal{R}_0}(H)$  que represente a  $H$  en  $\mathcal{R}_0$  y llamamos  $C \in N_{\mathcal{R}_0}(H)$  a su correspondiente núcleo cuadrático:

$$\hat{C} = \left( \begin{array}{c|c} a & z^t \\ \hline z & C \end{array} \right) \in M_{\mathcal{R}_0}(H).$$

A continuación calculamos los rangos  $R_H$  de  $\hat{C}$  y  $r_H$  de  $C$ . Si  $R_H = r_H$  estamos en el caso (I), si  $R_H = r_H + 1$  en el caso (II), y si  $R_H = r_H + 2$  en el caso (III). Teniendo en cuenta el Teorema 4.8 podemos proceder así:

- *Caso (I) ( $R_H = r_H$ ):* Calculamos el polinomio característico  $p(x)$  de  $C$  y determinamos la distribución de signos de sus raíces. Realmente sólo nos interesa conocer los números  $t$  de raíces positivas y  $s$  de raíces negativas de  $p(x)$ ; para ello nos ayudamos de la Regla de Descartes. Salvo cambiar  $\hat{C}$  por  $-\hat{C} \in M_{\mathcal{R}_0}(H)$  siempre podemos conseguir que  $s_H = t - s \geq 0$ , en cualquier caso  $S_H = s_H = |t - s|$  determina unívocamente a que hipercuádrica canónica es  $H$  equivalente.
- *Caso (II) ( $R_H = r_H + 1$ ):* Calculamos los polinomios característicos  $p(x)$  de  $C$  y  $\hat{p}(x)$  de  $\hat{C}$ , y determinamos la distribución de signos de sus raíces. Sólo nos interesan los números  $t$  de raíces positivas y  $s$  de raíces negativas de  $p(x)$ , y los números  $\hat{t}$  de raíces positivas y  $\hat{s}$  de raíces negativas de  $\hat{p}(x)$  (en ambos casos nos ayudamos de la Regla de Descartes). Salvo cambiar  $\hat{C}$  por  $-\hat{C} \in M_{\mathcal{R}_0}(H)$  siempre podemos conseguir que  $\hat{t} = t + 1$  y  $\hat{s} = s$ , en cualquier caso  $S_H = |\hat{t} - \hat{s}|$  y  $s_H = |t - s|$  determinan unívocamente a que hipercuádrica canónica es  $H$  equivalente.
- *Caso (III) ( $R_H = r_H + 2$ ):* Calculamos el polinomio característico  $p(x)$  de  $C$  y sus raíces. Sólo necesitamos los números  $t$  de raíces positivas y  $s$  de raíces negativas de  $p(x)$  (nos ayudamos de la Regla de Descartes). Salvo cambiar  $\hat{C}$  por  $-\hat{C} \in M_{\mathcal{R}_0}(H)$  siempre podemos conseguir que  $s_H = t - s \geq 0$ , en cualquier caso  $S_H = s_H = |t - s|$  determina unívocamente a que hipercuádrica canónica es  $H$  equivalente.

Otra cuestión más elaborada es encontrar un sistema de referencia  $\mathcal{R}$  de  $\mathcal{A}$  en el que  $M_{\mathcal{R}}(H)$  coincida con su equivalente canónico en  $\mathcal{R}_0$ . Para ello hay reproducir la argumentación de la prueba del Teorema 4.19.

### 4.3. Clasificación euclíadiana de las hipercuádricas

Podemos ahora abordar la clasificación afín euclíadiana de las hipercuádricas en un espacio afín euclídeo  $(\mathcal{A}, \rightarrow, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ . La idea básica será probar que toda hipercuádrica  $H$  viene representada en un sistema de referencia rectangular adecuado por una matriz canónica simplificada.

Llamaremos

$$E(\mathcal{A}, \langle \cdot, \cdot \rangle) = \{f: (\mathcal{A}, \rightarrow, \langle \cdot, \cdot \rangle) \rightarrow (\mathcal{A}, \rightarrow, \langle \cdot, \cdot \rangle) : f \text{ movimiento rígido}\},$$

o simplemente  $E(\mathcal{A})$  por simplicidad, al grupo de los movimientos rígidos en  $(\mathcal{A}, \rightarrow, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ , y escribiremos como

$$E_n(\mathbb{R}) = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ b & A \end{pmatrix} : A \in O(n, \mathbb{R}) \right\}$$

el grupo euclídeo, esto es, el de las matrices que representan a los movimientos rígidos de  $\mathbb{R}^n$  en el sistema de referencia usual. Es claro que si  $f: \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}$  es una afinidad y  $\mathcal{R}_1, \mathcal{R}_2$  son sistemas de referencia rectangulares en  $(\mathcal{A}, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ ,

$$f \in E(\mathcal{A}) \iff M(f, \mathcal{R}_1, \mathcal{R}_2) \in E_n(\mathbb{R}).$$

**Definición 4.23** Dos hipercuádricas  $H_j = (\hat{C}_j, \mathcal{R}_j)$ ,  $\mathcal{R}_j$  rectangular,  $j = 1, 2$ , en un espacio afín euclíadiano  $(\mathcal{A}, \langle \cdot, \cdot \rangle)$  se dicen euclídeamente equivalentes si satisfacen cualquiera de las siguientes condiciones equivalentes:

- Existen sistemas de referencia rectangulares  $\mathcal{R}$  y  $\mathcal{R}'$  de  $\mathcal{A}$  en los que  $M_{\mathcal{R}}(H_1) = M_{\mathcal{R}'}(H_2)$ .

- Existen un sistema de referencia rectangular  $\mathcal{R}$  de  $\mathcal{A}$  y una matriz  $Q \in E_n(\mathbb{R})$  tales que  $Q^t \cdot M_{\mathcal{R}}(H_1) \cdot Q = M_{\mathcal{R}}(H_2)$ .
- Para todo sistema de referencia rectangular  $\mathcal{R}$  de  $\mathcal{A}$  existe  $Q \in E_n(\mathbb{R})$  tal que  $Q^t \cdot M_{\mathcal{R}}(H_1) \cdot Q = M_{\mathcal{R}}(H_2)$ .

Aunque es algo rutinario, es importante comprobar que las condiciones anteriores son equivalentes entre sí.

Como en el caso afín, el concepto de equivalencia euclídea de hipercuádricas también se puede reformular en términos de movimientos rígidos. En este caso, es fácil ver que dos hipercuádricas  $H_j = (\hat{C}_j, \mathcal{R}_j)$ ,  $\mathcal{R}_j$  rectangular,  $j = 1, 2$ , en  $\mathcal{A}$  son euclídeamente equivalentes si y sólo si existe un movimiento rígido  $f: (\mathcal{A}, \langle \cdot, \cdot \rangle) \rightarrow (\mathcal{A}, \langle \cdot, \cdot \rangle)$  tal que

$$M_{\mathcal{R}}(H_2) = M(f^{-1}, \mathcal{R})^t \cdot M_{\mathcal{R}}(H_1) \cdot M(f^{-1}, \mathcal{R}).$$

para cualquier sistema de referencia rectangular  $\mathcal{R}$  en  $(\mathcal{A}, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ , lo que en particular implica que  $f(H_1) = H_2$ .

Las hipercuádricas en el plano euclídeo  $\mathbb{R}^2$  definidas por los polinomios

$$H_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 0\}, \quad H_2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + 2y^2 = 0\}$$

se corresponden con el punto  $\{(0, 0)\}$ , y no son equivalentes pues sus matrices asociadas

$$\hat{C}_1 = \left( \begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \in M_{\mathcal{R}_0}(H_1), \quad \hat{C}_2 = \left( \begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{array} \right) \in M_{\mathcal{R}_0}(H_2)$$

en la referencia rectangular  $\mathcal{R}_0$  no son congruentes en el grupo  $E_2(\mathbb{R})$ . Sin embargo existe  $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  movimiento rígido tal que  $f(H_1) = H_2$ . Por tanto la equivalencia euclídea afecta a las matrices de las hipercuádricas en sistemas de referencia rectangulares, no sólo a los conjuntos de puntos que definen; ver Observación 4.11.

Ya estamos en condiciones de abordar el teorema fundamental de clasificación euclídea de hipercuádricas. Necesitaremos para ello alguna notación.

En lo que sigue supondremos fijado un sistema de referencia  $\mathcal{R}_0$  rectangular en  $(\mathcal{A}, \langle \cdot, \cdot \rangle)$  ( $\dim \mathcal{A} = n$ ).

**Definición 4.24** Las hipercuádricas  $H = (\hat{C}_0, \mathcal{R}_0)$  en  $\mathcal{A}$  con matrices descritas en la siguiente lista se llamarán hipercuádricas canónicas en  $(\mathcal{A}, \langle \cdot, \cdot \rangle)$  con respecto al sistema de referencia rectangular  $\mathcal{R}_0$ :

$$(I) \quad M_{\mathcal{R}_0}(H) = \left\{ \lambda \left( \begin{array}{c|c} 0 & 0 \\ \hline 0 & D(\epsilon_1, \dots, \epsilon_t, -\delta_1, \dots, -\delta_s, 0^{(c)}) \end{array} \right) : \lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \right\}, \text{ o equivalentemente}$$

$$\mathcal{P}_{\mathcal{R}}(H) = \left\{ \lambda \left( \sum_{i=1}^t \epsilon_i x_i^2 - \sum_{j=1}^s \delta_j x_j^2 \right) = 0 : \lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \right\},$$

donde  $t, s, c \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ ,  $|t| + |s| > 0$ ,  $t + s + c = n$ ,  $t - s \geq 0$ ,  $\epsilon_i, \delta_j > 0$  para todo  $i, j$ ,  $\epsilon_1 = 1 \geq \epsilon_j$ ,  $j = 2, \dots, t$ .

En este caso  $R_H = r_H = t + s$  y  $S_H = s_H = t - s \geq 0$ .

(II)  $M_{\mathcal{R}_0}(H) = \left\{ \lambda \left( \frac{1}{0} \middle| \frac{0}{D(\epsilon_1, \dots, \epsilon_t, -\delta_1, \dots, -\delta_s, 0^{(c)})} \right) : \lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \right\}$ , o equivalentemente

$$\mathcal{P}_{\mathcal{R}}(H) = \left\{ \lambda \left( 1 + \sum_{i=1}^t \epsilon_i x_i^2 - \sum_{j=1}^s \delta_j x_j^2 \right) = 0 : \lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \right\},$$

donde  $t, s, c \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ ,  $|t| + |s| > 0$ ,  $t + s + c = n$ , y  $\epsilon_i, \delta_j > 0$  para todo  $i, j$ .

En este caso  $R_H = r_H + 1 = t + s + 1$  y  $S_H = |t - s + 1|$ ,  $s_H = |t - s|$ .

(III)  $M_{\mathcal{R}_0}(H) = \left\{ \lambda \left( \frac{0}{e_n} \middle| \frac{e_n^t}{D(\epsilon_1, \dots, \epsilon_t, -\delta_1, \dots, -\delta_s, 0^{(c)})} \right) : \lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \right\}$ , o equivalentemente

$$\mathcal{P}_{\mathcal{R}}(H) = \left\{ \lambda \left( 2x_n + \sum_{i=1}^t \epsilon_i x_i^2 - \sum_{j=1}^s \delta_j x_j^2 \right) = 0 : \lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \right\},$$

donde  $e_n = (0, \dots, 0, 1)^t \in \mathbb{R}^n$  es el último vector de la base canónica de  $\mathbb{R}^n$ ,  $t, s, c \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ ,  $|t| + |s| > 0$ ,  $t + s + c = n$ ,  $c > 0$ ,  $t - s \geq 0$ , y  $\epsilon_i, \delta_j > 0$  para todo  $i, j$ .

En este caso  $R_H = r_H + 2 = t + s + 2$  y  $S_H = s_H = t - s \geq 0$ .

**Observación 4.25** En las matrices de la Definición 4.24, las cuádruples de números enteros  $(R_H, r_H, S_H, s_H)$  y los conjuntos

$$\{\epsilon_i : i = 1 \dots, t\}, \quad \{\delta_j : j = 1 \dots, s\}$$

discriminan las matrices anteriores, en el sentido de que dos matrices en la anterior lista son euclídeamente equivalentes si y sólo si esos elementos coinciden para ambas.

**DEMOSTRACIÓN:** Si dos cuádricas  $H_1, H_2$  representadas por matrices de las listadas en la Definición 4.24 son euclídeamente equivalentes, lo son también afínmente y por tanto ambas pertenecen al mismo tipo (I), (II) ó (III). Además, las matrices  $\hat{C}_1 \in M_{\mathcal{R}_0}(H_1)$  y  $\hat{C}_2 \in M_{\mathcal{R}_0}(H_2)$  de arriba (con  $\lambda = 1$ ) han de satisfacer que  $\hat{C}_2 = \mu(Q^t \cdot \hat{C}_1 \cdot Q)$  para alguna matriz  $Q \in E_n(\mathbb{R})$  y  $\mu \neq 0$ . De (7) es fácil concluir que  $\mu = 1$ , y de aquí que los respectivos núcleos cuadráticos  $C_1$  de  $\hat{C}_1$  y  $C_2$  de  $\hat{C}_2$  sean ortogonalmente equivalentes, y por tanto con los mismos valores propios y las mismas multiplicidades. ■

El siguiente teorema expresa que dada una matriz simétrica de orden  $n + 1$  (típicamente la de una hipercuádrica en un sistema de referencia rectangular de  $\mathcal{A}$ ), ella o su opuesta pueden ser transformadas por congruencia en  $E_n(\mathbb{R})$  en una de las matrices canónicas del listado anterior.

**Teorema 4.26** Toda hipercuádrica  $H = (\hat{C}_0, \mathcal{R}_0)$  de  $(\mathcal{A}, \langle \cdot, \cdot \rangle)$  es euclídeamente equivalente a una y sólo una de las hipercuádricas canónicas descritas matricialmente en Definición 4.24.

**DEMOSTRACIÓN:** Lo que hemos de probar es que existe un sistema de referencia rectangular  $\mathcal{R}$  de  $\mathcal{A}$  en el que  $H$  puede ser representada por alguna de las matrices canónicas descritas en Definición 4.24- (I)-(II)-(III).

Tomemos una matriz que represente a  $H$  en  $\mathcal{R}_0$ :

$$\hat{C}_0 = \left( \begin{array}{c|c} a_0 & z_0^t \\ \hline z_0 & C_0 \end{array} \right) \in M_{\mathcal{R}_0}(H).$$

Recordemos que, dado un sistema de referencia rectangular  $\mathcal{R}_1$  con  $M(\text{Id}_{\mathcal{A}}, \mathcal{R}_1, \mathcal{R}_0) = \left( \begin{array}{c|c} 1 & 0 \\ \hline b_1 & A_1 \end{array} \right) \in E_n(\mathbb{R})$ , se tiene que  $\left( \begin{array}{c|c} 1 & b_1^t \\ \hline 0 & A_1^t \end{array} \right) \cdot \left( \begin{array}{c|c} a_0 & z_0^t \\ \hline z_0 & C_0 \end{array} \right) \cdot \left( \begin{array}{c|c} 1 & 0 \\ \hline b_1 & A_1 \end{array} \right) \in M_{\mathcal{R}_1}(H)$ , esto es,

$$\left( \begin{array}{c|c} a_0 + b_1^t \cdot z_0 + z_0^t \cdot b_1 + b_1^t \cdot C_0 \cdot b_1 & z_0^t \cdot A_1 + b_1^t \cdot C_0 \cdot A_1 \\ \hline A_1^t \cdot z_0 + A_1^t \cdot C_0 \cdot b_1 & A_1^t \cdot C_0 \cdot A_1 \end{array} \right) \in M_{\mathcal{R}_1}(H).$$

Por el Teorema 4.6, podemos elegir  $A_1 \in O(n, \mathbb{R})$  tal que

$$A_1^t \cdot C_0 \cdot A_1 = D(\epsilon_1, \dots, \epsilon_t, -\delta_1, \dots, -\delta_s, 0^{(c)})$$

donde  $|t| + |s| > 0$  ( $H$  es una hipercuádrica) y los reales  $\epsilon_i, \delta_j > 0$  para todo  $i, j$ . Fijada esta  $A_1$ , un cálculo directo nos dice que

$$A_1^t \cdot z_0 + A_1^t \cdot C \cdot b_1 = A_1^t \cdot z_0 + D(\epsilon_1, \dots, \epsilon_t, -\delta_1, \dots, -\delta_s, 0^{(c)}) \cdot (A_1^{-1} \cdot b_1).$$

Escribamos

$$A_1^t \cdot z_0 = \left( \begin{array}{c} z' \\ \hline z_1 \end{array} \right), \quad z' \in \mathbb{R}^{t+s}, z_1 \in \mathbb{R}^c,$$

llamemos  $x' \in \mathbb{R}^{t+s}$  al único vector tal que

$$z' + D(\epsilon_1, \dots, \epsilon_t, -\delta_1, \dots, -\delta_s) \cdot x' = 0 \in \mathbb{R}^{t+s},$$

y usando la regularidad de  $A_1$  elijamos  $b_1 \in \mathbb{R}^n$  el único vector tal que

$$A_1^{-1} \cdot b_1 = \left( \begin{array}{c} x' \\ \hline 0 \end{array} \right) \in \mathbb{R}^n.$$

Para esta elección de  $b_1$  se tiene que

$$A_1^t \cdot z_0 + A_1^t \cdot C \cdot b_1 = \left( \begin{array}{c} z' \\ \hline z_1 \end{array} \right) + D(\epsilon_1, \dots, \epsilon_t, -\delta_1, \dots, -\delta_s, 0^{(c)}) \cdot \left( \begin{array}{c} x' \\ \hline 0 \end{array} \right) = \left( \begin{array}{c} 0 \\ \hline z_1 \end{array} \right).$$

En el sistema de referencia rectangular  $\mathcal{R}_1$  determinado por la condición  $M(\text{Id}_{\mathcal{A}}, \mathcal{R}_1, \mathcal{R}_0) = \left( \begin{array}{c|c} 1 & 0 \\ \hline b_1 & A_1 \end{array} \right)$  queda

$$\left( \begin{array}{c|c|c} a_1 & 0 & z_1^t \\ \hline 0 & D(\epsilon_1, \dots, \epsilon_t, -\delta_1, \dots, -\delta_s) & 0 \\ \hline z_1 & 0 & 0 \end{array} \right) \in M_{\mathcal{R}_1}(H),$$

donde

$$a_1 = a_0 + b_1^t \cdot z_0 + z_0^t \cdot b_1 + b_1^t \cdot C_0 \cdot b_1, \quad \left( \begin{array}{c} 0 \\ \hline z_1 \end{array} \right) = A_1^t \cdot z_0 + A_1^t \cdot C_0 \cdot b_1.$$

Si  $a_1 = 0 \in \mathbb{R}$  y  $z_1 = 0 \in \mathbb{R}^c$ , se sigue el caso (I). Obsérvese que podemos garantizar que  $s_H = t - s \geq 0$  sin más que cambiar de inicio  $\left( \begin{array}{c|c} a_0 & z_0^t \\ \hline z_0 & C_0 \end{array} \right) \in M_{\mathcal{R}_0}(H)$  por su matriz

opuesta. También se puede suponer que  $\epsilon_1 = 1 \geq \epsilon_j$ ,  $j = 2, \dots, t$  sin mas que reordenar coordenadas para que  $\epsilon_1 \geq \epsilon_j$ ,  $j = 2, \dots, t$ , y afectar por el factor  $\lambda = 1/\epsilon_1$  la matriz original.

Si  $a_1 \neq 0$  y  $z_1 = 0 \in \mathbb{R}^c$  se sigue el caso (II). En efecto, al igual que antes salvo cambiar  $\left( \begin{array}{c|c} a_0 & z_0^t \\ \hline z_0 & C_0 \end{array} \right) \in M_{\mathcal{R}_0}(H)$  por su matriz opuesta y afectarla matriz por el factor  $1/a_1$  podemos suponer  $a_1 = 1$  (obsérvese que en este caso no podemos garantizar que  $t - s \geq 0$  por la rigidez que impone la condición  $a_1 = 1 > 0$  anterior).

Finalmente supongamos que  $z_1 \neq 0$ , y observemos que salvo cambiar al principio  $\left( \begin{array}{c|c} a_0 & z_0^t \\ \hline z_0 & C_0 \end{array} \right) \in M_{\mathcal{R}_0}(H)$  por su matriz opuesta podemos suponer que  $s_H = t - s \geq 0$ . Consideremos ahora un sistema de referencia rectangular  $\mathcal{R}_2$  para el que

$$M(\text{Id}_{\mathcal{A}}, \mathcal{R}_2, \mathcal{R}_1) = \left( \begin{array}{c|c|c} 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & I_{t+s} & 0 \\ \hline b_2 & 0 & A_2 \end{array} \right),$$

donde  $b_2 \in \mathbb{R}^c$  y  $A_2 \in O(c, \mathbb{R})$  se determinarán más adelante. Un cálculo directo siguiendo la fórmula

$$M_{\mathcal{R}_2}(H) = M(\text{Id}_{\mathcal{A}}, \mathcal{R}_2, \mathcal{R}_1)^t \cdot M_{\mathcal{R}_1}(H) \cdot M(\text{Id}_{\mathcal{A}}, \mathcal{R}_2, \mathcal{R}_1)$$

nos da que

$$\left( \begin{array}{c|c|c} 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & I_{t+s} & 0 \\ \hline b_2 & 0 & A_2 \end{array} \right)^t \cdot \left( \begin{array}{c|c} a_1 & 0 \\ \hline 0 & D(\epsilon_1, \dots, \epsilon_t, -\delta_1, \dots, -\delta_s) \\ \hline z_1 & 0 \end{array} \right) \cdot \left( \begin{array}{c|c|c} 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & I_{t+s} & 0 \\ \hline b_2 & 0 & A_2 \end{array} \right) \in M_{\mathcal{R}_2}(H),$$

esto es,

$$\left( \begin{array}{c|c} a_2 & 0 \\ \hline 0 & D(\epsilon_1, \dots, \epsilon_t, -\delta_1, \dots, -\delta_s) \\ \hline z_2 & 0 \end{array} \right) \in M_{\mathcal{R}_2}(H),$$

donde  $a_2 = a_1 + b_2^t \cdot z_1 + z_1^t \cdot b_2$  y  $z_2 = A_2^t \cdot z_1$ .

Como  $z_1 \neq 0$ , salvo multiplicar la matriz original  $\left( \begin{array}{c|c} a_0 & z_0^t \\ \hline z_0 & C_0 \end{array} \right) \in M_{\mathcal{R}_0}(H)$  por el factor  $\lambda = 1/\|z_1\|$  podemos suponer que  $\|z_1\| = 1$ , y por tanto, encontrar una matriz  $A_2 \in O(c, \mathbb{R})$  tal que

$$z_2 = A_2^t \cdot z_1 = e_d = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^d$$

sea el último vector de la base canónica de  $\mathbb{R}^d$ . Una vez fijada esta matriz  $A_2$ , elegimos cualquier  $b_2 \in \mathbb{R}^c$  para que

$$a_2 = a_1 + b_2^t \cdot z_1 + z_1^t \cdot b_2 = 0.$$

Con estas elecciones nos quedaría finalmente que

$$\left( \begin{array}{c|c} 0 & e_n^t \\ \hline e_n & D((\epsilon_1, \dots, \epsilon_t, -\delta_1, \dots, -\delta_s, 0^{(c)})) \end{array} \right) \in M_{\mathcal{R}_2}(H),$$

lo que nos lleva al caso (III) y concluye la prueba. ■

### 4.3.1. Cónicas en un plano afín euclídeo

En este apartado supondremos que  $(\mathcal{A}, \rightarrow, \langle \rangle)$  es un plano afín euclídeo. Nuestra intención es describir la tabla de la clasificación afín euclídea, salvo equivalencias, de las cónicas en  $(\mathcal{A}, \rightarrow, \langle \rangle)$ . No vamos a hacer nada nuevo, solo particularizar la información que nos da el teorema de clasificación general Teorema 4.26 y recordar alguna notación clásica.

Para ello fijemos una referencia rectangular  $\mathcal{R}_0$  en  $(\mathcal{A}, \rightarrow, \langle \rangle)$  y consideremos las cónicas canónicas relativas a  $\mathcal{R}_0$  descritas en Definición 4.24. A la luz del Teorema 4.26, toda cónica  $H$  en  $\mathcal{A}$  es euclídeamente equivalente a una única de las cónicas canónicas que se listan a continuación, representada cada una de ellas por su matriz y ecuación analítica (polinomio cuadrático) en coordenadas  $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$  respecto de  $\mathcal{R}_0$ :

- Caso (I),  $R_H = r_H = 1, S_H = s_H = 1$  ( $t = 1, s = 0$ ):

$$\left( \begin{array}{c|cc} 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \quad \text{ecuación} \quad x^2 = 0 \quad (\text{recta doble}).$$


---

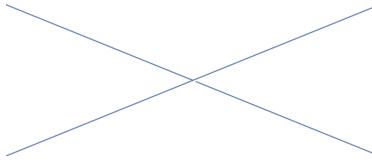
- Caso (I),  $R_H = r_H = 2, S_H = s_H = 2$  ( $t = 2, s = 0$ ),  $\epsilon > 0$ :

$$\left( \begin{array}{c|cc} 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \epsilon \end{array} \right) \quad \text{ecuación} \quad x^2 + \epsilon y^2 = 0 \quad (\text{punto}).$$



- Caso (I),  $R_H = r_H = 2, S_H = s_H = 0$  ( $t = 1, s = 1$ ),  $\delta > 0$ :

$$\left( \begin{array}{c|cc} 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -\delta \end{array} \right) \quad \text{ecuación} \quad x^2 - \delta y^2 = 0 \quad (\text{par de rectas secantes}).$$



- Caso (II),  $R_H = r_H + 1 = 2, S_H = s_H - 1 = 1$  ( $t = 1, s = 0$ ),  $\epsilon > 0$ :

$$\left( \begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & \epsilon & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \quad \text{ecuación} \quad \epsilon x^2 + 1 = 0 \quad (\text{vacío}).$$

- Caso (II),  $R_H = r_H + 1 = 2, S_H = s_H - 1 = 0$  ( $t = 0, s = -1$ ),  $\delta > 0$ :

$$\left( \begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\delta \end{array} \right) \quad \text{ecuación} \quad 1 - \delta y^2 = 0 \quad (\text{par de rectas paralelas}).$$

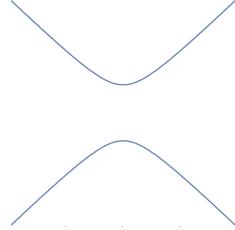


- Caso (II),  $R_H = r_H + 1 = 3$ ,  $S_H = s_H + 1 = 3$  ( $t = 2$ ,  $s = 0$ ),  $\epsilon_1, \epsilon_2 > 0$ :

$$\left( \begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & \epsilon_1 & 0 \\ 0 & 0 & \epsilon_2 \end{array} \right) \quad \text{ecuación} \quad 1 + \epsilon_1 x^2 + \epsilon_2 y^2 = 0 \quad (\text{vacío}).$$

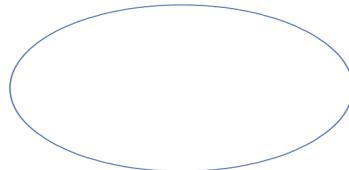
- Caso (II),  $R_H = r_H + 1 = 3$ ,  $S_H = s_h + 1 = 1$  ( $t = 1$ ,  $s = 1$ ),  $\epsilon, \delta > 0$ :

$$\left( \begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & \epsilon & 0 \\ 0 & 0 & -\delta \end{array} \right) \quad \text{ecuación} \quad 1 + \epsilon x^2 - \delta y^2 = 0 \quad (\text{hipérbola}).$$



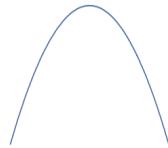
- Caso (II),  $R_H = r_H + 1 = 3$ ,  $S_H = s_H - 1 = 1$  ( $t = 0$ ,  $s = 2$ ),  $\delta_1, \delta_2 > 0$ :

$$\left( \begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & -\delta_1 & 0 \\ 0 & 0 & -\delta_2 \end{array} \right) \quad \text{ecuación} \quad 1 - \delta_1 x^2 - \delta_2 y^2 = 0 \quad (\text{elipse}).$$



- Caso (III),  $R_H = r_H + 2 = 3$ ,  $S_H = s_H = 1$  ( $t = 1$ ,  $s = 0$ ),  $\epsilon > 0$ :

$$\left( \begin{array}{c|cc} 0 & 0 & 1 \\ \hline 0 & \epsilon & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{array} \right) \quad \text{ecuación} \quad \epsilon x^2 + 2y = 0 \quad (\text{parábola}).$$



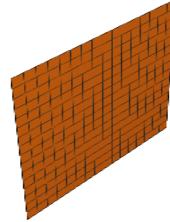
	Tipo (I) $R_H = r_H = 1$	Tipo (I) $R_H = r_H = 2$	Tipo (II) $R_H = r_H + 1 = 2$	Tipo (II) $R_H = r_H + 1 = 3$	Tipo (III) $R_H = r_H + 2 = 3$
$S_H = s_H = 0$	Rectas secantes				
$S_H = s_H = 1$	Recta doble				
$S_H = s_H = 2$		Punto			
$S_H = s_H - 1 = 0$			Rectas paralelas		
$S_H = s_H - 1 = 1$				Elipse	
$S_H = s_H - 1 = 2$				Vacío	
$S_H = s_H + 1 = 1$				Hipérbola	
$S_H = s_H + 1 = 2$			Vacío		
$S_H = s_H = 1$					Parábola

#### 4.3.2. Cuádricas en un espacio afín tridimensional

En este apartado supondremos que  $(\mathcal{A}, \rightarrow, \langle \rangle)$  tiene  $\dim \mathcal{A} = 3$ . Al igual que en el caso de las cónicas euclidianas, vamos a describir la tabla de la clasificación, salvo equivalencias euclídea, de las cuádricas de  $\mathcal{A}$ . Para ello fijaremos una referencia rectangular  $\mathcal{R}_0$  en  $(\mathcal{A}, \rightarrow, \langle \rangle)$  y consideraremos las cuádricas canónicas relativas a  $\mathcal{R}_0$  descritas en Definición 4.24. A la luz del Teorema 4.26, toda cuádrica  $H$  en  $\mathcal{A}$  es euclídeamente equivalente a una única de las cuádricas canónicas que se listan a continuación, representada cada una de ellas por su matriz y ecuación analítica (polinomio cuadrático) en coordenadas  $(x, y, z)$  respecto de  $\mathcal{R}_0$ :

- Caso (I),  $R_H = r_H = 1, S_H = s_H = 1$  ( $t = 1, s = 0$ ):

$$\left( \begin{array}{c|cccc} 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \quad \text{ecuación} \quad x^2 = 0 \quad (\text{plano doble}).$$



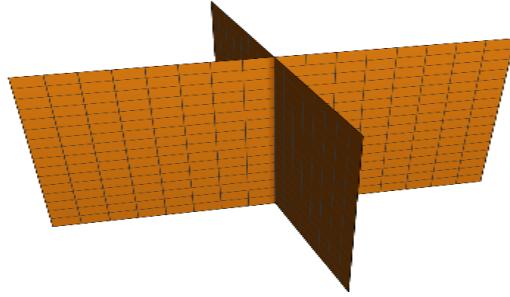
- Caso (I),  $R_H = r_H = 2, S_H = s_H = 2$  ( $t = 2, s = 0$ ),  $\epsilon > 0$ :

$$\left( \begin{array}{c|cccc} 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \epsilon & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \quad \text{ecuación} \quad x^2 + \epsilon y^2 = 0 \quad (\text{recta}).$$



- Caso (I),  $R_H = r_H = 2$ ,  $S_H = s_H = 0$  ( $t = 1$ ,  $s = 1$ ),  $\delta > 0$ :

$$\left( \begin{array}{c|ccc} 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\delta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \quad \text{ecuación} \quad x^2 - \delta y^2 = 0 \quad (\text{par de planos secantes}).$$



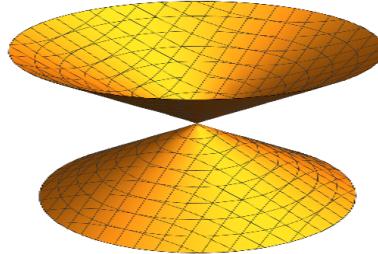
- Caso (I),  $R_H = r_H = 3$ ,  $S_H = s_H = 3$  ( $t = 3$ ,  $s = 0$ ),  $\epsilon_1, \epsilon_2 > 0$ :

$$\left( \begin{array}{c|ccc} 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \epsilon_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \epsilon_2 \end{array} \right) \quad \text{ecuación} \quad x^2 + \epsilon_1 y^2 + \epsilon_2 z^2 = 0 \quad (\text{punto}).$$

•

- Caso (I),  $R_H = r_H = 3$ ,  $S_H = s_H = 1$  ( $t = 2$ ,  $s = 1$ ),  $\epsilon, \delta > 0$ :

$$\left( \begin{array}{c|ccc} 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \epsilon & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\delta \end{array} \right) \quad \text{ecuación} \quad x^2 + \epsilon y^2 - \delta z^2 = 0 \quad (\text{cono}).$$



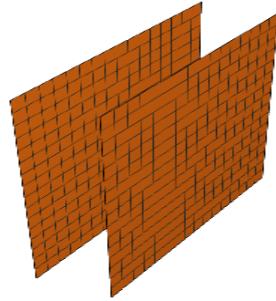
<b>Tipo (I)</b>	$R_H = r_H = 1$	$R_H = r_H = 2$	$R_H = r_H = 3$
$S_H = s_H = 0$		Planos secantes	
$S_H = s_H = 1$	Plano doble		Cono
$S_H = s_H = 2$		Recta	
$S_H = s_H = 3$			Punto

- Caso (II),  $R_H = r_H + 1 = 2$ ,  $S_H = s_H + 1 = 2$  ( $t = 1$ ,  $s = 0$ ),  $\epsilon > 0$ :

$$\left( \begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & \epsilon & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \quad \text{ecuación} \quad 1 + \epsilon x^2 = 0 \quad (\text{vacío}).$$

- Caso (II),  $R_H = r_H + 1 = 2$ ,  $S_H = s_H - 1 = 0$  ( $t = 0$ ,  $s = 1$ ),  $\delta > 0$ :

$$\left( \begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & -\delta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \quad \text{ecuación} \quad 1 - \delta x^2 = 0 \quad (\text{par de planos paralelos}).$$

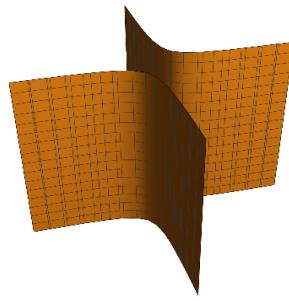


- Caso (II),  $R_H = r_H + 1 = 3$ ,  $S_H = s_H + 1 = 3$  ( $t = 2$ ,  $s = 0$ ),  $\epsilon_1, \epsilon_2 > 0$ :

$$\left( \begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & \epsilon_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \epsilon_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \quad \text{ecuación} \quad 1 + \epsilon_1 x^2 + \epsilon_2 y^2 = 0 \quad (\text{vacío}).$$

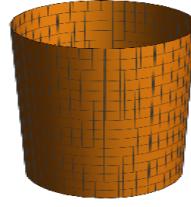
- Caso (II),  $R_H = r_H + 1 = 3$ ,  $S_H = s_H + 1 = 1$  ( $t = 1$ ,  $s = 1$ ),  $\epsilon > 0, \delta > 0$ :

$$\left( \begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & \epsilon & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\delta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \quad \text{ecuación} \quad 1 + \epsilon x^2 - \delta y^2 = 0 \quad (\text{cilindro hiperbólico}).$$



- Caso (II),  $R_H = r_H + 1 = 3$ ,  $S_H = s_H - 1 = 1$  ( $t = 0$ ,  $s = 2$ ),  $\delta_1, \delta_2 > 0$ :

$$\left( \begin{array}{c|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & -\delta_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\delta_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \quad \text{ecuación} \quad 1 - \delta_1 x^2 - \delta_2 y^2 = 0 \quad (\text{cilindro elíptico}).$$

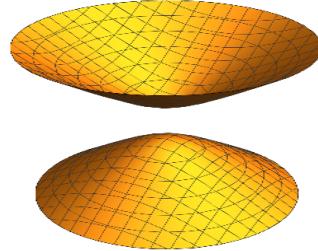


- Caso (II),  $R_H = r_H + 1 = 4$ ,  $S_H = s_H + 1 = 4$  ( $t = 3$ ,  $s = 0$ ),  $\epsilon_1, \epsilon_2, \epsilon_3 > 0$ :

$$\left( \begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & \epsilon_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \epsilon_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \epsilon_3 \end{array} \right) \quad \text{ecuación} \quad 1 + \epsilon_1 x^2 + \epsilon_2 y^2 + \epsilon_3 z^2 = 0 \quad (\text{vacío}).$$

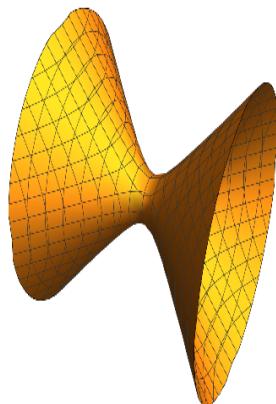
- Caso (II),  $R_H = r_H + 1 = 4$ ,  $S_H = s_H + 1 = 2$  ( $t = 2$ ,  $s = 1$ ),  $\epsilon_1, \epsilon_2 > 0$ ,  $\delta > 0$ :

$$\left( \begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & \epsilon_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \epsilon_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\delta \end{array} \right) \quad \text{ecuación} \quad 1 + \epsilon_1 x^2 + \epsilon_2 y^2 - \delta z^2 = 0 \quad (\text{hiperboloides de dos hojas}).$$



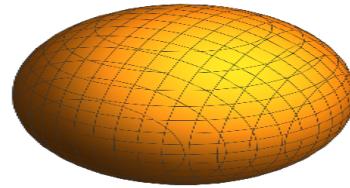
- Caso (II),  $R_H = r_H + 1 = 4$ ,  $S_H = s_H - 1 = 0$  ( $t = 1$ ,  $s = 2$ ),  $\epsilon > 0$ ,  $\delta_1, \delta_2 > 0$ :

$$\left( \begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & \epsilon & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\delta_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\delta_2 \end{array} \right) \quad \text{ecuación} \quad 1 + \epsilon x^2 - \delta_1 y^2 - \delta_2 z^2 = 0 \quad (\text{hiperboloides de una hoja}).$$



- Caso (II),  $R_H = r_H + 1 = 4$ ,  $S_H = s_H - 1 = 2$  ( $t = 0$ ,  $s = 3$ ),  $\delta_1, \delta_2, \delta_3 > 0$ :

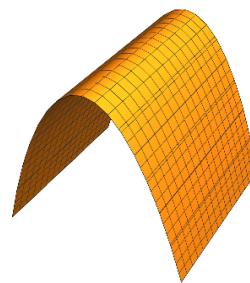
$$\left( \begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & -\delta_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\delta_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\delta_3 \end{array} \right) \quad \text{ecuación} \quad 1 - \delta_1 x^2 - \delta_2 y^2 - \delta_3 z^2 = 0 \quad (\text{elipsoide}).$$



Tipo (II)	$R_H = r_H + 1 = 2$	$R_H = r_H + 1 = 3$	$R_H = r_H + 1 = 4$
$S_H = s_H + 1 = 1$		Cilindro hiperbólico	
$S_H = s_H + 1 = 2$	vacío		Hiperboloide de dos hojas
$S_H = s_H + 1 = 3$		vacío	
$S_H = s_H + 1 = 4$			vacío
$S_H = s_H - 1 = 0$	Planos paralelos		Hiperboloide de una hoja
$S_H = s_H - 1 = 1$		Cilindro elíptico	
$S_H = s_H - 1 = 2$			Elipsoide

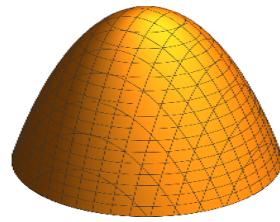
- Caso (III),  $R_H = r_H + 2 = 3$ ,  $S_H = s_H = 1$  ( $t = 1$ ,  $s = 0$ ),  $\epsilon > 0$ :

$$\left( \begin{array}{c|ccc} 0 & 0 & 0 & 1 \\ \hline 0 & \epsilon & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \quad \text{ecuación} \quad \epsilon x^2 + 2z = 0 \quad (\text{cilindro parabólico}).$$



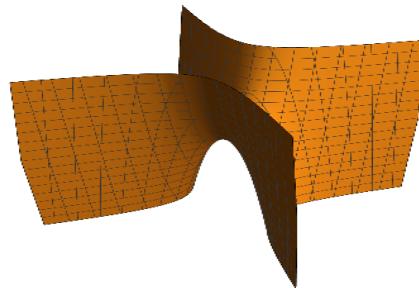
- Caso (III),  $R_H = r_H + 2 = 4$ ,  $S_H = s_H = 2$  ( $t = 1$ ,  $s = 0$ ),  $\epsilon_1, \epsilon_2 > 0$ :

$$\left( \begin{array}{c|cccc} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ \hline 0 & \epsilon_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \epsilon_2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \quad \text{ecuación} \quad \epsilon_1 x^2 + \epsilon_2 y^2 + 2z = 0 \quad (\text{paraboloida elíptico}).$$



- Caso (III),  $R_H = r_H + 2 = 4$ ,  $S_H = s_H = 0$  ( $t = 1$ ,  $s = 1$ ),  $\epsilon, \delta > 0$ :

$$\left( \begin{array}{c|ccc} 0 & 0 & 0 & 1 \\ \hline 0 & \epsilon & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\delta & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \quad \text{ecuación} \quad \epsilon x^2 - \delta y^2 + 2z = 0 \quad (\text{paraboliode hiperbólico}).$$



Tipo (III)	$R_H = r_H + 2 = 3$	$R_H = r_H + 2 = 4$
$S_H = s_H = 0$		Paraboliode hiperbólico
$S_H = s_H = 1$	Cilindro parabólico	
$S_H = s_H = 2$		Paraboliode elíptico

#### 4.4. Algunos ejercicios resueltos

**Ejercicio 4.27** Clasifica la cónica

$$H = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 - 7y^2 - 6xy + 10x + 2y + 9 = 0\}$$

y encuentra:

- Un sistema de referencia en el que adopten su ecuación reducida.
- Un isomorfismo afín de  $\mathbb{R}^2$  que las lleve a su ecuación reducida.

SOLUCIÓN: Es claro que

$$\hat{C}_0 = \left( \begin{array}{c|cc} 9 & 5 & 1 \\ \hline 5 & 1 & -3 \\ 1 & -3 & -7 \end{array} \right) \in M_{\mathcal{R}_0}(H)$$

con núcleo cuadrático asociado

$$C_0 = \left( \begin{array}{cc} 1 & -3 \\ -3 & -7 \end{array} \right) \in N_{\mathcal{R}_0}(H),$$

donde  $\mathcal{R}_0$  es el sistema de referencia usual de  $\mathbb{R}^2$ . De aquí que  $R_H = r_H = 2$  y estamos en el caso (I). El polinomio característico  $p(t)$  de la matriz  $C_0$  viene dado por

$$p(t) = \det \begin{pmatrix} 1-t & -3 \\ -3 & -7-t \end{pmatrix} = -16 + 6t + t^2 = (t+8)(t-2),$$

de donde  $C_0$  tiene por valores propios a  $-8, 2$  y  $s_H = S_H = 0$ . Por tanto la forma reducida de  $H$  es

$$\left( \begin{array}{c|cc} 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{array} \right)$$

y  $H$  consiste de dos rectas secantes.

Para encontrar el sistema de referencia en el que  $H$  adopta su forma canónica, lo primero que faremos es encontrar una base  $B_1$  de  $\mathbb{R}^2$  en la que  $C_0$  adopte su forma de Sylvester. Observemos que los subespacios propios de  $C_0$  para los valores propios  $2, -8$  son:

$$V_2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \begin{pmatrix} -1 & -3 \\ -3 & -9 \end{pmatrix} \cdot (x, y)^t = (0, 0)^t\} = L(\{(3, -1)\})$$

y

$$V_{-8} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \begin{pmatrix} 9 & -3 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} \cdot (x, y)^t = (0, 0)^t\} = L(\{(1, 3)\}).$$

Bases ortonormales de los subespacios propios se generan trivialmente:

- $\{\frac{1}{\sqrt{10}}(3, -1)\}$  es base ortonormal de  $V_2$ .
- $\{\frac{1}{\sqrt{10}}(1, 3)\}$  es base ortonormal de  $V_{-8}$ .

Por tanto,

$$B = \left\{ \frac{1}{\sqrt{10}}(3, -1), \frac{1}{\sqrt{10}}(1, 3) \right\}$$

es base ortonormal de  $(\mathbb{R}^2, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ , y la forma de Sylvester  $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$  de  $C_0$  se alcanza en la base ortogonal de  $(\mathbb{R}^2, \langle \cdot, \cdot \rangle)$

$$B_1 = \left\{ \frac{1}{\sqrt{2}\sqrt{10}}(3, -1), \frac{1}{\sqrt{8}\sqrt{10}}(1, 3) \right\} = \left\{ \frac{1}{2\sqrt{5}}(3, -1), \frac{1}{4\sqrt{5}}(1, 3) \right\}.$$

A continuación elegimos un sistema de referencia en  $\mathbb{R}^2$  con  $B_1$  como base de direcciones, por simplicidad tomaremos  $\mathcal{R}_1 = \{(0, 0), B_1\}$ , y calcularemos una matriz  $\hat{C}_1$  de  $H$  en  $\mathcal{R}_1$ . Evidentemente el núcleo cuadrático  $C_1$  de  $\hat{C}_1$  será la anterior forma de Sylvester de  $C_0$ . En efecto, sabemos que

$$\hat{C}_1 := M(\text{Id}_{\mathbb{R}^2}, \mathcal{R}_1, \mathcal{R}_0)^t \cdot \hat{C}_0 \cdot M(\text{Id}_{\mathbb{R}^2}, \mathcal{R}_1, \mathcal{R}_0) \in M_{\mathcal{R}_1}(H),$$

y como

$$M(\text{Id}_{\mathbb{R}^2}, \mathcal{R}_1, \mathcal{R}_0) = \left( \begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & \frac{3}{2\sqrt{5}} & \frac{1}{4\sqrt{5}} \\ 0 & -\frac{1}{2\sqrt{5}} & \frac{3}{4\sqrt{5}} \end{array} \right)$$

un cálculo inmediato nos da que

$$\hat{C}_1 = \left( \begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & \frac{3}{2\sqrt{5}} & -\frac{1}{2\sqrt{5}} \\ 0 & \frac{1}{4\sqrt{5}} & \frac{3}{4\sqrt{5}} \end{array} \right) \cdot \left( \begin{array}{c|cc} 9 & 5 & 1 \\ \hline 5 & 1 & -3 \\ 1 & -3 & -7 \end{array} \right) \cdot \left( \begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & \frac{3}{2\sqrt{5}} & \frac{1}{4\sqrt{5}} \\ 0 & -\frac{1}{2\sqrt{5}} & \frac{3}{4\sqrt{5}} \end{array} \right) = \left( \begin{array}{c|cc} 9 & \frac{7}{\sqrt{5}} & \frac{2}{\sqrt{5}} \\ \hline \frac{7}{\sqrt{5}} & 1 & 0 \\ \frac{2}{\sqrt{5}} & 0 & -1 \end{array} \right).$$

Si  $p_{\mathcal{R}_1} = (x_1, y_1)$  representan las coordenadas en  $\mathcal{R}_1$  de los puntos de los puntos  $p \in \mathbb{R}^2$ , lo anterior significa que  $H$  viene representada en  $\mathcal{R}_1$  por los ceros del polinomio

$$x_1^2 - y_1^2 + 14/\sqrt{5}x_1 + 4/\sqrt{5}y_1 + 9 = 0,$$

que tras completar cuadrados queda

$$(x_1 + 7/\sqrt{5})^2 - (y_1 - 2/\sqrt{5})^2 = 0.$$

Las ecuaciones analíticas

$$x_2 = x_1 + 7/\sqrt{5}, \quad y_2 = y_1 - 2/\sqrt{5}$$

definen un cambio de  $\mathcal{R}_1$  a un nuevo sistema de referencia  $\mathcal{R}_2$  con  $p_{\mathcal{R}_2} = (x_2, y_2)$  representando las coordenadas de los puntos  $p \in \mathbb{R}^2$  en  $\mathcal{R}_2$ . Claramente

$$x_2^2 - y_2^2 = 0$$

es la ecuación analítica de  $H$  en  $\mathcal{R}_2$ , y por tanto

$$\hat{C}_2 = \left( \begin{array}{c|cc} 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{array} \right) \in M_{\mathcal{R}_2}(H).$$

Si se quiere una determinación más explícita de  $\mathcal{R}_2$ , obsérvese que por definición (de las ecuaciones  $x_2 = x_1 + 7/\sqrt{5}$ ,  $y_2 = y_1 - 2/\sqrt{5}$ ) se deduce que

$$M(\text{Id}_{\mathbb{R}^2}, \mathcal{R}_1, \mathcal{R}_2) = \left( \begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ \hline 7/\sqrt{5} & 1 & 0 \\ -2/\sqrt{5} & 0 & 1 \end{array} \right),$$

de donde

$$M(\text{Id}_{\mathbb{R}^2}, \mathcal{R}_2, \mathcal{R}_1) = M(\text{Id}_{\mathbb{R}^2}, \mathcal{R}_1, \mathcal{R}_2)^{-1} = \left( \begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ \hline -\frac{7}{\sqrt{5}} & 1 & 0 \\ \frac{2}{\sqrt{5}} & 0 & 1 \end{array} \right)$$

Por tanto

$$M(\text{Id}_{\mathbb{R}^2}, \mathcal{R}_2, \mathcal{R}_0) = M(\text{Id}_{\mathbb{R}^2}, \mathcal{R}_1, \mathcal{R}_0) \cdot M(\text{Id}_{\mathbb{R}^2}, \mathcal{R}_2, \mathcal{R}_1) = \left( \begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & \frac{3}{2\sqrt{5}} & \frac{1}{4\sqrt{5}} \\ 0 & -\frac{1}{2\sqrt{5}} & \frac{3}{4\sqrt{5}} \end{array} \right) \cdot \left( \begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ \hline -\frac{7}{\sqrt{5}} & 1 & 0 \\ \frac{2}{\sqrt{5}} & 0 & 1 \end{array} \right),$$

de donde calculando

$$M(\text{Id}_{\mathbb{R}^2}, \mathcal{R}_2, \mathcal{R}_0) = \left( \begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ \hline -2 & \frac{3}{2\sqrt{5}} & \frac{1}{4\sqrt{5}} \\ 1 & -\frac{1}{2\sqrt{5}} & \frac{3}{4\sqrt{5}} \end{array} \right),$$

y esto determina el sistema de referencia  $\mathcal{R}_2$  que resuelve el ejercicio.

Para la segunda parte del ejercicio, observemos que de lo anterior se sigue

$$\hat{C}_2 = M(\text{Id}_{\mathbb{R}^2}, \mathcal{R}_2, \mathcal{R}_0)^t \cdot \hat{C}_0 \cdot M(\text{Id}_{\mathbb{R}^2}, \mathcal{R}_2, \mathcal{R}_0) = M_{\mathcal{R}_2}(H) = \left( \begin{array}{c|cc} 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{array} \right).$$

Por otra parte, para toda afinidad  $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  sabemos que

$$M_{\mathcal{R}_0}(f(H)) = M(f^{-1}, \mathcal{R}_0)^t \cdot M_{\mathcal{R}_0}(H) \cdot M(f^{-1}, \mathcal{R}_0),$$

esto es,

$$M(f^{-1}, \mathcal{R}_0)^t \cdot \hat{C}_0 \cdot M(f^{-1}, \mathcal{R}_0) \in M_{\mathcal{R}_0}(f(H)).$$

Si elegimos la única  $f$  tal que

$$M(f, \mathcal{R}_0)^{-1} = M(f^{-1}, \mathcal{R}_0) = M(\text{Id}_{\mathbb{R}^2}, \mathcal{R}_2, \mathcal{R}_0) = \left( \begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ -2 & \frac{3}{2\sqrt{5}} & \frac{1}{4\sqrt{5}} \\ 1 & -\frac{1}{2\sqrt{5}} & \frac{3}{4\sqrt{5}} \end{array} \right),$$

o calculando

$$M(f, \mathcal{R}_0) = M(\text{Id}_{\mathbb{R}^2}, \mathcal{R}_2, \mathcal{R}_0)^{-1} = \left( \begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ -2 & \frac{3}{2\sqrt{5}} & \frac{1}{4\sqrt{5}} \\ 1 & -\frac{1}{2\sqrt{5}} & \frac{3}{4\sqrt{5}} \end{array} \right)^{-1} = \left( \begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ \frac{7}{\sqrt{5}} & \frac{3}{\sqrt{5}} & -\frac{1}{\sqrt{5}} \\ -\frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{6}{\sqrt{5}} \end{array} \right),$$

se tiene que

$$\begin{aligned} & M(f^{-1}, \mathcal{R}_0)^t \cdot \hat{C}_0 \cdot M(f^{-1}, \mathcal{R}_0) = \\ & = M(\text{Id}_{\mathbb{R}^2}, \mathcal{R}_2, \mathcal{R}_0)^t \cdot \hat{C}_0 \cdot M(\text{Id}_{\mathbb{R}^2}, \mathcal{R}_2, \mathcal{R}_0) = \hat{C}_2 = \left( \begin{array}{c|cc} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{array} \right) \in M_{\mathcal{R}_0}(f(H)), \end{aligned}$$

lo que acaba el ejercicio. ■

### Ejercicio 4.28 Clasifica la cónica

$$H = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : -39 - 18x + 9x^2 + 12xy + 8y + 4y^2 = 0\}$$

y encuentra:

- Un sistema de referencia en el que adopten su ecuación reducida.
- Un isomorfismo afín de  $\mathbb{R}^2$  que las lleve a su ecuación reducida.

SOLUCIÓN: Es claro que

$$\hat{C}_0 = \left( \begin{array}{c|cc} -39 & -9 & 4 \\ -9 & 9 & 6 \\ 4 & 6 & 4 \end{array} \right) \in M_{\mathcal{R}_0}(H)$$

con núcleo cuadrático asociado

$$C_0 = \left( \begin{array}{cc} 9 & 6 \\ 6 & 4 \end{array} \right) \in N_{\mathcal{R}_0}(H),$$

donde  $\mathcal{R}_0$  es el sistema de referencia usual de  $\mathbb{R}^2$ . De aquí que  $R_H = r_H + 2 = 3$  y estamos en el caso (III) (el valor de  $s_H$  y  $S_H$  en este caso es irrelevante para la discusión porque en la tabla de las cónicas reducidas sólo hay una con  $R_H = r_H + 2 = 3$ , ese fenómeno no ocurrirá e dimensiones superiores). Por tanto la forma reducida de  $H$  es

$$\left( \begin{array}{c|cc} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

y  $H$  es una parábola.

El polinomio característico  $p(t)$  de la matriz  $C_0$  viene dado por

$$p(t) = \det \begin{pmatrix} 9-t & 6 \\ 6 & 4-t \end{pmatrix} = -13t + t^2 = t(t-13),$$

de donde  $C_0$  tiene por valores propios a 0, 13 con subespacios propios asociados

$$V_{13} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \begin{pmatrix} -4 & 6 \\ 6 & -9 \end{pmatrix} \cdot (x, y)^t = (0, 0)^t\} = L(\{(3, 2)\})$$

y

$$V_0 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \begin{pmatrix} 9 & 6 \\ 6 & 4 \end{pmatrix} \cdot (x, y)^t = (0, 0)^t\} = L(\{(2, -3)\}).$$

Bases ortonormales de los subespacios propios se generan trivialmente:

- $\{\frac{1}{\sqrt{13}}(3, 2)\}$  es base ortonormal de  $V_{13}$ .
- $\{\frac{1}{\sqrt{13}}(2, -3)\}$  es base ortonormal de  $V_0$ .

Por tanto,

$$B = \left\{ \frac{1}{\sqrt{13}}(3, 2), \frac{1}{\sqrt{13}}(2, -3) \right\}$$

es base ortonormal de  $(\mathbb{R}^2, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ , y la forma de Sylvester  $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$  de  $C_0$  se alcanza en la base ortogonal de  $(\mathbb{R}^2, \langle \cdot, \cdot \rangle)$

$$B_1 = \left\{ \frac{1}{\sqrt{13}} \frac{1}{\sqrt{13}}(3, 2), (2, -3) \right\} = \left\{ \frac{1}{13}(3, 2), (2, -3) \right\};$$

Nótese la irrelevancia del factor de proporcionalidad en el vector de la base de  $V_0$ , por eso lo hemos elegido con la expresión más simple.

Si denotamos  $\mathcal{R}_1 = \{(0, 0), B_1\}$  sabemos que

$$M(\text{Id}_{\mathbb{R}^2}, \mathcal{R}_1, \mathcal{R}_0)^t \cdot \hat{C}_0 \cdot M(\text{Id}_{\mathbb{R}^2}, \mathcal{R}_1, \mathcal{R}_0) \in M_{\mathcal{R}_1}(H),$$

y como

$$M(\text{Id}_{\mathbb{R}^2}, \mathcal{R}_1, \mathcal{R}_0) = \left( \begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{3}{13} & 2 \\ 0 & \frac{2}{13} & -3 \end{array} \right)$$

un cálculo inmediato nos da que

$$\left( \begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{3}{13} & 2 \\ 0 & \frac{2}{13} & -3 \end{array} \right) \cdot \left( \begin{array}{c|cc} -39 & -9 & 4 \\ -9 & 9 & 6 \\ 4 & 6 & 4 \end{array} \right) \cdot \left( \begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{3}{13} & 2 \\ 0 & \frac{2}{13} & -3 \end{array} \right) = \left( \begin{array}{c|cc} -39 & -\frac{19}{13} & -30 \\ -\frac{19}{13} & 1 & 0 \\ -30 & 0 & 0 \end{array} \right) \in M_{\mathcal{R}_1}(H).$$

Si  $p_{\mathcal{R}_1} = (x_1, y_1)$  representan las coordenadas en  $\mathcal{R}_1$  de los puntos de los puntos  $p \in \mathbb{R}^2$ , lo anterior significa que  $H$  viene representada en  $\mathcal{R}_1$  por los ceros del polinomio

$$x_1^2 - \frac{38}{13}x_1 - 60y_1 - 39 = 0,$$

esto es

$$(x_1 - \frac{19}{13})^2 - 60y_1 - \frac{6952}{169} = 0.$$

Las ecuaciones analíticas

$$x_2 = x_1 - \frac{19}{13}, \quad y_2 = -30y_1 - \frac{3476}{169}$$

definen un cambio de  $\mathcal{R}_1$  a un nuevo sistema de referencia  $\mathcal{R}_2$  con  $p_{\mathcal{R}_2} = (x_2, y_2)$  representando las coordenadas de los puntos  $p \in \mathbb{R}^2$  en  $\mathcal{R}_2$ . Claramente

$$x_2^2 + 2y_2 = 0$$

es la ecuación analítica de  $H$  en  $\mathcal{R}_2$ , y por tanto

$$\left( \begin{array}{c|cc} 0 & 0 & 1 \\ \hline 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{array} \right) \in M_{\mathcal{R}_2}(H).$$

Si se quiere una determinación más explícita de  $\mathcal{R}_2$ , obsérvese que por definición (de las ecuaciones  $x_2 = x_1 - \frac{19}{13}$ ,  $y_2 = -30y_1 - \frac{3476}{169}$ ) se deduce que

$$M(\text{Id}_{\mathbb{R}^2}, \mathcal{R}_1, \mathcal{R}_2) = \left( \begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ \hline -\frac{19}{13} & 1 & 0 \\ -\frac{3476}{169} & 0 & -30 \end{array} \right),$$

de donde

$$M(\text{Id}_{\mathbb{R}^2}, \mathcal{R}_2, \mathcal{R}_1) = M(\text{Id}_{\mathbb{R}^2}, \mathcal{R}_1, \mathcal{R}_2)^{-1} = \left( \begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ \hline \frac{19}{13} & 1 & 0 \\ -\frac{1738}{2535} & 0 & -\frac{1}{30} \end{array} \right)$$

Por tanto

$$M(\text{Id}_{\mathbb{R}^2}, \mathcal{R}_2, \mathcal{R}_0) = M(\text{Id}_{\mathbb{R}^2}, \mathcal{R}_1, \mathcal{R}_0) \cdot M(\text{Id}_{\mathbb{R}^2}, \mathcal{R}_2, \mathcal{R}_1) = \\ \left( \begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & \frac{3}{13} & 2 \\ 0 & \frac{2}{13} & -3 \end{array} \right) \cdot \left( \begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ \hline -\frac{19}{13} & 1 & 0 \\ -\frac{1738}{2535} & 0 & -\frac{1}{30} \end{array} \right) = \left( \begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ \hline -\frac{2621}{2535} & \frac{3}{13} & -\frac{1}{15} \\ \frac{1928}{845} & \frac{2}{13} & \frac{1}{10} \end{array} \right),$$

y esto determina el sistema de referencia  $\mathcal{R}_2$  que resuelve el ejercicio.

Para la segunda parte del ejercicio, observemos que de lo anterior se sigue

$$M(\text{Id}_{\mathbb{R}^2}, \mathcal{R}_2, \mathcal{R}_0)^t \cdot \hat{C}_0 \cdot M(\text{Id}_{\mathbb{R}^2}, \mathcal{R}_2, \mathcal{R}_0) = \left( \begin{array}{c|cc} 0 & 0 & 1 \\ \hline 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{array} \right) \in M_{\mathcal{R}_2}(H).$$

Como en el ejercicio anterior, toda afinidad  $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  satisface

$$M_{\mathcal{R}_0}(f(H)) = M(f^{-1}, \mathcal{R}_0)^t \cdot M_{\mathcal{R}_0}(H) \cdot M(f^{-1}, \mathcal{R}_0),$$

o equivalentemente

$$M(f^{-1}, \mathcal{R}_0)^t \cdot \hat{C}_0 \cdot M(f^{-1}, \mathcal{R}_0) \in M_{\mathcal{R}_0}(f(H)).$$

Bastará con elegir la única  $f$  tal que

$$M(f, \mathcal{R}_0)^{-1} = M(f^{-1}, \mathcal{R}_0) = M(\text{Id}_{\mathbb{R}^2}, \mathcal{R}_2, \mathcal{R}_0) = \left( \begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ \hline -\frac{2621}{2535} & \frac{3}{13} & -\frac{1}{15} \\ \frac{1928}{845} & \frac{2}{13} & \frac{1}{10} \end{array} \right),$$

esto es

$$M(f, \mathcal{R}_0) = M(\text{Id}_{\mathbb{R}^2}, \mathcal{R}_2, \mathcal{R}_0)^{-1} = \left( \begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ \hline -\frac{2621}{2535} & \frac{3}{13} & -\frac{1}{15} \\ \frac{1928}{845} & \frac{2}{13} & \frac{1}{10} \end{array} \right)^{-1} = \left( \begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ \hline -\frac{19}{13} & 3 & 2 \\ -\frac{3476}{169} & -\frac{60}{13} & \frac{90}{13} \end{array} \right).$$

**Ejercicio 4.29** Clasificar las siguientes cónicas:

$$(a) \quad 2x^2 - y^2 + 4xy + 6x - 2y + 1 = 0.$$

$$(b) \quad x^2 + y^2 + 2xy + 2x + 2y = 0.$$

$$(c) \quad 4x^2 + 2y^2 - 2xy + x - 3y - 3 = 0.$$

$$(d) \quad -x^2 + xy - \sqrt{3}x + \sqrt{3}y = 0.$$

SOLUCIÓN: Comencemos con la cónica  $H$  en (a) definida por

$$2x^2 - y^2 + 4xy + 6x - 2y + 1 = 0.$$

En el sistema de referencia usual  $\mathcal{R}_0$  tenemos

$$\hat{C}_0 = \left( \begin{array}{c|cc} 1 & 3 & -1 \\ \hline 3 & 2 & 2 \\ -1 & 2 & -1 \end{array} \right) \in M_{\mathcal{R}_0}(H)$$

con núcleo simétrico asociado

$$C_0 = \left( \begin{array}{cc} 2 & 2 \\ 2 & -1 \end{array} \right) \in N_{\mathcal{R}_0}(H).$$

De aquí que  $R_H = r_H + 1 = 3$  y estamos en el caso (II).

El polinomio característico  $p(t)$  de la matriz  $C_0$  viene dado por

$$p(t) = \det \left( \begin{array}{cc} 2-t & 2 \\ 2 & -1-t \end{array} \right) = -6 - t + t^2 = (-3+t)(2+t),$$

de donde  $C_0$  tiene por valores propios a  $3 > 0, -2 < 0, s = t = 1$  y  $s_H = 0$  (esa información también se deduce de la regla de Descartes).

Análogamente el polinomio característico  $\hat{p}(t)$  de la matriz  $\hat{C}_0$  viene dado por

$$\hat{p}(t) = \det \left( \begin{array}{ccc} 1-t & 3 & -1 \\ 3 & 2-t & 2 \\ -1 & 2 & -1-t \end{array} \right) = -11 + 15t + 2t^2 - t^3.$$

La regla de Descartes nos dice que  $\hat{p}(t)$  tiene dos raíces positivas y una negativa. Por tanto  $S_H = s_H + 1 = 1$  y la forma reducida de  $H$  es

$$\left( \begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{array} \right),$$

esto es,  $H$  es una hipérbola afín.

Estudiemos la cónica  $H$  en (b) definida por

$$x^2 + y^2 + 2xy + 2x + 2y = 0.$$

En el sistema de referencia usual  $\mathcal{R}_0$  tenemos que

$$\hat{C}_0 = \left( \begin{array}{c|cc} 0 & 1 & 1 \\ \hline 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{array} \right) \in M_{\mathcal{R}_0}(H)$$

con núcleo simétrico asociado

$$C_0 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \in N_{\mathcal{R}_0}(H).$$

De aquí que  $R_H = r_H + 1 = 2$  y estamos en el caso (II).

El polinomio característico  $p(t)$  de la matriz  $C_0$  viene dado por

$$p(x) = \det \begin{pmatrix} 1-t & 1 \\ 1 & 1-t \end{pmatrix} = -2t + t^2 = t(t-2),$$

de donde  $C_0$  tiene por valores propios a  $0, 2 > 0$  y  $s_H = 1$  (esa información también se deduce de la regla de Descartes).

Análogamente el polinomio característico  $\hat{p}(t)$  de la matriz  $\hat{C}_0$  viene dado por

$$\hat{p}(t) = \det \begin{pmatrix} -t & 1 & 1 \\ 1 & 1-t & 1 \\ 1 & 1 & 1-t \end{pmatrix} = 2t + 2t^2 - t^3.$$

La regla de Descartes nos dice que  $\hat{p}(t)$  tiene una raíz positiva y una negativa. Por tanto  $S_H = s_H - 1 = 0$ . Por tanto la forma reducida canónica de  $H$  es

$$\left( \begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{array} \right),$$

esto es,  $H$  es un par de rectas paralelas.

Estudiemos la cónica  $H$  en (c) definida por

$$4x^2 + 2y^2 - 2xy + x - 3y - 3 = 0.$$

En el sistema de referencia usual  $\mathcal{R}_0$  tenemos

$$\hat{C}_0 = \left( \begin{array}{c|cc} -3 & 1/2 & -3/2 \\ \hline 1/2 & 4 & -1 \\ -3/2 & -1 & 2 \end{array} \right) \in M_{\mathcal{R}_0}(H)$$

con núcleo cuadrático asociado

$$C_0 = \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \in N_{\mathcal{R}_0}(H).$$

De aquí que  $R_H = r_H + 1 = 3$  y estamos en el caso (II).

El polinomio característico  $p(t)$  de la matriz  $C_0$  viene dado por

$$p(t) = \det \begin{pmatrix} 4-t & -1 \\ -1 & 2-t \end{pmatrix} = 7 - 6t + t^2,$$

de donde por la regla de Descartes  $C_0$  tiene dos raíces positivas y  $s_H = 2$ .

Análogamente el polinomio característico  $\hat{p}(t)$  de la matriz  $\hat{C}_0$  viene dado por

$$\hat{p}(t) = \det \begin{pmatrix} -3-t & 1/2 & -3/2 \\ 1/2 & 4-t & -1 \\ -3/2 & -1 & 2-t \end{pmatrix} = -29 + \frac{27}{2}t + 3t^2 - t^3.$$

La regla de Descartes nos dice que  $\hat{p}(t)$  tiene dos raíces positivas y una negativa y por tanto  $S_H = s_H - 1 = 1$ . La forma reducida de  $H$  es por tanto

$$\left( \begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{array} \right),$$

esto es,  $H$  es una elipse afín.

Estudiemos la cónica  $H$  en (d) definida por

$$-x^2 + xy - \sqrt{3}x + \sqrt{3}y.$$

En el sistema de referencia usual  $\mathcal{R}_0$  tenemos

$$\hat{C}_0 = \left( \begin{array}{c|cc} 0 & -\sqrt{3}/2 & \sqrt{3}/2 \\ \hline -\sqrt{3}/2 & -1 & -1/2 \\ \sqrt{3}/2 & -1/2 & 0 \end{array} \right) \in M_{\mathcal{R}_0}(H)$$

co núcleo cuadrático asociado

$$C_0 = \left( \begin{array}{cc} -1 & -1/2 \\ -1/2 & 0 \end{array} \right) \in N_{\mathcal{R}_0}(H).$$

De aquí que  $R_H = r_H + 1 = 3$  y estamos en el caso (II).

El polinomio característico  $p(t)$  de la matriz  $C_0$  viene dado por

$$p(x) = \det \left( \begin{array}{cc} -1-t & -1/2 \\ -1/2 & -t \end{array} \right) = -\frac{1}{4} + t + t^2,$$

de donde por la regla de Descartes  $C_0$  tiene una raíz positiva, otra negativa y  $s_H = 0$ .

Análogamente el polinomio característico  $\hat{p}(t)$  de la matriz  $\hat{C}_0$  viene dado por

$$\hat{p}(t) = \det \left( \begin{array}{ccc} -t & -\sqrt{3}/2 & \sqrt{3}/2 \\ -\sqrt{3}/2 & -1-t & -1/2 \\ \sqrt{3}/2 & -1/2 & -t \end{array} \right) = \frac{3}{2} + \frac{7}{4}t - t^2 - t^3.$$

La regla de Descartes nos dice que  $\hat{p}(t)$  tiene dos raíces negativas y una positiva y por tanto  $S_H = s_H + 1 = 1$ . La forma reducida de  $H$  es

$$\left( \begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{array} \right),$$

esto es,  $H$  es una hipérbola afín. ■

#### Ejercicio 4.30 Clasifica afínmente la cuádrica

$$H = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 : x_1^2 - 2x_1x_2 - 2x_1x_3 - 2x_1 + x_2^2 - 2x_2x_3 + x_3^2 + 2x_3 + 1 = 0\},$$

encontrando un sistema de referencia afín en el que venga representada por su matriz canónica.

SOLUCIÓN: La cuádrica viene representada por la siguiente matriz en la referencia usual  $\mathcal{R}_0$  de  $\mathbb{R}^3$

$$\hat{C} = \left( \begin{array}{c|ccc} 1 & -1 & 0 & 1 \\ \hline -1 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{array} \right)$$

con núcleo cuadrático

$$C = \left( \begin{array}{ccc} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{array} \right).$$

Un cálculo elemental del rango de ambas matrices nos dice que

$$R_H = \text{rang}(\hat{C}) = 3, \quad r_H = \text{rang}(C) = 3.$$

Por otra parte, los polinomios característicos de  $\hat{C}$  y  $C$  son respectivamente

$$p_{\hat{C}}(t) = 6t + t^2 - 4t^3 + t^4 = (-3+t)(-2+t)t(1+t), \quad p_C(t) = -4 + 3t^2 - t^3 = -(-2+t)^2(1+t).$$

Por tanto la regla de Descartes (o una observación directa) nos dice que

$$S_H = s_h = 1.$$

De la tabla de clasificación de las cuádricas concluimos que  $H$  tiene por matriz canónica

$$\hat{C}_0 = \left( \begin{array}{c|ccc} 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{array} \right),$$

se trata de un cono.

Para encontrar la referencia en la que adopta su matriz canónica procedemos como sigue. Primero calculamos los subespacios propios asociados a los valores propios  $-1, 2$  del núcleo cuadrático  $C$ .

Para el valor propio 1 queda

$$V_{-1} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : (C + I_3).(x, y, z)^t = (0, 0, 0)^t\} = L(\{(1, 1, 1)\}),$$

que admite a  $\{\frac{1}{3}(1, 1, 1)\}$  como base ortonormal. A esta base la multiplicamos por  $1/\sqrt{|-1|} = 1$  (quedará invariante), generando la base de  $V_{-1}$ :

$$B_{-1} = \left\{ \frac{1}{3}(1, 1, 1) \right\}$$

Para el valor propio 2 hacemos un cálculo similar.

$$V_2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : (C - 2I_3).(x, y, z)^t = (0, 0, 0)^t\} = L(\{(1, -1, 0), (1, 0, -1)\}),$$

que tiene a  $\left\{ \left( \frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}, 0 \right), \left( \frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}, -\sqrt{\frac{2}{3}} \right) \right\}$  como base ortonormal. A esta base la multiplicamos por  $1/\sqrt{|2|} = 1/\sqrt{2}$  generando la base de  $V_2$ :

$$B_2 = \left\{ \left( \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, 0 \right), \left( \frac{1}{2\sqrt{3}}, \frac{1}{2\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}} \right) \right\}.$$

En el sistema de referencia centrado en el origen con direcciones  $B_{-1} \cup B_2$ , a saber,

$$\mathcal{R}_1 = \left\{ (0, 0, 0), \left\{ \frac{1}{3}(1, 1, 1), \left( \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, 0 \right), \left( \frac{1}{2\sqrt{3}}, \frac{1}{2\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}} \right) \right\} \right\},$$

la matriz que representa a  $H$  es la siguiente

$$\begin{aligned} \hat{C}_1 &= M(\text{Id}_3, \mathcal{R}_1, \mathcal{R}_0)^t \cdot \hat{C} \cdot M(\text{Id}_3, \mathcal{R}_1, \mathcal{R}_0) = \\ &= \left( \begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2\sqrt{3}} & \frac{1}{2\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{3}} \end{array} \right) \cdot \left( \begin{array}{c|ccc} 1 & -1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{array} \right) \cdot \left( \begin{array}{c|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2\sqrt{3}} & \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2\sqrt{3}} & \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & -\frac{1}{\sqrt{3}} & \end{array} \right), \end{aligned}$$

esto es,

$$\hat{C}_1 = \left( \begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2} & 0 & 1 & 0 \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & 0 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

Si llamamos  $p_{\mathcal{R}_1} = (y_1, y_2, y_3)$  a las coordenadas en  $\mathcal{R}_1$  de los puntos  $p \in \mathbb{R}^3$ , la hipercuádrica se corresponde con los ceros del polinomio

$$1 - y_1^2 - y_2 + y_2^2 - \sqrt{3}y_3 + y_3^2 = 0,$$

o equivalentemente completando cuadrados

$$-y_1^2 + (y_2 - \frac{1}{2})^2 + (y_3 - \frac{\sqrt{3}}{2})^2 = 0.$$

Consideremos el único sistema de referencia  $\mathcal{R}_2$  en  $\mathbb{R}^3$  en el que las coordenadas  $p_{\mathcal{R}_2} = (z_1, z_2, z_3)$  de los puntos de  $p \in \mathbb{R}^3$  vengan determinadas por las ecuaciones analíticas

$$z_1 = y_2 - \frac{1}{2}, \quad z_2 = y_3 - \frac{\sqrt{3}}{2}, \quad z_3 = y_1,$$

esto es, el que satisface

$$M(\text{Id}_{\mathbb{R}^3}, \mathcal{R}_1, \mathcal{R}_2) = \left( \begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2} & 0 & 1 & 0 \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{array} \right).$$

La cuádrica  $H$  se corresponde ahora con los puntos de  $\mathbb{R}^3$  cuyas coordenadas en  $\mathcal{R}_2$  son ceros del polinomio

$$z_1^2 + z_2^2 - z_3^2 = 0,$$

y por tanto  $H$  viene representada en  $\mathcal{R}_2$  por la matriz canónica  $\hat{C}_0$ . Esto concluye el ejercicio.

Si se desea expresar  $\mathcal{R}_2$  respecto a la referencia  $\mathcal{R}_0$  basta con usar la fórmula

$$\begin{aligned} M(\text{Id}_{\mathbb{R}^3}, \mathcal{R}_2, \mathcal{R}_0) &= M(\text{Id}_{\mathbb{R}^3}, \mathcal{R}_1, \mathcal{R}_0) \cdot M(\text{Id}_{\mathbb{R}^3}, \mathcal{R}_2, \mathcal{R}_1) = M(\text{Id}_{\mathbb{R}^3}, \mathcal{R}_1, \mathcal{R}_0) \cdot M(\text{Id}_{\mathbb{R}^3}, \mathcal{R}_1, \mathcal{R}_2)^{-1} = \\ &= \left( \begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2\sqrt{3}} \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2\sqrt{3}} \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & -\frac{1}{\sqrt{3}} \end{array} \right) \cdot \left( \begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2} & 0 & 1 & 0 \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{array} \right)^{-1} = \left( \begin{array}{c|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \\ 0 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \\ -\frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \end{array} \right). \end{aligned}$$

**Ejercicio 4.31** Para la cuádrica en  $\mathbb{R}^3$  dada por

$$2xy + 2xz + 2yz - 6x - 6y - 4z + 9 = 0,$$

determinar una sistema de referencia y un isomorfismo afín de  $\mathbb{R}^3$  que la lleve a su ecuación reducida.

SOLUCIÓN: Es claro que

$$\hat{C}_0 = \left( \begin{array}{c|ccc} 9 & -3 & -3 & -2 \\ -3 & 0 & 1 & 1 \\ -3 & 1 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 1 & 0 \end{array} \right) \in M_{\mathcal{R}_0}(H)$$

con núcleo cuadrático asociado

$$C_0 = \left( \begin{array}{ccc} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{array} \right) \in N_{\mathcal{R}_0}(H),$$

donde  $\mathcal{R}_0$  es el sistema de referencia usual de  $\mathbb{R}^3$ . De aquí que  $R_H = r_H + 1 = 4$  y estamos en el caso (II). El polinomio característico  $p(t)$  de la matriz  $C_0$  viene dado por

$$p(t) = \det(C_0 - tI_3) = 2 + 3t - t^3 = -(-2 + t)(1 + t)^2$$

de donde  $C_0$  tiene por valores propios a  $-1, -1 < 0, 2 > 0$  y  $s_H = 1$ . Análogamente el polinomio característico de  $\hat{C}_0$  queda

$$\hat{p}(t) = \det(\hat{C}_0 - tI_4) = -2 - 17t - 25t^2 - 9t^3 + t^4,$$

de donde por la regla de Descartes  $\hat{p}(t)$  tiene una raíz  $> 0$  y tres raíces  $< 0$ , y de aquí que  $S_H = 2$ . Por tanto la forma reducida o canónica de  $H$  es

$$\left( \begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{array} \right)$$

y  $H$  es un hiperboloide de dos hojas.

Para encontrar el sistema de referencia en el que  $H$  adopta su forma canónica, primero lo que hacemos es cambiar  $\hat{C}_0$  por su opuesta, e igualmente con  $C_0$ , para así lograr que las formas de Sylvester de éstas matrices se correspondan con las asociadas a la forma canónica indicada. Renombraremos a las opuestas con la misma notación:

$$\hat{C}_0 = \left( \begin{array}{c|ccc} -9 & 3 & 3 & 2 \\ 3 & 0 & -1 & -1 \\ 3 & -1 & 0 & -1 \\ 2 & -1 & -1 & 0 \end{array} \right) \in M_{\mathcal{R}_0}(H), \quad C_0 = \left( \begin{array}{ccc} 0 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & 0 \end{array} \right) \in N_{\mathcal{R}_0}(H).$$

Ahora  $C_0$  tiene por valores propios  $1 > 0$  doble y  $-2 < 0$  simple, y el polinomio característico de  $\hat{C}_0$  tiene una raíz  $< 0$  y tres raíces  $> 0$ .

Observemos que los subespacios propios de  $C_0$  para los valores propios  $1, -2$  son:

$$V_1 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \left( \begin{array}{ccc} -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 \end{array} \right) \cdot (x, y, z)^t = (0, 0, 0)^t\} = L(\{(1, -1, 0), (-1, 1, 0)\})$$

y

$$V_{-2} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \cdot (x, y, z)^t = (0, 0, 0)^t\} = L(\{(1, 1, 1)\}).$$

Bases ortonormales de los subespacios propios se generan trivialmente:

- $\{\frac{1}{\sqrt{2}}(1, -1, 0), \frac{1}{\sqrt{6}}(1, 1, -2)\}$  es base ortonormal de  $V_1$ .
- $\{\frac{1}{\sqrt{3}}(1, 1, 1)\}$  es base ortonormal de  $V_{-2}$ .

Por tanto,

$$B = \left\{ \frac{1}{\sqrt{2}}(1, -1, 0), \frac{1}{\sqrt{6}}(1, 1, -2), \frac{1}{\sqrt{3}}(1, 1, 1) \right\}$$

es base ortonormal de  $(\mathbb{R}^3, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ , y la forma de Sylvester  $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$  de  $C_0$  se alcanza

en la base ortogonal de  $(\mathbb{R}^3, \langle \cdot, \cdot \rangle)$

$$B_1 = \left\{ \frac{1}{\sqrt{2}}(1, -1, 0), \frac{1}{\sqrt{6}}(1, 1, -2), \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{1}{\sqrt{3}}(1, 1, 1) \right\} = \left\{ \frac{1}{\sqrt{2}}(1, -1, 0), \frac{1}{\sqrt{6}}(1, 1, -2), \frac{1}{\sqrt{6}}(1, 1, 1) \right\}.$$

Si denotamos  $\mathcal{R}_1 = \{(0, 0, 0), B_1\}$  sabemos que

$$\hat{C}_1 := M(\text{Id}_{\mathbb{R}^2}, \mathcal{R}_1, \mathcal{R}_0)^t \cdot \hat{C}_0 \cdot M(\text{Id}_{\mathbb{R}^2}, \mathcal{R}_1, \mathcal{R}_0) \in M_{\mathcal{R}_1}(H),$$

y como

$$M(\text{Id}_{\mathbb{R}^3}, \mathcal{R}_1, \mathcal{R}_0) = \left( \begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ 0 & 0 & -\sqrt{\frac{2}{3}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \end{array} \right)$$

un cálculo inmediato nos da que

$$\hat{C}_1 = \left( \begin{array}{c|ccc} -9 & 0 & \sqrt{\frac{2}{3}} & 4\sqrt{\frac{2}{3}} \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ \sqrt{\frac{2}{3}} & 0 & 1 & 0 \\ 4\sqrt{\frac{2}{3}} & 0 & 0 & -1 \end{array} \right)$$

Si  $p_{\mathcal{R}_1} = (x_1, y_1, z_1)$  representan las coordenadas en  $\mathcal{R}_1$  de los puntos de los puntos  $p \in \mathbb{R}^3$ , lo anterior significa que  $H$  viene representada en  $\mathcal{R}_1$  por los ceros del polinomio

$$x_1^2 + y_1^2 - z_1^2 + 2\sqrt{\frac{2}{3}}y_1 + 8\sqrt{\frac{2}{3}}z_1 - 9 = 0,$$

esto es

$$x_1^2 + \left(y_1 + \sqrt{\frac{2}{3}}\right)^2 - \left(z_1 - 4\sqrt{\frac{2}{3}}\right)^2 + 1 = 0.$$

Las ecuaciones analíticas

$$x_2 = x_1, \quad y_2 = y_1 + \sqrt{\frac{2}{3}}, \quad z_2 = z_1 - 4\sqrt{\frac{2}{3}}$$

definen un cambio de  $\mathcal{R}_1$  a un nuevo sistema de referencia  $\mathcal{R}_2$  con  $p_{\mathcal{R}_2} = (x_2, y_2, z_2)$  representando las coordenadas de los puntos  $p \in \mathbb{R}^2$  en  $\mathcal{R}_2$ . Claramente

$$x_2^2 + y_2^2 - z_2^2 + 1 = 0$$

es la ecuación analítica de  $H$  en  $\mathcal{R}_2$ , y por tanto

$$\hat{C}_2 = \left( \begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{array} \right) \in M_{\mathcal{R}_2}(H).$$

Si se quiere una determinación más explícita de  $\mathcal{R}_2$ , obsérvese que por definición (de las ecuaciones  $x_2 = x_1$ ,  $y_2 = y_1 + \sqrt{\frac{2}{3}}$ ,  $z_2 = z_1 - 4\sqrt{\frac{2}{3}}$ ) se deduce que

$$M(\text{Id}_{\mathbb{R}^3}, \mathcal{R}_1, \mathcal{R}_2) = \left( \begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 1 & 0 & 0 \\ \sqrt{\frac{2}{3}} & 0 & 1 & 0 \\ -4\sqrt{\frac{2}{3}} & 0 & 0 & 1 \end{array} \right),$$

de donde

$$M(\text{Id}_{\mathbb{R}^2}, \mathcal{R}_2, \mathcal{R}_1) = M(\text{Id}_{\mathbb{R}^2}, \mathcal{R}_1, \mathcal{R}_2)^{-1} = \left( \begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\sqrt{\frac{2}{3}} & 0 & 1 & 0 \\ 4\sqrt{\frac{2}{3}} & 0 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

Por tanto

$$\begin{aligned} M(\text{Id}_{\mathbb{R}^2}, \mathcal{R}_2, \mathcal{R}_0) &= M(\text{Id}_{\mathbb{R}^2}, \mathcal{R}_1, \mathcal{R}_0) \cdot M(\text{Id}_{\mathbb{R}^2}, \mathcal{R}_2, \mathcal{R}_1) = \\ &= \left( \begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ 0 & 0 & -\sqrt{\frac{2}{3}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \end{array} \right) \cdot \left( \begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\sqrt{\frac{2}{3}} & 0 & 1 & 0 \\ 4\sqrt{\frac{2}{3}} & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) = \left( \begin{array}{cccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ 1 & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ 2 & 0 & -\sqrt{\frac{2}{3}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \end{array} \right) \end{aligned}$$

y esto determina el sistema de referencia  $\mathcal{R}_2$  que resuelve el ejercicio.

Para la segunda parte del ejercicio, observemos que de lo anterior se sigue

$$\hat{C}_2 = M(\text{Id}_{\mathbb{R}^2}, \mathcal{R}_2, \mathcal{R}_0)^t \cdot \hat{C}_0 \cdot M(\text{Id}_{\mathbb{R}^2}, \mathcal{R}_2, \mathcal{R}_0) = M_{\mathcal{R}_2}(H) = \left( \begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{array} \right).$$

Por otra parte, para toda afinidad  $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  sabemos que

$$M(f^{-1}, \mathcal{R}_0)^t \cdot \hat{C}_0 \cdot M(f^{-1}, \mathcal{R}_0) \in M_{\mathcal{R}_0}(f(H)).$$

Si elegimos la única  $f$  tal que

$$M(f, \mathcal{R}_0)^{-1} = M(f^{-1}, \mathcal{R}_0) = M(\text{Id}_{\mathbb{R}^3}, \mathcal{R}_2, \mathcal{R}_0) = \left( \begin{array}{cccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ 1 & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ 2 & 0 & -\sqrt{\frac{2}{3}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \end{array} \right),$$

esto es

$$M(f, \mathcal{R}_0) = M(\text{Id}_{\mathbb{R}^3}, \mathcal{R}_2, \mathcal{R}_0)^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ \sqrt{\frac{2}{3}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & -\sqrt{\frac{2}{3}} \\ -4\sqrt{\frac{2}{3}} & \sqrt{\frac{2}{3}} & \sqrt{\frac{2}{3}} & \sqrt{\frac{2}{3}} \end{pmatrix},$$

tendremos que

$$\begin{aligned} M(f^{-1}, \mathcal{R}_0)^t \cdot \hat{C}_0 \cdot M(f^{-1}, \mathcal{R}_0) &= \\ &= M(\text{Id}_{\mathbb{R}^3}, \mathcal{R}_2, \mathcal{R}_0)^t \cdot \hat{C}_0 \cdot M(\text{Id}_{\mathbb{R}^3}, \mathcal{R}_2, \mathcal{R}_0) = \hat{C}_2 = \left( \begin{array}{c|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{array} \right) \in M_{\mathcal{R}_0}(f(H)), \end{aligned}$$

lo que acaba el ejercicio. ■

**Ejercicio 4.32** Clasifica afínmente la cuádrica en  $\mathbb{R}^3$  dada por

$$2x^2 + 3y^2 + 2xy - 2yz + 2z + 2 = 0.$$

SOLUCIÓN: Es claro que

$$\hat{C}_0 = \left( \begin{array}{c|ccc} 2 & 0 & 0 & 1 \\ \hline 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & -1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \end{array} \right) \in M_{\mathcal{R}_0}(H)$$

con núcleo cuadrático asociado

$$C_0 = \left( \begin{array}{ccc} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{array} \right) \in N_{\mathcal{R}_0}(H),$$

donde  $\mathcal{R}_0$  es el sistema de referencia usual de  $\mathbb{R}^3$ . De aquí que  $R_H = r_H + 1 = 4$  y estamos en el caso (II). El polinomio característico  $p(x)$  de la matriz  $C_0$  viene dado por

$$p(t) = \det(C_0 - tI_3) = -2 - 4t + 5t^2 - t^3$$

de donde por la regla de Descartes  $C_0$  tiene dos valores propios  $> 0$  y uno  $< 0$ , por lo que  $s_H = 1$ . Análogamente el polinomio característico de  $\hat{C}_0$  queda

$$\hat{p}(t) = \det(\hat{C}_0 - tI_4) = -9 - t + 13t^2 - 7t^3 + t^4,$$

de donde por la regla de Descartes  $\hat{p}(t)$  tiene tres raíces  $> 0$  y una  $< 0$ , y de aquí que  $S_H = 2$ . Por tanto la forma reducida o canónica de  $H$  es

$$\left( \begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{array} \right)$$

y  $H$  es un hiperboloide de dos hojas. ■

**Ejercicio 4.33** Para la cuádrica en  $\mathbb{R}^3$  dada por

$$x^2 + y^2 + z^2 + 2xy - 2x - 2z + 1 = 0$$

determinar una sistema de referencia y un isomorfismo afín de  $\mathbb{R}^3$  que la lleve a su ecuación reducida.

SOLUCIÓN: Es claro que

$$\hat{C}_0 = \left( \begin{array}{c|ccc} 1 & -1 & 0 & -1 \\ \hline -1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \in M_{\mathcal{R}_0}(H)$$

con núcleo cuadrático asociado

$$C_0 = \left( \begin{array}{ccc} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \in N_{\mathcal{R}_0}(H),$$

donde  $\mathcal{R}_0$  es el sistema de referencia usual de  $\mathbb{R}^3$ . De aquí que  $R_H = r_H + 2 = 4$  y estamos en el caso (III). El polinomio característico  $p(t)$  de la matriz  $C_0$  viene dado por

$$p(t) = \det(C_0 - tI_3) = -2t + 3t^2 - t^3 = -(-2+t)(-1+t)t$$

de donde  $C_0$  tiene por valores propios a  $0, 1, 2 > 0$  y  $S_H = s_H = 2$ . Por tanto la forma reducida o canónica de  $H$  es

$$\left( \begin{array}{c|ccc} 0 & 0 & 0 & 1 \\ \hline 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

y  $H$  es un paraboloide elíptico.

Para encontrar el sistema de referencia en el que  $H$  adopta su forma canónica, observemos que los subespacios propios de  $C_0$  para los valores propios  $0, 1, 2$  son:

$$V_1 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \left( \begin{array}{ccc} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \cdot (x, y, z)^t = (0, 0, 0)^t\} = L(\{(0, 0, 1)\}),$$

$$V_2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \left( \begin{array}{ccc} -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{array} \right) \cdot (x, y, z)^t = (0, 0, 0)^t\} = L(\{(1, 1, 0)\}),$$

y

$$V_0 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \left( \begin{array}{ccc} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \cdot (x, y, z)^t = (0, 0, 0)^t\} = L(\{(1, -1, 0)\}).$$

Bases ortonormales de los subespacios propios se generan trivialmente:

- $\{(0, 0, 1)\}$  es base ortonormal de  $V_1$ .
- $\{\frac{1}{\sqrt{2}}(1, 1, 0)\}$  es base ortonormal de  $V_2$ .

- $V_0 = \{\frac{1}{\sqrt{2}}(1, -1, 0)\}$ .

Por tanto,

$$\{(0, 0, 1), \frac{1}{\sqrt{2}}(1, 1, 0), \frac{1}{\sqrt{2}}(1, -1, 0)\}$$

es base ortonormal de  $(\mathbb{R}^3, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ , y la forma de Sylvester  $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$  de  $C_0$  se alcanza en la base ortogonal de  $(\mathbb{R}^3, \langle \cdot, \cdot \rangle)$

$$B_1 = \{(0, 0, 1), \frac{1}{\sqrt{2}}\frac{1}{\sqrt{2}}(1, 1, 0), (1, -1, 0)\} = \{(0, 0, 1), \frac{1}{2}(1, 1, 0), (1, -1, 0)\}.$$

Nótese que el vector en  $B_1$  proveniente de una base de  $V_0$  es irrelevante, por eso hemos elegido el más simple para el cálculo.

Si denotamos  $\mathcal{R}_1 = \{(0, 0, 0), B_1\}$  sabemos que

$$\hat{C}_1 := M(\text{Id}_{\mathbb{R}^2}, \mathcal{R}_1, \mathcal{R}_0)^t \cdot \hat{C}_0 \cdot M(\text{Id}_{\mathbb{R}^2}, \mathcal{R}_1, \mathcal{R}_0) \in M_{\mathcal{R}_1}(H),$$

y como

$$M(\text{Id}_{\mathbb{R}^3}, \mathcal{R}_1, \mathcal{R}_0) = \left( \begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & \frac{1}{2} & 1 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

un cálculo inmediato nos da que

$$\hat{C}_1 = \left( \begin{array}{cccc} 1 & -1 & -\frac{1}{2} & -1 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2} & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

Si  $p_{\mathcal{R}_1} = (x_1, y_1, z_1)$  representan las coordenadas en  $\mathcal{R}_1$  de los puntos de los puntos  $p \in \mathbb{R}^3$ , lo anterior significa que  $H$  viene representada en  $\mathcal{R}_1$  por los ceros del polinomio

$$x_1^2 + y_1^2 - 2x_1 - y_1 - 2z_1 + 1 = 0,$$

esto es,

$$(x_1 - 1)^2 + (y_1 - \frac{1}{2})^2 - 2(z_1 + \frac{1}{8}) = 0$$

Las ecuaciones analíticas

$$x_2 = x_1 - 1, \quad y_2 = y_1 - \frac{1}{2}, \quad z_2 = -z_1 - \frac{1}{8}$$

definen un cambio de  $\mathcal{R}_1$  a un nuevo sistema de referencia  $\mathcal{R}_2$  con  $p_{\mathcal{R}_2} = (x_2, y_2, z_2)$  representando las coordenadas de los puntos  $p \in \mathbb{R}^3$  en  $\mathcal{R}_2$ . Claramente

$$x_2^2 + y_2^2 - 2z_2 = 0$$

es la ecuación analítica de  $H$  en  $\mathcal{R}_2$ , y por tanto

$$\hat{C}_2 = \left( \begin{array}{c|ccc} 0 & 0 & 0 & 1 \\ \hline 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \in M_{\mathcal{R}_2}(H).$$

Si se quiere una determinación más explícita de  $\mathcal{R}_2$ , obsérvese que por definición (de las ecuaciones  $x_2 = x_1 - 1$ ,  $y_2 = y_1 - \frac{1}{2}$ ,  $z_2 = -z_1 - \frac{1}{8}$ ) se deduce que

$$M(\text{Id}_{\mathbb{R}^3}, \mathcal{R}_1, \mathcal{R}_2) = \left( \begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline -1 & 1 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2} & 0 & 1 & 0 \\ -\frac{1}{8} & 0 & 0 & -1 \end{array} \right),$$

de donde

$$M(\text{Id}_{\mathbb{R}^2}, \mathcal{R}_2, \mathcal{R}_1) = M(\text{Id}_{\mathbb{R}^2}, \mathcal{R}_1, \mathcal{R}_2)^{-1} = \left( \begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 1 & 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & 1 & 0 \\ -\frac{1}{8} & 0 & 0 & -1 \end{array} \right).$$

Por tanto

$$\begin{aligned} M(\text{Id}_{\mathbb{R}^2}, \mathcal{R}_2, \mathcal{R}_0) &= M(\text{Id}_{\mathbb{R}^2}, \mathcal{R}_1, \mathcal{R}_0) \cdot M(\text{Id}_{\mathbb{R}^2}, \mathcal{R}_2, \mathcal{R}_1) = \\ &= \left( \begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & \frac{1}{2} & 1 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{array} \right) \cdot \left( \begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 1 & 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & 1 & 0 \\ -\frac{1}{8} & 0 & 0 & -1 \end{array} \right) = \left( \begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline -\frac{3}{8} & 0 & \frac{1}{2} & -1 \\ -\frac{1}{8} & 0 & \frac{1}{2} & 1 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \end{array} \right) \end{aligned}$$

y esto determina el sistema de referencia  $\mathcal{R}_2$  que resuelve el ejercicio.

Para la segunda parte del ejercicio, observemos que de lo anterior se sigue

$$\hat{C}_2 = M(\text{Id}_{\mathbb{R}^2}, \mathcal{R}_2, \mathcal{R}_0)^t \cdot \hat{C}_0 \cdot M(\text{Id}_{\mathbb{R}^2}, \mathcal{R}_2, \mathcal{R}_0) = M_{\mathcal{R}_2}(H) = \left( \begin{array}{c|cccc} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ \hline 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right).$$

Como para toda afinidad  $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  sabemos que

$$M(f^{-1}, \mathcal{R}_0)^t \cdot \hat{C}_0 \cdot M(f^{-1}, \mathcal{R}_0) \in M_{\mathcal{R}_0}(f(H)),$$

si elegimos la única  $f$  tal que

$$M(f, \mathcal{R}_0)^{-1} = M(f^{-1}, \mathcal{R}_0) = M(\text{Id}_{\mathbb{R}^3}, \mathcal{R}_2, \mathcal{R}_0) = \left( \begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline -\frac{3}{8} & 0 & \frac{1}{2} & -1 & 0 \\ -\frac{1}{8} & 0 & \frac{1}{2} & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right),$$

esto es

$$M(f, \mathcal{R}_0) = M(\text{Id}_{\mathbb{R}^3}, \mathcal{R}_2, \mathcal{R}_0)^{-1} = \left( \begin{array}{ccccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & 1 & 1 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{8} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \end{array} \right),$$

tendremos que

$$\begin{aligned} M(f^{-1}, \mathcal{R}_0)^t \cdot \hat{C}_0 \cdot M(f^{-1}, \mathcal{R}_0) &= \\ &= M(\text{Id}_{\mathbb{R}^3}, \mathcal{R}_2, \mathcal{R}_0)^t \cdot \hat{C}_0 \cdot M(\text{Id}_{\mathbb{R}^3}, \mathcal{R}_2, \mathcal{R}_0) = \hat{C}_2 = \left( \begin{array}{c|cccc} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ \hline 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \in M_{\mathcal{R}_0}(f(H)), \end{aligned}$$

lo que acaba el ejercicio. ■

**Ejercicio 4.34** Clasifica afínmente la cuádrica  $H$  del espacio afín  $\mathbb{R}^3$  que en el sistema de referencia usual  $\mathcal{R}_0$  viene definida por la ecuación

$$x^2 + y^2 + z^2 + xy + xz + yz + x + y + z + 1 = 0.$$

SOLUCIÓN: Es claro que

$$\hat{C}_0 = \left( \begin{array}{c|ccc} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \hline \frac{1}{2} & 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 1 & \frac{1}{2} \\ \hline \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 1 \end{array} \right) \in M_{\mathcal{R}_0}(H)$$

con núcleo cuadrático asociado

$$C_0 = \left( \begin{array}{ccc} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 1 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 1 \end{array} \right) \in N_{\mathcal{R}_0}(H),$$

donde  $\mathcal{R}_0$  es el sistema de referencia usual de  $\mathbb{R}^3$ . De aquí que  $R_H = r_H + 1 = 4$  y estamos en el caso (II). El polinomio característico  $p(t)$  de la matriz  $C_0$  viene dado por

$$p(t) = \det(C_0 - tI_3) = 1/2 - (9t)/4 + 3t^2 - t^3 = -\frac{1}{4}(-2 + t)(-1 + 2t)^2$$

de donde  $C_0$  tiene por valores propios  $2 > 0$ ,  $1/2$  doble y  $s_H = 3$ . Análogamente el polinomio característico  $\hat{p}(t)$  de  $\hat{C}_0$  viene dado por

$$\hat{p}(t) = \det(\hat{C}_0 - tI_4) = \frac{5}{16} - 2t + \frac{9}{2}t^2 - 4t^3 + t^4,$$

y la regla de Descartes nos dice que  $\hat{p}(t)$  tiene cuatro raíces positivas y  $S_H = 4$ .

Por tanto la forma reducida o canónica de  $H$  es

$$\left( \begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

y  $H$  es vacía. ■

**Ejercicio 4.35** Encontrar la ecuación reducida de la hipercuádrica en  $\mathbb{R}^4$  de ecuación:

$$2x^2 - y^2 + z^2 - w^2 + 2xz - 2yz + 2yw + 2x - 2y + 2w + 1 = 0.$$

SOLUCIÓN: Es claro que

$$\hat{C}_0 = \left( \begin{array}{c|cccc} 1 & 1 & -1 & 0 & 1 \\ \hline 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & -1 \end{array} \right) \in M_{\mathcal{R}_0}(H)$$

con núcleo cuadrático asociado

$$C_0 = \left( \begin{array}{cccc} 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \end{array} \right) \in N_{\mathcal{R}_0}(H),$$

donde  $\mathcal{R}_0$  es el sistema de referencia usual de  $\mathbb{R}^3$ . De aquí que  $R_H = r_H + 1 = 5$  y estamos en el caso (II). El polinomio característico  $p(t)$  de la matriz  $C_0$  viene dado por

$$p(t) = \det(C_0 - tI_3) = 2 + 3t - 6t^2 - t^3 + t^4$$

de donde por la regla de Descartes  $p(t)$  tiene dos raíces positivas y dos negativas, y por tanto  $s_H = 0$ . Análogamente el polinomio característico  $\hat{p}(t)$  de  $\hat{C}_0$  viene dado por

$$\hat{p}(t) = \det(\hat{C}_0 - tI_4) = 3 + t - 14t^2 + 8t^3 + 2t^4 - t^5,$$

y la regla de Descartes nos dice que  $\hat{p}(t)$  tiene dos raíces positivas y tres negativas, y cambiando  $\hat{C}_0$  por su opuesta, tres positivas y dos negativas. En cualquier caso  $S_H = 1$  y la forma reducida o canónica de  $H$  es

$$\left( \begin{array}{c|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{array} \right).$$

■

**Ejercicio 4.36** Demuestra los siguientes enunciados.

- (a) El lugar geométrico de los puntos del plano afín euclíadiano  $\mathbb{R}^2$  tales que la suma de las distancias a dos puntos fijos (llamados focos) es constante, es una elipse euclíadiana.
- (b) El lugar geométrico de los puntos del plano afín euclíadiano  $\mathbb{R}^2$  tales que el valor absoluto de la diferencia de sus distancias a dos puntos fijos (llamados focos) es constante, es una hipérbola euclíadiana.
- (c) El lugar geométrico de los puntos del plano afín euclíadiano  $\mathbb{R}^2$  que equidistan de una recta (llamada directriz) y de un punto exterior a la misma (llamado foco), es una parábola euclíadiana.

**SOLUCIÓN:** Discutamos (a). Tomemos  $F_1, F_2 \in \mathbb{R}^2$  dos puntos cualesquiera (podría ser  $F_1 = F_2$ ), consideremos

$$H = \{p \in \mathbb{R}^2 : d(p, F_1) + d(p, F_2) = 2b\}.$$

Como  $d(F_1, F_2) \leq d(p, F_1) + d(p, F_2)$ , la condición  $2b < d(F_1, F_2)$  implicaría que  $H = \emptyset$ . Para evitar este caso degenerado supondremos  $2b \geq d(F_1, F_2)$ , lo que como veremos más adelante implicará que  $H \neq \emptyset$ .

Sea  $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  cualquier movimiento rígido tal que

$$f(F_1) = (-a, 0) \in \mathbb{R}^2, \quad f(F_2) = (a, 0) \in \mathbb{R}^2,$$

donde  $2a = d(F_1, F_2) \leq 2b$ , esto es,  $a \leq b$ . Excluiremos el caso  $a = b$  por ser degenerado y supondremos  $a < b$ . Bastará con comprobar que  $f(H)$  es una elipse euclídea. En efecto, la ecuación

$$d((x, y), (-a, 0)) + d((x, y), (a, 0)) = 2b \iff \sqrt{(x+a)^2 + y^2} + \sqrt{(x-a)^2 + y^2} = 2b.$$

Operando

$$(x + a)^2 + y^2 = (\sqrt{(x - a)^2 + y^2} - 2b)^2,$$

y desarrollando y usando la ecuación original

$$b^2 - ax + b\sqrt{(a + x)^2 + y^2} = 0.$$

De aquí que  $b^2((a + x)^2 + y^2) = (b^2 - ax)^2$ , esto es,

$$1 - \frac{1}{b^2}x^2 - \frac{1}{b^2 - a^2}y^2 = 0,$$

lo que corresponde con una elipse euclíadiana toda vez que  $-\frac{1}{b^2 - a^2} > 0, -\frac{1}{b^2} < 0$ .

Discutamos (b). Tomemos  $F_1, F_2 \in \mathbb{R}^2$  dos puntos cualesquiera con  $F_1 \neq F_2$  (de otra forma el problema degenera). Consideremos

$$H = \{p \in \mathbb{R}^2 : |d(p, F_2) - d(p, F_1)| = 2b\}.$$

El caso  $b = 0$  se corresponde con que  $H$  sea la mediatrix del segmento  $[F_1, F_2]$ , caso que excluimos. Como  $d(F_1, p) \leq d(F_1, F_2) + d(F_2, p)$  y  $d(F_2, p) \leq d(F_2, F_1) + d(F_1, p)$ , deducimos que

$$2b = |d(p, F_2) - d(p, F_1)| \leq d(F_2, F_1)$$

Sea  $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  cualquier movimiento rígido tal que

$$f(F_1) = (0, -a) \in \mathbb{R}^2, \quad f(F_2) = (0, a) \in \mathbb{R}^2,$$

donde  $2a = d(F_1, F_2)$ . La anterior desigualdad nos da que

$$2b = |d(p, F_2) - d(p, F_1)| \leq 2a, \quad \text{esto es, } b \leq a.$$

Excluiremos el caso  $a = b$  por ser degenerado (generaría una recta doble), por lo que supondremos  $a < b$ . Bastará con comprobar que  $f(H)$  es una hipérbola euclídea. En efecto, la ecuación

$$|d((x, y), (0, a)) - d((x, y), (0, -a))| = 2b \iff |\sqrt{x^2 + (y - a)^2} - \sqrt{x^2 + (y + a)^2}| = 2b.$$

Suponiendo que

$$d((x, y), (0, a)) - d((x, y), (0, -a)) = 2b > 0$$

(a la misma ecuación se llegaría si  $d((x, y), (0, a)) - d((x, y), (0, -a)) = -2b < 0$ ) y operando

$$(y - a)^2 + x^2 = (\sqrt{(y + a)^2 + x^2} + 2b)^2,$$

y desarrollando y usando la ecuación original

$$-4b\sqrt{(a + y)^2 + x^2} - 4ay - 4b^2 = 0.$$

De aquí que  $b^2((a + y)^2 + x^2) = (b^2 + ay)^2$ , esto es,

$$1 + \frac{1}{a^2 - b^2}x^2 - \frac{1}{b^2}y^2 = 0,$$

lo que corresponde con una hipérbola euclíadiana toda vez que  $\frac{1}{a^2 - b^2} > 0, -\frac{1}{b^2} < 0$ . La dicotomía

$$d((x, y), (0, a)) - d((x, y), (0, -a)) = 2b > 0, \quad d((x, y), (0, a)) - d((x, y), (0, -a)) = -2b < 0$$

refleja analíticamente cada una de las dos ramas de la hipérbola. ■

Discutamos (c). Tomemos un punto  $F \in \mathbb{R}^2$  y una recta  $R \subset \mathbb{R}^2$ , y consideremos

$$H = \{p \in \mathbb{R}^2 : d(p, F) = d(p, R)\}.$$

Si  $p \in R$  es fácil ver que  $H$  es la recta ortogonal a  $R$  que pasa por  $p$ , caso degenerado. Supondremos pues que  $p \notin R$ .

Sea  $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  cualquier movimiento rígido tal que

$$f(F) = (0, -a) \in \mathbb{R}^2, \quad f(R) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y = a\}, \quad a > 0.$$

Tras esta isometría euclíadiana  $H$  se convierte en

$$H = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \sqrt{(a+y)^2 + x^2} = |y-a|\}.$$

Calculando,  $(x, y) \in H$  si y sólo si

$$(a+y)^2 + x^2 - (y-a)^2 = 0 \iff 2y + \frac{1}{2a}x^2 = 0,$$

lo que corresponde con una parábola euclíadiana.

**Ejercicio 4.37** Sea  $H$  una hipercuádrica en  $\mathbb{R}^n$  con matriz  $\hat{C}$  en el sistema de referencia usual  $\mathcal{R}_0$ . Diremos que  $H$  es invariante por homotecias lineales si para toda homotecia  $h_{O,r}$  con centro el origen  $O \in \mathbb{R}^n$  y razón  $r \neq 0$ ,

$$M(h_{O,r}^{-1}, \mathcal{R}_0)^t \cdot \hat{C} \cdot M(h_{O,r}^{-1}, \mathcal{R}_0) = \lambda \hat{C}$$

para algún  $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$  (dependiendo de  $r$ ); en particular,  $h_{O,r}(H) = H$  para todo  $r \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ . Demostrar que  $H$  cumple esta propiedad si y sólo si  $\hat{C} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & C \end{pmatrix}$ , donde  $C$  es simétrica y no nula. Mostrar algunos ejemplos de este tipo de cuádricas en  $\mathbb{R}^2$  y  $\mathbb{R}^3$ .

SOLUCIÓN: Escribamos  $\hat{C} = \begin{pmatrix} a & z^t \\ z & C \end{pmatrix}$ , y por tanto

$$H = \{x \in \mathbb{R}^n : x^t \cdot C \cdot x + 2\langle z, x \rangle + a = 0\}.$$

Supongamos que  $h_{0,r}(H) = H$  para todo  $r \neq 0$ . La condición

$$M(h_{O,r}^{-1}, \mathcal{R}_0)^t \cdot \hat{C} \cdot M(h_{O,r}^{-1}, \mathcal{R}_0) \in M_{\mathcal{R}_0}(H)$$

en nuestras hipótesis equivale a que

$$\begin{pmatrix} a & rz^t \\ rz & r^2C \end{pmatrix} \in M_{\mathcal{R}_0}(H) \quad \forall r \in \mathbb{R} \setminus \{0\},$$

esto es,

$$\begin{pmatrix} a & rz^t \\ rz & r^2C \end{pmatrix} \in \left\{ \lambda \hat{C} = \lambda \begin{pmatrix} a & z^t \\ z & C \end{pmatrix} : \lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \right\} \quad \forall r \in \mathbb{R} \setminus \{0\}.$$

Por tanto necesariamente  $a = 0$  y  $z = 0$ , y de aquí se sigue lo buscado.

Ejemplos en  $\mathbb{R}^2$  y  $\mathbb{R}^3$  son todos los del tipo (I). ■

**Ejercicio 4.38** Hacer la clasificación euclídea de la cónica en el plano euclidiano  $(\mathbb{R}^2, \langle \cdot, \cdot \rangle)$  dada por

$$2x^2 - y^2 + 4xy + 6x - 2y + 1 = 0.$$

Dar un sistema de referencia rectangular de  $(\mathbb{R}^2, \langle \cdot, \cdot \rangle)$  en el que adopte su forma reducida, y un movimiento rígido que la lleva a su forma reducida en el sistema de referencia rectangular usual  $\mathcal{R}_0$  de  $(\mathbb{R}^2, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ .

SOLUCIÓN: Comencemos con la cónica  $H$  en (a) definida por

$$2x^2 - y^2 + 4xy + 6x - 2y + 1 = 0.$$

En el sistema de referencia rectangular usual  $\mathcal{R}_0$  en el plano euclidiano  $(\mathbb{R}^2, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ , tenemos que

$$\hat{C}_0 = \left( \begin{array}{c|cc} 1 & 3 & -1 \\ \hline 3 & 2 & 2 \\ -1 & 2 & -1 \end{array} \right) \in M_{\mathcal{R}_0}(H)$$

con núcleo simétrico asociado

$$C_0 = \left( \begin{array}{cc} 2 & 2 \\ 2 & -1 \end{array} \right) \in N_{\mathcal{R}_0}(H).$$

De aquí que  $R_H = r_H + 1 = 3$  y estamos en el caso (II).

El polinomio característico  $p(t)$  de la matriz  $C_0$  viene dado por

$$p(t) = \det \left( \begin{array}{cc} 2-t & 2 \\ 2 & -1-t \end{array} \right) = -6 - t + t^2 = (-3+t)(2+t),$$

de donde  $C_0$  tiene por valores propios a  $3 > 0, -2 < 0$  y  $s_H = 0$  (esa información también se deduce de la regla de Descartes).

Análogamente el polinomio característico  $\hat{p}(t)$  de la matriz  $\hat{C}_0$  viene dado por

$$\hat{p}(t) = \det \left( \begin{array}{ccc} 1-t & 3 & -1 \\ 3 & 2-t & 2 \\ -1 & 2 & -1-t \end{array} \right) = -11 + 15t + 2t^2 - t^3.$$

La regla de Descartes nos dice que  $\hat{p}(t)$  tiene dos raíces positivas y una negativa. Por tanto  $S_H = s_H + 1 = 1$  y la forma reducida de  $H$  es

$$\left( \begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & \epsilon & 0 \\ 0 & 0 & -\delta \end{array} \right),$$

para ciertos  $\epsilon, \delta > 0$  por determinar, esto es,  $H$  es una hipérbola euclídea.

Para la clasificación euclídea necesitamos encontrar una base ortonormal de  $\mathbb{R}^2$  en la que diagonalice  $C$  (diagonalización ortogonal). Para ello determinamos los subespacios propios de  $C$  asociados a sus valores propios.

$$V_3 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \left( \begin{array}{cc} -1 & 2 \\ 2 & -4 \end{array} \right) (x, y)^t = (0, 0)^t\} = L(\{(2, 1)\}).$$

$$V_{-2} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \left( \begin{array}{cc} 4 & 2 \\ 2 & 1 \end{array} \right) (x, y)^t = (0, 0)^t\} = L(\{(-1, 2)\}).$$

Determinamos bases ortonormales  $\{\frac{1}{\sqrt{5}}(2, 1)\}$  de  $V_3$  y  $\{\frac{1}{\sqrt{5}}(-1, 2)\}$  de  $V_{-2}$  y formamos la base ortonormal de  $\mathbb{R}^2$ ,  $\langle \cdot, \cdot \rangle$

$$B_1 = \left\{ \frac{1}{\sqrt{5}}(2, 1), \frac{1}{\sqrt{5}}(-1, 2) \right\}.$$

Consideremos el sistema de referencia rectangular  $\mathcal{R}_1 = \{(0, 0), B_1\}$  y observemos que

$$M(\text{Id}_{\mathbb{R}^2}, \mathcal{R}_1, \mathcal{R}_0) = \left( \begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & \frac{2}{\sqrt{5}} & -\frac{1}{\sqrt{5}} \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{2}{\sqrt{5}} \end{array} \right)$$

Como  $\hat{C}_1 = M(\text{Id}_{\mathbb{R}^2}, \mathcal{R}_1, \mathcal{R}_0)^t \cdot \hat{C}_0 \cdot M(\text{Id}_{\mathbb{R}^2}, \mathcal{R}_1, \mathcal{R}_0) \in M_{\mathcal{R}_1}(H)$ , deducimos que

$$\hat{C}_1 = \left( \begin{array}{c|cc} 1 & \sqrt{5} & -\sqrt{5} \\ \hline \sqrt{5} & 3 & 0 \\ -\sqrt{5} & 0 & -2 \end{array} \right) \in M_{\mathcal{R}_1}(H).$$

Si escribimos  $p_{\mathcal{R}_1} = (x_1, y_1)$  para las coordenadas de los puntos  $p \in \mathbb{R}^2$  en  $\mathcal{R}_1$ , tenemos que  $H$  se corresponde con los puntos cuyas coordenadas en  $\mathcal{R}_1$  satisfacen el polinomio

$$3x_1^2 - 2y_1^2 + 2\sqrt{5}x_1 - 2\sqrt{5}y_1 + 1 = 0.$$

Un cálculo elemental nos permite reescribir la ecuación como

$$3\left(x_1^2 + \frac{2\sqrt{5}}{3}x_1\right) - 2\left(y_1^2 + \frac{2\sqrt{5}}{2}y_1\right) + 1 = 0,$$

y completando cuadrados

$$3\left(x_1 + \frac{\sqrt{5}}{3}\right)^2 - 2\left(y_1 + \frac{\sqrt{5}}{2}\right)^2 + \frac{11}{6} = 0,$$

y dividiendo por  $11/6$

$$\frac{18}{11}\left(x_1 + \frac{\sqrt{5}}{3}\right)^2 - \frac{12}{11}\left(y_1 + \frac{\sqrt{5}}{2}\right)^2 + 1 = 0.$$

Las ecuaciones analíticas

$$x_2 = x_1 + \frac{\sqrt{5}}{3}, \quad y_2 = y_1 + \frac{\sqrt{5}}{2}$$

modelan el cambio de sistema de referencia de  $\mathcal{R}_1$  al nuevo sistema de referencia  $\mathcal{R}_2$  de coordenadas  $(x_2, y_2)$ . Obsérvese que  $\mathcal{R}_2$  es también un sistema de referencia rectangular ya que

$$M(\text{Id}_{\mathbb{R}^2}, \mathcal{R}_1, \mathcal{R}_2) = \left( \begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ \hline \frac{\sqrt{5}}{3} & 1 & 0 \\ \frac{\sqrt{5}}{2} & 0 & 1 \end{array} \right),$$

$\mathcal{R}_1$  es rectangular y  $M(\text{Id}_{\mathbb{R}^2}, B_1, B_2) = I_2 \in O(2, \mathbb{R})$ , donde  $B_2$  es la base de direcciones de  $\mathcal{R}_2$ . Como los puntos  $p \in H$  en coordenadas  $p_{\mathcal{R}_2} = (x_2, y_2)$  se caracterizan por satisfacer

$$\frac{18}{11}x_2^2 - \frac{12}{11}y_2^2 + 1 = 0,$$

tenemos que

$$\left( \begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & \frac{18}{11} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{12}{11} \end{array} \right) \in M_{\mathcal{R}_2}(H)$$

y en  $\mathcal{R}_2$  la cónica adopta su forma reducida euclíadiana con  $\epsilon = \frac{18}{11}$ ,  $\delta = \frac{12}{11}$ .

Si se quiera explicitar  $\mathcal{R}_2$  en coordenadas usuales, observemos que

$$M(\text{Id}_{\mathbb{R}^2}, \mathcal{R}_2, \mathcal{R}_1) = M(\text{Id}_{\mathbb{R}^2}, \mathcal{R}_1, \mathcal{R}_2)^{-1} = \left( \begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ \hline -\frac{\sqrt{5}}{3} & 1 & 0 \\ -\frac{\sqrt{5}}{2} & 0 & 1 \end{array} \right),$$

y como  $M(\text{Id}_{\mathbb{R}^2}, \mathcal{R}_2, \mathcal{R}_0) = M(\text{Id}_{\mathbb{R}^2}, \mathcal{R}_1, \mathcal{R}_0) \cdot M(\text{Id}_{\mathbb{R}^2}, \mathcal{R}_2, \mathcal{R}_1)$ , entonces

$$M(\text{Id}_{\mathbb{R}^2}, \mathcal{R}_2, \mathcal{R}_0) = \left( \begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & \frac{2}{\sqrt{5}} & -\frac{1}{\sqrt{5}} \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{2}{\sqrt{5}} \end{array} \right) \cdot \left( \begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ \hline -\frac{\sqrt{5}}{3} & 1 & 0 \\ -\frac{\sqrt{5}}{2} & 0 & 1 \end{array} \right) = \left( \begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ \hline -\frac{1}{6} & \frac{2}{\sqrt{5}} & -\frac{1}{\sqrt{5}} \\ -\frac{4}{3} & \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{2}{\sqrt{5}} \end{array} \right).$$

Para la segunda parte del ejercicio, observemos que de lo anterior se sigue

$$M(\text{Id}_{\mathbb{R}^2}, \mathcal{R}_2, \mathcal{R}_0)^t \cdot \hat{C}_0 \cdot M(\text{Id}_{\mathbb{R}^2}, \mathcal{R}_2, \mathcal{R}_0) = \frac{11}{6} \left( \begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & \frac{18}{11} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{12}{11} \end{array} \right) \in M_{\mathcal{R}_2}(H).$$

Como en el ejercicio anterior, toda afinidad  $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  satisface

$$M_{\mathcal{R}_0}(f(H)) = M(f^{-1}, \mathcal{R}_0)^t \cdot M_{\mathcal{R}_0}(H) \cdot M(f^{-1}, \mathcal{R}_0),$$

o equivalentemente

$$M(f^{-1}, \mathcal{R}_0)^t \cdot \hat{C}_0 \cdot M(f^{-1}, \mathcal{R}_0) \in M_{\mathcal{R}_0}(f(H)).$$

Bastará con elegir la única  $f$  tal que

$$M(f, \mathcal{R}_0)^{-1} = M(f^{-1}, \mathcal{R}_0) = M(\text{Id}_{\mathbb{R}^2}, \mathcal{R}_2, \mathcal{R}_0) = \left( \begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ \hline -\frac{1}{6} & \frac{2}{\sqrt{5}} & -\frac{1}{\sqrt{5}} \\ -\frac{4}{3} & \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{2}{\sqrt{5}} \end{array} \right),$$

esto es

$$M(f, \mathcal{R}_0) = M(\text{Id}_{\mathbb{R}^2}, \mathcal{R}_2, \mathcal{R}_0)^{-1} = \left( \begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ \hline -\frac{1}{6} & \frac{2}{\sqrt{5}} & -\frac{1}{\sqrt{5}} \\ -\frac{4}{3} & \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{2}{\sqrt{5}} \end{array} \right)^{-1} = \left( \begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ \hline \frac{\sqrt{5}}{3} & \frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{5}} \\ \frac{\sqrt{5}}{2} & -\frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{2}{\sqrt{5}} \end{array} \right).$$

■

**Ejercicio 4.39** Encontrar la ecuación reducida y decir de qué tipo es la cónica siguiente en función del parámetro real  $a$ :

$$a x^2 + y^2 + 4a xy - 2x - 4y + a = 0.$$

SOLUCIÓN: Una matriz que representa a  $H$  en el sistema de referencia usual es

$$\hat{C} = \left( \begin{array}{c|cc} a & -1 & -2 \\ \hline -1 & a & 2a \\ -2 & 2a & 1 \end{array} \right),$$

con núcleo cuadrático

$$C = \left( \begin{array}{cc} a & 2a \\ 2a & 1 \end{array} \right),$$

Por tanto el polinomio característico de  $\hat{C}$  queda,

$$\hat{p}(t) = \det(\hat{C} - t\mathbf{I}_3) = c_0 + c_1 t + c_2 t^2 + c_3 t^3,$$

donde

$$c_0 = (1-a)(1+a)(-1+4a), \quad c_1 = 5 - 2a + 3a^2, \quad c_2 = 1 + 2a, \quad c_3 = -1$$

Análogamente el polinomio característico de  $C$  viene dado por

$$p(t) = \det(C - t\mathbf{I}_2) = d_0 + d_1 t + d_2 t^2,$$

donde

$$d_0 = a(1-4a), \quad d_1 = -1-a, \quad d_2 = 1.$$

■

Los valores críticos del parámetro, donde se anula alguno de los coeficientes, son pues  $a = -1, -1/2, 0, 1/4, 1$ . La distribución de signos de esos coeficientes queda:

	$d_0$	$d_1$	$d_2$	$c_0$	$c_1$	$c_2$	$c_3$
$a \in ]-\infty, -1[$	-	+	+	+	+	-	-
$a = -1$	-	0	+	0	+	-	-
$a \in ]-1, -1/2[$	-	-	+	-	+	-	-
$a = -1/2$	-	-	+	-	+	0	-
$a \in ]-1/2, 0[$	-	-	+	-	+	+	-
$a = 0$	0	-	+	-	+	+	-
$a \in ]0, 1/4[$	+	-	+	-	+	+	-
$a = 1/4$	0	-	+	0	+	+	-
$a \in ]1/4, 1[$	-	-	+	+	+	+	-
$a = 1$	-	-	+	0	+	+	-
$a \in ]1, +\infty[$	-	-	+	-	+	+	-

Un cálculo sencillo y la regla de Descartes nos da la siguiente tabla para los valores de  $R_H, r_H, S_H, s_H$  según los valores de  $a$ , y por tanto la clasificación final:

	$R_H$	$r_H$	$S_H$	$s_H$	
$a \in ]-\infty, -1[$	3	2	1	0	hipérbola
$a = -1$	2	2	0	0	dos rectas secantes
$a \in ]-1, -1/2[$	3	2	1	0	hipérbola
$a = -1/2$	3	2	1	0	hipérbola
$a \in ]-1/2, 0[$	3	2	1	0	hipérbola
$a = 0$	3	1	1	1	parábola
$a \in ]0, 1/4[$	3	2	1	2	elipse
$a = 1/4$	2	1	0	1	dos rectas paralelas
$a \in ]1/4, 1[$	3	2	1	0	hipérbola
$a = 1$	2	2	0	0	dos rectas secantes
$a \in ]1, +\infty[$	3	2	1	0	hipérbola

## Ejercicios del Tema 3

1. (El toro de revolución). En el semiplano  $P = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / y = 0, x \geq 0\}$  tomamos una circunferencia  $C$  de centro  $(c, 0, 0)$  y radio  $r > 0$  con  $c > r > 0$ . Se llama *toro de revolución* generado por  $C$  a la superficie  $T$  obtenida al rotar  $C$  alrededor del eje  $z$ . Dibujar  $T$  y describir la superficie como el conjunto de soluciones de una ecuación con 3 incógnitas. ¿Es dicha ecuación la de una cuádrica?
2. Sea  $L$  una recta afín en  $\mathbb{R}^n$  y  $C$  una hipercuádrica. Demostrar que se da una y sólo una de las siguientes posibilidades: o bien  $L \cap C = \emptyset$ , o bien  $L \cap C$  es un punto, o bien  $L \cap C$  consta de dos puntos, o bien  $L \subseteq C$ .
3. (El hiperbolóide de una hoja como unión de rectas). Consideremos el hiperbolóide de una hoja  $C = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / x^2 + y^2 - z^2 = 1\}$ . Para cada punto  $p \in C \cap \{z = 0\}$  tomamos la recta afín  $L_p = p + L(J(p) + e_3)$ , donde  $J$  es el giro de  $90^\circ$  en el plano  $z = 0$  centrado en el origen y  $e_3 = (0, 0, 1)$ . Demostrar que  $C$  coincide con la unión de todas las rectas  $L_p$ .
4. Sea  $H$  una hipercuádrica en  $\mathbb{R}^n$  con matriz  $\hat{C}$  en el sistema de referencia usual  $\mathcal{R}_0$ . Diremos que  $H$  es *invariante por homotecias lineales* si para toda homotecia  $h_{O,r}$  con centro el origen  $O \in \mathbb{R}^n$  y razón  $r \neq 0$ ,

$$M(h_{O,r}^{-1}, \mathcal{R}_0)^t \cdot \hat{C} \cdot M(h_{O,r}^{-1}, \mathcal{R}_0) = \lambda \hat{C}$$

para algún  $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$  (dependiendo de  $r$ ); en particular,  $h_{O,r}(H) = H$  para todo  $r \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ . Demostrar que  $H$  cumple esta propiedad si y sólo si  $\hat{C} = \left( \begin{array}{c|c} 0 & 0 \\ 0 & C \end{array} \right)$ , donde  $C$  es simétrica y no nula. Mostrar algunos ejemplos de este tipo de cuádricas en  $\mathbb{R}^2$  y  $\mathbb{R}^3$ .

5. Construir explícitamente un isomorfismo afín  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  tal que  $f(C) = C'$  en cada uno de los siguientes casos:
  - a)  $n = 2$ ,  $C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1\}$ ,  $C' = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / x^2 - y^2 = 1\}$ .
  - b)  $n = 3$ ,  $C = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$ ,  $C' = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1\}$ .
  - c)  $n = 2$ ,  $C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / x^2 - y = 0\}$ ,  $C' = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / x - y^2 = 0\}$ .
  - d)  $n = 3$ ,  $C = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / ax^2 + by^2 = 1\}$ ,  $C' = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / x^2 + y^2 = 1\}$ .
6. Clasificar las siguientes cónicas:
  - a)  $2x^2 - y^2 + 4xy + 6x - 2y + 1 = 0$ .
  - b)  $2x^2 - y^2 + 2xy + 4x - 2y + 1 = 0$ .
  - c)  $x^2 + y^2 + 2xy + 2x + 2y = 0$ .
  - d)  $x^2 + y^2 + 2xy + 2x + 2y + 1 = 0$ .
  - e)  $x^2 + y^2 + 2xy + 2x + 2y + 2 = 0$ .
  - f)  $4x^2 + 2y^2 - 2xy + x - 3y - 3 = 0$ .

g)  $-x^2 + xy - \sqrt{3}x + \sqrt{3}y = 0.$

7. Para cada una de las siguientes cónicas:

$$x^2 - 7y^2 - 6xy + 10x + 2y + 9 = 0,$$

$$9x^2 + 4y^2 + 12xy - 52 = 0,$$

encontrar un isomorfismo afín de  $\mathbb{R}^2$  que nos lleve a su ecuación reducida.

8. ¿Existe alguna elipse en la familia de cónicas  $x^2 + y^2 + xy + 2x - 2y + \alpha = 0$  con  $\alpha \in \mathbb{R}$ ?
9. Encontrar la ecuación reducida y decir de qué tipo es la cónica siguiente en función del parámetro real  $\alpha$ :

$$\alpha x^2 + y^2 + 4\alpha xy - 2x - 4y + \alpha = 0.$$

10. Clasifica afínmente la cónica  $H$  del plano afín  $\mathbb{R}^2$  que en el sistema de referencia usual  $\mathcal{R}_0$  viene definida por la ecuación

$$x_1^2 - 4x_1x_2 + x_2^2 - 3x_1 + 4x_2 - 1 = 0.$$

Encuentra un sistema de referencia  $\mathcal{R}$  de  $\mathbb{R}^2$  en el que  $H$  adopte su forma canónica.

11. Demuestra los siguientes enunciados.

- a) El lugar geométrico de los puntos del plano afín euclíadiano  $\mathbb{R}^2$  tales que la suma de las distancias a dos puntos fijos (llamados focos) es constante, es una *elipse*.
- b) El lugar geométrico de los puntos del plano afín euclíadiano  $\mathbb{R}^2$  tales que el valor absoluto de la diferencia de sus distancias a dos puntos fijos (llamados focos) es constante, es una *hipérbola*.
- c) El lugar geométrico de los puntos del plano afín euclíadiano  $\mathbb{R}^2$  que equidistan de una recta (llamada directriz) y de un punto exterior a la misma (llamado foco), es una *parábola*.

12. Expresar en coordenadas usuales de  $\mathbb{R}^2$  las ecuaciones de las siguientes cónicas:

- a)  $E = \{p \in \mathbb{R}^2 / d(p, F_1) + d(p, F_2) = 4\}$ , donde  $F_1 = (0, 2)$ ,  $F_2 = (-2, 0)$ .
- b) La parábola  $P$  de foco  $F = (2, 2)$  y directriz de ecuación  $x + y = 0$ .

13. En  $\mathbb{R}^2$  consideramos las rectas afines de ecuaciones  $x + y = 1$  y  $x - y = 1$ . ¿Es una cónica el conjunto de puntos de  $\mathbb{R}^2$  que equidistan de ambas rectas? En caso afirmativo, escribir su ecuación reducida y decir de qué tipo es.

14. Clasificar las siguientes cuádricas:

- a)  $2x^2 - y^2 + 4xy + 6x - 2y + 1 = 0$ .
- b)  $xy - z = 0$ .
- c)  $2xy + 2xz + 2yz - 4 = 0$ .

- d)  $2x^2 + 3y^2 + 2xy - 2yz + 2z + 2 = 0.$   
 e)  $x^2 + y^2 + z^2 + 2xy - 2x - 2z + 1 = 0.$   
 f)  $3y^2 + 2xy - 2yz + 2z + 2 = 0.$   
 g)  $x^2 + z^2 + 2xz - 4 = 0.$   
 h)  $xy + xz + yz - 2x - y + 3z + 13 = 0.$
15. Clasifica afínmente la cuádrica  $H$  del espacio afín  $\mathbb{R}^3$  que en el sistema de referencia usual  $\mathcal{R}_0$  viene definida por la ecuación
- $$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + 2x_1x_2 + 2x_1x_3 + 2x_2x_3 - 4x_1 + 2 = 0.$$
- Encuentra un sistema de referencia de  $\mathbb{R}^3$  en el que  $H$  adopte su forma canónica.
16. Clasifica afínmente la cuádrica  $H$  del espacio afín  $\mathbb{R}^3$  que en el sistema de referencia usual  $\mathcal{R}_0$  viene definida por la ecuación
- $$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3 + x_1 + x_2 + x_3 + 1 = 0.$$
17. Para la cuádrica en  $\mathbb{R}^3$  dada por:
- $$2xy + 2xz + 2yz - 6x - 6y - 4z + 9 = 0$$
- determinar un isomorfismo afín de  $\mathbb{R}^3$  que nos lleve a su ecuación reducida.
18. Encontrar la ecuación reducida afín y decir de qué tipo es la cuádrica siguiente en función del parámetro real  $\alpha$ :
- $$2x^2 + 2y^2 - z^2 - 2xy + 4x - 2y + \alpha = 0.$$
19. Sean  $F_1$  y  $F_2$  dos puntos distintos en  $\mathbb{R}^3$ . Consideramos el lugar geométrico definido por  $E = \{p \in \mathbb{R}^3 / d(p, F_1) + d(p, F_2) = 2a\}$ , siendo  $2a > d(F_1, F_2)$ . Estudiar si  $E$  es o no una cuádrica en  $\mathbb{R}^3$  y, en caso afirmativo, decidir de qué tipo es.
20. En  $\mathbb{R}^3$  consideramos el punto  $F = (0, 0, 1)$  y el plano afín  $S$  de ecuación  $x - z = 0$ . Definimos el conjunto:
- $$C = \{p \in \mathbb{R}^3 / d(p, F) = d(p, S)\}.$$
- Demostrar que  $C$  es una cuádrica y clasificarla.
21. Encontrar la ecuación reducida de la hipercuádrica en  $\mathbb{R}^4$  de ecuación:
- $$2x^2 - y^2 + z^2 - w^2 + 2xz - 2yz + 2yw + 2x - 2y + 2w + 1 = 0.$$
22. Sea  $S$  un subespacio afín de dimensión  $k$  en  $\mathbb{R}^n$  y  $C$  una hipercuádrica. Demostrar que se da una de las siguientes posibilidades:
- $S \cap C = \emptyset$ ,
  - $S \subseteq C$ ,
  - $S \cap C$  es una hipercuádrica en  $S$  (identificando  $S$  con  $\mathbb{R}^k$ ).
23. Clasificar las cónicas que se obtienen al cortar el cono  $x^2 + y^2 = z^2$  con un plano afín.

## TEMA 4: El espacio proyectivo

Todos tenemos una idea clara del sentido de la perspectiva. La representación gráfica sobre un lienzo del mundo tridimensional, generando la ilusión de profundidad, fue la auténtica revolución de la pintura del Renacimiento, plasmada con maestría en los trabajos de Miguel Angel, Rafael Sanzio o Leonardo da Vinci entre otros.

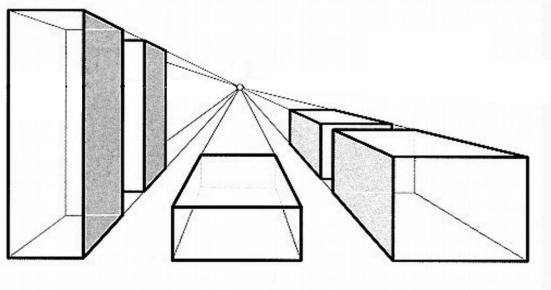


*La escuela de Atenas*, Rafael Sanzio (Museos Vaticanos)

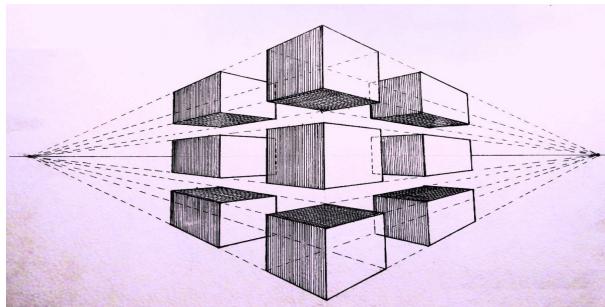


*La última cena*, Leonardo da Vinci (convento de Santa María delle Grazie, Milán)

Expliquemos de forma simplificada como funciona esta técnica. La intuición proviene de nuestra percepción sensorial, cuanto más alejados estén de nuestra línea de visión los puntos que conforman una figura, más pequeña se observa ésta. Lo que hacemos es fijar cualquier punto en el plano de fondo (o del infinito) de la escena que queremos representar, que es utilizado como punto de fuga para proyectar figuras generando la ilusión visual de profundidad tridimensional.



Se puede fijar más de un punto de fuga o línea de visión del observador en el plano del infinito, dependiendo del efecto de profundidad en la visualización que se persiga. En la siguiente figura se han fijado dos.



Se suele decir que todos los puntos en una misma línea de fuga son perspectivamente equivalentes, y que dos figuras geométricas equivalentes trasladadas perspectivamente hacia un punto de fuga son proyectivas. En las figuras de arriba se pueden ver varios cuerpos sólidos proyectivos. Estamos ante un recurso técnico de artistas y diseñadores gráficos para representar la realidad tridimensional sobre un plano que puede ser conceptualizado en el contexto de la geometría. Para ello es necesario introducir una estructura nueva, la de *espacio proyectivo*.

De forma simplificada, lo que vamos a hacer es embeber nuestro espacio afín  $n$ -dimensional  $\mathcal{A}$  en un hiperplano que no pase por el origen de un espacio vectorial  $E$  con dimensión  $n + 1$ :

$$\mathcal{A} \subset E \setminus \{\vec{0}\}.$$

Sobre este espacio vectorial  $E$  se modelará la geometría proyectiva, que englobará de forma natural a la afín sobre  $\mathcal{A}$ . Siendo más precisos, se define el espacio proyectivo  $n$ -dimensional  $P(E)$  sobre  $E$  como el conjunto cuyos puntos son las rectas vectoriales o direcciones en  $E$ . La inclusión  $\mathcal{A} \subset P(E)$  se materializa identificando cada punto de  $\mathcal{A} \subset E \setminus \{\vec{0}\}$  con la única recta vectorial en  $P(E)$  que lo contiene. De forma idealizada, los puntos de fuga para un observador en  $\mathcal{A}$  conforman el llamado *hiperplano del infinito* de  $\mathcal{A}$  en  $P(E)$ :

$$\mathcal{A}_\infty := P(E) \setminus \mathcal{A}.$$

Los puntos de  $\mathcal{A}_\infty \subset P(E)$  son los determinados por las rectas vectoriales en  $\mathcal{A}$ .

En el caso particular del espacio afín  $\mathcal{A} = \mathbb{R}^n$  se toma  $E = \mathbb{R}^{n+1}$  y se embebe

$$\mathbb{R}^n \ni x \mapsto (1, x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n = \mathbb{R}^{n+1}.$$

El correspondiente proyectivo

$$P(\mathbb{R}^{n+1}) = \{L(\{v\}): v \in \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{\vec{0}\}\}$$

se denota por  $\mathbb{P}^n$ , y la inclusión  $\mathbb{R}^n \subset \mathbb{P}^n$  se materializa vía la identificación

$$\mathbb{R}^n \ni x \equiv L(\{(1, x)\}) \in \mathbb{P}^n.$$

Los puntos que  $\mathbb{P}^n$  añade al afín  $\mathbb{R}^n$  conforman el *hiperplano del infinito*

$$\mathbb{R}^n_{\infty} = \mathbb{P}^n \setminus \mathbb{R}^n = \left\{ L(\{(0, x)\}) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n = \mathbb{R}^{n+1} : x \in \mathbb{R}^n \setminus \{\vec{0}\} \right\}.$$

Por ejemplo, en  $\mathbb{P}^3$  los puntos de  $\mathbb{R}_{\infty}^3 = \mathbb{P}^3 \setminus \mathbb{R}^3$  idealizan el *plano del infinito* de los puntos de fuga que utilizaban los pintores renacentistas. Lo comprenderemos mejor más adelante.

## 4.5. El espacio proyectivo

Procedamos a la definición matemática formal de espacio proyectivo. En lo que sigue  $E$  será un espacio vectorial con  $\dim E = n + 1$ ,  $n \in \mathbb{N}$ , y usaremos recurrentemente la notación

$$E^* = E \setminus \{\vec{0}\}.$$

Establezcamos la siguiente relación de equivalencia en  $E^*$ :

$$v \sim w \Leftrightarrow v = \lambda w \text{ para algún } \lambda \in \mathbb{R}^* = \mathbb{R} \setminus \{0\}.$$

La relación binaria  $\sim$  en  $E^*$  es trivialmente de equivalencia (reflexiva, simétrica y transitiva).

**Definición 4.40** *Llamaremos espacio proyectivo construido sobre  $E$ , y lo denominaremos como  $P(E)$ , al espacio cociente*

$$P(E) = E^*/\sim.$$

Por definición  $\dim P(E) = n$ .

Usualmente escribiremos por  $[v] \in P(E)$  a la clase de equivalencia de  $v \in E^*$ , esto es, al punto de  $P(E)$  determinado por la recta vectorial generada por  $v$ :

$$[v] = L(\{v\})^* = \{\lambda v : \lambda \in \mathbb{R}^*\}.$$

Por esta razón los puntos de  $P(E)$  son referidos como rectas vectoriales o direcciones en  $E$ .

**Notación 4.41** *Denotaremos por*

$$\pi: E^* \rightarrow P(E), \quad \pi(v) = [v],$$

*a la proyección al cociente.*

**Observación 4.42** *Algunos comentarios elementales:*

- Se puede introducir igualmente el concepto de espacio proyectivo complejo si el espacio vectorial de referencia  $E$  es complejo. En este caso la relación de equivalencia utilizada es

$$v \sim w \Leftrightarrow v = \lambda w \text{ para algún } \lambda \in \mathbb{C}^* = \mathbb{C} \setminus \{0\}.$$

- Si  $U \subseteq E$  es un subespacio vectorial con  $\dim U = k + 1$ ,  $k \geq 1$ , el espacio proyectivo  $P(U)$  es de forma natural un subconjunto de  $P(E)$ . Notemos que las clases de equivalencia de vectores  $v \in U \subseteq E$  son indistinguibles vistas en  $P(U)$  o en  $P(E)$ :

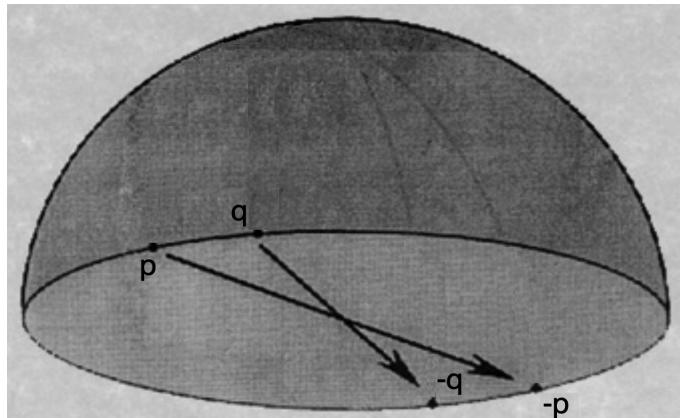
$$[v] = L(\{v\})^* \subseteq U^* \subseteq E^*.$$

**Notación 4.43** El espacio  $P(\mathbb{R}^{n+1})$  se denota como  $\mathbb{P}^n$ .

El espacio  $\mathbb{P}^n$  se puede topologizar introduciéndole la topología cociente de la euclíadiana de  $(\mathbb{R}^{n+1})^*$ , y con ésta topología es homeomorfo al espacio de órbitas  $\mathbb{S}^n/\langle A \rangle$  cociente de la esfera  $\mathbb{S}^n$  por la acción de la aplicación antípoda  $A: \mathbb{S}^n \rightarrow \mathbb{S}^n$ ,  $A(p) = -p$ . Recuerda que  $[p]_0 = \{p, -p\}$  es la clase de equivalencia (u órbita) de un punto  $p \in \mathbb{S}^n$  por la acción de  $A$ . La identificación canónica entre  $\mathbb{P}^n$  y  $\mathbb{S}^n/\langle A \rangle$  viene dada por la siguiente biyección homeomórfica:

$$\mathbb{P}^n \rightarrow \mathbb{S}^n/\langle A \rangle, \quad [x] \mapsto \left[ \frac{x}{\|x\|} \right]_0.$$

Nota que esta aplicación está bien definida sobre clases de equivalencia (no depende de representantes). Como consecuencia  $\mathbb{P}^n$  es un espacio *compacto*, lo que lo diferencia dramáticamente de  $\mathbb{R}^n$ . El modelo de  $\mathbb{P}^n$  más intuitivo consiste en quedarse con una mitad de la esfera (un hemisferio) donde cada órbita tiene un único representante, excepto para los puntos del ecuador borde que se identifican de forma antípoda.



Por ejemplo, la recta proyectiva  $\mathbb{P}^1$  es homeomorfa a  $\mathbb{S}^1$  ya que identificando los extremos de una semicircunferencia se genera  $\mathbb{S}^1$  (lo análogo no ocurre en dimensión superior).

## 4.6. Variedades proyectivas

Como siempre que se introduce una nueva categoría geométrica es conveniente presentar los subobjetos naturales, que aquí llamaremos subespacios proyectivos o variedades proyectivas.

Sean  $E$  un espacio vectorial con  $\dim E = n + 1$ ,  $n \in \mathbb{N}$ , y  $P(E)$  el correspondiente espacio proyectivo  $n$ -dimensional sobre  $E$ .

**Definición 4.44** Un subconjunto  $X \subseteq P(E)$  no vacío es una variedad proyectiva si el conjunto

$$\hat{X} := \pi^{-1}(X) \cup \{\vec{0}\}$$

es un subespacio vectorial de  $E$ , o equivalentemente  $X = \pi(\hat{X}^*)$  para un subespacio vectorial  $\hat{X}$  de  $E$ , donde  $\hat{X}^* = \hat{X} \setminus \{\vec{0}\}$ . Obsérvese de que en este caso  $X$  es canónicamente identifiable con el espacio proyectivo  $P(\hat{X})$ .

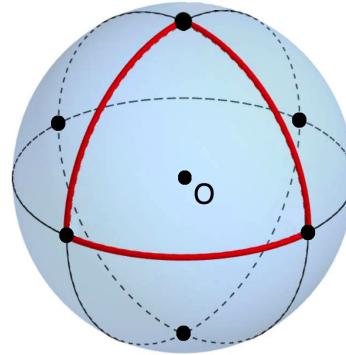
De hecho, y de forma alternativa, una variedad proyectiva de  $P(E)$  se puede definir como el espacio proyectivo asociado a un subespacio vectorial  $\widehat{X}$  de  $E$  con  $\dim \widehat{X} > 0$ . En efecto, como comentamos anteriormente  $P(\widehat{X}) \subseteq P(E)$ .

Por definición, si  $X$  es una variedad proyectiva de  $P(E)$  entonces

$$\dim X = \dim \widehat{X} - 1.$$

Las variedades  $X$  con  $\dim X = 0$  se llaman *puntos proyectivos*, las de  $\dim X = 1$  *rectas proyectivas*, las de  $\dim X = 2$  *planos proyectivos*, y las de  $\dim X = \dim P(E) - 1$  *hiperplanos proyectivos*.

Recordemos que los puntos del proyectivo son rectas vectoriales en un espacio vectorial. Para motivar la intuición geométrica, cuando pensemos en una variedad proyectiva  $k$ -dimensional imaginaremos un subespacio vectorial  $(k+1)$ -dimensional en el espacio vectorial sobre el que se construye el proyectivo, los puntos de la variedad son las direcciones o rectas vectoriales en ese subespacio vectorial. Lo podemos visualizar muy bien por ejemplo en el modelo esférico del plano proyectivo  $\mathbb{P}^2$ , en este caso una recta proyectiva es la proyección al espacio de órbitas  $\mathbb{S}^2/\langle A \rangle$  del corte de un plano vectorial de  $\mathbb{R}^3$  con  $\mathbb{S}^2$ , esto es, lo que denominamos un círculo máximo o ecuador en  $\mathbb{S}^2$ . Si retenemos esa imagen en la mente, comprendemos por ejemplo que dos rectas proyectivas distintas se han de cortar en un punto del proyectivo, puesto los dos puntos de corte de dos ecuadores distintos son antípodas y generan una única órbita en  $\mathbb{S}^2/\langle A \rangle$ . Esta discusión resuelve el problema geométrico de la posición relativa de dos rectas proyectivas en  $\mathbb{P}^2$ .



Describamos las operaciones básicas con variedades proyectivas.

**Proposición 4.45** *Si  $\{X_\alpha : \alpha \in \Lambda\}$  es una familia de variedades proyectivas de  $P(E)$ , entonces  $\bigcap_{\alpha \in \Lambda} X_\alpha$  es o el conjunto vacío  $\emptyset$  o una variedad proyectiva de  $P(E)$ .*

**DEMOSTRACIÓN :** En efecto, si  $\bigcap_{\alpha \in \Lambda} X_\alpha \neq \emptyset$  obsérvese que entonces

$$\widehat{\bigcap_{\alpha \in \Lambda} X_\alpha} = \pi^{-1}\left(\bigcap_{\alpha \in \Lambda} X_\alpha\right) \cup \{\vec{0}\} = \bigcap_{\alpha \in \Lambda} (\pi^{-1}(X_\alpha) \cup \{\vec{0}\}) = \bigcap_{\alpha \in \Lambda} \widehat{X}_\alpha$$

es un subespacio vectorial al ser intersección de subespacios vectoriales. Además al ser  $\bigcap_{\alpha \in \Lambda} X_\alpha \neq \emptyset$  inferimos que  $\widehat{\bigcap_{\alpha \in \Lambda} X_\alpha} \neq \{\vec{0}\}$  y se sigue lo enunciado. ■

Es conveniente que observar que  $\bigcap_{\alpha \in \Lambda} X_\alpha = \emptyset$  si y solo si  $\widehat{\bigcap_{\alpha \in \Lambda} X_\alpha} = \{\vec{0}\}$ .

**Definición 4.46** Si  $S \subseteq P(E)$  es un subconjunto no vacío arbitrario, llamaremos  $V(S)$  a la menor variedad proyectiva de  $P(E)$  conteniendo a  $S$ . Es claro que

$$V(S) = \bigcap_{\alpha \in \Lambda} X_\alpha,$$

donde  $\{X_\alpha : \alpha \in \Lambda\}$  es la familia de todas las variedades proyectivas de  $P(E)$  conteniendo a  $S$  (el propio  $P(E)$  es una de ellas). En particular  $V(S)$  es una variedad proyectiva.

Claramente  $V(S) = S$  si y solo si  $S$  es una variedad proyectiva.

**Proposición 4.47** Si  $S \subseteq P(E)$  es un subconjunto no vacío entonces

$$\widehat{V(S)} = L(\pi^{-1}(S)).$$

**DEMOSTRACIÓN:** Recordemos que si  $A \subseteq E$  entonces  $L(A)$  es la intersección de todos los subespacios vectoriales de  $E$  que contienen a  $A$ . Para probar la proposición escribamos  $L(\pi^{-1}(S))^* = L(\pi^{-1}(S)) \setminus \{0\}$ . Como  $\pi(L(\pi^{-1}(S))^*)$  es una variedad proyectiva de  $P(E)$  conteniendo a  $S$  deducimos que  $V(S) \subseteq \pi(L(\pi^{-1}(S))^*)$ . Veamos la otra inclusión. Observemos que si una variedad proyectiva  $X$  de  $P(E)$  contiene a  $S$  entonces  $\pi^{-1}(S) \subseteq \widehat{X}$ , y por tanto  $L(\pi^{-1}(S)) \subseteq \widehat{X}$  ya que  $\widehat{X}$  es un subespacio vectorial conteniendo a  $L(\pi^{-1}(S))$ . De aquí deducimos que  $\pi(L(\pi^{-1}(S))^*) \subseteq X$ , y como  $X$  es una variedad proyectiva arbitraria conteniendo  $S$ , que  $\pi(L(\pi^{-1}(S))^*) \subseteq V(S)$ . En conclusión  $\pi(L(\pi^{-1}(S))^*) = V(S)$  y  $\widehat{V(S)} = L(\pi^{-1}(S))$  como queríamos demostrar. ■

Podemos enunciar el concepto de independencia proyectiva de sistemas de puntos.

**Definición 4.48** Un conjunto de  $k+1$  puntos  $X = \{p_1 = [v_1], \dots, p_{k+1} = [v_{k+1}]\}$  en  $P(E)$  se dice proyectivamente independientes si  $\dim V(X) = k$ , esto es, si

$$\dim \widehat{V(X)} = \dim L(\{v_1, \dots, v_{k+1}\}) = k+1$$

y  $\{v_1, \dots, v_{k+1}\}$  son linealmente independientes. En otro caso se dicen proyectivamente dependientes. Los puntos  $p_1, \dots, p_{k+1} \in P(E)$  se dicen alineados si si están contenidos en una recta proyectiva.

El concepto de suma de variedades proyectivas queda como sigue.

**Definición 4.49** Si  $X, Y$  son variedades proyectivas de  $P(E)$ , llamaremos variedad suma de  $X$  e  $Y$ , que denotaremos por  $X \vee Y$ , a la definida por  $X \vee Y = V(X \cup Y)$ .

Es claro que

$$\widehat{X \vee Y} = L(\pi^{-1}(X \cup Y)) = L(\pi^{-1}(X) \cup \pi^{-1}(Y)) = L(\pi^{-1}(X)) + L(\pi^{-1}(Y)) = \widehat{X} + \widehat{Y}.$$

**Propiedades 4.50** Los siguientes enunciados son ciertos:

(I) (**Fórmula de dimensiones**) Si  $X, Y \subseteq P(E)$  son variedades proyectivas entonces

$$\dim(X \vee Y) = \dim X + \dim Y - \dim(X \cap Y),$$

donde hemos convenido que  $\dim(X \cap Y) = -1$  cuando  $X \cap Y = \emptyset$ .

La fórmula es consecuencia de que  $\dim(\widehat{X} + \widehat{Y}) = \dim \widehat{X} + \dim \widehat{Y} - \dim(\widehat{X} \cap \widehat{Y})$ , y del hecho que  $\dim Z = \dim \widehat{Z} - 1$  para toda variedad proyectiva  $Z \subseteq P(E)$ .

(II)  $V(S \cup T) = V(S) \vee V(T)$  para cualesquiera subconjuntos  $S, T \subseteq P(E)$ .

(III) Por dos puntos  $p, q \in P(E)$  pasa una única recta proyectiva, a saber

$$V(\{p, q\}) = p \vee q.$$

En efecto, basta con observar que

$$\dim(p \vee q) = \dim p + \dim q - \dim(p \cap q) = 0 + 0 - (-1) = 1.$$

(IV) Dos rectas proyectivas distintas  $R$  y  $S$  en un plano proyectivo  $P(E)$  se cortan en un punto.

En efecto, como  $\widehat{R}$  y  $\widehat{S}$  son planos vectoriales distintos de  $E$  y  $\dim E = 3$  entonces  $\dim \widehat{R} \cap \widehat{S} = 1$ , por lo que  $R \cap S$  es un punto.

Item (iv) demuestra que *no tiene sentido el paralelismo en geometría proyectiva*, y que por tanto este modelo de geometría no es euclíadiano (no es válido el V postulado de Euclides de las paralelas). No obstante, es conveniente reflexionar sobre la siguiente observación.

**Observación 4.51** Si  $\dim P(E) > 2$  entonces existen rectas proyectivas disjuntas en  $P(E)$ .

## 4.7. Coordenadas homogéneas

En el espacio proyectivo  $P(E)$  no existe un concepto natural de base, por lo que hay que recurrir a las bases en el espacio vectorial  $E$  para asignar coordenadas. También el concepto de coordenadas es diferente y presenta sus propios matices.

**Definición 4.52** Definimos las coordenadas homogéneas de un punto  $p \in P(E)$  en la base  $B = \{v_0, v_1, \dots, v_n\}$  de  $E$  como

$$p_B \stackrel{\text{def}}{=} \{\lambda v_B : \lambda \in \mathbb{R}^*\},$$

donde  $v_B \in (\mathbb{R}^{n+1})^*$  son las coordenadas en  $B$  de cualquier vector  $v$  no nulo de la recta vectorial  $\hat{p}$  (esto es, cualquier  $v \in \pi^{-1}(p)$ ). Si  $v \in \pi^{-1}(p)$  y  $v_B = (x_0, x_1, \dots, x_n)$ , se suele escribir

$$p_B = (x_0 : x_1 : \dots : x_n),$$

y en forma de columna

$$p_B = \begin{pmatrix} x_0 \\ .. \\ x_1 \\ .. \\ \vdots \\ .. \\ x_n \end{pmatrix}.$$

Claramente  $p_B = (\lambda x_0 : \lambda x_1 : \dots : \lambda x_n)$  para todo  $\lambda \neq 0$ .

**Definición 4.53** Las coordenadas homogéneas en  $\mathbb{P}^n$  respecto de la base canónica  $B_0$  de  $\mathbb{R}^{n+1}$  suelen llamarse coordenadas homogéneas canónicas. Es común identificar los puntos de  $p \in \mathbb{P}^n$  con sus coordenadas homogéneas canónicas, esto es, si  $(x_0, x_1, \dots, x_n) \in (\mathbb{R}^{n+1})^*$  y  $p = \pi((x_0, x_1, \dots, x_n))$  entonces

$$p \equiv (x_0 : x_1 : \dots : x_n).$$

Por ejemplo, la recta vectorial  $p = L(\{(1, 0, -2, -1)\})^*$  en  $\mathbb{R}^4$  determina en  $\mathbb{P}^3 = P(\mathbb{R}^4)$  el punto  $p = \pi((1, 0, -2, -1)) = [(1, 0, -2, -1)]$ . Como en coordenadas homogéneas canónicas (respecto de la base canónica  $B_0$  de  $\mathbb{R}^4$ )

$$p_{B_0} = (1 : 0 : -2 : -1) = \{\lambda(1, 0, -2, -1) : \lambda \in \mathbb{R}^*\},$$

se escribe

$$p = (1 : 0 : -2 : -1) = (3 : 0 : -6 : -3) = (5 : 0 : -10 : -5) = \dots$$

Como el espacio vectorial  $S_2(\mathbb{R})$  de las matrices simétricas también tiene una base natural, a saber,

$$B_0 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\},$$

de forma análoga en el plano proyectivo  $P(S_2(\mathbb{R}))$  los puntos

$$p = \left[ \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix} \right], \quad \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix} \in S_2(\mathbb{R})^*,$$

se identifican con sus coordenadas homogéneas canónicas  $p = p_{B_0}^t = (a : b : c)$ .

Por ejemplo, el punto  $p = \left[ \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \right]$  de  $P(S_2(\mathbb{R}))$  se determina mediante la expresión  $p = p_{B_0} = (-2 : 1 : 2)$ . Las coordenadas homogéneas de  $p$  en la base

$$B = \left\{ \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right\}$$

son  $p_B = (-2 : 4 : 0), (4 : -8 : 0), \dots$

En general, las ecuaciones del cambio de base en  $E$  permiten establecer las ecuaciones de cambio de base para coordenadas homogéneas en  $P(E)$ . Afortunadamente no todo en el proyectivo es más difícil, ya que estas ecuaciones son las mismas literalmente en uno y otro contexto geométrico, salvo el matiz de sustituir el tipo de coordenadas.

**Definición 4.54**  $B_1$  y  $B_2$  son bases de  $E$  se define la matriz del cambio de base en  $P(E)$  de  $B_1$  a  $B_2$  para coordenadas homogéneas como

$$M(\text{Id}_{P(V)}, B_1, B_2) \stackrel{\text{def}}{=} \mu M(\text{Id}_E, B_1, B_2), \quad \forall \mu \in \mathbb{R}^*.$$

La matriz que determina el cambio en el proyectivo se puede elegir en una familia 1-paramétrica de matrices proporcionales, y está bien definida por la naturaleza de las coordenadas homogéneas (usualmente se suele elegir  $\mu = 1$ ). Recordemos que siempre se utilizará la notación columna para las matrices del cambio de base.

La razón para que las ecuaciones del cambio de base en  $P(E)$  y las del cambio en  $E$  coincidan reside en que el factor de proporcionalidad que añaden coordenadas homogéneas se arrastra sin problemas en la ecuación matricial del cambio de base en  $E$ , esto es,

$$M(\text{Id}_E, B_1, B_2) \cdot (\lambda v_B) = \lambda (M(\text{Id}_E, B_1, B_2) \cdot v_B)$$

para todo  $v \in E^*$  y  $\lambda \in \mathbb{R}^*$ , induciendo una transformación bien definida al hacer la interpretación proyectiva. En resumen, las ecuaciones del cambio de base en coordenadas homogéneas quedan:

$$p_{B_2} = M(\text{Id}_{P(V)}, B_1, B_2) \cdot p_{B_1},$$

donde  $p_{B_1}$  y  $p_{B_2}$  son las coordenadas homogéneas de un punto genérico  $p \in P(E)$  en  $B_1$  y  $B_2$  respectivamente.

Por ejemplo, en  $\mathbb{P}^2$  las ecuaciones del cambio de base en coordenadas homogéneas de la base  $B_1 = \{(1, -1, 0), (2, 0, 0), (3, 1, 1)\}$  a la base  $B_2 = \{(1, -1, 0), (1, 1, 0), (1, 1, 1)\}$  son

$$\begin{pmatrix} y_0 \\ \vdots \\ y_1 \\ \vdots \\ y_2 \end{pmatrix} = M(\text{Id}_{\mathbb{P}^2}, B_1, B_2) \cdot \begin{pmatrix} x_0 \\ \vdots \\ x_1 \\ \vdots \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_0 \\ \vdots \\ x_1 \\ \vdots \\ x_2 \end{pmatrix},$$

donde  $p_{B_1} = (x_0 : x_1 : x_2)$  y  $p_{B_2} = (y_0 : y_1 : y_2)$ .

#### 4.7.1. Ecuaciones implícitas o cartesianas de las variedades proyectivas.

Es natural preguntarse el interés de las coordenadas homogéneas. La gran ventaja que nos proporcionan es que nos permiten analizar las variedades proyectivas de  $P(E)$  a través de las ecuaciones implícitas de subespacios vectoriales en  $E$ . Esto es importante a la vez que simple.

Supongamos que fijamos una base  $B = \{v_0, v_1, \dots, v_n\}$  en  $E$  para poder asignar coordenadas homogéneas en  $P(E)$ . Consideraremos una variedad proyectiva  $X \subseteq P(E)$  de dimensión  $k \leq n = \dim P(E)$ , y tomemos su subespacio vectorial  $\hat{X} \subseteq E$  asociado con  $\dim \hat{X} = k+1 \leq n+1 = \dim E$ . A continuación tomamos unas ecuaciones implícitas (o cartesianas) de  $\hat{X}$  en la base  $B$ :

$$(I) = \begin{cases} a_{1,0}x_0 + a_{1,1}x_1 + \dots + a_{1,n}x_n = 0 \\ \vdots \\ a_{n-k,0}x_0 + a_{n-k,1}x_1 + \dots + a_{n-k,n}x_n = 0 \end{cases}$$

Esto significa que un vector  $v \in E$  está en  $\hat{X}$  si y solo si sus coordenadas  $v_B = (x_0, x_1, \dots, x_n)$  en la base  $B$  satisfacen el sistema de ecuaciones lineales homogéneo anterior, donde recuerda que

$$\text{rang} \begin{pmatrix} a_{1,0} & a_{1,1} & \cdots & a_{1,n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{n-k,0} & a_{n-k,1} & \cdots & a_{n-k,n} \end{pmatrix} = n - k.$$

Por definición, las ecuaciones implícitas en (I) son unas *ecuaciones implícitas de la variedad proyectiva*  $X$  en la base  $B$ , pero entendidas en coordenadas homogéneas.

Esto significa que un punto  $p \in P(E)$  está en  $X$  si y solo si sus coordenadas homogéneas  $p_B = (x_0 : x_1 : \dots : x_n)$  en la base  $B$  de  $E$  satisfacen el sistema (I).

Observemos que el factor de proporcionalidad  $\lambda \in \mathbb{R}^*$  inherente a las coordenadas homogéneas es irrelevante, ya que  $(x_0, x_1, \dots, x_n)$  satisface (I) si y solo si  $\lambda(x_0, x_1, \dots, x_n)$  satisface (I) para todo  $\lambda \in \mathbb{R}^*$ . Reparemos también en el hecho de que, como en el caso de subespacios vectoriales, las ecuaciones implícitas de variedades proyectivas son siempre sistemas de ecuaciones homogéneas.

Por ejemplo, si en  $\mathbb{P}^2$  consideramos los puntos  $p = (1 : 1 : -2)$ ,  $q = (-1 : -1 : 0)$ , la recta proyectiva  $R = p \vee q$  es la variedad proyectiva asociada a plano vectorial de  $\mathbb{R}^3$  dado por

$$\widehat{R} = \widehat{p \vee q} = L(\{1, 1, 2\}, \{-1, -1, 0\}) = \{(x_0, x_1, x_2) : x_0 - x_1 = 0\}.$$

De aquí que en ecuaciones implícitas en la base canónica  $B_0$  de  $\mathbb{R}^3$

$$R = \{(x_0 : x_1 : x_2) : x_0 - x_1 = 0\}.$$

## 4.8. Proyectividades

Es una idea recurrente en geometría estudiar las transformaciones naturales de la categoría con la que se trabaja (homeomorfismos en topología, isomorfismos en espacios vectoriales, afinidades en espacios afines,...). El espacio proyectivo no es una excepción, y sus transformaciones naturales, que presentaremos a continuación, se conocen con el nombre de *proyectividades*.

El concepto de proyectividad es muy natural, se corresponde con el de una transformación lineal entre espacios vectoriales que desciende vía las proyecciones a una aplicación entre sus proyectivos base. Naturalmente, como el proyectivo esencialmente es el conjunto de las rectas vectoriales, necesitamos que esas transformaciones lineales lleven rectas vectoriales a rectas vectoriales, lo que excluye la posibilidad de que puedan tener núcleo, esto es, han de ser monomorfismos.

Sean  $E$ ,  $E'$  espacios vectoriales con  $\dim E \leq \dim E'$ , consideremos sus espacios proyectivos  $P(E)$ ,  $P(E')$  asociados, y llamemos  $\pi_E: E \rightarrow P(E)$  y  $\pi_{E'}: E' \rightarrow P(E')$  a las correspondientes proyecciones.

**Definición 4.55** Una aplicación  $f: P(E) \rightarrow P(E')$  se dice ser una proyectividad si existe una aplicación lineal inyectiva (monomorfismo)  $\widehat{f}: E \rightarrow E'$  tal que  $\pi_{E'} \circ \widehat{f} = f \circ \pi_E$ , esto es, tal que el siguiente diagrama es comutativo:

$$\begin{array}{ccc} E & \xrightarrow{\widehat{f}} & E' \\ \pi_E \downarrow & & \downarrow \pi_{E'} \\ P(E) & \xrightarrow{f} & P(E') \end{array}$$

De la aplicación lineal  $\widehat{f}: E \rightarrow E'$  se dice que es una aplicación lineal asociada a la proyectividad  $f$ .

**Proposición 4.56** La aplicación lineal  $\widehat{f}: E \rightarrow E'$  asociada a la proyectividad  $f: P(E) \rightarrow P(E')$  es única salvo multiplicarla por un escalar no nulo.

**DEMOSTRACIÓN:** Si  $\widehat{f}_1$  y  $\widehat{f}_2$  son dos monomorfismos haciendo comutativo el anterior diagrama para  $f$ , entonces para todo  $v \in E^*$  se tiene que  $\pi_{E'}(\widehat{f}_i(v)) = f(\pi_E(v))$ ,  $i = 1, 2$ , de donde  $L(\{\widehat{f}_1(v)\}) = L(\{\widehat{f}_2(v)\})$ . Inferimos que

$$\widehat{f}_1(v) = \lambda_v \widehat{f}_2(v), \quad \text{para algún } \lambda_v \in \mathbb{R}^*.$$

Por tanto, si  $u, v \in E$  son linealmente independientes se tiene que

$$\lambda_u \widehat{f}_2(u) + \lambda_v \widehat{f}_2(v) = \widehat{f}_1(u) + \widehat{f}_1(v) = \widehat{f}_1(u+v) = \lambda_{u+v} \widehat{f}_2(u+v) = \lambda_{u+v} \widehat{f}_2(u) + \lambda_{u+v} \widehat{f}_2(v),$$

y de aquí que  $\lambda_u = \lambda_v = \lambda_{u+v}$  ya que  $\widehat{f}_2(u)$  y  $\widehat{f}_2(v)$  son linealmente independientes (recordemos que  $\widehat{f}_2$  es un monomorfismo). Concluimos que  $\lambda = \lambda_v \in \mathbb{R}^*$  no depende de  $v \in E^*$ , y de aquí que  $\widehat{f}_1 = \lambda \widehat{f}_2$  como habíamos afirmado. ■

Las siguientes propiedades de las proyectividades son de comprobación rutinaria, completar los detalles.

**Propiedades 4.57** *Son ciertos los siguientes enunciados:*

- *Toda proyectividad es inyectiva.* Usar que todo monomorfismo lleva rectas vectoriales distintas en rectas vectoriales distintas.
- *$\text{Id}_{P(E)}$  es una proyectividad.* La aplicación lineal asociada es  $\text{Id}_E$ .
- *La composición de proyectividades es una proyectividad.* Su aplicación lineal asociada es la composición de las aplicaciones lineales asociadas.
- *Una proyectividad  $f$  es biyectiva si y solo si su aplicación lineal asociada  $\widehat{f}$  es un isomorfismo, y en ese caso su inversa  $f^{-1}$  también es una proyectividad con aplicación lineal asociada  $\widehat{f}^{-1}$ . A las proyectividades biyectivas se las llama homografías y representan los isomorfismos o equivalencias en la categoría de los espacios proyectivos.*
- *Todo espacio proyectivo  $n$ -dimensional  $P(E)$  es homográfico a  $\mathbb{P}^n$ .* Basta con tomar un isomorfismo  $\widehat{f}: E \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$  e inducir la homografía  $f: P(E) \rightarrow \mathbb{P}^n$  que lo tiene como aplicación lineal asociada.
- *Si  $X$  es una variedad proyectiva de  $P(E)$  y  $f: P(E) \rightarrow P(E')$  es una proyectividad, entonces  $f(X)$  es una variedad proyectiva de  $P(E')$  de la misma dimensión.* En particular,  $P(E)$  es homográfico a  $f(P(E))$  vía  $f$ . Basta observar que  $\widehat{f}(\widehat{X}) = \widehat{f}(\widehat{X})$ , donde  $\widehat{f}$  es la aplicación lineal asociada a  $f$ .

Como en el caso del cambio de base también podemos hablar de matriz de una proyectividad en unas bases.

**Definición 4.58** *Si  $f: P(E) \rightarrow P(E')$  es una proyectividad con aplicación lineal asociada  $\widehat{f}: E \rightarrow E'$ , y  $B, B'$  son bases de  $E, E'$  respectivamente, se define la matriz de  $f$  en  $B$  y  $B'$  como*

$$M(f, B, B') := M(\widehat{f}, B, B').$$

*Nótese que  $M(f, B, B') = \lambda M(\widehat{f}, B, B')$  también es matriz de  $f$  en  $B$  y  $B'$  para todo  $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ , ya que  $\widehat{f}$  está determinada salvo un factor de proporcionalidad no nulo. En este sentido la matriz  $M(f, B, B')$  es única salvo un factor de proporcionalidad no nulo.*

La razón para definir las ecuaciones matriciales de  $f$  en  $B$  y  $B'$  como las de  $\widehat{f}$  reside en que la compatibilidad con las coordenadas homogéneas, ya que el factor de

proporcionalidad que añaden éstas se arrastra sin problemas en la ecuación matricial de  $\hat{f}$ , esto es,

$$M(\hat{f}, B, B') \cdot \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} M(\hat{f}, B, B') \cdot \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \end{pmatrix}$$

para todo  $\lambda \in \mathbb{R}^*$ . Por tanto las ecuaciones analíticas de  $f$  en coordenadas homogéneas respecto de las bases  $B$  en  $E$  y  $B'$  en  $E'$  quedan, expresadas de forma matricial, de la siguiente forma:

$$f(p)_{B'} = M(f, B, B')p_B,$$

donde  $p_B$  y  $f(p)_{B'}$  son las coordenadas homogéneas de un punto genérico  $p \in P(E)$  en  $B$  y de su imagen  $f(p)$  en  $B'$ , respectivamente.

Naturalmente, si  $B_1, B_2$  son bases de  $E$  y  $B'_1, B'_2$  son bases de  $E'$ , se tiene que

$$M(f, B_2, B'_2) = M(\text{Id}_{P(E')}, B'_1, B'_2) \cdot M(f, B_1, B'_1) \cdot M(\text{Id}_{P(E)}, B_2, B_1).$$

Acabaremos con el siguiente resultado.

**Teorema 4.59** Consideremos  $P(E), P(E')$  espacios proyectivos con  $\dim P(E) = n \leq m = \dim P(E')$ , y sean  $\{p_0, p_1, \dots, p_n\} \subset P(E)$ ,  $\{p'_0, p'_1, \dots, p'_n\} \subset P(E')$  sistemas de puntos proyectivamente independientes.

Entonces existe una proyectividad  $f: P(E) \rightarrow P(E')$  tal que

$$f(p_i) = p'_i, \quad i = 0, 1, \dots, n.$$

Si además  $n = m$  entonces  $f$  es una homografía.

DEMOSTRACIÓN: Escribamos

$$p_i = \pi(v_i), \quad p'_i = \pi(v'_i), \quad i = 0, 1, \dots, n.$$

De nuestras hipótesis  $\{v_0, v_1, \dots, v_n\}$  es base de  $E$  y  $\{v'_0, v'_1, \dots, v'_n\}$  son linealmente independientes en  $E'$ . Por tanto, para cada elección de  $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$  el Teorema Fundamental del Álgebra Lineal garantiza que existe un único monomorfismo lineal  $\hat{f}: E \rightarrow E'$  satisfaciendo

$$\hat{f}(v_0) = v'_0, \quad \hat{f}(v_i) = \lambda_i v'_i, \quad i = 1, \dots, n.$$

La proyectividad que induce  $\hat{f}$  resuelve el teorema. ■

**Observación 4.60** La demostración del Teorema 4.59 nos dice que no podemos esperar unicidad para la proyectividad  $f$ . En cualquier caso nos ofrece todas las posibles soluciones parametrizadas por los escalares  $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ .

**Corolario 4.61** Consideremos  $P(E), P(E')$  espacios proyectivos con  $\dim P(E) = n = \dim P(E')$ , y sean  $\{p_0, p_1, \dots, p_n\} \subset P(E)$ ,  $\{p'_0, p'_1, \dots, p'_n\} \subset P(E')$  sistemas de puntos proyectivamente independientes. Consideremos puntos  $q \in P(E), q' \in P(E')$  tales que  $\{p_0, p_1, \dots, p_n, q\}$  y  $\{p'_0, p'_1, \dots, p'_n, q'\}$  no contengan  $n + 1$  puntos proyectivamente dependientes (esto es, están en posición general).

Entonces existe una única homografía  $f: P(E) \rightarrow P(E')$  tal que

$$f(p_i) = p'_i, \quad i = 0, 1, \dots, n, \quad y \quad f(q) = q'.$$

**DEMOSTRACIÓN:** Por la prueba del Teorema 4.59, una proyectividad  $f: P(E) \rightarrow P(E')$  tal que  $f(p_i) = p'_i$ ,  $i = 0, 1, \dots, n$ , viene asociada a un monomorfismo  $\hat{f}: E \rightarrow E'$  con

$$\hat{f}(v_0) = v'_0, \quad \hat{f}(v_i) = \lambda_i v'_i, \quad i = 1, \dots, n,$$

donde

- $B = \{v_0, v_1, \dots, v_n\}$  es base de  $E$  con  $\pi(v_i) = p_i$ ,  $i = 0, 1, \dots, n$ ,
- $B' = \{v'_0, v'_1, \dots, v'_n\}$  es base de  $E'$  con  $\pi(v'_i) = p'_i$ ,  $i = 0, 1, \dots, n$ , y
- $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ .

Si escribimos  $q_B = (\mu_0 : \mu_1 : \dots : \mu_n)$  y  $q'_{B'} = (\mu'_0 : \mu'_1 : \dots : \mu'_n)$ , esto es,

$$\pi\left(\sum_{i=0}^n \mu_i v_i\right) = q, \quad \pi\left(\sum_{i=0}^n \mu'_i v'_i\right) = q',$$

la hipótesis de posición general garantiza que  $\mu_i, \mu'_i \neq 0$  para todo  $i = 0, 1, \dots, n$ ; sin pérdida de generalidad podemos suponer  $\mu_0 = \mu'_0$ . Es claro que la elección  $\lambda_i = \mu'_i / \mu_i$ ,  $i = 1, \dots, n$ , es la única posible para que

$$\hat{f}\left(\sum_{i=0}^n \mu_i v_i\right) = \sum_{i=0}^n \mu'_i v'_i,$$

o equivalentemente  $f(q) = q'$ . ■

**Ejercicio 4.62** En  $\mathbb{P}^2$  determinar la expresión matricial en la base canónica  $B_0$  de  $\mathbb{R}^3$  de todas las homografías  $h: \mathbb{P}^2 \rightarrow \mathbb{P}^2$  satisfaciendo:

$$h((1 : 1 : 1)) = (1 : 0 : 1), \quad h((1 : 1 : 0)) = (1 : 0 : -1), \quad h((1 : 0 : 0)) = (1 : 1 : 0).$$

**SOLUCIÓN:** Supongamos que  $h: \mathbb{P}^2 \rightarrow \mathbb{P}^2$  es una homografía satisfaciendo lo requerido, y llamemos  $\hat{h}: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  a su aplicación lineal asociada. Es claro que

$$\hat{h}((1, 1, 1)) = \lambda_1(1, 0, 1), \quad \hat{h}((1, 1, 0)) = \lambda_2(1, 0, -1), \quad \hat{h}((1, 0, 0)) = \lambda_3(1, 1, 0)$$

para escalares  $\lambda_j \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ ,  $j = 1, 2, 3$ . Si consideramos la base de  $\mathbb{R}^3$

$$B_1 = \{(1, 1, 1), (1, 1, 0), (1, 0, 0)\},$$

es claro que

$$M(\hat{h}, B_1, B_0) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & \lambda_2 & \lambda_3 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \\ \lambda_1 & -\lambda_2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Como

$$M(\text{Id}_{\mathbb{R}^3}, B_1, B_0) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

entonces

$$M(\hat{h}, B_0, B_0) = M(\hat{h}, B_1, B_0) \cdot M(\text{Id}_{\mathbb{R}^3}, B_1, B_0)^{-1} = \begin{pmatrix} \lambda_3 & \lambda_2 - \lambda_3 & \lambda_1 - \lambda_2 \\ \lambda_3 & -\lambda_3 & 0 \\ 0 & -\lambda_2 & \lambda_1 + \lambda_2 \end{pmatrix}.$$

Por tanto las homografías que resuelven el ejercicio son las que tienen matrices

$$M(h, B_0, B_0) = \mu \begin{pmatrix} 1 & \lambda - 1 & \gamma - \lambda \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & -\lambda & \gamma + \lambda \end{pmatrix}, \quad \mu, \lambda, \gamma \in \mathbb{R} \setminus \{0\}.$$

■

**Ejercicio 4.63** Una cuaterna de puntos  $\{p_1, p_2, p_3, p_4\}$  en el plano proyectivo  $\mathbb{P}^2$  se dice un cuadrilátero si no contiene ninguna terna de puntos alineados (esto es, cada tres de ellos son proyectivamente independientes).

Demuestra que dados dos cuadriláteros  $\{p_1, p_2, p_3, p_4\}$  y  $\{q_1, q_2, q_3, q_4\}$  en  $\mathbb{P}^2$ , existe una única homografía  $f: \mathbb{P}^2 \rightarrow \mathbb{P}^2$  tal que

$$f(p_i) = q_i, \quad i = 1, 2, 3, 4.$$

Determina la matriz  $M(f, B_0, B_0)$  en la base canónica  $B_0$  de  $\mathbb{R}^3$  de la homografía  $f: \mathbb{P}^2 \rightarrow \mathbb{P}^2$  que satisface  $f(p_i) = q_i$ ,  $i = 1, 2, 3, 4$ , para

$$p_1 = (1 : 1 : 0), p_2 = (1 : -1 : 0), p_3 = (1 : 0 : 1), p_4 = (1 : 0 : -1)$$

$$q_1 = (1 : 1 : 0), q_2 = (1 : -1 : 0), q_3 = (0 : 1 : 1), q_4 = (0 : 1 : -1)$$

SOLUCIÓN: Determinaremos la homografía  $f: \mathbb{P}^2 \rightarrow \mathbb{P}^2$  que resuelva el ejercicio a partir de su isomorfismo lineal asociado  $\hat{f}: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ , la unicidad será evidente en el proceso. Recordemos que si  $\hat{f}$  es una aplicación lineal asociada a  $f$  entonces

$$\pi \circ \hat{f} = f \circ \pi,$$

donde  $\pi: (\mathbb{R}^3)^* \equiv \mathbb{R}^3 \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{P}^2$  es la proyección canónica.

La primera parte del ejercicio es consecuencia inmediata del Corolario 4.61. Repasemos no obstante las ideas de la prueba en este caso particular. Escribamos  $p_i = \pi(v_i)$  y  $q_i = \pi(u_i)$  para  $v_i, u_i \in (\mathbb{R}^3)^*$ ,  $i = 1, 2, 3, 4$ . Con este lenguaje, existirá una homografía  $f: \mathbb{P}^2 \rightarrow \mathbb{P}^2$  tal que  $f(p_i) = q_i$ ,  $i = 1, 2, 3, 4$ , si y solo si existe un isomorfismo lineal  $\hat{f}: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  tal que  $\hat{f}(L(\{v_i\})) = L(\{u_i\})$ ,  $i = 1, 2, 3, 4$ .

Llamemos  $B_1 = \{v_1, v_2, v_3\}$  y  $B_2 = \{u_1, u_2, u_3\}$ , y démonos cuenta de que ambos sistemas de vectores son bases de  $\mathbb{R}^3$  por nuestras hipótesis.

Un isomorfismo  $\hat{f}: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  satisface  $\hat{f}(L(\{v_i\})) = L(\{u_i\})$  para  $i = 1, 2, 3$  si y solo si su matriz  $M(\hat{f}, B_1, B_2)$  es de la forma

$$M(\hat{f}, B_1, B_2) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix}$$

para algunos  $\lambda_i \in \mathbb{R}^*, i = 1, 2, 3$ . Nuestro problema es equivalente a probar que existen un único (salvo factor de proporcionalidad)  $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) \in (\mathbb{R}^*)^3$  para el que el isomorfismo  $\hat{f}: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  con matriz

$$M(\hat{f}, B_1, B_2) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix}$$

satisface además  $\hat{f}(L(\{v_4\})) = L(\{u_4\})$ .

Escribamos

$$v_4 = \sum_{j=1}^3 \mu_j v_j, \quad u_4 = \sum_{j=1}^3 \nu_j u_j,$$

y observemos que, al ser  $p_1, p_2, p_3, p_4$  y  $q_1, q_2, q_3, q_4$  cuadriláteros, necesariamente todos los escalares anteriores son no nulos, esto es,

$$\mu_j, \nu_j \neq 0 \quad \forall j = 1, 2, 3.$$

En efecto, en otro caso alguna terna de puntos en  $\{p_1, p_2, p_3, p_4\}$  o en  $\{q_1, q_2, q_3, q_4\}$  estarían alineados, lo que contradiría nuestras hipótesis.

Usando que  $\hat{f}(v_i) = \lambda_i u_i$ ,  $i = 1, 2, 3$ , hemos de garantizar que

$$\sum_{j=1}^3 \nu_j u_j = u_4 = \hat{f}(v_4) = \sum_{j=1}^3 (\lambda_j \mu_j) u_j.$$

En definitiva, la condición  $\hat{f}(L(\{v_4\})) = L(\{u_4\})$  es equivalente a

$$(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) \in L((\{\nu_1/\mu_1, \nu_2/\mu_2, \nu_3/\mu_3\})^*),$$

lo que fuerza una elección única de  $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) \in (\mathbb{R}^*)^3$  salvo un factor de proporcionalidad, y determina una únicamente una homografía  $f: \mathbb{P}^2 \rightarrow \mathbb{P}^2$  satisfaciendo  $\pi \circ \hat{f} = f \circ \pi$  que resuelve la primera parte del ejercicio.

Para la segunda parte, elijamos

$$p_1 = (1 : 1 : 0), p_2 = (1 : -1 : 0), p_3 = (1 : 0 : 1), p_4 = (1 : 0 : -1)$$

$$q_1 = (1 : 1 : 0), q_2 = (1 : -1 : 0), q_3 = (0 : 1 : 1), q_4 = (0 : 1 : -1).$$

En este caso podemos elegir

$$v_1 = (1, 1, 0), v_2 = (1, -1, 0), v_3 = (1, 0, 1), v_4 = (1, 0, -1)$$

$$u_1 = (1, 1, 0), u_2 = (1, -1, 0), u_3 = (0, 1, 1), u_4 = (0, 1, -1),$$

y observemos que  $v_4 = v_1 + v_2 - v_3$  y  $u_4 = u_1 - u_2 - u_3$ .

Llamemos  $B_1 = \{v_1, v_2, v_3\}$  y  $B_2 = \{u_1, u_2, u_3\}$ . Siguiendo la argumentación anterior hemos de encontrar  $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) \in (\mathbb{R}^*)^3$  tal que el isomorfismo  $\hat{f}: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  con

$$M(\hat{f}, B_1, B_2) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix}$$

satisfaga  $\hat{f}(v_4) \in L(\{u_4\})$ , esto es,

$$\lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 - \lambda_3 u_3 \in L(\{u_1 - u_2 - u_3\}).$$

Basta con tomar  $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) = \lambda(1, -1, 1)$  para cualquier  $\lambda \neq 0$ . Por tanto, el isomorfismo  $\hat{f}: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  con

$$M(\hat{f}, B_1, B_2) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(o cualquier múltiplo no nulo suyo) induce la única homografía  $f: \mathbb{P}^2 \rightarrow \mathbb{P}^2$  resolviendo el ejercicio. Si deseamos calcular  $M(f, B_0, B_0)$ , observemos que por definición

$$M(f, B_1, B_2) = \mu M(\hat{f}, B_1, B_2) = \mu \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Como

$$M(\text{Id}, B_1, B_0) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad M(\text{Id}, B_2, B_0) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

y

$$M(f, B_0, B_0) = M(\text{Id}, B_2, B_0) \cdot M(f; B_1, B_2) \cdot M(\text{Id}, B_1, B_0)^{-1},$$

al final queda

$$M(f, B_0, B_0) = \mu \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1}.$$

■

**Ejercicio 4.64** Determina la matriz en la base usual de  $\mathbb{R}^3$  de la única homografía  $f: \mathbb{P}^2 \rightarrow \mathbb{P}^2$  que transforma respectivamente las rectas proyectivas  $x_0 - x_1 + x_2 = 0, x_0 + 2x_2 = 0, x_0 + x_1 = 0$  en las rectas proyectivas  $x_0 = 0, x_1 = 0, x_2 = 0$ , y además fija el punto  $(1 : 1 : 1) \in \mathbb{P}^2$ .

SOLUCIÓN: Demos nombre a las rectas proyectivas

$$R_1 = \{(x_0 : x_1 : x_2) \in \mathbb{P}^2 : x_0 - x_1 + x_2 = 0\},$$

$$R_2 = \{(x_0 : x_1 : x_2) \in \mathbb{P}^2 : x_0 + 2x_2 = 0\},$$

$$R_3 = \{(x_0 : x_1 : x_2) \in \mathbb{P}^2 : x_0 + x_1 = 0\},$$

$$S_1 = \{(x_0 : x_1 : x_2) \in \mathbb{P}^2 : x_0 = 0\},$$

$$S_2 = \{(x_0 : x_1 : x_2) \in \mathbb{P}^2 : x_1 = 0\},$$

$$S_3 = \{(x_0 : x_1 : x_2) \in \mathbb{P}^2 : x_2 = 0\}.$$

Sea  $f: \mathbb{P}^2 \rightarrow \mathbb{P}^2$  una homografía que lleve  $f(R_j) = S_j$ ,  $j = 1, 2, 3$ . Necesariamente

$$f(R_1 \cap R_2) = S_1 \cap S_2, \text{ esto es, } f(2 : 1 : -1) = (0 : 0 : 1),$$

$$f(R_1 \cap R_3) = S_1 \cap S_3, \text{ esto es, } f(1 : -1 : -2) = (0 : 1 : 0),$$

$$f(R_2 \cap R_3) = S_2 \cap S_3, \text{ esto es, } f(2 : 2 : -1) = (1 : 0 : 0),$$

Por tanto, si llamamos  $B_1 = \{(2, 1, -1), (1, -1, -2), (2, 2, -1)\}$  (base de  $\mathbb{R}^3$ ) y  $B_0$  a la base canónica de  $\mathbb{R}^3$ , el isomorfismo lineal  $\hat{f}$  asociado a una tal  $f$  ha de satisfacer:

$$M(\hat{f}, B_1, B_0) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \gamma \\ 0 & \mu & 0 \\ \lambda & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

para  $\lambda, \mu, \gamma \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ . Por tanto

$$M(\hat{f}, B_0) \equiv M(\hat{f}, B_0, B_0) = M(\hat{f}, B_1, B_0) \cdot M(\text{Id}_{\mathbb{R}^3}, B_0, B_1) = M(\hat{f}, B_1, B_0) \cdot M(\text{Id}_{\mathbb{R}^3}, B_1, B_0)^{-1},$$

y como

$$M(\text{Id}_{\mathbb{R}^3}, B_1, B_0) = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 2 \\ -1 & -2 & -1 \end{pmatrix},$$

queda finalmente

$$M(\hat{f}, B_0) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \gamma \\ 0 & \mu & 0 \\ \lambda & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 2 \\ -1 & -2 & -1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} -\gamma & \gamma & -\gamma \\ -\frac{\mu}{3} & 0 & -\frac{2\mu}{3} \\ \frac{5\lambda}{3} & -\lambda & \frac{4\lambda}{3} \end{pmatrix}.$$

Como deseamos que  $f(1 : 1 : 1) = (1 : 1 : 1)$ , necesitamos que

$$(\gamma, -\mu, 2\lambda) = \beta(1, 1, 1)$$

para algún  $\beta \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ . Basta con elegir

$$\gamma = \beta, \quad -\mu = \beta, \quad 2\lambda = \beta,$$

que están determinados únicamente salvo proporcionalidad. Queda finalmente

$$M(\hat{f}, B_0) = \beta \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ \frac{1}{3} & 0 & \frac{2}{3} \\ \frac{5}{6} & -\frac{1}{2} & \frac{2}{3} \end{pmatrix} = \frac{\beta}{3} \begin{pmatrix} -6 & 6 & -6 \\ 2 & 0 & 4 \\ 5 & -3 & 4 \end{pmatrix},$$

de donde  $f: \mathbb{P}^2 \rightarrow \mathbb{P}^2$  es la homografía con matriz

$$M(f, B_0) = \begin{pmatrix} -6 & 6 & -6 \\ 2 & 0 & 4 \\ 5 & -3 & 4 \end{pmatrix}$$

o cualquier múltiplo suya. ■

## 4.9. Geometría afín versus geometría proyectiva.

La magia de la geometría proyectiva es que, por sorprendente que pueda parecer, engloba o subsume a la geometría afín.

Sea  $E$  un espacio vectorial con  $\dim E = n + 1$  considerado de forma canónica como espacio afín  $(E, \overrightarrow{E} \equiv E, \rightarrow)$  (ver Definición 2.5). Fijemos en un hiperplano afín  $\mathcal{A} \subseteq E$  con la condición de que

$$\overrightarrow{0} \notin \mathcal{A}.$$

Como siempre  $\overrightarrow{\mathcal{A}}$  denotará a la variedad de dirección de  $\mathcal{A}$ , que en este caso es un subespacio vectorial de  $E$  con  $\dim \overrightarrow{\mathcal{A}} = n$ . Como  $\overrightarrow{0} \notin \mathcal{A}$ , siempre podemos escribir

$$\mathcal{A} = w + \overrightarrow{\mathcal{A}} \quad \text{para algún } w \in \mathcal{A} \text{ (luego } w \notin \overrightarrow{\mathcal{A}}).$$

Es importante que recuerdes que  $(\mathcal{A}, \overrightarrow{\mathcal{A}}, \rightarrow)$  es intrínsecamente un espacio afín  $n$ -dimensional.

La siguiente definición nos presenta el embebimiento canónico de  $\mathcal{A}$  en  $P(E)$ .

**Definición 4.65** Como  $\mathcal{A} \subseteq E^* = E \setminus \{\vec{0}\}$ , podemos definir

$$\epsilon: \mathcal{A} \rightarrow P(E), \quad \epsilon(v) := \pi(v),$$

donde  $\pi: E^* \rightarrow P(E)$  es la proyección natural al proyectivo  $n$ -dimensional sobre  $E$ . La aplicación  $\epsilon$  es conocida como el embebimiento canónico del espacio afín  $\mathcal{A}$  en el espacio proyectivo  $P(E)$ .

Observemos que  $\epsilon$  no es sino la restricción a  $\mathcal{A}$  de la proyección canónica sobre el proyectivo  $P(E)$ .

El siguiente resultado es crucial porque explica como la geometría del espacio afín  $\mathcal{A}$  puede entenderse contenida dentro de la proyectiva que se desarrolla en  $P(E)$ .

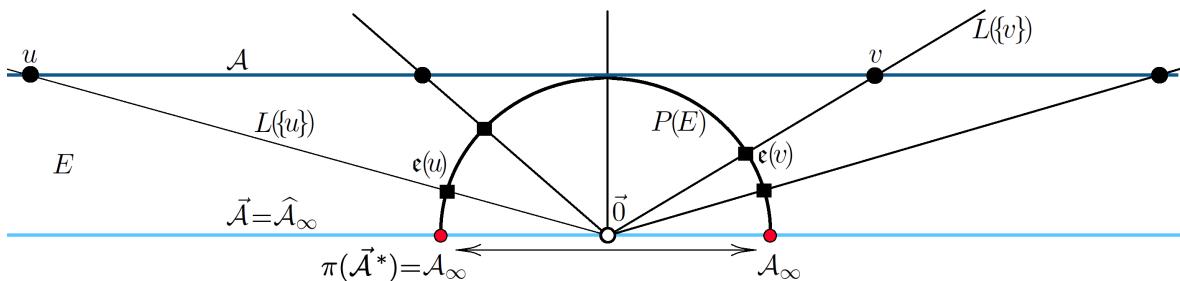
**Proposición 4.66** El embebimiento canónico  $\epsilon: \mathcal{A} \rightarrow P(E)$  satisface las siguientes propiedades:

(I)  $\epsilon$  es inyectiva.

(II)  $\mathcal{A}_\infty := P(E) \setminus \epsilon(\mathcal{A})$  es un hiperplano proyectivo con  $\widehat{\mathcal{A}}_\infty = \overline{\mathcal{A}}$ , esto es,  $\pi(\overline{\mathcal{A}}^*) = \mathcal{A}_\infty$ .

(III) Si  $S = u + \vec{S}$  es un subespacio afín de  $\mathcal{A}$  y llamamos  $X_S$  a la variedad proyectiva  $V(\epsilon(S)) \subseteq P(E)$ , entonces

- $\widehat{X}_S = L(S) = L(\{u\}) + \vec{S}$ ; en particular  $S = \widehat{X}_S \cap \mathcal{A}$  y  $\dim X_S = \dim S$ .
- $X_S \setminus \mathcal{A}_\infty = \epsilon(S)$  y  $S_\infty := X_S \cap \mathcal{A}_\infty = \pi(\vec{S}^*)$ .



**DEMOSTRACIÓN:** Para demostrar (i) pongamos  $\mathcal{A} = w + \overline{\mathcal{A}}$ ,  $w \notin \overline{\mathcal{A}}$ , y tomemos puntos  $w + u_1, w + u_2 \in \mathcal{A}$ , donde  $u_1, u_2 \in \overline{\mathcal{A}}$ . Si  $\epsilon(w + u_1) = \epsilon(w + u_2)$ , esto es,  $\pi(w + u_1) = \pi(w + u_2)$ , deducimos que  $w + u_1 = \lambda(w + u_2)$  para algún  $\lambda \neq 0$ . Esto implica  $(1 - \lambda)w = \lambda u_2 - u_1 \in \overline{\mathcal{A}}$ , de donde al ser  $w \notin \overline{\mathcal{A}}$  inferimos que  $\lambda = 1$  y  $u_1 = u_2$ . Por tanto  $w + u_1 = w + u_2$  y  $\epsilon$  es inyectiva.

Para comprobar (ii) observemos que a una recta vectorial  $L(\{v\})$  en  $E$  le pueden pasar dos cosas mutuamente excluyentes

- $L(\{v\}) \subseteq \overline{\mathcal{A}}$  y  $\pi(v) \in \pi(\overline{\mathcal{A}}^*)$ .
- $L(\{v\}) \oplus \overline{\mathcal{A}} = E$ , en cuyo caso  $L(\{v\})$  y  $\mathcal{A}$  son complementarios y se cortan en un punto, esto es,  $\pi(v) \in \pi(\mathcal{A}) = \epsilon(\mathcal{A})$ .

Por tanto  $P(E) = \pi(\mathcal{A}) \cup \pi(\overline{\mathcal{A}}^*) = \epsilon(\mathcal{A}) \cup \pi(\overline{\mathcal{A}}^*)$ , siendo la unión disjunta.

Para probar (iii) consideremos un subespacio afín  $S = u + \vec{S}$  de  $\mathcal{A}$  y escribamos  $S = u + \vec{S} \subseteq \mathcal{A}$ . Las inclusiones

$$S \subseteq \pi^{-1}(\epsilon(S)) \subseteq \pi^{-1}(X_S) = \widehat{X}_S^*,$$

implican que  $L(S) \subseteq \widehat{X}_S$  y  $\pi(L(S)^*) \subseteq X_S$ . Como  $\mathbf{e}(S) \subseteq \pi(L(S)^*)$  necesariamente  $X_S \subseteq \pi(L(S)^*)$ , y por tanto  $X_S = \pi(L(S)^*)$ . En particular  $\widehat{X}_S = L(S) = L(\{u\}) \oplus \vec{S}$  y  $\dim X_S = \dim \widehat{X}_S - 1 = \dim S$ .

Para una recta vectorial  $L(\{v\})$  en  $\widehat{X}_S = L(\{u\}) \oplus \vec{S}$  pueden pasar dos cosas mutuamente excluyentes:

- $L(\{v\}) \subseteq \vec{S}$  y  $\pi(v) \in \pi(\overrightarrow{\mathbb{S}}^*)$ .
- $L(\{v\}) \oplus \vec{S} = \widehat{X}_S$ , en cuyo caso  $L(\{v\})$  y  $S = u + \vec{S}$  son suplementarios en el espacio afín  $\widehat{X}_S$  y se cortan en un punto, esto es,  $\pi(v) \in \pi(S) = \mathbf{e}(S)$ .

Por tanto  $X_S = \pi(S) \cup \pi(\vec{S}^*) = \mathbf{e}(S) \cup \pi(\vec{S}^*)$ , siendo la unión disjunta. Esto concluye la prueba. ■

**Definición 4.67** Diremos que  $P(E)$  es la proyectivización de  $\mathcal{A}$  como hiperplano afín de  $E$ . Al hiperplano proyectivo  $\mathcal{A}_\infty \subseteq P(E)$  se le llamará hiperplano del infinito relativo al hiperplano afín  $\mathcal{A}$  de  $E$ . Es claro que  $\mathcal{A}_\infty$  sólo depende de la variedad de dirección  $\overrightarrow{\mathcal{A}}$  de  $\mathcal{A}$ , y por tanto hiperplanos paralelos en  $E^*$  inducen el mismo hiperplano del infinito.

Dado  $S \subseteq \mathcal{A}$  subespacio afín, a  $X_S \subseteq P(E)$  se le llamará proyectivización de  $S$  relativa al hiperplano afín  $\mathcal{A}$  de  $E$ . Igualmente, a  $S_\infty := X_S \cap \mathcal{A}_\infty$  se le llamará variedad del infinito de  $S$  relativa al hiperplano afín  $\mathcal{A}$  de  $E$ . Como antes  $S_\infty$  sólo depende de la variedad de dirección  $\vec{S}$  de  $S$ , y por tanto subespacios afines paralelos en  $\mathcal{A}$  inducen la misma variedad del infinito relativa a  $\mathcal{A}$ .

Fíjate en el mensaje de la Proposición 4.66. Por (i) el espacio afín  $n$ -dimensional  $\mathcal{A}$  se embebe conjuntísticamente dentro de  $P(E)$

$$\mathcal{A} \xhookrightarrow{\mathbf{e}} P(E).$$

Por (ii), la copia  $\mathbf{e}(\mathcal{A})$  del espacio afín  $\mathcal{A}$  dentro de  $P(E)$  cubre todo el proyectivo excepto el hiperplano del infinito  $\mathcal{A}_\infty$ . Es más, por (iii) la copia  $\mathbf{e}(S)$  en  $P(E)$  de cualquier subespacio afín  $S$  de  $\mathcal{A}$  cubre por completo su proyectivización  $X_S$ , variedad proyectiva con igual dimensión a  $S$ , excepto los puntos de la misma que descansan en el hiperplano del infinito  $\mathcal{A}_\infty$ , que determinan una variedad  $S_\infty$  de dimensión  $\dim S - 1$ . De esta forma la geometría afín de  $\mathcal{A}$  está subsumida de forma natural dentro de la proyectiva de  $P(E)$ .

El siguiente corolario explica el comportamiento de la proyectivización respecto a las operaciones con subespacios afines.

**Corolario 4.68** Sea  $\mathcal{A}$  hiperplano afín de  $E$  espacio vectorial. Si  $R, S$  son subespacios afines de un espacio afín  $\mathcal{A}$  entonces:

- (a) Si  $R \cap S \neq \emptyset$  entonces  $X_R \cap X_S = X_{R \cap S}$ ; en particular  $(R \cap S)_\infty = R_\infty \cap S_\infty$ .
- (b) Si  $R \cap S = \emptyset$  entonces  $X_R \cap X_S = R_\infty \cap S_\infty$ .
- (c)  $X_R \vee X_S = X_{S \vee R}$ ; en particular  $(R \vee S)_\infty = R_\infty \vee S_\infty$ .

**DEMOSTRACIÓN:** Supongamos  $R \cap S \neq \emptyset$  y elijamos  $q \in R \cap S$ . Sabemos que

$$\begin{aligned} \widehat{X}_{R \cap S} &= L\{q\} + \overrightarrow{R \cap S} = L\{q\} + (\overrightarrow{R} \cap \overrightarrow{S}) = \\ &= (L\{q\} + \overrightarrow{R}) \cap (L\{q\} + \overrightarrow{S}) = \widehat{X}_R \cap \widehat{X}_S, \end{aligned}$$

de donde como  $\widehat{X_R}^*, \widehat{X_S}^*$  son  $\pi$ -saturados,

$$X_{R \cap S} = \pi(\widehat{X_{R \cap S}}^*) = \pi(\widehat{X_R}^* \cap \widehat{X_S}^*) = \pi(\widehat{X_R}^*) \cap \pi(\widehat{X_S}^*) = X_R \cap X_S$$

y se sigue (a).

Si  $R \cap S = \emptyset$  es claro que  $L(R) \cap L(S) = \vec{R} \cap \vec{S}$ . En efecto, si  $x \in L(R) \cap L(S)$  entonces  $L(\{x\}) \cap \mathcal{A} = \emptyset$ , pues un punto en esa intersección estaría en  $R \cap S$ . Como  $\mathcal{A}$  es un hiperplano en  $E$  y  $\vec{0} \notin \mathcal{A}$ , deducimos que  $L(\{x\}) \subseteq \vec{\mathcal{A}}$ , y de aquí que

$$L(R) \cap L(S) = (L(R) \cap \vec{\mathcal{A}}) \cap (L(S) \cap \vec{\mathcal{A}}) = \vec{R} \cap \vec{S}.$$

Por tanto, razonando como arriba

$$X_R \cap X_S = \pi(\widehat{X_R}^* \cap \widehat{X_S}^*) = \pi((\vec{R} \cap \vec{S})^*) = \pi(\vec{R}^*) \cap \pi(\vec{S}^*) = R_\infty \cap S_\infty,$$

lo que prueba (b).

Finalmente, (c) es consecuencia inmediata del siguiente cálculo:

$$\widehat{X_{R \vee S}} = L(R \vee S) = L(R) + L(S) = \widehat{X_R} + \widehat{X_S} = \widehat{X_R \vee X_S}.$$

■

Hay una pregunta importante que se nos queda en el tintero, y es entender como se interpreta el paralelismo en  $\mathcal{A}$  en términos del espacio proyectivo  $P(E)$  y el hiperplano del infinito  $\mathcal{A}_\infty$ . La respuesta está contenida en el siguiente corolario, consecuencia trivial de Proposición 4.66-(iii).

**Corolario 4.69** *Sean  $S, T \subseteq \mathcal{A}$  subespacios afines.*

- *$S$  es paralelo a  $T$  (esto es,  $\vec{S} \subseteq \vec{T}$ ) si y solo si  $S_\infty \subseteq T_\infty \subseteq \mathcal{A}_\infty$ .*
- *$S$  y  $T$  son paralelos (esto es,  $\vec{S} = \vec{T}$ ) si y solo si  $S_\infty = T_\infty \subseteq \mathcal{A}_\infty$ .*

**DEMOSTRACIÓN :** Trivial usando que para todo subespacio afín  $S \subseteq \mathcal{A}$  se tiene la identidad  $S_\infty = \pi(\vec{S}^*)$ . ■

El mensaje del corolario es que la información sobre el paralelismo en  $\mathcal{A}$  está condensada en el hiperplano del infinito  $\mathcal{A}_\infty$  en  $P(E)$ . En particular, el caso de rectas se tiene lo siguiente:

**Corolario 4.70** *Dos rectas  $R$  y  $S$  en  $\mathcal{A}$  distintas son paralelas si y solo si sus proyecciones  $X_R$  y  $X_S$  relativas a  $\mathcal{A} \subseteq E$  se cortan en un punto del hiperplano del infinito  $\mathcal{A}_\infty$ .*

**DEMOSTRACIÓN :** Las rectas  $R, S$  son paralelas si y sólo si  $\vec{S} = \vec{R}$ , esto es, si y sólo si  $S_\infty = \pi(\vec{S}^*) = \pi(\vec{R}^*) = R_\infty \subseteq \mathcal{A}_\infty$ . Pero observemos que al tratarse de rectas, tanto  $\pi(\vec{S}^*)$  como  $\pi(\vec{R}^*)$  son puntos de  $P(E)$ . Por otra parte, al ser distintas las rectas proyectivas  $X_R, X_S$  éstas se cortan a lo más en un punto, de donde se concluye que el paralelismo de  $R, S$  es equivalente a que  $X_R$  y  $X_S$  se corten en un punto de  $\mathcal{A}_\infty$ . ■

#### 4.9.1. Proyectivización de subespacios afines

Vamos a presentar un algoritmo para el cálculo de la proyectivización de un subespacio en términos de ecuaciones implícitas. Para ello tendremos que introducir unas referencias apropiadas que faciliten las cosas. Como en la sección anterior consideremos  $E$  espacio vectorial con  $\dim E = n + 1$  y  $\mathcal{A} \subseteq E$  hiperplano afín tal que  $\vec{0} \notin \mathcal{A}$ .

**Definición 4.71** Si  $\mathcal{R}$  es el sistema de referencia de  $\mathcal{A}$  con origen  $e_0 \in \mathcal{A}$  y base de direcciones  $B = \{e_1, \dots, e_n\}$  en  $\vec{\mathcal{A}}$ , la base de  $E$  dada por

$$\tilde{B} = \{e_0, e_1, \dots, e_n\}$$

se dirá la asociada a  $\mathcal{R}$ .

Observemos que si  $\mathcal{R}$  es un sistema de referencia en  $\mathcal{A}$  y  $\tilde{B}$  es su base de  $E$  asociada, entonces  $\mathcal{R}_0 = \{\vec{0}, \tilde{B}\}$  es un sistema de referencia de  $E$  como espacio afín con origen en  $\vec{0}$ .

**Proposición 4.72** Fijemos  $\mathcal{R} = \{e_0, B\}$  referencia en  $\mathcal{A}$ . Si  $S$  es un subespacio afín  $(n - k)$ -dimensional en  $\mathcal{A}$ ,  $k \leq n$ , con ecuaciones implícitas respecto de  $\mathcal{R}$

$$(I) = \begin{cases} a_{1,1}x_1 + \dots + a_{1,n}x_n = b_1 \\ \vdots \\ a_{k,1}x_1 + \dots + a_{k,n}x_n = b_k \end{cases}$$

entonces la variedad proyectiva  $X_S$  de  $P(E)$  tiene por ecuaciones implícitas en coordenadas homogéneas respecto de  $\tilde{B}$

$$(I)^* = \begin{cases} -b_1x_0 + a_{1,1}x_1 + \dots + a_{1,n}x_n = 0 \\ \vdots \\ -b_kx_0 + a_{k,1}x_1 + \dots + a_{k,n}x_n = 0 \end{cases}$$

Además, la variedad del infinito  $S_\infty$  relativa a  $\mathcal{A}$  tiene por ecuaciones implícitas en coordenadas homogéneas respecto de  $\tilde{B}$

$$(I)_\infty = \begin{cases} x_0 = 0 \\ a_{1,1}x_1 + \dots + a_{1,n}x_n = 0 \\ \vdots \\ a_{k,1}x_1 + \dots + a_{k,n}x_n = 0 \end{cases}$$

**DEMOSTRACIÓN:** Sabemos que  $v \in S$  si y sólo si  $v_{\mathcal{R}}$  satisface  $(I)$ , lo que es equivalente a que las coordenadas homogéneas  $v_{\tilde{B}}$  de  $v$  en  $\tilde{B}$  satisfagan  $(I)^*$ . Por tanto la variedad proyectiva

$$X = \{v \in P(E) : v_{\tilde{B}} \text{ satisface } (I)^*\}$$

contiene a  $S$  y en consecuencia  $X_S \subseteq X$ . Pero claramente  $\dim X = \dim X_S = k$ , de donde  $X_S = X$  como queríamos demostrar. Como la ecuación implícita de  $A_\infty$  (esto es, la de  $\vec{\mathcal{A}}$ ) en  $\tilde{B}$  es

$$\{x_0 = 0,$$

las de  $S_\infty = X_S \cap A_\infty$  en  $\tilde{B}$  son las dadas en  $(I)_\infty$ . Esto acaba la prueba. ■

La construcción realizada para un espacio vectorial abstracto  $E$  con  $\dim E = n + 1$  adopta una forma canónica cuando  $E = \mathbb{R}^{n+1}$ . En este caso se suelen escribir como  $(x_0, x_1, \dots, x_n)$  las coordenadas genéricas en  $\mathbb{R}^{n+1}$ , y se elige como hiperplano  $\mathcal{A} \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$  el de ecuación implícita  $\{x_0 = 1\}$  en el sistema de referencia  $\mathcal{R}_0$  usual de  $\mathbb{R}^{n+1}$ , esto es,

$$\mathcal{A} = \{1\} \times \mathbb{R}^n \subseteq \mathbb{R}^{n+1}.$$

Es conveniente observar también que  $\overrightarrow{\mathcal{A}} = \{0\} \times \mathbb{R}^n \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$ . A continuación identificamos  $\mathbb{R}^n$  con  $\mathcal{A}$  vía la afinidad natural

$$\mathbb{R}^n \rightarrow \mathcal{A}, \quad (x_1, \dots, x_n) \mapsto (1, x_1, \dots, x_n).$$

Salvo este cambio de lenguaje, el embebimiento canónico de  $\mathbb{R}^n$  en  $\mathbb{P}^n = P(\mathbb{R}^{n+1})$  queda

$$\epsilon: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{P}^n, \quad \epsilon((x_1, \dots, x_n)) = (1 : x_1 : \dots : x_n).$$

La Proposición 4.66 adopta la forma siguiente:

**Proposición 4.73** *La aplicación  $\epsilon: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{P}^n$  satisface las siguientes propiedades:*

(1)  $\epsilon$  es inyectiva.

(2)  $\mathbb{R}^n_\infty = \mathbb{P}^n \setminus \epsilon(\mathbb{R}^n)$  es un hiperplano proyectivo con  $\widehat{\mathbb{R}^n}_\infty = \{0\} \times \mathbb{R}^n$ , esto es,

$$\pi((\{0\} \times \mathbb{R}^n)^*) = \mathbb{R}^n_\infty.$$

(3) Si  $S$  es un subespacio afín de  $\mathbb{R}^n$  y llamamos  $X_S$  a la variedad proyectiva  $V(\epsilon(S)) \subseteq \mathbb{P}^n$ , entonces

- $\widehat{X}_S = L(\{1\} \times S) = L(\{(1, u)\}) + (\{0\} \times \vec{S})$  para todo  $u \in S$ ; en particular  $\{1\} \times S = \widehat{X}_S \cap (\{1\} \times \mathbb{R}^n)$  y  $\dim X_S = \dim S$ .
- $X_S \setminus \mathbb{R}^n_\infty = \epsilon(S)$  y  $S_\infty := X_S \cap \mathbb{R}^n_\infty = \pi((\{0\} \times \vec{S})^*)$ .

**Definición 4.74** Se dice que  $\mathbb{P}^n$  es la proyectivización canónica de  $\mathbb{R}^n$  y  $\mathbb{R}^n_\infty \subseteq \mathbb{P}^n$  es el hiperplano del infinito canónico de  $\mathbb{P}^n$ . También dado  $S \subseteq \mathbb{R}^n$  subespacio afín, a  $X_S$  se le llama proyectivización canónica de  $S$  en  $\mathbb{P}^n$  y a  $S_\infty := X_S \cap \mathbb{R}^n_\infty = \pi((\{0\} \times \vec{S})^*)$  la variedad del infinito canónica de  $S$ .

Para los ejercicios será conveniente tener siempre en mente la conexión entre el afín euclíadiano  $\mathbb{R}^n$ , el proyectivo  $\mathbb{P}^n$  y el hiperplano del infinito:

$$\mathbb{R}^n \xrightarrow{\epsilon} \mathbb{P}^n \setminus \mathbb{R}^n_\infty, \quad (x_1, \dots, x_n) \mapsto (1 : x_1 : \dots : x_n)$$

$$\mathbb{P}^n \setminus \mathbb{R}^n_\infty \xrightarrow{\epsilon^{-1}} \mathbb{R}^n, \quad (x_0 : x_1 : \dots : x_n) \mapsto \left( \frac{x_1}{x_0}, \dots, \frac{x_n}{x_0} \right),$$

donde  $\mathbb{R}^n_\infty = \{(0 : x_1 : \dots : x_n) : (x_1 : \dots : x_n) \in \mathbb{P}^{n-1}\}$ .

**Observación 4.75** Si identificamos topológicamente  $\mathbb{P}^n \equiv \mathbb{S}^n / \langle A \rangle$ , el hiperplano del infinito se corresponde con  $\mathbb{R}^n_\infty \equiv (\mathbb{S}^n \cap \{x_0 = 0\}) / \langle A \rangle$ .

Por tanto, una sucesión  $\{y_j\}_{j \in \mathbb{N}} \subseteq \mathbb{R}^n$  es divergente si y sólo si con la topología de  $\mathbb{P}^n$  la sucesión

$$\{\epsilon(y_j) = \pi\left(\frac{1}{\|(1, y_j)\|}(1, y_j)\right)\}_{j \in \mathbb{N}}$$

tiene un punto de acumulación en  $\mathbb{R}^n_\infty \equiv (\mathbb{S}^n \cap \{x_0 = 0\}) / \langle A \rangle$ .

Esto justifica que a  $\mathbb{R}^n_\infty$  se le llame hiperplano del infinito de  $\mathbb{P}^n$ : la divergencia en  $\mathbb{R}^n$ , tras proyectivización, no es sino la convergencia al hiperplano del infinito de  $\mathbb{P}^n$ . Mira la figura tras la Proposición 4.66.

El Corolario 4.69 queda:

**Corolario 4.76** Sean  $S, T \subseteq \mathbb{R}^n$  subespacios afines.

- $S$  es paralelo a  $T$  (esto es,  $\vec{S} \subseteq \vec{T}$ ) si y solo si  $S_\infty \subseteq T_\infty \subseteq \mathbb{R}^{n_\infty}$ .
- $S$  y  $T$  son paralelos (esto es,  $\vec{S} = \vec{T}$ ) si y solo si  $S_\infty = T_\infty \subseteq \mathbb{R}^{n_\infty}$ .

Por último, la Proposición 4.72 adopta esta forma en coordenadas canónicas:

**Proposición 4.77** Si  $S$  es el subespacio afín de los puntos  $(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$  tales que

$$(I) = \begin{cases} a_{1,1}x_1 + \dots + a_{1,n}x_n = b_1 \\ \vdots \\ a_{k,1}x_1 + \dots + a_{k,n}x_n = b_k \end{cases}$$

entonces su proyectivización canónica  $X_S$  es la variedad proyectiva de  $\mathbb{P}^n$  de los puntos con coordenadas homogéneas canónicas  $(x_0 : x_1 : \dots : x_n)$  satisfaciendo

$$(I)^* = \begin{cases} -b_1x_0 + a_{1,1}x_1 + \dots + a_{1,n}x_n = 0 \\ \vdots \\ -b_kx_0 + a_{k,1}x_1 + \dots + a_{k,n}x_n = 0 \end{cases}$$

De igual modo la variedad del infinito canónica  $S_\infty$  de  $S$  en  $\mathbb{P}^n$  viene dada por

$$(I)_\infty = \begin{cases} x_0 = 0 \\ a_{1,1}x_1 + \dots + a_{1,n}x_n = 0 \\ \vdots \\ a_{k,1}x_1 + \dots + a_{k,n}x_n = 0 \end{cases}$$

**Observación 4.78** Es conveniente tener siempre en mente la conexión entre el afín euclíadiano  $\mathbb{R}^n$ , el proyectivo  $\mathbb{P}^n$  y el hiperplano del infinito:

$$\mathbb{R}_\infty^n = \{(0 : x_1 : \dots : x_n) : (x_1 : \dots : x_n) \in \mathbb{P}^{n-1}\} \subset \mathbb{P}^n,$$

$$\mathbb{R}^n \xrightarrow{\epsilon} \mathbb{P}^n \setminus \mathbb{R}_\infty^n, \quad (x_1, \dots, x_n) \mapsto (1 : x_1 : \dots : x_n),$$

$$\mathbb{P}^n \setminus \mathbb{R}_\infty^n \xrightarrow{\epsilon^{-1}} \mathbb{R}^n, \quad (x_0 : x_1 : \dots : x_n) \mapsto \left(\frac{x_1}{x_0}, \dots, \frac{x_n}{x_0}\right).$$

Además, si  $S \subset \mathbb{R}^n$  es un subespacio afín entonces

$$S_\infty = \{(0 : x_1 : \dots : x_n) \in \mathbb{P}^n : (x_1, \dots, x_n) \in \vec{S}^*\},$$

$$X_S = \{(1 : x_1 : \dots : x_n) \in \mathbb{P}^n : (x_1, \dots, x_n) \in S\} \cup S_\infty.$$

Recíprocamente, si  $X \subseteq \mathbb{P}^n$  es una variedad proyectiva no contenida en  $\mathbb{R}_\infty^n$  entonces  $X = X_S$  y  $X \cap \mathbb{R}_\infty^n = S_\infty$  para el subespacio afín de  $\mathbb{R}^n$

$$S = \left\{ \left( \frac{x_1}{x_0}, \dots, \frac{x_n}{x_0} \right) \in \mathbb{R}^n : (x_0 : x_1 : \dots : x_n) \in X \setminus \mathbb{R}_\infty^n \right\}.$$

**Ejercicio 4.79** En  $\mathbb{R}^3$  consideramos el plano afín  $S = R \vee \{(0, 0, 1)\}$ , donde  $R$  es la recta afín

$$R = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 : x_1 + x_2 - x_3 - 1 = x_2 + x_3 - 2 = 0\}$$

dada en ecuaciones implícitas respecto de la base canónica  $B_0$  de  $\mathbb{R}^3$ .

Determinar la proyectivización  $X_S$  y la variedad del infinito  $S_\infty$  canónicas en  $\mathbb{P}^3$  del plano afín  $S$ .

SOLUCIÓN: La recta  $R$  en paramétricas se escribe:

$$R = \{(-1 + 2\lambda, 2 - \lambda, \lambda) \in \mathbb{R}^3 : \lambda \in \mathbb{R}\} = (-1, 2, 0) + L(\{(2, -1, 1)\}).$$

Por tanto

$$S = (0, 0, 1) + L(\{\overrightarrow{(-1, 2, 0)(0, 0, 1)}, (2, -1, 1)\}) = (0, 0, 1) + L(\{(-1, 2, -1), (2, -1, 1)\}),$$

y pasando a implícitas

$$S = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 : x_1 - x_2 - 3x_3 + 3 = 0\}.$$

Por tanto la proyectivización canónica de  $S$  queda

$$X_S = \{(x_0 : x_1 : x_2 : x_3) \in \mathbb{P}^3 : 3x_0 + x_1 - x_2 - 3x_3 = 0\}$$

y su variedad canónica del infinito

$$S_\infty = \{(x_0 : x_1 : x_2 : x_3) \in \mathbb{P}^3 : x_0 = x_1 - x_2 - 3x_3 = 0\}.$$

■

**Ejercicio 4.80** Encuentra la única recta afín  $R$  en  $\mathbb{R}^2$  que pasa por el punto  $(1, 0)$  y tiene por punto del infinito  $R_\infty = \{(0 : 1 : 1)\} \in \mathbb{P}^2$ .

SOLUCIÓN: Como  $R$  es una recta en  $\mathbb{R}^2$  satisface una ecuación implícita

$$R = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : a_0 + a_1x_1 + a_2x_2 = 0\}.$$

Su proyectivización  $X_R$  en  $\mathbb{P}^2$  será la recta proyectiva

$$X_R = \{(x_0 : x_1 : x_2) \in \mathbb{P}^2 : a_0x_0 + a_1x_1 + a_2x_2 = 0\},$$

y su punto del infinito

$$R_\infty = \{(0 : x_1 : x_2) \in \mathbb{P}^2 : a_1x_1 + a_2x_2 = 0\} = \{(0 : -a_2 : a_1)\}.$$

- De que  $(1, 0) \in R$  deducimos  $a_0 + a_1 = 0$ .
- La condición  $T_\infty = \{(0 : 1 : 1)\} \in X_R$  implica que  $a_2 = -a_1$ .

Por tanto  $R = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : -1 + x_1 - x_2 = 0\}$ .

■

**Ejercicio 4.81** Consideremos en  $\mathbb{R}^2$  las rectas afines

$$R_1 = \{(x_1, x_2) : x_1 - x_2 = 1\}, \quad R_2 = \{(-1, 0)\} \vee \{(0, 1)\}$$

$$S_1 = \{(x_1, x_2) : x_1 + x_2 = -1\} \quad S_2 = \{(1, 0)\} \vee \{(1, 1)\}.$$

Encuentra una homografía  $f: \mathbb{P}^2 \rightarrow \mathbb{P}^2$  tal que

$$h(X_{R_j}) = X_{S_j}, \quad j = 1, 2.$$

SOLUCIÓN: Estudiemos la posición relativa de las rectas  $R_1, R_2$  en  $\mathbb{R}^2$ . Es claro que

$$R_2 = \{(x_1, x_2) : x_1 - x_2 = -1\},$$

de donde  $R_1, R_2$  son paralelas en  $\mathbb{R}^2$  y por tanto sus proyectivizaciones  $X_{R_1}, X_{R_2}$  se cortan en  $\mathbb{R}^2_\infty = \{(0 : x_1 : x_2) : (x_1 : x_2) \in \mathbb{P}^1\}$ . De forma más explícita

$$X_{R_1} = \{(x_0 : x_1 : x_2) : -x_0 + x_1 - x_2 = 0\}, \quad X_{R_2} = \{(x_0 : x_1 : x_2) : x_0 + x_1 - x_2 = 0\}$$

y en consecuencia

$$X_{R_1} \cap X_{R_2} = \{(0 : 1 : 1)\} \in \mathbb{R}^2_\infty.$$

Haciendo un cálculo análogo para  $S_1, S_2$  tenemos que

$$S_2 = \{(x_1, x_2) : x_1 = 1\},$$

de donde es fácil deducir que  $S_1 \cap S_2 = \{(1, -2)\}$ . En este caso

$$X_{S_1} = \{(x_0 : x_1 : x_2) : x_0 + x_1 + x_2 = 0\}, \quad X_{S_2} = \{(x_0 : x_1 : x_2) : -x_0 + x_1 = 0\},$$

y como es de esperar

$$X_{S_1} \cap X_{S_2} = \{\mathbf{e}((1, -2))\} = \{(1 : 1 : -2)\}.$$

Fijemos puntos auxiliares distintos de los puntos intersección en cada para de rectas:

$$(1 : 1 : 0) \in X_{R_1} \setminus \{(0 : 1 : 1)\}, \quad (1 : -1 : 0) \in X_{R_2} \setminus \{(0 : 1 : 1)\},$$

$$(0 : 1 : -1) \in X_{S_1} \setminus \{(1 : 1 : -2)\}, \quad (0 : 0 : 1) \in X_{S_2} \setminus \{(1 : 1 : -2)\}.$$

Tengamos presente que una homografía  $f: \mathbb{P}^2 \rightarrow \mathbb{P}^2$  que lleve  $X_{R_j}$  en  $X_{S_j}$ ,  $j = 1, 2$ , habrá de llevar el punto  $X_{R_1} \cap X_{R_2}$  en el punto  $X_{S_1} \cap X_{S_2}$ , esto es,

$$f(0 : 1 : 1) = (1 : 1 : -2).$$

Por tanto bastará con exigirle que además satisfaga

$$f(1 : 1 : 0) = (0 : 1 : -1), \quad f(1 : -1 : 0) = (0 : 0 : 1).$$

Por ejemplo, el isomorfismo lineal  $\hat{f}: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  satisfaciendo

$$\hat{f}(0, 1, 1) = (1 : -2 : 1), \quad \hat{f}(1, 1, 0) = (0, 1, -1), \quad \hat{f}(1, -1, 0) = (0, 0, 1),$$

induce la homografía que resuelve el problema.

Como ejercicio, calcula  $M(\hat{f}, B_0, B_0)$ . ■

#### 4.9.2. Proyectivización de aplicaciones afines

Sean  $E_1, E_2$  espacios vectoriales con  $\dim E_1 = n + 1 \leq m + 1 = \dim E_2$ , fijemos un hiperplano afín  $A_j \subseteq E_j^*$ ,  $j = 1, 2$ , y sea  $g: \mathcal{A}_1 \rightarrow \mathcal{A}_2$  una aplicación afín inyectiva.

Es fácil probar que  $g$  admite una única extensión lineal  $l_g: E_1 \rightarrow E_2$ , que además es un monomorfismo. En efecto, si  $u_1 \in \mathcal{A}_1$  y  $u_2 := g(u_1) \in \mathcal{A}_2$ , basta con aprovechar la descomposición  $E_j = L(\{u_j\}) \oplus \overrightarrow{\mathcal{A}}_j$ ,  $j = 1, 2$ , y definir  $l_g$  como la única aplicación lineal  $E_1 \rightarrow E_2$  tal que

$$l_g(u_1) = u_2 \quad \text{y} \quad l_g|_{\overrightarrow{\mathcal{A}}_1} = \vec{g}.$$

Como  $u_2 \notin \overrightarrow{\mathcal{A}}_2$  y  $\vec{g}: \overrightarrow{\mathcal{A}}_1 \rightarrow \overrightarrow{\mathcal{A}}_2$  es un monomorfismo, la aplicación lineal  $l_g$  es un monomorfismo.

**Definición 4.82** Si  $g: \mathcal{A}_1 \rightarrow \mathcal{A}_2$  es una aplicación afín inyectiva, a la proyectividad  $f_g: P(E_1) \rightarrow P(E_2)$  inducida por el monomorfismo  $l_g: E_1 \rightarrow E_2$  la llamaremos proyectivización de  $g$ .

Por definición,  $l_g$  es una aplicación lineal asociada a  $f_g$  (única salvo multiplicar por un escalar no nulo). La siguiente proposición caracteriza a las proyectivizaciones de las aplicaciones afines inyectivas.

**Proposición 4.83** Sean  $E_j$  espacio vectorial,  $\mathcal{A}_j \subset (E_j)^*$  un hiperplano afín,  $\mathcal{R}_j$  un sistema de referencia en  $\mathcal{A}_j$  y  $\tilde{B}_j$  su base de  $E_j$  asociada (ver Definición 4.71),  $j = 1, 2$ .

Si  $f: P(E_1) \rightarrow P(E_2)$  es una proyectividad (luego  $\dim E_1 = n+1 \leq m+1 = \dim E_2$ ), entonces son equivalentes:

$$(I) \quad \text{Im}(f) \not\subseteq (\mathcal{A}_2)_\infty \text{ y } f((\mathcal{A}_1)_\infty) \subseteq (\mathcal{A}_2)_\infty.$$

$$(II) \quad f = f_g \text{ para alguna aplicación afín inyectiva } g: \mathcal{A}_1 \rightarrow \mathcal{A}_2.$$

$$(III) \quad M(f, \tilde{B}_1, \tilde{B}_2) = \mu \left( \begin{array}{c|c} 1 & 0 \\ \hline b & A \end{array} \right) \text{ para algún } b \in \mathbb{R}^n, A \in M_{m,n}(\mathbb{R}) \text{ con } \text{rang}(A) = n, \\ \text{y } \mu \in \mathbb{R} \setminus \{0\}.$$

DEMOSTRACIÓN: (I)  $\implies$  (II) Tomemos  $h: E_1 \rightarrow E_2$  un monomorfismo lineal asociado a la proyectividad  $f$ , que por definición satisface  $\pi_2 \circ h = f \circ \pi_1$  donde  $\pi_j: E_j^* \rightarrow P(E_j)$  es la proyección natural,  $j = 1, 2$ . Como  $f((\mathcal{A}_1)_\infty) \subseteq (\mathcal{A}_2)_\infty$ , esto es,

$$f(\pi_1(\overrightarrow{\mathcal{A}}_1^*)) \subseteq \pi_2((\overrightarrow{\mathcal{A}}_2)^*),$$

inferimos que  $\pi_2(h(\overrightarrow{\mathcal{A}}_1^*)) \subseteq \pi_2((\overrightarrow{\mathcal{A}}_2)^*)$  y por tanto  $h(\overrightarrow{\mathcal{A}}_1) \subseteq \overrightarrow{\mathcal{A}}_2$ .

Si fijamos  $u_1 \in \mathcal{A}_1$  y escribimos  $\mathcal{A}_1 = u_1 + \overrightarrow{\mathcal{A}}_1$ , es claro que

$$h(\mathcal{A}_1) = h(u_1 + \overrightarrow{\mathcal{A}}_1) = h(u_1) + h(\overrightarrow{\mathcal{A}}_1) \subseteq h(u_1) + \overrightarrow{\mathcal{A}}_2.$$

Observemos que, en nuestras hipótesis,

$$\text{Im}(f) \not\subseteq (\mathcal{A}_2)_\infty \iff f(\pi_1(\mathcal{A}_1)) \not\subseteq (\mathcal{A}_2)_\infty,$$

lo que es equivalente a que existe  $u \in \mathcal{A}_1$  tal que  $h(u) \notin \overrightarrow{\mathcal{A}}_2$ . Por tanto la condición  $\text{Im}(f) \not\subseteq (\mathcal{A}_2)_\infty$  implica que  $h(u_1) \notin \overrightarrow{\mathcal{A}}_2$ . Teniendo en cuenta que  $E_2 = L(\{h(u_1)\}) \oplus \overrightarrow{\mathcal{A}}_2$  deducimos que  $L(\{h(u_1)\})$  y  $\mathcal{A}_2$  han de ser subespacios complementarios de  $E_2$ , y ha de existir un único punto

$$u_2 \in L(\{h(u_1)\}) \cap \mathcal{A}_2.$$

Escribamos  $u_2 = \lambda h(u_1)$  para un  $\lambda \neq 0$ , y definamos la aplicación lineal

$$\hat{f} := \lambda h: E_1 \rightarrow E_2, \quad \hat{f} := \lambda h.$$

Es claro que

$$\hat{f}(\mathcal{A}_1) = \hat{f}(u_1 + \overrightarrow{\mathcal{A}}_1) = \hat{f}(u_1) + \hat{f}(\overrightarrow{\mathcal{A}}_1) = u_2 + h(\overrightarrow{\mathcal{A}}_1) \subseteq u_2 + \overrightarrow{\mathcal{A}}_2 = \mathcal{A}_2.$$

Es más, por construcción  $\hat{f}: E_1 \rightarrow E_2$  es la única aplicación lineal asociada a  $f$  con la propiedad de que  $\hat{f}(\mathcal{A}_1) = \mathcal{A}_2$ . Para acabar basta con definir

$$g: \mathcal{A}_1 \rightarrow \mathcal{A}_2, \quad g := \hat{f}|_{\mathcal{A}_1},$$

que es afín por ser restricción de una lineal, inyectiva por ser restricción de un monomorfismo, y claramente satisface  $l_g = \hat{f}$ .

(II)  $\implies$  (I) Sean  $g: \mathcal{A}_1 \rightarrow \mathcal{A}_2$  afín inyectiva y  $l_g: E_1 \rightarrow E_2$  el monomorfismo extensión de  $g$ . Por definición de  $l_g$  se tiene que  $l_g(\vec{\mathcal{A}}_1) = \vec{g}(\vec{\mathcal{A}}_1) \subseteq \vec{\mathcal{A}}_2$ , lo que proyectando implica que  $f_g((\mathcal{A}_1)_\infty) \subseteq (\mathcal{A}_2)_\infty$ . Además, como  $l_g(\mathcal{A}_1) = g(\mathcal{A}_1) \subseteq \mathcal{A}_2$  y  $\mathcal{A}_2 \cap \vec{\mathcal{A}}_2 = \emptyset$ , deducimos que

$$f_g(\pi_1(\mathcal{A}_1)) \cap (\mathcal{A}_2)_\infty = \pi_2(l_g(\mathcal{A}_1)) \cap (\mathcal{A}_2)_\infty \subseteq \pi_2(\mathcal{A}_2) \cap (\mathcal{A}_2)_\infty = \emptyset.$$

En particular  $\text{Im}(f_g) \supseteq f_g(\pi_1(\mathcal{A}_1)) \not\subseteq (\mathcal{A}_2)_\infty$ , lo que concluye la demostración.

(II)  $\implies$  (III) Si  $f = f_g$  para alguna aplicación afín inyectiva  $g: \mathcal{A}_1 \rightarrow \mathcal{A}_2$ , es claro que

$$M(g, \mathcal{R}_1, \mathcal{R}_2) = M(l_g, \tilde{B}_1, \tilde{B}_2) = \left( \begin{array}{c|c} 1 & 0 \\ \hline b & A \end{array} \right),$$

donde  $b \in \mathbb{R}^m$  y  $A \in M_{m,n}(\mathbb{R})$  tiene  $\text{rang}(A) = n$ . Como

$$M(f, \tilde{B}_1, \tilde{B}_2) = \mu M(l_g, \tilde{B}_1, \tilde{B}_2), \quad \mu \neq 0,$$

se sigue el enunciado.

(III)  $\implies$  (II) Supongamos que  $f: P(E_1) \rightarrow P(E_2)$  es una proyectividad con

$$M(f, \tilde{B}_1, \tilde{B}_2) = \mu \left( \begin{array}{c|c} 1 & 0 \\ \hline b & A \end{array} \right), \quad \mu \neq 0,$$

donde  $b \in \mathbb{R}^n$  y  $A \in M_{m,n}(\mathbb{R})$  (necesariamente  $\text{rang}(A) = n$ ). Consideremos el único monomorfismo  $\hat{f}: E_1 \rightarrow E_2$  tal que

$$M(\hat{f}, \tilde{B}_1, \tilde{B}_2) = \left( \begin{array}{c|c} 1 & 0 \\ \hline b & A \end{array} \right).$$

Si escribimos  $\mathcal{R}_1 = \{u_1, B_1 = \{v_1, \dots, v_n\}\}$  y  $\mathcal{R}_2 = \{u_2, B_2 = \{w_1, \dots, w_m\}\}$ , la estructura de la matriz  $M(\hat{f}, \tilde{B}_1, \tilde{B}_2)$  nos dice que

$$\hat{f}(u_1) = u_2 + (w_1, \dots, w_m) \cdot b \in u_2 + \vec{\mathcal{A}}_2 = \mathcal{A}_2, \quad \hat{f}(v_i) \in L(\{w_1, \dots, w_m\}), \quad i = 1, \dots, n,$$

y por tanto

$$\hat{f}(\vec{\mathcal{A}}_1) = \hat{f}(L(\{v_1, \dots, v_n\})) = L(\{\hat{f}(v_1), \dots, \hat{f}(v_n)\}) \subseteq L(\{w_1, \dots, w_m\}) = \vec{\mathcal{A}}_2.$$

De aquí que

$$\hat{f}(\vec{\mathcal{A}}_1) = \hat{f}(u_1 + \vec{\mathcal{A}}_1) = \hat{f}(u_1) + \hat{f}(\vec{\mathcal{A}}_1) = u_2 + \hat{f}(\vec{\mathcal{A}}_1) \subseteq u_2 + \vec{\mathcal{A}}_2 = \mathcal{A}_2.$$

La aplicación  $g = \hat{f}|_{\mathcal{A}_1}: \mathcal{A}_1 \rightarrow \mathcal{A}_2$  es afín por ser restricción de una lineal, inyectiva por ser restricción de un monomorfismo, satisface  $l_g = \hat{f}$ , y por tanto  $f_g = f$ . Esto concluye la prueba. ■

El siguiente corolario es una consecuencia trivial de la anterior proposición.

**Corolario 4.84** Sean  $E_j$  espacios vectoriales,  $\mathcal{A}_j \subset (E_j)^*$  hiperplano afín, y  $\mathcal{R}_j$  sistema de referencia en  $\mathcal{A}_j$  con base asociada  $\tilde{B}_j$ ,  $j = 1, 2$ . Si  $f: P(E_1) \rightarrow P(E_2)$  es una homografía (luego  $\dim E_1 = n+1 = \dim E_2$ ) entonces son equivalentes:

(I)  $f((\mathcal{A}_1)_\infty) = (\mathcal{A}_2)_\infty$ .

(II)  $f = f_g$  para alguna afinidad  $g: \mathcal{A}_1 \rightarrow \mathcal{A}_2$ .

(III)  $M(f, \tilde{B}_1, \tilde{B}_2) = \mu \tilde{A}$ , donde  $\tilde{A} = \left( \begin{array}{c|c} 1 & 0 \\ \hline b & A \end{array} \right) \in \text{Aff}_n(\mathbb{R})$  y  $\mu \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ .

Un caso particularmente interesante es el siguiente.

**Corolario 4.85** *Sea  $g: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  una aplicación afín inyectiva (en particular  $n \leq m$ ) con expresión matricial en las referencias canónicas de  $\mathbb{R}^n$  y  $\mathbb{R}^m$*

$$M(g, \mathcal{R}_0^n, \mathcal{R}_0^m) = \left( \begin{array}{c|c} 1 & 0 \\ \hline b & A \end{array} \right).$$

*Entonces la proyectivización  $f_g: \mathbb{P}^n \rightarrow \mathbb{P}^m$  viene representada en las bases canónicas de  $\mathbb{R}^{n+1}$  y  $\mathbb{R}^{m+1}$  por la matriz*

$$M(f_g, B_0^{n+1}, B_0^{m+1}) = \mu \left( \begin{array}{c|c} 1 & 0 \\ \hline b & A \end{array} \right), \quad \mu \neq 0.$$

Ahora se contextualiza mejor la razón por la que adoptamos la notación compacta por cajas para la representación matricial de las aplicaciones afines en sistemas de referencia (la propia del grupo  $\text{Aff}_n(\mathbb{R})$  cuando tratamos con afinidades).

## 4.10. El teorema de Desargues

Quizá el teorema más conocido de la Geometría Proyectiva es el de Desargues, que establece condiciones equivalentes para que dos triángulos sean perspectivos o proyectivos. Necesitamos para su comprensión introducir algo de lenguaje.

Sea  $E$  un espacio vectorial de  $\dim E \geq 3$  y sea  $P(E)$  el correspondiente espacio proyectivo. Recordemos que, dados puntos  $p_1, \dots, p_k \in P(E)$ ,

$$\bigvee_{j=1}^k p_j = p_1 \vee \dots \vee p_k \equiv V(\{p_1, \dots, p_k\})$$

representa la variedad proyectiva que generan  $\{p_1, \dots, p_k\}$ . Por ejemplo,  $p \vee q$  es una recta si  $p \neq q$  o un punto si  $p = q$ . Un triángulo en  $P(E)$  son tres puntos  $A_1, A_2, A_3 \in P(E)$  proyectivamente independientes, esto es, no alineados. En otras palabras,  $A_1, A_2, A_3$  es un triángulo en  $P(E)$  si y sólo si la variedad proyectiva  $A_1, A_2, A_3$  es un plano proyectivo. En esta sección los triángulos se presentarán llevan implícita una ordenación  $A_1, A_2, A_3$  de sus vértices. Recordemos también que una familia finita de rectas  $R_1, \dots, R_k$  en  $P(E)$  se dicen *concurrentes* si  $\bigcap_{i=1}^k R_i \neq \emptyset$ .

**Definición 4.86** *Dos triángulos  $(A_1, A_2, A_3)$  y  $(A'_1, A'_2, A'_3)$  en  $P(E)$  son proyectivamente (o perspectivamente) equivalentes desde un punto  $O \in P(E)$  si*

$O, A_i, A'_i$  están alineados para todo  $i = 1, 2, 3$ .

Análogamente, los anteriores triángulos se dicen proyectivamente (o perspectivamente) equivalentes desde una recta  $R$  si

$A_i \vee A_j, A'_i \vee A'_j, R$  son concurrentes para todo  $i, j \in \{1, 2, 3\}$ ,  $i \neq j$ .

En la anterior definición, la posibilidad  $A_i = A'_i$  para algún  $i \in \{1, 2, 3\}$  no está excluida.

Por ejemplo, cuando  $A_i \neq A'_i$ ,  $i = 1, 2, 3$ , la equivalencia proyectiva desde un punto  $O$  expresa que

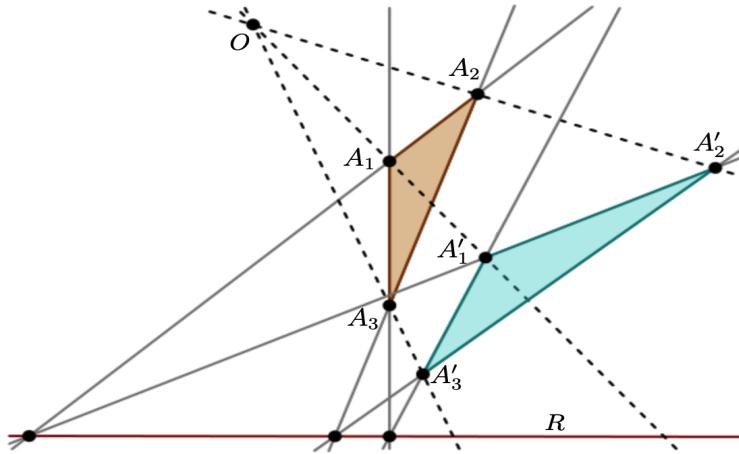
$$O \in \bigcap_{i=1}^3 A_i \vee A'_i.$$

Análogamente, cuando  $A_i \vee A_j \neq A'_i \vee A'_j$  para todo  $i, j \in \{1, 2, 3\}$ ,  $i \neq j$ , la equivalencia proyectiva desde una recta  $R$  expresa que los puntos

$$\{(A_1 \vee A_2) \cap (A'_1 \vee A'_2), (A_1 \vee A_3) \cap (A'_1 \vee A'_3), (A_2 \vee A_3) \cap (A'_2 \vee A'_3)\}$$

están alineados y contenidos en  $R$ .

Mira la siguiente figura donde se presentan dos triángulos proyectivos desde un punto  $O$  y desde una recta  $R$ .



**Teorema 4.87 (Desargues)** *Dos triángulos  $(A_1, A_2, A_3), (A'_1, A'_2, A'_3)$  en un espacio proyectivo  $P(E)$  ( $\dim P(E) \geq 2$ ) son proyectivos desde un punto si y sólo si lo son desde una recta.*

DEMOSTRACIÓN: Por comodidad usemos la notación  $[v] = \pi(v) \in P(E)$  para todo  $v \in E^*$ . Escribamos

$$A_i = [v_i], \quad A'_i = [v'_i]$$

para convenientes  $v_i, v'_i \in E^*$ ,  $i = 1, 2, 3$ .

Supongamos que  $(A_1, A_2, A_3)$  y  $(A'_1, A'_2, A'_3)$  son proyectivos desde  $O = [v_0] \in P(E)$  y comprobemos que lo son desde una recta proyectiva.

Discutiremos el caso  $A_i \neq A'_i$ ,  $i = 1, 2, 3$  (los casos particulares de coincidencia de algunos vértices son más sencillos, se dejarán como ejercicio).

La condición

$$O \in \bigcap_{i=1}^3 (A_i \vee A'_i)$$

es equivalente a que

$$v_0 \in \bigcap_{i=1}^3 \widehat{A_i \vee A'_i} = \bigcap_{i=1}^3 L(\{v_i, v'_i\}).$$

esto es,

$$v_0 = \lambda_i v_i + \lambda'_i v'_i \quad \text{para cierto } (\lambda_i, \lambda'_i) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}, i = 1, 2, 3.$$

Un cálculo inmediato nos da que

$$\lambda_i v_i - \lambda_j v_j = \lambda'_j v'_j - \lambda'_i v'_i, \quad i, j \in \{1, 2, 3\}, \quad i \neq j.$$

Al ser los puntos  $[v_1], [v_2], [v_3] \in P(E)$  distintos dos a dos, los vectores

$$\lambda_i v_i - \lambda_j v_j \neq \vec{0}, \quad i, j \in \{1, 2, 3\}, \quad i \neq j.$$

Como además  $\{\lambda_1 v_1 - \lambda_2 v_2, \lambda_3 v_3 - \lambda_1 v_1, \lambda_2 v_2 - \lambda_3 v_3\}$  son claramente *linealmente dependientes*, deducimos que

$$\begin{aligned} p_3 &= [\lambda'_3 v'_3 - \lambda'_2 v'_2] = [\lambda_2 v_2 - \lambda_3 v_3] \in (A_2 \vee A_3) \cap (A'_2 \vee A'_3) \\ p_2 &= [\lambda'_1 v'_1 - \lambda'_3 v'_3] = [\lambda_3 v_3 - \lambda_1 v_1] \in (A_1 \vee A_3) \cap (A'_1 \vee A'_3) \\ p_1 &= [\lambda'_2 v'_2 - \lambda'_1 v'_1] = [\lambda_1 v_1 - \lambda_2 v_2] \in (A_1 \vee A_2) \cap (A'_1 \vee A'_2) \end{aligned}$$

son puntos alineados de  $P(E)$ , y por tanto que los triángulos  $(A_1, A_2, A_3), (A'_1, A'_2, A'_3)$  son proyectivos desde la recta proyectiva  $R = p_1 \vee p_2 \vee p_3$  que los contiene.

Supongamos ahora que  $(A_1, A_2, A_3), (A'_1, A'_2, A'_3)$  son proyectivos desde una recta proyectiva  $R$ , y comprobemos que lo son desde un punto. Por nuestra hipótesis,

- $(A_i \vee A_j) \cap (A'_i \vee A'_j) \neq \emptyset$  y
- $(A_i \vee A_j) \cap (A'_i \vee A'_j) \cap R \neq \emptyset$ ,

para todo  $i, j \in \{1, 2, 3\}$ ,  $i \neq j$ . Tomemos puntos

$$p_1 \in (A_2 \vee A_3) \cap (A'_2 \vee A'_3) \cap R, \quad p_2 \in (A_1 \vee A_3) \cap (A'_1 \vee A'_3) \cap R, \quad p_3 \in (A_1 \vee A_2) \cap (A'_1 \vee A'_2) \cap R,$$

y razonando como antes escribámoslos de la forma

$$\begin{aligned} p_3 &= [\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2] = [\lambda'_1 v'_1 + \lambda'_2 v'_2], \\ p_2 &= [\mu_1 v_1 + \mu_2 v_3] = [\mu'_1 v'_1 + \mu'_2 v'_3], \\ p_1 &= [\gamma_1 v_2 + \gamma_2 v_3] = [\gamma'_1 v'_2 + \gamma'_2 v'_3]. \end{aligned}$$

Observemos que alguno de los números reales

$$\lambda_1 \mu_1, \lambda_2 \gamma_1, \mu_2 \gamma_2, \lambda'_1 \mu'_1, \lambda'_2 \gamma'_1, \mu'_2 \gamma'_2$$

es no nulo. En efecto, en otro caso  $\{p_1, p_2, p_3\} = \{A_1, A_2, A_3\} = \{A'_1, A'_2, A'_3\}$ , y por tanto  $(A_1, A_2, A_3) = (A'_1, A'_2, A'_3)$  ya que son proyectivos desde una recta. Esto contradice nuestra asunción de que  $A_i \neq A'_i$ ,  $i = 1, 2, 3$ . Por homogeneidad podemos suponer que  $\lambda_1 = \mu_1 = 1$  y

$$p_3 = [v_1 + \lambda_2 v_2], \quad p_2 = [v_1 + \mu_2 v_3],$$

y como los puntos  $p_1, p_2, p_3$  están alineados (en  $R$ ),

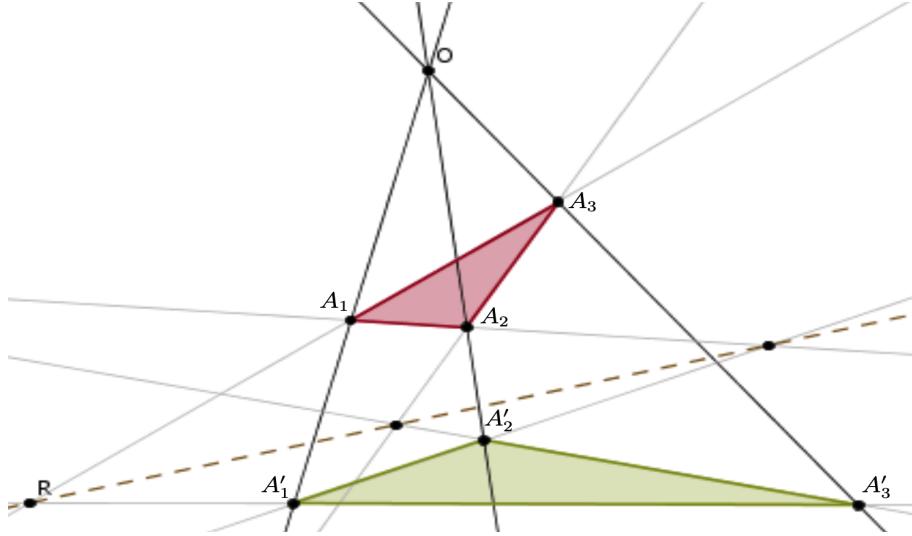
$$p_1 = [\lambda_2 v_2 - \mu_2 v_3].$$

Salvo multiplicar por convenientes constantes, podemos suponer finalmente que

$$v_1 + \lambda_2 v_2 = \lambda'_1 v'_1 + \lambda'_2 v'_2, \quad v_1 + \mu_2 v_3 = \mu'_1 v'_1 + \mu'_2 v'_3, \quad \lambda_2 v_2 - \mu_2 v_3 = \gamma'_1 v'_2 + \gamma'_3 v'_3.$$

Operando

$$\lambda_2 v_2 - \mu_2 v_3 = (\lambda'_1 - \mu'_1) v'_1 + \lambda'_2 v'_2 - \mu'_2 v'_3 = \gamma'_2 v'_2 + \gamma'_3 v'_3,$$



de donde usando la independencia lineal de  $\{v'_1, v'_2, v'_3\}$  (se proyectan en los vértices de un triángulo en  $P(E)$ ),

$$\lambda'_1 = \mu'_1, \gamma'_2 = \lambda'_2, \gamma'_3 = -\mu'_2.$$

Sustituyendo arriba

$$v_1 + \lambda_2 v_2 = \lambda'_1 v'_1 + \lambda'_2 v'_2, v_1 + \mu_2 v_3 = \lambda'_1 v'_1 + \mu'_2 v'_3, \lambda_2 v_2 - \mu_2 v_3 = \lambda'_2 v'_2 - \mu'_2 v'_3,$$

y por tanto el punto

$$\begin{aligned} O &= [v_1 - \lambda'_1 v'_1] = [\lambda'_2 v'_2 - \lambda_2 v_2] \in (A_1 \vee A'_1) \cap (A_2 \vee A'_2) \\ O &= [v_1 - \lambda'_1 v'_1] = [\mu'_2 v'_3 - \mu_2 v_3] \in (A_1 \vee A'_1) \cap (A_3 \vee A'_3) \\ O &= [\mu'_2 v'_3 - \mu_2 v_3] = [\lambda'_2 v'_2 - \lambda_2 v_2] \in (A_2 \vee A'_2) \cap (A_3 \vee A'_3) \end{aligned}$$

está contenido en  $\bigcap_{i=1}^3 A_i \vee A'_i$ , lo que prueba que  $(A_1, A_2, A_3)$  y  $(A'_1, A'_2, A'_3)$  son proyectivos desde  $O$  y concluye la prueba del teorema. ■

**Ejercicio 4.88** Sean  $(A_1, A_2, A_3), (A'_1, A'_2, A'_3)$  dos triángulos proyectivos en un espacio proyectivo  $P(E)$ . Probar que si  $\{A_1, A_2, A_3\} = \{A'_1, A'_2, A'_3\}$  entonces  $(A_1, A_2, A_3) = (A'_1, A'_2, A'_3)$ .

SOLUCIÓN : Si son proyectivos desde una recta  $R \subset P(E)$  entonces

$$A_i \vee A_j, A'_i \vee A'_j, R \text{ son concurrentes para todo } i, j \in \{1, 2, 3\}, i \neq j,$$

lo que en caso  $(A_1, A_2, A_3) \neq (A'_1, A'_2, A'_3)$  implicaría que  $A_1, A_2, A_3$  están alineados, absurdo. ■

**Ejercicio 4.89** Sean  $(A_1, A_2, A_3), (A'_1, A'_2, A'_3)$  triángulos en un espacio proyectivo  $P(E)$  con  $\dim E = 2$ . Probar que si  $A_1 = A'_1$  entonces son proyectivos. Probar que la tesis es también válida cuando  $\dim E \geq 2$  si además  $A_i = A'_i$  para algún  $i \in \{2, 3\}$ .

SOLUCIÓN : Veamos que son proyectivos desde algún punto. Supongamos que  $A_i \vee A'_i$  es una recta proyectiva,  $i = 2, 3$ . Como  $\dim P(E) = 2$ , la intersección  $(A_2 \vee A'_2) \cap (A_3 \vee A'_3)$  es no vacía, y por tanto  $(A_1, A_2, A_3), (A_1, A'_2, A'_3)$  son proyectivos desde cualquier punto  $O \in (A_2 \vee A'_2) \cap (A_3 \vee A'_3)$ .

Si  $A_i = A'_i$  para algún  $i \in \{2, 3\}$ , igualmente  $(A_1, A_2, A_3), (A_1, A'_2, A'_3)$  son proyectivos desde cualquier punto  $O \in A_j \vee A'_j$ ,  $j \neq 1, i$  (esta segunda parte es válida incluso con  $\dim E \geq 2$ ). ■

**Ejercicio 4.90** Sea  $E$  un espacio vectorial con  $\dim E = n + 1$ , sea  $\mathcal{A}$  un espacio afín  $n$ -dimensional identificado con un hiperplano de  $E$  que no pasa por  $\vec{0}$ , y sea  $\epsilon: \mathcal{A} \rightarrow P(E)$  el embebimiento canónico. Consideremos un triángulo  $(A_1, A_2, A_3)$  en  $\mathcal{A}$  y una traslación  $\tau: \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}$  no trivial, y llamemos  $A'_i = \tau(A_i)$ ,  $i = 1, 2, 3$ .

Prueba que los triángulos

$$(\epsilon(A_1), \epsilon(A_2), \epsilon(A_3)) \quad y \quad (\epsilon(A'_1), \epsilon(A'_2), \epsilon(A'_3))$$

en  $P(E)$  son perspectivos desde un punto  $O \in P(E)$ . Encontrar también la recta proyectiva  $R$  desde la que ambos triángulos son perspectivos.

SOLUCIÓN: Escribamos

$$\tau: \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}, \quad \tau(p) = p + u,$$

para un vector  $u \in \vec{\mathcal{A}}^*$ . Si  $\pi: E^* \rightarrow P(E)$  es la proyección natural, tenemos que

$$\epsilon(A_i) \vee \epsilon(A'_i) = \pi(L(\{A_i, A'_i\}^*)) = \pi(L(\{A_i, A_i + u\}^*)) = \pi(L(\{A_i, u\}^*)), \quad i = 1, 2, 3.$$

Por tanto

$$(\epsilon(A_i) \vee \epsilon(A'_i)) \cap (\epsilon(A_j) \vee \epsilon(A'_j)) = \pi(L(\{A_i, u\}^*) \cap L(\{A_i, u\}^*)) \ni \pi(u), \quad i, j \in \{1, 2, 3\}, \quad i \neq j.$$

De aquí que  $(\epsilon(A_1), \epsilon(A_2), \epsilon(A_3))$  y  $(\epsilon(A'_1), \epsilon(A'_2), \epsilon(A'_3))$  sean perspectivos desde el punto  $O = \pi(u) \in \pi(\vec{\mathcal{A}}^*) = \mathcal{A}_\infty$ .

Para la segunda parte del ejercicio, observemos que

$$\epsilon(A_i) \vee \epsilon(A_j) = \pi(L(\{A_i, A_j\}^*)), \quad i, j \in \{1, 2, 3\}, \quad i \neq j,$$

y análogamente

$$\epsilon(A'_i) \vee \epsilon(A'_j) = \pi(L(\{A'_i, A'_j\}^*)) = \pi(L(\{A_i + u, A_j + u\}^*)), \quad i, j \in \{1, 2, 3\}, \quad i \neq j.$$

Por tanto

$$(\epsilon(A_i) \vee \epsilon(A_j)) \cap (\epsilon(A'_i) \vee \epsilon(A'_j)) = \pi(L(\{A_i, A_j\}^*) \cap L(\{A_i + u, A_j + u\}^*)) \ni \pi(A_i - A_j)$$

para cualesquiera  $i, j \in \{1, 2, 3\}$ ,  $i \neq j$ .

Como los vectores  $\{A_2 - A_1, A_3 - A_1, A_3 - A_2\}$  son linealmente dependientes, los puntos

$$\pi(A_2 - A_1), \quad \pi(A_3 - A_1), \quad \pi(A_3 - A_2) \in P(E)$$

están alineados, y de aquí que  $(\epsilon(A_1), \epsilon(A_2), \epsilon(A_3))$  y  $(\epsilon(A'_1), \epsilon(A'_2), \epsilon(A'_3))$  sean perspectivos desde la recta

$$R = \pi(A_2 - A_1) \vee \pi(A_3 - A_1) \vee \pi(A_3 - A_2).$$

Es interesante observar que  $A_i - A_j \in \vec{\mathcal{A}}^*$ ,  $i, j \in \{1, 2, 3\}$ ,  $i \neq j$ , y por tanto  $R \subseteq \mathcal{A}_\infty$ .

■

**Ejercicio 4.91** Sean  $f: P(E) \rightarrow P(E)$  una homografía,  $(A_1, A_2, A_3)$  un triángulo y  $O \in P(E) \setminus \{A_1, A_2, A_3\}$  un punto tales que

$$f(O \vee A_i) = O \vee A_i, \quad i = 1, 2, 3.$$

Pueba que los triángulos  $(A_1, A_2, A_3)$  y  $(f(A_1), f(A_2), f(A_3))$  son perspectivamente equivalentes desde  $O$ .

SOLUCIÓN: Sabemos que

$$O \vee A_i = f(O \vee A_i) = f(O) \vee f(A_i), \quad i = 1, 2, 3.$$

Por tanto, como  $O \notin \{A_1, A_2, A_3\}$  deducimos que

$$\{O\} = (O \vee A_i) \cap (O \vee A_j) = (f(O) \vee f(A_i)) \cap (f(O) \vee f(A_j)) = \{f(O)\},$$

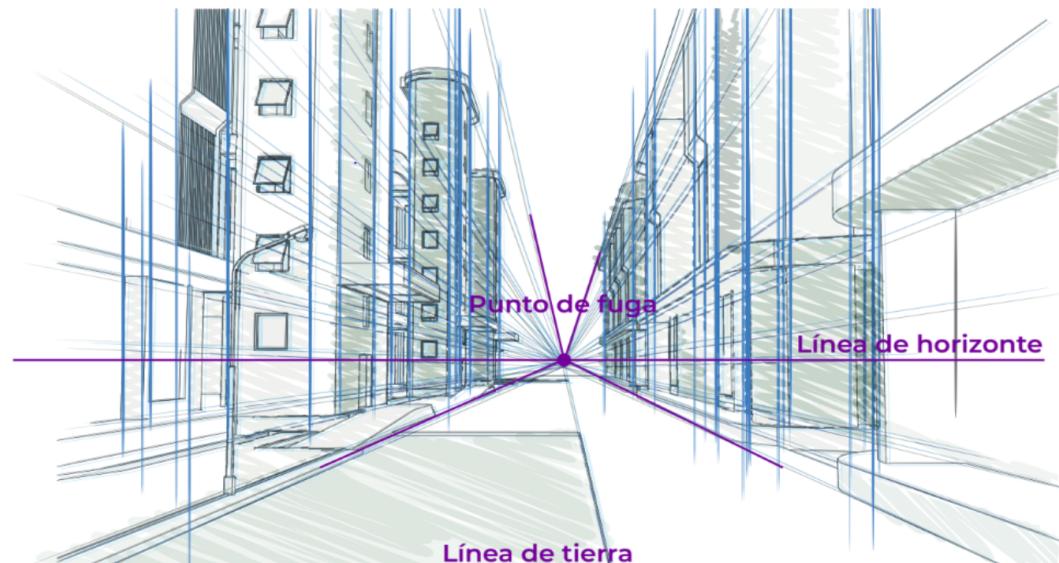
cálculo válido siempre que  $i \neq j$ . Por tanto  $O \vee A_i = O \vee f(A_i)$  y  $O, A_i, f(A_i)$ , están aliñeados,  $i = 1, 2, 3$ . Esto prueba que  $(A_1, A_2, A_3), (f(A_1), f(A_2), f(A_3))$  son proyectivos desde  $O$ . ■

## 5. La magia de la Geometría Proyectiva

Volvamos a los cuadros que nos dejaron los genios del Renacimiento, pero aparte de admirarlos de acuerdo a nuestra percepción personal de la estética, intentemos mirarlos ahora con otros ojos y descifrarlos como geómetras. Para ello hemos de tener en la mente el eunciado:

*Dos rectas  $R, S \subseteq \mathbb{R}^3$  son paralelas si y solo si sus proyectivizaciones  $X_R$  y  $X_S$  en  $\mathbb{P}^3$  se cortan en un punto del hiperplano del infinito  $\mathbb{R}_\infty^3$ .*

Aquellos artistas representaban en el plano del lienzo nuestro espacio tridimensional generando la sensación de profundidad con la idea de perspectiva. Los puntos de fuga que utilizaban eran puntos de convergencia en el infinito idealizado de rectas paralelas en nuestro espacio tridimensional, esa era la técnica básica que aprovechaban para suscitar la ilusión de profundidad en el observador. Pero como matemáticos sabemos que dos rectas paralelas en  $\mathbb{R}^3$  se cortan en un punto del plano del infinito  $\mathbb{R}_\infty^3$  de la proyectivización  $\mathbb{P}^3$  de nuestro espacio afín tridimensional. Ahí tenemos la clave, esos puntos imaginarios de fuga ocultos en el plano de fondo del lienzo son conceptualizados, en nuestra idealización geométrica, como los puntos del plano del infinito en la proyectivización canónica, a saber  $\mathbb{P}^3$ , del espacio afín  $\mathbb{R}^3$ : cada dirección o familia de rectas paralelas determina un único punto de fuga en ese plano del infinito  $\mathbb{R}_\infty^3$ , y direcciones distintas generan puntos de fuga distintos. Por ejemplo, todos los puntos de fuga de las direcciones contenidas en un plano horizontal del espacio afín  $\mathbb{R}^3$  (el de la línea de tierra sobre la que se posiciona el observador) conforman una linea recta en el plano del infinito  $\mathbb{R}_\infty^3$ , que los clásicos denominaban línea de horizonte.



Con esto damos soporte teórico a una técnica pictórica que tiene poco de espontánea y mucho de científica. Todos aquellos genios, como Leonardo o Rafael, hacían estudios previos de sus obras maestras, una especie de borradores o bocetos sobre los que ensayaban el resultado final perseguido hasta alcanzar la perfección. Algunos de aquellos estudios han llegado hasta nosotros, y contienen complejos cálculos matemáticos sobre equivalencias proyectivas de figuras según distintos ángulos de visión, explicando de forma práctica la interacción entre la óptica y la geometría con un nivel de sofisticación impresionante. En definitiva, podemos pensar sin temor a equivocarnos que esas obras son auténticos tratados de geometría proyectiva, y en gran medida motivaron el desarrollo de esta rama de la matemática.

## Ejercicios del Tema 4

1. Sea  $A$  un espacio afín. Denotemos por  $\mathfrak{R}$  al conjunto formado por las rectas afines de  $A$ . Dadas dos rectas  $L_1$  y  $L_2$  en  $\mathfrak{R}$ , decimos que  $L_1 \sim L_2$  si  $L_1$  es paralela a  $L_2$ . Demostrar que:
  - (i) La relación  $\sim$  es de equivalencia en  $\mathfrak{R}$ .
  - (ii) Existe una biyección  $f : \mathfrak{R} / \sim \rightarrow P(\overrightarrow{A})$ .
2. Mostrar un espacio proyectivo en el que existan dos rectas proyectivas que no se corten.
3. Demostrar que en un espacio proyectivo tridimensional dos planos proyectivos distintos se cortan en una recta proyectiva.
4. Sean  $\{p_1, \dots, p_m\}$  puntos proyectivos en  $P(V)$ , donde  $p_i = [v_i]$ , para cada  $i = 1, \dots, m$ . Recordemos que los puntos son *proyectivamente independientes* si los vectores  $\{v_1, \dots, v_m\}$  son linealmente independientes en  $V$ .
  - (i) Demostrar que esta definición no depende de representantes.
  - (ii) Justificar que si  $\{p_1, \dots, p_m\}$  son proyectivamente independientes, entonces existe un único subespacio proyectivo  $E$  con  $\dim E = m - 1$  y tal que  $\{p_1, \dots, p_m\} \subseteq E$ .
5. Sea  $(\mathcal{A}_0, \overrightarrow{\mathcal{A}}_0, \rightarrow)$  un espacio afín  $n$ -dimensional y sea  $E = \mathbb{R} \times \overrightarrow{\mathcal{A}}_0$  espacio vectorial producto. Fijemos  $p_0 \in \mathcal{A}_0$  y consideremos la inyección natural
 
$$i : \mathcal{A}_0 \rightarrow E, \quad i(p) = (1, \overrightarrow{p_0 p}).$$

Llaremos  $\mathcal{A}$  al hiperplano  $i(\mathcal{A}_0)$  de  $E$  como espacio afín, obviamente contenido en  $E^*$ , y consideremos el embebimiento canónico

$$\epsilon : \mathcal{A} \rightarrow P(E), \quad \epsilon = \pi|_{\mathcal{A}}$$

donde  $\pi : E^* \rightarrow P(E)$  es la proyección natural. Demostrar que:

- $\mathcal{A}_\infty = \pi(\{0\} \times \overrightarrow{\mathcal{A}}_0^*)$ .
- Para todo  $S = q + \vec{S} \subseteq \mathcal{A}_0$  subespacio afín:

$$X_S := X_{i(S)} = \pi((1, \overrightarrow{p_0 q})) \vee \pi(\{0\} \times \vec{S}^*) = \pi \left( (L(\{(1, \overrightarrow{p_0 q})\}) + \{0\} \times \vec{S})^* \right)$$

$$S_\infty := i(S)_\infty = \pi(\{0\} \times \vec{S}^*).$$

6. En un espacio proyectivo se consideran una recta proyectiva  $L$  y un hiperplano proyectivo  $H$ . Demostrar que, o bien  $L \subseteq H$ , o bien  $L \cap H$  es un único punto.
7. Calcular unas ecuaciones implícitas para la recta proyectiva en  $\mathbb{P}^3$  que pasa por los puntos  $p = [0, 1, 0, 1]$  y  $q = [1, 1, 1, 0]$ .

8. Si  $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$  denota al espacio vectorial de las matrices cuadradas reales de orden 2, calcula las ecuaciones implícitas en  $P(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}))$  del plano proyectivo  $p \vee R$ , donde  $p = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \in P(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}))$  y  $R$  es la recta proyectiva en  $P(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}))$  con ecuaciones implícitas  $\{x_1 - x_2 = x_1 + x_2 + x_4 = 0\}$  en la base canónica

$$B_0 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

9. Sea  $S$  el subespacio proyectivo de  $\mathbb{P}^3$  con ecuaciones implícitas:

$$\begin{aligned} x_0 + x_1 + x_2 + x_3 &= 0, \\ -x_0 - x_1 + x_2 + x_3 &= 0. \end{aligned}$$

Sea  $R_a$  la recta proyectiva en  $\mathbb{P}^3$  que pasa por los puntos  $p = (1 : -1 : 1 : -1)$  y  $q = (0 : 0 : a : 1)$ , donde  $a \in \mathbb{R}$ . Calcular  $S \cap R_a$  y  $S \vee R_a$ .

10. Considera el plano afín  $T$  de  $\mathbb{R}^3$  determinado por los puntos  $(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$  tales que

$$x_1 - 2x_2 - 1 = x_2 - 2x_3 + 3 = 0.$$

Determina las ecuaciones implícitas en coordenadas homogéneas canónicas de la proyectivización canónica  $X_T$  de  $T$  en  $\mathbb{P}^3$ . Calcula también las ecuaciones de su variedad del infinito canónica  $T_\infty$ .

11. Determinar las ecuaciones implícitas en la base canónica  $B_0 = \{(1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1)\}$  de  $\mathbb{R}^3$  de la recta proyectiva  $R$  del plano proyectivo  $\mathbb{P}^2$  que pasa por los puntos  $p = (1 : 0 : -1)$ ,  $q = (0 : 1 : 1) \in \mathbb{P}^2$ .

12. Dada la proyectividad  $f: P(S_2(\mathbb{R})) \rightarrow \mathbb{P}^2$  inducida por el isomorfismo lineal

$$\widehat{f}: S_2(R) \rightarrow \mathbb{R}^3, \quad \widehat{f}\left(\begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} a+b+c \\ a+b \\ a \end{pmatrix},$$

determina las ecuaciones matriciales de  $f$  en las bases canónicas  $B_0$  y  $B'_0$  de  $S_2(\mathbb{R})$  y  $\mathbb{R}^3$  respectivamente dadas por

$$B_0 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}, \quad B'_0 = \{(1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1)\}.$$

Calcula también la matriz  $M(f, B, B')$  para las bases  $B$  y  $B'$  de  $S_2(\mathbb{R})$  y  $\mathbb{R}^3$  respectivamente dadas por

$$B = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right\}, \quad B' = \{(1, 1, 1), (1, 1, 0), (1, 0, 0)\}.$$

13. Describir todas las proyectividades  $f: \mathbb{P}^2 \rightarrow \mathbb{P}^2$  tales que:

$$f((1 : 1 : 0)) = (0 : 1 : 1), \quad f((0 : 1 : 1)) = (1 : 0 : 1), \quad f((1 : 0 : 1)) = (1 : 1 : 0).$$

14. Sean  $E_1$  y  $E_2$  dos subespacios proyectivos de  $P(V)$ . Demostrar que existe una homografía  $f : P(V) \rightarrow P(V)$  tal que  $f(E_1) = E_2$  si y sólo si  $\dim E_1 = \dim E_2$ .
15. Demostrar que toda homografía  $f : \mathbb{P}^2 \rightarrow \mathbb{P}^2$  tiene al menos un punto fijo.
16. Si  $R, S, R', S'$  son rectas en un plano proyectivo  $P(E)$  con  $R \neq S$  y  $R' \neq S'$ , prueba que existe una homografía  $f : P(E) \rightarrow P(E)$  tal que

$$f(R) = R' \quad \text{y} \quad f(S) = S'.$$

17. Considera un triángulo  $(A, B, C)$  es un espacio afín  $\mathcal{A}$ , que está visto como hiperplano de un espacio vectorial  $E$  (entendido como espacio afín) con  $\vec{0} \notin \mathcal{A}$ . Considera una traslación  $\tau : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}$  y llama  $A' = \tau(A)$ ,  $B' = \tau(B)$  y  $C' = \tau(C)$ . Prueba que los triángulos  $(A, B, C)$  y  $(A', B', C')$  son perspectivamente equivalentes en el sentido de que los triángulos proyectivos

$$(\mathbf{e}(A), \mathbf{e}(B), \mathbf{e}(C)) \quad \text{y} \quad (\mathbf{e}(A'), \mathbf{e}(B'), \mathbf{e}(C'))$$

son perspectivamente equivalentes en  $P(E)$ , donde  $\mathbf{e} : \mathcal{A} \rightarrow P(E)$  es el embebiimiento canónico.

**Pista:** Busca un punto  $O$  del hiperplano del infinito  $\mathcal{A}_\infty \subseteq P(E)$  relativo a  $\mathcal{A}$  desde el que sean perspectivos. Concuerda con la intuición de que rectas paralelas se cortan en el mismo punto del infinito.

18. Sean  $f : P(E) \rightarrow P(E)$  una homografía sin puntos fijos,  $(A, B, C)$  un triángulo y  $O \in P(E) \setminus \{A, B, C\}$  un punto tales que

$$f(O \vee A) = O \vee A, \quad f(O \vee B) = O \vee B, \quad f(O \vee C) = O \vee C.$$

Pueba que los triángulos  $(A, B, C)$  y  $(f(A), f(B), f(C))$  son perspectivamente equivalentes desde  $O$ .