TEMA 0: ESPACIOS MÉTRICOS

Manuel Bolaños Quesada

Índice

Sea X, a partir de ahora, un conjunto no vacío.

Definición 0.1 (Distancia)**.** Una distancia en X es una aplicación $\mathrm{d} : X \times X \to \mathbb{R}$ tal que:

i) $\mathrm{d}(x, y) = 0 \iff x = y$

ii) $\mathrm{d}(x, y) = \mathrm{d}(y, x)\ \forall x, y \in X$

iii) $\mathrm{d}(x, y) \leq \mathrm{d}(x, z) + \mathrm{d}(z, y)\ \forall x, y, z \in X$

Observación. Si d es una distancia en X, entonces $\mathrm{d}(x, y) \geq 0$ para todo par de puntos $x, y \in X$

Demostración. Sean $x, y \in X$.

$$0 = \mathrm{d}(x, x) \leq \mathrm{d}(x, y) + \mathrm{d}(y, x) = 2\,\mathrm{d}(x, y) \implies \mathrm{d}(x, y) \geq 0$$

Ejemplos.

1. $\mathbb{R}$. Definimos $\mathrm{d}(x, y) = |x - y|\ \forall x, y \in \mathbb{R}$. Entonces, d es una distancia en $\mathbb{R}$ (es fácil comprobar que cumple las tres propiedades que cumple una distancia).
2. Sea X un conjunto no vacío. la distancia discreta en X es la aplicación $\mathrm{d} : X \times X \to \mathbb{R}$ definida por:
$$\mathrm{d}(x, y) = \begin{cases} 0, & \text{si } x = y \\ 1, & \text{si } x \neq y \end{cases}$$
También es fácil comprobar las tres propiedades.
3. $\mathbb{R}^n$. Una norma en $\mathbb{R}^n$ es una aplicación $\|\cdot\| : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ con las siguientes propiedades:

   i) $\|x\| = 0 \iff x = 0$

   ii) $\|\lambda x\| = |\lambda| \cdot \|x\|$

   iii) $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$

   Si tomamos el producto escalar usual de $\mathbb{R}$
$$\langle (x_1, \ldots, x_n), (y_1, \ldots, y_n) \rangle = x_1 y_1 + \cdots + x_n y_n$$
   su norma asociada es
$$\|x\| = \langle x, x \rangle^{1/2} = \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2 \right)^{1/2} = (x_1^2 + \cdots + x_n^2)^{1/2}$$
   a la que llamaremos norma euclídea. A veces la denotamos como $\|\cdot\|_2$.

   Otros ejemplos de normas en $\mathbb{R}^n$ (que no proceden de un producto escalar) son:
$$\|x\|_1 = |x_1| + \cdots + |x_n|, \qquad \|x\|_\infty = \max_{1 \leq i \leq n} \{|x_i|\}$$
   Una norma $\|\cdot\|$ en $\mathbb{R}^n$ define una distancia $\mathrm{d}(x, y) = \|x - y\|$ (fácil de comprobar).

   Propiedad. La distancia discreta en $\mathbb{R}^n$ no procede de ninguna norma (no existe ninguna norma en $\mathbb{R}^n$ cuya distancia asociada sea la discreta).

   Demostración. Sea d una distancia que procede de una norma $\|\cdot\|$ en $\mathbb{R}^n$. tomamos $x = 0, y \neq 0$ ($\|y\| \neq 0$). Tenemos que
$$\mathrm{d}(x, \lambda y) = \|\lambda y - x\| = \|\lambda y\| = |\lambda| \cdot \|y\| \neq 0$$
   Si $|\lambda| > \frac{1}{\|y\|}$, entonces $\mathrm{d}(x, \lambda y) > \frac{1}{\|y\|} \cdot \|y\| = 1$, y por tanto, d no puede ser la distancia discreta. Hemos probado también que, si una distancia d en $\mathbb{R}^n$ procede de una norma, hay puntos a distancia arbitrariamente grande.

Definición 0.2 (Espacio métrico)**.** Un espacio métrico es un par (X, d) formado por un conjunto no vacío X y una distancia d en X.

Definición 0.3. Decimos que un espacio métrico (X, d) es *acotado* si existe $M > 0$ tal que $\mathrm{d}(x, y) \leq M \ \forall x, y \in X$.

Decimos que es *no acotado* si no es acotado.

Ejemplos.

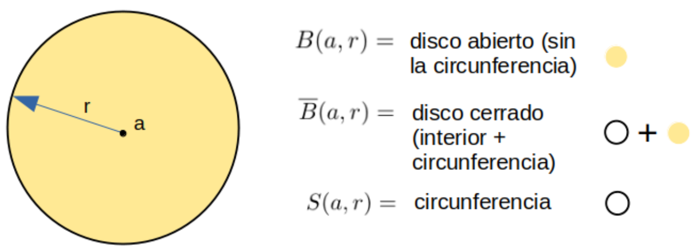
1. (X, d), con d distancia discreta, es un espacio métrico acotado.
2. $(\mathbb{R}^n, \mathrm{d})$, con d distancia que procede de una norma, es un espacio métrico no acotado.

Definición 0.4 (Bolas en un espacio métrico)**.** Sean (X, d) un espacio métrico, $a \in X$ y $r > 0$:

1. La bola abierta de centro a y radio r es el conjunto
$$B(a, r) = \{x \in X : \mathrm{d}(x, a) < r\}$$
2. La bola cerrada de centro a y radio r es el conjunto
$$\overline{B}(a, r) = \{x \in X : \mathrm{d}(x, a) \leq r\}$$
3. La esfera de centro a y radio r es el conjunto
$$S(a, r) = \overline{B}(a, r) \backslash B(a, r) = \{x \in X : \mathrm{d}(x, a) = r\}$$

Ejemplos.

1. $(\mathbb{R}, \mathrm{d})$, con d la distancia usual. Sean $a \in \mathbb{R}$ y $r > 0$. Entonces:
   - $B(a, r) = \{x \in \mathbb{R} : \mathrm{d}(x, a) < r\} = \{x \in \mathbb{R} : |x - a| < r\} = \{x \in \mathbb{R} : a - r < x < a + r\} = (a - r, a + r)$.
   - Similarmente, $\overline{B}(a, r) = [a - r, a + r]$.
   - Entonces, $S(a, r) = \{a - r, a + r\}$ (solo tiene dos puntos).
2. $(\mathbb{R}^2, \mathrm{d}_2)$



3. (X, d), con d la distancia discreta. Sean $a \in X, r > 0$. Entonces
$$B(a, r) = \{x \in X : \mathrm{d}(x, a) < r\} = \begin{cases} \{a\}, & r \leq 1 \\ X, & r > 1 \end{cases}$$
$$\overline{B}(a, r) = \{x \in X : \mathrm{d}(x, a) \leq r\} = \begin{cases} \{a\}, & r < 1 \\ X, & r \geq 1 \end{cases}$$
$$S(a, r) = \begin{cases} \emptyset, & r < 1 \\ X \backslash \{a\}, & r = 1 \\ \emptyset, & r > 1 \end{cases}$$

Propiedades.

1. $a \in B(a, r), a \in \overline{B}(a, r) \ \forall a \in X, \forall r > 0$
2. $B(a, r) \subset \overline{B}(a, r) \ \forall a \in X, \forall r > 0$

3. Si $r \leq s$, entonces $B(a, r) \subset B(a, s)$ $(\overline{B}(a, r) \subset \overline{B}(a, s))$ $\forall a \in X$
4. Si $0 < \lambda < 1$, entonces $B(a, \lambda r) \subset B(a, r)$ $\forall a \in X, \forall r > 0$

Definición 0.5. Sea (X, d) un espacio métrico. Sea $U \subset X$ un conjunto. Diremos que U es un subconjunto abierto de X si, o bien $U = \emptyset$, o bien, para todo $x \in U$, existe $r > 0$ tal que $B(x, r) \subset U$.

Propiedad. Las bolas abiertas en un espacio métrico son conjuntos abiertos.

Demostración. Sea $U = B(a, r), a \in X, r > 0$. Sea $x \in B(a, r)$. Entonces $\mathrm{d}(x, a) < r$, así que $s = r - \mathrm{d}(x, a) > 0$. Vamos a ver que $B(x, s) \subset B(a, r)$ usando la desigualdad triangular.

$$\begin{aligned} z \in B(x, s) \implies \mathrm{d}(x, z) < s \implies \mathrm{d}(a, z) &\leq \mathrm{d}(a, x) + \mathrm{d}(x, z) \\ &< \mathrm{d}(a, x) + s \\ &= \mathrm{d}(a, x) + (r - \mathrm{d}(x, a)) \\ &= r \\ &\implies z \in B(a, r) \end{aligned}$$

de donde $B(x, s) \subset B(a, r)$. Hemos probado entonces que, para todo punto $x \in B(a, r)$ existe $s > 0$ tal que $B(x, s) \subset B(a, r)$. Por tanto, $B(a, r)$ es un conjunto abierto. $\square$

Ejemplos.

1. En un espacio métrico discreto los puntos son conjuntos abiertos puesto que $B(a, r) = \{a\}$ si $r \leq 1$.
2. X es un conjunto abierto, puesto que si $x \in X$ y $r > 0$ es arbitrario, entonces $B(x, r) \subset X$.

Teorema

Teorema 0.6. *Sea (X, d) un espacio métrico, y sea $\mathcal{T} = \{U \subset X : U \text{ es abierto}\}$. Entonces:*

1. $\emptyset, X \in \mathcal{T}$
2. $\{U_i\}_{i \in I} \subset \mathcal{T} \implies \bigcup_{i \in I} U_i \in \mathcal{T}$
3. $U_1, \ldots, U_k \in \mathcal{T} \implies U_1 \cap \cdots \cap U_k \in \mathcal{T}$

Demostración.

1. $\emptyset \in \mathcal{T}$ por definición, y $X \in \mathcal{T}$ por el último ejemplo.
2. $x \in \bigcup_{i \in I} U_i \implies \exists i_0 \in I$ tal que $x \in U_{i_0}$. Como $U_{i_0} \in \mathcal{T}$, existe $r > 0$ tal que $B(x, r) \subset U_{i_0} \subset \bigcup_{i \in I} U_i \implies \bigcup_{i \in I} U_i \in \mathcal{T}$
3. Si $U_1 \cap \cdots \cap U_k = \emptyset \implies U_1 \cap \cdots \cap \in \mathcal{T}$, así que supongamos a partir de ahora que $U_1 \cap \cdots \cap U_k \neq \emptyset$.

   $x \in U_1 \cap \cdots \cap U_k \implies x \in U_i$ $\forall i \in \{1, \ldots, k\}$. Entonces existen $r_i > 0$ tales que $B(x, r_i) \subset U_i$ $\forall i \in \{1, \ldots, k\}$. Si $r = \text{mín}\{r_1, \ldots, r_k\}$, entonces, $r \leq r_i$ $\forall i \in \{1, \ldots, k\}$, de donde $B(x, r) \subset B(x, r_i)$ $\forall i \in \{1, \ldots, k\}$. Por tanto, $B(x, r) \subset B(x, r_1) \cap \cdots \cap B(x, r_k) \subset U_1 \cap \cdots \cap U_k \implies U_1 \cap \cdots \cap U_k \in \mathcal{T}$. $\square$

Definición 0.7. Sean (X, d) un espacio métrico, $\{x_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ una sucesión en X, y $x \in X$. Decimos que la sucesión $\{x_i\}$ converge a x (y lo denotamos por $x_i \to x$) si $\forall \varepsilon > 0, \exists i_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\mathrm{d}(x_i, x) < \varepsilon$ $\forall i \geq i_0$.

Observación. La condición de convergencia se puede reescribir como:

$$\forall \varepsilon > 0, \exists i_0 \in \mathbb{N} : x_i \in B(x, \varepsilon)\ \forall i \geq i_0$$

Propiedad. Son equivalentes:

1. $x_i \to x$
2. $\forall U \in \mathcal{T}$ tal que $x \in U$, $\exists i_0 \in \mathbb{N}$ tal que $x_i \in U$ $\forall i \geq i_0$

Demostración. $1 \implies 2)$ Sea $x_i \to x$. Tomamos $U \in \mathcal{T}$ tal que $x \in U$. Sabemos que existe $\varepsilon > 0$ tal que $B(x,\varepsilon) \subset U$. Como $x_i \to x, \exists i_0 \in \mathbb{N}$ tal que $x_i \in B(x,\varepsilon)$ $\forall i \geq i_0$. Por tanto, $x_i \in U$ $\forall i \geq i_0$.

$2 \implies 1)$ Sea $\varepsilon > 0$, tomamos $B(x,\varepsilon)$. Sabemos que $B(x,\varepsilon) \in \mathcal{T}$. Tomando $U = B(x,\varepsilon), \exists i_0 \in \mathbb{N}$ tal que $x_i \in B(x,\varepsilon)$ $\forall i \geq i_0$. □

Si tomamos en X dos distancias, d, d' y $\mathcal{T}, \mathcal{T}'$ son las familias de conjuntos abiertos asociados, la propiedad anterior nos dice que si $\mathcal{T} = \mathcal{T}'$, entonces (X,d) y (X,d') tienen las mismas sucesiones convergentes ($x_i \to x$ en $(X,\mathrm{d}) \iff x_i \to x$ en (X,d')).

Propiedad. Si $\{x_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ es una sucesión en un espacio métrico (X,d) y $x_i \to x$ y $x_i \to y$, entonces $x = y$ (los límites de una sucesión son únicos).

Demostración. Supongamos que $x \neq y$. Sea $\varepsilon\, \mathrm{d}(x,y)/2 > 0$. Tomamos $B(x,\varepsilon), B(y,\varepsilon)$. Veamos que $B(x,\varepsilon) \cap B(y,\varepsilon) = \emptyset$. Supongamos que existe $z \in B(x,\varepsilon) \cap B(y,\varepsilon)$, entonces $\mathrm{d}(x,z) < \varepsilon, \mathrm{d}(z,y) < \varepsilon$. Tenemos que:

$$\mathrm{d}(x,y) \leq \mathrm{d}(x,z) + \mathrm{d}(z,y) < \varepsilon + \varepsilon = 2\varepsilon$$

lo que es una contradicción porque $\mathrm{d}(x,y) = 2\varepsilon$. Esta contradicción demuestra que $B(x,\varepsilon) \cap B(y,\varepsilon) = \emptyset$. Sabemos que:

- $x_i \to x \implies \exists i_0 \in \mathbb{N}$ tal que $x_i \in B(x,\varepsilon)$ $\forall i \geq i_0$
- $x_i \to y \implies \exists i_0' \in \mathbb{N}$ tal que $x_i \in B(y,\varepsilon)$ $\forall i \geq i_0'$

$i \geq \text{máx}\{i_0, i_0'\} \implies x \in B(x,\varepsilon) \cap B(y,\varepsilon) = \emptyset$. Esto es una contradicción, por tanto $x = y$. □

Veamos ahora ejemplos de distancias que tienen los mismo conjuntos abiertos.

Definición 0.8. Sea X un conjunto y sean d, d' dos distancias en X tales que existen $\alpha, \beta > 0$ tales que

$$\alpha \cdot \mathrm{d}(x,y) \leq \mathrm{d}'(x,y) \leq \beta \cdot \mathrm{d}(x,y) \ \forall x,y \in X$$

Diremos entonces que d, d' son distancias métricamente equivalentes en X.

Propiedad. Dos distancias métricamente equivalentes tienen los mismos conjuntos abiertos.

Demostración. Sean d, d' distancias en X tales que $\exists \alpha, \beta > 0$ con $\alpha \cdot \mathrm{d} \leq \mathrm{d}' \leq \beta \cdot \mathrm{d}$. Sean $\mathcal{T}, \mathcal{T}'$ las familias de conjuntos abiertos para las distancias d, d'. Queremos ver que $\mathcal{T} = \mathcal{T}'$. Para ello, buscaremos una doble inclusión.

Veamos que $T \subset \mathcal{T}'$. Sea $U \in \mathcal{T}$. Sabemos que, para todo $x \in U$, existe $r_x > 0$ tal que $B(x, r_x) \subset U$.

Nota: $B(x,r_x)$ es la bola para la distancia d. Las bolas en (X,d') se expresarán por $B'(x,r)$. Tenemos que:

$$\begin{aligned} y \in B'(x,r) \implies \mathrm{d}'(x,y) < r \implies \alpha \cdot \mathrm{d}(x,y) \leq \mathrm{d}'(x,y) < r &\implies \mathrm{d}(x,y) < \frac{r}{\alpha} \\ &\implies y \in B(x, \frac{r}{\alpha}) \end{aligned}$$

Entonces, $\forall r > 0$, $B'(x,r) \subset B(x, \frac{r}{\alpha})$. Llamando $r_x = \frac{r}{\alpha} \implies r = \alpha r_x \implies B'(x, \alpha r_x) \subset B(x, r_x)$. Por tanto, $\forall x \in U$, $B'(x,\alpha r_x) \subset B(x,r_x) \subset U \implies U \in \mathcal{T}'$. Esto último es porque cada punto $x \in U$ es el centro de una bola para la distancia d' que está contenida en U. Esto demuestra que $\mathcal{T} \subset \mathcal{T}'$.

El argumento para probar que $\mathcal{T}' \subset \mathcal{T}$ es similar. □

Ejemplos. $\mathbb{R}^n, \mathrm{d}_2, \mathrm{d}_1, \mathrm{d}_\infty$.

- $\mathrm{d}_2(x,y) = \|x-y\|_2$. $\|x\|_2 = \left(\displaystyle\sum_{i=1}^n x_i^2\right)^{1/2}$
- $\mathrm{d}_1(x,y) = \|x-y\|_1$. $\|x\|_1 = |x_1| + \cdots + |x_n|$
- $\mathrm{d}_\infty(x,y) = \|x-y\|_\infty$. $\|x\|_\infty = \text{máx}\{|x_i|\}$

Veamos primero que d_1 es métricamente equivalente a d_∞.

- $\|x\|_1 = |x_1 + \cdots + |x_n| \leq \|x\|_\infty + \cdots + \|x\|_\infty = n \cdot \|x\|_\infty$
- $\|x\|_\infty = \text{máx}\{|x_i|\} \leq |x_1| + \cdots + |x_n| = \|x\|_1$

de donde $\|x\|_\infty \leq \|x\|_1 \leq n \cdot \|x\|_\infty$, así que

$$\mathrm{d}_\infty(x,y) = \|x-y\|_\infty \leq \|x-y\|_1 = \mathrm{d}_1(x,y) \leq n\|x-y\|_\infty = n\,\mathrm{d}_\infty(x,y)$$

y por tanto, las distancias d_∞ y d_1 son métricamente equivalentes en $\mathbb{R}^n$.

Veamos ahora que d_2 es métricamente equivalente a d_∞:

- $\|x\|_2 = \left(\displaystyle\sum_{i=1}^n x_i^2\right)^{1/2} \leq \left(\displaystyle\sum_{i=1}^n \|x\|_\infty^2\right)^{1/2} = (n \cdot \|x\|_\infty^2)^{1/2} = \sqrt{n} \cdot \|x\|_\infty$
- $\|x\|_\infty^2 = \text{máx}\{|x_i|^2\} \leq \displaystyle\sum_{i=1}^n x_i^2 = \|x\|_2^2$

de donde $\|x\|_\infty \leq \|x\|_2 \leq \sqrt{n}\|x\|_\infty$, y por tanto:

$$\mathrm{d}_\infty(x,y) \leq \mathrm{d}_2(x,y) \leq \sqrt{n}\,\mathrm{d}_\infty(x,y)$$

Así pues, d_∞ y d_2 son métricamente equivalentes. También lo son d_1 y d_2 (ejercicio nº2).

Propiedad. Sea (X, d) un espacio métrico. Entonces todo conjunto abierto no vacío es unión de bolas abiertas.

Demostración. Sea $U \in \mathcal{T}$. Por definición de conjunto abierto, para todo $x \in U, \exists r_x > 0$ tal que $B(x, r_x) \subset U$. Veamos que $U = \displaystyle\bigcup_{x\in U} B(x, r_x)$. Es claro que $B(x, r_x) \subset U$ $\forall x \in U$, de donde $\displaystyle\bigcup_{x\in U} B(x, r_x) \subset U$. Tomamos ahora $z \in U$. Tenemos que $B(z, r_z) \subset U \implies z \in B(z, r_z) \subset \displaystyle\bigcup_{x\in U} B(x, r_x)$, y entonces $U \subset \displaystyle\bigcup_{x\in U} B(x, r_x)$. De aquí deducimos que $U = \displaystyle\bigcup_{x\in U} B(x, r_x)$. □

Observación. ¿Puede ser un conjunto abierto, $U \neq \emptyset$, unión de bolas cerradas? Sí:

Si $x \in U, \exists r_x > 0$ tal que $B(x, r_x) \subset U$, pero $\overline{B}(x, \frac{r_x}{2}) \subset B(x, r_x)$. Con un razonamiento parecido al anterior, se demuestra que $U = \displaystyle\bigcup_{x\in U} \overline{B}(x, \frac{r_x}{2})$.

Definición 0.9. Sea (X, d) un espacio métrico. Diremos que $F \subset X$ es un conjunto cerrado si su complementario, $F^c, X\backslash F$, es un conjunto abierto.

$$X\backslash F = \{x \in X : x \notin F\}$$

Propiedades.

1. $\emptyset^c = X \in \mathcal{T}$, $X^c = \emptyset \in \mathcal{T} \implies \emptyset, X$ son conjuntos cerrados.
2. $\{F_i\}_{i\in I}$ formada por conjuntos cerrados $\implies \left(\displaystyle\bigcap_{i\in I} F_i\right)^c = \displaystyle\bigcup_{i\in I} F_i^c \implies \displaystyle\bigcap_{i\in I} F_i$ es cerrado.

3. Sea $F_1, F_2, \ldots, F_k$ una familia finita de conjuntos cerrado. Entonces se tiene que $(F_1 \cup \cdots \cup F_k)^c = F_1^c \cap \cdots \cap F_k^c \in \mathcal{T} \implies F_1 \cup \cdots \cup F_k$ es un conjunto cerrado.

Observación. ¿Es la unión arbitraria de conjuntos cerrados un conjunto cerrado? No en general.
Consideramos $(\mathbb{R}, \mathrm{d})$, $\quad \mathrm{d}(x,y) = |x-y|$. Tenemos que $\{0\} = \bigcap\limits_{r>0}(-r,r)$. Entonces

$$\mathbb{R}\backslash\{0\} = \{0\}^c = \bigcup_{r>0}(-r,r)^c = \bigcup_{r>0}\{(-\infty,-r] \cup [r,+\infty)\}$$

Vemos que la última unión es unión de conjuntos cerrados, mientras que $\mathbb{R}\backslash\{0\}$ no es un conjunto cerrado.

Propiedad. Las bolas cerradas de un espacio métrico son conjuntos cerrados.

<u>Demostración.</u> Sean $x \in X, r > 0$. Para que $\overline{B}(x,r)$ sea un conjunto cerrado, vamos a comprobar que $X\backslash\overline{B}(x,r)$ es un conjunto abierto.

$$z \in \overline{B}(x,r) \iff \mathrm{d}(x,z) \leq r$$

$$z \in X\backslash\overline{B}(x,r) \iff z \notin \overline{B}(x,r) \iff \mathrm{d}(z,x) > r$$

Entonces, $X\backslash\overline{B}(x,r) = \{z \in X : \mathrm{d}(z,x) > r\}$. Veamos que es abierto. Tomamos $y \in X\backslash\overline{B}(x,r) \implies \mathrm{d}(x,y) > r \implies s := \mathrm{d}(x,y) - r > 0$. Probemos que $B(y,s) \subset X\backslash\overline{B}(x,r)$:

$$\begin{aligned} z \in B(y,s) &\implies \mathrm{d}(y,z) < s \implies \mathrm{d}(x,y) \leq \mathrm{d}(x,z) + \mathrm{d}(z,y) < \mathrm{d}(x,z) + s \\ &\implies \mathrm{d}(x,z) > \mathrm{d}(x,y) - s = r \end{aligned}$$

tal y como queríamos. Es decir, $X\backslash\overline{B}(x,r)$ es abierto, y por tanto $\overline{B}(x,r)$ es un conjunto cerrado. □

Propiedad (Propiedad T_2 o Hausdorff). Sean (X, d) un espacio métrico y $x, y \in X$ con $x \neq y$. Existen entonces dos conjuntos abiertos U_x, U_y tales que $x \in U_x, y \in U_y$ y $U_x \cap U_y = \emptyset$.

<u>Demostración.</u> Sean $x \neq y$. Entonces $r = \mathrm{d}(x,y) > 0$. Tomamos $U_x = B(x, \frac{r}{2}), U_y = B(y, \frac{r}{2})$. Es claro que $x \in U_x$ y que $y \in U_y$. Veamos que $U_x \cap U_y = \emptyset$. Supongamos, en busca de una contradicción, que $U_x \cap U_y \neq \emptyset$. Sea $z \in U_x \cap U_y$. Entonces tenemos que

$$\mathrm{d}(x,y) \leq \mathrm{d}(z,x) + \mathrm{d}(z,y) < \frac{r}{2} + \frac{r}{2} = r$$

pero $\mathrm{d}(x,y) = r$, así que hemos llegado a una contradicción y, por tanto, $U_x \cap U_y = \emptyset$. □

1. Ejercicios

1. Sean (X, d) un espacio métrico (d distancia en X) y $r > 0$. Definimos $\mathrm{d}_r : X \times X \to \mathbb{R}$ por:

$$\mathrm{d}_r(x, y) = r \cdot \mathrm{d}(x, y), \quad \forall x, y \in X.$$

Probar que d_r es una distancia en X.

Solución

- $\mathrm{d}_r(x, y) = 0 \iff r \cdot \mathrm{d}(x, y) = 0 \iff \mathrm{d}(x, y) = 0 \iff x = y$
- $\mathrm{d}_r(x, y) = r \cdot \mathrm{d}(x, y) = r \cdot \mathrm{d}(y, x) = \mathrm{d}_r(y, x)$
- $\mathrm{d}_r(x, y) = r \cdot \mathrm{d}(x, y) \leq r(\mathrm{d}(x, z) + \mathrm{d}(z, y)) = r \cdot \mathrm{d}(x, z) + r \cdot \mathrm{d}(z, y) = \mathrm{d}_r(x, z) + \mathrm{d}_r(z, y)$

Por tanto, d_r es una distancia en X.

2. Sea X un conjunto, $\mathrm{d}_1, \mathrm{d}_2, \mathrm{d}_3$ distancias en X tales que d_1 es métricamente equivalente a d_2 y d_2 es métricamente equivalente a d_3. Probar que d_1 es métricamente equivalente a d_3.

Solución

Sabemos que existen $\alpha, \beta, \alpha', \beta' > 0$ tales que:

- $\alpha\, \mathrm{d}_1 \leq \mathrm{d}_2 \leq \beta\, \mathrm{d}_1$
- $\alpha'\, \mathrm{d}_2 \leq \mathrm{d}_3 \leq \beta'\, \mathrm{d}_2$

Entonces, $\alpha\, \mathrm{d}_1 \leq \mathrm{d}_2 \leq \dfrac{\mathrm{d}_3}{\alpha'} \leq \dfrac{\beta'}{\alpha'}\, \mathrm{d}_2 \leq \dfrac{\beta \cdot \beta'}{\alpha'}\, \mathrm{d}_1$. En particular,

$$\alpha \cdot \alpha'\, \mathrm{d}_1 \leq \mathrm{d}_3 \leq \beta \cdot \beta'\, \mathrm{d}_1$$

Y por tanto, d_1 y d_3 son métricamente equivalentes.

3. Consideramos las distancias d_2 y d = distancia discreta. Probar que no son distancias métricamente equivalentes.

4. Sea (X, d) un espacio métrico. Supongamos que d es no acotada ($\forall M > 0, \exists x, y \in X : \mathrm{d}(x, y) > M$). Probar que:

a) $\mathrm{d}' = \min\{1, \mathrm{d}\}$ es una distancia en X,
b) $T_{\mathrm{d}} = T_{\mathrm{d}'}$,
c) d, d' no son métricamente equivalentes.

Solución

a)
- $\mathrm{d}'(x, y) = 0 \iff \min\{1, \mathrm{d}(x, y)\} = 0 \iff \mathrm{d}(x, y) = 0 \iff x = y$
- $\mathrm{d}'(x, y) = \min\{1, \mathrm{d}(x, y)\} = \min\{1, \mathrm{d}(y, x)\} = \mathrm{d}'(y, x)$
- Queremos ver que $\mathrm{d}'(x, y) \leq \mathrm{d}'(x, z) + \mathrm{d}'(z, y)$. Si $\mathrm{d}'(x, z) = 1$ o $\mathrm{d}'(z, y) = 1$, entonces $\mathrm{d}'(x, z) + \mathrm{d}'(z, y) \geq 1 \geq \mathrm{d}'(x, y)$. Supongamos ahora que $\mathrm{d}'(x, z) < 1$ y $\mathrm{d}'(z, y) < 1$. Entonces $\mathrm{d}'(x, z) = \mathrm{d}(x, z)$ y $\mathrm{d}'(z, y) = \mathrm{d}(z, y)$. Por tanto, $\mathrm{d}'(x, y) = \min\{1, \mathrm{d}(x, y)\} \leq \mathrm{d}(x, y) \leq \mathrm{d}(x, z) + \mathrm{d}(z, y) = \mathrm{d}'(x, z) + \mathrm{d}'(z, y)$

b) Sea $0 < r < 1$. Veamos primero que $B_{\mathrm{d}}(x, r) = B_{\mathrm{d}'}(x, r)$:
Sea $y \in B_{\mathrm{d}}(x, r) \implies \mathrm{d}(x, y) < r < 1 \implies \mathrm{d}'(x, y) = \mathrm{d}(x, y) < r \implies y \in B_{\mathrm{d}'}(x, r)$. Para la otra inclusión, sea $y \in B_{\mathrm{d}'}(x, r) \implies \mathrm{d}'(x, y) < r < 1 \implies \mathrm{d}'(x, y) = \mathrm{d}(x, y) < r \implies y \in B_{\mathrm{d}}(x, r)$. Probemos, ahora sí, que $T_{\mathrm{d}} = T_{\mathrm{d}'}$.
Sea $U \in T_{\mathrm{d}}$. Entonces $\forall x \in U, \exists r_x > 0 : B_{\mathrm{d}}(x, r_x) \subset U$. Sea $s_x = \min\{1/2, r_x\}$. Entonces, $B_{\mathrm{d}}(x, s_x) \subset B_{\mathrm{d}}(x, r_x) \subset U$. Por tanto, $U = \displaystyle\bigcup_{x \in U} B_{\mathrm{d}}(x, s_x)$.
Como $s_x < 1\, \forall x \in U, B_{\mathrm{d}}(x, s_x) = B_{\mathrm{d}'}(x, s_x) \implies U = \displaystyle\bigcup_{x \in U} B_{\mathrm{d}}(x, s_x) = \bigcup_{x \in U} B_{\mathrm{d}'}(x, s_x) \in T_{\mathrm{d}'}$. Entonces $T_{\mathrm{d}} \subset T_{\mathrm{d}'}$. La otra inclusión se prueba análogamente a esta.

c) Supongamos, en busca de una contradicción, que d y d' son métricamente equivalentes. Entonces $\exists \alpha, \beta > 0$ tales que $\alpha\,\mathrm{d} \leq \mathrm{d}' \leq \beta\,\mathrm{d}$.

Sin pérdida de generalidad, tomemos $\beta = 1$. Si existiera $\alpha\,\mathrm{d} \leq \mathrm{d}' \implies \alpha \cdot \mathrm{d}(x, y) \leq \mathrm{d}'(x, y) \leq 1\ \forall x, y \in X$. Entonces, $\mathrm{d}(x, y) \leq 1/\alpha\ \forall x, y \in X$, pero entonces d es acotada, en contra del supuesto.