EVALUACIÓN 5

Manuel Vicente Bolaños Quesada

Problema 1

a) Pongamos $a_n = \dfrac{((3n)!)^2}{(n!)^6} a^{6n}$. Entonces, tenemos que

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{((3n+3)!)^2}{((n+1)!)^6} \cdot a^{6n+6} \cdot \frac{(n!)^6}{((3n)!)^2} \cdot a^{-6n} = \frac{[(3n+3)(3n+2)(3n+1)]^2}{(n+1)^6} \cdot a^6 \to 3^6 a^6.$$

Aplicamos ahora el criterio del cociente.

Si $3^6a^6 < 1 \Leftrightarrow |a| < \dfrac{1}{3}$, la serie $\displaystyle\sum_{n\geq 1} a_n$ converge.

Si $3^6a^6 > 1 \Leftrightarrow |a| > \dfrac{1}{3}$, la serie $\displaystyle\sum_{n\geq 1} a_n$ no es convergente.

b) Si $a \leq 1$, entonces la sucesión a partir de la cual se obtiene la serie no converge a 0, y por lo tanto, la serie no converge. Supongamos entonces que $a > 0$. Pongamos $c_n = \dfrac{4\cdot 6\cdot 8\cdots(2n+2)}{9\cdot 11\cdot 13\cdots(2n+7)}$.

Por una parte, tenemos que $\dfrac{2n+2}{2n+7} < \dfrac{2n+7}{2n+12}$ (trivial de comprobar). Entonces,

$$c_n = \frac{4\cdot 6\cdot 8\cdots(2n+2)}{9\cdot 11\cdot 13\cdots(2n+7)} < \frac{9}{14}\cdot\frac{11}{16}\cdot\frac{13}{18}\cdots\frac{2n+7}{2n+12} = \frac{4\cdot 6\cdot 8\cdot 10\cdot 12}{(2n+4)(2n+6)(2n+8)(2n+10)(2n+12)}\cdot\frac{1}{c_n}$$

$$\implies c_n^2 < \frac{4\cdot 6\cdot 8\cdot 10\cdot 12}{(2n+4)(2n+6)(2n+8)(2n+10)(2n+12)}$$

Como $a > 0$

$$c_n^a < \left(\frac{4\cdot 6\cdot 8\cdot 10\cdot 12}{(2n+4)(2n+6)(2n+8)(2n+10)(2n+12)}\right)^{\frac{a}{2}}$$

teniendo en cuenta que

$$\left(\frac{4\cdot 6\cdot 8\cdot 10\cdot 12}{(2n+4)(2n+6)(2n+8)(2n+10)(2n+12)}\right)^{\frac{a}{2}} \sim (2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6)^{\frac{a}{2}}\frac{1}{n^{\frac{5}{2}a}}$$

deducimos, por el criterio básico de comparación con la serie de Riemann de exponente $\frac{5}{2}a$ que si $\frac{5}{2}a > 1$, es decir, $a > \frac{2}{5}$, la serie es convergente.

Por otra parte, tenemos que $\dfrac{2n+2}{2n+7} > \dfrac{2n-3}{2n+2}$ (trivial de comprobar).

$$c_n = \frac{4\cdot 6\cdot 8\cdots(2n+2)}{9\cdot 11\cdot 13\cdots(2n+7)} > \frac{4}{9}\cdot\frac{1}{6}\cdot\frac{3}{8}\cdots\frac{2n-3}{2n+2} = \frac{4}{9}\cdot 4\cdot 3\cdot 5\cdot 7\cdot\frac{1}{(2n-1)(2n+1)(2n+3)(2n+5)(2n+7)}\cdot\frac{1}{c_n}$$

$$\implies c_n^2 > \frac{560}{3}\cdot\frac{1}{(2n-1)(2n+1)(2n+3)(2n+5)(2n+7)}$$

Como $a > 0$,

$$c_n^a > \left(\frac{560}{3}\cdot\frac{1}{(2n-1)(2n+1)(2n+3)(2n+5)(2n+7)}\right)^{\frac{a}{2}}$$

y teniendo en cuenta que $\left(\frac{560}{3}\cdot\frac{1}{(2n-1)(2n+1)(2n+3)(2n+5)(2n+7)}\right)^{\frac{a}{2}} \sim \left(\frac{35}{6}\right)^{\frac{a}{2}}\frac{1}{n^{\frac{5}{2}a}}$, deducimos, por el criterio básico de comparación con la serie de Riemann de exponente $\frac{5}{2}a$ que si $\frac{5}{2}a \leq 1$, es decir, $a \leq \frac{2}{5}$ la serie no es convergente.

En conclusión, la serie original es convergente si y solo si $a > \frac{2}{5}$

Problema 2

a) Pongamos $a_n = \frac{\sqrt{n}}{n\sqrt{n}+1}$. Entonces, la serie es $\sum_{n\geq 1}(-1)^{n+1}a_n$.

Estudiemos primeros la convergencia absoluta, es decir, la convergencia de la serie $\sum_{n\geq 1} a_n$. Tenemos que $a_n \geq \frac{\sqrt{n}}{n\sqrt{n}+\sqrt{n}} = \frac{1}{n+1}$. Deducimos, por el criterio básico de comparación con la serie armónica, que la serie no converge absolutamente.

Veamos ahora que $a_n > a_{n+1}$

$$\begin{aligned} a_n > a_{n+1} \Leftrightarrow \frac{\sqrt{n}}{n\sqrt{n}+1} > \frac{\sqrt{n+1}}{(n+1)\sqrt{n+1}+1} &\Leftrightarrow (n+1)\sqrt{n(n+1)}+\sqrt{n} > n\sqrt{n(n+1)}+\sqrt{n+1} \\ &\Leftrightarrow \sqrt{n}\sqrt{n+1}+\sqrt{n}-\sqrt{n+1} > 0 \\ &(\sqrt{n}-1)(\sqrt{n+1}+1)+1 > 0, \end{aligned}$$

pero esta última desigualdad es trivial, ya que $\sqrt{n} \geq 1$ para todo natural n, así que $a_n > a_{n+1}$.

Como la sucesión $\{a_n\}$ es decreciente, y $\{a_n\} \to 0$ trivialmente, aplicando el criterio de Leibniz, deducimos que la serie es convergente.

b) Pongamos $a_n = \frac{1}{\sqrt{n+2}\sqrt[n+2]{3}}$. Estudiemos primero la convergencia absoluta de la serie. Tenemos que $\sqrt[n+2]{3} < 2$ para cada natural n. Observemos ahora que

$$\frac{1}{\sqrt{n+2}\sqrt[n+2]{3}} > \frac{1}{2\sqrt{n+2}} = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{(n+2)^{\frac{1}{2}}}.$$

Deducimos que, por el criterio básico de comparación con la serie de Riemann de exponente $\frac{1}{2}$, que la serie no converge absolutamente.

Veamos ahora que

$$\begin{aligned} a_n > a_{n+1} \Leftrightarrow \frac{1}{\sqrt{n+2}\sqrt[n+2]{3}} > \frac{1}{\sqrt{n+3}\sqrt[n+3]{3}} &\Leftrightarrow \sqrt{n+3}\sqrt[n+3]{3} > \sqrt{n+2}\sqrt[n+2]{3} \\ &\Leftrightarrow \frac{n+3}{n+2} > \frac{\sqrt[n+2]{9}}{\sqrt[n+3]{9}} \\ &\Leftrightarrow \left(\frac{n+3}{n+2}\right)^{n+2} > \sqrt[n+3]{9} \end{aligned}$$

Por la desigualdad entre las medias aritmética y geométrica tenemos que:

$$\left(\frac{n+3}{n+2}\right)^{n+2} = \left(\frac{2+\overbrace{1+1+\cdots+1}^{n+1}}{n+2}\right)^{n+2} \geq 2 > \sqrt[n+3]{9},$$

por lo que queda demostrado que la sucesión $\{a_n\}$ es decreciente. Además, como $\sqrt[n+2]{3} \to 1$, tenemos que $\{a_n\} \to 0$. Por tanto, aplicando el criterio de Leibniz, deducimos que la serie original es convergente.