Solución ejercicios Tema 3

Manuel Vicente Bolaños Quesada

1. Sean $x_0, x_1, \ldots, x_M$ $M+1$ números reales. Comprueba que

$$\det \begin{bmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ x_0 & x_1 & \cdots & x_{M-1} & x_M \\ x_0^2 & x_1^2 & \cdots & x_{M-1}^2 & x_M^2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ x_0^M & x_1^M & \cdots & x_{M-1}^M & x_M^M \end{bmatrix} = \prod_{\substack{i,j=0 \\ i<j}}^{M} (x_j - x_i).$$

Deduce que si $(x_0, y_0), (x_1, y_1), \ldots, (x_M, y_M) \in \mathbb{R}^2$ son tales que $i, j = 1, \ldots, M \implies x_i \neq x_j$, entonces existe una única función polinómica $p : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ de grado menor o igual que M con $i = 0, 1, \ldots, M \implies p(x_i) = y_i$.

- **Solución.**

Para la primera parte del ejercicio, primero vemos que el determinante debe ser un polinomio homogéneo de grado $0 + 1 + 2 + \cdots + M = \dfrac{M(M+1)}{2}$. Ahora, notamos que si $x_i = x_j$ para algunos $i < j \in \{0, 1, \ldots, M\}$, entonces dos columnas de la matriz (a la que a partir de ahora llamaremos A, por comodidad) son iguales, y por tanto su determinante es 0. Deducimos entonces que $(x_j - x_i)$ es un factor de $\det(A)$. Como esto lo hemos hecho para dos índices cualquiera, deducimos que $\det(A) = Q(x_0, x_1, \ldots, x_M) \displaystyle\prod_{\substack{i,j=0 \\ i<j}}^{M} (x_j - x_i)$, donde $Q(x_0, x_1, \ldots, x_M)$ es un polinomio en esas variables.

Como $\det(A)$ tiene que ser un polinomio homogéneo de grado $\dfrac{M(M+1)}{2}$, y $\displaystyle\prod_{\substack{i,j=0 \\ i<j}}^{M} (x_j - x_i)$ ya lo es, Q tiene que ser una constante. El producto de los elementos de la diagonal de A es $x_1 x_2^2 \cdots x_M^M$, que coincide con el monomio obtenido al multiplicar los primeros sumandos de cada término de $\displaystyle\prod_{\substack{i,j=0 \\ i<j}}^{M} (x_j - x_i)$. Por tanto, $Q = 1$, y, en efecto, $\det(A) = \displaystyle\prod_{\substack{i,j=0 \\ i<j}}^{M} (x_j - x_i)$.

Para la segunda parte del enunciado, supongamos que existen dos polinomios $p, q : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, de grado menor o igual que M y distintos, tales que $p(x_i) = q(x_i) = y_i \ \forall i \in \{0, 1, \ldots, M\}$. Sea $r(x) = p(x) - q(x)$. Como p y q son distintos, r es un polinomio de grado menor o igual que M no nulo y $i = 0, 1, \ldots, M \implies r(x_i) = 0$. Es decir, x_i es una raíz del polinomio $r \ \ \forall i \in \{0, 1, \ldots, M\}$. Supongamos que $r(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_M x^M$, para algunas constantes a_i. Entonces, se satisfacen estas ecuaciones:

$$\begin{cases} a_0 + a_1 x_0 + \cdots + a_M x_0^M = 0 \\ a_0 + a_1 x_1 + \cdots + a_M x_1^M = 0 \\ \qquad\qquad \vdots \\ a_0 + a_1 x_M + \cdots + a_M x_M^M = 0 \end{cases}$$

La solución a ese sistema es única (con solución $a_0 = a_1 = \cdots = a_M = 0$) si $\det(A) \neq 0$. Pero como $x_i \neq x_j$ si $i \neq j$, $\det(A) \neq 0$, y por tanto, $r(x) = 0$, de donde $p(x) = q(x)$.

2. Comprueba que el problema de interpolación anterior no está bien definido si el grado de la función polinómica p es distinto de M (número de datos menos 1).

   - **Solución.**

   Caso 1: el grado es menor que M

   Un contraejemplo sería el siguiente: por los puntos $(0,0),(1,1),(2,1)$ no pasa ningún polinomio de grado 1.

   Caso 2: el grado es mayor que M

   Un contraejemplo es el siguiente: dados los puntos $(0,0),(1,1)$ pasa la recta $y=x$, y la parábola $y=x^2$.

3. Demuestra que si $a<b$, $f\in C^3([a,b])$ y I_2f es el polinomio en $\mathbb{P}_2$ de forma que

$$I_2f(x_0)=f(x_0), \qquad I_2f(x_1)=f(x_1), \qquad I_2f(x_2)=f(x_2)$$

   con los nodos igualmente espaciados $x_0=a, x_1=(a+b)/2, x_2=b$, entonces el correspondiente error de interpolación E_2f verifica

$$\|E_2f\|_\infty \leq \frac{\|f'''\|_\infty}{9\sqrt{3}}h^3,$$

   siendo $h=(b-a)/2$.

   - **Solución.**

   Error de interpolación puntual: $\exists \varepsilon \in]a,b[$ tal que $E_2f(x)=\dfrac{f'''(\varepsilon)}{6}(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)$.

   Estimación uniforme para error de interpolación: $\|E_2f\|_\infty \leq \dfrac{\|f'''\|_\infty}{6}h^3$. No obstante, esta estimación es mejorable (acotando $\omega_3(x)$): existe $0\leq t\leq 2$ tal que $x=x_0+th$. Entonces:

   - Caso 1: $x_0\leq x\leq x_1$

$$|(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)|=(x-x_0)(x_1-x)(x_2-x)=th(1-t)h(2-t)h=h^3(t^3-3t^2+2t)$$

   Sea $g:[0,2]\longrightarrow\mathbb{R}$ la función dada por $g(x)=x^3-3x^2+2x$ $\forall x\in[0,2]$. Tenemos que $g'(x)=3x^2-6x+2$, y $g'(x)=0 \iff x^2-2x+\frac{2}{3}=0 \iff \left(x-\left(1+\dfrac{1}{\sqrt{3}}\right)\right)\left(x-\left(1-\dfrac{1}{\sqrt{3}}\right)\right)=0$. Es fácil comprobar que g tiene un máximo absoluto en $x=1-\dfrac{1}{\sqrt{3}}$. Entonces, $g(x)\leq g\left(1-\dfrac{1}{\sqrt{3}}\right)=\dfrac{2}{3\sqrt{3}}$.

   Deducimos entonces que $\|E_2f\|_\infty \leq \dfrac{\|f'''\|_\infty}{6}h^3\dfrac{2}{3\sqrt{3}}=\dfrac{\|f'''\|_\infty}{9\sqrt{3}}h^3$, tal y como queríamos.

   - Caso 2: $x_1\leq x\leq x_2$

$$|(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)|=(x-x_0)(x_1-x)(x_2-x)=th(t-1)h(2-t)h=h^3(-t^3+3t^2-2t)$$

   Sea $h:[0,2]\longrightarrow\mathbb{R}$ la función dada por $h(x)=-x^3+3x^2-2x$ $\forall x\in[0,2]$. Tenemos que $h'(x)=-3x^2+6x-2 \implies h'(x)=0 \iff x^2-2x+\frac{2}{3}=0$. Análogamente al caso anterior, obtenemos que h tiene un máximo en $x=1+\dfrac{1}{\sqrt{3}}$. Entonces, $h(x)\leq h\left(1+\dfrac{1}{\sqrt{3}}\right)=\dfrac{2}{3\sqrt{3}}$. A partir de aquí se sigue igual que en el caso anterior.

4. Calcula los 7 nodos de Chebyshev $x_0, x_1, \dots, x_6$ del intervalo $[1.6, 3]$ y úsalos para resolver el problema de interpolación:

$$\text{encontrar } p \in \mathbb{P}_6 \ : \ i = 0,1,2,3,4,5,6 \implies p(x_i) = \sqrt{|x_i - 2|}$$

mediante las fórmulas de Lagrange y Newton. Analiza el condicionamiento de este problema y obtén una estimación del error de interpolación.

- **Solución.**

Comenzamos hallando los 7 nodos de Chebyshev del intervalo referencia, $[-1, 1]$.

$$\left\{\cos\left(\frac{\pi}{14}\right), \cos\left(\frac{3\pi}{14}\right), \cos\left(\frac{5\pi}{14}\right), \cos\left(\frac{7\pi}{14}\right), \cos\left(\frac{9\pi}{14}\right), \cos\left(\frac{11\pi}{14}\right), \cos\left(\frac{13\pi}{14}\right)\right\}$$

Ahora, vamos a construir un conveniente isomorfismo afín. Sea $\phi : [-1, 1] \longrightarrow [1.6, 3]$ el isomorfismo afín caracterizado por la doble igualdad $\phi(-1) = 1.6$, $\phi(1) = 3$. Esto es, si $\phi(x) = \alpha x + \beta$, entonces:

$$\left\{\begin{array}{l} -\alpha + \beta = 1.6 \\ \alpha + \beta = 3 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{l} \alpha = 0.7 = \frac{7}{10} \\ \beta = 2.3 = \frac{23}{10} \end{array}\right.$$

Así pues $\phi(x) = \dfrac{7}{10}x + \dfrac{23}{10}$, y entonces, los 7 nodos de Chebyshev en el intervalo $[1.6, 3]$ son:

$$\left\{\frac{7}{10}\cos\left(\frac{\pi}{14}\right) + \frac{23}{10}, \frac{7}{10}\cos\left(\frac{3\pi}{14}\right) + \frac{23}{10}, \frac{7}{10}\cos\left(\frac{5\pi}{14}\right) + \frac{23}{10}, \frac{7}{10}\cos\left(\frac{7\pi}{14}\right) + \frac{23}{10}, \frac{7}{10}\cos\left(\frac{9\pi}{14}\right) + \frac{23}{10},\right.$$
$$\left.\frac{7}{10}\cos\left(\frac{11\pi}{14}\right) + \frac{23}{10}, \frac{7}{10}\cos\left(\frac{13\pi}{14}\right) + \frac{23}{10}\right\}$$

La parte del problema de interpolación la resuelvo con Maxima:

——————————————————————EJERCICIO~4——————————————— ——————————— Polinomio de interpolación mediante las fórmulas de Lagrange

(% i1) nodos:makelist(float(0.7*cos((2*i +1)*%pi/14)+2.3), i, 0, 6);
(nodos)
$$[2.982449538527276, 2.847282037727621, 2.60371861738229, 2.3, 1.996281382617709, 1.752717962272379, 1.617550461472723]$$

(% i2) f(x):=sqrt(abs(x-2));

(% o2) $$\mathrm{f}(x) := \sqrt{|x-2|}$$

(% i3) imagenes:makelist(f(nodos[i]), i, 1, 7);

(imagenes) $$[0.9911859253072939, 0.9204792435072183, 0.7769933187500974, 0.547722557505166, 0.06098046721935422, 0.4972746099768427, 0.6184250468143062]$$

(% i4) l(i,x):=product((x-nodos[j])/(nodos[i]-nodos[j]),j,1,i-1)*product((x-nodos[j])/(nodos[i]-nodos[j]),j,i+1,7);

(% o4) $$\mathrm{l}(i,x) := \prod_{j=1}^{i-1} \frac{x - nodos_j}{nodos_i - nodos_j} \prod_{j=i+1}^{7} \frac{x - nodos_j}{nodos_i - nodos_j}$$

(% i5) p(x):=sum(imagenes[i]*l(i, x), i, 1, 7);

(% o5) $$\mathrm{p}(x) := \sum_{i=1}^{7} imagenes_i \, \mathrm{l}(i,x)$$

(% i6) expand(p(x));
(% o6)
$$-24.75292799807803x^6+349.9934972799469x^5-2041.754186135891x^4+6285.746443881553x^3 -10762.69525253004x^2 + 9711.293214095564x - 3605.252707524357$$

Polinomio de interpolación mediante las fórmulas de Newton

(% i7) w(i, x):= if i=1 then 1 else product(x-nodos[j], j, 1, i-1);

(% o7) $$\mathrm{w}(i,x) := \text{if } i = 1 \text{ then } 1 \text{ else } \prod_{j=1}^{i-1} x - nodos_j$$

(% i8) difer: genmatrix(lambda([i,j], 0), 7, 7);

(difer)
$$\begin{pmatrix}0&0&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&0&0\end{pmatrix}$$

(% i9) for i:1 thru 7 do difer[i, 1]:float(imagenes[i]);

(% o9) $done$

(% i10) for i:2 thru 7 do (for j:i thru 7 do difer[j, i]: (difer[j, i-1] - difer[j-1, i-1])/(nodos[j]-nodos[j-i+1]));

(% o10) $done$

(% i12) q(x):=sum(imagenes[i]*w(i, x), i, 1, 7);

(% o12)
$$\mathrm{q}(x) := \sum_{i=1}^{7} imagenes_i\, \mathrm{w}(i, x)$$

(% i13) expand(p(x));

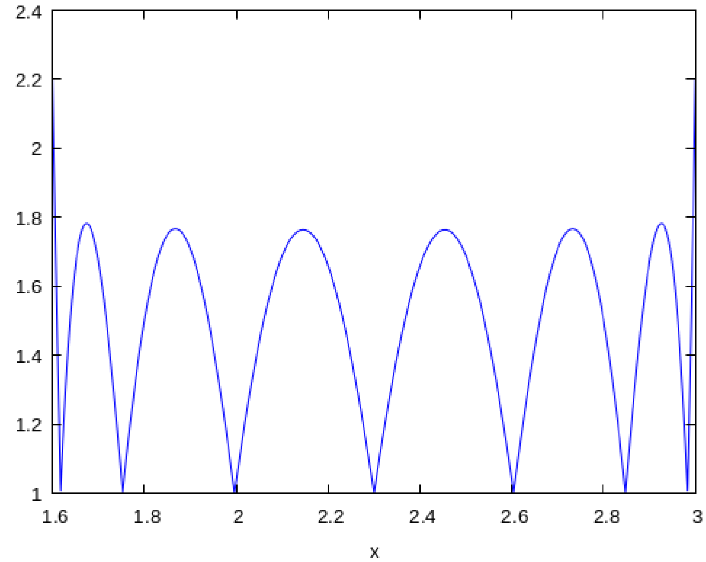
(% o13)
$$-24.75292799807803x^6+349.9934972799469x^5-2041.754186135891x^4+6285.746443881553x^3 -10762.69525253004x^2 + 9711.293214095564x - 3605.252707524357$$

Como podemos ver, ambos polinomios de interpolación son los mismos por ambos métodos. Para estudiar elcondicionamiento, vamos a graficar la función de Lebesgue

(% i14) lebesgue(x):=sum(abs(l(i, x)), i, 1, 7);

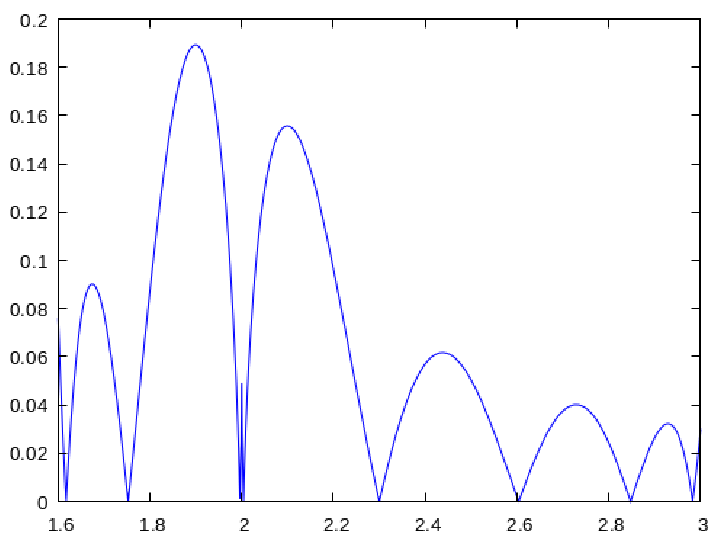
(% o14)
$$\mathrm{lebesgue}(x) := \sum_{i=1}^{7} |\mathrm{l}(i, x)|$$

(% i15) wxplot2d([lebesgue(x)], [x,1.6,3])$
(% t15)



De aquí, podemos ver que la constante de Lebesgue es, aproximadamente, 2.2, de donde el condicionamiento esbastante bueno. Para estimar el error de interpolación, vamos a graficar la función error:

(% i16) wxplot2d([abs(f(x)-p(x))], [x,1.6,3])$
(% t16)



Vemos que, la norma infinito del error es, aproximadamente, 0.19, lo que nos dice que el error cometido es bajo.

5. Considera en el intervalo $[-1,1]$ 9 nodos x_i, uniformemente distribuidos y los correspondientes 9 nodos de Chebyshev, u_i. Estudia en cada caso el problema de interpolación:

$$\text{encontrar } p \in \mathbb{P}_8 \ : \ i = 0,1,2,3,4,5,6,7,8 \implies p(x_i) = 2|x_i| + 1,$$

así como el análogo para los nodos u_i. Dibuja simultáneamente ambos interpolantes junto con la función $2|x|+1, -1 \leq x \leq 1$.

- **<u>Solución.</u>**

Los nodos x_i son:

$$x_0 = -1, x_1 = -\frac{3}{4}, x_2 = -\frac{1}{2}, x_3 = -\frac{1}{4}, x_4 = 0, x_5 = \frac{1}{4}, x_6 = \frac{1}{2}, x_7 = \frac{3}{4}, x_8 = 1.$$

Los 9 nodos de Chebyshev, u_i, son:

$$\left\{\cos\left(\frac{\pi}{18}\right), \cos\left(\frac{3\pi}{18}\right), \cos\left(\frac{5\pi}{18}\right), \cos\left(\frac{7\pi}{18}\right), \cos\left(\frac{9\pi}{18}\right), \cos\left(\frac{11\pi}{18}\right), \cos\left(\frac{13\pi}{18}\right),\right.$$

$$\left.\cos\left(\frac{15\pi}{18}\right), \cos\left(\frac{17\pi}{18}\right)\right\}$$

La parte del problema de interpolación la resuelvo con Maxima:

——————————————————————EJERCICIO 5———————————————
————————— Nodos uniformemente distribuidos

$\longrightarrow$ nodos1:makelist(-1 + 2*i/8, i, 0, 8);

(nodos1) $$[-1,-\frac{3}{4},-\frac{1}{2},-\frac{1}{4},0,\frac{1}{4},\frac{1}{2},\frac{3}{4},1]$$

$\longrightarrow$ f(x):=2*abs(x)+1;

(% o2) $$\mathrm{f}(x):=2\left|x\right|+1$$

$\longrightarrow$ imagenes1:makelist(f(nodos1[i]), i, 1, 9);

(imagenes1) $$[3,\frac{5}{2},2,\frac{3}{2},1,\frac{3}{2},2,\frac{5}{2},3]$$

$\longrightarrow$ l1(i,x):=product((x-nodos1[j])/(nodos1[i]-nodos1[j]),j,1,i-1)*product((x-nodos1[j])/(nodos1[i]-nodos1[j]),j,i+1,9);

(% o4) $$\mathrm{l1}\left(i,x\right):=\prod_{j=1}^{i-1}\frac{x-\mathit{nodos1}_{j}}{\mathit{nodos1}_{i}-\mathit{nodos1}_{j}}\prod_{j=i+1}^{9}\frac{x-\mathit{nodos1}_{j}}{\mathit{nodos1}_{i}-\mathit{nodos1}_{j}}$$

$\longrightarrow$ p1(x):=sum(imagenes1[i]*l1(i, x), i, 1, 9);

(% o5) $$\mathrm{p1}(x):=\sum_{i=1}^{9}\mathit{imagenes1}_{i}\,\mathrm{l1}\left(i,x\right)$$

Nodos de Chebyshev

$\longrightarrow$ nodos2:makelist(cos((2*i+1)*%pi/18), i, 0, 8);

(nodos2)
$$[\cos\left(\frac{\pi}{18}\right),\frac{\sqrt{3}}{2},\cos\left(\frac{5\pi}{18}\right),\cos\left(\frac{7\pi}{18}\right),0,\cos\left(\frac{11\pi}{18}\right),\cos\left(\frac{13\pi}{18}\right),-\frac{\sqrt{3}}{2},\cos\left(\frac{17\pi}{18}\right)]$$

$\longrightarrow$ imagenes2:makelist(f(nodos2[i]), i, 1, 9);

(imagenes2)
$$[2\cos\left(\frac{\pi}{18}\right)+1,\sqrt{3}+1,2\cos\left(\frac{5\pi}{18}\right)+1,2\cos\left(\frac{7\pi}{18}\right)+1,1,1-2\cos\left(\frac{11\pi}{18}\right),1-2\cos\left(\frac{13\pi}{18}\right),$$
$$\sqrt{3}+1,1-2\cos\left(\frac{17\pi}{18}\right)]$$

$\longrightarrow$ l2(i,x):=product((x-nodos2[j])/(nodos2[i]-nodos2[j]),j,1,i-1)*product((x-nodos2[j])/(nodos2[i]-nodos2[j]),j,i+1,9);

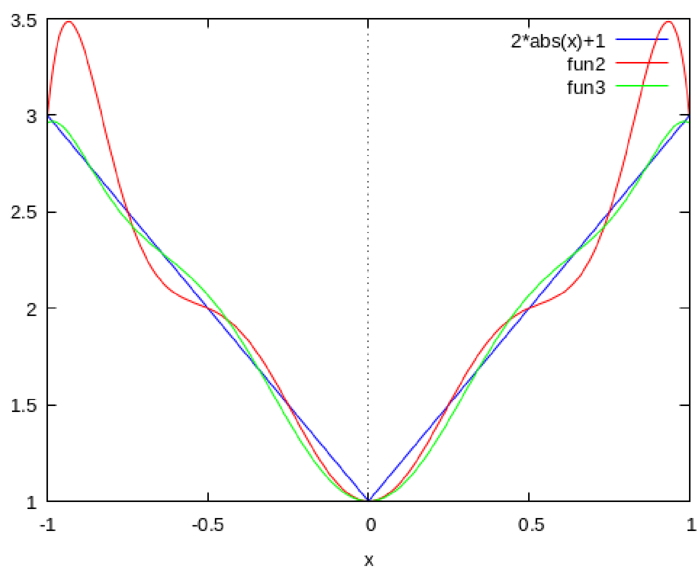
(% o8) $$\mathrm{l2}\left(i,x\right):=\prod_{j=1}^{i-1}\frac{x-nodos2_j}{nodos2_i-nodos2_j}\prod_{j=i+1}^{9}\frac{x-nodos2_j}{nodos2_i-nodos2_j}$$

$\longrightarrow$ p2(x):=sum(imagenes2[i]*l2(i, x), i, 1, 9);

(% o9) $$\mathrm{p2}(x):=\sum_{i=1}^{9} imagenes2_i\,\mathrm{l2}\left(i,x\right)$$

$\longrightarrow$ wxplot2d([f(x), p1(x), p2(x)], [x,-1,1])$

(% t10)



7. Dada la partición uniforme P del intervalo $[-1, 1]$ determinada por 6 puntos y la función de Runge f, determina el spline s que verifica

$$i = 0, 1, 2, 3, 4, 5 \implies s(-1 + 2i/5) = f(-1 + 2i/5),$$

siendo, o bien $s = S_5^1 \in \mathbb{S}_1^0(P)$, o bien $s = S_5^2 \in \mathbb{S}_3^2(P)$ con $s''(-1) = s''(1) = 0$ (natural). Ilustra con un ejemplo el principio de mínima energía para este último spline.

- **<u>Solución.</u>**

Lo resuelvo con Maxima:

——————————————————————————EJERCICIO~7——————————————————————————— Spline lineal

$\longrightarrow$ f(x):=1/(1+25*x^2);

(%o1) $$\mathrm{f}(x):=\frac{1}{1+25x^2}$$

$\longrightarrow$ P:makelist(-1+2*i/5, i, 0, 5);

(P) $$[-1,-\frac{3}{5},-\frac{1}{5},\frac{1}{5},\frac{3}{5},1]$$

$\longrightarrow$ imagenes:makelist(f(P[i]), i, 1, 6);

(imagenes) $$[\frac{1}{26},\frac{1}{10},\frac{1}{2},\frac{1}{2},\frac{1}{10},\frac{1}{26}]$$

$\longrightarrow$ B(i, x):=if i=1 then(if (P[1]<=x and x<=P[2]) then (P[2] - x)/(P[2]-P[1]) else 0) else if (1<i and i<6) then(if (P[i-1]<x and x<P[i]) then (x-P[i-1])/(P[i]-P[i-1])else if (P[i]<x and x<P[i+1]) then (P[i+1] - x)/(P[i+1]-P[i])else 0) else if i=6 then(if (P[5]<=x and x<=P[6]) then (x-P[5])/(P[6] - P[5]) else 0) else 0;

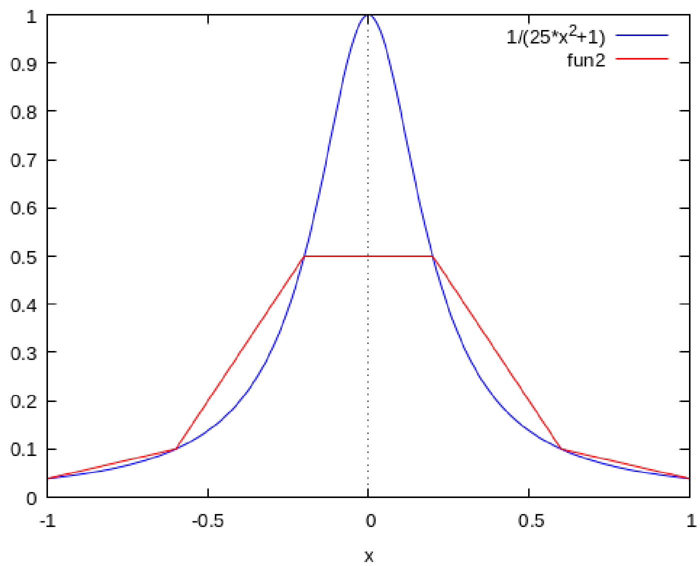
(%o4)
$$\mathrm{B}(i,x):=\text{if } i=1 \text{ then if } P_1< =x and x< =P_2 \text{ then } \frac{P_2-x}{P_2-P_1} \text{ else } 0 \text{ else if } 1< i$$
$$and i< 6 \text{ then if } P_{i-1}< x and x< P_i \text{ then } \frac{x-P_{i-1}}{P_i-P_{i-1}} \text{ else if } P_i< x and x< P_{i+1} \text{ then } \frac{P_{i+1}-x}{P_{i+1}-P_i} \text{ else } 0$$
$$\text{else if } i=6 \text{ then if } P_5< =x and x< =P_6 \text{ then } \frac{x-P_5}{P_6-P_5} \text{ else } 0 \text{ else } 0$$

$\longrightarrow$ s_lineal(x):=sum(imagenes[i]*B(i, x), i, 1, 6);

(%o5) $$s_{lineal}(x):=\sum_{i=1}^{6} imagenes_i\,\mathrm{B}(i,x)$$

$\longrightarrow$ wxplot2d([f(x), s_lineal(x)], [x,-1,1])$

(% t6)



Spline cúbico

$\longrightarrow$ h:2/5;

(h) $$\frac{2}{5}$$

$\longrightarrow$ A:genmatrix(lambda([i,j], if i=j then 2 else if i=j+1 or j=i+1 then 1/2 else 0), 6, 6);

(A) $$\begin{pmatrix} 2 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 2 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 2 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & 2 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 2 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 2 \end{pmatrix}$$

$\longrightarrow$ A[1, 2]:0;

(% o9) $$0$$

$\longrightarrow$ A[6, 5]:0;

(% o10) $$0$$

$\longrightarrow$ b:makelist(0, i, 1, 6);

(b) $$[0, 0, 0, 0, 0, 0]$$

$\longrightarrow$ for i:2 thru 5 do b[i]:(imagenes[i+1]-2*imagenes[i]+imagenes[i-1])*3/h^2;

(% o12) $$done$$

$\longrightarrow$ c:invert(A).b;

(c) $$\begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1020}{247} \\ -\frac{945}{247} \\ -\frac{945}{247} \\ \frac{1020}{247} \\ 0 \end{pmatrix}$$

$\longrightarrow$ alpha:makelist((imagenes[i+1]-imagenes[i])/h - (h/6)*(c[i+1,1]-c[i,1]), i, 1, 5);

(alpha) $$[-\frac{30}{247}, \frac{378}{247}, 0, -\frac{378}{247}, \frac{30}{247}]$$

$\longrightarrow$ beta:makelist(imagenes[i]-c[i, 1]*h^2/6, i, 1, 5);

(beta) $$[\frac{1}{26}, -\frac{5}{494}, \frac{1487}{2470}, \frac{1487}{2470}, -\frac{5}{494}]$$

$\longrightarrow$ s(i, x):=c[i,1]*(P[i+1]-x)^3/(6*h) + c[i+1, 1]*(x-P[i])^3/(6*h) + alpha[i]*(x-P[i]) + beta[i];

(% o16) $$\mathrm{s}(i, x) := \frac{c_{i,1}\,(P_{i+1}-x)^3}{6h} + \frac{c_{i+1,1}\,(x-P_i)^3}{6h} + alpha_i\,(x-P_i) + beta_i$$

$\longrightarrow$ p(i, x):= if P[i]<=x and x<P[i+1] then s(i, x) else 0;

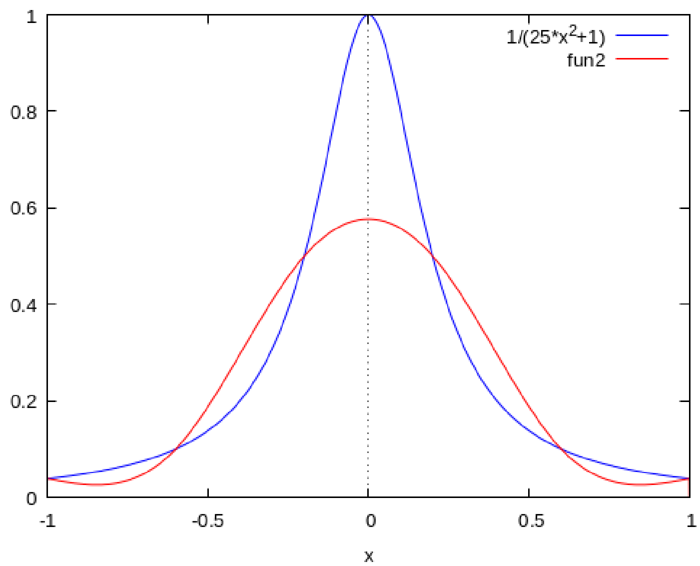
(% o17) $$\mathrm{p}(i, x) := \mathrm{if}\ P_i < \, = x and x < \, P_{i+1}\ \mathrm{then}\ \mathrm{s}(i, x)\ \mathrm{else}\ 0$$

$\longrightarrow$ s_cubic(x):=sum(p(i, x), i, 1, 5);

(% o18) $$s_{cubic}(x) := \sum_{i=1}^{5} \mathrm{p}(i, x)$$

⟶ wxplot2d([f(x), s_cubic(x)], [x,-1,1])$

(% t19)



Lo que dice el principio de mínima energía es que la integral definida entre a y b, de la segunda derivada del spline cúbico queacabamos de calcular al cuadrado, es menor o igual que la integral definida entre a y b, de la segunda derivada del polinomiointerpolador, al cuadrado. Veamos que esto ocurre. Calculemos primero el polinomio interpolador (de Lagrange) de f.

⟶ l(i,x):=product((x-P[j])/(P[i]-P[j]),j,1,i-1)*product((x-P[j])/(P[i]-P[j]),j,i+1,6);

(% o20) $$\mathrm{l}(i,x) := \prod_{j=1}^{i-1} \frac{x-P_j}{P_i-P_j} \prod_{j=i+1}^{6} \frac{x-P_j}{P_i-P_j}$$

⟶ p(x):=sum(imagenes[i]*l(i, x), i, 1, 6);

(% o21) $$\mathrm{p}(x) := \sum_{i=1}^{6} \mathit{imagenes}_i \, \mathrm{l}(i,x)$$

⟶ float(expand(p(x)));

(% o22) $1.201923076923076x^4 - 1.73076923076923x^2 + 0.5673076923076923$

⟶ integral_interp:float(integrate((diff(p(x), x, 2))^2, x, -1, 1));

(integral_ interp) 40.60650887573964

Calculamos ahora la integral del spline

$\longrightarrow$ integral_s:sum(integrate((diff(s(i, x), x, 2))^2, x, P[i], P[i+1]), i, 1, 5);

(integral_ s) $$\frac{47010}{3211}$$

$\longrightarrow$ float(%);

(% o25) 14.64029897228277

Y está claro que se cumple el principio de mínima energía.