Doble Grado en Informática y Matemáticas

Ejercicios de Cálculo I – Relación 1 - Desigualdades. Supremo e ínfimo.

1. Estudia los intervalos en los que un trinomio de segundo grado, $p(x) = ax^2 + bx + c$, es positivo o negativo. Debes considerar todos los casos posibles según que el trinomio tenga raíces reales o no.
2. Calcula para qué valores de $x \in \mathbb{R}$ se verifica que $x^4 - 7x^2 + 2 > 3x^3 - 7x$.
3. Calcula los valores de $x \in \mathbb{R}$ para los que se verifica que $\dfrac{x^3 - 33}{x^2 - 2x - 4} \geqslant 6$.
4. Calcula para qué valores de $x \in \mathbb{R}$ se verifica la desigualdad $\dfrac{1 - 2x}{x^2 - 4} > \dfrac{1}{2}$.
5. Calcula para qué valores de x se verifica la desigualdad $|x + 1| + |x^2 - 3x + 2| < 4$.
6. Calcula para qué valores de $x \in \mathbb{R}$ se verifica que $\left| \dfrac{x - 2}{x^2 - 2x - 1} \right| > \dfrac{1}{2}$.
7. Calcula para qué valores de $x \in \mathbb{R}$ se verifica que $\left| \dfrac{x^3 - 5}{x^2 - 2x - 3} \right| \leqslant 1$.
8. Calcula para qué valores de $x \in \mathbb{R}$ se verifica que $|x - 6|(1 + |x - 3|) \geqslant 1$.
9. Calcula para qué valores de $x \in \mathbb{R}$ se verifica que
$$|x^2 + 3x - 9| = |x^2 + x - 6| + |2x - 3|.$$
10. Supuesto que $0 < a < b$, calcula para qué valores de $x \in \mathbb{R}$ se verifica la desigualdad
$$\frac{1}{x} + \frac{1}{a + b - x} < \frac{1}{a} + \frac{1}{b}.$$
11. Prueba cada una de las siguientes desigualdades y estudia, en cada caso, cuándo se da la igualdad.
$$\text{a) } 2xy \leqslant x^2 + y^2, \quad \text{b) } 4xy \leqslant (x + y)^2, \quad \text{c) } x^2 + xy + y^2 \geqslant 0.$$
12. Prueba que cualesquiera sean los números reales positivos $a > 0$ y $b > 0$ se verifica que
$$\frac{a}{2(a + b)\sqrt{b}} < \frac{1}{\sqrt{b}} - \frac{1}{\sqrt{a + b}}.$$
13. Sean $\emptyset \neq A \subset \mathbb{R}$ un conjunto mayorado, $s = \sup A$ y $\varepsilon > 0$. ¿Se puede asegurar que existe algún $a \in A$ tal que $s - \varepsilon < a < s$? En caso afirmativo, demostrarlo. En caso negativo, dar un contraejemplo y modificar las desigualdades anteriores para que sea cierto.
14. Sean A, B conjuntos no vacíos de números reales. Supongamos que $a \leqslant b$ para todo $a \in A$ y para todo $b \in B$. Prueba que $\sup(A) \leqslant \text{ínf}(B)$.

15. Sean A, B, conjuntos no vacíos y acotados de números reales. Prueba que:

    i) Si $A \subseteq B$ entonces $\sup(A) \leqslant \sup(B)$, $\text{ínf}(A) \geqslant \text{ínf}(B)$.

    ii) $\sup(A \cup B) = \text{máx}\{\sup(A), \sup(B)\}$.

16. Sean A y B conjuntos acotados de números reales tales que $A \cap B \neq \emptyset$.

    a) Prueba que $A \cap B$ está acotado y que

    $$\text{máx}\{\text{ínf}(A), \text{ínf}(B)\} \leqslant \text{ínf}(A \cap B), \qquad \sup(A \cap B) \leqslant \text{mín}\{\sup(A), \sup(B)\}$$

    b) Prueba con un ejemplo que las dos desigualdades pueden ser estrictas.

    c) Prueba que si A y B son intervalos, dichas desigualdades son igualdades.

17. Sean $\emptyset \neq A \subset \mathbb{R}$ un conjunto mayorado, $s = \sup A$ y $\varepsilon > 0$. ¿Se puede asegurar que existe algún $a \in A$ tal que $s - \varepsilon < a < s$? En caso afirmativo, demostrarlo. En caso negativo, dar un contraejemplo y modificar las desigualdades anteriores para que sea cierto.

18. Sean A, B, conjuntos no vacíos de números reales. Definimos los conjuntos:

    $$A + B = \{a + b : a \in A, b \in B\}, \quad A - B = \{a - b : a \in A, b \in B\}$$

    Supuesto que A y B están acotados, prueba que:

    $$\sup(A + B) = \sup(A) + \sup(B) \qquad \text{ínf}(A - B) = \text{ínf}(A) - \sup(B).$$

19. Sean A, B, conjuntos no vacíos de números reales. Definimos $AB = \{ab : a \in A, b \in B\}$. Supuesto que A y B son conjuntos mayorados de números reales positivos, prueba que:

    $$\sup(AB) = \sup(A)\sup(B), \quad \text{ínf}(AB) = \text{ínf}(A)\,\text{ínf}(B).$$

20. Sean A y B conjuntos no vacíos de números reales positivos. Supongamos que A está mayorado y que $\beta = \text{ínf}(B) > 0$. Definamos:

    $$C = \left\{ \frac{a}{b} : a \in A,\ b \in B \right\}.$$

    Prueba que C está mayorado y se verifica la igualdad:

    $$\sup(C) = \frac{\sup(A)}{\text{ínf}(B)}.$$

    ¿Qué ocurre si $\text{ínf}(B) = 0$?

21. Sean $A \subset \mathbb{R}$ y $B \subset \mathbb{R}$ conjuntos no vacíos y supongamos que $\text{ínf}(A) > \sup(B)$. Definamos:

    $$C = \left\{ \frac{1}{a - b} :\ a \in A, b \in B \right\}$$

    Prueba que $\sup(C) = \dfrac{1}{\text{ínf}(A) - \sup(B)}$.

22. Sean A y B conjuntos no vacíos y mayorados de números reales positivos. Definamos:

    $$C = \left\{ \frac{1}{a^2 + b} :\ a \in A, b \in B \right\}$$

    Calcula el extremo inferior de C. ¿Qué pasa si alguno de los conjuntos A o B no está mayorado? ¿Qué puedes decir del supremo de C?