EVALUACIÓN 6

Manuel Vicente Bolaños Quesada

Problema 1

a) Es claro que Z está acotado. Sean entonces $\inf(Z) = \alpha$, $\sup(Z) = \beta$. Es evidente que $c \leq \alpha \leq \beta \leq d$ Entonces, lo que queremos probar es que $f(\alpha) = f(\beta) = 0$.

Para ello, como α es el ínfimo de Z, existe una sucesión $\{x_n\}$ que converge a α, con $x_n \in Z$ para todo $n \in \mathbb{N}$, es decir, $\lim\{x_n\} = \alpha$. De la continuidad de f, obtenemos que $\lim\{f(x_n)\} = f(\alpha)$, pero $f(x_n) = 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$, por ser elementos de Z. De aquí, deducimos que $f(\alpha) = 0$, y por lo tanto, $\alpha \in Z$.

La demostración de que $f(\beta) = 0$ es análoga. Por ser β el supremo de Z, existe una sucesión de puntos del conjunto, $\{y_n\}$, con $y_n \in Z$ para todo $n \in \mathbb{N}$, con límite β, es decir, $\lim\{y_n\} = \beta$. Como f es continua, tenemos que $\lim\{f(y_n)\} = f(\beta)$, pero como $f(y_n) = 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$ por ser elementos de Z, tenemos que $f(\beta) = 0$, de donde $\beta \in Z$.

b) Definamos la función $f_1 : [a, c] \to \mathbb{R}$ definida por $f_1(x) = f(x)$ para todo $x \in [a, c]$. Como $f_1(c) > 0$, y $f_1(a) < 0$, por el Teorema de Bolzano, sabemos que hay un $r \in [a, c]$ tal que $f_1(r) = 0$. Consideramos el conjunto $Z_1 = \{x \in [a, c] : f_1(x) = 0\} \neq \emptyset$. Pongamos $u = \max(Z_1)$ (sabemos que existe por lo visto en el apartado anterior). Además, si $x \in]u, c]$, $f_1(x) > 0$, ya que si $f_1(x) \leq 0$, por el teorema de Bolzano habría otro punto, $\lambda > u$ tal que $f_1(\lambda) = 0$, lo que es contradictorio.

Definimos, análogamente, la función $f_2 : [c, b] \to \mathbb{R}$ definida por $f_2(x) = f(x)$ para todo $x \in [c, b]$. Como $f_2(c) > 0$, y $f_2(b) < 0$, por el Teorema de Bolzano, sabemos que hay un $s \in [c, b]$ tal que $f_2(s) = 0$. Consideramos el conjunto $Z_2 = \{x \in [c, b] : f_2(x) = 0\} \neq \emptyset$. Pongamos $v = \min(Z_2)$ (sabemos que existe por lo visto en el apartado anterior). Análogamente al razonamiento anterior, observamos que si $x \in [c, v[$ entonces $f_2(x) > 0$.

Entonces, $a < u < c < v < b$, $f(u) = f(v) = 0$ y $f(x) > 0$ para todo $x \in]u, v[$, tal y como se pedía demostrar.

Problema 2

Sea $\alpha = \sup(A)$. Entonces, se tiene que para todo $a \in A$, $a \leq \alpha$. Como f es creciente, $f(a) \leq f(\alpha)$. Esto nos dice que $f(\alpha)$ es un mayorante de $f(A)$.

Si $\alpha \in A$, entonces $f(\alpha) \in f(A)$, y como $f(\alpha)$ es un mayorante de $f(A)$, sería $f(\alpha) = \sup(f(A))$. Supongamos entonces, a partir de ahora, que $\alpha \notin A$.

Primera forma. Dado un $\varepsilon > 0$, como f es continua, existe un $\delta > 0$, tal que para todo $x \in A$ que verifique que $|x - \alpha| < \delta$, se tiene que $|f(x) - f(\alpha)| < \varepsilon$. Como α es el supremo de A, tenemos que el conjunto $C =]\alpha - \delta, \alpha[\cap A$ no es vacío. Sea entonces $s \in C$. Entonces, $|f(s) - f(\alpha)| < \varepsilon$; en particular, $f(\alpha) - \varepsilon < f(s)$. Como $f(s) \in f(A)$, esto nos dice que $f(\alpha) - \varepsilon$ no es un mayorante de $f(A)$. De aquí, se deduce que $f(\alpha) = \sup(f(A))$.

Segunda forma. Como $\alpha = \sup(A)$, existe una sucesión $\{x_n\}$ con $x_n \in A$ para todo $n \in \mathbb{N}$, tal que $\lim\{x_n\} = \alpha$. Al ser f continua, deducimos que $\lim\{f(x_n)\} = f(\alpha)$. Así pues, si ρ es un real tal que $\rho < f(\alpha)$, entonces, existe un $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que si $n \geq n_0$, entonces $f(x_n) > \rho$. Por lo tanto, deducimos que $f(\alpha)$ es el mínimo mayorante de $f(A)$, equivalentemente, $f(\alpha) = \sup(f(A))$.

Manuel Vicente Bolaños Quesada

Problema 3

Veamos que g es creciente en $[a, b]$. Para ello tomemos $x, y \in [a, b]$ tales que $x < y$. Es claro que $\max[a, x] \leq \max[a, y]$, o lo que es lo mismo, $g(x) < g(y)$.

Como hemos visto que g es creciente, para probar que es continua, es suficiente demostrar que su imagen es un intervalo, es decir, que $g([a, b])$ es un intervalo. Vamos a demostrar que $g([a, b]) = [f(a), M]$, donde $M = \max f([a, b])$.

Está claro que $\inf(g([a, b])) = \max f([a, a]) = f(a) = g(a)$ y que $\sup(g([a, b])) = \max f([a, b]) = M = g(b)$. Sea ahora $u \in]f(a), M[$. Definimos $t_u = \sup\{x \in [a, b] : f(s) \leq u \text{ para todo } s \in [a, x]\}$. Entonces, $f(t_u) = u$ y también $g(t_u) = u$ (ya que si $a \leq v < u$, entonces $f(v) \leq f(u)$). De aquí, obtenemos que $u \in g([a, b])$.

Por lo tanto, $g([a, b]) = [f(a), M]$.