TEMA 1: ESPACIOS TOPOLÓGICOS

Manuel Bolaños Quesada

Índice

1. Espacios topológicos

Sea X un conjunto no vacío.

Definición 1.1. Una *topología* en X es una familia T de subconjuntos de X ($T \subset \mathcal{P}(X)$) que verifica:

i) $\emptyset, X \in T$.

ii) $\{U_i\}_{i\in I} \subset T \implies \bigcup_{i\in I} U_i \in T$.

iii) $U_1, \dots, U_k \in T \implies U_1 \cap \cdots \cap U_k \in T$ ($k \in \mathbb{N}$)

A los elementos de T los llamaremos conjuntos abiertos de la topología T.

Definición 1.2. Un espacio topológico (X, T) es un conjunto X no vacío con una topología T en X.

Definición 1.3. Un espacio topológico (X, T) es metrizable si existe una distancia d en X tal que $T_{\mathrm{d}} = T$.

Ejemplos.

1. Sea (X, d) un espacio métrico. Entonces
$$T_{\mathrm{d}} = \{U \subset X : \forall x \in U, \exists r > 0 : B(x, r) \subset U\} \cup \{\emptyset\}$$
Tenemos que T_{d} es una topología en X, y la llamaremos la topología asociada a la distancia d.
2. Sea $X \neq \emptyset, T_t = \{\emptyset, X\}$ topología trivial (es la topología con la menor cantidad posible de conjuntos. Si T es otra topología en X, entonces $T_t \subset T$).
3. $X \neq \emptyset, T_D = \mathcal{P}(X) = \{U : U \subset X\}$. Entonces T_D es una topología en X y la llamaremos topología discreta. Si T es cualquier topología en X, entonces $T \subset \mathcal{P}(X) = T_D$. Por tanto, la topología discreta es la mayor topología en X.
4. $X \neq \emptyset$.
$$T_{CF} = \{U \subset X : U^c \text{ es finito}\} \cup \{\emptyset\}$$
T_{CF} es una topología en X. La llamaremos topología de los complementos finitos. Veamos que, en efecto, es una topología:

   a) $\emptyset \in T_{CF}, X^c = \emptyset \implies X \in T_{CF}$.

   b) $\{U_i\}_{i\in I} \subset T_{CF}$. Si $U_i = \emptyset \ \forall i \in I \implies \bigcup_{i\in I} U_i = \emptyset \in T_{CF}$. Supongamos entonces que $\exists i_0 \in I$ tal que $U_{i_0} \neq \emptyset \implies U_{i_0}^c$ es finito
$$U_{i_0} \subset \bigcup_{i\in I} U_i \implies \left(\bigcup_{i\in I} U_i\right)^c \subset U_{i_0}^c, \text{ que es finito}$$
Entonces $\bigcup_{i\in I} U_i \in T_{CF}$.

   c) $U_1, \dots, U_k \in T_{CF} \implies U_1 \cap \cdots \cap U_k \in T_{CF}$.
Tenemos que $(U_1 \cap \cdots \cap U_k)^c = U_1^c \cup \cdots \cup U_k^c$. Entonces, si algún $U_i = \emptyset \implies U_1 \cap \cdots \cap U_k = \emptyset \in T_{CF}$. Si $U_i \neq \emptyset$ para todo i, entonces $(U_1 \cap \cdots \cap U_k)^c$ es finito por ser unión de conjuntos finitos.

Propiedad. Sea $X \neq \emptyset, \mathrm{d} =$ distancia discreta, y T_D la topología discreta en X. Entonces $T_{\mathrm{d}} = T_D$. Por tanto, (X, T_D) es metrizable.

Demostración. Queremos ver que $T_{\mathrm{d}} = T_D$. La inclusión $T_{\mathrm{d}} \subset T_D$ se sigue del penúltimo ejemplo. Falta ver que $T_D \subset T_{\mathrm{d}}$. Sea $U \in T_D$. Si $U = \emptyset \implies U \in T_{\mathrm{d}}$. Si $U \neq \emptyset$

$$U = \bigcup_{x \in U} \{x\} = \bigcup_{x \in U} B(x, \frac{1}{2}) \in T_{\mathrm{d}}$$

y se sigue que $T_D \subset T_{\mathrm{d}}$, tal como queríamos demostrar. ■

Observación. Si T es una topología en X, entonces $T_t \subset T \subset T_D$.

Propiedad.

1. Sea X un conjunto infinito. Sean $U, V \in T_{CF}$, con $U, V \neq \emptyset$. Entonces, $U \cap V \neq \emptyset$.
2. Si X es infinito, (X, T_{CF}) no es metrizable y no existe una distancia d en X tal que $T_{\mathrm{d}} = T_{CF}$.

Definición 1.4. Un espacio topológico (X, T) es *Hausdorff* (o es T_2) cuando, para todo par de puntos $x, y \in X$ con $x \neq y$, existen dos abiertos $M_x, M_y \in T$ tales que:

i) $x \in M_x, y \in M_y$

ii) $M_x \cap M_y = \emptyset$.

Ejemplos.

1. Si (X, d) es un espacio métrico, entonces (X, T_{d}) es Hausdorff.
2. Si X es infinito, (X, T_{CF}) no es Hausdorff.
3. Si (X, T_D) es un espacio discreto, entonces es Hausdorff.
4. Sea $X \neq \emptyset$. Supongamos que X es, al menos numerable. La topología de los complementos numerables es $T_{CN} = \{U \subset X : U^c \text{ es numerable}\} \cup \{\emptyset\}$.

Observación. Si X es numerable, entonces $T_{CN} = T_D$ (si $U \subset X$ es cualquier conjunto, $U^c \subset X$. Como X es numerable y $U^c \subset X$, entonces U^c también es numerable, y por tanto $U \in T_{CN} \implies T_{CN} = T_D$).

Veamos ahora que, T_{CN} es, en efecto, una topología. Para ello comprobamos las tres propiedades:

1. $\emptyset \in T_{CF}$, por definición. Como $\emptyset$ es finito, $X^c = \emptyset$ es finito, y en particular, numerable, así que $X \in T_{CF}$.
2. Sean $\{U_i\}_{i \in I} \subset T_{CF}$. Entonces, $\left(\bigcup_{i \in I} U_i \right)^c = \bigcap_{i \in I} U_i^c$. Como los U_i^c son numerables, la intersección de todos ellos también, y por tanto $\bigcup_{i \in I} U_i \in T_{CF}$.
3. Sean $U_1, \ldots, U_k \in T_{CF}$. Tenemos que

$$(U_1 \cap \cdots \cap U_k)^c = U_1^c \cup \cdots \cup U_k^c$$

Si todos los conjuntos U_i son distintos de $\emptyset \implies U_i^c$ es numerable $\forall i \in \{1, \ldots, k\}$. Una familia finita de conjuntos numerables es numerable, por tanto, $U_1 \cap \cdots \cap U_k \in T_{CN}$. Si algún $U_i = \emptyset$, entonces $U_1 \cap \cdots \cap U_k = \emptyset \in T_{CN}$.

Definición 1.5. Sean T_1, T_2 topologías en X. Diremos que T_1 es más fina que T_2, si $T_2 \subset T_1$. Diremos también que T_2 es más gruesa que T_1.

Observación.

1. Si una topología es más fina, entonces tiene más conjuntos abiertos.
2. La topología más gruesa de todas es la trivial.
3. La topología más fina es la discreta.

Definición 1.6. Sea (X, T) un espacio topológico. Diremos que $F \subset X$ es cerrado si $X \backslash F = F^c$ es abierto. A la familia de todos los cerrados de (X, T) la llamaremos C_T.

Propiedades. Sea (X, T) un espacio topológico. Entonces:

1. $\emptyset, X \in C_T$
2. Si $\{F_i\}_{i \in I} \subset C_T \implies \bigcap_{i \in I} F_i \in C_T$
3. Si $F_1, \ldots, F_k \in C_T \implies F_1 \cup \cdots \cup F_k \in C_T$

   Demostración. Mismo razonamiento que en los espacios métricos.

Observación. Si tenemos un conjunto X y una familia $C \subset \mathcal{P}(X)$ que cumple:

i) $\emptyset, X \in C$

ii) Si $\{F_i\}_{i \in I} \subset C \implies \bigcap_{i \in I} F_i \in C$

iii) Si $F_1, \ldots, F_k \in C \implies F_1 \cup \cdots \cup F_k \in C$

entonces existe una única topología T en X tal que $C_T = C$.

Demostración. Definimos $T = \{F^c : F \in C\}$. Como $C \subset \mathcal{P}(X)$ verifica *i, ii* y *iii*, pasando a complementario, T verifica las propiedades de la familia de los abiertos.

Sea $F \in C_T = \{\text{conjuntos cerrados de } (X, T)\}$. Entonces $F^c \in T \implies \exists G \in C$ tal que $F^c = G^c \iff F = G \implies F \in C$. Por tanto $C_T \subset C$.

Sea $F \in C$. Queremos ver que $F \in C_T$. $F \in C_T \iff F^c \in T$, que, por definición, es verdad. Así que $C \subset C_T$, y entonces, $C_T = C$, tal y como queríamos. ■

Ejemplos.

1. (X, T_{CF}), y $C_{T_{CF}} = \{F \subset X : F \text{ es finito}\} \cup \{X\}$
2. (X, T_D), y $C_{T_D} = \mathcal{P}(X)$. Coinciden los conjuntos cerrados y abiertos.
3. (X, T_t), y $C_{T_t} = \{\emptyset, X\} = T_t$
4. (X, d) espacio métrico. ¿Son los puntos cerrados? Sí.

   Sea $x_0 \in X$. Entonces $\bigcap_{r>0} \overline{B}(x_0, r) = \{x_0\}$. Sea ahora $y \neq x_0 \implies \mathrm{d}(x_0, y) = s > 0 \implies y \notin \overline{B}(x_0, s/2)$. Por tanto, $\{x_0\} = \bigcap_{r>0} \overline{B}(x_0, r) \implies \{x_0\} \in C_T$.

   Así que, en un espacio métrico, los puntos son conjuntos cerrados.

Propiedad. En un espacio topológico Hausdorff todo punto es cerrado.

Demostración. Sea $x_0 \in X$. $\{x_0\} \in C_T \iff X \backslash \{x_0\}$ es abierto.

Sea $y \in X \backslash \{x_0\} \implies y \neq x_0 \implies \exists U_y, U_{x_0}^y \in T$ tales que $y \in U_y, x_0 \in U_{x_0}^y$ y $U_y \cap U_{x_0}^y = \emptyset \implies x_0 \notin U_y \implies U_y \subset X \backslash \{x_0\}$.

De aquí deducimos que $X \backslash \{x_0\} = \bigcup_{y \neq x_0} U_y \implies \{x_0\} \in C_T$. ■

Ejemplos.

1. X infinito. $(X, T_{CF}) \implies$ no es Hausdorff ($U_x \cap U_y \neq \emptyset$), pero los puntos son conjuntos cerrados

Definición 1.7. Si (X, T) es un espacio topológico, una base de la topología T es una familia $B \subset T$ (los elementos de B son conjuntos abiertos), con la propiedad de que todo conjunto abierto puede expresarse como unión de elementos de B. Es decir:

i) $\forall U \in T, \exists \{B_i\}_{i \in I} \subset B : U = \bigcup_{i \in I} B_i$

ii) $B \subset T$

Ejemplos.

1. $B = \{B(x, r) : x \in X, r > 0\}$ es una base de T_{d}.
2. $\overline{B} = \{\overline{B}(x, r) : x \in X, r \geq 0\}$ no es, en general, una base de T_{d}.
3. (X, T_D). $B = \{\{x\} : x \in X\} \subset T_D$. Entonces $\emptyset \neq U \in T_D \implies U = \bigcup_{x \in U} \{x\}$. Tenemos entonces que cualquier base de (X, T_D) debe contener a B.
4. Sea (X, d) un espacio métrico. Sea $r_0 > 0$. Definimos $\mathcal{B}_{r_0} = \{B(x, r) : x \in X, 0 < r < r_0\}$. Entonces $\mathcal{B}_{r_0}$ es base de T_{d} $\forall r_0 > 0$. En particular, si d = distancia discreta en X, entonces

$$\mathcal{B}_{1/2} = \{B(x, r) : x \in X, 0 < r < 1/2\} = \{\{x\} : x \in X\}$$

Propiedades. Sea (X, T) un espacio topológico, si $\mathcal{B}$ es base de T, entonces:

1. $\forall x \in X, \exists B \in \mathcal{B}$ tal que $x \in B$
2. $\forall B_1, B_2 \in \mathcal{B}$, $\forall x \in B_1 \cap B_2, \exists B_3 \in \mathcal{B}$ tal que $x \in B_3 \subset B_1 \cap B_2$

Demostración.

1. $X \in T \implies \exists \{B_i\}_{i \in I} : X = \bigcup_{i \in I} B_i$. Sea $x \in X = \bigcup_{i \in I} B_i \implies \exists i_0 \in I : x \in B_{i_0}$. Entonces basta con tomar $B = B_{i_0}$.
2. Sea $x \in B_1 \cap B_2$. Sabemos que existe $\{B_j\}_{j \in J}$ tal que $B_1 \cap B_2 = \bigcup_{j \in J} B_j$. Todo esto implica que $\exists j_0 \in J$ tal que $x \in B_{j_0} \subset B_1 \cap B_2$. Basta con tomar $B_3 = B_{j_0}$. ■

Teorema 1.8. *Sea X un conjunto, $\mathcal{B} \subset \mathcal{P}(X)$ una familia de subconjuntos de X tal que:*

1. $\forall x \in X, \exists B \in \mathcal{B}$ *tal que* $x \in B$
2. $\forall B_1, B_2 \in \mathcal{B}$, $\forall x \in B_1 \cap B_2, \exists B_3 \in \mathcal{B} : x \in B_3 \subset B_1 \cap B_2$.

Entonces existe en X una única topología T tal que $\mathcal{B}$ es una base de T.

Demostración. La demostración consta de tres partes; primero demostramos que existe una topología, T, después se demuestra que $\mathcal{B}$ es una base de esa topología T, y finalmente demostramos la unicidad de T.

Definimos $T = \{U \subset X : \forall x \in U, \exists B \in \mathcal{B}$ con $x \in B \subset U\} \cup \{\emptyset\}$. Veamos que es una topología:

- $\emptyset \in T$ por definición, y $X \in T$ por la propiedad 1.
- Sea $\{U_i\}_{i \in I} \subset T$. Si $U_i = \emptyset$ $\forall i \in I$, entonces $\bigcup_{i \in I} U_i = \emptyset \in T$. Supongamos que $\bigcup_{i \in I} U_i \neq \emptyset$. Sea $x \in \bigcup_{i \in I} U_i \implies \exists i_0 \in I$ tal que $x \in U_{i_0}$. Como $U_{i_0} \in T, \exists B \in \mathcal{B}$ tal que $x \in B \subset U_{i_0} \subset \bigcup_{i \in I} U_i \implies \bigcup_{i \in I} U_i \in T$.

- Sean $U_1, U_2 \in T$. Veamos que la intersección también pertenece a T. Si $U_1 \cap U_2 = \emptyset \implies U_1 \cap U_2 \in T$. Supongamos que $U_1 \cap U_2 \neq \emptyset$ Sea $x \in U_1 \cap U_2$. Entonces $x \in U_1$ y $x \in U_2 \implies \exists B_1, B_2 \in \mathcal{B}$ tales que $x \in B_1 \subset U_1$ y $x \in B_2 \subset U_2$, de donde $x \in B_1 \cap B_2 \subset U_1 \cap U_2 \implies U_1 \cap U_2 \in T$. Terminar la prueba por inducción para probar que $U_1 \cap \cdots \cap U_k \in T$.

Demostremos ahora que $\mathcal{B}$ es base de T. Para ello, hay que comprobar que $\mathcal{B} \subset T$ y que todo $U \in T \backslash \{\emptyset\}$ es unión de elementos de $\mathcal{B}$.

- Sea $B \in \mathcal{B}$, $\forall x \in B$ se cumple que $x \in B \subset B$ (tomando $U = B$, trivialmente), de donde $\mathcal{B} \subset T$.
- Sea $U \in T, U \neq \emptyset$. Sea $x \in U \implies \exists B_x \in \mathcal{B}$ (por definición de T) tal que $x \in B_x \subset U \implies U = \bigcup_{x \in U} B_x \implies U$ es unión de elementos de B.

Por último, probaremos la unicidad de T. Sea T' otra topología en X, con $\mathcal{B}$ base de T'. Veamos que $T = T'$. Sea $U \in T \implies \exists \{B_i\}_{i \in I} \in \mathcal{B}$ tal que $U = \bigcup_{i \in I} B_i \implies U \in T'$. Por tanto, $T \subset T'$. Análogamente se prueba que $T' \subset T$, donde hemos usado que $\mathcal{B}$ es base de T y de T'. ■

Ejemplos.

1. (Topología de Sorgenfrey o del límite inferior). $\mathbb{R}$. Sea $\mathcal{B} = \{[a, b) : a, b \in \mathbb{R}, a < b\}$. Tenemos que $\mathcal{B}$ es base de una topología en $\mathbb{R}$, T_S, a la que llamaremos topología Sorgenfrey. Verificamos las dos propiedades del teorema anterior.

   a) $\forall x \in \mathbb{R}, x \in [x, x+1) \in \mathcal{B}$

   b) $B_1 = [a_1, b_1), B_2 = [a_2, b_2) \in \mathcal{B}$. Sea $x \in [a_1, b_1) \cap [a_2, b_2) \implies B_3 := [a_1, b_1) \cap [a_2, b_2) = [\text{máx}\{a_1, a_2\}, \text{mín}\{b_1, b_2\}) \implies \forall x \in B_1 \cap B_2, \exists B_3 \in \mathcal{B} : x \in B_3 = B_1 \cap B_2$.

2. (Topología de Kuratowski). Sea $k = \{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\}$. Definimos:

$$\mathcal{B}_k = \underbrace{\{(a, b) : a, b \in \mathbb{R}, a < b\}}_{\mathcal{B}_1} \cup \underbrace{\{(a, b) \backslash k : a, b \in \mathbb{R}, a < b\}}_{\mathcal{B}_2}$$

   Entonces $\mathcal{B}_k$ es una topología en $\mathbb{R}$. Comprobémoslo:

   a) $\forall x \in \mathbb{R}$, $(x-1, x+1) \in \mathcal{B}_1 \subset \mathcal{B}_k$ y $x \in (x-1, x+1)$.

   b) Sean $B_1, B_2 \in \mathcal{B}_k$. Sin pérdida de generalidad, hay tres posibilidades:

      1) $B_1 = (a_1, b_1), B_2 = (a_2, b_2)$
      En este caso, $x \in B_1 \cap B_2 = (\text{máx}\{a_1, a_2\}, \text{mín}\{b_1, b_2\}) \in \mathcal{B}_1 \subset \mathcal{B}_k$. Tomamos entonces $B_3 = B_1 \cap B_2$.

      2) $B_1 = (a_1, b_1), B_2 = (a_2, b_2) \backslash k$
      En este caso,

$$\begin{aligned} x \in B_1 \cap B_2 &= (a_1, b_1) \cap \big((a_2, b_2) \cap k^c\big) \\ &= \big((a_1, b_1) \cap (a_2, b_2)\big) \cap k^c \\ &= (\text{máx}\{a_1, a_1\}, \text{mín}\{b_1, b_2\}) \backslash k \in \mathcal{B}_2 \subset \mathcal{B}_k \end{aligned}$$

      3) $B_1 = (a_1, b_1) \backslash k, B_2 = (a_2, b_2) \backslash k$
      En este caso,

$$\begin{aligned} x \in B_1 \cap B_2 &= \big((a_1, b_1) \cap k^c\big) \cap \big((a_2, b_2) \cap k^c\big) \\ &= (a_1, b_1) \cap (a_2, b_2) \cap k^c \in \mathcal{B}_2 \subset \mathcal{B}_k \end{aligned}$$

   Por tanto, existe una única topología T_k en $\mathbb{R}$ tal que $\mathcal{B}_k$ es base de T_k.

Observación. Recordamos que las bolas abiertas en $\mathbb{R}$ son base de la topología usual (T_u). Llamaremos $\mathcal{B}_u = \{(a,b) : a, b \in \mathbb{R}, a < b\}$.

Proposición 1.1. *Sea $X \neq \emptyset$. Sean T, T' topologías en X, y $\mathcal{B}, \mathcal{B}'$ bases de T, T', respectivamente. Son equivalentes:*

1. $T \subset T'$
2. $\forall B \in \mathcal{B},\ \forall x \in B, \exists B' \in \mathcal{B}' : x \in B' \subset B$

Demostración. 1 $\implies$ 2. Sean $B \in \mathcal{B}, x \in B \in \mathcal{B} \subset T \subset T'$.
Como $B \in T'$ y $\mathcal{B}'$ es base de T', existe $B' \in \mathcal{B}'$ tal que $x \in B' \subset B$
2 $\implies$ 1. Sea $U \in T$. Queremos ver que $U \in T'$. Como $\mathcal{B}$ es base de T, existe $\{B_i\}_{i\in I} \subset \mathcal{B}$ tal que $U = \bigcup_{i\in I} B_i$. Fijamos $i \in I$. Entonces, si $x \in B_i \in \mathcal{B}$, tenemos que existe $B'_x \in \mathcal{B}'$ tal que $x \in B'_x \subset B_i$ (por la condición), de donde $B_i = \bigcup_{x\in B_i} B'_x \in T' \implies U = \bigcup_{i\in I} B_i \in T'$. ■

Observación. Si $\mathcal{B} \subset \mathcal{B}'$, la condición 2 se cumple trivialmente. Si $B \in \mathcal{B}, x \in B \implies B \in \mathcal{B} \subset \mathcal{B}'$. Podemos tomar $B' = B$ y $x \in B = B' \subset \mathcal{B} \implies T \subset T'$.

Propiedades.

1. $T_u \subset T_k$
2. $T_u \subset T_S$

Demostración.

1. Se sigue de $\mathcal{B}_u \subset \mathcal{B}_u \cup \mathcal{B}_2 = \mathcal{B}_1 \cup \mathcal{B}_2 = \mathcal{B}_k$
2. Sea $B = (a,b)$, con $a < b$, un elemento de $\mathcal{B}_u$, y $x \in (a,b)$. Queremos encontrar $B' \in \mathcal{B}_S$ tal que $x \in B' \subset (a,b)$. Bastaría con tomar $B' = [x,b)$ ($x \in [x,b) \subset (a,b)$). ■

Corolario 1.9. *Sean $\mathcal{B}, \mathcal{B}'$ bases de T, T'. Son equivalentes:*

1. $T = T'$
2. $\forall B \in \mathcal{B},\ \forall x \in B, \exists B' \in \mathcal{B}' : x \in B' \subset B$ *($T \subset T'$)*
3. $\forall B' \in \mathcal{B}',\ \forall x \in B', \exists B \in \mathcal{B} : x \in B \subset B'$ *($T' \subset T$)*

Lema 1.10. *Si X es un conjunto, y $\{T_i\}_{i\in I}$ es una familia de topologías en X, entonces*

$$T = \bigcap_{i\in I} T_i = \{U \in X : U \in T_i\ \forall i \in I\}$$

es una topología en X.

Demostración. Comprobemos las propiedades que tiene una topología:

1. $\emptyset, X \in T_i\ \forall i \in I \implies \emptyset, X \in T$.
2. $\{U_j\}_{j\in J} \subset T \implies U_j \in T\ \forall j \in J \implies U_j \in T_i\ \forall i \in I,\ \forall j \in J \implies \bigcup_{j\in J} U_j \in T_i\ \forall i \in I \implies \bigcup_{j\in J} U_j \in T$.
3. $U_1, \ldots, U_k \in T \implies U_1, \ldots, U_k \in T_i\ \forall i \in I \implies U_1 \cap \cdots \cap U_k \in T_i\ \forall i \in I \implies U_1 \cap \cdots \cap U_k \in T$. ■

Proposición 1.2. *Sea $S \subset \mathcal{P}(X)$. Definimos $T(S)$ como $T(S) = \bigcap\{T : T$ es una topología $, S \subset T\}$. Entonces*

- *$T(S)$ es una topología que contiene a S*
- *Si T' es otra topología que contiene a S, entonces $T(S) \subset T'$*

Se le llama topología generada por S.

Demostración. Sea $I = \{T' \subset \mathcal{P}(X) : T' \text{ es una topología}, \ S \subset T'\}$. Definimos T como $T = \bigcap_{T' \in I} T'$. Por el lema anterior, T es una topología. Además, si $U \in S \implies U \in T' \ \forall T' \in I$, de donde $U \in T$.

Llamando $T(S) = T$, tenemos $S \subset T(S)$. Si T' es otra topología que contiene a S, entonces $T' \in I \implies T(S) = \bigcap_{\tilde{T} \in I} \tilde{T} \subset T'$. ■

Definición 1.11. $S \subset \mathcal{P}(X)$ es una subbase de la topología T si las intersecciones finitas de elementos de S forman una base, que llamaremos $\mathcal{B}(S)$, de la topología T.

Si S es subbase de T, entonces $U \in T \implies U = \bigcup_{i \in I} B_i, B_i \in \mathcal{B}(S)$ y $B_i = S_1^i \cap \cdots \cap S_{k(i)}^i$, con $k(i) \in \mathbb{N}$ depende de B_i.

Ejemplos.

1. Sea $S = \{\emptyset, A, X\}$. Entonces $\mathcal{B}(S) = \{\emptyset, A, X\}$
2. Sea $S = \{\emptyset, A, B, X\}$. Entonces $\mathcal{B}(S) = \{\emptyset, A \cap B, A, B, X\}$.

Proposición 1.3. *Sea $S \subset \mathcal{P}(X)$ tal que, para todo $x \in X$, existe $V \in S$ tal que $x \in V$, ($X = \bigcup_{V \in S} V$). Entonces S es una subbase de $T(S)$.*

Demostración. Definimos $\mathcal{B} = \{\bigcap_{i \in I} V_i : V_i \in S_1, I \text{ finito}\}$. Veamos que:

1. $\mathcal{B}$ es base de una topología T en X.
2. $T = T(S)$:

1. a) Tenemos que $\forall x \in X, \exists V \in S : x \in V$. Como $S \subset \mathcal{B}$, $V \in \mathcal{B}$. Podemos poner esto como: $\forall x \in X \exists V \in \mathcal{B} : x \in V$.
   b) Sean $B_1, B_2 \in \mathcal{B}, x \in B_1 \cap B_2$. Tenemos que $B_1 = V_1^1 \cap \cdots \cap V_{k(1)}^1$ y $B_2 = V_2^2 \cap \cdots \cap V_{k(2)}^2$, con $V_j^1, V_j^2 \in S$. De aquí obtenemos que $B_1 \cap B_2 = \left(V_1^1 \cap \cdots \cap V_{k(1)}^1\right) \cap \left(V_1^2 \cap \cdots \cap V_{k(2)}^2\right) \in \mathcal{B}$ (por ser intersección finita de elementos de S.
   Tomando $B_3 = B_1 \cap B_2$, tomamos $x \in B_3 \in \mathcal{B}$. Llamamos T a la topología que tiene a $\mathcal{B}$ como base.
2. T contiene a $\mathcal{B}$ y S está contenido en $\mathcal{B}$. Entonces $S \subset \mathcal{B} \subset T$, de donde $T(S) \subset T$.
   Por último, veamos que $T \subset T(S)$. Sea $U \in T \implies \exists \{B_i\}_{i \in I} \subset B : U = \bigcup_{i \in I} B_i$. Cada $B_i = V_1^i \cap \cdots V_{k(i)}^i$, entonces $U = \bigcup_{i \in I} \left(V_1^i \cap \cdots \cap V_{k(i)}^i\right)$. Como $S \subset T(S)$, $\forall i \in I$, $V_1^i, \ldots, V_{k(i)}^i \in S \subset T(S)$, de donde $B_i = V_1^i \cap \cdots \cap V_{k(i)}^i \in T(S) \implies U \in T(S)$. Así obtenemos que $T \subset T(S)$, y, finalmente, $T = T(S)$. ■

2. Entornos. Interior y clausura de un conjunto

Definición 2.1 (Entorno)**.** Sea (X, T) un espacio topológico y $x \in X$. Diremos que U es entorno de x si existe un conjunto abierto $A \in \mathcal{T}$ tal que $x \in A \subset U$.

Definición 2.2. Dados $(X, T), x \in X$, llamaremos N_x a la familia de entornos de x.

Propiedades.

1. $N_x \neq \emptyset$, ya que $X \in N_x$.
2. Si $U \in \mathcal{T}$ y $x \in U \implies U \in N_x$ (los conjuntos abiertos que contienen a x son entorno de x).

Definición 2.3. Sean (X, T) un espacio topológico y $x \in X$. Diremos que $\mathcal{B}_x \subset \mathcal{P}(X)$ es base de entornos de x si:

i) $\mathcal{B}_x \subset N_x$

ii) $\forall U \in N_x, \exists B \in \mathcal{B}_x : B \subset U$.

Ejemplos.

1. $(X, T_D), x \in X \implies N_x = \{U \subset U : x \in U\}$, además, $\mathcal{B}_x = \{\{x\}\}$ es base de entornos de x, ya que $\mathcal{B}_x \subset N_x$ claramente, y si $V \in N_x \implies x \in V \implies B := \{x\} \subset V$
2. Sea (X, d) un espacio métrico, y T_d la topología asociada. Sea $x \in X$. Entonces $\mathcal{B}_x = \{B(x, r) : r > 0\}$ es base de entornos de x.

   Sea $V \in N_x \implies \exists U \in T_\mathrm{d} : x \in U \subset V \implies \exists r > 0 : B := B(x, r) \subset U \subset V$.
3. Las bolas cerradas $\overline{B}(x, r), r > 0$ son entorno de x. Definimos
   $$\overline{\mathcal{B}}_x = \{\overline{B}(x, r) : r > 0\}$$
   ¿Es $\overline{\mathcal{B}}_x$ base de entornos de x?

   Sea $V \in N_x \implies \exists U \in T_\mathrm{d} : x \in U \subset V \implies \exists r > 0 : B := \overline{B}(x, \frac{r}{2}) \subset B(x, r) \subset U \subset V$. Por tanto sí es base de entornos.
4. Sea $\{r_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ una sucesión de radios que converge a 0 ($\forall \varepsilon > 0 \exists i_0 \in \mathbb{N} : 0 < r_i < \varepsilon \ \forall i \geq i_0$). Entonces
   $$\mathcal{B}(\{r_i\}_{i \in \mathbb{N}}) = \{B(x, r_i) : i \in \mathbb{N}\}$$
   es base de entornos de x. En particular, $\{B(x, \frac{1}{i}) : i \in \mathbb{N}\}$ es base de entornos de x.

   Sea $V \in N_x \implies \exists U \in T_\mathrm{d} : x \in U \subset V \implies \exists r > 0 : B(x, r) \subset U \subset V \implies \exists i_0 \in \mathbb{N} : r_{i_0} < r \implies B := B(x, r_{i_0}) \subset B(x, r) \subset U \subset V$.

Lema 2.4. *Sea (X, T) un espacio topológico, $x \in X$. Entonces:*

1. $x \in V \ \forall V \in N_x$
2. *Si $V_1, V_2 \in N_x$, entonces $V_1 \cap V_2 \in N_x$*
3. *Si $V \in N_x$ y $V \subset U$, entonces $U \in N_x$*
4. *Si $V \in N_x, \exists U \in N_x$ tal que $U \subset V$ y $U \in N_y \ \forall y \in U$*

Demostración.

1. Es obvio
2. Si $V_1, V_2 \in N_x \implies \exists U_1, U_2 \in \mathcal{T} : x \in U_1 \subset V_1, x \in U_2 \subset V_2$. Entonces $\mathcal{T} \ni x \in U_1 \cap U_2 \subset V_1 \cap V_2$, de donde $V_1 \cap V_2 \in N_x$.
3. Si $V \in N_x \implies \exists W \in \mathcal{T} : x \in W \subset V \subset U$, y por tanto, $U \in N_x$.

4. Si $V \in N_x$, existe $W \in \mathcal{T} : x \in W \subset V$. Tomamos entonces $U = W$ (ya sabemos que $U \in N_y \ \forall y \in U$). U es entorno de cada uno de sus puntos. ■

Definición 2.5 (Punto interior)**.** Sea (X, T) un espacio topológico, $A \subset X, A \neq \emptyset$. Diremos que $x \in X$ es un punto interior de A si existe $U \in N_x$ tal que $U \subset A$.

Definición 2.6 (Punto adherente)**.** Sea (X, T) un espacio topológico, $A \subset X, A \neq \emptyset$. Diremos que $x \in X$ es un punto adherente de A si para todo $U \in N_x$, se tiene que $U \cap A \neq \emptyset$.

Definición 2.7 (Punto frontera)**.** Sea (X, T) un espacio topológico, $A \subset X, A \neq \emptyset$. Diremos que $x \in X$ es un punto frontera si, para todo $U \in N_x$, se tiene que $U \cap A \neq \emptyset$ y $U \cap A^c \neq \emptyset$.

Observación. Todo punto frontera es adherente, y los puntos interiores no son puntos frontera.

Definición 2.8 (Punto de acumulación)**.** Sea (X, T) un espacio topológico, $A \subset X, A \neq \emptyset$. Diremos que $x \in X$ es un punto de acumulación de A si $\forall U \in N_x$, se cumple que $(U \backslash \{x\}) \cap A \neq \emptyset$.

Definición 2.9 (Punto aislado)**.** Sea (X, T) un espacio topológico, $A \subset X$, $A \neq \emptyset$. Diremos que $x \in X$ es un punto aislado de A si $\exists U \in N_x$ tal que $U \cap A = \{x\}$.

Definición 2.10 (Punto exterior)**.** Sea (X, T) un espacio topológico, $A \subset X$, $A \neq \emptyset$. Diremos que $x \in X$ es un punto exterior de A si x es un punto interior de A^c ($\exists U \in N_x : U \subset A^c$).

Sea $A \subset X$. Denotaremos por:

- $\mathrm{int}(A) \equiv \mathring{A} \equiv \{$puntos interiores de $A\} \equiv$ interior de A,
- $\mathrm{cl}(A) \equiv \bar{A} \equiv \{$puntos adherentes de $A\} \equiv$ clausura o adherencia de A,
- $\mathrm{fr}(A) \equiv \delta A \equiv \{$puntos frontera de $A\} \equiv$ frontera de A,
- $A' \equiv \{$puntos acumulación de $A\} \equiv$ conjuntos de puntos de acumulación de A,
- $\mathrm{ais}(A) \equiv \{$puntos aislados de $A\} \equiv$ conjunto de puntos aislados de A,
- $\mathrm{ext}(A) \equiv \{$puntos exteriores de $A\} \equiv$ conjunto de puntos exteriores de A.

Propiedades.

1. Sea (X, T) un espacio topológico, y $A \subset X, A \neq \emptyset$. Se cumple entonces $\mathring{A} \subset A \subset \bar{A}$. Veámoslo:
   - $\mathring{A} \subset A$. Sea $x \in \mathring{A} \implies \exists U \in N_x : x \in U \subset A \implies x \in A$.
   - $A \subset \bar{A}$. Sea $x \in A \implies \forall U \in N_x, U \cap A \supset \{x\} \neq \emptyset \implies U \cap A \neq \emptyset$.
2. $\mathring{A} \in \mathcal{T}$. Además, si $U \in \mathcal{T}$ y $U \subset A$, entonces $U \subset \mathring{A}$ (es decir, $\mathring{A}$ es el mayor conjunto abierto contenido en A).

   Demostración. $\mathring{A} \in \mathcal{T}$. Si $\mathring{A} = \emptyset$, entonces $\mathring{A} \in \mathcal{T}$. Si $\mathring{A} \neq \emptyset$, tomamos $x \in \mathring{A}$. Entonces $\exists U \in N_x : U \subset A \implies \exists V \in N_x$, con $V \subset U$ tal que $U \in N_y \ \forall y \in V$. De aquí, y de $U \subset A$, obtenemos que $y \in \mathring{A} \ \forall y \in V$, y, por tanto, $N_x \ni V \subset \mathring{A} \implies \exists W_x \in \mathcal{T} : x \in N_x \subset V \subset \mathring{A}$. Finalmente, $\mathring{A} = \bigcup_{x \in \mathring{A}} W_x \in \mathcal{T}$. Para probar la segunda parte: sea $U \in \mathcal{T} : U \subset A$. Si $x \in U$, como $U \in N_x$, $\implies x \in \mathring{A}$, ya que $x \in U \subset A$. Entonces, $U \subset \mathring{A}$.
3. $\bar{A} \in C_T = \{$conjuntos cerrados en $(X, T)\}$. Además, si $F \in C_T$ y $A \subset F$, entonces $\bar{A} \subset F$ (es decir, la clausura de A es el menor conjunto cerrado que contiene a A).

   Demostración. $\bar{A} \in C_T$. Para probarlo, veamos que $\bar{A}^c = X \backslash \bar{A} \in \mathcal{T}$. Sea $x \in X \backslash \bar{A} \iff x \notin \bar{A} \iff \exists U \in N_x : U \cap A = \emptyset \iff U \subset X \backslash A \iff x \in \mathrm{int}(X \backslash A)$. Por tanto, $X \backslash \bar{A} = \mathrm{int}(X \backslash A)$. Como $\mathrm{int}(X \backslash A)$ es abierto, $X \backslash \bar{A}$ también, y entonces, $\bar{A} \in C_T$.

3. Axiomas de separación y numerabilidad

Definición 3.1 (Propiedad T_1)**.** Diremos que un espacio topológico (X, T) es T_1 si $\forall x, y \in X, x \neq y, \exists V_x \in N_x, V_y \in N_y$ tales que $x \notin V_y$ y $y \notin V_x$.

Propiedad. (X, T) es $T_1 \iff$ todo punto de X es cerrado.

Demostración.

$\Longrightarrow$). Supongamos que (X, T) es T_1. Fijamos $x \in X$. Veamos que $\{x\}$ es cerrado comprobando que $X \backslash \{x\}$ es abierto. Para ello, vemos que $\operatorname{int}(X \backslash \{x\}) = X \backslash \{x\}$. Sea $y \in X \backslash \{x\} \implies y \neq x$. Como (X, T) es T_1, $\exists V_x \in N_x, V_y \in N_y$ tales que $x \notin V_y$ y $y \in V_x$. Como $x \notin V_y$, $\{x\} \cap V_y = \emptyset \implies V_y \subset X \backslash \{x\} \implies y \in \operatorname{int}(X \backslash \{x\})$.

Hemos probado así que $X \backslash \{x\} \subset \operatorname{int}(X \backslash \{x\}) \implies X \backslash \{x\} = \operatorname{int}(X \backslash \{x\}) \implies X \backslash \{x\} \in \mathcal{T} \implies \{x\} \in C_T$.

$\Longleftarrow$). Supongamos que todo punto de X es cerrado. Veamos que (X, T) es T_1. Para ello, tomamos $x, y \in X, x \neq y$. Por hipótesis, $\{x\}$ es cerrado $\implies X \backslash \{x\} \in \mathcal{T}$. Como $y \neq x$, $y \in X \backslash \{x\}$. Como $X \backslash \{x\}$ es abierto, coincide con un interior $\implies \exists V_y \in N_y$ tal que $V_y \subset X \backslash \{x\} \implies x \notin V_y$.
■

Definición 3.2. (X, T) es T_2 (o Hausdorff) si $\forall x, y \in X, x \neq y, \exists V_x \in N_x, V_y \in N_y$ tales que $V_x \cap V_y = \emptyset$.

Observación.

1. Todo espacio T_2 es T_1.
2. En un espacio T_2, todo punto es cerrado.

Ejemplos.

1. $(\mathbb{N}, T_{CF})$ es T_1 pero no es T_2 (es T_1 porque todo punto es cerrado, pero ya vimos que no es T_2).

Definición 3.3. Diremos que (X, T) verifica el primer axioma de numerabilidad, o que es AN-I, si cada punto de X admite una base de entornos numerable.

Definición 3.4. Diremos que (X, T) verifica el segundo axioma de numerabilidad, o que es AN-II, si T admite una base numerable.

Ejemplos.

1. Sea (X, T_D) un espacio topológico discreto. Consideremos la base de entornos $\mathcal{B}_x = \{\{x\}\}$, entonces (X, T_D) es AN-I. Si X es no numerable, entonces (X, T_D) no es AN-II. Veámoslo.

   Sea $\mathcal{B}$ una base de T. Si $x \in X \implies \{x\} \in T_D \implies \{x\} = \bigcup_{i \in I} B_i$, con $B_i \in \mathcal{B} \implies \exists B_{i_0} : x \in B_{i_0} \subset \bigcup_{i \in I} B_i = \{x\}$. Además se tiene que $\{x\} \subset B_{i_0}$. De aquí, deducimos que $B_{i_0} = \{x\} \implies \{x\} \in \mathcal{B}$.

   En conclusión, $\{\{x\} : x \in X\} \subset \mathcal{B}$, y como el primer conjunto no es numerable, deducimos que $\mathcal{B}$ tampoco lo es.

Lema 3.5. *Si $\mathcal{B}$ es base de T, entonces*

$$\mathcal{B}(x) = \{B \in \mathcal{B} : x \in B\}$$

es base de entornos abiertos de x para todo $x \in X$.

Demostración.

1. $\mathcal{B}(x) \subset N_x$ (los elementos de $\mathcal{B}(x)$ son conjuntos abiertos que contienen a x.
2. Sea $U \in N_x \implies \exists A \in T : x \in A \subset U$. Como $A \in T$, existe una familia $\{B_i\}_{i \in I} \subset \mathcal{B}$ tal que $A = \bigcup_{i \in I} B_i \implies \exists i_0 \in I : x \in B_{i_0} \subset A \subset U$, y entonces $B_{i_0} \in \mathcal{B}(x)$, $B_{i_0} \subset U$. ■

Corolario 3.6. *Si* (X, T) *es AN-II, entonces es AN-I.*

Demostración. Sea $\mathcal{B}$ base numerable de T, $x \in X \implies \mathcal{B}(x) \subset \mathcal{B}$. Por tanto, $\mathcal{B}(x)$ es numerable. ■

Ejemplos.

1. Sea (X, d) un espacio métrico. Sea
$$\mathcal{B}_x = \{B(x, \frac{1}{n}) : n \in \mathbb{N}\}$$
que es base de entornos numerable de x. Entonces, todo espacio métrico es AN-I.
2. $(\mathbb{R}, T_u)$ es AN-II. El conjunto
$$\mathcal{B} = \{(a, b) : a, b \in \mathbb{Q}\}$$
es numerable. Veamos que es base de T_u. Sea $A \in T_u$. Sea $x \in A \implies \exists m_1, m_2 \in \mathbb{R}$ tales que $x \in (m_1, m_2) \subset A$. Sabemos que existen $a_x, b_x \in \mathbb{R}$ tales que $m_1 < a_x < x < b_x < m_2$. Entonces $x \in (a_x, b_x) \subset (m_1, m_2) \subset A$. De aquí, $A = \bigcup_{x \in A} (a_x, b_x) \implies A$ es unión de elementos de $\mathcal{B}$. Es decir, $\mathcal{B}$ es base numerable de T_u ■

4. Ejercicios y problemas

1. Dado un espacio topológico (X, T), ¿existe una distancia en d tal que $T_{\mathrm{d}} = T$? En general, no.
2. ¿Cuándo coinciden T_t y T_D? Solo si $X = \{p\}$.
3. ¿Cuántas topologías hay en un conjunto con un elemento? $T = \{\emptyset, X\}$
4. ¿Cuántas topologías hay en un conjunto con dos elementos?
5. ¿Cuántas topologías hay en un conjunto con tres elementos?
6. Si X es finito, ¿coincide T_{CF} con otra topología conocida? Sí, $T_{CF} = \mathcal{P}(X) = T_D$.
7. Si X es infinito, ¿es (X, T_{CN}) metrizable?
   - Si X es numerable $\implies T_{CN} = T_D$ es metrizable usando la distancia discreta.
   - Si X no es numerable $\implies (X, T_{CN})$ no es Hausdorff.
8. Sea $X \neq \emptyset$, sean $A \subset X$. Definimos $T(A) = \{U \subset X : A \subset U\} \cup \{\emptyset\}$. Probar que $T(A)$ es una topología en X. ¿Es $(X, T(A))$ es Hausdorff?

   <u>Solución</u>

   - $\emptyset \in T(A)$ por definición. $A \subset X \implies X \in T(A)$.
   - $\{U_i\}_{i \in I} \subset T(A)$, entonces, dado $i \in I$, o bien $A \subset U_i$, o $U_i = \emptyset$.
     Supongamos que $U_i = \emptyset \ \forall i \in I$, entonces $\displaystyle\bigcup_{i \in I} U_i = \emptyset \in T(A)$.
     Supongamos ahora que $\exists i_0 \in I$ tal que $U_{i_0} \neq \emptyset$. Entonces $A \subset U_{i_0} \subset \displaystyle\bigcup_{i \in I} U_i$, y entonces $\displaystyle\bigcup_{i \in I} U_i \in T(A)$.
   - Sean $U_1, \ldots, U_k \in T(A)$. Entonces, si algún $U_i = \emptyset$, $U_1 \cap \cdots \cap U_k = \emptyset \in T(A)$. Si ningún $U_i = \emptyset \implies A \subset U_i \ \forall i \in \{1, \ldots, k\} \implies A \subset U_1 \cap \cdots \cap U_k \implies U_1 \cap \cdots U_k \in T(A)$.
9. Sea (X, d) un espacio métrico. Sea $r_0 > 0$. Definimos $B_{r_0} = \{B(x, r) : x \in X, 0 < r < r_0\}$. Probar que B_{r_0} es base de $T_{\mathrm{d}} \ \forall r_0 > 0$.
10. Probar que:
    a) $T_u \neq T_k$
    b) $T_u \neq T_S$
    c) $T_k \not\subset T_S$
    d) $T_S \not\subset T_k$
11. Sea $S \subset \mathcal{P}(X)$. ¿Existe T, topología en X tal que $S \subset T$?

    <u>Solución</u>

    Sí, la topología discreta satisface esa propiedad.
12. $\mathbb{R}^2, \alpha \in \mathbb{R}$. Consideremos el conjunto $U_\alpha = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y > \alpha\}$. Entonces, si $\beta > \alpha \implies U_\beta \subset U_\alpha$. Probar:
    a) el conjunto $T = \{U_\alpha : \alpha \in \mathbb{R}\} \cup \{\emptyset, R^2\}$ es una topología en $\mathbb{R}^2$.
    b) $T \subset T_u$ o $T_u \subset T$.
    c) ¿Es $(\mathbb{R}^2, T)$ Hausdorff?
    d) Describir C_T.

    <u>Solución</u>

    a) Comprobemos las propiedades que cumple una topología:
       - La primera es cierta.

- $\{V_i\}_{i\in I} \in \mathcal{T}$. Si algún $V_i = \emptyset$, los eliminamos de la familia (la unión no cambia). Si algún $V_i = \mathbb{R}^2 \implies \bigcup_{i\in I} V_i = \mathbb{R}^2 \in \mathcal{T}$. Podemos suponer entonces que $V_i = U_{\alpha(i)}$ $\forall i \in I$. Entonces

$$\bigcup_{i\in I} V_i = \bigcup_{i\in I} U_{\alpha(i)} = \mathcal{R} \times (M, +\infty) = \begin{cases} \mathbb{R}^2 & \text{si } M = -\infty \\ U_M & \text{si } M \in \mathbb{R} \end{cases}$$

  Sea $M = \inf\{\alpha(i) : i \in I\} = \begin{cases} -\infty \\ a \in \mathbb{R} \end{cases}$. En cualquiera de los casos, $\bigcup_{i\in I} V_i \in \mathcal{T}$.
- $V_1, \dots, V_k \in \mathcal{T}$. Si algún $V_i = \emptyset$, entonces $V_1 \cap \dots \cap V_k = \emptyset \in \mathcal{T}$. Si $V_i \neq \emptyset$ $\forall i = 1, \dots, k$ y algún $V_i = \mathbb{R}^2$, lo eliminamos de la familia (no cambia la intersección). Supongamos entonces que $V_i = U_{\alpha(i)}, i = 1, \dots, k$.
  Sea $N = \max\{\alpha(1), \dots, \alpha(k)\}$. Entonces

$$V_1 \cap \dots \cap V_k = U_{\alpha(1)} \cap \dots \cap U_{\alpha(k)} = \mathbb{R} \times (N, +\infty) = U_N$$

b) Sea $(x, y) \in U_\alpha \implies y > \alpha$. Sea $r = y - \alpha > 0$. Entonces, $B_2((x, y), r) \subset U_\alpha$ (B_2 es bola euclídea). Sea $(x', y') \in B_2((x, y), r)$, o sea, $\sqrt{(x - x')^2 + (y - y')^2} < r$, por lo que

$$(y - y')^2 \leq (x - x')^2 + (y - y')^2 < r^2 \implies y - y' \leq |y - y'| < r \implies y' > y - r = \alpha$$

Por tanto $(x', y') \in U_\alpha$ y $T \subset T_u$.
Veamos ahora que $T_u \not\subset T$. Consideramos la bola $B_2((0, 0), 1) \in T_u$. Sin embargo, $B_2((0, 0), 1) \neq \emptyset, \mathbb{R}^2, U_\alpha$ $\forall \alpha \in \mathbb{R}$, por tanto $T_u \not\subset T$.

c) No, porque dos conjuntos abiertos siempre se cortan. Es decir, sean $\alpha < \beta$. Entonces $U_\beta \subset U_\alpha \implies U_\beta \cap U_\alpha \neq \emptyset$.

d) $C_T = \{\mathbb{R} \times (-\infty, \alpha] : \alpha \in \mathbb{R}\} \cup \{\emptyset, \mathbb{R}^2\}$

13. $X \neq \emptyset, x_0 \in X$. Sea $C = \{F \subset X : x \in F\} \cup \{F \subset X : F \text{ finito}\}$. Probar que existe una única topología T en X tal que $C_T = C$.

<u>Solución</u>

Si C verifica

C1. $\emptyset, T \in C$
C2. $\{F_i\}_{i\in I} \subset C \implies \bigcup_{i\in I} F_i \in C$
C3. $F_1, \dots, F_k \in C \implies F_1 \cup \dots \cup F_k \in C$

entonces $T = \{X \backslash F : F \in C\}$ es la única topología en X tal que $C_T = C$.

C1. $x_0 \in X \implies X \in C$. $\emptyset$ finito $\implies \emptyset \in C$.
C2. $\{F_i\}_{i\in I} : F_i \in C$ $\forall i \in I$. Si algún F_i es finito, la intersección es finita, por lo que $\bigcap_{i\in I} F_i \in C$.
Si ningún F_i es finito, entonces $x_0 \in F_i$ $\forall i \in I \implies x_0 \in \bigcap_{i\in I} F_i \implies \bigcap_{i\in I} F_i \in C$.
C3. Sean $F_1, \dots, F_k \in C$. Si F_i es finito $\forall i \in I$, entonces $F_1 \cup \dots \cup F_k$ es finito y entonces $F_1 \cup \dots \cup F_k \in C$. Si algún F_{i_0} no es finito, sea $x_0 \in F_{i_0}$. Entonces $x_0 \in F_1 \cup \dots \cup F_k \implies F_1 \cup \dots \cup F_k \in C$.

Por tanto, $T = \{U \subset X : U^c \in C\} = \{U \subset X : x_0 \notin U\} \cup \{U \subset X : U^c \text{ finito}\} \supset T_{CF}$.