Ejercicios3.pdf

gsmrt

Modelos Matemáticos I

2º Doble Grado en Ingeniería Informática y Matemáticas

Facultad de Ciencias
Universidad de Granada

Grado en Ingeniería Informática y Matemáticas

Modelos matemáticos I (curso 18/19)

Relación de Ejercicios 3

1 Sea A una matriz 4×4 con un valor propio $\lambda = 3$ de multiplicidad (algebraica) 4. Escriba todas las formas canónicas de Jordan asociadas a A posibles.

2 Describa todas las matrices 2×2 que no son diagonalizables y tienen el vector propio $(1,2)^t$. ¿Cuántos parámetros son necesarios para describir esta familia?

3 Resuelva la ecuación matricial $X^2 = I$, donde X es una matriz real 2×2.

4 Dadas A, N matrices de orden 3 con N nilpotente del mismo orden y que verifican $AN = NA$, proporcione una fómula general para $(A+N)^n$ con $n\geq 3$. Calcule M^{50} para la matriz

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

5 *a)* Demuestre que una matriz $A\in\mathbb{C}^{d\times d}$ es nilpotente si y sólo si $\sigma(A) = \{0\}$.

b) Describa todas las matrices nilpotentes 2×2.

6 Dado el polinomio $p(\lambda) = \lambda^k + a_{k-1}\lambda^{k-1} + \ldots + a_1\lambda + a_0$ se construye la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ldots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 1 \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 & \ldots & -a_{k-2} & -a_{k-1} \end{pmatrix}.$$

Demuestre que $|A-\lambda I| = (-1)^k p(\lambda)$. A la matriz A se le llama la matriz *compañera* de $p(\lambda)$.

7 Supongamos que el polinomio $p(\lambda) = \lambda^k + a_{k-1}\lambda^{k-1} + \ldots + a_1\lambda + a_0$ tiene k raíces reales distintas $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k$. Sea A la matriz *compañera* de $p(\lambda)$ definida en el problema anterior y sea V la matriz de Vandermonde

$$V = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \ldots & 1 \\ \lambda_1 & \lambda_2 & \ldots & \lambda_k \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \lambda_1^{k-1} & \lambda_2^{k-1} & \ldots & \lambda_k^{k-1} \end{pmatrix}.$$

Demuestre que la matriz $V^{-1}AV$ es diagonal.

8 Una matriz A se dice *positiva* si $a_{ij}\geq 0, \forall i,j$. Sea A una matriz $k\times k$ positiva verificando $\sum_{j=1}^k a_{ij} < 1$ para $i = 1, 2, \ldots, k$. Demuestre que $|\lambda| < 1$ para cualquier valor propio λ de A.

9 Sea A una matriz $k\times k$ tal que $|\lambda| < 1$ para cualquier valor propio λ de A. Demuestre que

a) $I - A$ es regular.

b) $\sum_{k=0}^{\infty} A^k = (I-A)^{-1}$ (desarrollo de Neumann)

10 Diseñe un procedimiento que transforme la ecuación en diferencias $x_{n+2} + p_1x_{n+1} + p_0x_n = 0$ en un sistema del tipo $X_{n+1} = AX_n$ donde A es una matriz 2×2. Demuestre el teorema sobre el comportamiento asintótico de las soluciones de la ecuación de segundo orden usando la teoría de este tema.

11 Sea $N\geq 2$ un entero fijo. Dados N números $x_0, x_1, \ldots, x_{N-1}\in\mathbb{C}$, se construye una sucesión de acuerdo a la ley

$$x_n = \frac{1}{N}(x_{n-1} + x_{n-2} + \ldots + x_{n-N}), n\geq N.$$

Demuestre que existen números $c\in\mathbb{C}$ y $\lambda\in]0,1[$ de manera que $x_n = c + O(\lambda^n), n\to\infty$. Es decir, existe $M\geq 0$ tal que $|x_n - c|\leq M\lambda^n$ para cada n.

12 Sea A una matriz cuadrada con valores propios $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_r$ que cumplen $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = -1, |\lambda_i| < 1, i = 3, \ldots, r$. Se supone además que λ_1 y λ_2 son simples (como raíces del polinomio característico). Demuestra que existen matrices Π y Σ que cumplen $A\Pi = \Sigma$, $A\Sigma = \Pi$, $\{A^{2n}\}_{n\geq 0} \to \Pi$, $\{A^{2n+1}\}_{n\geq 0} \to \Sigma$.

13 Se considera la matriz de Leslie

$$L = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 2 & 1 \\ \alpha & 0 & 0 \\ 0 & \beta & 0 \end{pmatrix},$$

donde $\alpha, \beta \in]0, 1[$. Encuentra las regiones donde se produce extinción, crecimiento ilimitado o convergencia a equilibrios en el plano de parámetros (α, β).

14 Se considera la matriz

$$\begin{pmatrix} \alpha - 1 & \alpha \\ \frac{1}{\alpha} & 0 \end{pmatrix}, \qquad \alpha > 1.$$

a) Describa la población que sigue el modelo de Leslie dado por la matriz

b) Estudie el comportamiento asintótico de la población en términos del parámetro α.

15 Se considera la matriz de Leslie

$$L = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \delta & \gamma \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix},$$

donde $\delta, \gamma \geqslant 0$.

a) Encuentre las regiones donde se produce extinción, crecimiento ilimitado o convergencia a equilibrio en el plano de parámetros (δ, γ).

b) Describa la pirámide de edad a largo plazo correspondiente a los valores $\delta = \frac{1}{2}, \gamma = 1$.

16 Una población estructurada en N grupos de edad tiene la matriz de Leslie

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \ldots & N-1 & N \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & \frac{1}{N} & 0 \end{pmatrix}.$$

¿Qué grupo de edad es más fértil? ¿Se extinguirá la población?

17 Consideramos un modelo de Leslie con N grupos de edad. Se supone que todos los grupos tienen la misma tasa de natalidad α y la misma tasa de supervivencia β. Construye la matriz asociada y da una condición para que haya crecimiento ilimitado de la población.

18 Una determinada población está estructurada en base a tres grupos diferentes de edad: crías (hasta los 3 años), jóvenes (de 3 a 6 años) y adultos (de 6 a 9 años). Es conocido que cada cría engendra en media una nueva cría, cada joven engendra en media 1,5 crías y cada adulto engendra en media 0,5 crías. Además, las observaciones arrojan el dato de que la mitad de las crías llegan a jóvenes, en tanto que sólo el 20 % de los jóvenes sobrevive.

a) Construya la matriz del modelo.

b) Si la distribución de tamaños iniciales es $P_0 = (3, 1, 0)^t$ (en las unidades adecuadas), calcule cuál será la distribución de tamaños al cabo de seis años.

c) Explique el comportamiento a largo plazo de la población (incluyendo su distribución porcentual por grupos de edad).

19 (Modelo de Leftkovich) En ciertos tipos de poblaciones los individuos no maduran a la vez, y, como consecuencia, las clases en las que se divide la población no siempre responden estrictamente a la edad de los individuos. El paso de una etapa a otra es a menudo bastante flexible y depende de factores como la densidad de población, alimento, temperatura, luminosidad, etc. En este ejercicio estudiaremos la evolución de una población de mariposas dividida en tres etapas: huevos/larvas, crisálidas y adultos. Suponemos que estudiamos la población mensualmente, y que los datos observados son los siguientes:

- Cada mes, los huevos y las larvas pasan a ser crisálidas en una proporción $b_1 \neq 0$, y las crisálidas pasan a ser adultos en proporción $b_2 \neq 0$.


yo elijo cerveza SIN
Sea cual sea el vehículo que conduces, elige cerveza SIN.
CONDUCCIÓN RESPONSABLE CERVEZA SIN
WWW.CONDUCCIONRESPONSABLECERVEZASIN.COM
Cerveceros de España
100 años más
UNA GRAN CERVEZA.
UNA GRAN RESPONSABILIDAD.
© CONDUCCIÓN RESPONSABLE, CERVEZA SIN es una iniciativa de la Asociación de Cerveceros de España con el apoyo de la Dirección General de Tráfico.
DGT
Dirección General de Tráfico
AEDIVE
AOP
CEA
PMTV
PONS
Rotary
STOP

- Además, hay una cierta proporción p_1 de larvas que no madura lo suficiente, y no se convierte en crisálidas ese mes, otra proporción p_2 de crisálidas que no termina su desarrollo y no llega a adultos, y una proporción p_3 de adultos que no completa su ciclo y no muere en el mes que le correspondería.
- Como es habitual, ni larvas ni crisálidas ponen huevos, y los adultos ponen una media de α huevos expresados en miles.

Se pide:

a) Escriba el sistema de ecuaciones en diferencias que describe la evolución de la población de mariposas en la forma dada anteriormente.

b) Determine el tipo de constantes que deben ser p_1, p_2, p_3, y si tienen algún tipo de restricciones.

c) ¿Es posible asegurar la existencia de un valor propio dominante? ¿Bajo qué condiciones?

d) Supongamos $b_1 = 1/3$, $b_2 = 1/2$, $p_1 = p_2 = 1/3$, $p_3 = 1/4$. ¿Qué valor de α hace que el tamaño de la población permanezca constante? En este caso, ¿cuál será la distribución asintótica por clases de la población de mariposas?

RELACIÓN 3 MMI

2 A 2x2 no diagonalizable → A semejante a $J = \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$

$A = PJP^{-1}$

$v = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ vector propio

¿Parámetros necesarios para describir?

$P = \begin{pmatrix} 1 & a \\ 2 & b \end{pmatrix} \quad P^{-1} = \frac{1}{c}\begin{pmatrix} b & -a \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \quad |P| = b - 2a = c$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & a \\ 2 & b \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}\frac{1}{c}\begin{pmatrix} b & -a \\ -2 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{c}\begin{pmatrix} -2+\lambda c & 1 \\ -4 & 2+\lambda c \end{pmatrix}$$

Son necesarios dos parámetros (λ y c)

4 A, N 3x3

N nilpotente orden 3 ($N^3 = 0$)

$AN = NA$ → las matrices conmutan

$$(A+N)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} A^{n-k} N^k$$

$n \geq 3$

imprescindible que A,N conmuten

$$(A+N)^2 = (A+N)(A+N) = A^2 + AN + NA + N^2 = A^2 + 2AN + N^2$$

$N^3 = 0$

$N^4 = N \cdot N^3 = 0$

$N^k = 0, \ k \geq 3$

$n \geq 3$

$$(A+N)^n = \binom{n}{0} A^n N^0 + \binom{n}{1} A^{n-1} N + \binom{n}{2} A^{n-2} N^2$$

$$\boxed{(A+N)^n = A^n + nA^{n-1}N + \frac{n(n-1)}{2} A^{n-2} N^2}$$

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{A} + \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 5 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}}_{N}$$

M^{50}

$M = (I+N)$

$IN = NI$

N nilpotente $\begin{pmatrix} 0 & 5 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 5 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 10 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 10 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 5 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$M^{50} = (I+N)^{50} = I^{50} + 50 I^{49} N + \frac{50 \cdot 49}{2} I^{48} N^2$$

$$= I + 50N + 1225 N^2 =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 250 & 100 \\ 0 & 0 & 100 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 12250 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 250 & 12350 \\ 0 & 1 & 100 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$\boxed{6}$ $p(\lambda) = \lambda^k + a_{k-1}\lambda^{k-1} + \dots + a_1\lambda + a_0$

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & & & & & \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 & \cdots & -a_{k-2} & -a_{k-1} \end{pmatrix} \rightarrow \text{identidad}$$

$|A - \lambda I| = (-1)^k p(\lambda) \qquad (*)$

A matriz compañera de $p(\lambda)$

$$|A - \lambda I| = \begin{vmatrix} -\lambda & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & -\lambda & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & & & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots -\lambda & 1 \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 & \cdots -a_{k-2} & -a_{k-1}-\lambda \end{vmatrix} =$$

$$= -\lambda \begin{vmatrix} -\lambda & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & & & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & -\lambda & 1 \\ -a_1 & -a_2 & \cdots & -a_{k-2} & -a_{k-1}\lambda \end{vmatrix} - a_0(-1)^{k+1} \underbrace{\begin{vmatrix} 1 & & \\ -\lambda & \ddots & 0 \\ 0 & -\lambda & 1 \end{vmatrix}}_{1}$$

Probamos por inducción $(*)$

$k=1 \qquad p(\lambda) = \lambda + a_0$

$A = (-a_0) \qquad |A - \lambda I| = -a_0 - \lambda = (-1)\, p(\lambda)$

Suponemos cierto para $k-1$ y probamos para k.

A orden k $\quad$ $A(k-1)\times(k-1) \rightarrow$ orden 1 menos y quitando a_0

$$|A-\lambda I| = -\lambda|\tilde{A}-\lambda I| - a_0(-1)^{k+1} = (**)$$

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ -a_1 & -a_2 & \cdots & -a_{k-2} & -a_{k-1} \end{pmatrix}$$

hipótesis de inducción

$$|\tilde{A}-\lambda I| = (-1)^{k-1}(\lambda^{k-1} + a_{k-1}\lambda^{k-2} + \cdots + a_1)$$

$$(**) = -\lambda(-1)^{k-1}(\lambda^{k-1} + a_{k-1}\lambda^{k-2} + \cdots + a_1) - (-1)^{k-1}a_0 =$$

$$= (-1)^k(\lambda^k + a_{k-1}\lambda^{k-1} + \cdots + a_1\lambda + a_0) = (-1)^k p(\lambda).$$

3 λ v.p. de $X \Rightarrow \lambda^2$ es v.p. de X^2. X tiene valores propios

① $\lambda = 1$ doble

② $\lambda = -1$ doble

③ $\lambda = 1$, $\lambda = -1 \longrightarrow P\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}P^{-1}$

$X v = \lambda v$

$X^2 v = \lambda^2 v$

5 $A \in \mathbb{C}^{d\times d}$ nilpotente $\Leftrightarrow \sigma(A) = \{0\}$

$\Rightarrow)$ $\exists m \in \mathbb{N}$ con $A^m = 0 \Rightarrow |A^m| = |A|^m = 0 \Rightarrow |A| = 0$

Por tanto, $|A - 0I| = 0 \Rightarrow \lambda = 0$ valor propio de A

Unicidad: Sea λ valor propio de A

$\Rightarrow \exists x \neq 0$ con $Ax = \lambda x$

5 Continuación

$\Rightarrow A^2x = A(Ax) = A\lambda x = \lambda^2 x$

$A^3x = A(A^2x) = A\lambda^2 x = \lambda^3 x$

$A^m x = \lambda^m x$

Como $A^m = 0 \Rightarrow \lambda^m x = 0$

$\Rightarrow \exists x_\lambda \neq 0 \Rightarrow \lambda^m x_\lambda = 0 \Rightarrow \lambda^m = 0 \Rightarrow \lambda = 0$

$\Leftarrow$ | $\sigma(A) = \{0\} \Rightarrow A$ semejante a matriz de Jordan

$J = \begin{pmatrix} 0^0 & & 0_1 & 0 \\ & \ddots & & \\ 0 & & & 0^1 \end{pmatrix}$. J nilpotente $\Rightarrow \exists m \in \mathbb{N} \cdot J^m = 0$

A semejante a $J \Rightarrow \exists P \in \mathbb{C}^{n \times n}$ regular con $A = PJP^{-1}$

$\Rightarrow A^m = PJ^mP^{-1} = P0P^{-1} = 0$

b) $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^{2\times 2}$

$p_A(\lambda) = \lambda^2 - (a+d)\lambda + (ad+bc)$

$\sigma(A) = \{0\} \Leftrightarrow p_A(\lambda) = \lambda^2$

$\begin{cases} a+d=0 & a=-d \\ ad-bc=0 & ad=bc \rightsquigarrow -a^2=bc \end{cases}$

$\begin{pmatrix} 0 & a \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ a & 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} a & b \\ \frac{-a^2}{b} & -a \end{pmatrix}$ $a, b \in \mathbb{C}$, $a \neq b$

$a \in \mathbb{C}$

13

$$L = \begin{pmatrix} 1/2 & 2 & 1 \\ \alpha & 0 & 0 \\ 0 & \beta & 0 \end{pmatrix} \quad \alpha, \beta \in (0,1)$$

$$R = \frac{1}{2} + 2\cdot\alpha + 1\alpha\cdot\beta$$

* Extinción $R < 1$

$$1/2 + 2\alpha + \alpha\beta < 1$$

$$\alpha < \frac{1}{4+2\beta}$$

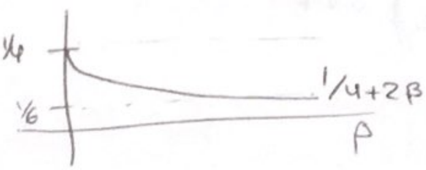
* Población de $R = 1$ $\quad \alpha = \frac{1}{4+2\beta}$

* Crecimiento ilimitado $R > 1$ $\quad \alpha > \frac{1}{4+2\beta}$

$$f(x) = \frac{1}{4+2x}$$

$$f'(x) = \frac{-1}{2(x+2)^2} \rightarrow f \text{ estrictam. decreciente en } (0,1)$$

$$\left.\begin{array}{l} f(0) = 1/4 \\ f(1) = 1/6 \end{array}\right\} \rightarrow f((0,1)) = (1/4, 1/6)$$



4

17 $\begin{pmatrix} \alpha & \alpha & \cdots & \alpha \\ \beta & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \beta & 0 & 0 \\ & 0 & & \\ 0 & & \beta & 0 \end{pmatrix}$ $\alpha\beta + \alpha\beta^2 + \dots + \alpha\beta^{N-1} \geq 1$

$(\beta + \beta^2 + \beta^3 + \dots + \beta^{N-1}) \geq \frac{1}{2}$

$\sum_{i=0}^{N-1} \beta^i \geq \frac{1}{2}; \boxed{\frac{\beta - \beta^N}{1-\beta} \geq \frac{1}{2}}$

15 $L = \begin{pmatrix} 1/2 & \delta & \gamma \\ 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 \end{pmatrix}$

$R = a_1 + a_2 b_1 + a_3 b_2 b_1 = \frac{1}{2} + \frac{\delta}{2} + \frac{\gamma}{4} \Rightarrow \gamma \gtreqless 2(1-\delta)$

Extinción $\frac{1}{2} + \frac{\delta}{2} + \frac{\gamma}{4} < 1$

Crecimiento ilimitado $\frac{1}{2} + \frac{\delta}{2} + \frac{\gamma}{4} > 1$

Equilibrio $\frac{1}{2} + \frac{\delta}{2} + \frac{\gamma}{4} = 1$

b) $\delta = \frac{1}{2}$, $\gamma = 1$

$L = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 & 1 \\ 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 \end{pmatrix}$ $R = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = 1 \rightarrow$ Equilibrio.

$\frac{1}{\|x_n\|} x_n \rightarrow \frac{1}{\|v\|} v$: $v = \begin{pmatrix} 1 \\ b_1/\lambda_1 \\ b_2 b_1/\lambda_1^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1/2 \\ 1/4 \end{pmatrix}$ $\|v\|_1 = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} = \frac{7}{4}$

$\boxed{\frac{v}{\|v\|} = \begin{pmatrix} 4/7 \\ 2/7 \\ 1/7 \end{pmatrix}}$

¡¡¿Qué pasa cuándo $\delta = 0$?

18

a) $L = \begin{pmatrix} 1 & 1,5 & 0,5 \\ 0,5 & 0 & 0 \\ 0 & 0,2 & 0 \end{pmatrix}$

b) $p_0 = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

6 años

$$P_6 = L^6 \cdot P_0 = \begin{pmatrix} 8,97438 & 9,26 & 2,95625 \\ 2,93625 & 3,06208 & 0,978125 \\ 0,39125 & 0,4 & 0,1275 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 36,1831 \\ 11,9306 \\ 1,57375 \end{pmatrix}$$

c) Valores propios

$\boxed{\lambda_1 = 1,51635} \longrightarrow v_1 = \begin{pmatrix} 0,948893 \\ 0,31887 \\ 0,0412683 \end{pmatrix}$ $\|v\| = 1,3090313$

$\lambda_2 = -0,441701$

$\lambda_3 = -0,746519$

Normaltado $\mu = \begin{pmatrix} 0,72821 \\ 0,240119 \\ 0,0316706 \end{pmatrix}$

72% crías

24% jóvenes

3% adultos

$\boxed{19}$ H_n = nº huevos / larvas en etapa n

C_n = " crisálidas "

A_n = " adultos "

Proporciones $<$ $b_1 \neq 0$ $H_n \to C_n$; $b_2 \neq 0$ $C_n \to A_n$

p_1 = proporción de larvas que no pasan a crisálidas

p_2 = proporción de crisálidas que no pasan a adulto.

p_3 = proporción de adultos que no muere

Adultos $\Rightarrow \alpha$ miles

a)
$$\left.\begin{aligned} H_{n+1} &= p_1 H_n + \alpha \cdot 1000 \cdot A_n \\ C_{n+1} &= b_1 H_n + p_2 C_n \\ A_{n+1} &= b_2 C_n + p_3 A_n \end{aligned}\right\} \quad L = \begin{pmatrix} p_1 & 0 & \alpha \cdot 1000 \\ b_1 & p_2 & 0 \\ 0 & b_2 & p_3 \end{pmatrix}$$

b) $p_1, p_2, p_3 \in [0,1]$

El modelo carece de sentido si alguna de las p_i es 1, ya que no morirían nunca

$p_1 + b_1 \leq 1$

$p_2 + b_2 \leq 1$

c) ¿Valor propio dominante?

Si: $p_1 = p_2 = p_3$

$$L = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \boxed{\alpha \cdot 100} \\ \boxed{b_1} & 0 & 0 \\ 0 & \boxed{b_2} & 0 \end{pmatrix}$$

$p(\lambda) = (-1)^3(\lambda^3 - 0 \cdot b_1 \lambda^2 - 0 - \boxed{\alpha \cdot 1000 b_1 b_2})$

No hay valor propio dominante

$1 \to 2 \to 3$

$2 \to 3 \to 1$

$3 \to 1 \to 2$

Si algún $p_i \neq 0 \overset{?}{\Rightarrow} L$ es primitiva $(\exists m / L^m >> 0)$

$\Downarrow$

L tiene un valor propio positivo es dominante.

Supongo $p_1 \neq 0$ $(p_2 = 0, p_3 = 0)$

$$L = \begin{pmatrix} p_1 & 0 & \alpha \cdot 1000 \\ b_1 & 0 & 0 \\ 0 & b_2 & 0 \end{pmatrix}$$

Estados $\downarrow$ estado siguiente (se mira por columna) $\downarrow$

$1 \longrightarrow \underset{p_1\ b_1}{1,2} \longrightarrow 1,2,3 \longrightarrow 1,2,3 \longrightarrow 1,2,3$

$2 \longrightarrow \underset{b_2}{3} \longrightarrow 1 \longrightarrow 1,2 \longrightarrow 1,2,3$

$3 \longrightarrow \underset{\alpha \cdot 1000}{1} \longrightarrow 1,2 \longrightarrow 1,2,3 \longrightarrow 1,2,3$

He llegado en 4 pasos así que $L^4 >> 0$

$p_2 \neq 0$, $p_1 = 0 = p_3$ $\quad L^4 >> 0$

$p_3 \neq 0$, $p_1 = 0 = p_2$. $\quad L^4 >> 0$

d) $b_1 = 1/3$; $b_2 = 1/2$; $p_1 = p_2 = 1/3$; $p_3 = 1/4$

$$L = \begin{pmatrix} 1/3 & 0 & \alpha \cdot 1000 \\ 1/3 & 1/3 & 0 \\ 0 & 1/2 & 1/4 \end{pmatrix}$$

$\lambda = 1$ tiene que ser un valor propio $\Rightarrow |L - I| = 0$

$\frac{1}{36}(6000\alpha - 12) = \boxed{\alpha = 2/1000}$

$$L = \begin{pmatrix} 1/3 & 0 & 2 \\ 1/3 & 1/3 & 0 \\ 0 & 1/2 & 1/4 \end{pmatrix}$$

$\lambda = 1$ valor propio (dominante) $\Rightarrow v = \begin{pmatrix} 3 \\ 3/2 \\ 1 \end{pmatrix}$

2 valores propios complejos

$\frac{v}{\|v\|} = \begin{pmatrix} 6/11 \\ 3/11 \\ 2/11 \end{pmatrix}$

$\boxed{9}$ $A \in M$ es positiva cuando $a_{ij} \geq 0$

$A \in M_k$ positiva tal que $\sum_{j=1}^{k} a_{ij} < 1 \quad \forall i = 1, \dots, k$

Probar que $|\lambda| < 1 \quad \forall \lambda \in \sigma(A)$

Nos piden $\|A\|_\infty < 1 \Rightarrow \rho(A) < 1 \Rightarrow$ Hecho.

$\boxed{10}$ $x_{n+2} + p_1 x_{n+1} + p_0 x_n = 0$

$X_{n+1} = A X_0, \; A \in M_{2\times 2}$

Definimos

$$X_n = \begin{pmatrix} x_n \\ x_{n+1} \end{pmatrix}; \quad X_{n+1} = \begin{pmatrix} x_{n+1} \\ x_{n+2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_{n+1} \\ -p_0 x_n - p_1 x_{n+1} \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -p_0 & -p_1 \end{pmatrix}}_{A} \begin{pmatrix} x_n \\ x_{n+1} \end{pmatrix}$$

Por el ejercicio 6, A es la matriz compañera del polinomio $p(\lambda) = \lambda^2 + p_1\lambda + p_0$

los valores propios de A son las raíces del polinomio característico de $p(\lambda)$

$$\text{IM}\left\{ X_n \to 0 \overset{\text{tema 3}}{\iff} \rho(A) < 1 \overset{\text{por 6}}{\iff} \underset{\text{son } |\cdot| < 1}{\text{raíces de } p(\lambda) = \lambda^2 + p_1\lambda + p_0} \overset{\text{tema 2}}{\iff} x_n \to 0. \right.$$

$\boxed{16}$

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & N-1 & N \\ \frac{1}{2} & 0 & \dots & & \dots & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & 0 & \dots & \dots & 0 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \frac{1}{N} & 0 \end{pmatrix}$$

El último es el más fértil

$R = 1 + \frac{1}{2}\cdot 2 + \dots > 1 \Rightarrow$ No se extingue.

$\boxed{12}$ A , $\overbrace{\lambda_1 = 1 , \lambda_2 = -1}^{\text{simples}}$, $|\lambda_i| < 1 \longrightarrow$ demás

$\exists \Pi, \Sigma$ $\quad A\Pi = \Sigma$ $\quad$ Dem $\quad A^{2n} \to \Pi$

$\quad A \cdot \Sigma = \Pi$ $\quad\quad A^{2n+1} \to \Sigma$

$$A = P \cdot J \cdot P^{-1} \; ; \; J = \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & \\ 0 & -1 & 0 \\ \hline & 0 & \tilde{J} \end{array}\right)$$

Sabemos que $\tilde{J}^n \xrightarrow{n\to\infty} 0$

$$J^n = \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & \\ 0 & (-1)^n & 0 \\ \hline & 0 & \tilde{J}^n \end{array}\right) \quad A^n = P J^n P^{-1}$$

Definimos $\Pi = P \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & \\ 0 & 1 & 0 \\ \hline & 0 & 0 \end{array}\right) P^{-1}$; $\Sigma = P \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & \\ 0 & -1 & 0 \\ \hline & 0 & 0 \end{array}\right) P^{-1}$

$A\Pi = \Sigma$, $A\Sigma = \Pi$ son simples cálculos

$\boxed{14}$ $L = \begin{pmatrix} \alpha-1 & \alpha \\ 1/\alpha & 0 \end{pmatrix}$, $\alpha > 1$ $\quad$ a) $P_{n+1} = L P_n$

fecundidad

supervivencia

b) $R = \alpha - 1 + \frac{1}{\alpha} \cdot \alpha = \alpha > 1 \Rightarrow$ superpoblación

$$p(\lambda) = \dots = 0 \iff \lambda = \frac{\alpha - 1 \overset{\text{por ser } \lambda \text{ dominante}}{\oplus} \sqrt{(\alpha-1)^2 + 4}}{2} = \frac{\alpha-1}{2} + \sqrt{\frac{(\alpha-1)^2}{2^2} + 1} > 1$$

$$Lv = \lambda v \rightsquigarrow v = \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{1}{\alpha}\left(\frac{\alpha-1}{2} - \sqrt{\left(\frac{\alpha-1}{2}\right)^2 + 1}\right) \end{pmatrix}$$

$[0,10)$ iniciados $\rightarrow$ $\frac{1}{2} = b_1$ supervivencia (los que siguen)

$[10,20)$ padawans $\rightarrow$ $\frac{1}{3} = b_2$

$[20,30)$ caballeros $\rightarrow$ $\frac{1}{4} = b_3$

$[30,40)$ maestros

$$\left.\begin{array}{l} a_1 = 0 \\ a_2 = 0 \\ a_3 = 4 \\ a_4 = 4 \end{array}\right]$$ nº medio de crías (bebé) aportados por cada clase.

a) Modelo matemático.

$$X^{(n+1)} = LX^{(n)} \Rightarrow L = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 4 & 4 \\ 1/2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/4 & 0 \end{pmatrix}$$

$a_3 a_4 > 0$

son válidos todos los resultados de teoría

b) Demostrar que la academia desaparecerá

Se extingue $\Rightarrow \lambda_1 < 1$ (λ_1 valor propio dominante, que existe, es único, simple y positivo)

$$\lambda_1 < 1 \Leftrightarrow \underset{R}{\underset{\parallel}{q(1)}} < 1$$

$$R = a_1 + a_2 b_1 + a_3 b_2 b_1 + a_4 b_3 b_2 b_1 = 0 + 0 + 4 \cdot \tfrac{1}{3} \cdot \tfrac{1}{2} + 4 \cdot \tfrac{1}{4} \cdot \tfrac{1}{3} \cdot \tfrac{1}{2}$$

$$= \frac{2}{3} + \frac{1}{6} = \frac{5}{6} < 1$$

c) Estrategia A: $a_4 = \alpha > 4$

nº bebes de los maestros para un nº de estudiantes constante $\Rightarrow \lambda_1 = 1$

Calcular pirámide de edad asintótica

$$L = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 4 & \alpha \\ 1/2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/4 & 0 \end{pmatrix}$$

$$R = a_1 + a_2 b_1 + a_3 b_2 b_1 + a_4 b_3 b_2 b_1 = 0 + 0 + 4 \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} + \alpha \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{4} =$$

condición

$$= \frac{2}{3} + \frac{\alpha}{24} = 1 \Rightarrow \alpha = \frac{24}{3} = 8 \Rightarrow \boxed{\alpha = 8}$$

$$V = \begin{pmatrix} 1 \\ b_1/\lambda_1 \\ b_1 b_2/\lambda_1^2 \\ b_1 b_2 b_3/\lambda_1^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1/2/1 \\ 1/6/1 \\ 1/24/1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1/2 \\ 1/6 \\ 1/24 \end{pmatrix} \qquad \|V\| = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{24} = \frac{24+12+4+1}{24} = \frac{41}{24}$$

$$\text{Pirámide de edad} = \frac{V}{\|V\|} = \begin{pmatrix} 24/41 \\ 12/41 \\ 4/41 \\ 1/41 \end{pmatrix}$$

Estrategia B: $b_3 = \beta > 1/4$ con $\lambda_1 = 1$

$$L = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 4 & 4 \\ 1/2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \beta & 0 \end{pmatrix}$$

$$R = a_1 + a_2 b_1 + a_3 b_1 b_2 + a_4 b_1 b_2 b_3 =$$
$$= 0 + 0 + 4 \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} + 4 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} \beta = 1$$

$$\Rightarrow \frac{2}{3} + \frac{4\beta}{6} = 1 \Rightarrow \frac{1}{3} = \frac{4\beta}{6} \Rightarrow \boxed{\beta = \frac{1}{2}}$$

① $\lambda = 3$ (multipl (algebr.) $= 4$)

$$J = \begin{pmatrix} J_1 & & & \\ & J_2 & & \\ & & J_3 & \\ & & & J_4 \end{pmatrix} \quad J_1 = J_2 = J_3 = J_4 = (3) \to r = 4$$

$$J = \begin{pmatrix} J_1 & & \\ & J_2 & \\ & & J_3 \end{pmatrix} \quad J_1 = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}, \; J_2 = J_3 = (3) \to r = 3$$

$$J = \begin{pmatrix} J_1 & \\ & J_2 \end{pmatrix} \; ; \; J_1 = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}, \; J_2 = (3) \to r = 2$$

$$J = (J_1) \; ; \; J_1 = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \to r = 1$$

$\dim \ker(A - 3I) = \dots = r$ en cada caso.

Todas las matrices iguales pero con los 1s en la diagonal inferior también son semejantes.