GEOMETRÍA II. RELACIÓN DE PROBLEMAS 2

TEMA 2: FORMAS BILINEALES Y MÉTRICAS

Curso 2020-21

1. Sea V un espacio vectorial de dimensión n sobre $\mathbb{R}$. Dadas dos formas lineales $\varphi, \psi \in V^*$ definimos su *producto tensorial* $\varphi \otimes \psi : V \times V \to \mathbb{R}$ como $(\varphi \otimes \psi)(u,v) = \varphi(u)\,\psi(v)$.

   a) Prueba que $\varphi \otimes \psi$ es bilineal.

   b) Prueba que las siguientes afirmaciones equivalen:

   c) Sea $B = \{v_1, \ldots, v_n\}$ una base de V y $B^* = \{\varphi_1, \ldots, \varphi_n\}$ su base dual. Demuestra que $B' = \{\varphi_i \otimes \varphi_j \,/\, i,j = 1, \ldots, n\}$ es una base de $\mathcal{B}(V)$.

   d) Describe la base B' cuando $V = \mathbb{R}^n$ y $B = B_u$.

2. Sea V un espacio vectorial de dimensión n sobre $\mathbb{R}$. Denotemos por $\mathcal{L}(V,V^*)$ al espacio vectorial de las aplicaciones lineales de V en su dual V^*. Se define $F : \mathcal{B}(V) \to \mathcal{L}(V,V^*)$ como $F(b)(u)(v) = b(u,v)$, $b \in \mathcal{B}(V)$, $u,v \in V$. Prueba que F está bien definida y que es un isomorfismo.

3. Sea V un espacio vectorial sobre $\mathbb{R}$. Dado un endomorfismo $f : V \to V$ y una formal bilineal $b : V \times V \to \mathbb{R}$, se define la aplicación $b_f : V \times V \to \mathbb{R}$ como $b_f(u,v) = b(f(u), f(v))$. Demuestra que b_f es una forma bilineal, que además es simétrica si lo es b.

4. Sean V_1 y V_2 dos espacios vectoriales reales. Consideremos el espacio producto $V = V_1 \times V_2$, donde la suma y el producto por escalares se realizan coordenada a coordenada. Dadas formas bilineales $b_i : V_i \times V_i \to \mathbb{R}$ definimos $b : V \times V \to \mathbb{R}$ como

   $$b\big((u_1,u_2),(v_1,v_2)\big) = b_1(u_1,v_1) + b_2(u_2,v_2).$$

   Demuestra que b es una forma bilineal sobre V, que además es simétrica si lo son b_1 y b_2.

5. Se considera la forma bilineal $b : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ dada por

   $$b((x,y,z),(x',y',z')) = xx' - 2yy' - 3zz' + 2xy' - 3yz'.$$

   a) Calcula $M(b, B_u)$. ¿Es b una métrica sobre $\mathbb{R}^3$?

   b) Utiliza la expresión matricial de b respecto a B_u para calcular $b((1,-2,1),(1,-2,4))$.

c) Se considera la base de $\mathbb{R}^3$ dada por $B = \{(1,0,0),(1,1,0),(1,1,1)\}$. Calcula $M(b,B)$ mediante la relación de congruencia.

d) Calcula $b(u,v)$, sabiendo que las coordenadas de u y v en la base B son $(1,-2,1)$ y $(2,1,2)$, respectivamente.

6. Sea V un espacio vectorial de dimensión tres, b una forma bilineal sobre V y $B = \{v_1, v_2, v_3\}$ una base de V. Sabiendo que

$$M(b,B) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & -1 \\ 3 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

a) Calcula $b(u,v)$ para $u = v_1 + v_3$ y $v = v_2 + 3v_3$.

b) ¿Existe algún vector $w \neq 0$ tal que $b(w,w) = 0$?

c) Calcula $M(b,B')$ siendo $B' = \{v_1 + v_2, v_1 - v_3, v_2\}$.

7. En el espacio vectorial $\mathbb{R}_3[x]$ se considera la aplicación $b : \mathbb{R}_3[x] \times \mathbb{R}_3[x] \to \mathbb{R}$ definida por

$$b(p(x),q(x)) = \int_0^1 p(x)q'(x)dx\ .$$

a) Comprueba que b es una forma bilineal.

b) Calcula $M(b,B)$ para $B = \{1, x, x^2, x^3\}$.

c) Consideremos la descomposición de b como suma de una métrica b_s y de una forma bilineal antisimétrica b_a. Calcula $M(b_s,B)$ y $M(b_a,B)$.

d) Calcula b_s y b_a sobre una pareja cualquiera de polinomios en $\mathbb{R}_3[x]$.

8. En el espacio vectorial $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ se considera la aplicación $b : \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \times \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ definida por

$$b(A,C) = \text{traza}(A \cdot C)\ .$$

a) Comprueba que b es una forma bilineal y simétrica.

b) Calcula $M(b,B)$ para B la base usual de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

9. Demuestra que si dos matrices cuadradas A y C son congruentes, entonces A es simétrica si y sólo si lo es C. Utilizar este hecho para encontrar dos matrices A y C que sean semejantes y no sean congruentes. ¿Son dos matrices congruentes necesariamente semejantes?

10. Sea ω_g la forma cuadrática asociada a una métrica g. Si sabemos que para dos vectores u y v se verifica que $\omega_g(u) = \omega_g(2v) = 2$ y $\omega_g(u+v) = 3$, ¿cuánto vale $g(u+v,v)$?

11. Sea g la métrica en $\mathbb{R}^3$ tal que

$$M(g,B_u) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

   a) Escribe la expresión de la forma cuadrática ω_g asociada a g sobre cualquier $v \in \mathbb{R}^3$.
   b) Calcula el rango, la nulidad y el radical de g. ¿Es g degenerada?
   c) Encuentra B base de $\mathbb{R}^3$ tal que $M(g,B)$ sea diagonal. Clasifica g como métrica.

12. En el espacio vectorial $\mathbb{R}_2[x]$ definimos la forma bilineal

$$g(a_0+a_1x+a_2x^2, b_0+b_1x+b_2x^2) = a_0b_0+a_0b_1+a_0b_2+a_1b_0+a_1b_2+3a_2b_1+2a_2b_2.$$

   a) Calcula $M(g,B_u)$, donde B_u es la base usual de $\mathbb{R}_2[x]$.
   b) Consideremos la descomposición de g como suma de una métrica g_s y de una forma bilineal antisimétrica g_a. Calcula $M(g_s,B_u)$, $M(g_a,B_u)$ y las expresiones de g_s y g_a sobre dos polinomios cualquiera en $\mathbb{R}_2[x]$.
   c) Estudia si g_s es degenerada y calcula su radical.
   d) Encuentra una base ortogonal de $\mathbb{R}_2[x]$ para g_s. Clasifica g_s como métrica.

13. Sea ω la forma cuadrática en $\mathbb{R}^3$ dada por

$$\omega(x,y,z) = 2x^2+2y^2+z^2+4xy+4xz+4yz.$$

Encuentra una base B de $\mathbb{R}^3$ tal que si (a,b,c) son las coordenadas de un vector v en esa base, $\omega(v) = a^2-b^2$.

14. Clasifica las métricas sobre $\mathbb{R}^3$ cuyas matrices respecto a la base usual vienen dadas, respectivamente, por

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 0 & -1 \\ 2 & -1 & 2 \end{pmatrix}, \qquad C = \begin{pmatrix} 14 & -2 & 7 \\ -2 & 2 & 1 \\ 7 & 1 & 6 \end{pmatrix}, \qquad D = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 1 & 3 & -1 \\ -1 & -1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Decide también si cualquier par de las matrices anteriores son congruentes.

15. Estudia si las matrices

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}, \qquad N = \begin{pmatrix} -3 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$

pueden representar a una misma métrica sobre $\mathbb{R}^2$. En caso afirmativo, encuentra una matriz regular P tal que $N = P^tMP$.

16. En el espacio vectorial $\mathbb{R}^3$ y para cada número real a fijo, se considera la métrica g_a asociada a la forma cuadrática dada por:

$$\omega_a(x,y,z) = x^2 + y^2 + 8z^2 + 2axz - 4ayz.$$

Clasifica g_a según los valores del parámetro a.

17. ¿Existen números reales x, y, z no todos nulos tales que $x^2 + y^2 + z^2 + 2xy = 0$? ¿Y cumpliendo $2x^2 + 2y^2 + 2z^2 + 2xy = 0$?

18. Calcula todas las soluciones en $\mathbb{R}^3$ a las ecuaciones:

a) $x^2 + 5y^2 + z^2 + 4xy + 2yz = 0$,

b) $3x^2 + y^2 - xy = 0$,

c) $x^2 + z^2 + 4xy + 2xz + 4yz = 0$.

19. Se considera la métrica $g : \mathbb{R}_2[x] \times \mathbb{R}_2[x] \to \mathbb{R}$ definida por

$$g(p(x), q(x)) = \int_{-1}^{1} p'(x)\, q'(x)\, dx,$$

donde $'$ representa la derivada respecto de x.

a) Calcula el radical de g.

b) Calcula el subespacio ortogonal a $\mathbb{R}_1[x]$ con respecto a g.

c) Encuentra una base ortogonal para g.

20. Se considera la métrica $g : M_2(\mathbb{R}) \times M_2(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ definida por:

$$g(A,C) = \operatorname{tr}(AC^t).$$

a) Prueba que g es no degenerada.

b) Calcula $A_2(\mathbb{R})^{\perp}$, siendo $A_2(\mathbb{R})$ el subespacio de las matrices antisimétricas.

c) Encuentra una base ortogonal para g formada por matrices simétricas y antisimétricas.

21. Para cada $a \in \mathbb{R}$ se considera la métrica g_a de $\mathbb{R}^3$ tal que

$$M(g_a, B_u) = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Clasifica la métrica g_a según el valor de a. En el caso $a = -1$ calcula la forma cuadrática asociada y encuentra una base del subespacio ortogonal al plano de ecuación $z = 0$.

22. Calcula el índice, el rango y clasifica, en función del parámetro $a \in \mathbb{R}$, la métrica g_a en $\mathbb{R}^3$ cuya forma cuadrática asociada está dada por

$$\omega_a(x,y,z) = x^2 + y^2 + az^2 + 2axz - 4ayz.$$

23. Sea g la métrica de $\mathbb{R}^4$ cuya matriz en la base usual es

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Encuentra una base ortonormal para g del plano de ecuaciones $x+y=0$, $z+t=0$.

24. En $\mathbb{R}^3$ se considera el plano U de ecuación $y-z=0$ y la recta $W = L(\{(1,1,-1)\})$. Encuentra la expresión de una métrica g en $\mathbb{R}^3$ cuyo radical sea W y cuya restricción a U sea lorentziana.

25. En el espacio vectorial $\mathbb{R}_2[x]$ de polinomios de grado menor o igual que dos, y para cada número real m fijo, se considera la métrica g_m dada por

$$g_m(p(x),q(x)) = p(m)q(m)\ .$$

   a) Calcula una base del radical de g_m, una base ortonormal de $(\mathbb{R}_2[x], g_m)$, el rango y el índice de g_m. Clasifica g_m.

   b) Determina si para $m=1$ existe una base B de $\mathbb{R}_2[x]$ tal que $M(g_1,B)$ es la matriz cuyas entradas son todas iguales a 1.

26. En $\mathbb{R}^2$ se consideran las métricas g_1, g_2 y g_3 que vienen representadas, en la base canónica, por las siguientes matrices:

$$G_1 = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \quad G_2 = \begin{pmatrix} -4 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \quad G_3 = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}.$$

¿Son los planos $(\mathbb{R}^2, g_1)$, $(\mathbb{R}^2, g_2)$ y $(\mathbb{R}^2, g_3)$ isométricos entre sí? En caso afirmativo construye una isometría.

27. En $\mathbb{R}^4$ se considera g la métrica representada, en la base canónica por la matriz

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 3 & -3 \\ -1 & 0 & -3 & 4 \end{pmatrix}.$$

a) Calcula su radical.

b) Calcula una base ortonormal de $(\mathbb{R}^4, g)$.

c) Encuentra una base ortonormal del hiperplano de ecuación $x_1 = 0$ con la métrica inducida por g.

d) Encuentra una base ortonormal del hiperplano de ecuación $x_1 + x_2 = 0$ con la métrica inducida por g.

e) ¿Son isométricos los hiperplanos anteriores?

28. Para cada $a \in \mathbb{R}$ se considera la métrica g_a de $\mathbb{R}^3$ cuya forma cuadrática asociada está dada por
$$\omega_a(x,y,z) = ax^2 + ay^2 + (a-1)z^2 + 2xy \, .$$

a) Calcula el índice, el rango y clasifica la métrica g_a según el valor de a.

b) En el caso $a = -1$ calcula una base ortonormal para g_{-1}.

c) En el caso $a = 2$ encuentra una base del subespacio ortogonal al plano de ecuación $y - 2z = 0$.

d) En el caso $a = 0$, ¿es posible encontrar dos vectores luminosos linealmente independientes?

e) ¿Son $(\mathbb{R}^3, g_1)$ y $(\mathbb{R}^3, g_{-1})$ isométricos? ¿Son $(\mathbb{R}^3, g_0)$ y $(\mathbb{R}^3, g_{\frac{1}{2}})$ isométricos? En caso afirmativo construye una isometría.

29. En $\mathbb{R}^3$ sea $U = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x = 0\}$ y $W = L(\{(1,-1,1)\})$. Calcula, si es posible, una métrica g y la expresión matricial $M(g, B_u)$ en cada uno de los siguientes casos:

a) $\mathrm{Rad}(g) = U$ y $g_{|W}$ es definida positiva.

b) $\mathrm{Rad}(g) = W$ y $g_{|U}$ es definida negativa.

c) $U^{\perp} = U$.

d) $W^{\perp} = W$ y g no degenerada.

e) $U^{\perp} = W$, g no degenerada e índice$(g) = 2$. Si esta métrica existe da una base ortonormal para (V, g) y para (U, g_U).

30. Responde de forma razonada si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas:

a) ¿Es bilineal la aplicación $g : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ dada por $g((x,y),(x',y')) = xy$?

b) Toda forma bilineal $g : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es de la forma $g(x,y) = axy$ con $a \in \mathbb{R}$.

c) Si dos matrices cuadradas son congruentes, entonces tienen la misma traza. ¿Deben tener el mismo determinante?

d) En $\mathbb{R}^2$ existe una métrica tal que $(L(\{(2,1)\}))^\perp = L(\{(2,1)\})$.

e) Sea V un espacio vectorial real y g una métrica en V. Supongamos que en la diagonal de $M(g,B)$ respecto de una cierta base B existen dos números a y b con $ab < 0$. Entonces g es indefinida.

f) Si una métrica sobre $\mathbb{R}^2$ está representada en una cierta base por una matriz con determinante negativo entonces se trata de una métrica lorentziana.

g) Sea V un espacio vectorial real de dimensión tres y g una métrica. Supongamos que existen vectores $u,v \in V$ linealmente independientes, ortogonales entre sí y luminosos. Entonces, g es degenerada.

h) Sea V un espacio vectorial real y g una métrica. Si todos los elementos diagonales de la matriz de g en una cierta base B son negativos, entonces g es definida negativa.

i) Toda métrica indefinida sobre un espacio vectorial real tiene vectores luminosos no nulos.

j) Dos vectores perpendiculares y no nulos de una métrica g son linealmente independientes. ¿Y si alguno de los dos vectores no es luminoso?

k) Si g es una métrica semidefinida, entonces un vector $v \in V$ es luminoso si y sólo si está en el radical de g. ¿Y si g es degenerada pero no semidefinida?

l) En $\mathbb{R}^3$ con la métrica $g_{2,1}$ un plano vectorial de ecuación $ax+by+cz=0$ es degenerado si y sólo si $g(v,v)=0$, donde $v=(a,b,c)$.

m) Existe en $\mathbb{R}^4$ una métrica no degenerada tal que $g_{|U}=0$ y $g_{|V}=0$ donde $U = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 \mid x+y=0,\ z+t=0\}$ y $V = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 \mid x-y=0,\ z-t=0\}$.

n) Dadas M y N dos matrices simétricas de orden 20 y de rango 1 se tiene que M y N son congruentes si y sólo si $\mathrm{traza}(M)\cdot\mathrm{traza}(N) > 0$.

ñ) Dado (V,g) un espacio vectorial métrico tal que para todo subespacio U de V se tiene $\dim(V) = \dim(U) + \dim(U^\perp)$ entonces g es no degenerada.

o) Una matriz simétrica A es semidefinida positiva si y sólo si existe una matriz cuadrada Q tal que $A = Q^t \cdot Q$.

p) Si (V,g) es un espacio vectorial métrico tal que para todo subespacio U de V de dimensión mayor o igual que 1 se tiene $\dim(V) = \dim(U) + \dim(U^\perp)$, entonces g es no degenerada.

q) Existe una métrica degenerada en $\mathbb{R}^4$ tal que el ortogonal a la recta generada por el vector $v = (1,1,1,1)$ es la propia recta.