

Cirkulantne matrike

Amanda Babnik, Manca Kavčič
Fakulteta za matematiko in fiziko

23. oktober 2025

Povzetek

Kratek povzetek poročila (cilji, metode, glavni rezultati). Naj bo 3–6 stavkov.

1 Cirkulantne matrike

1.1 Definicija

Cirkulantna matrika je posebna vrsta kvadratne matrike, pri kateri je vsaka vrstica dobljena s **cikličnim premikom** elementov prejšnje vrstice za eno mesto v desno. Podrobne definicije in izpeljave lastnosti so opisane v [1, 2, 5].

Če je prva vrstica matrike

$$(c_0, c_1, c_2, \dots, c_{n-1}),$$

potem ima splošna $n \times n$ cirkulantna matrika obliko:

$$C = \begin{pmatrix} c_0 & c_1 & c_2 & \cdots & c_{n-1} \\ c_{n-1} & c_0 & c_1 & \cdots & c_{n-2} \\ c_{n-2} & c_{n-1} & c_0 & \cdots & c_{n-3} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ c_1 & c_2 & c_3 & \cdots & c_0 \end{pmatrix}.$$

Vsaka cirkulantna matrika je torej popolnoma določena s svojo prvo vrstico.

1.2 Lastnosti cirkulantnih matrik

- Cirkulantne matrike tvorijo podprostor prostora vseh $n \times n$ matrik [2].
- Produkt, vsota in potenca cirkulantnih matrik so spet cirkulantne matrike.
- Vse cirkulantne matrike imajo iste lastne vektorje; razlikujejo se le po lastnih vrednostih [1].

1.3 Lastni vektorji in lastne vrednosti

Ena najpomembnejših lastnosti cirkulantnih matrik je, da so njihove lastne vrednosti in vektorji tesno povezani z diskretno Fourierjevo transformacijo (DFT), kar poudarjata [5, 4].

Naj bo $\omega_n = e^{\frac{2\pi i}{n}}$ primitivna n -ta korenina enote.
Za $k = 0, 1, \dots, n-1$ definiramo lastne vektorje:

$$x^{(k)} = \begin{pmatrix} 1 \\ \omega_n^k \\ \omega_n^{2k} \\ \vdots \\ \omega_n^{(n-1)k} \end{pmatrix}.$$

Lastne vrednosti λ_k dobimo kot diskretno Fourierjevo transformacijo prve vrstice matrike:

$$\lambda_k = \sum_{j=0}^{n-1} c_j \omega_n^{jk}, \quad k = 0, 1, \dots, n-1.$$

S tem lahko vsako cirkulantno matriko zapišemo v diagonalni obliki:

$$C = F^{-1} \Lambda F,$$

kjer je F Fourierjeva matrika z elementi

$$F_{jk} = \omega_n^{jk}, \quad 0 \leq j, k \leq n-1,$$

in $\Lambda = \text{diag}(\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_{n-1})$.

Fourierjeva matrika F je unitarna:

$$F^{-1} = \frac{1}{n} F^H,$$

kar pomeni, da imajo cirkulantne matrike **ortogonalne lastne vektorje** [2, 3].

1.4 Povezava s Fourierjevo transformacijo

Iz zgornjih rezultatov sledi, da je množenje vektorja x s cirkulantno matriko C ekvivalentno **konvoluciji** med prvim stolpcem matrike in vektorjem x :

$$Cx = c * x,$$

kar pomeni, da se lahko takšne operacije izvedejo učinkovito z uporabo **hitre Fourierjeve transformacije (FFT)** v času $O(n \log n)$ [3].

1.5 Opomba

Če so elementi prve vrstice c_j realni, potem se lastne vrednosti pojavijo v konjugiranih parih, torej $\lambda_k = \overline{\lambda_{n-k}}$. Realni in imaginarni deli lastnih vektorjev ustrezajo diskretni kosinusni in sinusni transformaciji (DCT, DST) [5, 4].

1.6 Primer

Oglejmo si cirkulantno matriko reda 4 z prvo vrstico

$$(c_0, c_1, c_2, c_3) = (2, -1, 0, -1).$$

Dobimo:

$$C = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & -1 \\ -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 \\ -1 & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Za $n = 4$ velja $\omega_4 = e^{\frac{2\pi i}{4}} = i$. Lastne vrednosti so:

$$\begin{aligned} \lambda_0 &= 2 + (-1) + 0 + (-1) = 0, \\ \lambda_1 &= 2 - i(1) + 0 + i(1) = 2, \\ \lambda_2 &= 2 - (-1) + 0 - (-1) = 4, \\ \lambda_3 &= 2 + i(1) + 0 - i(1) = 2. \end{aligned}$$

Torej so lastne vrednosti matrike C :

$$\lambda = (0, 2, 4, 2).$$

Pripadajoči lastni vektorji so stolpci Fourierjeve matrike:

$$F = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & i & -1 & -i \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -i & -1 & i \end{pmatrix}.$$

Zato velja:

$$C = F^{-1} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} F.$$

S tem je matrika diagonalizirana, kar potrjuje, da imajo vse cirkulantne matrike enake lastne vektorje (Fourierjevo bazo), njihove lastne vrednosti pa ustrezajo diskretni Fourierjevi transformaciji prve vrstice [2, 3].

Literatura

- [1] Philip J. Davis. *Circulant Matrices*. Chelsea Publishing Company, New York, 2nd edition, 1994. Classic monograph on circulant and related matrices, covering theory and applications.
- [2] Robert M. Gray. *Toeplitz and Circulant Matrices: A Review*. Now Publishers Inc., Stanford, USA, 2006. Comprehensive review of Toeplitz and Circulant matrices with applications in stochastic processes.
- [3] M. Hariprasad and Murugesan Venkatapathi. Circulant decomposition of a matrix and the eigenvalues of toeplitz type matrices. *Applied Mathematics and Computation*, 468:128473, 2024.
- [4] G. Kumar and N. Singh. A computation perspective for the eigenvalues of circulant matrices. *International Journal of Scientific Research and Review*, 8(2):1086–1094, 2019.

- [5] Dhashna T. Pillai and Briji J. Chathely. A study on circulant matrices and its application in solving polynomial equations and data smoothing. *International Journal of Mathematics Trends and Technology (IJMTT)*, 66(6):275–281, 2020.