Análise Estatística de dados

Inteligência Artificial

PECE Programa de Educação Continuada
Escola Politécnica da USP

USP

AULA 03 – NOÇÕES DE ÁLGEBRA LINEAR E GEOMETRIA ANALÍTICA

Arturo Forner-Cordero
Larissa Driemeier

PROGRAMA DO CURSO

Aula	Data	Conteúdo da Aula
01	27/02	Aula Inaugural
02	05/03	Introdução ao Curso. Noções de Álgebra Linear , Geometria Analítica Parte I
03	12/03	Noções de Álgebra Linear , Geometria Analítica Parte II
04	19/03	Decomposição de valor singular (SVD)
05	26/03	Otimização: derivadas, derivadas parciais (operadores gradiente, Jacobiano, Hessiano e Laplaciano), algoritmos de gradiente
06	02/04	Variáveis independentes e não independentes. Estatística Descritiva e Indutiva. Definições de medidas de dispersão e tendência central.
07	09/04	Probabilidade e Teorema de Bayes
08	16/04	Modelos de probabilidade discretos
09	23/04	Modelos de probabilidade contínuos
10	30/04	Modelo de Markov. Modelo de Markov oculto.

CARDAPIO DE HOJE

- Dependencia linear e span: Base de um espaço vetorial
- Sistema linear de equações $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{b}$
- Determinantes
- Autovalores e autovetores

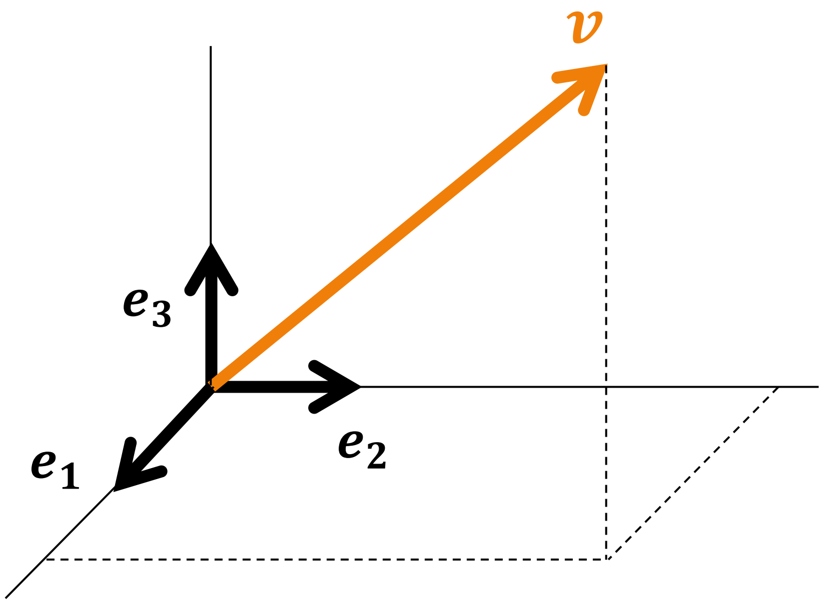
DEPENDÊNCIA LINEAR E SPAN

COMBINAÇÃO LINEAR

$$c_1\boldsymbol{e}_1 + c_2\boldsymbol{e}_2 + \cdots + c_n\boldsymbol{e}_n = \boldsymbol{v}$$

Vejam que $\boldsymbol{v}$ é uma combinação linear dos vetores $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2 \cdots \boldsymbol{e}_n$.

O vetor nulo sempre pode ser escrito como a combinação linear de n vetores $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2 \cdots \boldsymbol{e}_n$ porque $\sum_{i=1}^{n} 0\boldsymbol{e}_i = \boldsymbol{0}$ é sempre verdadeira.



COMBINAÇÃO LINEAR E SPAN

Dois vetores 2D quaisquer:

$$\boldsymbol{u} = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix} \qquad \boldsymbol{v} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

a combinação linear entre eles é dada por,

$$a\boldsymbol{u} + b\boldsymbol{v} = a\begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix} + b\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

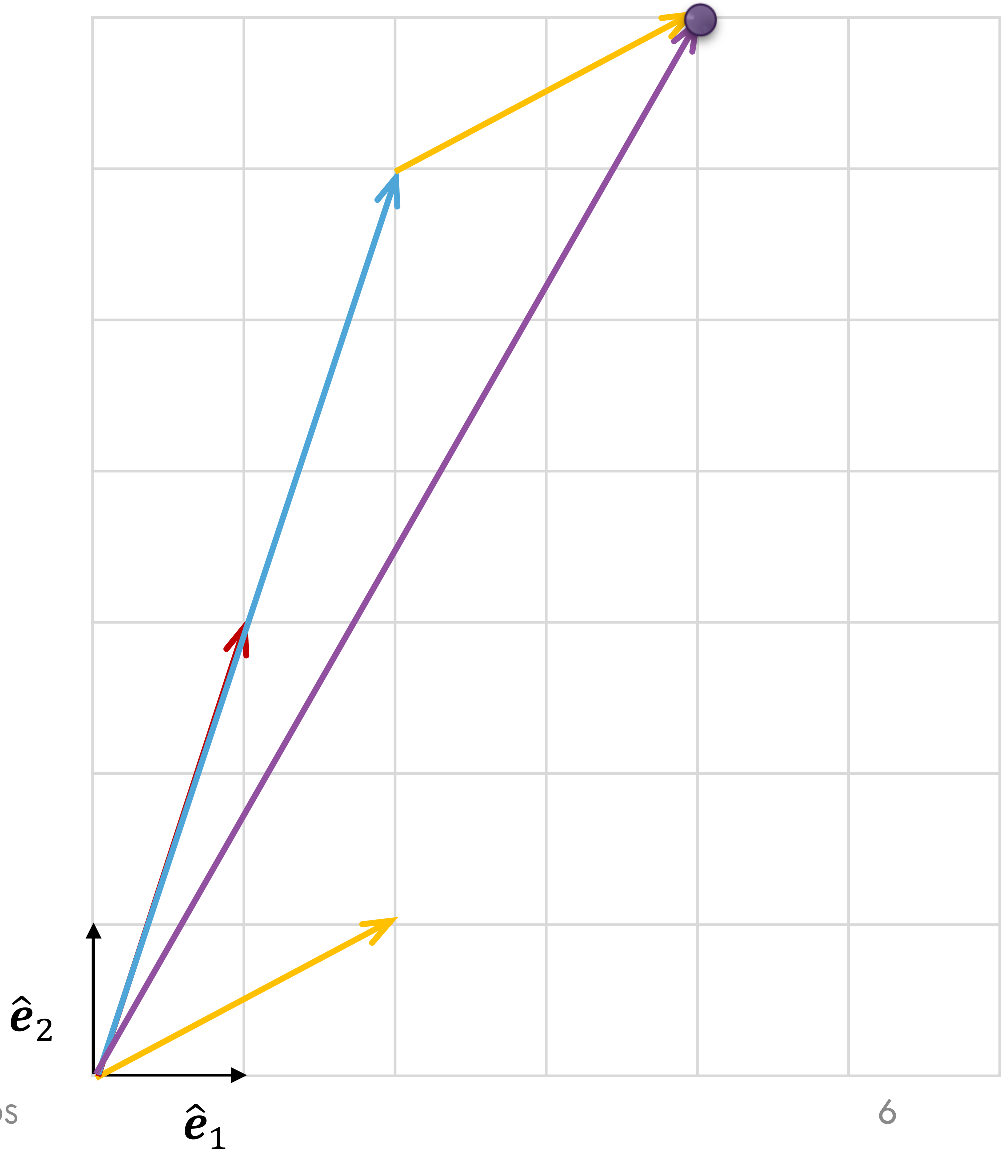
Se $a = 2, b = 1$:

$$2\boldsymbol{u} + 1\boldsymbol{v} = 2\begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix} + 1\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 7 \end{bmatrix}$$

Pense em todos os pontos que você pode alcançar com a combinação entre $\boldsymbol{u}$ e $\boldsymbol{v}$, alterando a e b. Este conjunto de pontos é o span do conjunto de vetores $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}$.

$$51\,\boldsymbol{u} + 76\,\boldsymbol{v}$$

$$-\frac{1}{1000}\boldsymbol{u} + \pi^6\,\boldsymbol{v}$$



INDEPENDÊNCIA LINEAR

Matematicamente, para que um conjunto de vetores $\boldsymbol{v}_i$ seja linearmente independente, em um espaço n-dimensional, a expressão

$$c_1\boldsymbol{v}_1 + c_2\boldsymbol{v}_2 + \ldots + c_n\boldsymbol{v}_n = 0$$

deve ser possível apenas se todos os fatores lineares c_i forem 0.

Em resumo, qualquer vetor não pode ser expresso como uma combinação linear de outros.

Matricialmente...

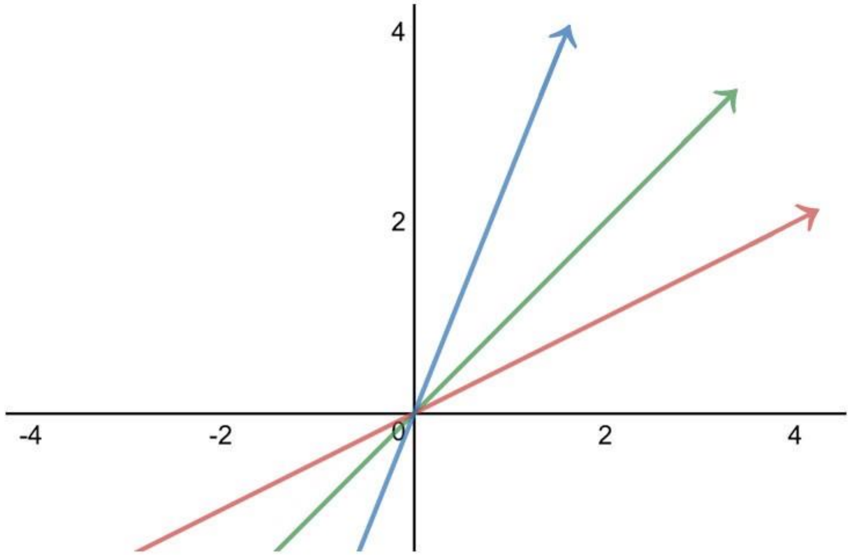
$$\boldsymbol{V}\boldsymbol{c} = \begin{bmatrix} | & | & & | \\ \boldsymbol{v}_1 & \boldsymbol{v}_2 & \cdots & \boldsymbol{v}_n \\ | & | & & | \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{v}_1 \end{bmatrix} c_1 + \begin{bmatrix} \boldsymbol{v}_2 \end{bmatrix} c_2 + \cdots + \begin{bmatrix} \boldsymbol{v}_n \end{bmatrix} c_n = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$$

se e somente se $\boldsymbol{c}^T = [0 \quad 0 \quad \ldots \quad 0]$.

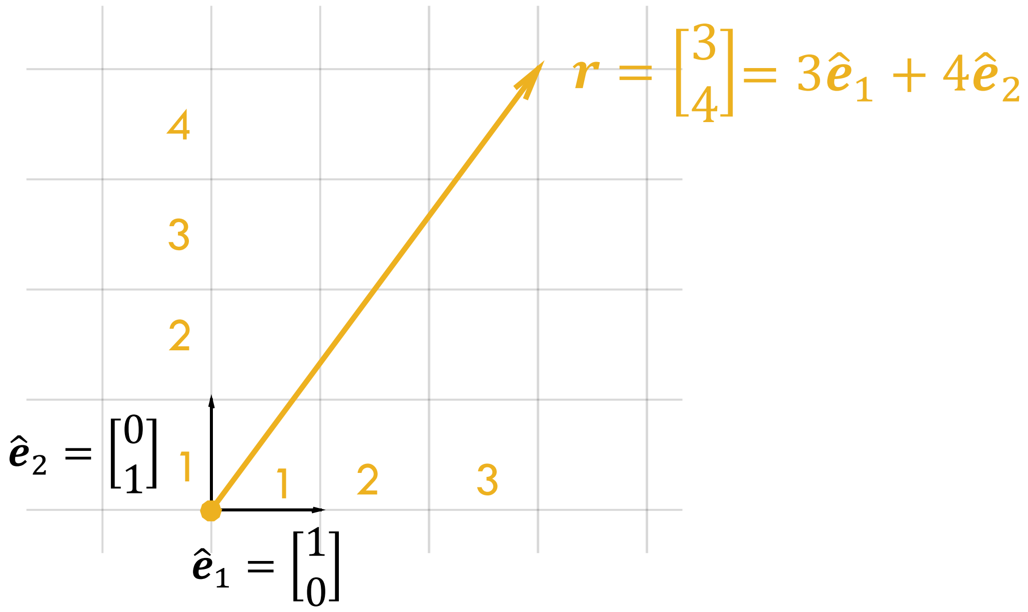
A independência linear é um dos conceitos mais importantes da álgebra linear. Intuitivamente, um conjunto de vetores linearmente independentes consiste em vetores que não possuem redundância, ou seja, se retirarmos algum desses vetores do conjunto, perderemos algo.

ESPAÇO COMPOSTO DE VETORES LI

Um espaço n-dimensional não pode ter mais que n vetores linearmente independentes.



BASE DE UM CONJUNTO DE VETORES



Base de vetores (bidimensional) de nosso sistema de coordenadas.

Diz-se que n vetores formam uma base para um conjunto de vetores de dimensão n se:

- Não são uma combinação linear entre eles
- Abrangem todo o espaço n-dimensional (todo span).

Se você colocar esses vetores de base em uma matriz, você terá a seguinte matriz identidade:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

PORTANTO...

A base é um sistema de coordenadas usado para descrever espaços vetoriais (conjuntos de vetores). É uma referência que você usa para associar números a vetores geométricos.

Cada vetor no espaço é uma combinação única dos vetores de base.

A dimensão de um espaço é definida como o tamanho de um conjunto de base. Por exemplo, existem dois vetores de base em $\mathbb{R}^2$ (correspondendo aos eixos x e y no plano cartesiano), ou três em $\mathbb{R}^3$.

PECE Programa de Educação Continuada
Escola Politécnica da USP

SISTEMA LINEAR DE EQUAÇÕES

$$Ax = b$$

SISTEMAS LINEARES DE EQUAÇÕES

Resolva o sistema:

$$3x_1 + 7x_2 = 27$$
$$5x_1 + 2x_2 = 16$$

Em outras palavras, encontre x_1 e x_2 que satisfazem ambas as equações.

Um sistema de equações pode ser composto por várias equações.

De forma genérica,

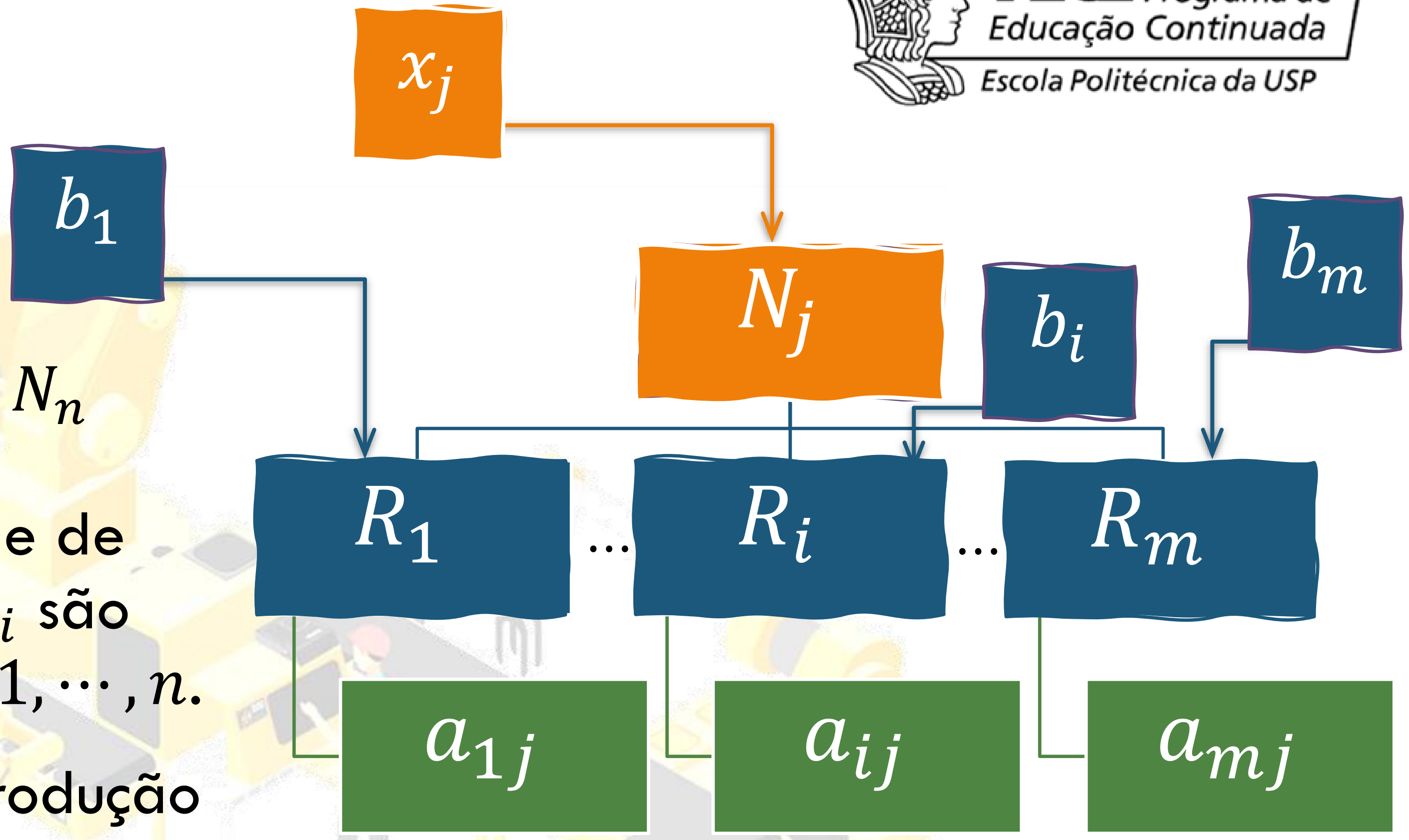
$$\begin{gathered} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{gathered}$$

Resolver esse sistema equivale encontrar os valores de x_i que satisfaçam todas as equações simultaneamente.

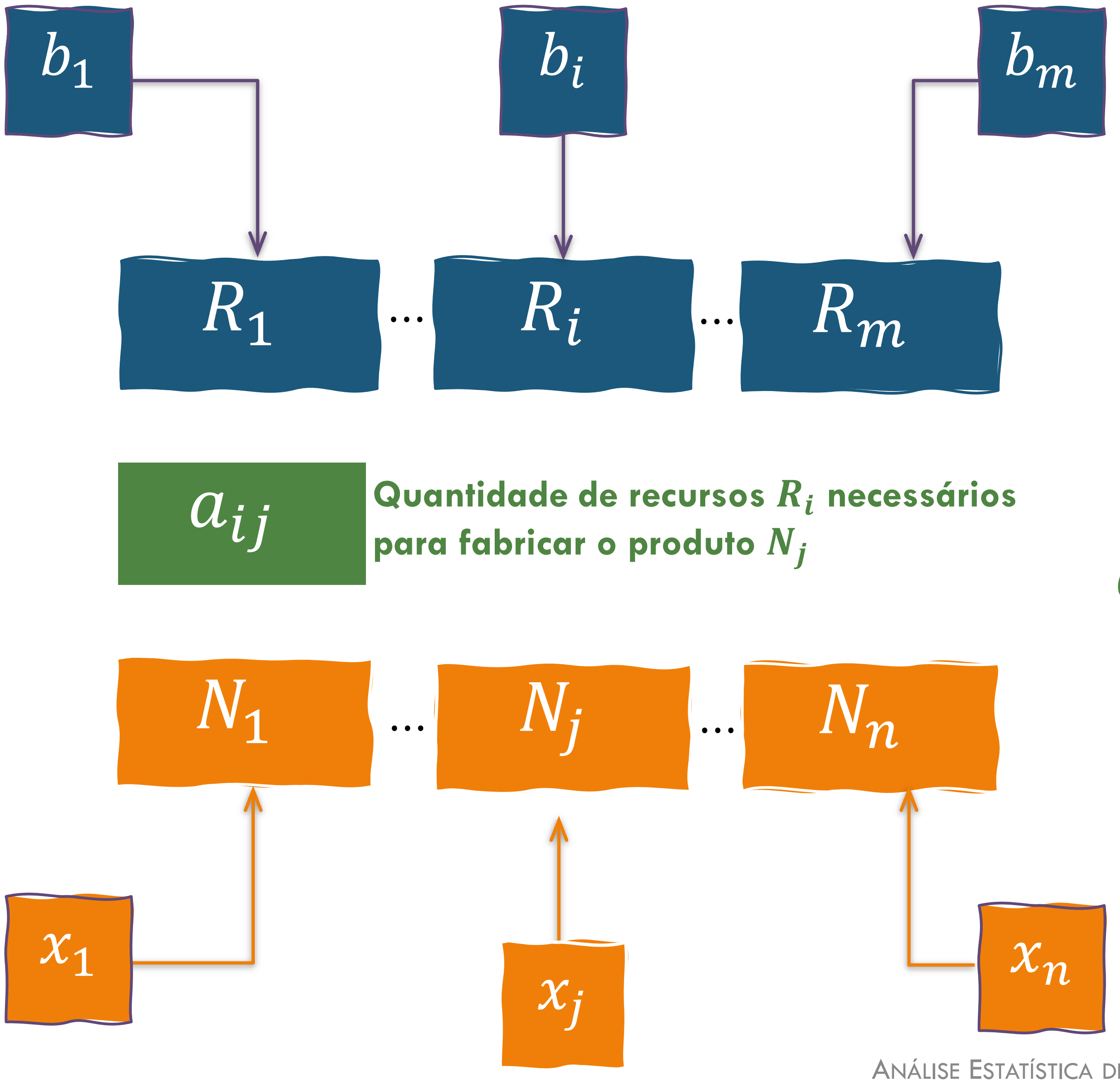
MOTIVAÇÃO...

Uma empresa produz produtos $N_1, \cdots, N_n$ para quais recursos $R_1, \cdots, R_m$ são necessários. Para produzir uma unidade de produto N_j, a_{ij} unidades de recurso R_i são necessárias, onde $i = 1, \cdots, m$ e $j = 1, \cdots, n$.

O objetivo é encontrar um plano de produção ideal, ou seja, um plano de quantas unidades x_j do produto N_j devem ser produzidas se um total de b_i unidades de recursos R_i estiverem disponíveis e (idealmente) nenhum recurso sobrar.



$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \cdots + a_{in}x_n = b_i$$



Quantidade de produtos N_2 fabricados

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \cdots + a_{in}x_n = b_i$$

Quantidade de recursos R_i necessários para fabricar o produto N_2

ENTÃO...

Um plano de produção ideal $x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R}^n$, portanto, deve satisfazer o seguinte sistema de equações:

$$
\begin{gathered}
a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\
a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\
\vdots \\
a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m
\end{gathered}
$$

onde $a_{ij} \in \mathbb{R}$ e $b_i \in \mathbb{R}$.

Qualquer ***tupla*** de dimensão n $(x_1, \cdots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ que satisfaça o conjunto de equações acima é a solução do *sistema de equações linear*.

E AGORA: COMO SE RESOLVE UM SISTEMA DE EQUAÇÕES LINEARES?

$$
\begin{aligned}
a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 &= b_1\\
a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 &= b_2\\
a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 &= b_3
\end{aligned}
$$

$$
\begin{array}{ccccccc}
x_1 & + & x_2 & + & x_3 & = & 3\\
x_1 & - & x_2 & + & 2x_3 & = & 2\\
2x_1 & & & + & 3x_3 & = & 1
\end{array}
$$

Não existe Solução – o sistema é inconsistente!

$$
\begin{array}{ccccccc}
x_1 & + & x_2 & + & x_3 & = & 3\\
x_1 & - & x_2 & + & 2x_3 & = & 2\\
 & & x_2 & + & x_3 & = & 2
\end{array}
$$

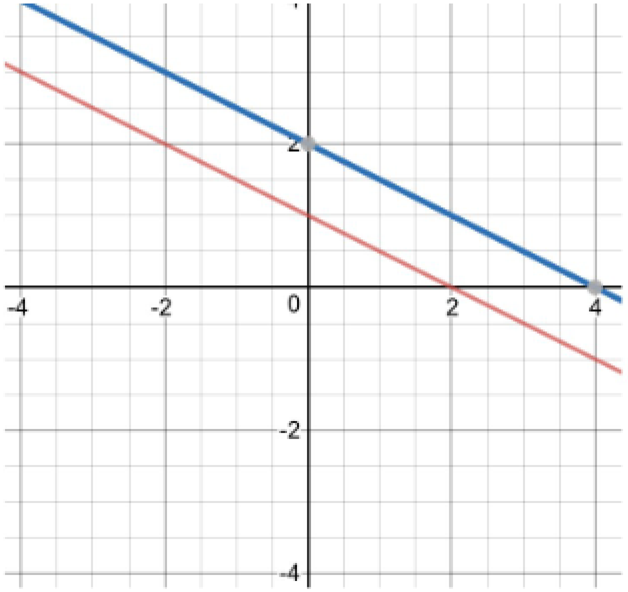
Solução única $(1;\ 1;\ 1)$!

$$
\begin{array}{ccccccc}
x_1 & + & x_2 & + & x_3 & = & 3\\
x_1 & - & x_2 & + & 2x_3 & = & 2\\
2x_1 & & & + & 3x_3 & = & 5
\end{array}
$$

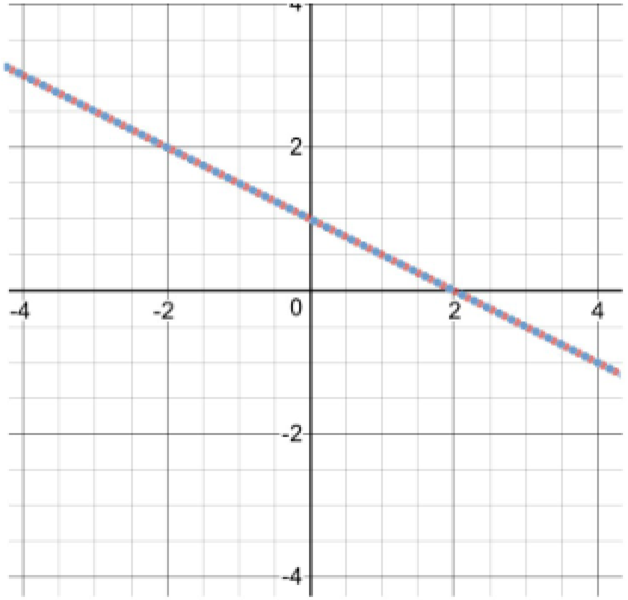
Múltiplas soluções – o sistema é dependente:

$$\left(\frac{5}{2} - \frac{3}{2}a; \frac{1}{2} - \frac{1}{2}a; a\right) a \in \mathbb{R}$$

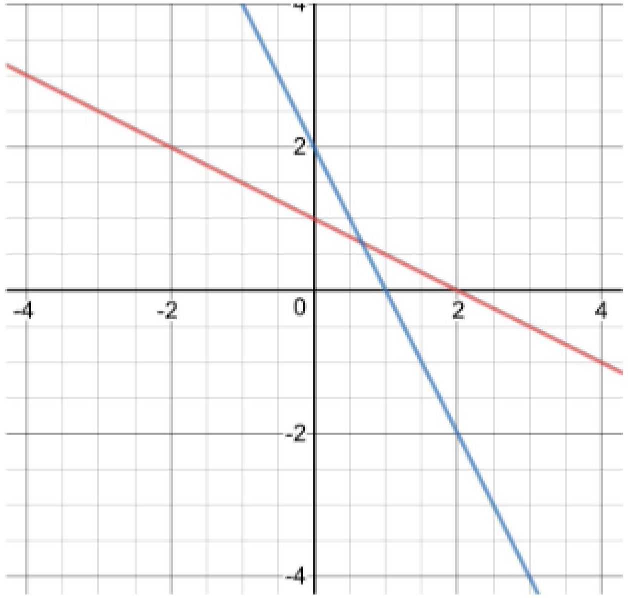
QUANDO $m = n$



$$x + 2y = 2$$
$$2x + 4y = 8$$
$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 8 \end{bmatrix}$$



$$x + 2y = 2$$
$$2x + 4y = 4$$
$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \end{bmatrix}$$



$$x + 2y = 2$$
$$2x + y = 2$$
$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix}$$

Duas linhas não podem se cruzar mais de uma vez, mas podem ser paralelas ou sobrepostas

RANK

O ***rank*** mede a independência linear de uma matriz. O rank de uma matriz é igual ao número de linhas ou colunas independentes.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 8 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 15 & 18 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ &\vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n &= b_m \end{aligned}$$

Vetor $\boldsymbol{a_2}$... Vetor $\boldsymbol{a_n}$...

$$\begin{bmatrix} a_{11} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{bmatrix} x_1 + \boxed{\begin{bmatrix} a_{12} \\ \vdots \\ a_{m2} \end{bmatrix}} x_2 + \cdots + \boxed{\begin{bmatrix} a_{1n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{bmatrix}} x_n = \boxed{\begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}}$$

Vetor $\boldsymbol{b}$...

Graficamente, temos que viajar desde a origem (zero em todas as dimensões) até o ponto de coordenadas $\boldsymbol{b}$. Os vetores $\boldsymbol{a}$ nos dão as direções pelas quais podemos viajar e seus pesos x_i são o comprimento do caminho nessa direção.

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1$$
$$\vdots$$
$$a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m$$

Matriz ***A***...

$$\iff \boxed{\begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}} \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$$

$$\boldsymbol{v} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} | & | & & | \\ \boldsymbol{a}_1 & \boldsymbol{a}_2 & \cdots & \boldsymbol{a}_n \\ | & | & & | \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{a}_1 \end{bmatrix} x_1 + \begin{bmatrix} \boldsymbol{a}_2 \end{bmatrix} x_2 + \cdots + \begin{bmatrix} \boldsymbol{a}_n \end{bmatrix} x_n$$

$$\begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{b}$$

Portanto, as colunas de $\boldsymbol{A}$ nos dão as direções pelas quais podemos viajar e seus pesos $(\boldsymbol{x})$ são o comprimento do caminho em cada direção.

O número de colunas de $\boldsymbol{A}$ é o número de dimensões do nosso espaço vetorial.

O número de soluções do nosso sistema linear corresponde ao número de maneiras pelas quais podemos alcançar $\boldsymbol{b}$ percorrendo nossas n dimensões.

$$\boldsymbol{A^{-1}Ax} = \boldsymbol{A^{-1}b}$$

$$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{A^{-1}b}$$

O PROBLEMA É ACHAR A INVERSA DE $\boldsymbol{A}$

Supondo $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 4 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 4 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} = \boldsymbol{I} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

VAMOS POR ETAPAS...

A chave para resolver este problema está nas transformações elementares que não mudam a solução, mas que transformam o sistema de equações em uma forma mais simples:

- Troca de duas equações (linhas na matriz representando o sistema de equações)
- Multiplicação de uma equação (linha) por uma constante $\lambda \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$
- Adição de duas equações (linhas)

METODOLOGIA TRADICIONAL DE SUBSTITUIÇÃO REVERSA

$$\begin{pmatrix}1 & 1 & 3\\ 1 & 2 & 4\\ 1 & 1 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a_{11} & a_{12} & a_{13}\\ a_{21} & a_{22} & a_{23}\\ a_{31} & a_{32} & a_{33}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

3ª=2ª-3ª
$$\begin{pmatrix}1 & 1 & 3\\ 1 & 2 & 4\\ 0 & 1 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a_{11} & a_{12} & a_{13}\\ a_{21} & a_{22} & a_{23}\\ a_{31} & a_{32} & a_{33}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 1 & -1\end{pmatrix}$$

2ª = 2ª-1ª
$$\begin{pmatrix}1 & 1 & 3\\ 0 & 1 & 1\\ 0 & 1 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a_{11} & a_{12} & a_{13}\\ a_{21} & a_{22} & a_{23}\\ a_{31} & a_{32} & a_{33}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ -1 & 1 & 0\\ 0 & 1 & -1\end{pmatrix}$$

3ª=3ª-2ª
$$\begin{pmatrix}1 & 1 & 3\\ 0 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a_{11} & a_{12} & a_{13}\\ a_{21} & a_{22} & a_{23}\\ a_{31} & a_{32} & a_{33}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ -1 & 1 & 0\\ 1 & 0 & -1\end{pmatrix}$$

2ª=2ª-3ª
$$\begin{pmatrix}1 & 1 & 3\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a_{11} & a_{12} & a_{13}\\ a_{21} & a_{22} & a_{23}\\ a_{31} & a_{32} & a_{33}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ -2 & 1 & 1\\ 1 & 0 & -1\end{pmatrix}$$

1ª=1ª-2ª-3 x 3ª
$$\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a_{11} & a_{12} & a_{13}\\ a_{21} & a_{22} & a_{23}\\ a_{31} & a_{32} & a_{33}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & -1 & 2\\ -2 & 1 & 1\\ 1 & 0 & -1\end{pmatrix}$$

OBVIAMENTE...

```python
import numpy as np
#Matriz 3x3
A = np.array([[1,1,3],
              [1,2,4],
              [1,1,2]])


# Inversa
print(np.linalg.inv(A))
```

```
[[ 0. -1.  2.]
 [-2.  1.  1.]
 [ 1. -0. -1.]]
```

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 \\ -2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 \\ -2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

PORTANTO...

$$
\begin{aligned}
a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 &= b_1 \\
a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 &= b_2 \\
a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 &= b_3
\end{aligned}
$$

$$
\begin{array}{rcrcrcr}
x_1 & + & x_2 & + & x_3 & = & 3 \\
x_1 & - & x_2 & + & 2x_3 & = & 2 \\
2x_1 & & & + & 3x_3 & = & 1
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{rcrcrcr}
x_1 & + & x_2 & + & x_3 & = & 3 \\
x_1 & - & x_2 & + & 2x_3 & = & 2 \\
 & & x_2 & + & x_3 & = & 2
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{rcrcrcr}
x_1 & + & x_2 & + & x_3 & = & 3 \\
x_1 & - & x_2 & + & 2x_3 & = & 2 \\
2x_1 & & & + & 3x_3 & = & 5
\end{array}
$$

DESSA FORMA, PODEMOS RESOLVER O PROBLEMA DIRETAMENTE

$$\begin{array}{ccccccc} x_1 & + & x_2 & + & x_3 & = & 3 \\ x_1 & - & x_2 & + & 2x_3 & = & 2 \\ & & x_2 & + & x_3 & = & 2 \end{array} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{A}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \times 1 + 2 \times 0 + 2 \times (-1) \\ 3 \times \frac{1}{3} + 2 \times \left(-\frac{1}{3}\right) + 2 \times \frac{1}{3} \\ 3 \times \left(-\frac{1}{3}\right) + 2 \times \frac{1}{3} + 2 \times \frac{2}{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

TREINO

Resolva o sistema:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

E OS OUTROS DOIS PROBLEMAS?

$$\begin{array}{ccccccc} x_1 & + & x_2 & + & x_3 & = & 3 \\ x_1 & - & x_2 & + & 2x_3 & = & 2 \\ 2x_1 & & & + & 3x_3 & = & 5 \end{array}$$

Múltiplas soluções:

$$\left(\frac{5}{2} - \frac{3}{2}a; \frac{1}{2} - \frac{1}{2}a; a\right) a \in \mathbb{R}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \\ 2 & 0 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{array}{ccccccc} x_1 & + & x_2 & + & x_3 & = & 3 \\ x_1 & - & x_2 & + & 2x_3 & = & 2 \\ 2x_1 & & & + & 3x_3 & = & 1 \end{array}$$

Não existe Solução!

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \\ 2 & 0 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \\ 2 & 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

PECE Programa de Educação Continuada
Escola Politécnica da USP

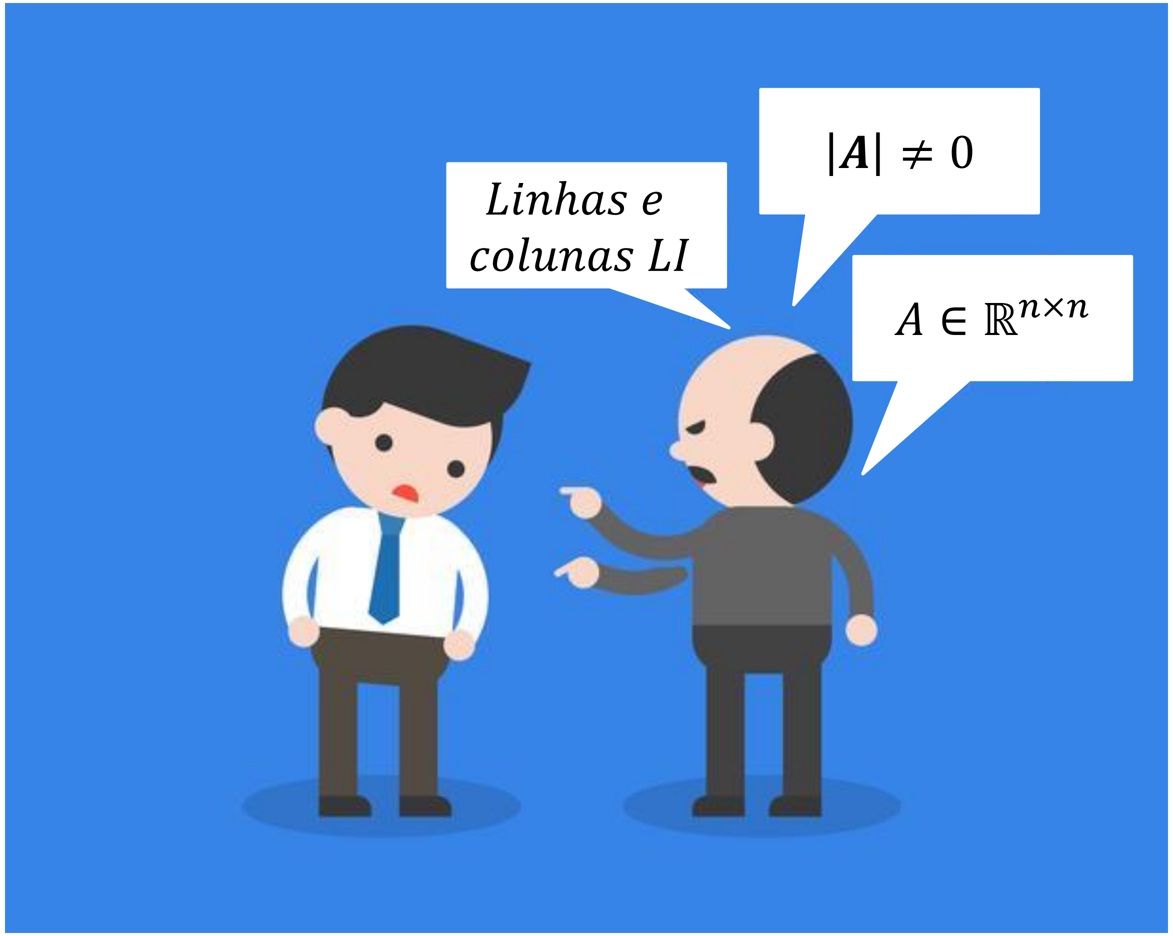
```
---------------------------------------------------------------------------
LinAlgError                               Traceback (most recent call last)
<ipython-input-6-9ab2ab7bf482> in <module>()
      5
      6 # Inversa
----> 7 print(np.linalg.inv(A))

<__array_function__ internals> in inv(*args, **kwargs)

1 frames

/usr/local/lib/python3.7/dist-packages/numpy/linalg/linalg.py in _raise_linalgerror_singular(err, flag)
     86
     87 def _raise_linalgerror_singular(err, flag):
---> 88     raise LinAlgError("Singular matrix")
     89
     90 def _raise_linalgerror_nonposdef(err, flag):

LinAlgError: Singular matrix
```

SEARCH STACK OVERFLOW

PODE-SE INVERTER QUALQUER MATRIZ?

Não!

- A matriz deve ser quadrada e não singular!
- Matriz é singular quando tem linhas e/ou colunas linearmente dependentes.
- Por consequência, seu determinante não pode ser nulo.



PECE Programa de Educação Continuada
Escola Politécnica da USP

DETERMINANTE DE UMA MATRIZ

Determinante é um número associado a uma **matriz** quadrada, é como um “resumo numérico” das informações.

DETERMINANTE DE $\boldsymbol{A} \in \mathbb{R}^{n\times n}$

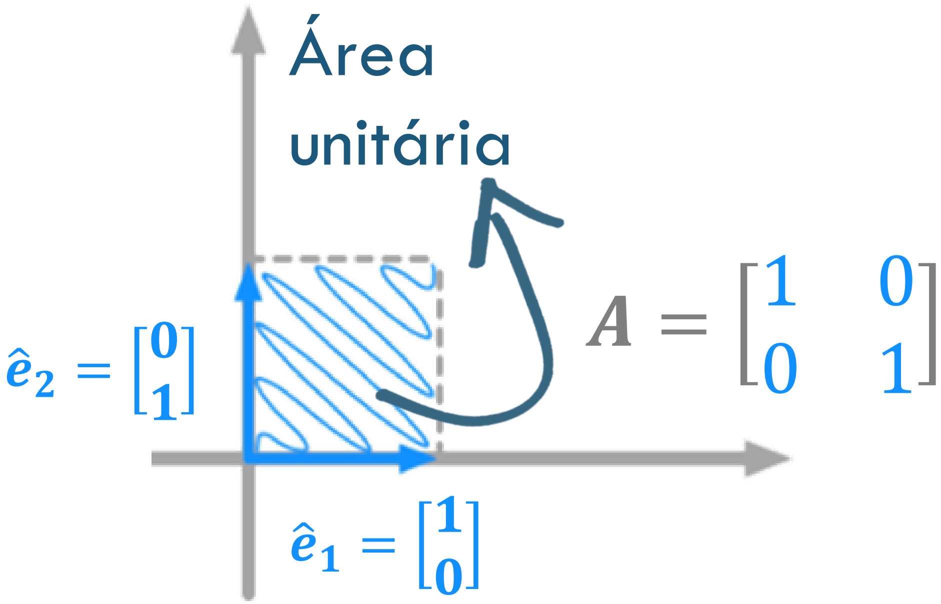
O determinante de uma matriz $\boldsymbol{A}$ quadrada, $|\boldsymbol{A}|$ ou $\det(\boldsymbol{A})$, é um número, ié, $\mathbb{R}^{n\times n} \to \mathbb{R}$.

Algebricamente, pode-se escrever uma fórmula explícita para o determinante de A, mas infelizmente isso dá pouca intuição sobre seu significado.

Começaremos fornecendo uma interpretação geométrica do determinante e depois veremos algumas de suas propriedades algébricas específicas...

DETERMINANTE

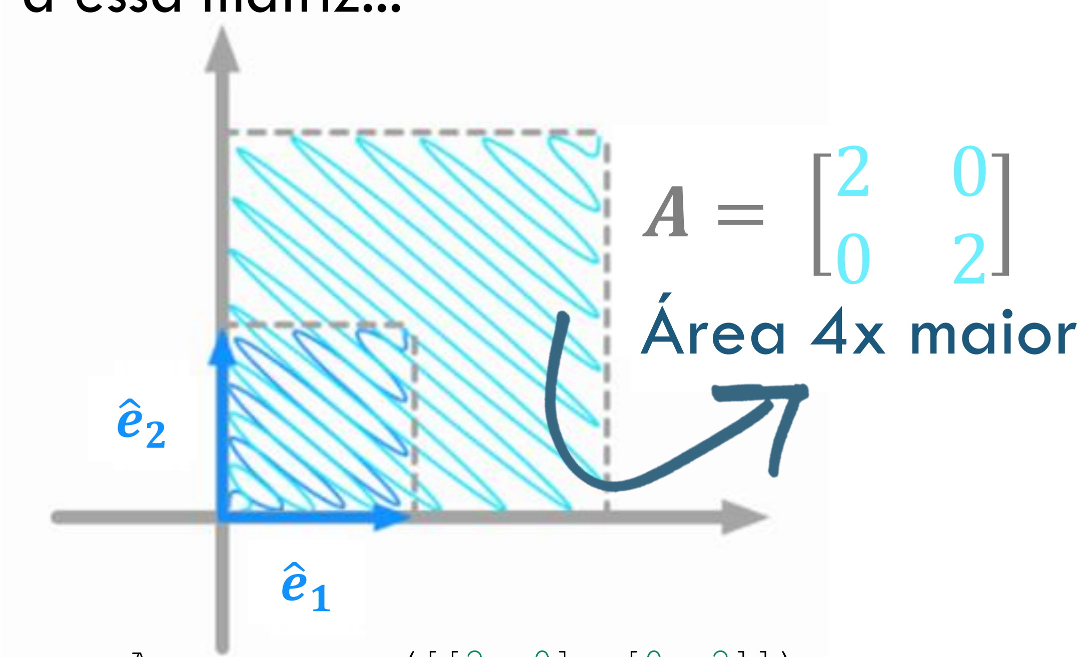
O determinante de uma matriz pode dizer muitas coisas sobre a transformação associada a essa matriz...




```
A = np.array([[1,0], [0,1]])
np.linalg.det(A)
1.0
```

$$\boldsymbol{A}\hat{\boldsymbol{e}}_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

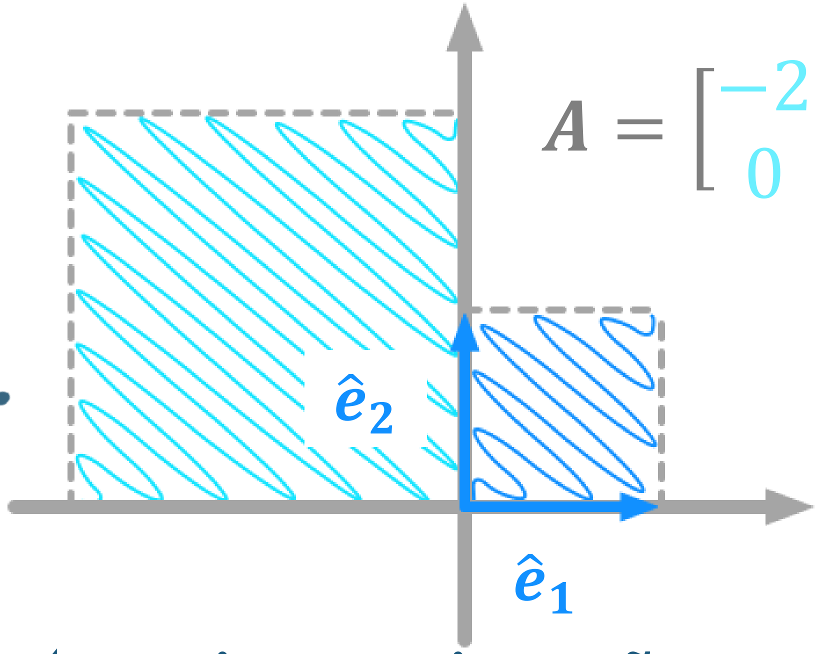
$$\boldsymbol{A}\hat{\boldsymbol{e}}_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$




```
A = np.array([[2, 0], [0, 2]])
np.linalg.det(A)
4.0
```

$$\boldsymbol{A}\hat{\boldsymbol{e}}_1 = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{A}\hat{\boldsymbol{e}}_2 = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix}$$



$$A = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$

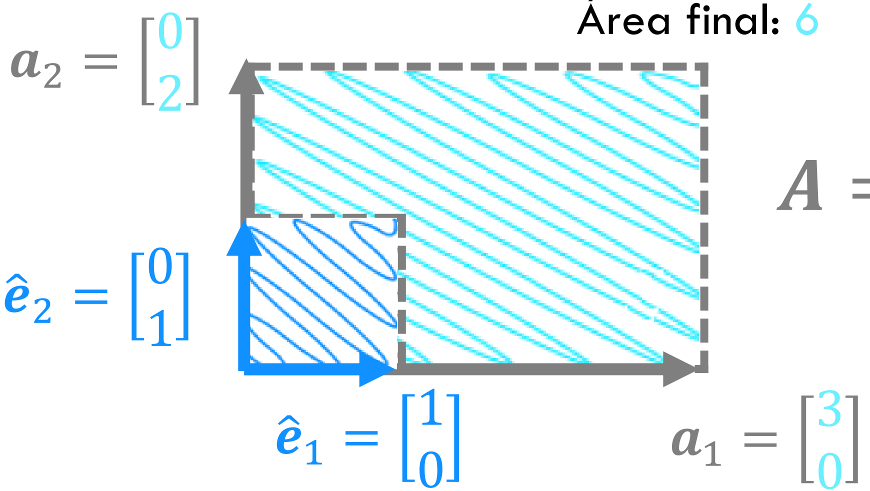
PECE Programa de Educação Continuada
Escola Politécnica da USP

Área 4x maior com inversão

```
A = np.array([[-2, 0], [0, 2]])
np.linalg.det(A)
```

```
-4.0
```

Área inicial: 1
Área final: 6

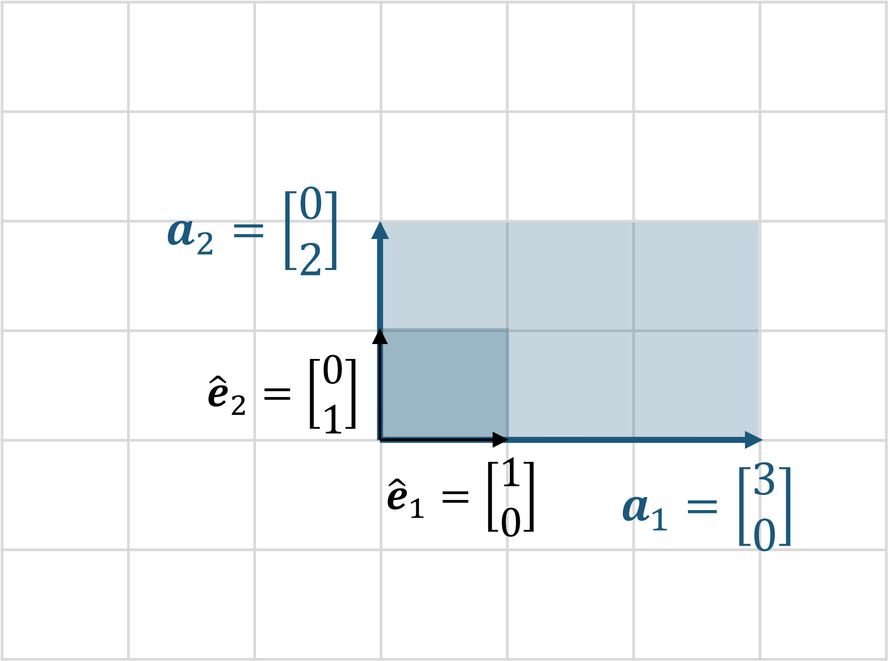


$$A = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$

Portanto, a transformação linear dos vetores escalonou a área por um fator de 6.

Esse fator de escala é chamado de determinante.

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$



Área inicial: 1
Área final: 6

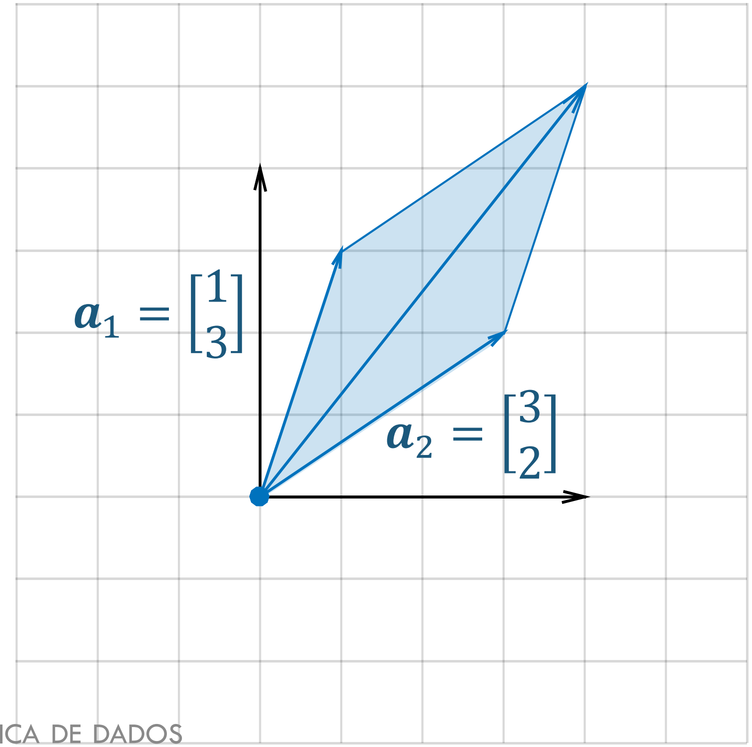
Portanto, a transformação linear dos vetores escalonou a área por um fator de 6.
Esse fator de escala é chamado de determinante.

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} | & | & & | \\ \boldsymbol{a}_1 & \boldsymbol{a}_2 & \cdots & \boldsymbol{a}_n \\ | & | & & | \end{bmatrix}$$

Considere o conjunto de pontos $S \in \mathbb{R}^n$ formado tomando todas as combinações lineares possíveis dos vetores de linha $\boldsymbol{a}_1 \dots \boldsymbol{a}_n \in \mathbb{R}^n$ de A, onde os coeficientes da combinação linear estão todos entre 0 e 1.

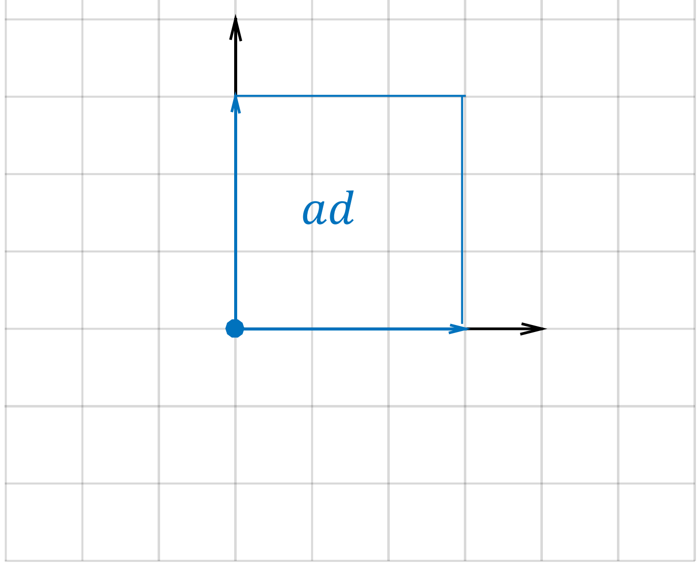
$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{a}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix} \qquad \boldsymbol{a}_2 = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix}$$

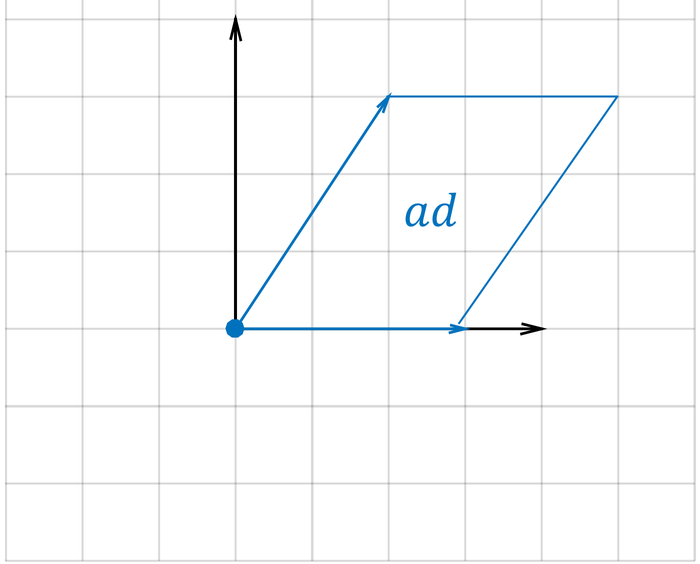


DETERMINANTE DE UMA MATRIZ

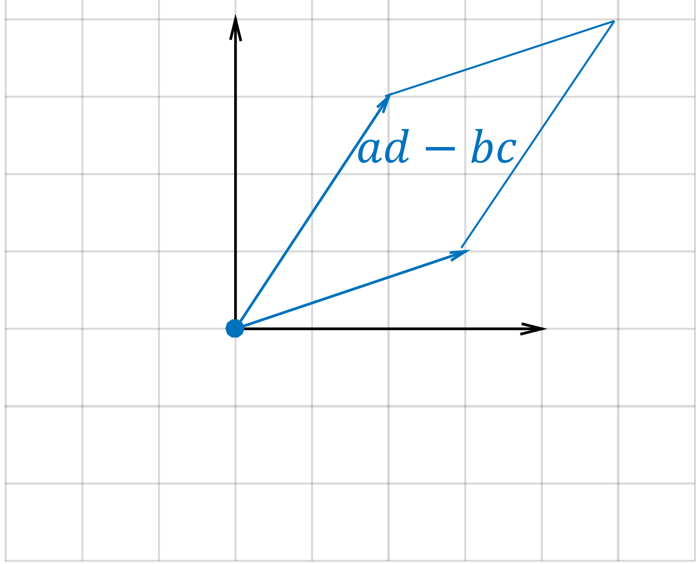
$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix}, \det(\boldsymbol{A}) = ad$$



$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} a & c \\ 0 & d \end{pmatrix}, \det(\boldsymbol{A}) = ad$$

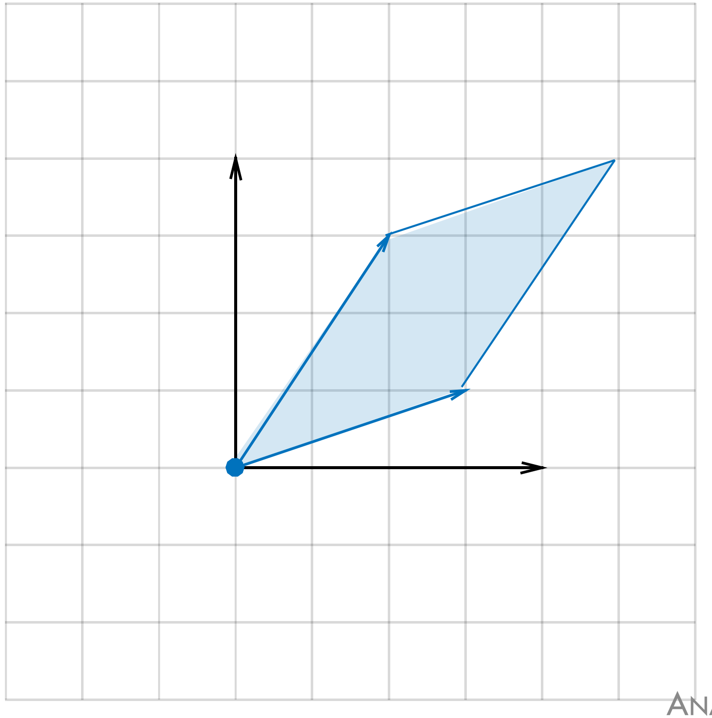


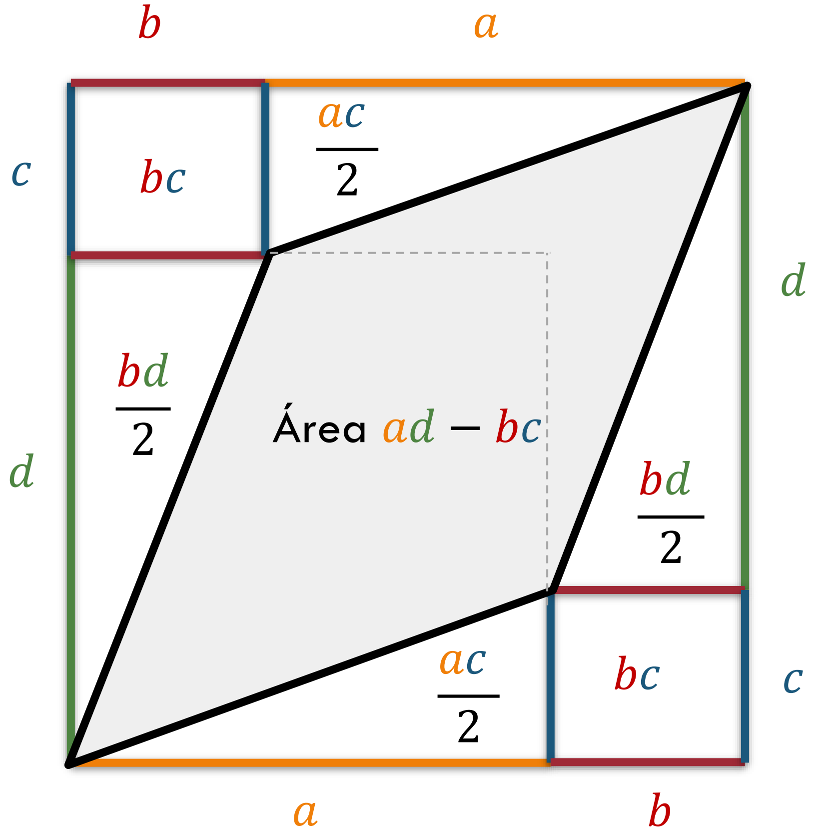
$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}, \det(\boldsymbol{A}) = ad - bc$$



GENERALIZANDO O CASO 2D

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$





$$(a+b)(c+d) - ac - bd - 2bc =$$
$$(ac + ad + bc + bd) - ac - bd - 2bc =$$
$$ad - bc$$

ARRISCAMOS EXPLICITAR O DETERMINANTE DE ALGUMAS MATRIZES...

$$
\begin{aligned}
\left|[a_{11}]\right| &= a_{11} \\
\left|\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}\right| &= a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \\
\left|\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}\right| &= \begin{array}{l} a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} \\ \quad -a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{13}a_{22}a_{31} \end{array}
\end{aligned}
$$

PROPRIEDADES...

$\boldsymbol{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}, |\boldsymbol{A}| = |\boldsymbol{A}^T|$

$\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B} \in \mathbb{R}^{n \times n}, |\boldsymbol{AB}| = |\boldsymbol{A}|\ |\boldsymbol{B}|$
$|\boldsymbol{A}^{-1}| = 1/|\boldsymbol{A}|$

$$\begin{bmatrix} - & t\boldsymbol{a}_1' & - \\ - & t\boldsymbol{a}_2' & - \\ - & \vdots & - \\ - & t\boldsymbol{a}_m' & - \end{bmatrix} = t|\boldsymbol{A}|$$

$\boldsymbol{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}, |c\boldsymbol{A}| = c^n|\boldsymbol{A}|$

IMPORTANTE PROPRIEDADE DO DETERMINANTE

O determinante é um *escalonamento* da inversa. Por exemplo, a inversa de uma matriz 2x2,

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

é dada por,

$$\boldsymbol{A}^{-1} = \frac{1}{\det \boldsymbol{A}} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$$

Portanto, uma matriz cujo determinante é nulo, não é formada somente de vetores LI. Em outras palavras, a matriz é singular.

VOLTANDO...

$$
\begin{array}{rcrcrcr}
x_1 & + & x_2 & + & x_3 & = & 3 \\
x_1 & - & x_2 & + & 2x_3 & = & 2 \\
2x_1 & & & + & 3x_3 & = & 1
\end{array}
$$

Não existe Solução!

$$
\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \\ 2 & 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}
$$

```
A = np.array([[1,1,1],
              [1,-1,2],
              [2,0,3]])

# Inversa
print(np.linalg.det(A))
0.0
```

PECE Programa de Educação Continuada
Escola Politécnica da USP

AUTOVALORES E AUTOVETORES

A palavra "eigen" é talvez mais útil se for traduzida do alemão como “característica”.

Então, quando falamos de um *eigenproblem (problema característico)*, estamos falando em encontrar as propriedades características de algo. Mas característica de quê?

AUTOVALORES E AUTOVETORES

O que acontece se eu aplicar a transformação:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 5 & -1 \end{bmatrix}$$

em r?

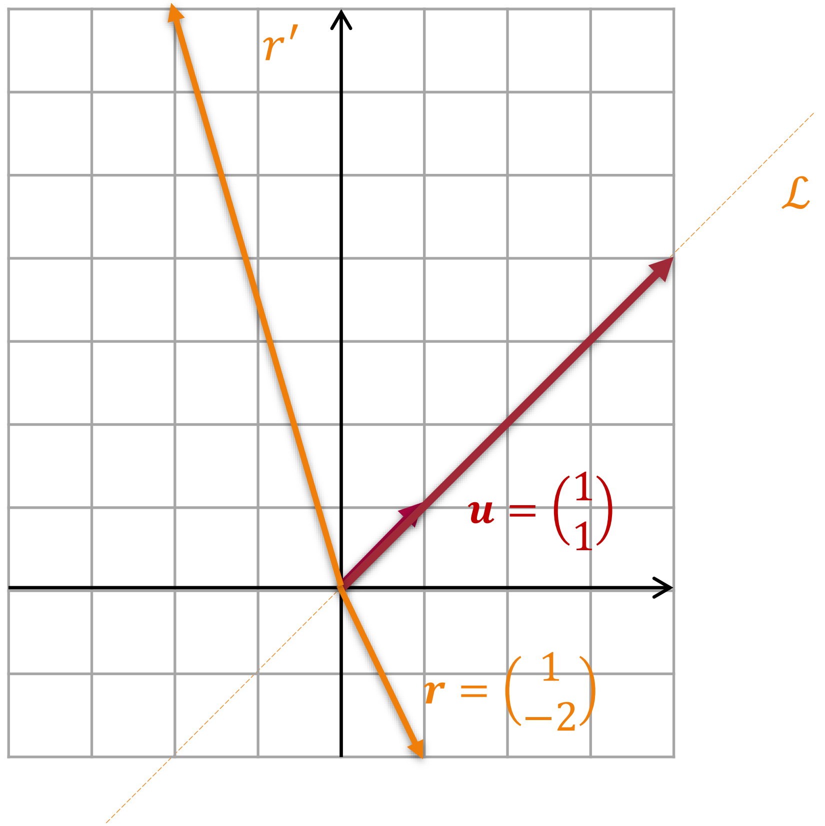
$$r' = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 5 & -1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \times 1 + 2 \times (-2) \\ 5 \times 1 + (-1) \times (-2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 7 \end{pmatrix}$$

O que acontece se eu aplicar a transformação:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 5 & -1 \end{bmatrix}$$

em u?

$$\boldsymbol{u}' = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 5 & -1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \times 1 + 2 \times 1 \\ 5 \times 1 + (-1) \times 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \end{pmatrix} = 4 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

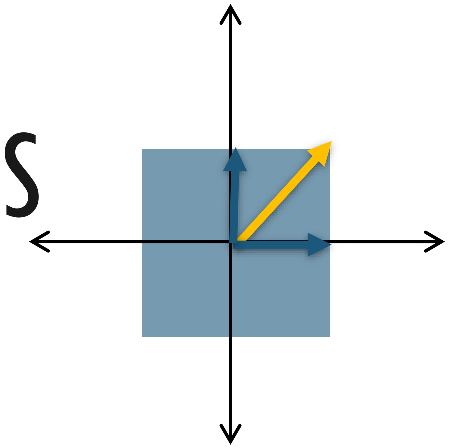


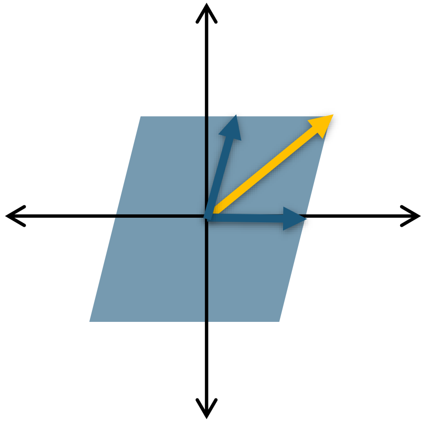
Vetor $\boldsymbol{u}$ foi escalonado de 4

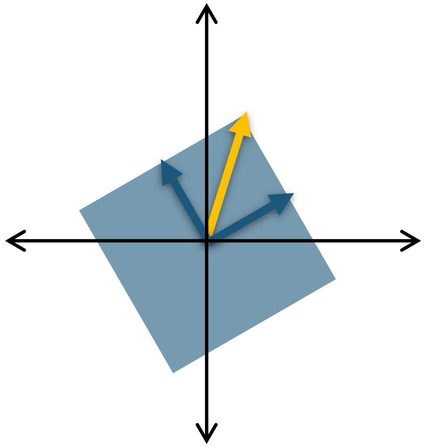
$\boldsymbol{u}$ é um autovetor de A

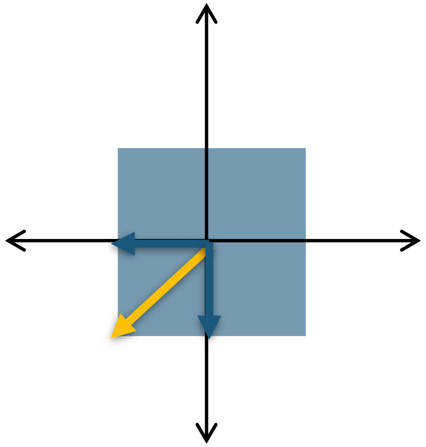
$\lambda = 4$ é um autovalor de A

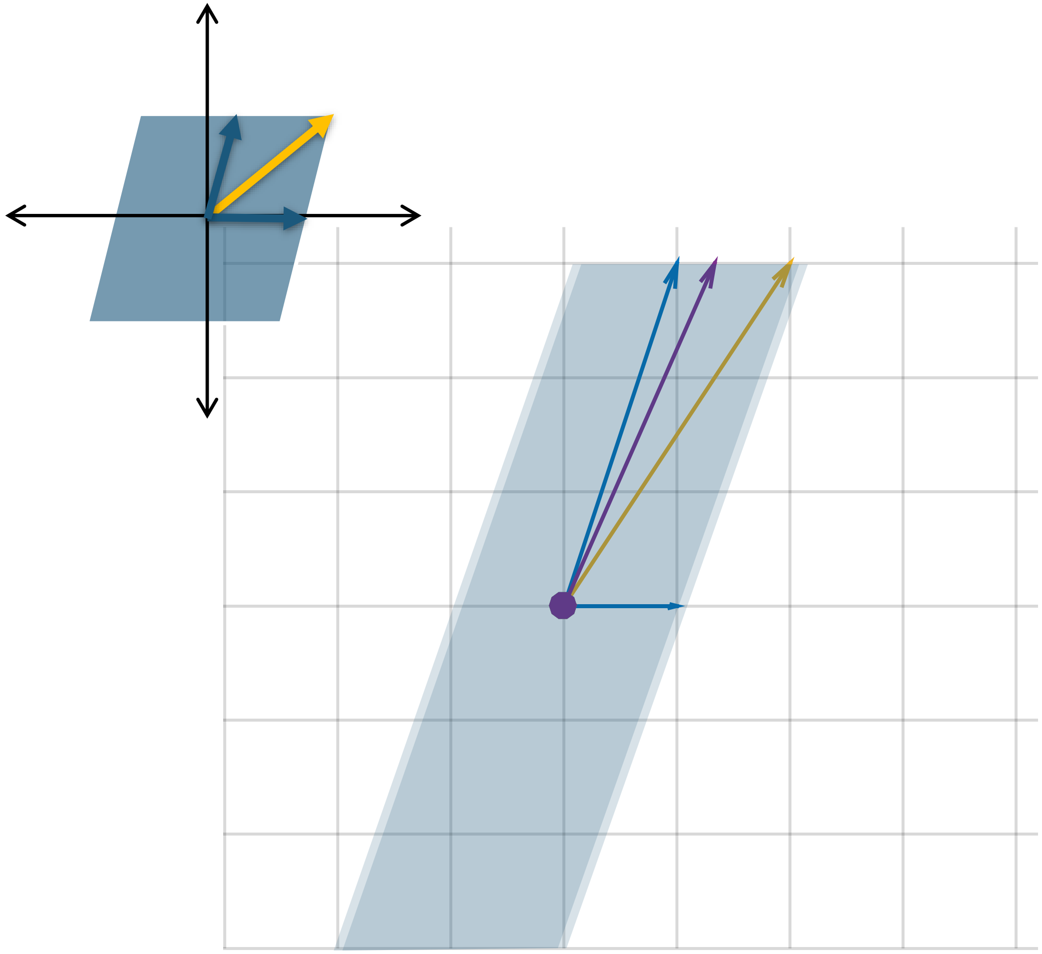
QUANTOS AUTOVETORES TEMOS EM CADA TRANSFORMADA?

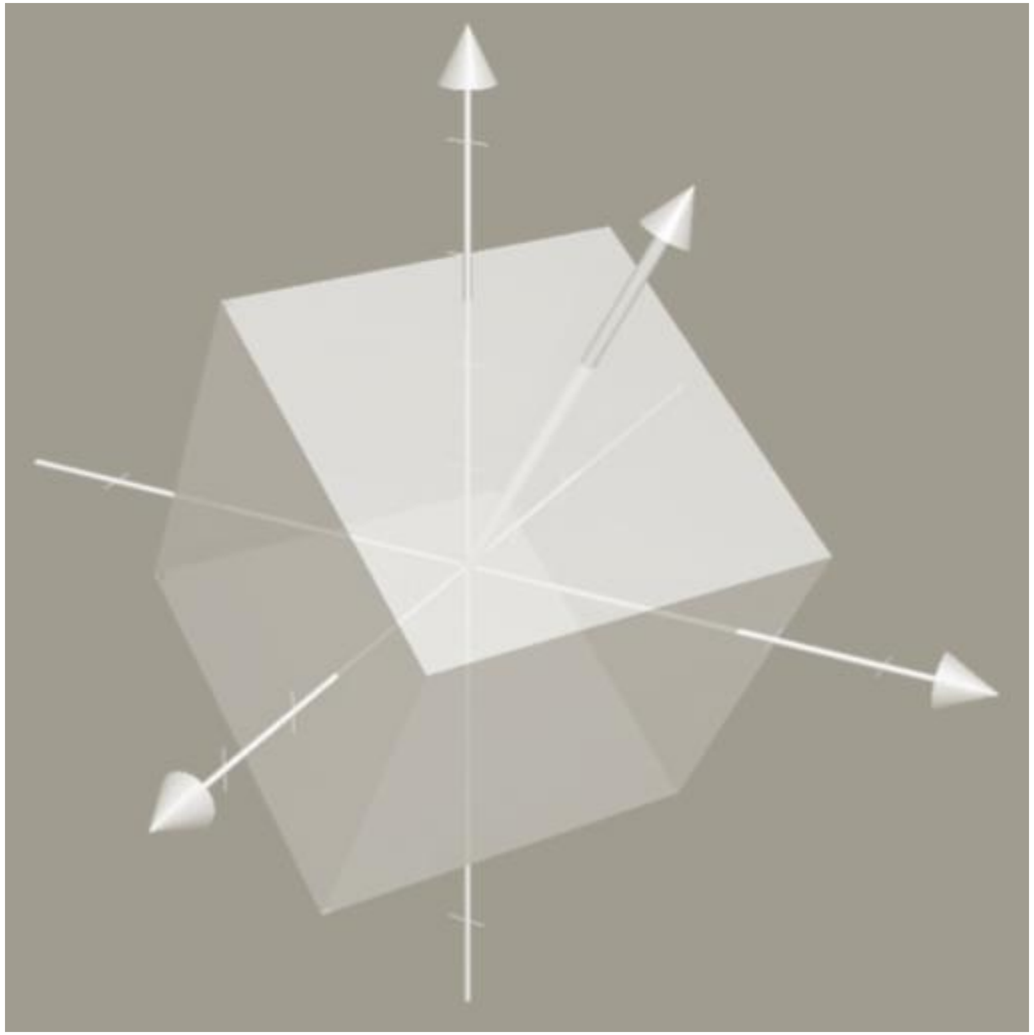


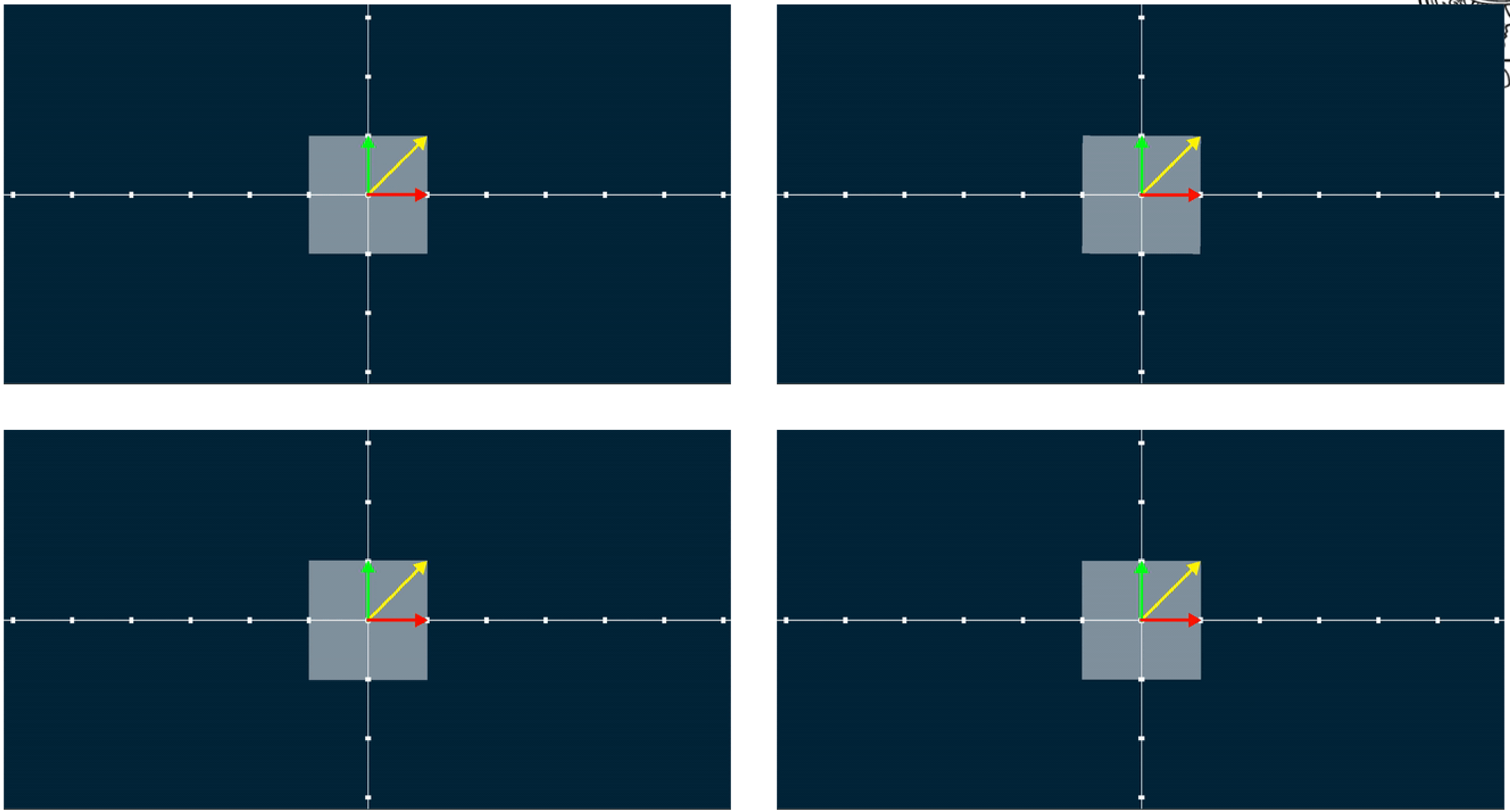












https://towardsdatascience.com/eigenvectors-and-eigenvalues-all-you-need-to-know-df92780c591f

QUAIS SÃO OS AUTOVALORES E AUTOVETORES DE UMA TRANSFORMAÇÃO?

$$\boldsymbol{u}' = \boldsymbol{A}\boldsymbol{v} = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 5 & -1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \times 1 + 2 \times 1 \\ 5 \times 1 + (-1) \times 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \end{pmatrix} = \lambda \boldsymbol{u}$$

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{u} = \lambda \boldsymbol{u}, \quad \boldsymbol{v} \neq 0$$

$$(\lambda \boldsymbol{I} - \boldsymbol{A})\boldsymbol{u} = (\boldsymbol{A} - \lambda \boldsymbol{I})\boldsymbol{u} = 0, \quad \boldsymbol{v} \neq 0$$

Como resolver??? Como achar λ e $\boldsymbol{u}$?

VEJAM BEM...

$(\boldsymbol{A} - \lambda \boldsymbol{I})\boldsymbol{u} = 0$

Se $(\boldsymbol{A} - \lambda \boldsymbol{I})$ *tem uma inversa, então, a solução do problema*

$\boldsymbol{u} = (\boldsymbol{A} - \lambda \boldsymbol{I})^{-1} 0 \rightarrow \boldsymbol{u} = 0$

E essa é chamada de solução trivial. Para obter uma solução diferente da trivial, a matriz $(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I})$ não pode ter inversa. E, acabamos de verificar que matrizes singulares tem determinante nulo. Portanto, resolvemos nosso sistema impondo o determinante nulo de $(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I})$,

$|(\lambda \boldsymbol{I} - \boldsymbol{A})| = 0$

EXEMPLO DE $\boldsymbol{A}$ $2x2$

$$|(\lambda \boldsymbol{I} - \boldsymbol{A})| = 0$$

$$\lambda \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda - a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & \lambda - a_{22} \end{bmatrix} = 0$$

$$\begin{vmatrix} \lambda - a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & \lambda - a_{22} \end{vmatrix} = (\lambda - a_{11})(\lambda - a_{22}) - a_{12}a_{21} = 0$$

$$\boxed{\lambda^2 - \mathrm{tr}(\boldsymbol{A})\,\lambda + \det \mathbf{A} = 0}$$

Polinômio característico

AUTOVALORES E AUTOVETORES

Dado um operador linear $\boldsymbol{A}$ com dimensões $n \times n$, existe um conjunto de n vetores $\boldsymbol{v}_i$, cada um com a dimensão n, de modo que a multiplicação de qualquer um desses vetores por $\boldsymbol{A}$ resulta em um vetor paralelo a $\boldsymbol{v}_i$, com um comprimento multiplicado por uma constante λ_i,

$$\mathbf{A}\mathbf{v}_\mathrm{i} = \lambda_\mathrm{i}\mathbf{v}_\mathrm{i}$$

$$\det(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}) = 0$$

Autovalores: através da equação característica

$$(\mathbf{A} - \lambda_i\mathbf{I})\,\mathbf{v}_i = \mathbf{0}$$

Autovetores: Substitui-se cada autovalor na equação básica e resolve-se um sistema linear.

EXEMPLO

$$\lambda^2 - \mathrm{TR}(\boldsymbol{A})\,\lambda + \mathrm{DET}\ \boldsymbol{A} = 0$$

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 5 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\det \boldsymbol{A} = -12, tr\ \boldsymbol{A} = 1$$

$$\lambda^2 - 1\lambda - 12 = 0$$

$$\begin{matrix} \lambda_1 = 4 \\ \lambda_2 = -3 \end{matrix}$$

autovalores

$$\begin{pmatrix} 2-4 & 2 \\ 5 & -1-4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u_{1,1} \\ u_{2,1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} -2 & 2 \\ 5 & -5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u_{1,1} \\ u_{2,1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$-2u_{1,1} + 2u_{2,1} = 0 \rightarrow u_{1,1} = u_{2,1}$$

$$5u_{1,1} - 5u_{2,1} = 0 \rightarrow u_{1,1} = u_{2,1} = t$$

$$\boldsymbol{u}_1 = \begin{pmatrix} t \\ t \end{pmatrix}$$

autovetores $\boldsymbol{u}_i$

$$\begin{pmatrix} 2-(-3) & 2 \\ 5 & -1-(-3) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u_{1,2} \\ u_{2,2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u_{1,2} \\ u_{2,2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{u}_2 = \begin{pmatrix} -2t/5 \\ t \end{pmatrix}$$

$$5u_{1,2} + 2u_{2,2} = 0 \rightarrow u_{2,2} = t; \qquad u_{2,2} = -2t/5$$

EXEMPLO

PECE Programa de Educação Continuada
Escola Politécnica da USP

$$\lambda^2 - \mathrm{TR}(\boldsymbol{A})\,\lambda + \mathrm{DET}\ \boldsymbol{A} = 0$$

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 5 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\det \boldsymbol{A} = -12, tr\ \boldsymbol{A} = 1$$

$$\lambda^2 - 1\lambda - 12 = 0$$

$$\lambda_1 = 4$$
$$\lambda_2 = -3$$

$$\begin{pmatrix} 2-4 & 2 \\ 5 & -1-4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u_{1,1} \\ u_{2,1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} -2 & 2 \\ 5 & -5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u_{1,1} \\ u_{2,1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$-2u_{1,1} + 2u_{2,1} = 0 \rightarrow u_{1,1} = u_{2,1}$$
$$5u_{1,1} - 5u_{2,1} = 0 \rightarrow u_{1,1} = u_{2,1} = t$$

$$\boldsymbol{u}_1 = \begin{pmatrix} t \\ t \end{pmatrix}$$

$$\|\boldsymbol{u}_1\| = t^2 + t^2 = 1$$

$$2t^2 = 1 \rightarrow t = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\boldsymbol{u}_1 = \begin{pmatrix} 0{,}707 \\ 0{,}707 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 2-(-3) & 2 \\ 5 & -1-(-3) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u_{1,2} \\ u_{2,2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u_{1,2} \\ u_{2,2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$5u_{1,2} + 2u_{2,2} = 0 \rightarrow u_{2,2} = t, \qquad u_{1,2} = -2t/5$$

$$\boldsymbol{u}_2 = \begin{pmatrix} -2t/5 \\ t \end{pmatrix}$$

$$\|\boldsymbol{u}_2\| = t^2 + \left(-\frac{2t}{5}\right)^2 = 1$$

$$\frac{29}{25}t^2 = 1 \rightarrow t = \pm\frac{5}{\sqrt{29}}$$

$$\boldsymbol{u}_2 = \begin{pmatrix} -0.371 \\ 0.928 \end{pmatrix}$$

LEMBRAM-SE DA DEFINIÇÃO?

$$\boldsymbol{Au}_1 = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 5 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t \\ t \end{pmatrix} = 4 \begin{pmatrix} t \\ t \end{pmatrix} = 4\boldsymbol{u}_1$$

$$\boldsymbol{Au}_2 = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 5 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2t/5 \\ t \end{pmatrix} = -3 \begin{pmatrix} -2t/5 \\ t \end{pmatrix} = 3\boldsymbol{u}_2$$

EXEMPLO

$$\lambda^2 - \mathrm{TR}(\boldsymbol{A})\,\lambda + \mathrm{DET}\,\boldsymbol{A} = 0$$

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\det \boldsymbol{A} = 2, tr\ \boldsymbol{A} = 3$$

$$\lambda^2 - 3\lambda + 2 = 0$$

$$\boxed{\begin{array}{l} \lambda_1 = 1 \\ \lambda_2 = 2 \end{array}}$$ autovalores

$$\begin{pmatrix} 1-1 & 0 \\ 0 & 1-2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u_{1,1} \\ u_{2,1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u_{1,1} \\ u_{2,1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\boxed{u_{1,1} = t, \quad -u_{2,1} = 0 \rightarrow u_{2,1} = 0}$$

$$\boxed{\boldsymbol{u}_1 = \begin{pmatrix} t \\ 0 \end{pmatrix}}$$

$$\|\boldsymbol{u}_1\| = t^2 + 0^2 = 1$$

$$t = \pm 1$$

$$\boxed{\boldsymbol{u}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}}$$

autovetores $\boldsymbol{v}_i$

$$\begin{pmatrix} 2-1 & 0 \\ 0 & 2-2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u_{1,2} \\ u_{2,2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u_{1,2} \\ u_{2,2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\boxed{u_{1,2} = 0, u_{2,2} = t}$$

$$\boxed{\boldsymbol{u}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ t \end{pmatrix}}$$

$$\|\boldsymbol{u}_2\| = 0^2 + t^2 = 1$$

$$t = \pm 1$$

$$\boxed{\boldsymbol{u}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}}$$

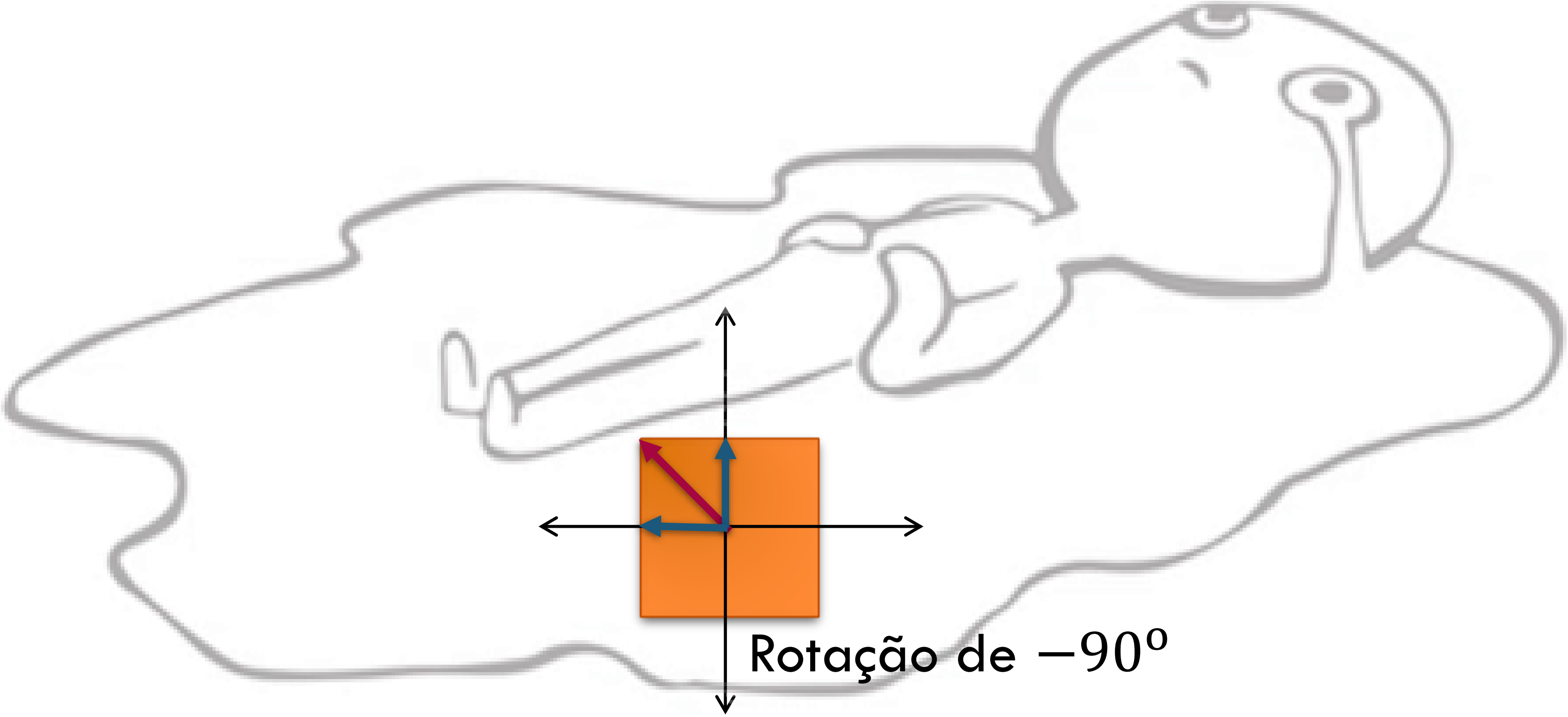
EXEMPLO

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$\det A = 1, tr\ A = 0$

$\lambda^2 + 1 = 0$

$\nexists \lambda \in \mathbb{R}$ autovalores



VAMOS TREINAR...

Para matriz

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 5 & 4 \\ -4 & -3 \end{pmatrix}$$

Qual o *polinômio característico* e sua solução?

EXEMPLO DO NOTEBOOK

Ache os autovalores e autovetores da matriz abaixo,

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 5 & 4 & 7 \\ -1 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

SAIBA QUE...

O traço de um $\boldsymbol{A}$ é igual à soma de seus autovalores,

$$\operatorname{tr}\boldsymbol{A} = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i$$

O determinante de $\boldsymbol{A}$ é igual ao produto de seus autovalores,

$$\det\boldsymbol{A} = \prod_{i=1}^{n} \lambda_i$$

O rank de $\boldsymbol{A}$ é igual ao número de autovalores diferentes de zero de $\boldsymbol{A}$.

Os autovalores de uma matriz diagonal $\boldsymbol{D} = diag\ (d_1, d_2, \dots, d_n)$ são as entradas diagonais $d_1, d_2, \dots, d_n$.

AUTOVALORES E MATRIZES SIMÉTRICAS

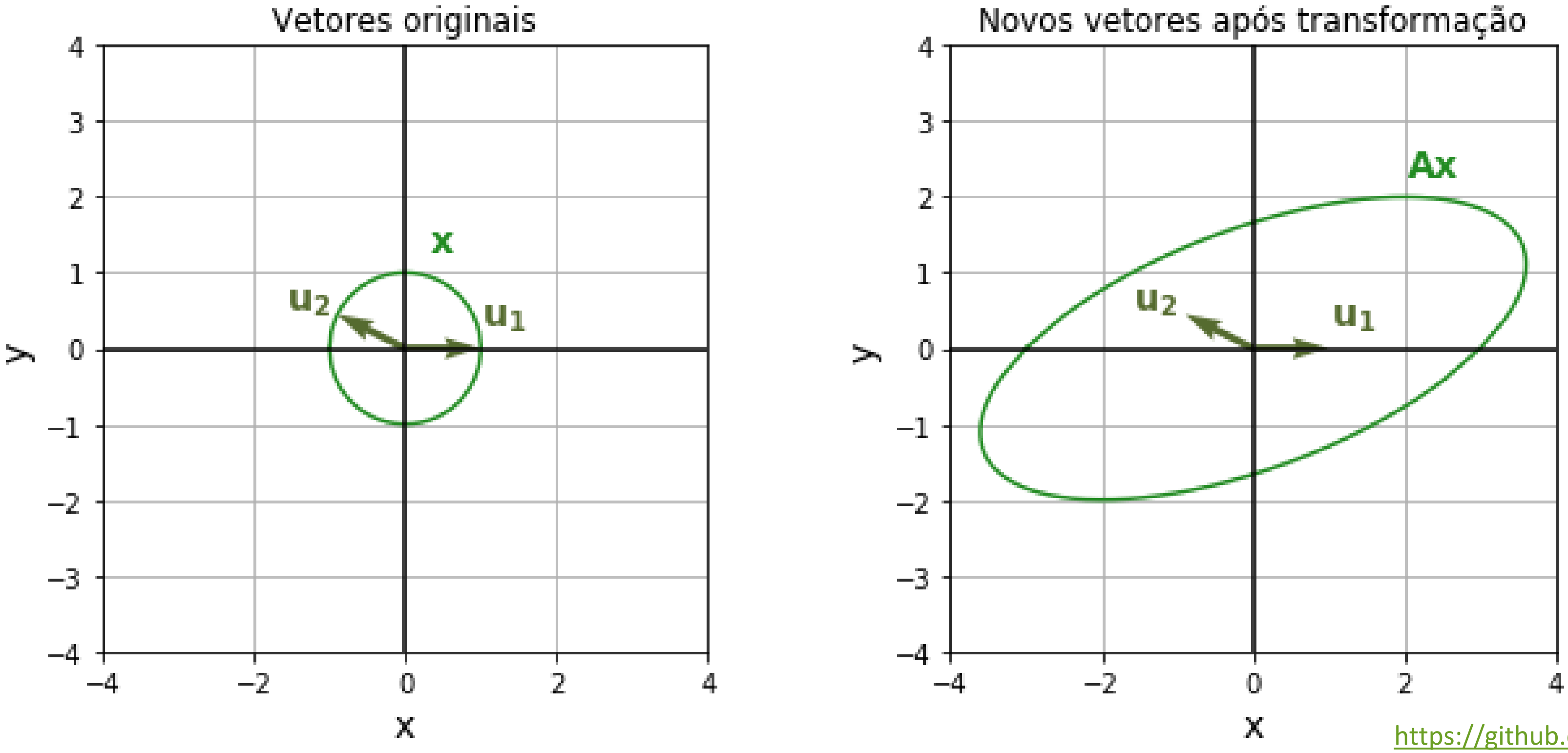
Duas propriedades importantes surgem quando olhamos para os autovalores e autovetores de uma

matriz simétrica $\boldsymbol{A}_{n \times n}$,

- todos n os autovalores de $\boldsymbol{A}$ são reais;
- os n autovetores de $\boldsymbol{A}$ são ortonormais, ou seja, a matriz composta dos autovetores é uma matriz ortogonal.

AUTOVETORES

PECE Programa de Educação Continuada
Escola Politécnica da USP



$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{u}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \boldsymbol{u}_2 = \begin{bmatrix} -0{,}8944 \\ 0{,}4472 \end{bmatrix}$$

$$\lambda_1 = 3, \qquad \lambda_2 = 2$$

https://github.com/reza-bagheri/SVD_article

Os vetores $\boldsymbol{u}_i$ são os autovetores de $\boldsymbol{A}$; os escalares λ_i são chamados autovalores.

SOLUÇÃO

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\det \boldsymbol{A} = 6, tr\ \boldsymbol{A} = 5$$

$$\lambda^2 - 5\lambda + 6 = 0$$

$$\lambda_1 = 3$$
$$\lambda_2 = 2$$

autovalores

$$\begin{pmatrix} 3-3 & 2 \\ 0 & 2-3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_{1,1} \\ u_{2,1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_{1,1} \\ u_{2,1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$2u_{2,1} = 0 \rightarrow u_{2,1} = 0, \qquad u_{1,1} = t$$

$$\boldsymbol{u}_1 = \begin{pmatrix} t \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\|\boldsymbol{u}_1\| = t^2 + 0^2 = 1$$
$$t = \pm 1$$

$$\boldsymbol{u}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 3-2 & 2 \\ 0 & 2-2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_{1,2} \\ u_{2,2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_{1,2} \\ u_{2,2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

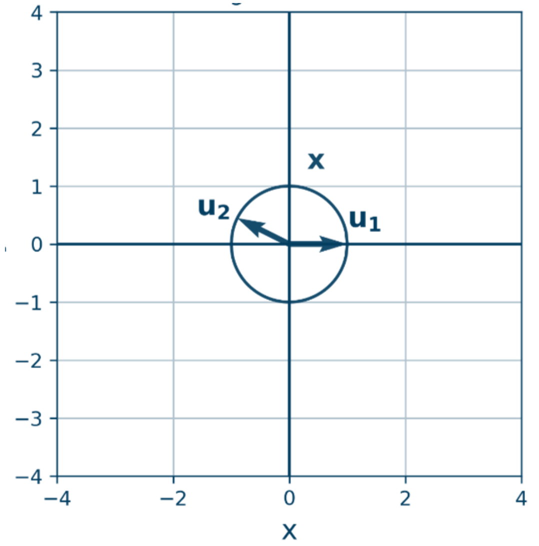
$$u_{1,2} + 2u_{2,2} = 0, u_{2,2} = t$$
$$u_{1,2} = -2u_{2,2} = -2t$$

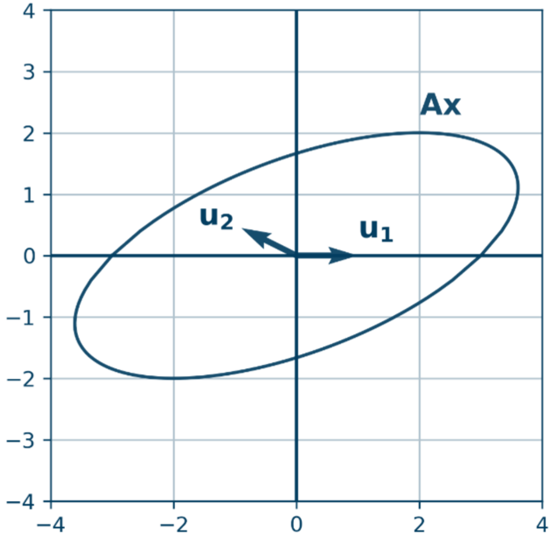
$$\boldsymbol{u}_2 = \begin{pmatrix} -2t \\ t \end{pmatrix}$$

$$\|\boldsymbol{u}_2\| = (-2t)^2 + t^2 = 1$$
$$5t^2 = 1 \rightarrow t = \pm\frac{1}{\sqrt{5}}$$

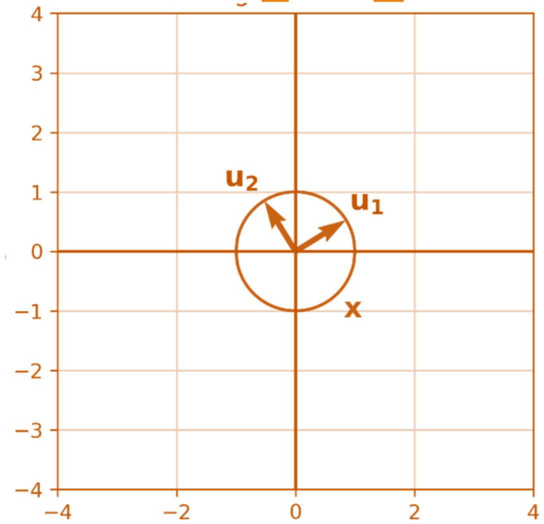
$$\boldsymbol{u}_2 = \begin{pmatrix} -0{,}8944 \\ 0{,}4472 \end{pmatrix}$$

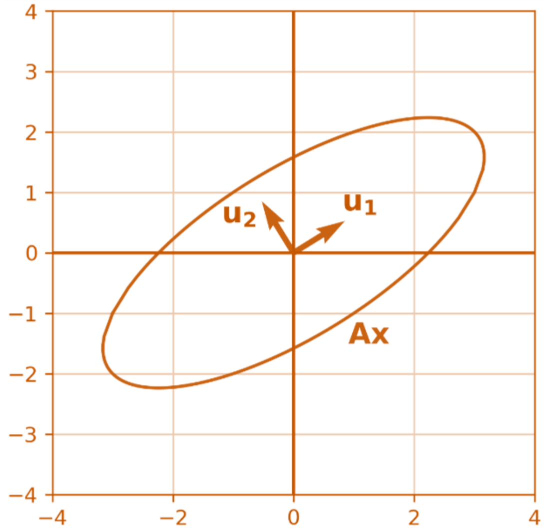
$$A = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$





$$A = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$





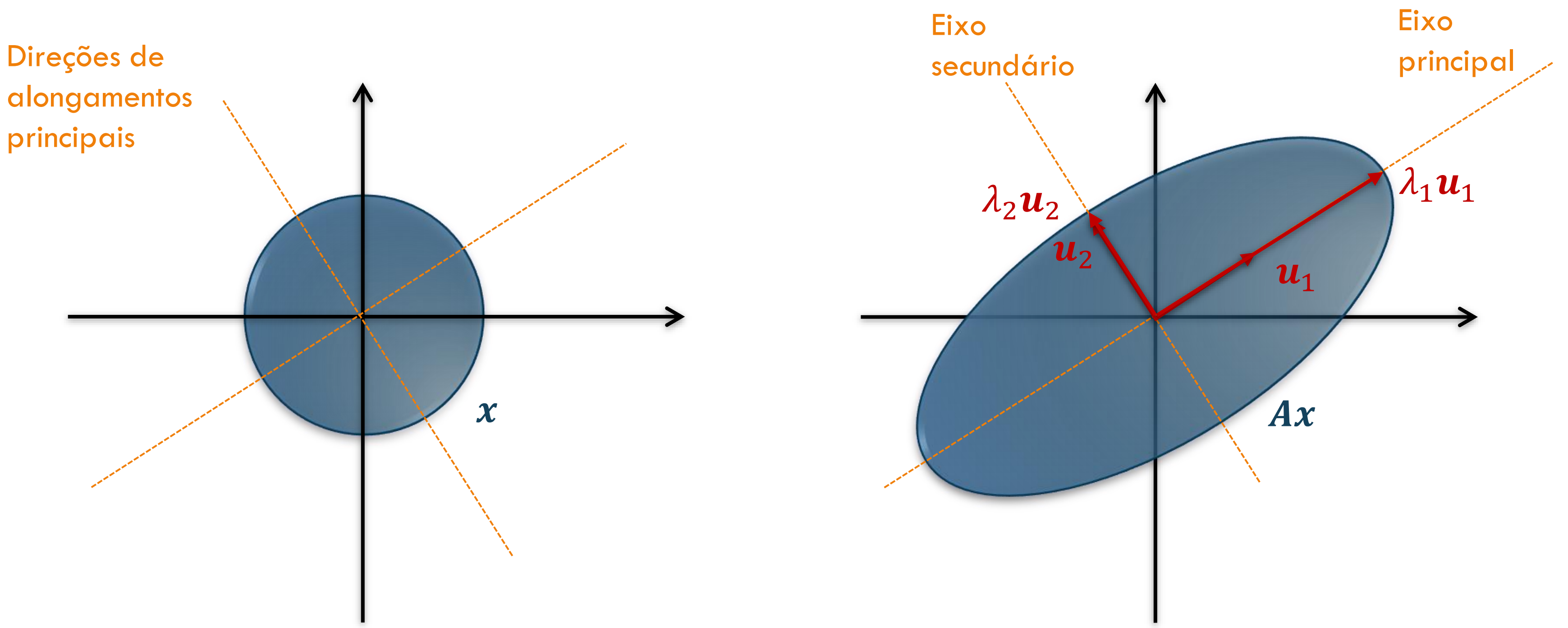
PECE Programa de Educação Continuada
Escola Politécnica da USP

Matriz simétrica

Autovetores ortogonais

Direções principais

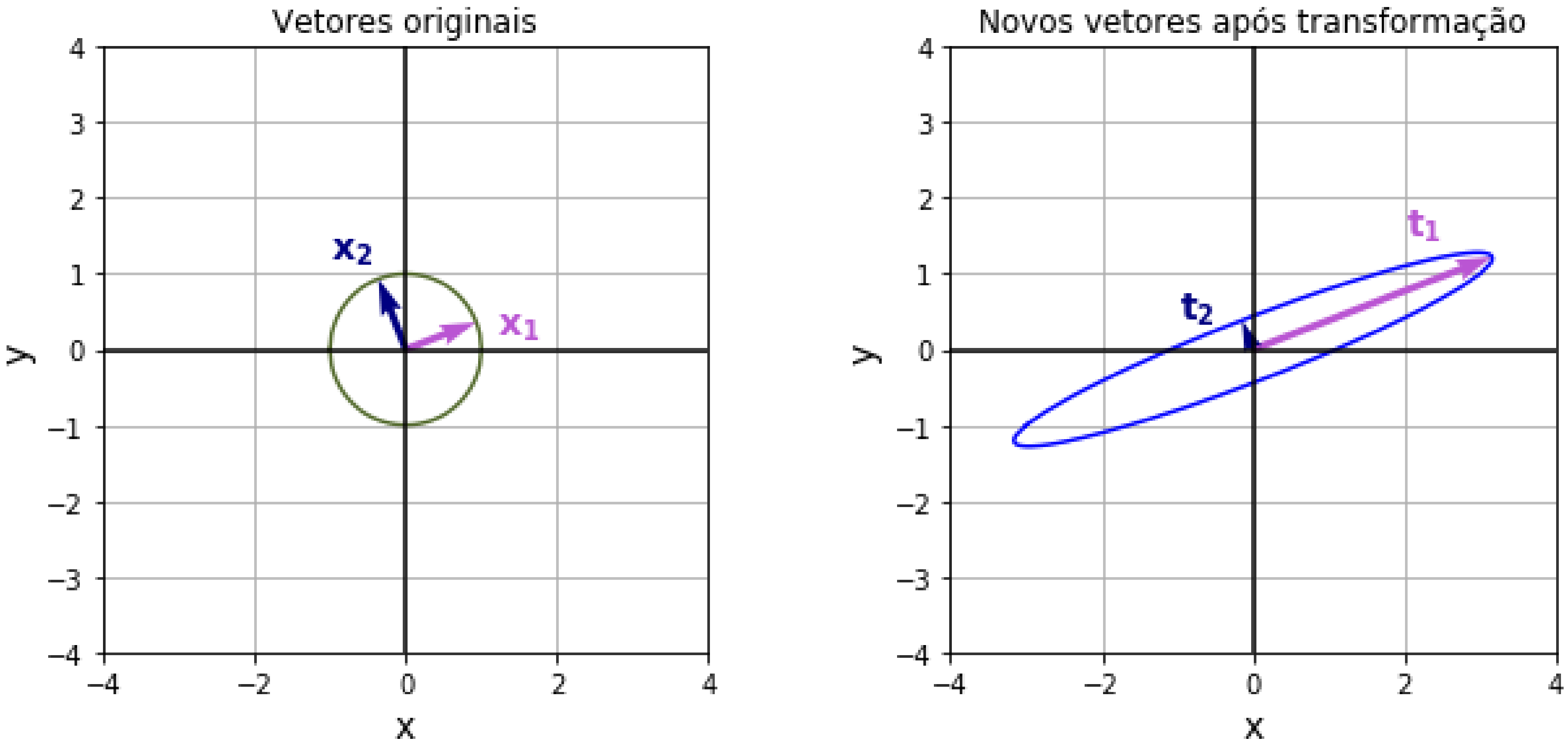
INTUIÇÃO GEOMÉTRICA PARA MATRIZ 2X2 SIMÉTRICA QUADRADA



```
A = np.array([[3, 1],
              [1, 0.8]])
# Cálculo de autovalores e autovetores
lam, u = linalg.eig(A)
print("autovalores=", np.round(lam, 4))
print("autovetores=", np.round(u, 4))
```

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 0{,}8 \end{bmatrix}$$

```
autovalores= [3.3866 0.4134]
autovetores= [[ 0.9327 -0.3606]
 [ 0.3606  0.9327]]
```



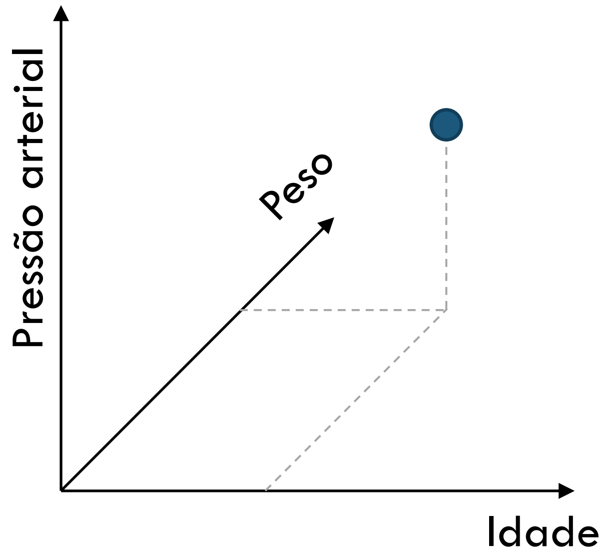
ONDE VOCÊ VAI USAR ÁLGEBRA LINEAR?

CONJUNTO DE DADOS E ARQUIVOS DE DADOS

No aprendizado de máquina, você ajusta um modelo em um conjunto de dados. Este é o conjunto de números em forma de tabela em que cada linha representa uma observação e cada coluna representa uma característica da observação.

m	*Idade*	*Peso (Kg)*	*Pressão Arterial*
1	52	78.5	132
2	59	83.5	143
3	67	88.0	153
4	73	95.7	162
5	64	88.9	154
6	74	99.8	168
7	54	85.3	137
8	61	85.3	149
9	65	93.9	159
10	46	75.7	128
11	72	98.4	166

$$\begin{bmatrix} 52 \\ 78{,}5 \\ 132 \end{bmatrix}$$

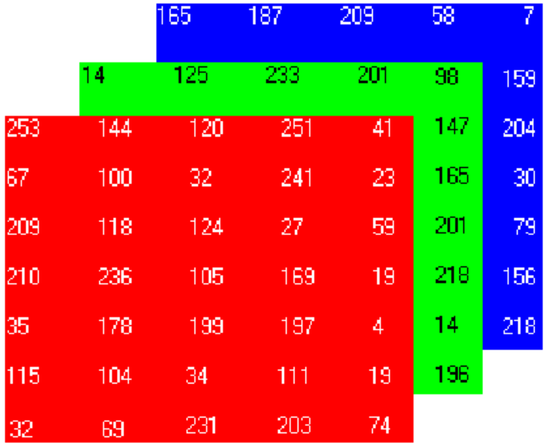


IMAGENS E FOTOGRAFIAS

Cada imagem é uma estrutura de tabela com um valor de pixel em cada célula para imagens em preto e branco ou 3 valores de pixel em cada célula para uma imagem colorida.

Uma foto é mais um exemplo de matriz da álgebra linear.

As operações na imagem, como corte, redimensionamento etc, são todas descritas usando a notação e as operações da álgebra linear.



ONE HOT ENCODING

Às vezes, você trabalha com dados categóricos no aprendizado de máquina.

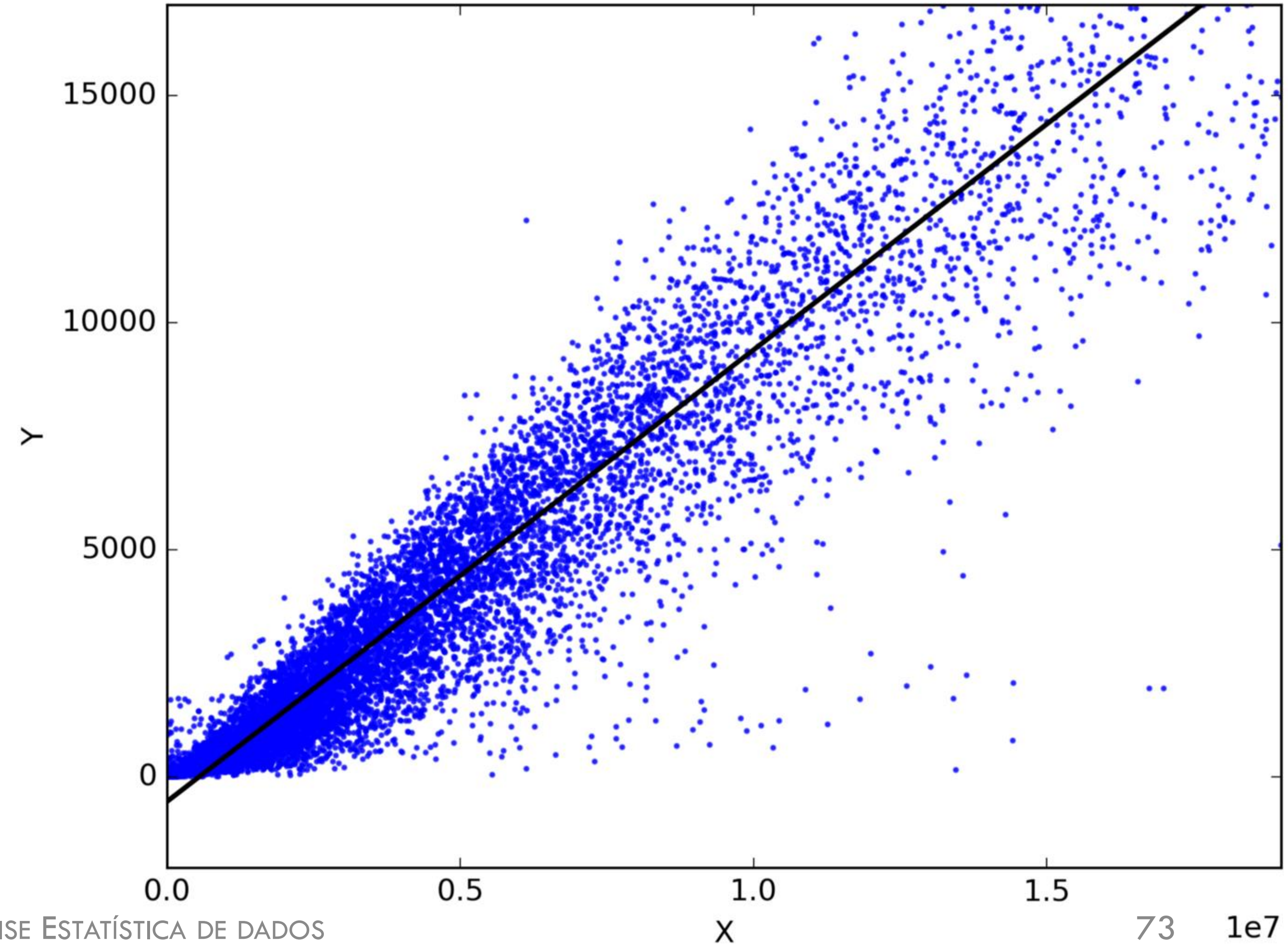
É comum codificar variáveis categóricas para torná-las mais fáceis de trabalhar e aprender. Uma codificação popular para variáveis categóricas é a codificação *one hot*.

	Gato	Cachorro	Zebra
	1	0	0
	0	1	0
	0	0	1

REGRESSÃO LINEAR

A regressão linear é um método antigo da estatística para descrever as relações entre as variáveis.

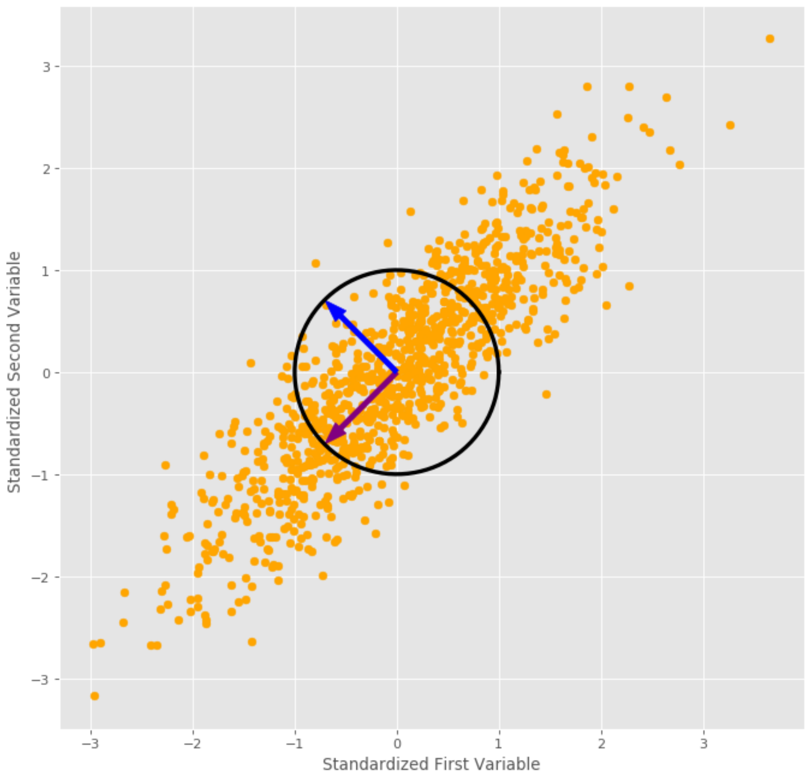
A maneira mais comum de resolver a regressão linear é por meio de uma otimização de mínimos quadrados que é resolvida usando métodos de fatoração, como uma decomposição LU ou uma decomposição de valor singular ou SVD .



PCA E SVD

Principal Component Analysis
Singular-Value Decomposition

O PCA e SVD são métodos de fatoração de matrizes da álgebra linear usados para redução de dimensionalidade.



$$A = U D V^T$$

Left singular vectors

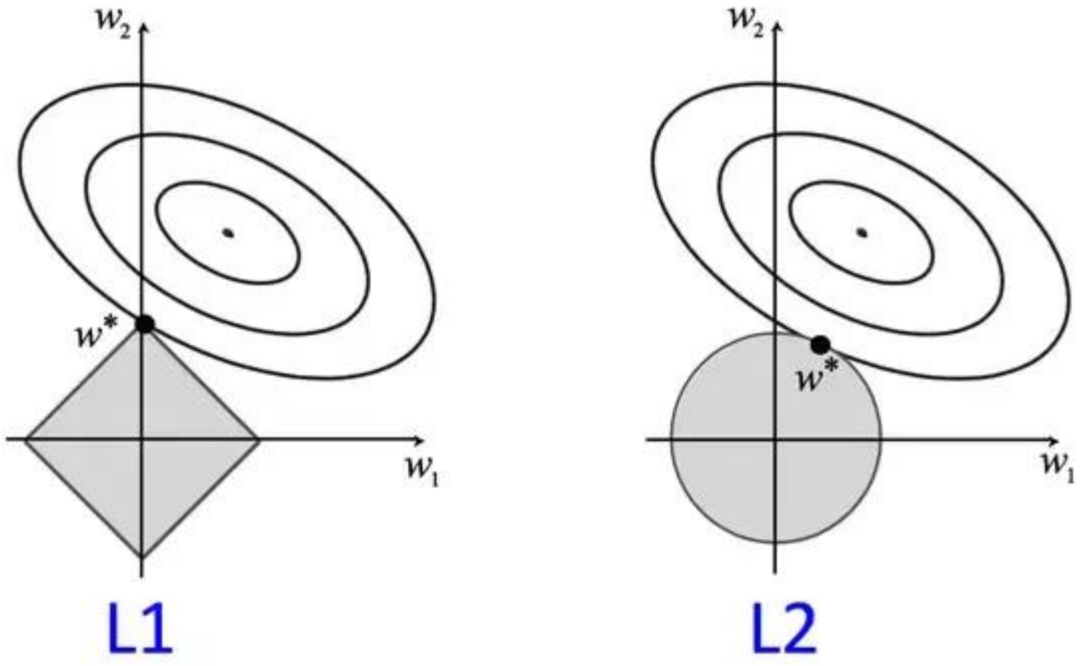
Singular values

Right singular vectors

REGULARIZAÇÃO

Técnicas de regularização são utilizadas para evitar que o modelo treinado se torne tão específico que não consiga trazer bons resultados com dados nunca vistos.

As implementações comuns incluem as formas de regularização L2 e L1. Ambas as formas de regularização são de fato uma medida da magnitude ou comprimento dos coeficientes como um vetor e são métodos retirados diretamente da álgebra linear chamada norma vetorial.



ANÁLISE SEMÂNTICA LATENTE

No subcampo de aprendizado de máquina para trabalhar com dados de texto chamado processamento de linguagem natural, é comum representar documentos como grandes matrizes de ocorrências de palavras.

Esta é uma representação de matriz esparsa do texto. Métodos de fatoração de matrizes, como a decomposição de valor singular, podem ser aplicados a essa matriz esparsa, que tem o efeito de destilar a representação até sua essência mais relevante.

	words	rain	a	paper	they	slip	the	universe	...
Words are flowing out like endless rain into a paper cup,	1	1	1	1	0	0	0	0	...
They slither while they pass, they slip away across the universe	0	0	0	0	3	1	1	1	...

SISTEMAS DE RECOMENDAÇÃO

Sistemas de recomendação são problemas de modelagem preditiva que envolvem a recomendação de produtos.

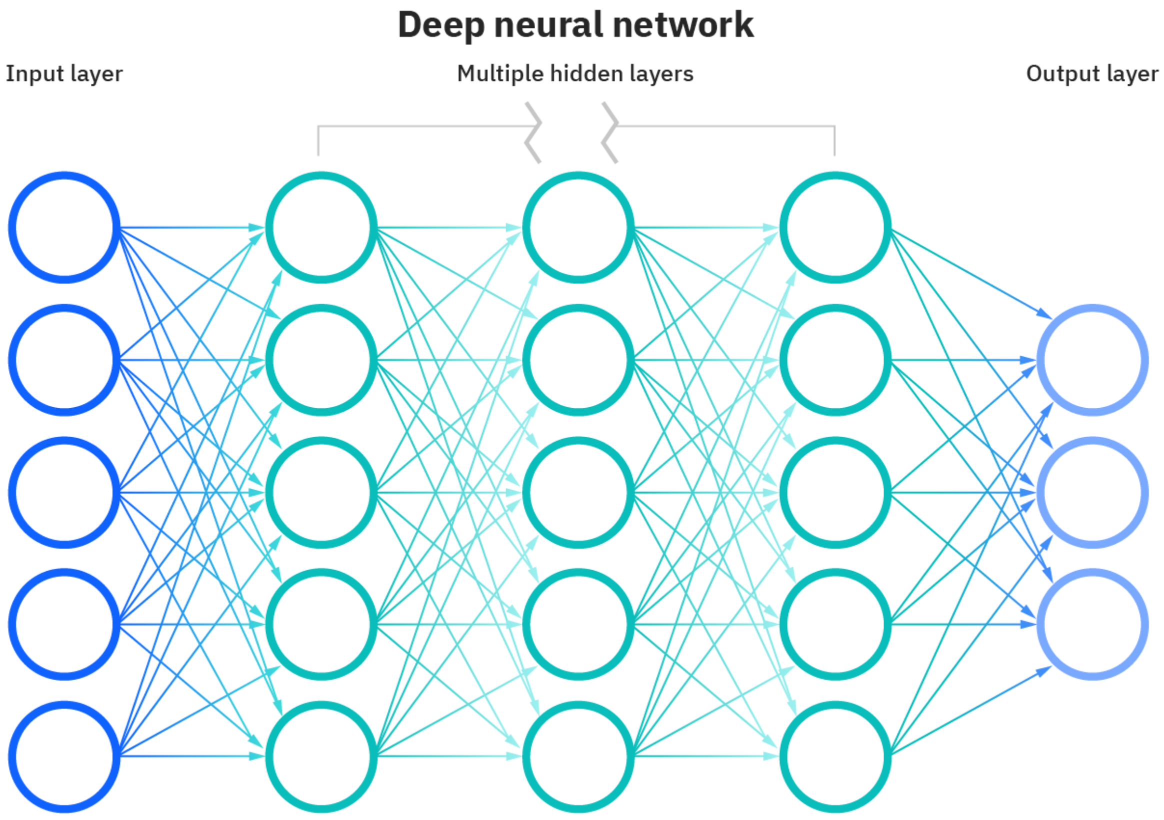
Um exemplo simples de aplicação de Álgebra Linear em sistemas de recomendação está no **cálculo da similaridade** entre vetores esparsos de comportamento do cliente usando **medidas de distância** como distância euclidiana ou produtos escalares.

REDES NEURAIS

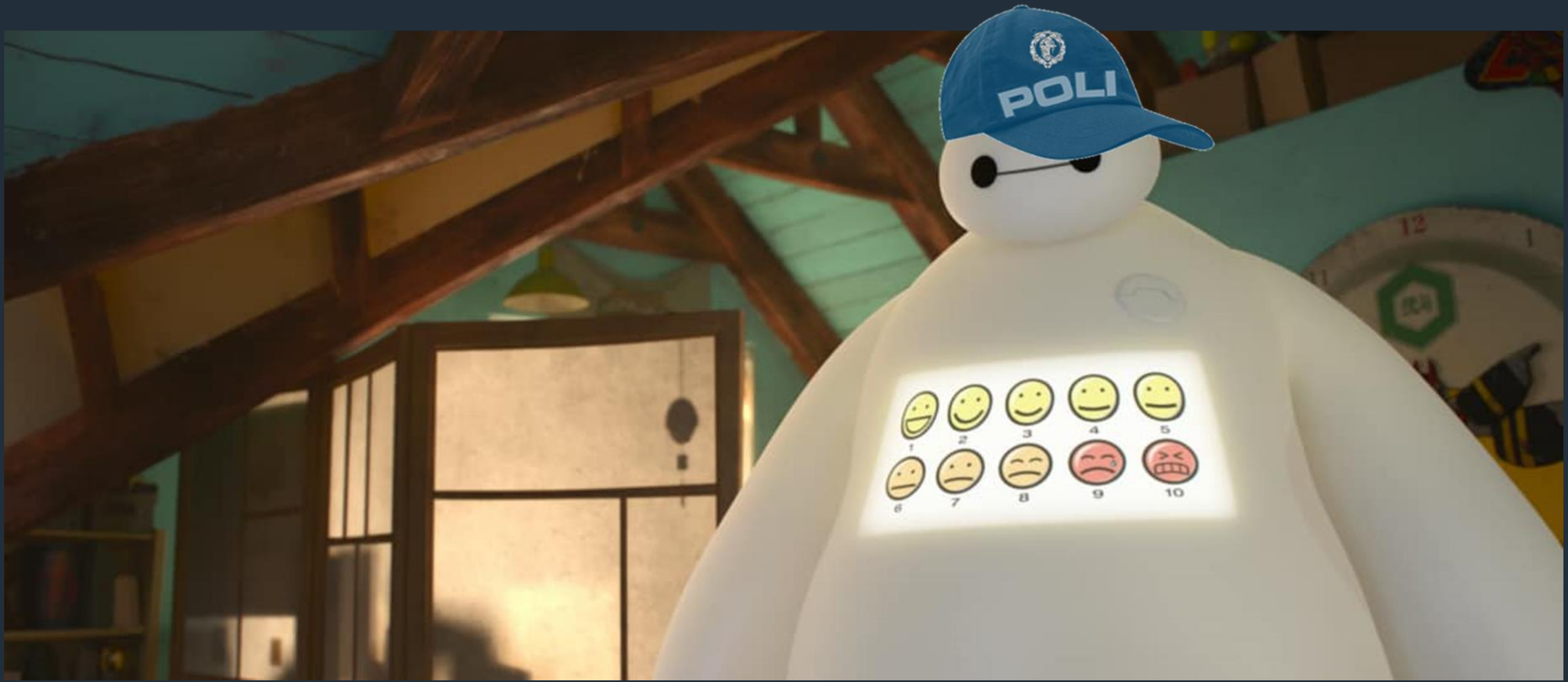
A execução de redes neurais envolve estruturas de dados de álgebra linear multiplicadas e somadas.

Escalados para várias dimensões, os métodos de aprendizado profundo funcionam com vetores, matrizes e até tensores de entradas e coeficientes.

A álgebra linear é central para a descrição de métodos de aprendizado profundo via notação matricial para a implementação de métodos de aprendizado profundo, como a biblioteca TensorFlow Python do Google que tem a palavra "tensor" em seu nome.



"On a scale of one to ten, how would you rate your pain?"



ACABOU...

Revejam o material disponibilizado em aula.
Refaçam exercícios.
Até a próxima semana!!!