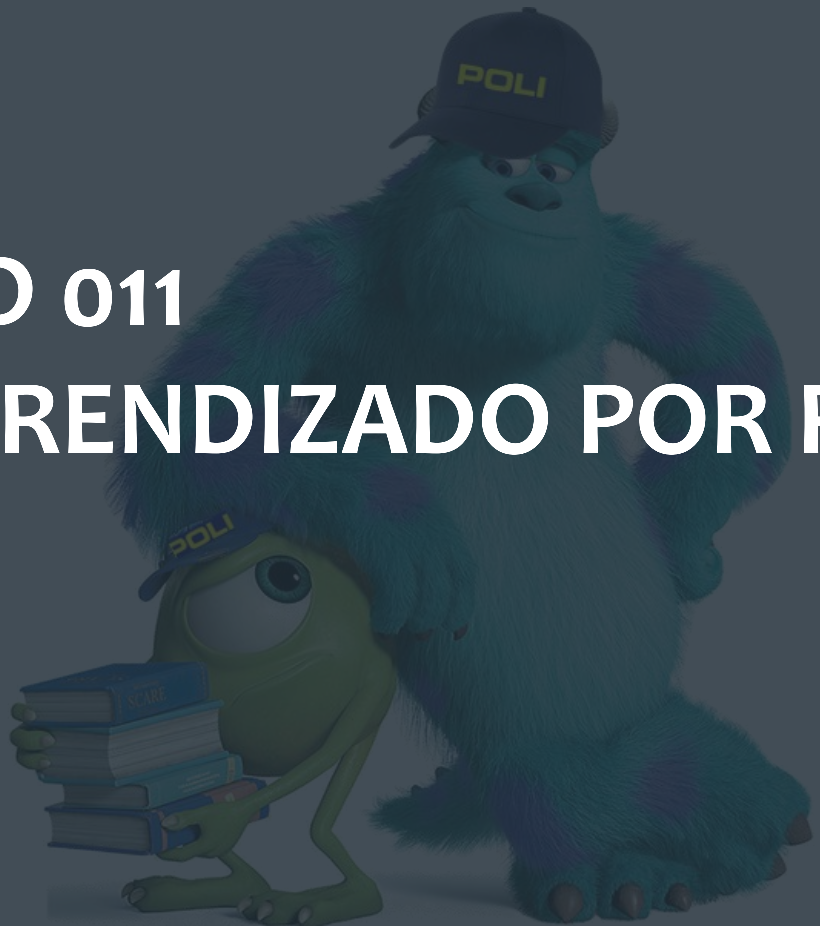


IAD 011
APRENDIZADO POR REFORÇO

TEORIA

You and I are a team. Nothing is more important than our friendship.
Mike Wazoski
Monsters Inc.

CADEIAS DE MARKOV

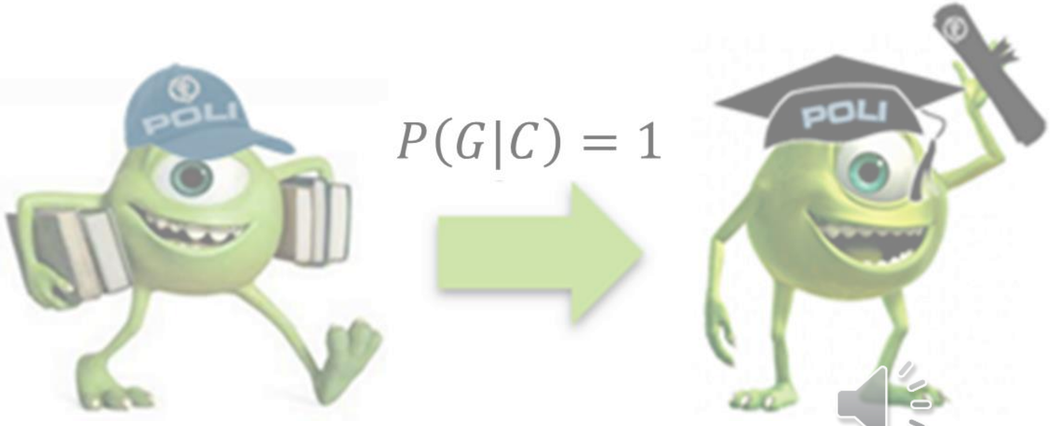
Larissa Driemeier
Thiago de C. Martins

ESTADO DE MARKOV (MARKOV STATE)

Frequentemente, são feitas observações em um período de tempo, influenciadas por efeitos aleatórios, não só em um único instante, mas por todo o intervalo de tempo ou sequência de tempos que se está considerando. Essa situação é denominada um **Processo Estocástico.**

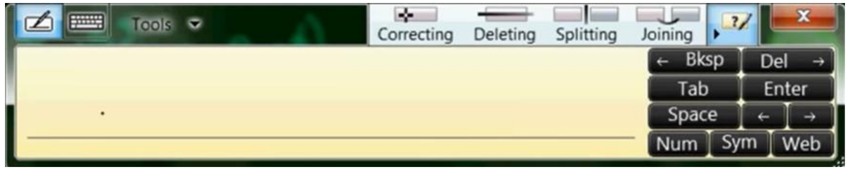
Processos Estocásticos são usados para descrever um sistema operando sobre algum período de tempo. Existem vários modelos de Processos Estocásticos, porém, abordaremos o **Modelo de Markov**.

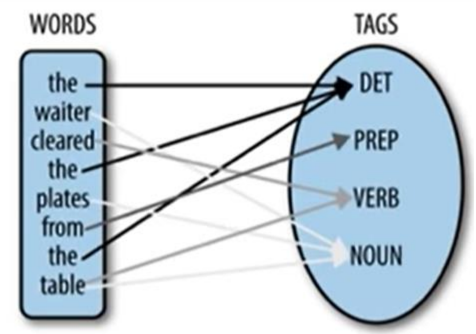
Andrei Andreyevich Markov
(*1856, Ryazan, Russia; †1922, São Petersburgo, Russia).

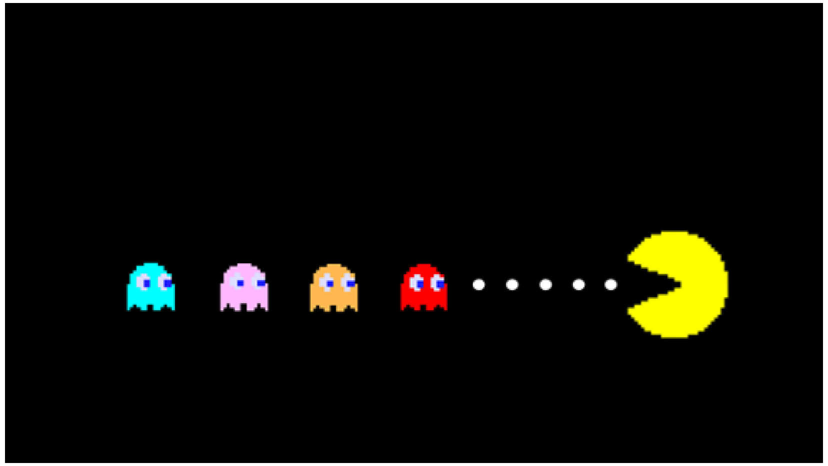


MARKOV

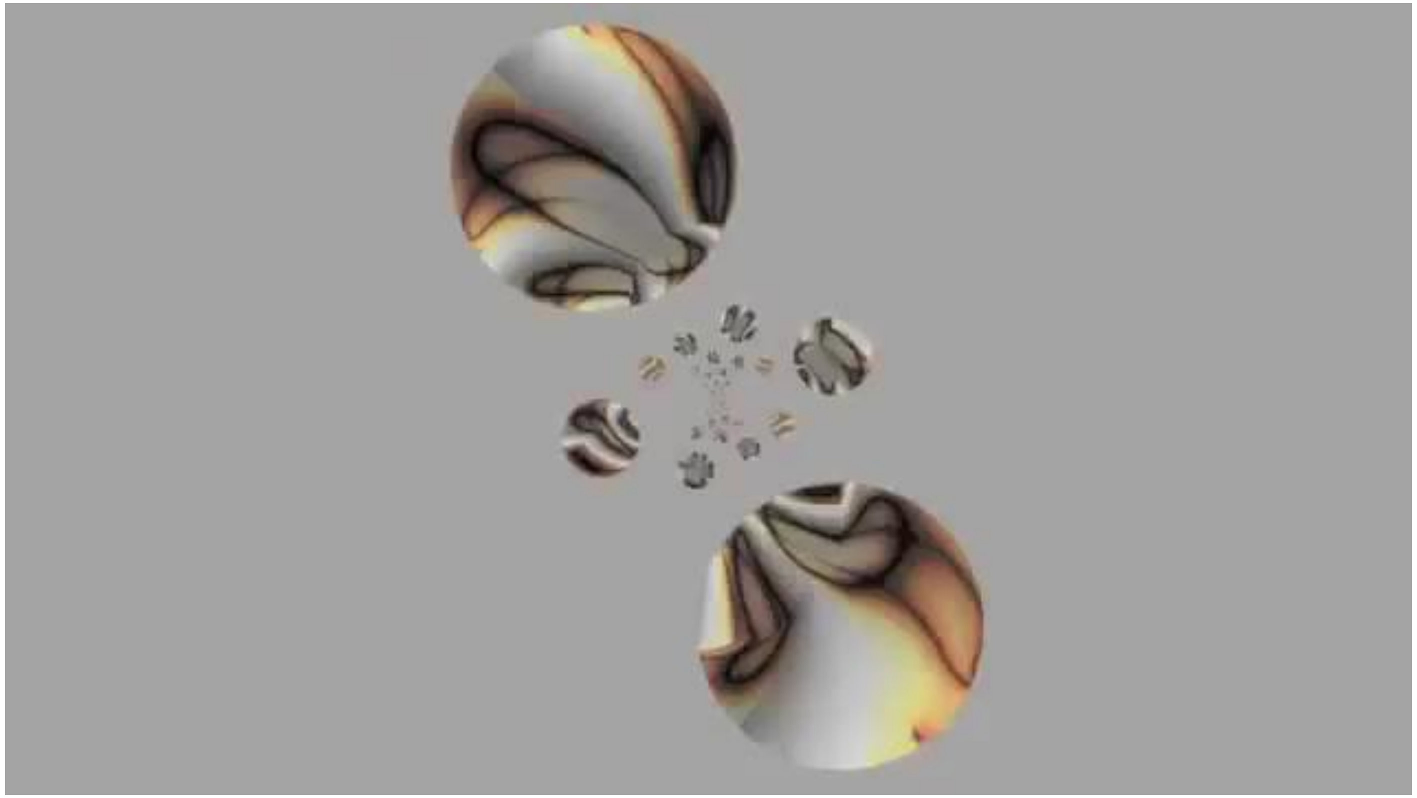
A aplicação do Modelo de Markov inclui aprendizado por reforço e reconhecimento de padrões *temporais*, como fala, escrita, reconhecimento de gestos, marcação de parte do discurso, acompanhamento de partituras, bioinformática...



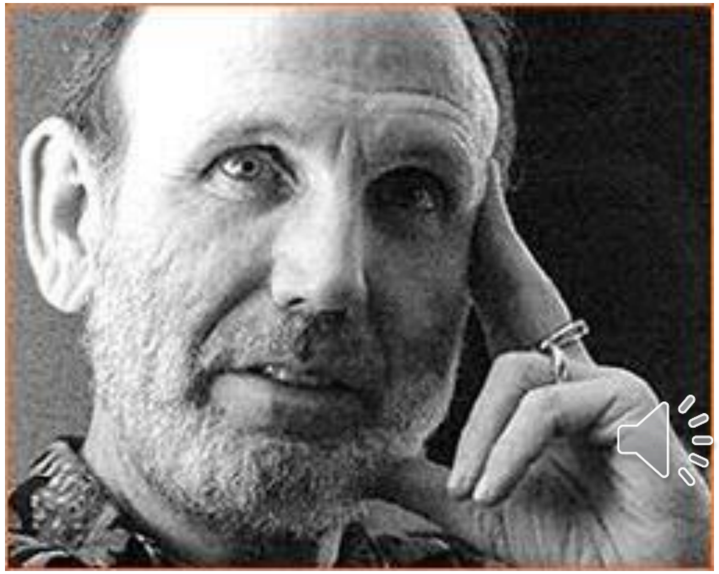




MÚSICA?



David Cope usou seu *programa Experiments in Musical Intelligence* para compor Zodiac, doze obras curtas para orquestra de cordas no estilo de Vivaldi. Este é o Touro. O vídeo também é criado algoritmicamente.



https://www.youtube.com/watch?v=2kuY3BrmTfQ&feature=youtu.be

http://www.thesoundstew.com/2010/07/interview-with-david-cope.html

TEMPO DISCRETO

Vamos pensar em uma sequência de estados de tempo discretos estocásticos $S_1, S_2, \dots, S_T$ **com a propriedade de Markov.** O conjunto de estados define um episódio finito com dimensão T ,

$$\boldsymbol{S} = [\, S_1 \quad S_2 \quad \cdots \quad S_T]$$

UM POUCO DE NOTAÇÃO MATEMÁTICA

$$S_1 \rightarrow S_2 \rightarrow S_3 \rightarrow \cdots \rightarrow S_T$$

$$\boldsymbol{S} = [\, S_1 \quad S_2 \quad \cdots \quad S_T]$$

$$P(\boldsymbol{S}) = P(\, S_1, S_2, \cdots, S_T)?$$

$$P(\, S_1, S_2) = P(\, S_2 |\, S_1) P(\, S_1)$$

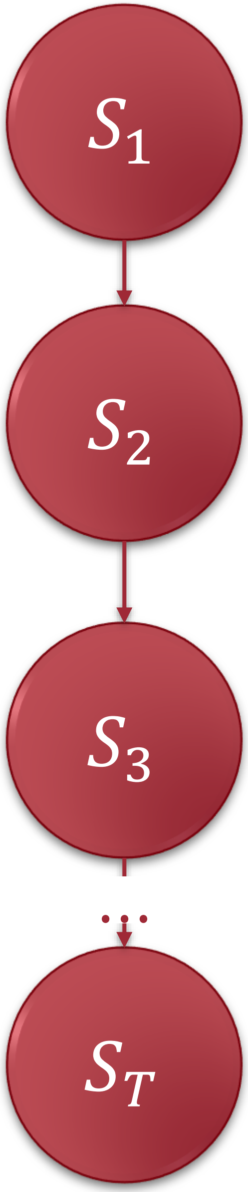
$$P(\, S_1, S_2, \cdots, S_T) = P(\, S_T | S_1, S_2, \cdots, S_{T-1}) P(S_1, S_2, \cdots, S_{T-1})$$

$$P(S_1, S_2, \cdots, S_{T-1}) = P(\, S_{T-1} | S_1, S_2, \cdots, S_{T-2}) P(S_1, S_2, \cdots, S_{T-2})$$

$$P(S_1, S_2, \cdots, S_{T-2}) = P(\, S_{T-2} | S_1, S_2, \cdots, S_{T-3}) P(S_1, S_2, \cdots, S_{T-3})$$

$$P(\boldsymbol{S}) = P(\, S_T | S_1, S_2, \cdots, S_{T-1}) P(\, S_{T-1} | S_1, S_2, \cdots, S_{T-2}) \ldots P(S_1)$$

MARKOV DE PRIMEIRA ORDEM



Um estado S_t é de Markov se, e somente se, satisfaz a **propriedade de Markov:**

$$P(\,S_t|S_1, S_2, \cdots, S_{t-1}) = P(\,S_t|\,S_{t-1})$$

Então... Se havíamos definido

$$P(\boldsymbol{S}) = P(\,S_T|S_1, S_2, \cdots, S_{T-1})P(\,S_{T-1}|S_1, S_2, \cdots, S_{T-2}) \ldots P(S_1)$$

Podemos reescrever como

$$P(\boldsymbol{S}) = P(\,S_T|\,S_{T-1})P(\,S_{T-1}|\,S_{T-2}) \ldots P(S_1)$$

PROBABILIDADE DE EMISSÃO

$$S_1 \to S_2 \to S_3 \to \cdots \to S_T$$

Probabilidade de emissão do estado $\boldsymbol{S}$

$$P(\boldsymbol{S}) = P(S_1) \prod_{i=2}^{n} P(\, S_i |\, S_{i-1})$$

Condição Inicial

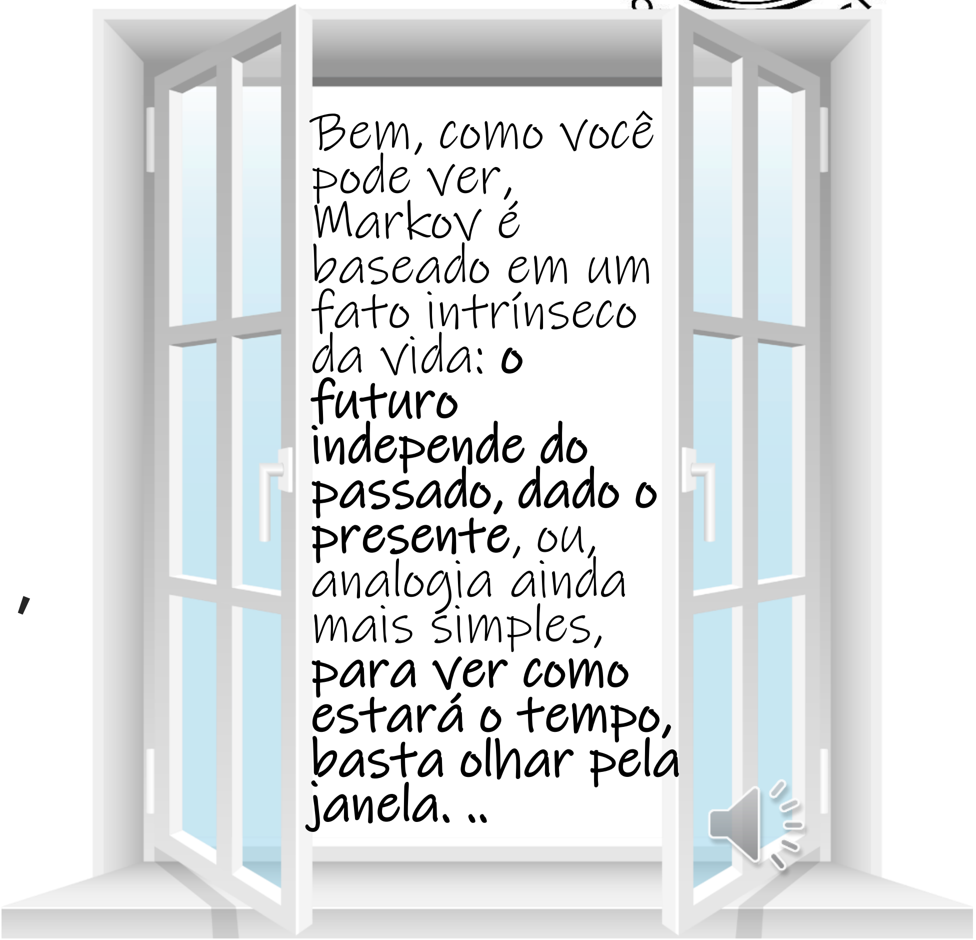
Probabilidade de emissão $a_{\,S_i,\, S_{i-1}} = P(\, S_i |\, S_{i-1})$

PROPRIEDADE DE MARKOV

O estado S_t é uma estatística suficiente do futuro pois captura todas as informações relevantes do histórico.

Uma vez que o estado é conhecido, a história pode ser jogada fora.

Isto é, pode-se tomar decisões com base apenas em S_t , sem a necessidade de conhecer como o estado S_t foi alcançado.



‘E AGORA, JOSÉ?’ CARLOS DRUMMOND DE ANDRADE

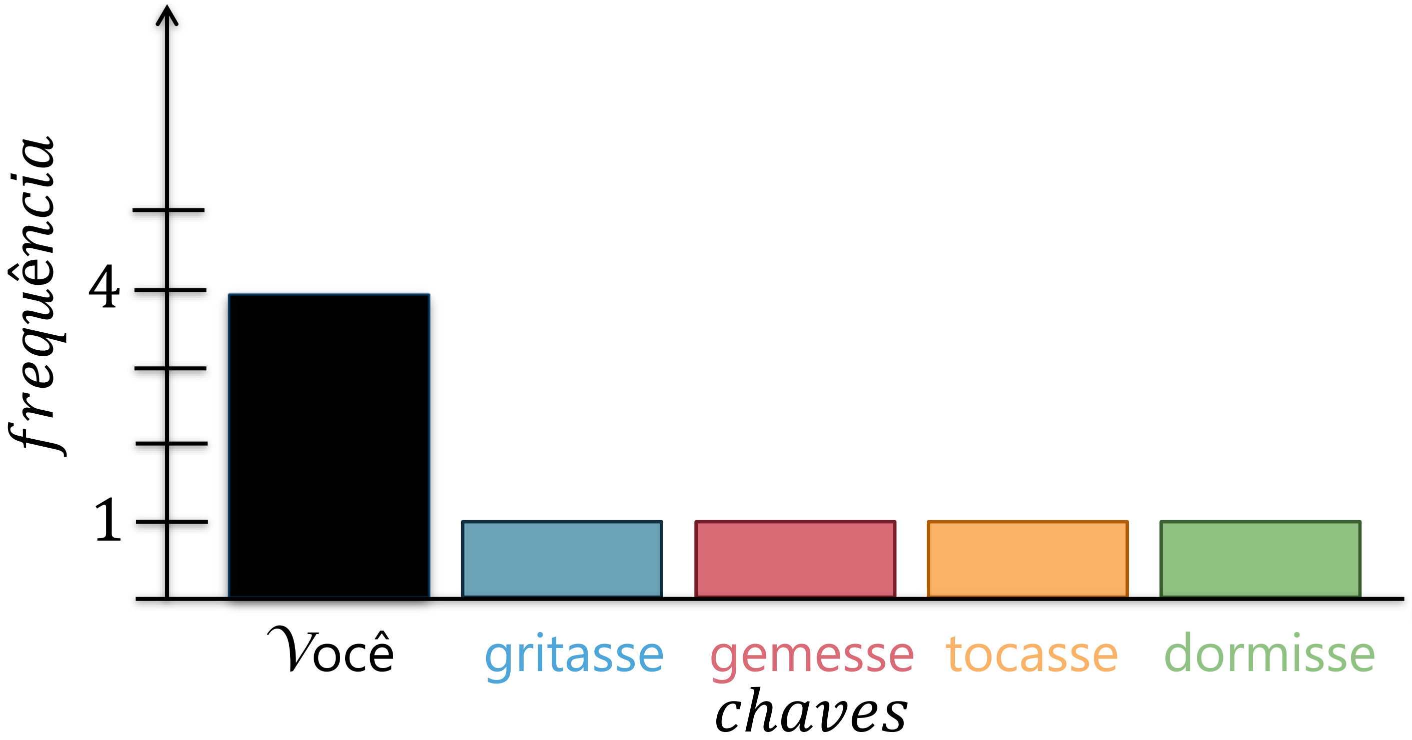
Se você gritasse,
se você gemesse,
se você tocasse
a valsa vienense,
se você dormisse,
se você cansasse,
se você morresse...
Mas você não morre,
você é duro, José!

As cadeias de Markov são geralmente definidas por um conjunto de estados e pelas probabilidades de transição entre cada estado.

Você gritasse Você gemesse Você tocasse Você dormisse oito palavras (**tokens**), mas apenas cinco palavras únicas (**chaves**)

Você gritasse Você gemesse Você tocasse Você dormisse

Você	4
Gritasse	1
Gemesse	1
Tocasse	1
dormisse	1



START
Você gritasse Você gemesse Você tocasse Você dormisse
END

START	1
Você	4
Gritasse	1
Gemesse	1
Tocasse	1
Dormisse	1
END	1

Cada frase é precedida por um símbolo invisível *START* e sempre termina com um símbolo *END*.

VAMOS APLICAR O MODELO DE MARKOV

START Você gritasse Você gemesse Você tocasse Você dormisse *END*

(*START*, Você)
(Você, gritasse)
(gritasse, Você)
(Você, gemesse)
(gemesse, Você)
(Você, tocasse)
(tocasse, Você)
(Você,dormisse)
(dormisse,*END*)
(*END*, none)

(*START*,Você)
(Você, gritasse) (Você, gemesse) (Você, tocasse) (Você, dormisse)
(gritasse, Você)
(gemesse, Você)
(tocasse, Você)
(dormisse, *END*)
(*END*, none)

Cada chave tem palavras possíveis que podem segui-la. Se déssemos essa estrutura para alguém, esse alguém poderia, com certeza, recriar nossa frase original???

VAMOS TENTAR...

START Você dormisse *END*

(*START*, Você)

(Você, gritasse) (Você, gemesse) (Você, tocasse) (Você, dormisse)

(gritasse, Você)

(gemesse, Você)

(tocasse, Você)

(dormisse, *END*)

(*END*, none)

(*START*, Você)

(Você, gritasse) (Você, gemesse) (Você, tocasse) (Você, dormisse)

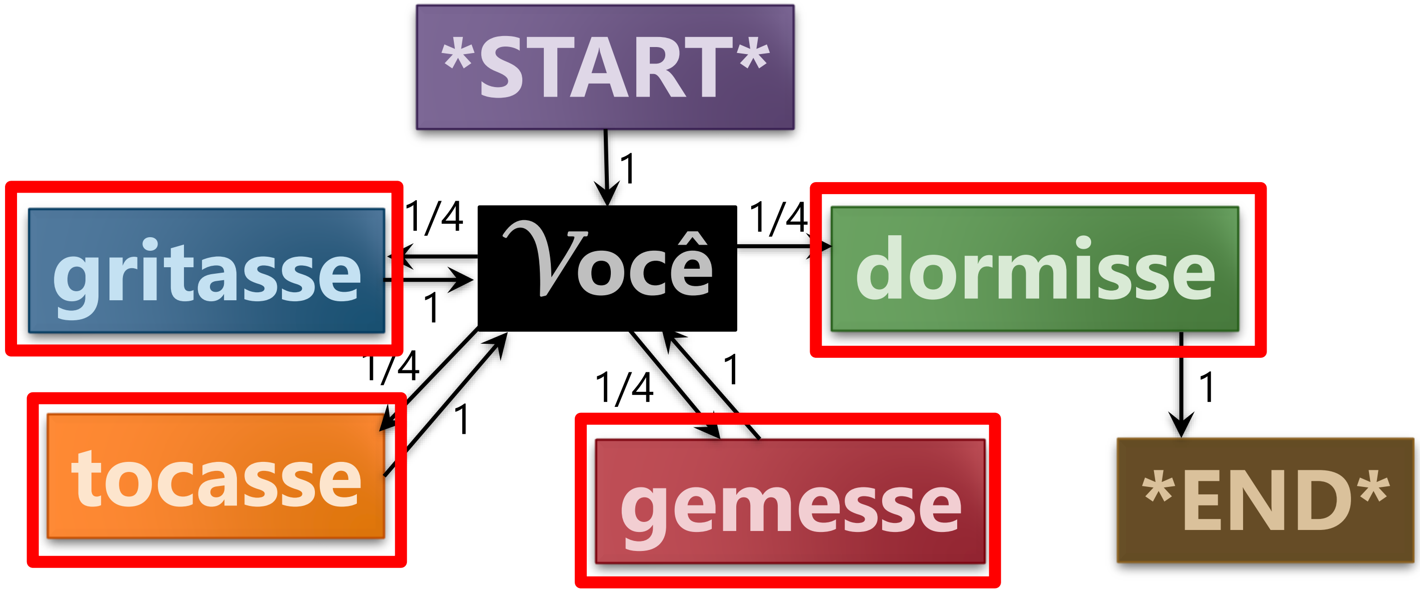
(gritasse, Você)

(gemesse, Você)

(tocasse, Você)

(dormisse, *END*)

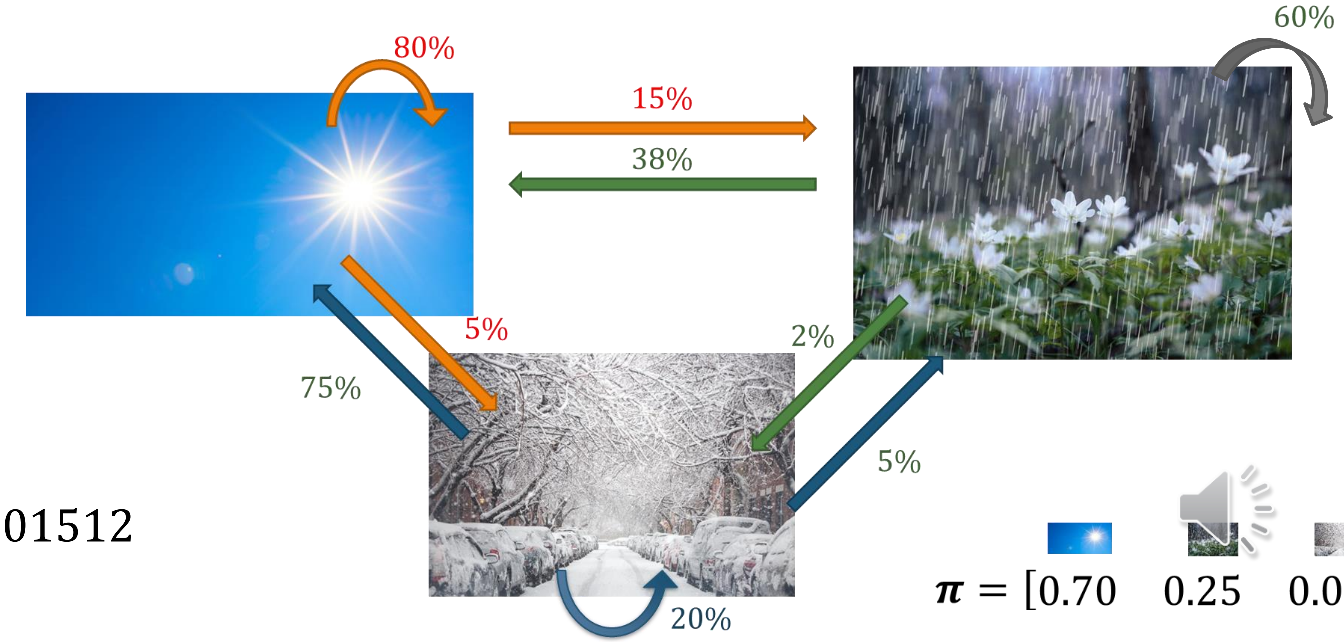
(*END*, none)



START Você gritasse Você gemesse Você tocasse Você dormisse *END*

QUAL A PROBABILIDADE DA SÉRIE ABAIXO OCORRER?

$$P(S_1) \times P(S_2|S_1) \times P(S_2|S_2) \times P(S_2|S_2) \times P(S_3|S_2) \times P(S_3|S_3)$$



$\boldsymbol{\pi} = [0.70 \quad 0.25 \quad 0.05]$

Resposta:

$$P = 0{,}7 \times 0{,}15 \times 0{,}6 \times 0{,}6 \times 0{,}02 \times 0{,}2 = 0{,}0001512$$

INGREDIENTES DO MODELO DE MARKOV

Um Processo de Markov é uma tupla $\langle \mathcal{S}, \mathcal{P} \rangle$ onde $\mathcal{S}$ é um conjunto (finito) de estados e $\mathcal{P}$ é a matriz de probabilidade de transição de estado.

Estados possíveis

$$\mathcal{S} = \{s_1, s_2, \dots, s_n\}$$

Probabilidade de transição de estado (matriz $n \times n$)

$$p_{ij} = \mathbb{P}\left(S_{t+1} = s_j \middle| S_t = s_i\right)$$

Estado inicial

$$\boldsymbol{\pi} = \mathbb{P}\left[s_{0_i} = s_i\right]$$

DESTINO

$$\boldsymbol{\mathcal{P}} = \begin{array}{cc} \begin{matrix} s_1 & \quad s_2 & \quad \cdots & \quad s_n \end{matrix} & \\ \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} & \cdots & p_{1n} \\ p_{21} & p_{22} & \cdots & p_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ p_{n1} & p_{n2} & \cdots & p_{nn} \end{bmatrix} & \begin{matrix} s_1 \\ s_2 \\ \vdots \\ s_n \end{matrix} \end{array}$$

ORIGEM

p_{ij} = probabilidade do estado passar de s_i para o estado s_j

INGREDIENTES DO MODELO DE MARKOV

Estados possíveis $\{s_1, s_2, \dots, s_N\}$

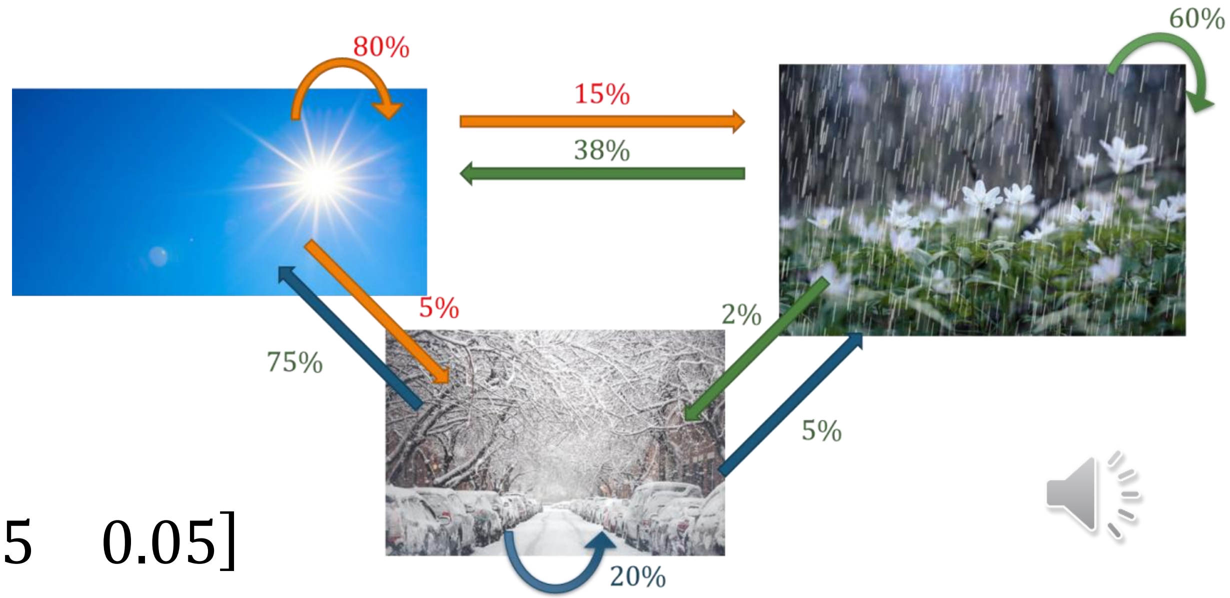
$$\mathcal{S} = \{s_{sol}, s_{chuva}, s_{neve}\}$$

Probabilidade de transição de estado $p_{ij} = \mathbb{P}(S_{t+1} = s_j | S_t = s_i)$

DESTINO

$$\mathcal{P} = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} \text{SOL} & \text{CHUVA} & \text{NEVE} \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0.80 & 0.15 & 0.05 \\ 0.38 & 0.60 & 0.02 \\ 0.75 & 0.05 & 0.20 \end{bmatrix} \end{array} \begin{array}{l} \\ \text{SOL} \\ \text{CHUVA} \\ \text{NEVE} \end{array}$$

ORIGEM



Estado inicial $\pi = \mathbb{P}[S_{0_i} = s_i]$

$$\boldsymbol{\pi} = [0.7 \quad 0.25 \quad 0.05]$$

COMO ACHAR UM ESTADO FUTURO

Estado FUTURO

Estado INICIAL

Matriz de Transição

ORIGEM

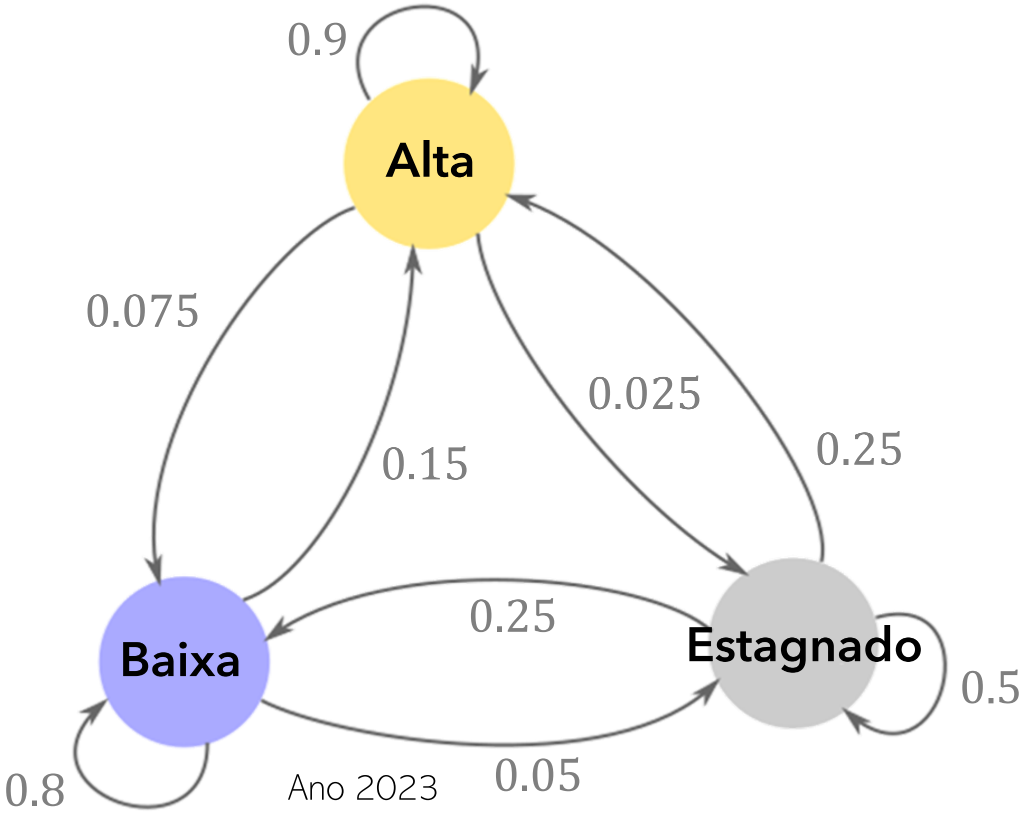
$$
\begin{array}{c}
\left[\mathbb{P}(s_{sol}) \quad \mathbb{P}(s_{chuva}) \quad \mathbb{P}(s_{neve})\right] = \left[0.7 \quad 0.25 \quad 0.05\right]
\end{array}
\begin{array}{ccc l}
\text{SOL} & \text{CHUVA} & \text{NEVE} & \\
\multicolumn{3}{c}{\left[\begin{matrix} 0.80 & 0.15 & 0.05 \\ 0.38 & 0.60 & 0.02 \\ 0.75 & 0.05 & 0.20 \end{matrix}\right]} & \begin{matrix} \text{SOL} \\ \text{CHUVA} \\ \text{NEVE} \end{matrix}
\end{array}
= \left[0.69 \quad 0.26 \quad 0.05\right]
$$

DESTINO

$$
\begin{aligned}
\mathbb{P}(S_2 = s_{sol}) = \; & \mathbb{P}(S_1 = s_{sol} | S_0 = s_{sol})\mathbb{P}(S_0 = s_{sol}) + \\
& \mathbb{P}(S_1 = s_{sol} | S_0 = s_{chuva})\mathbb{P}(S_0 = s_{chuva}) + \\
& \mathbb{P}(S_1 = s_{sol} | S_0 = s_{neve})\mathbb{P}(S_0 = s_{neve})
\end{aligned}
$$

EXEMPLO

Ache a matriz de transição do problema de Mercado abaixo



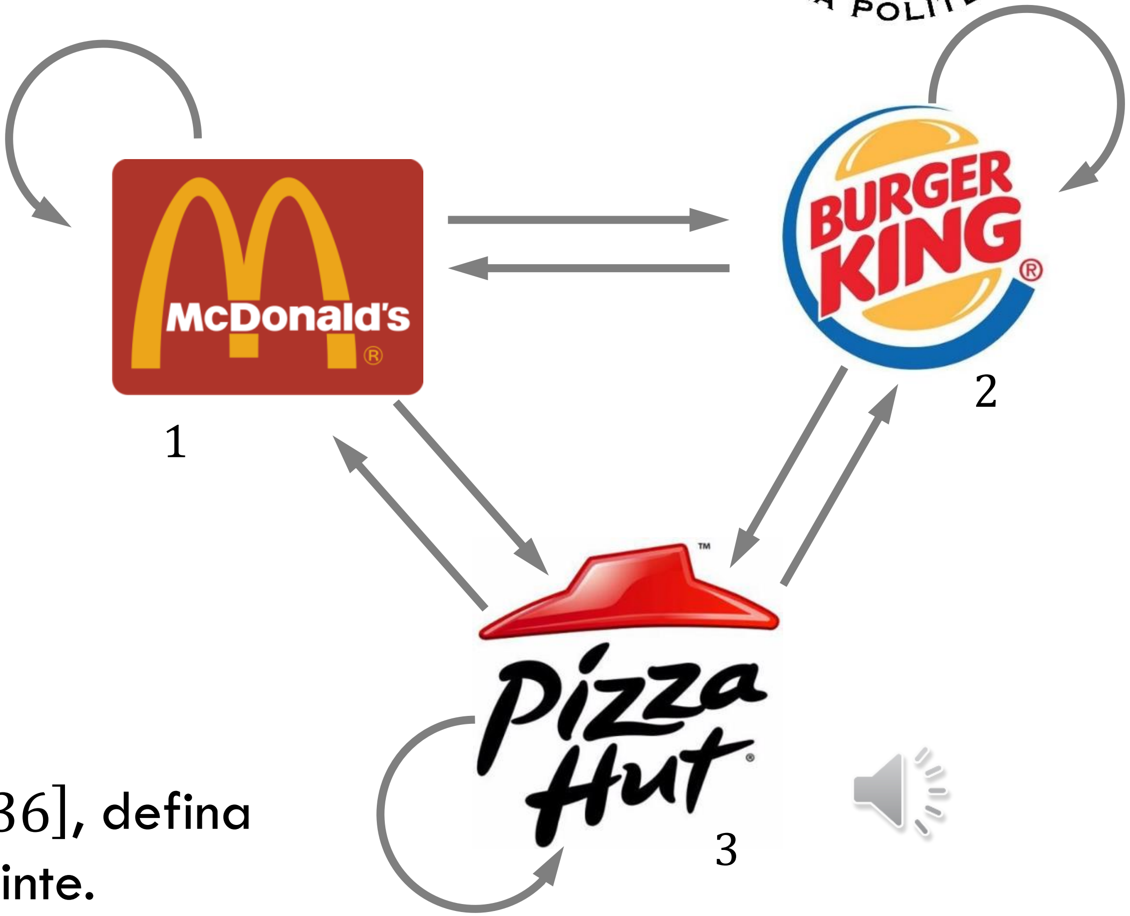
$$\mathcal{P} = \begin{bmatrix} 0.9 & & \\ & 0.8 & \\ & & 0.1 \end{bmatrix}$$

AGORA, O CONTRÁRIO.

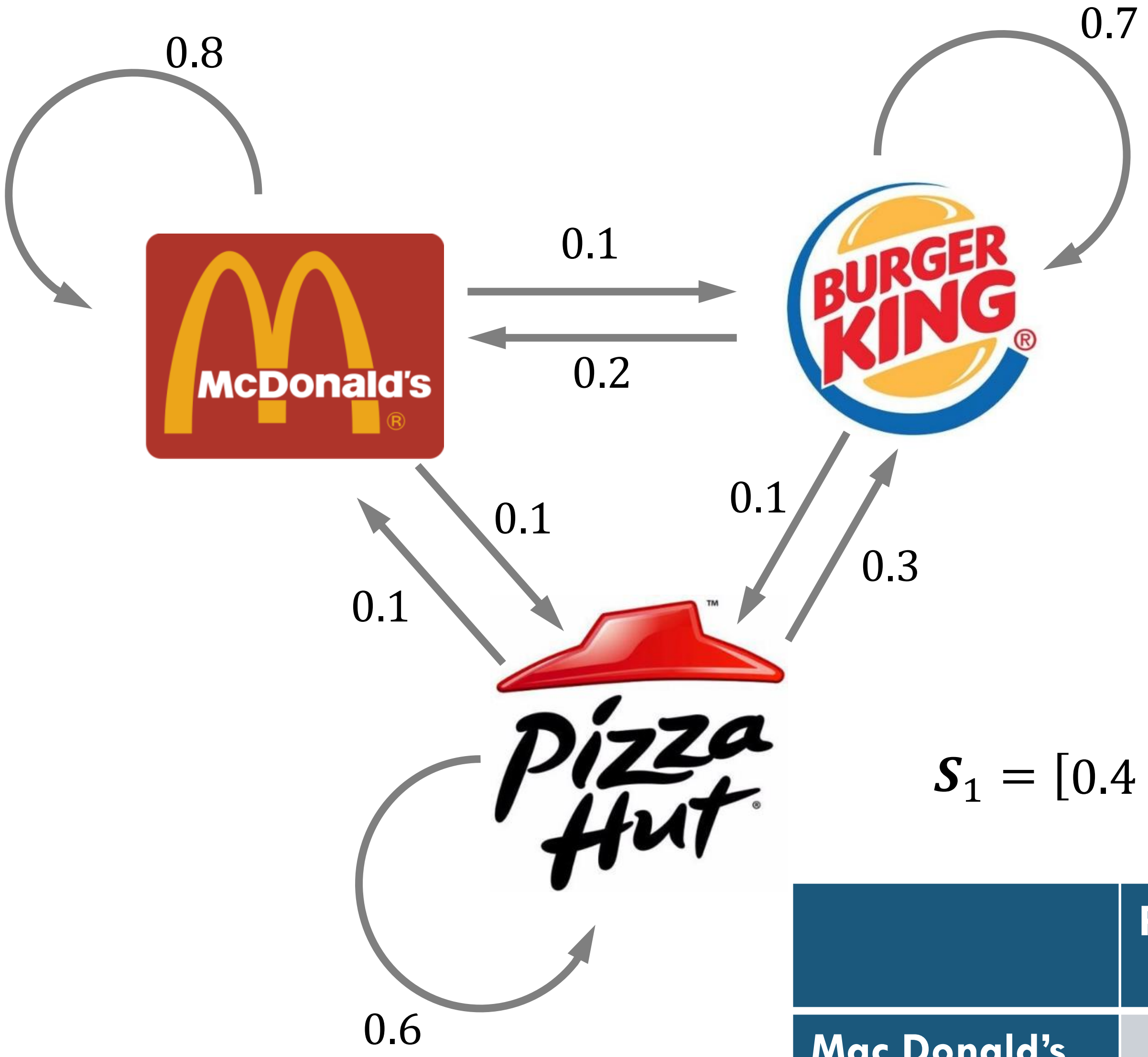
Queremos analisar a transação de clientes em uma área de alimentação de um shopping. Analisamos os clientes almoçando nos três lugares mostrados: Mac Donald's (s_1), Burger King (s_2) e Pizza Hut (s_3), respectivamente. A probabilidade do cliente voltar ou ir para outro lugar é definida conforme a matriz de transição $p_{ij} = \mathbb{P}(S_{t+1} = s_j | S_t = s_i)$

$$\boldsymbol{\mathcal{P}} = \begin{bmatrix} 0.8 & 0.1 & 0.1 \\ 0.2 & 0.7 & 0.1 \\ 0.1 & 0.3 & 0.6 \end{bmatrix}$$

OBS: A matriz de transição tem um ciclo de 24 horas.



1. Complete a cadeia de Markov ao lado;
2. Dada a probabilidade inicial $\boldsymbol{\pi} = [0.4 \quad 0.24 \quad 0.36]$, defina a distribuição provável de 500 clientes no dia seguinte.



DESTINO

$$\mathcal{P} = \begin{array}{c} \\ \\ \\ \\ \end{array}\begin{array}{ccc} \text{Mac} & \text{Burger} & \text{Pizza} \\ \end{array}$$

$$\mathcal{P} = \begin{bmatrix} 0.8 & 0.1 & 0.1 \\ 0.2 & 0.7 & 0.1 \\ 0.1 & 0.3 & 0.6 \end{bmatrix} \begin{array}{l} \text{Mac} \\ \text{Burger} \\ \text{Pizza} \end{array}$$

ORIGEM

$$S_1 = [0.4 \quad 0.24 \quad 0.36] \begin{bmatrix} 0.8 & 0.1 & 0.1 \\ 0.2 & 0.7 & 0.1 \\ 0.1 & 0.3 & 0.6 \end{bmatrix} = [0.404 \quad 0.316 \quad 0.280]$$

	Probabilidade	# Clientes dia 0	Probabilidade	# Clientes dia 1
Mac Donald's	0.4	200	0.404	202
Burger King	0.24	120	0.316	158
Pizza Hut	0.36	180	0.280	140

E O QUE ACONTECERÁ NO 2^0, 3^0 ... DIA??

$$\boldsymbol{S}_0 \rightarrow \boldsymbol{S}_1 = \boldsymbol{S}_0\mathcal{P} \rightarrow \boldsymbol{S}_2 = \boldsymbol{S}_1\mathcal{P} \rightarrow S_3 = \boldsymbol{S}_2\mathcal{P}$$

$$\boldsymbol{S}_1 = [0.40 \quad 0.240 \quad 0.360]\begin{bmatrix} 0.8 & 0.1 & 0.1 \\ 0.2 & 0.7 & 0.1 \\ 0.1 & 0.3 & 0.6 \end{bmatrix} = [0.404 \quad 0.316 \quad 0.280]$$

$$\boldsymbol{S}_2 = [0.404 \quad 0.316 \quad 0.280]\begin{bmatrix} 0.8 & 0.1 & 0.1 \\ 0.2 & 0.7 & 0.1 \\ 0.1 & 0.3 & 0.6 \end{bmatrix} = [0.414 \quad 0.346 \quad 0.240]$$

$$\boldsymbol{S}_3 = [0.414 \quad 0.346 \quad 0.240]\begin{bmatrix} 0.8 & 0.1 & 0.1 \\ 0.2 & 0.7 & 0.1 \\ 0.1 & 0.3 & 0.6 \end{bmatrix} = [0.424 \quad 0.356 \quad 0.220]$$

$\boldsymbol{S}_0$	$\boldsymbol{S}_1$	$\boldsymbol{S}_2$	$\boldsymbol{S}_3$
200	202	207	212
120	158	173	179
180	140	120	110

ENTÃO... QUAL SERÁ O ESTADO DEPOIS DE n DIAS?

Multiplicando-se a matriz de transição $\mathcal{P}$ elevada à potência n pelo estado inicial $\boldsymbol{S}_0$ (a matriz $\boldsymbol{\pi}$) tem-se a distribuição de probabilidade do estado $\boldsymbol{S}_n$, dado o estado $\boldsymbol{S}_n$

$$\boldsymbol{S}_n = \boldsymbol{\pi}\mathcal{P}^n$$

Por exemplo:

$$\boldsymbol{S}_3 = \underbrace{\begin{bmatrix} 0.414 & 0.346 & 0.240 \end{bmatrix}}_{\boldsymbol{S}_2} \underbrace{\begin{bmatrix} 0.8 & 0.1 & 0.1 \\ 0.2 & 0.7 & 0.1 \\ 0.1 & 0.3 & 0.6 \end{bmatrix}}_{\mathcal{P}} = \begin{bmatrix} 0.424 & 0.356 & 0.220 \end{bmatrix}$$

ou

$$\boldsymbol{S}_3 = \underbrace{\begin{bmatrix} 0.40 & 0.240 & 0.360 \end{bmatrix}}_{\boldsymbol{\pi}} \underbrace{\begin{bmatrix} 0.8 & 0.1 & 0.1 \\ 0.2 & 0.7 & 0.1 \\ 0.1 & 0.3 & 0.6 \end{bmatrix}^3}_{\mathcal{P}^3} = \begin{bmatrix} 0.424 & 0.356 & 0.220 \end{bmatrix}$$

$\boldsymbol{S}_0$

$\boldsymbol{S}_1 = \boxed{\boldsymbol{S}_0\mathcal{P}}$

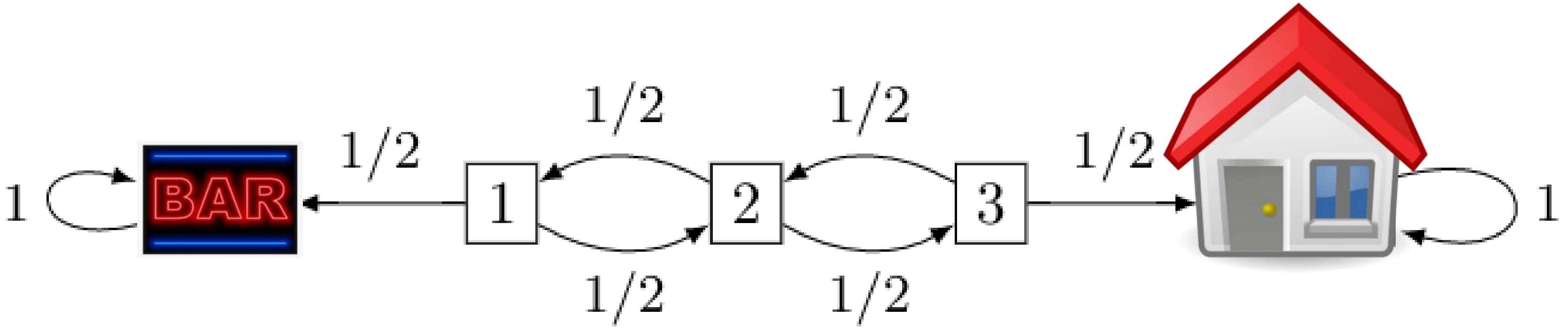
$S_2 = \boxed{\boldsymbol{S}_1\mathcal{P}}$

$S_3 = \boxed{\boldsymbol{S}_2\mathcal{P}}$

CADEIAS DE MARKOV COM ESTADOS ABSORVENTES

Um estado i da cadeia de Markov é chamado de *estado absorvente* se $p_{ii} = 1$ e, por consequência, qualquer valor da linha $p_{ij} = 0$ para $i \neq j$. Uma cadeia de Markov é dita absorvente se existe ao menos um estado absorvente, ou se for possível, a partir de qualquer estado, atingir um estado absorvente, não necessariamente em um único passo.

$$\mathcal{P} = \begin{bmatrix} 0 & 0.5 & 0 & 0.5 & 0 \\ 0.5 & 0 & 0.5 & 0 & 0 \\ 0 & 0.5 & 0 & 0 & 0.5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$



EXERCÍCIO

UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO • ESCOLA POLITÉCNICA •

Para a cadeia de Markov da rotina de Mike Wazowski ao lado, responda:

1\. Qual a matriz de $\mathcal{P}_{ss'}$ de probabilidade de transição de estado?

$$p_{ss'} = \mathbb{P}[S_{t+1} = s' | S_t = s]$$

1\. Qual a probabilidade do Mike Wazowski ir estudar, dado que ele está fazendo exercícios?

2\. Dado $\boldsymbol{\pi} = [0.1 \quad 0.3 \quad 0.3 \quad 0.3 \quad 0 \quad 0]$, qual a probabilidade dos seguintes episódios ocorrerem:

Episódio 1: (Sala de Aula, Academia, Estudo, Dorm)

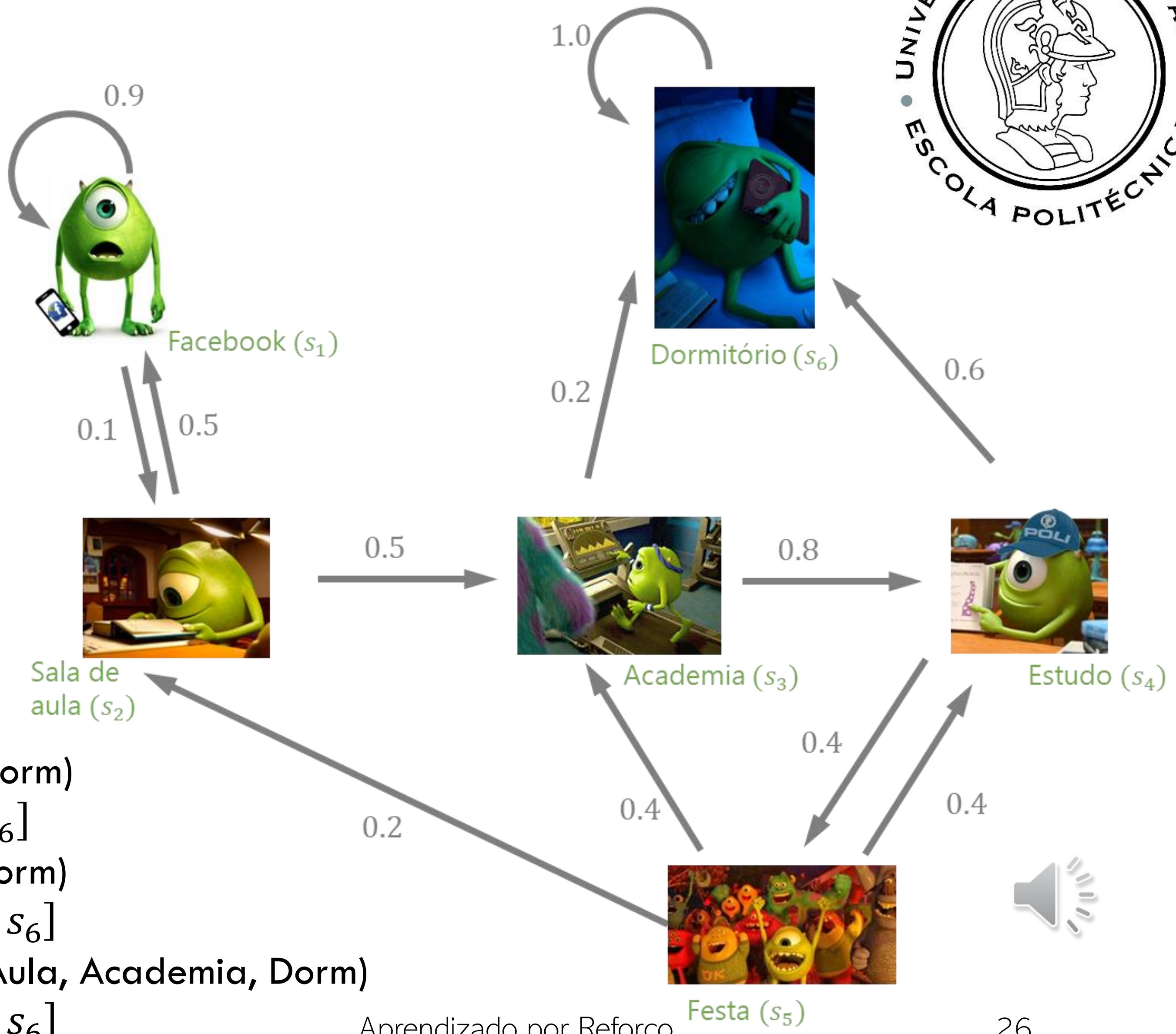
$$\mathcal{S}_1 = [s_2, s_3, s_4, s_6]$$

Episódio 2: (Academia, Estudo, Festa, Estudo, Dorm)

$$\mathcal{S}_2 = [s_3, s_4, s_5, s_4, s_6]$$

Episódio 3: (Sala de Aula, Facebook, Sala de Aula, Academia, Dorm)

$$\mathcal{S}_3 = [s_2, s_1, s_2, s_3, s_6]$$

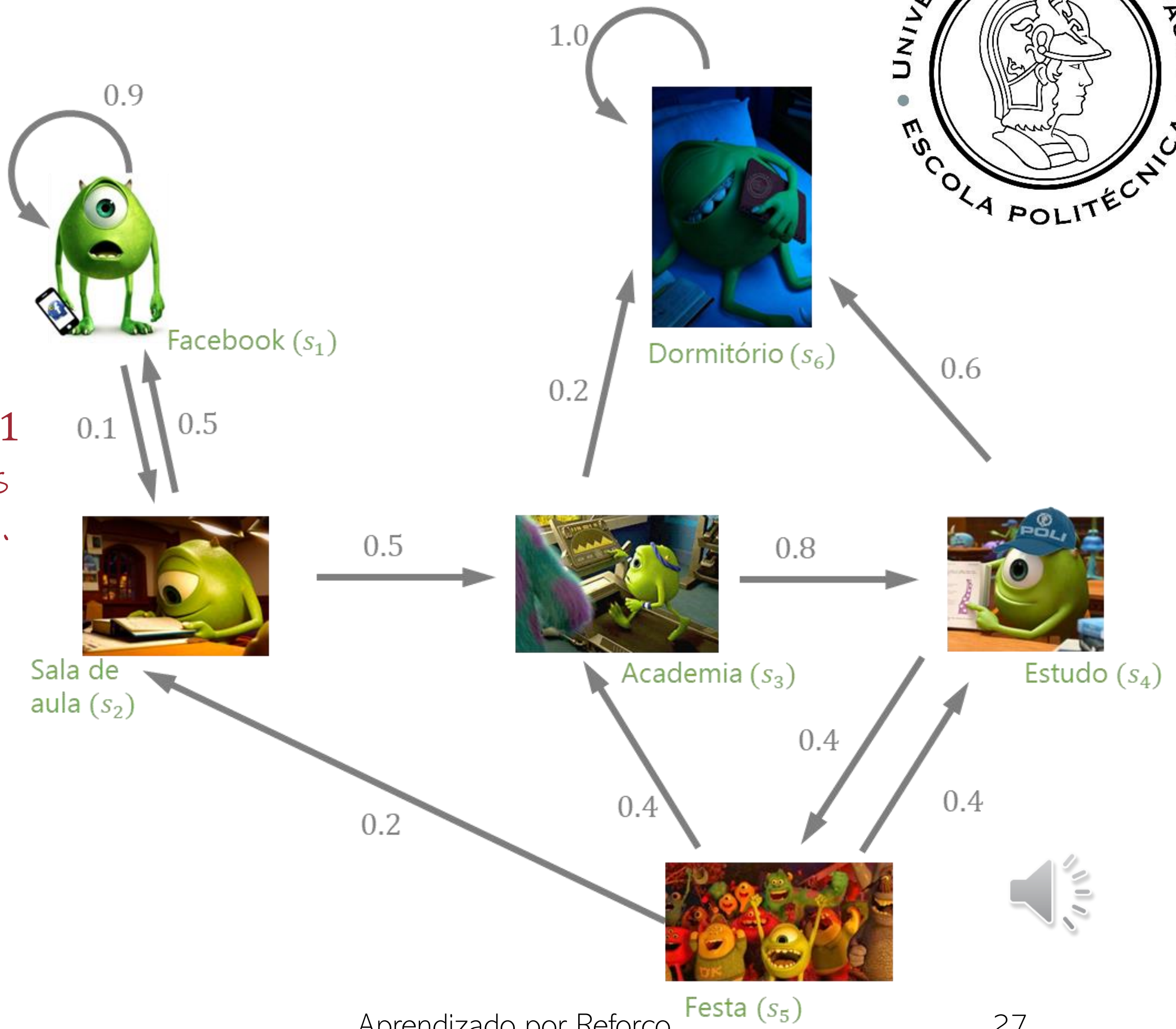


$$
\begin{array}{c c c c c}
 & & \text{DESTINO} & & \\
 & \text{Facebook} & \text{Sala} & \dots & \text{Dormir}
\end{array}
$$

$$
\boldsymbol{\mathcal{P}} = \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} & \cdots & p_{16} \\ p_{21} & p_{22} & \cdots & p_{26} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ p_{61} & p_{62} & \cdots & p_{66} \end{bmatrix} \begin{array}{l} s_1 \\ s_2 \\ \dots \\ s_6 \end{array} \quad \text{ORIGEM}
$$

$$
\mathcal{P} = \begin{bmatrix} \boxed{0.9 \quad 0.1 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0} \\ 0.5 \quad 0 \quad 0.5 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \\ 0 \quad 0 \quad 0 \quad \boxed{0.8} \quad 0 \quad 0.2 \\ 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0.4 \quad 0.6 \\ 0 \quad 0.2 \quad 0.4 \quad 0.4 \quad 0 \quad 0 \\ 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 1 \end{bmatrix}
$$

Veja que $\Sigma = 1$ em todas as linhas.



Qual a probabilidade do Mike Wazowski ir estudar, dado que ele está fazendo exercícios?

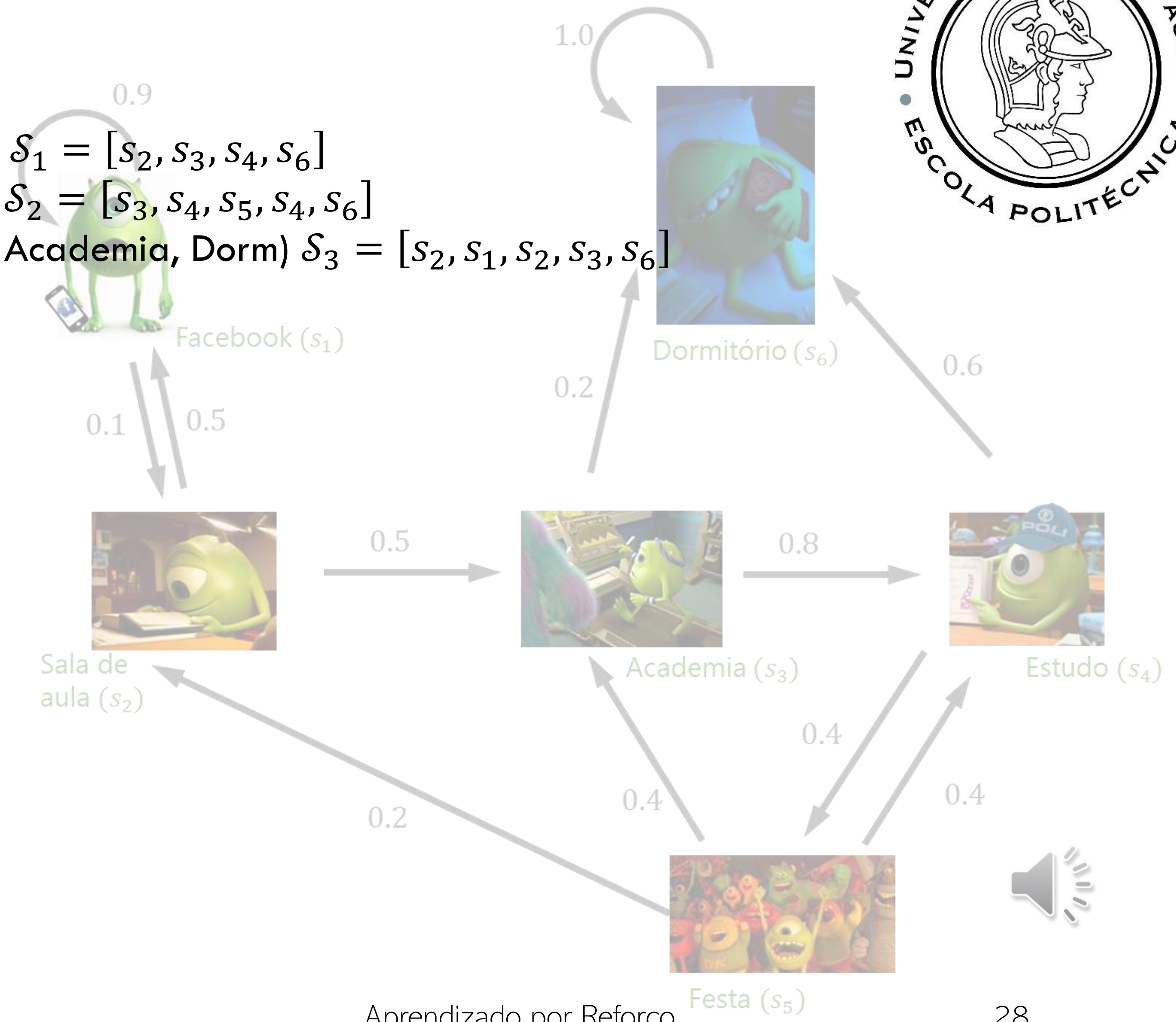
$$
P_{34} = P(S_{t+1} = 4 | S_t = 3) = 0{,}8
$$

Episódios:

Episódio 1: (Sala de Aula, Academia, Estudo, Dorm) $\mathcal{S}_1 = [s_2, s_3, s_4, s_6]$
Episódio 2: (Academia, Estudo, Festa, Estudo, Dorm) $\mathcal{S}_2 = [s_3, s_4, s_5, s_4, s_6]$
Episódio 3: (Sala de Aula, Facebook, Sala de Aula, Academia, Dorm) $\mathcal{S}_3 = [s_2, s_1, s_2, s_3, s_6]$

$$\mathcal{P} = \begin{bmatrix} 0.9 & 0.1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0.5 & 0 & 0.5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.8 & 0 & 0.2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0.4 & 0.6 \\ 0 & 0.2 & 0.4 & 0.4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\pi = \begin{bmatrix} 0.1 & 0.3 & 0.3 & 0.3 & 0. & 0. \end{bmatrix}$$



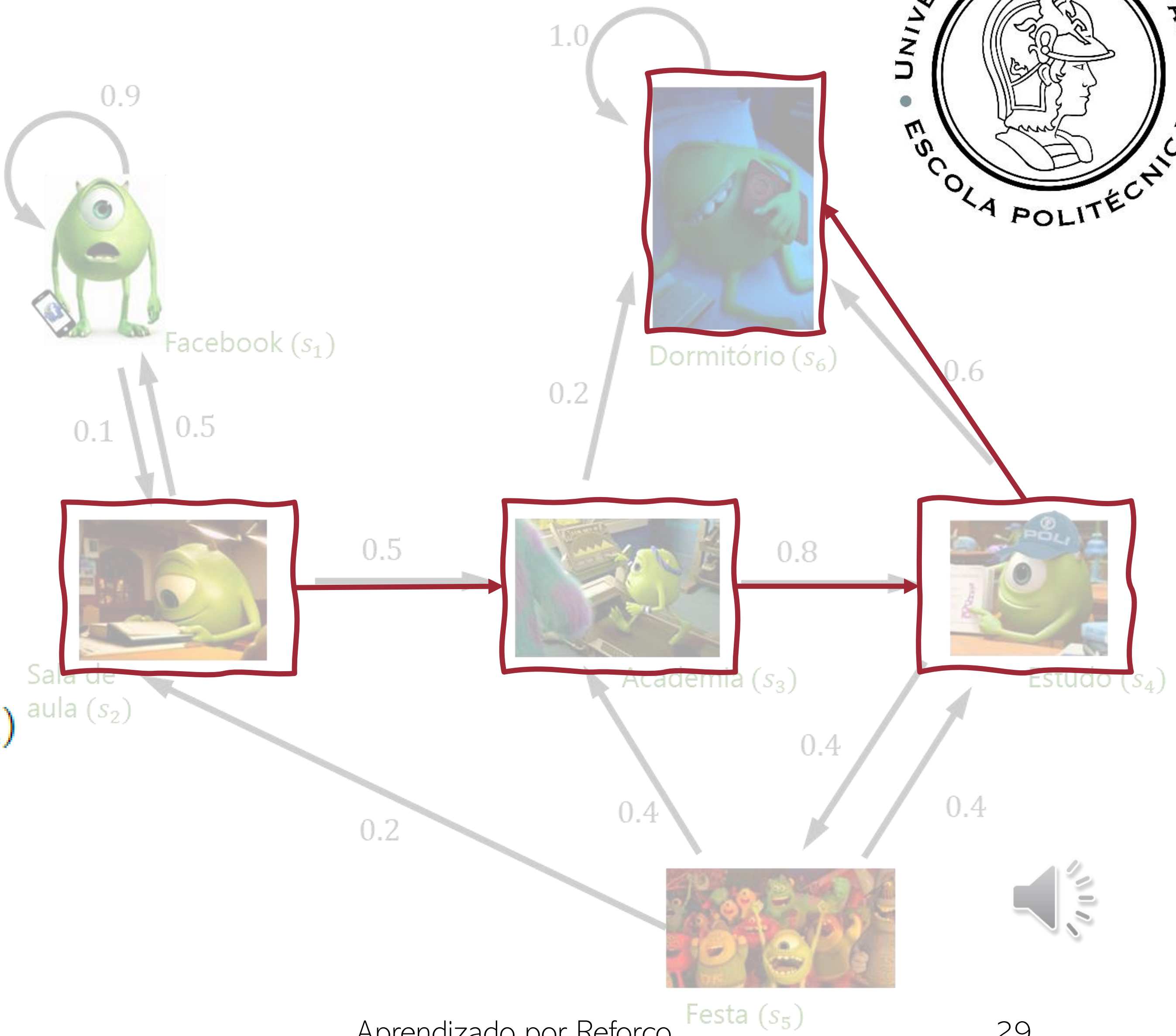
Episódio 1: (Sala de Aula, Academia, Estudo, Dorm) $\mathcal{S}_1 = [s_2, s_3, s_4, s_6]$

$$\mathcal{P} = \begin{bmatrix} 0.9 & 0.1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0.5 & 0 & 0.5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.8 & 0 & 0.2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0.4 & 0.6 \\ 0 & 0.2 & 0.4 & 0.4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\pi = \begin{bmatrix} 0.1 & 0.3 & 0.3 & 0.3 & 0. & 0. \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(\mathcal{S}_1) &= \mathbb{P}(s_2) \times \mathbb{P}(s_3|s_2) \times \mathbb{P}(s_4|s_3) \times p(s_6|s_4) \\ &= \pi_2 \times \mathcal{P}_{23} \times \mathcal{P}_{34} \times \mathcal{P}_{46} \\ &= 0.3 \times 0.5 \times 0.8 \times 0.6 \end{aligned}$$

$$\therefore \mathbb{P}(E_1) = 0.072$$



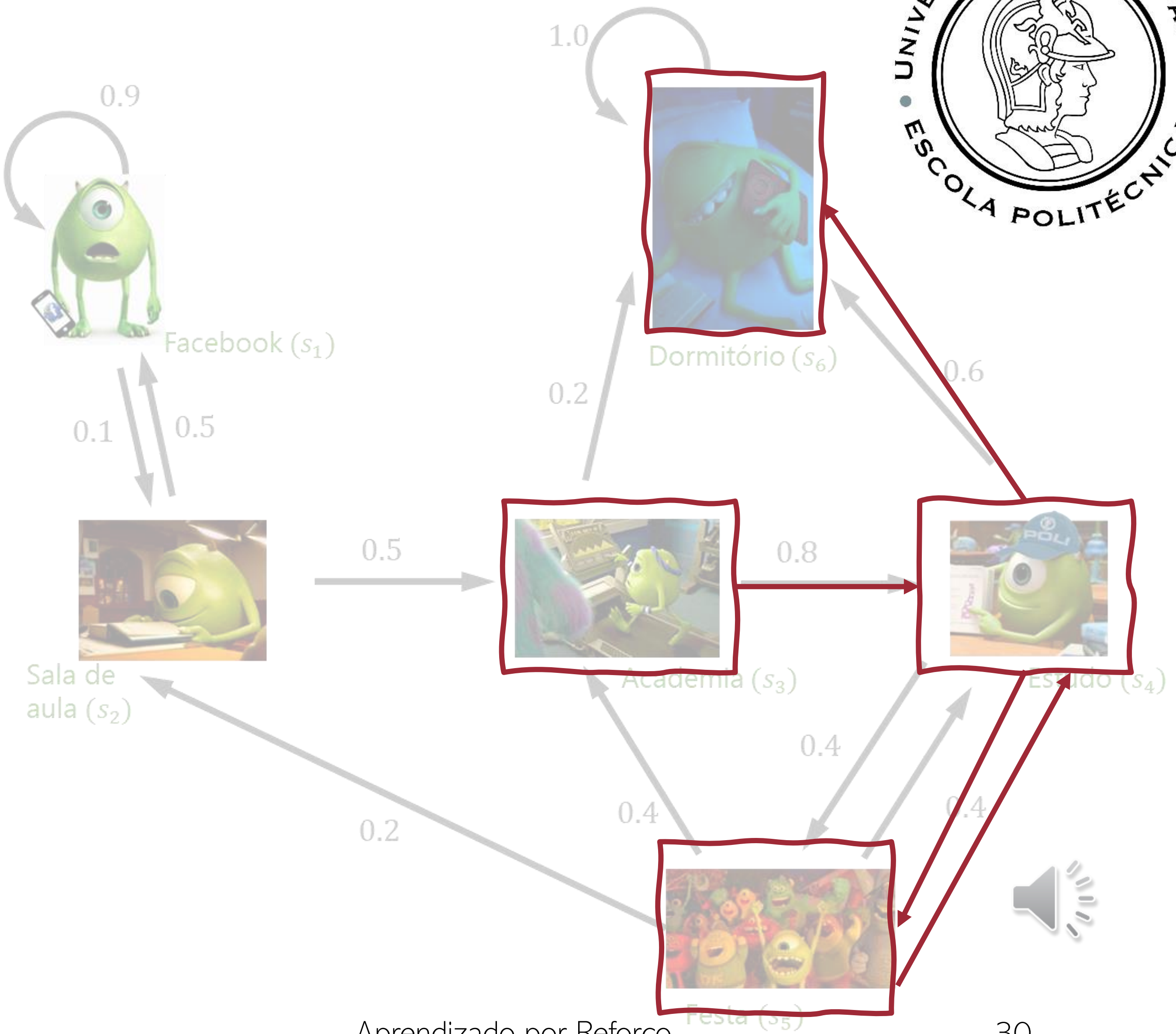
Episódio 2: (Academia, Estudo, Festa, Estudo, Dorm) $\mathcal{S}_2 = [s_3, s_4, s_5, s_4, s_6]$

$$\mathcal{P} = \begin{bmatrix} 0.9 & 0.1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0.5 & 0 & 0.5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.8 & 0 & 0.2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0.4 & 0.6 \\ 0 & 0.2 & 0.4 & 0.4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\pi = \begin{bmatrix} 0.1 & 0.3 & 0.3 & 0.3 & 0. & 0. \end{bmatrix}$$

Encontre:

$$\mathbb{P}(\mathcal{S}_2) = 0.023$$



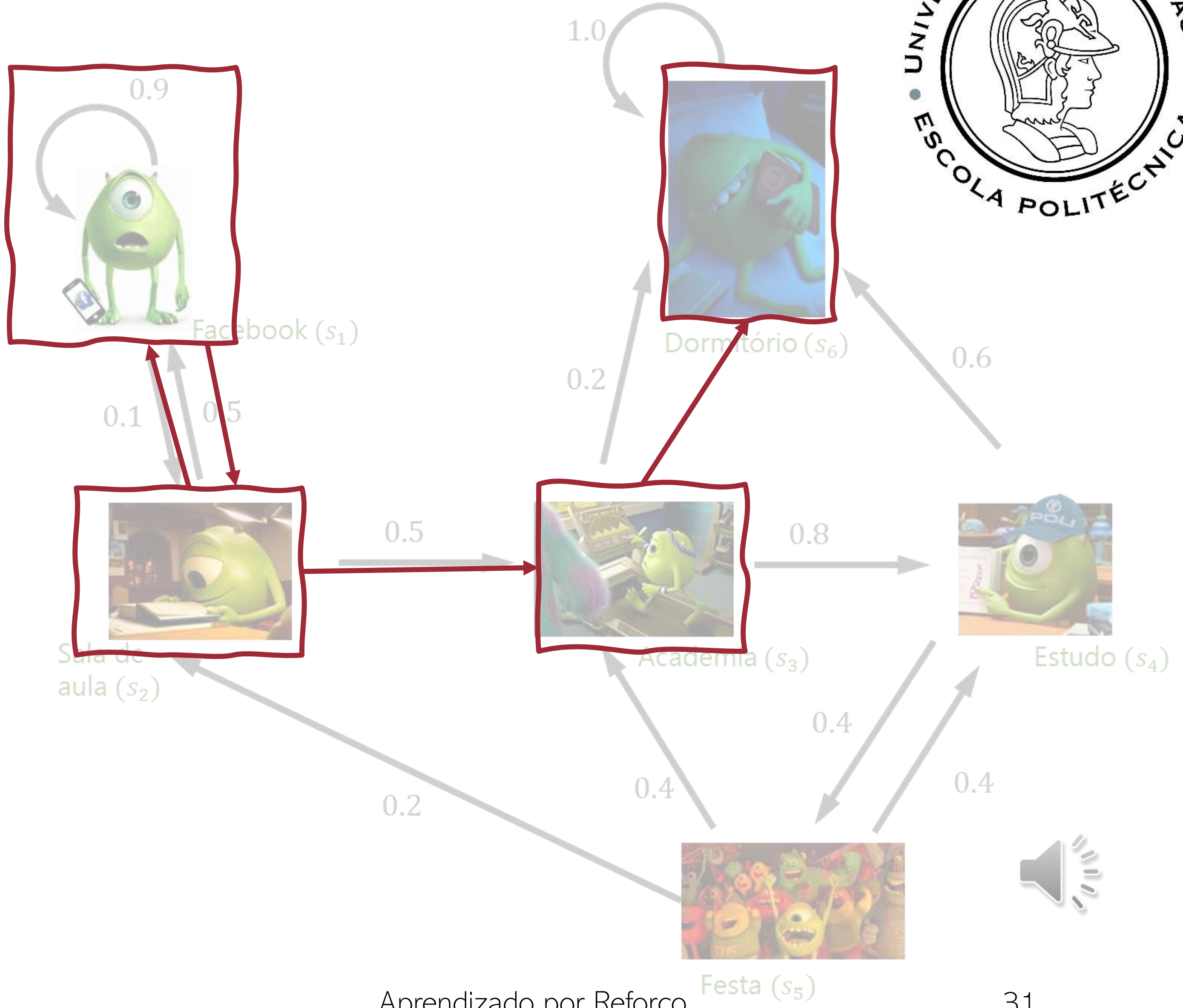
Episódio 3: (Sala de Aula, Facebook, Sala de Aula, Academia, Dorm) $\mathcal{S}_3 = [s_2, s_1, s_2, s_3, s_6]$

$$\mathcal{P} = \begin{bmatrix} 0.9 & 0.1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0.5 & 0 & 0.5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.8 & 0 & 0.2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0.4 & 0.6 \\ 0 & 0.2 & 0.4 & 0.4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\pi = \begin{bmatrix} 0.1 & 0.3 & 0.3 & 0.3 & 0. & 0. \end{bmatrix}$$

Encontre:

$$\mathbb{P}(\mathcal{S}_3) = 0.003$$



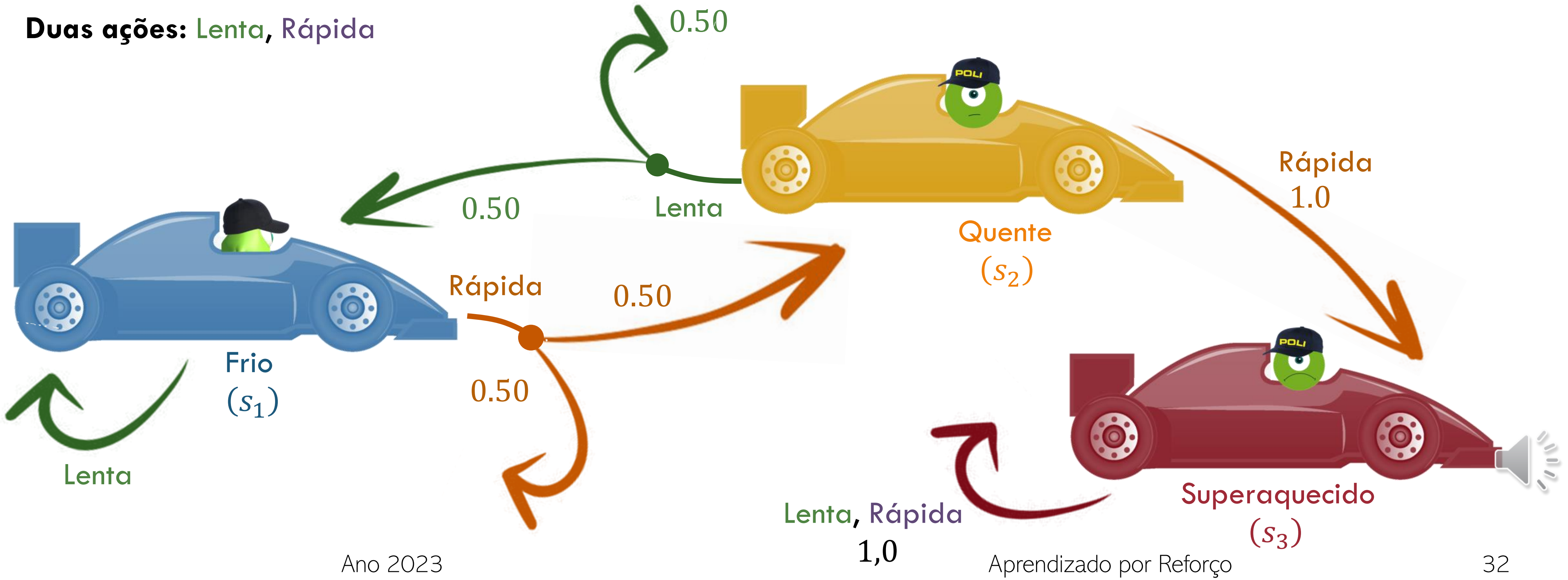
CORRIDA

O Mike quer viajar para longe, rapidamente

Indo mais rápido ele tem que ganhar e perder alguma coisa, correto?

Três estados: Frio, Quente, Superaquecido

Duas ações: Lenta, Rápida



Tndo mais rápido ele tem que ganhar e perder alguma coisa, correto?

EXEMPLO: CORRIDA

O Mike quer viajar para longe, rapidamente

Três estados: Frio, Quente, Superaquecido

Duas ações: Lenta, Rápida

SPOILER

ALERT!

VOCÊ ESTÁ PRONTO PARA NOSSA PRIMEIRA AULA DE APRENDIZADO POR REFORÇO.