# Series Temporais

## Definições de fundamentos básicos

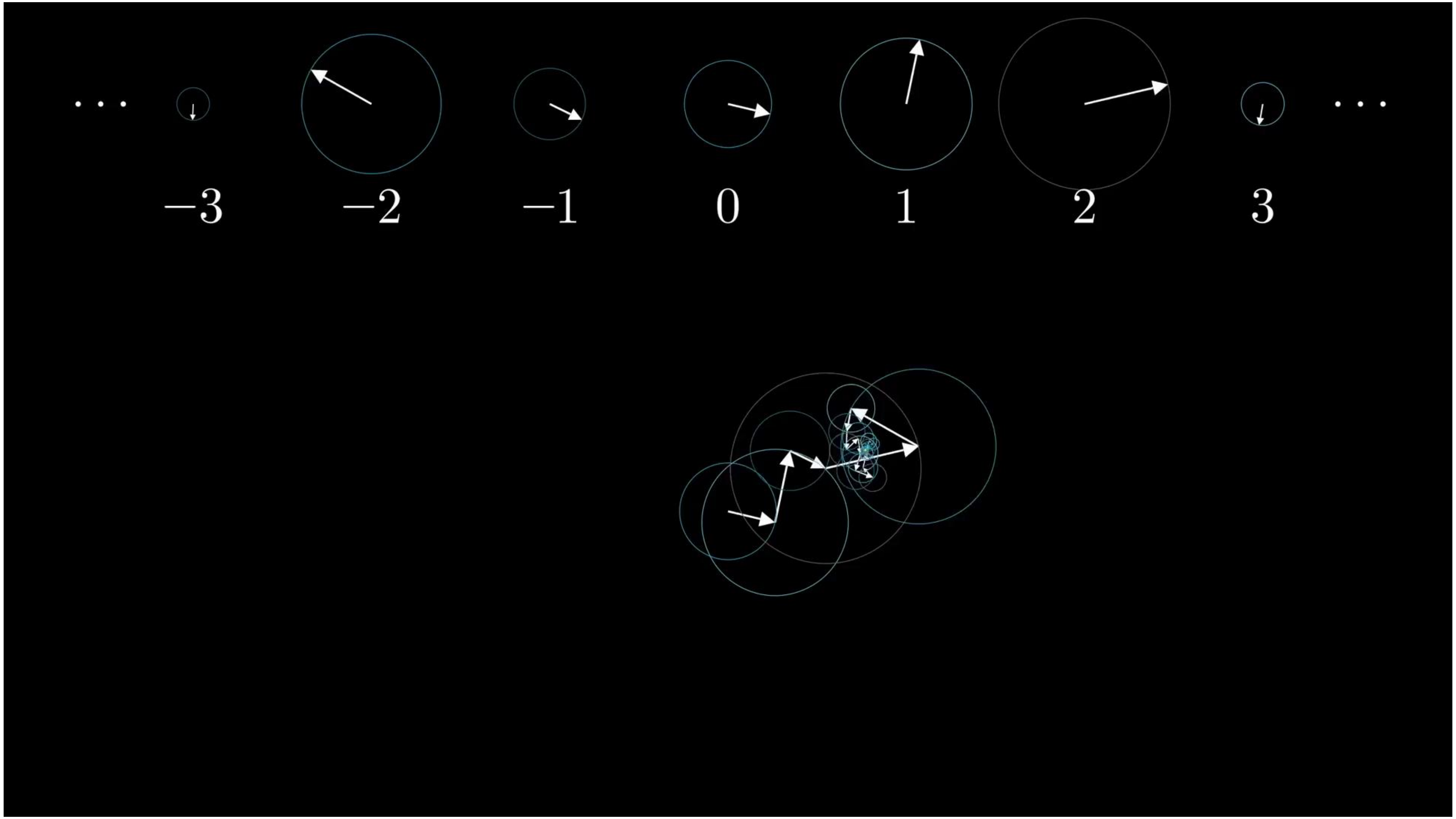
*Prof. Dr. Rafael Traldi Moura*

*Prof. Dr. Marlon Sproesser Mathias*

# Objetivos de hoje

Os objetivo dessa aula é:

- Apresentar funções no domínio da frequência. Para isso veremos Série de Fourier e Transformada de Fourier.
- Apresentar a Transformada de Fourier de uma função do tempo, que determinar o seu conteúdo de frequências. Esta é uma ferramenta útil que pode ser usada para analisar séries temporais, auxiliando na realização de previsões e facilitando o entendimento da série.



...
−3
−2
−1
0
1
2
3
...

A **Série de Fourier** é utilizada para calcular o conteúdo de frequências de séries/funções **periódicas** do tempo.

Uma **função periódica** é uma função que se repete no tempo com um intervalo de tempo fixo, denominado período da função. Para uma função periódica $f(t)$ vale a seguinte relação:

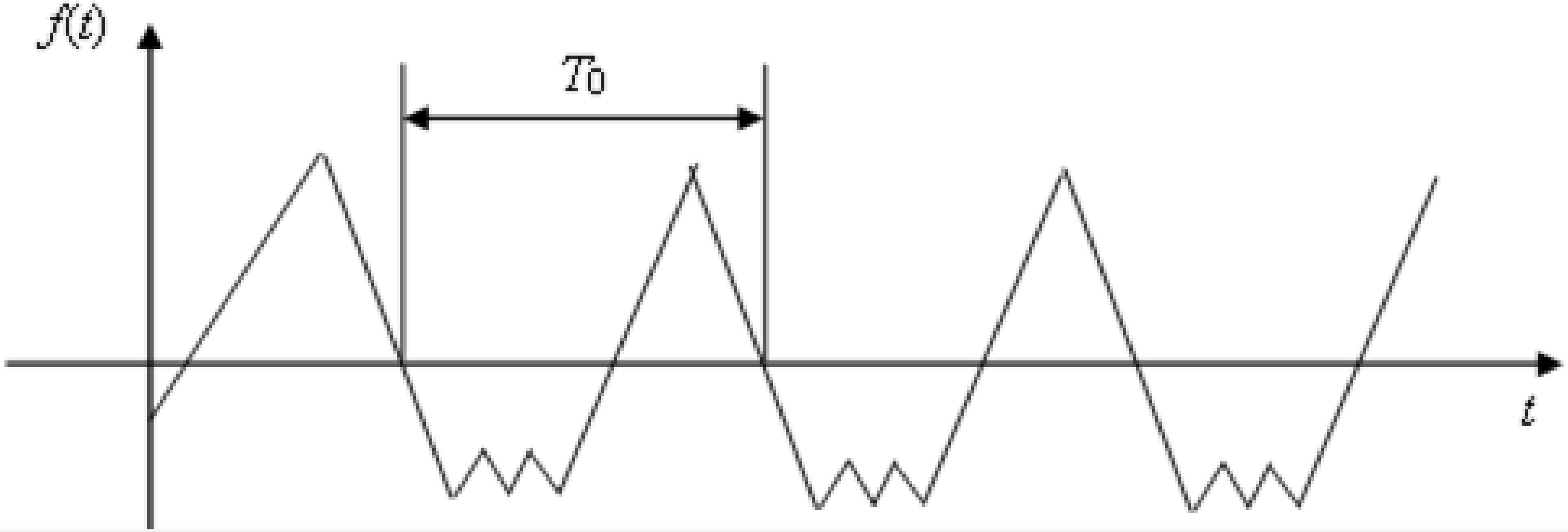
$$f(t) = f(t + T_0)$$

onde $T_0$ é o período da função.

Qualquer função periódica no tempo, $f(t)$, como a apresentada na figura 1 abaixo, pode ser decomposta em uma série de senos e cossenos da seguinte forma:

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}[a_n \cos(nw_0 t) + b_n \sin(nw_0 t)]$$

onde $\boldsymbol{w_0}$ = $2\pi/T_0$ é a chamada **frequência fundamental** da função e os coeficientes $a$'s e $b$'s são constantes. Observe que $a_0/2$ representa o **valor médio** da função.



$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}[a_n \cos(nw_0 t) + b_n \sin(nw_0 t)]$$

Os coeficientes $a_0$ , $a_n$ e $b_n$ da Série de Fourier são calculados usando as propriedades de ortogonalidade das funções seno e cosseno, como segue:

$$a_0 = \frac{2}{T_0}\int_{-T_0/2}^{T_0/2} f(t)dt$$

$$a_n = \frac{2}{T_0}\int_{-T_0/2}^{T_0/2} f(t)cos(nw_0 t)dt$$

$$b_n = \frac{2}{T_0}\int_{-T_0/2}^{T_0/2} f(t)sin(nw_0 t)dt$$

A demonstração matemática da representação em Série de Fourier pode ser vista em qualquer livro de processamento de sinais, tal como, Oppenheim (1997). Uma **alternativa** para a Série de Fourier (slide 3) é a seguinte:

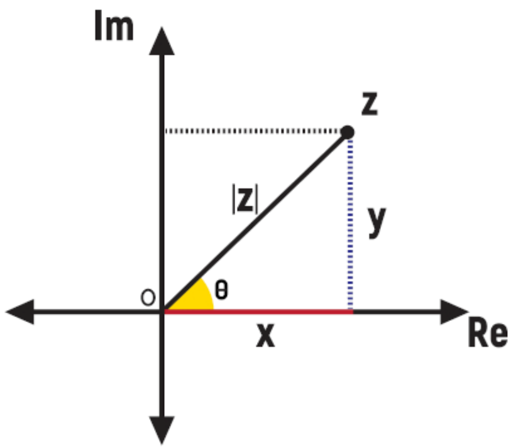
$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} [A_n cos(nw_0 t) + \phi_n]$$

na qual $A_n$ é a magnitude da componente de frequência $nw_0$ e $\phi_n$ é a fase correspondente. Observa-se que esta série apresenta a mesma informação que a série da Equação do slide 3, pois as funções seno e cosseno são idênticas, a menos de uma fase.

Neste caso, o coeficiente $A_n$ e a fase $\phi_n$ representam o espectro de frequência da função $f(t)$, ou o conteúdo de frequências da função. Portanto, a função temporal $f(t)$ é unicamente definida por sua amplitude e fase nas frequências $nw_0$.

A Série de Fourier pode ser ainda descrita usando-se uma **representação complexa** dos componentes da Equação:

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} [a_n \cos(n w_0 t) + b_n \sin(n w_0 t)]$$




Lembrando que as funções seno e cosseno podem ser representadas por funções exponenciais complexas da seguinte forma:

$$z = x + yi$$

$$|z|^2 = x^2 + y^2$$

$$\cos\theta = \frac{x}{|z|}$$

$$\text{sen}\theta = \frac{y}{|z|}$$

$$cos(\theta) = \frac{e^{j\theta} + e^{-j\theta}}{2} \qquad sin(\theta) = \frac{e^{j\theta} - e^{-j\theta}}{2j}$$

Substituindo estas expressões na Equação anterior e rearranjando, resulta na Série de Fourier descrita em termos de exponenciais complexas:

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n e^{jnw_0 t}$$

Os coeficientes $C_n$ podem ser obtidos através dos coeficientes $a_n$ e $b_n$, da expansão em série da Equação do slide 3, ou também podem calculados usando as propriedades de ortogonalidade das funções exponenciais complexas.

$$C_n = \frac{1}{T_0} \int_{-T_0/2}^{T_0/2} f(t) e^{-jnw_0 t} dt$$

Observa-se que neste caso a série é para $n$ variando de $-\infty$ a $\infty$, ao contrário dos outros casos apresentados.

# Série de Fourier

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n e^{jnw_0 t} \qquad C_n = \frac{1}{T_0}\int_{-T_0/2}^{T_0/2} f(t)e^{-jnw_0 t}\,dt$$

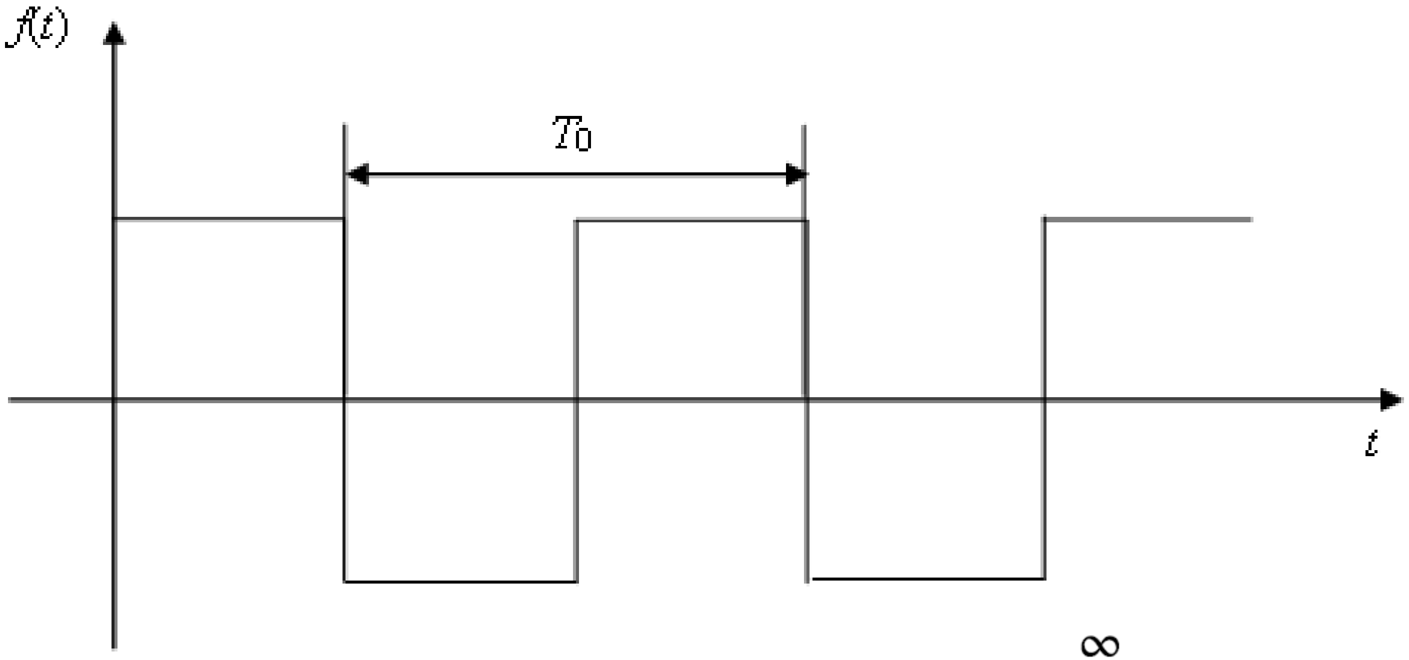
No caso da representação da Equação acima tem-se um conjunto de coeficientes que correspondem a frequências positivas e negativas.

O conceito de frequência negativa geralmente causa confusão, contudo basta simplesmente lembrar que isto resulta diretamente das Equações que usam exponenciais complexas para representar componentes de frequência real, ou seja, é somente um artifício matemático.

$$cos(\theta) = \frac{e^{j\theta} + e^{-j\theta}}{2} \qquad sin(\theta) = \frac{e^{j\theta} - e^{-j\theta}}{2j}$$

# Série de Fourier – Exemplo 1

Exemplo: A expansão em série de Fourier de uma função quadrada com frequência fundamental $w_0$




pode ser calculada segundo uma das seguintes expressões

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} [a_n \cos(nw_0 t) + b_n \sin(nw_0 t)]$$

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n e^{jnw_0 t}$$

# Série de Fourier – Exemplo 1

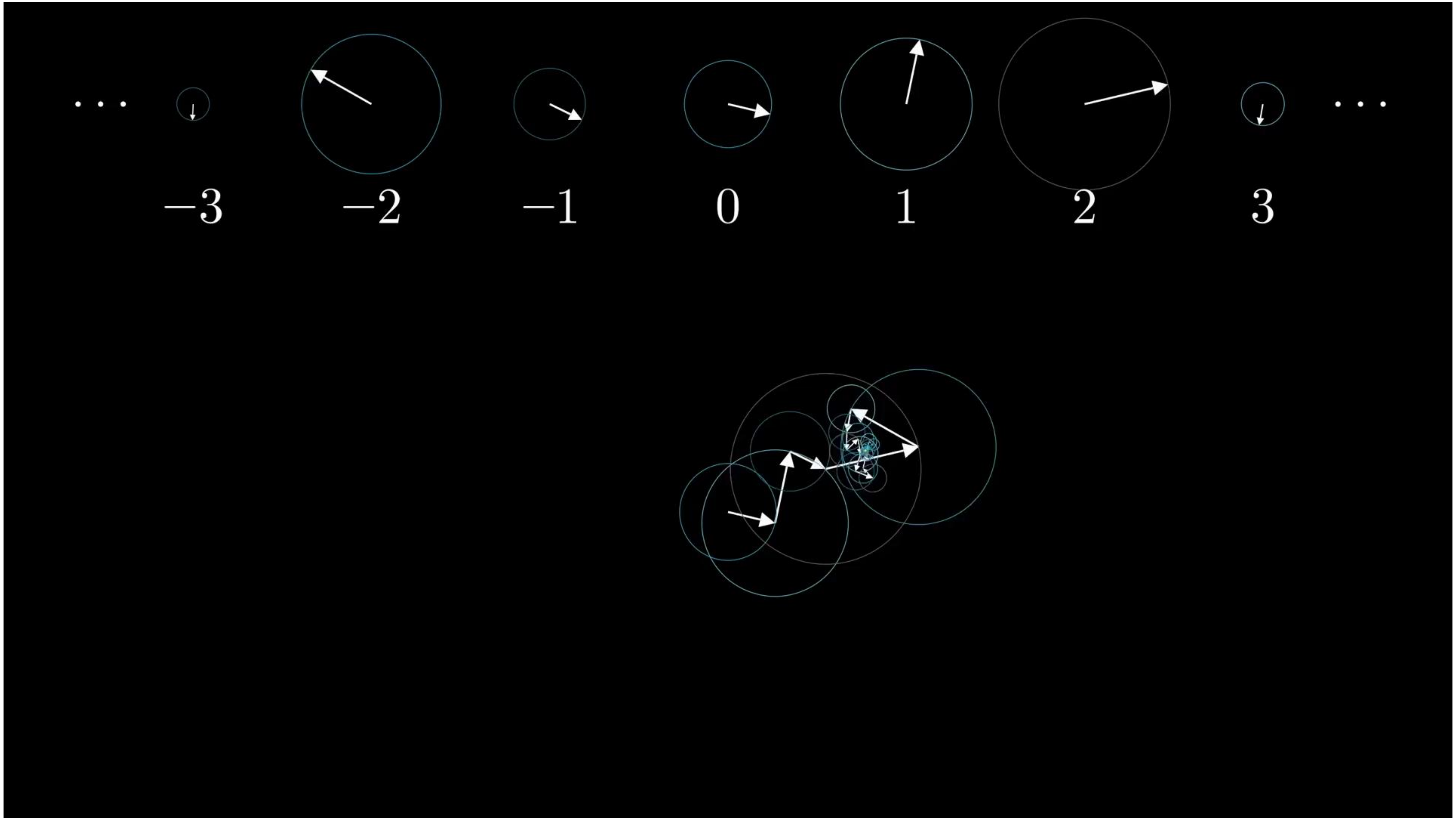
A Série de Fourier desta função quadrada segundo a primeira equação do slide anterior é dada por

$$f(t) = \frac{4}{\pi} sin(w_0 t) + \frac{4}{3\pi} sin(3w_0 t) + \frac{4}{5\pi} sin(5w_0 t) + \ldots$$

A Série de Fourier desta função quadrada em termos de exponenciais complexas, de acordo com a segunda equação do slide anterior, é dada por:

$$f(t) = \ldots \frac{2j}{5\pi} e^{-j5w_0 t} + \frac{2j}{3\pi} e^{-j3w_0 t} + \frac{2j}{\pi} e^{-jw_0 t} - \frac{2j}{\pi} e^{jw_0 t} - \frac{2j}{3\pi} e^{j3w_0 t} - \frac{2j}{5\pi} e^{j5w_0 t} \ldots$$

# Série de Fourier – Exemplo 1



# Transformada de Fourier

Obviamente que o mundo real não é feito somente de funções periódicas, portanto, são necessários métodos para descrever no domínio da frequência funções que não são periódicas.

O propósito de se ter introduzido a Série de Fourier é somente fornecer um ponto de partida para descrever o método mais geral da Transformada de Fourier.

A Transformada de Fourier permite representar no domínio da frequência qualquer função temporal, seja periódica ou não periódica.

Por definição, a **Transformada de Fourier** de uma função do tempo $f(t)$ é dada por:

$$F(jw) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-jwt}dt$$

Também por definição, a **Transformada de Fourier Inversa** de uma função da frequência $F\,(jw)$ é dada por:

$$f(t) = \int_{-\infty}^{\infty} F(jw)e^{jwt}dw$$

A Transformada de Fourier tem as seguintes características:

1. A função $F(jw)$ é a representação em frequência da função $f(t)$;
2. A função $F(jw)$ não tem nenhuma informação nova sobre a função $f(t)$, sendo somente um modo diferente de se ver a função;
3. A função $F(jw)$ fornece o conteúdo de frequência da função $f(t)$;
4. A função $F(jw)$ fornece a densidade de amplitude da função. Por exemplo, se $f(t)$ é uma força, então $F\ (jw)$ é força/frequência (N/Hz ou N/rad.$s^{-1}$);
5. A função $F(jw)$ tem frequências negativas. Uma frequência negativa significa somente uma diferença de fase de 180 graus em relação à mesma frequência positiva. Isto pode ser visto através da função seno, onde $seno(w)$ e $seno(-w)$ estão defasados de 180 graus;
6. O módulo da função $F(jw)$ é simétrico em relação ao eixo $w$ = 0 se a função $f(t)$ for real, que é o caso das funções que representam sistemas físicos.

# Espectro de Frequências

Para um analista de séries temporais, a expansão em série de Fourier ou a Transformada de Fourier não são tão importantes como o conceito de representação espectral, ou **espectro de frequências**, de uma função ou de uma série temporal.

O espectro de frequências de uma função temporal consiste na representação gráfica do conteúdo de frequências da função:

- O espectro de frequência de uma função periódica é a representação gráfica das componentes de frequência da sua Série de Fourier na forma complexa, ou seja, é uma representação gráfica dos coeficientes $C_n$ da expansão da função segundo a Equação $f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n e^{jnw_0 t}$ .
- Para uma função não periódica, o espectro de frequência é a representação gráfica da sua Transformada de Fourier dividida por $2\pi$.
- O espectro de frequências fornece uma representação visual do conteúdo (componentes) de frequências da função.

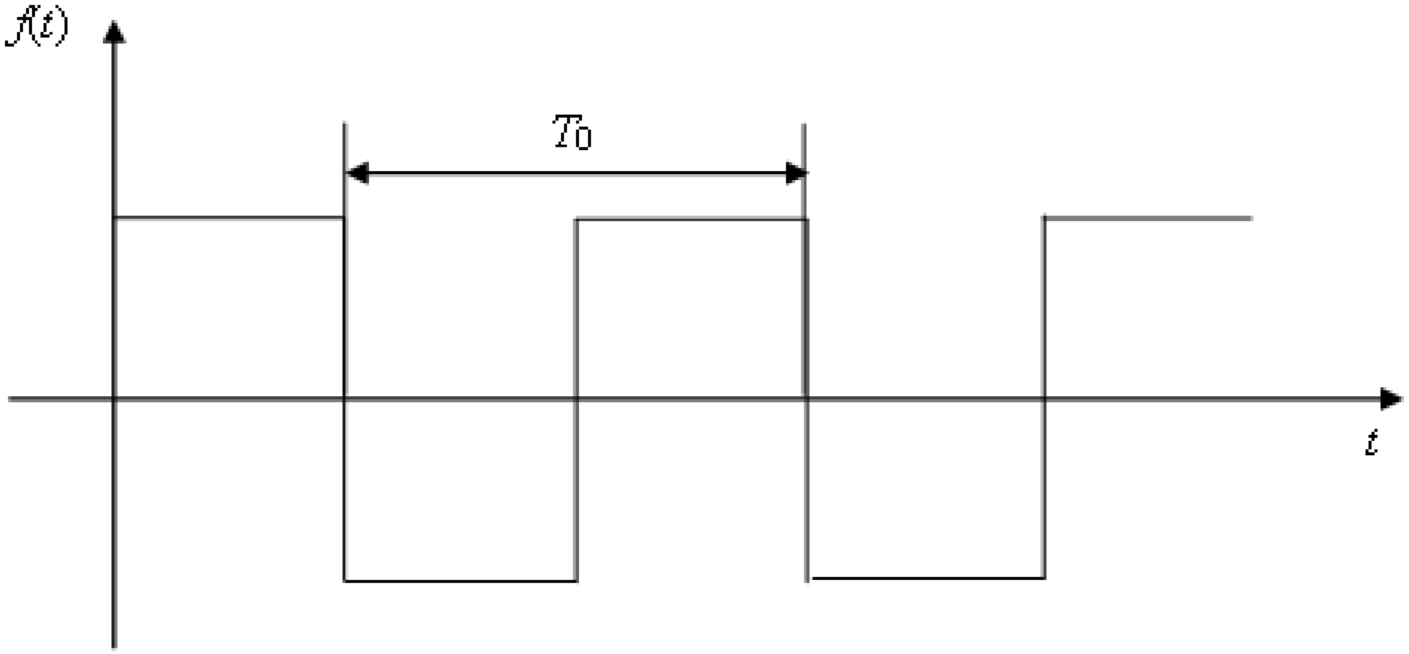
# Espectro de Frequências

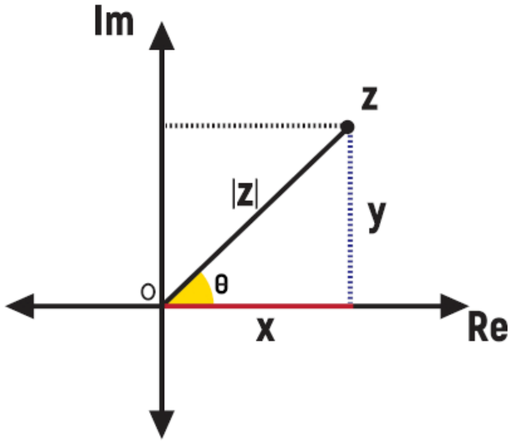
Tanto os coeficientes da Série de Fourier como a Transformada de Fourier são números complexos, assim, o espectro de frequência é constituído de dois gráficos:

- **Módulo** dos coeficientes ou da transformada em função da frequência
- **Fase** dos coeficientes ou da transformada em função da frequência.

Observa-se que a frequência de uma função do tempo varia de $-\infty$ a $+\infty$.

Exemplo: O espectro de frequências da função quadrada com frequência $w0$,




$$z = x + yi$$

$$|z|^2 = x^2 + y^2$$

é dado pelos coeficientes $C_n$ da sua expansão em Série de Fourier.

$$\cos\theta = \frac{x}{|z|}$$

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n e^{jnw_0 t} \qquad C_n = \frac{1}{T_0}\int_{-T_0/2}^{T_0/2} f(t) e^{-jnw_0 t}\, dt$$

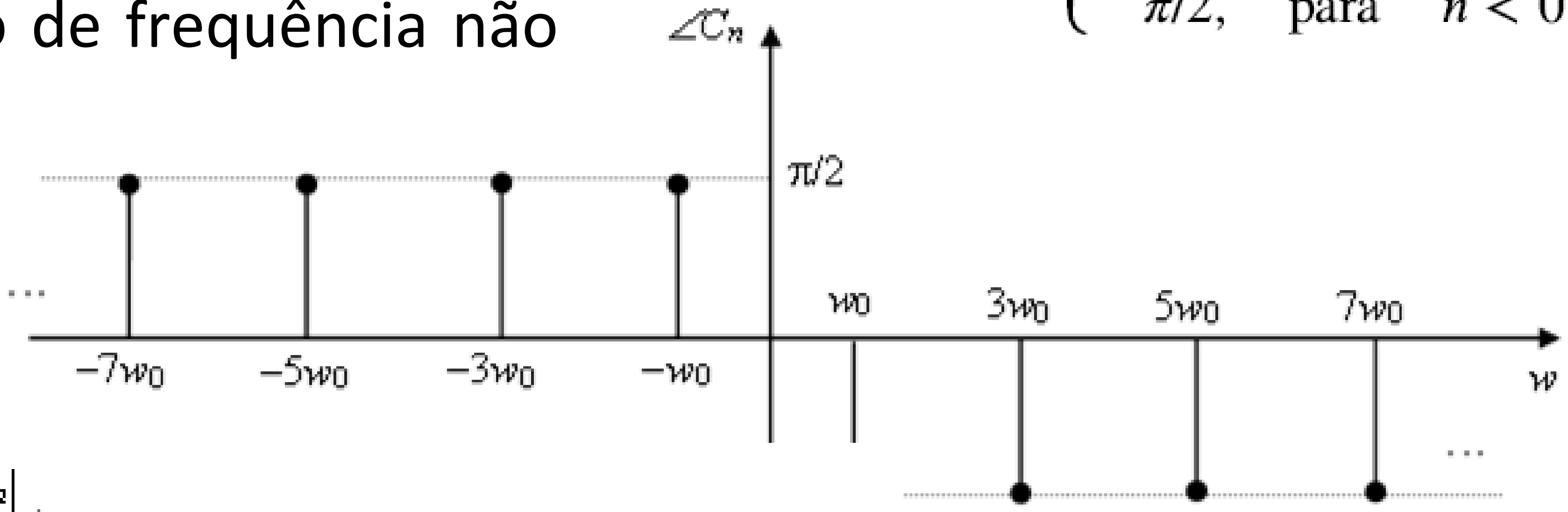
$$\operatorname{sen}\theta = \frac{y}{|z|}$$

# Espectro de Frequências – Exemplo 2

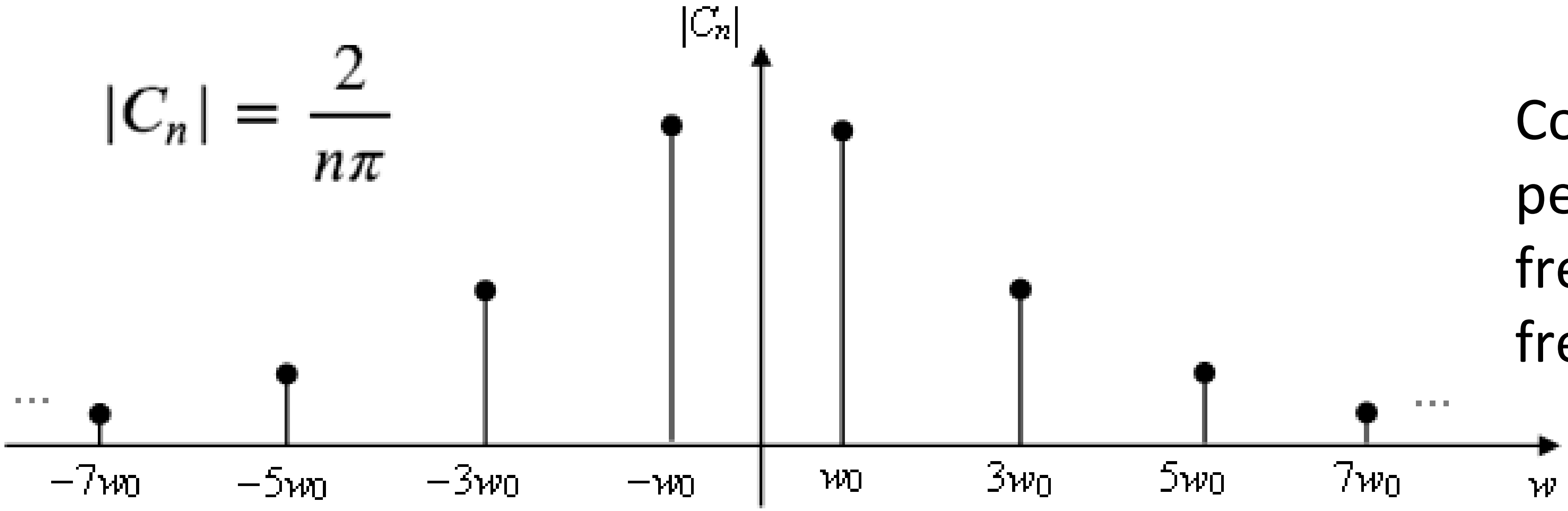
estes coeficientes são dados em função de por:

$$\angle C_n = \begin{cases} -\pi/2, & \text{para} \quad n \geq 0 \\ \pi/2, & \text{para} \quad n < 0 \end{cases}$$

Nota-se que este espectro de frequência não é contínuo.




$$|C_n| = \frac{2}{n\pi}$$

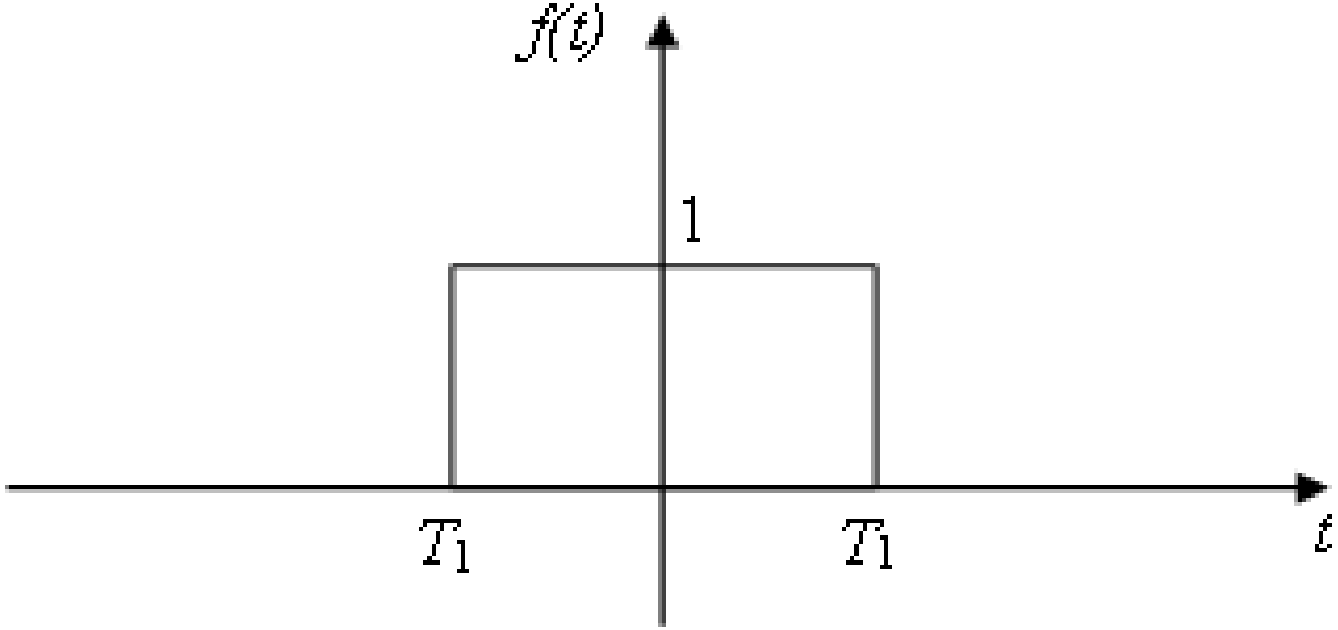



Como a função quadrada é periódica, somente possui frequências múltiplas da sua frequência fundamental.

# Espectro de Frequências – Exemplo 3

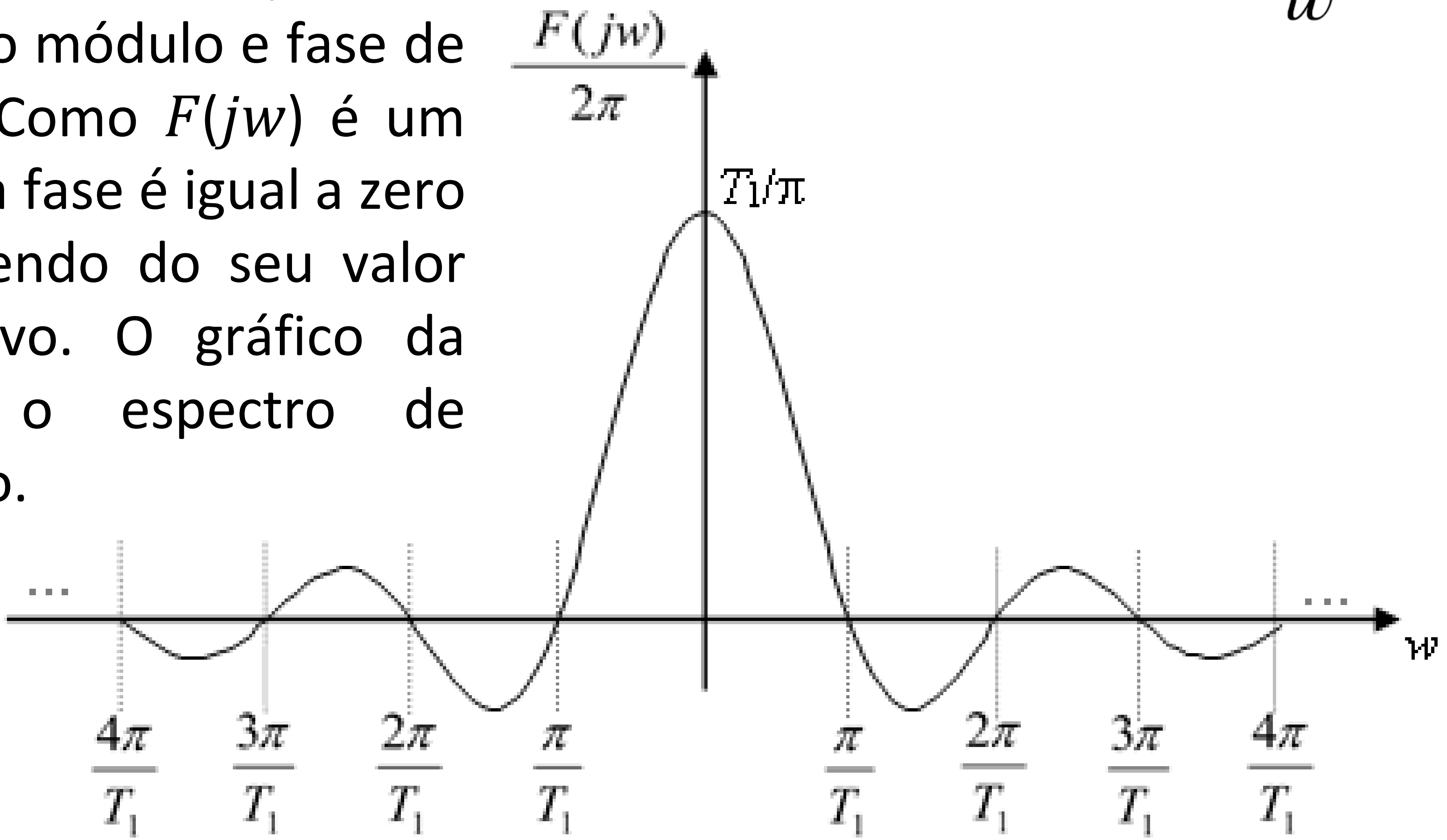
Exemplo: Seja a seguinte função, cujo gráfico se encontra na figura abaixo:

$$f(t) = \begin{cases} 1, & \text{para} \quad |t| < T_1 \\ 0, & \text{para} \quad |t| > T_1 \end{cases}$$



A sua Transformada de Fourier é dada pela eq. ao lado. O espectro de frequências desta função é dado pelo módulo e fase de $F(jw)$ dividido por $2\pi$. Como $F(jw)$ é um número real, então a sua fase é igual a zero ou -180 graus, dependendo do seu valor ser positivo ou negativo. O gráfico da Figura 5 apresenta o espectro de frequências dessa função.

$$F(jw) = \frac{2sin(wT_1)}{w}$$



# Transformada de Fourier Discreta

A Transformada Fourier Discreta de uma função do tempo, $f(t)$, é a Transformada de Fourier do sinal amostrado por um computador.

A importância da Transformada Fourier Discreta reside no fato de que, através dela, pode-se calcular a Transformada Fourier de um sinal amostrado por um computador.

A Transformada Fourier Discreta da função $f(kT_a)$ amostrada, contendo $N$ amostras, é dada por:

$$F(w_n) = \sum_{k=0}^{N-1} f(k) e^{-j2\pi nk/N} \text{ para } n = 0, \ldots, N-1$$

na qual $w_n = 2\pi n/N$.

# Transformada de Fourier Discreta

Observa-se que essa transformada é calculada somente a partir das amostras do sinal, obtidas nos instantes de amostragem.

O conjunto de amostras da função $f(kT_a)$ podem ser obtidas da sua Transformada de Fourier Discreta pela seguinte expressão:

$$f(kT_a) = \sum_{n=0}^{N-1} F(w_n) e^{j2\pi nk/N} \quad \text{para } k = 0, \ldots, N-1$$

**Observa-se que a equação acima permite prever amostras em instantes de tempo futuro, bastando para isso usar $k > N - 1$.**

# Transformada Cosseno

A Transformada Cosseno é uma alternativa à Transformada Fourier quando não se deseja números complexos como resultado.

A Transformada Cosseno é uma transformação linear e inversível, que representa uma sequência finita de amostras em termos de uma somatória de cossenos com diferentes frequências.

A Transformada Cosseno da função $f(kT_a)$ amostrada, contendo $N$ amostras, é dada por:

$$C_n = 2\sum_{k=0}^{N-1} f(k)\cos\left[\frac{(k+1/2)n\pi}{N}\right] \text{ para } n = 0, \ldots, N-1$$

# Transformada Cosseno

Observa-se que essa transformada é calculada somente a partir das amostras do sinal, obtidas nos instantes de amostragem. O conjunto de amostras da função $f(kT_a)$ podem ser obtidas da sua Transformada Cosseno pela seguinte expressão:

$$f(kT_a) = \frac{1}{2N}\sum_{n=0}^{N-1} C_n \cos\left[\frac{(k+1/2)n\pi}{N}\right] \text{ para } k = 0, \ldots, N-1$$

Observa-se que a equação acima permite prever amostras em instantes de tempo futuro, bastando para isso usar $k > N - 1$.

A Transformada Cosseno é mais conveniente para analisar séries temporais em tempo real porque seus coeficientes são números reais enquanto que a Transformada Fourier possui coeficientes complexos.