Análise Estatística de dados

Inteligência Artificial

PECE Programa de Educação Continuada
Escola Politécnica da USP

USP

AULA 02 – NOÇÕES DE ÁLGEBRA LINEAR E GEOMETRIA ANALÍTICA

Arturo Forner-Cordero
Larissa Driemeier

PROGRAMA DO CURSO

Aula	Data	Conteúdo da Aula
01	27/02	Aula Inaugural
02	05/03	Introdução ao Curso. Noções de Álgebra Linear , Geometria Analítica Parte I
03	12/03	Noções de Álgebra Linear , Geometria Analítica Parte II
04	19/03	Decomposição de valor singular (SVD)
05	26/03	Otimização: derivadas, derivadas parciais (operadores gradiente, Jacobiano, Hessiano e Laplaciano), algoritmos de gradiente
06	02/04	Variáveis independentes e não independentes. Estatística Descritiva e Indutiva. Definições de medidas de dispersão e tendência central.
07	09/04	Probabilidade e Teorema de Bayes
08	16/04	Modelos de probabilidade discretos
09	23/04	Modelos de probabilidade contínuos
10	30/04	Modelo de Markov. Modelo de Markov oculto.

AVALIAÇÃO

Soma das notas
dos Trabalhos

média final

$$M = \sum_i T_i \leq 10$$

Critério de Aprovação: $M \geq 7{,}0$

Recuperação: Para alunos cuja média final estiver contida no intervalo $4{,}0 \leq M < 7{,}0$ será oferecida uma prova de recuperação, que **substituirá a nota total, e vale 10,0.**

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Deisenroth, M.P.; Faisal, A.A.; Ong, C.S. MATHEMATICS FOR MACHINE LEARNING, Cambridge University Press, 2019.

Bussab, W.; Morettin, P.L. ESTATÍSTICA BÁSICA, Saraiva, 6ª Edição, 2009 .

Hastie, T; Tibshirani, R.; Friedman, J. THE ELEMENTS OF STATISTICAL LEARNING, 2nd edition, Springer-Verlag, 2009.

COMUNICADOS IMPORTANTES

- Aluno Web é nosso canal de comunicação. Todo material será depositado ali: notas de aula, listas de exercícios, notas, comunicados, provas, testes ...

PECE Programa de Educação Continuada
Escola Politécnica da USP

APRENDIZADO DE MÁQUINAS


APRENDIZADO DE MÁQUINAS
REGRESSÃO
REDUÇÃO DE DIMENSIONALIDADE
ESTIMAÇÃO DE DENSIDADE
CLASSIFICAÇÃO
CÁLCULO VETORIAL
PROBABILIDADE E DISTRIBUIÇÕES
OTIMIZAÇÃO
ÁLGEBRA LINEAR
GEOMETRIA ANALÍTICA
DECOMPOSIÇÃO DE MATRIZES

PECE Programa de Educação Continuada
Escola Politécnica da USP

ML E ÁLGEBRA LINEAR

(ML, de *Machine Learning*, em inglês)

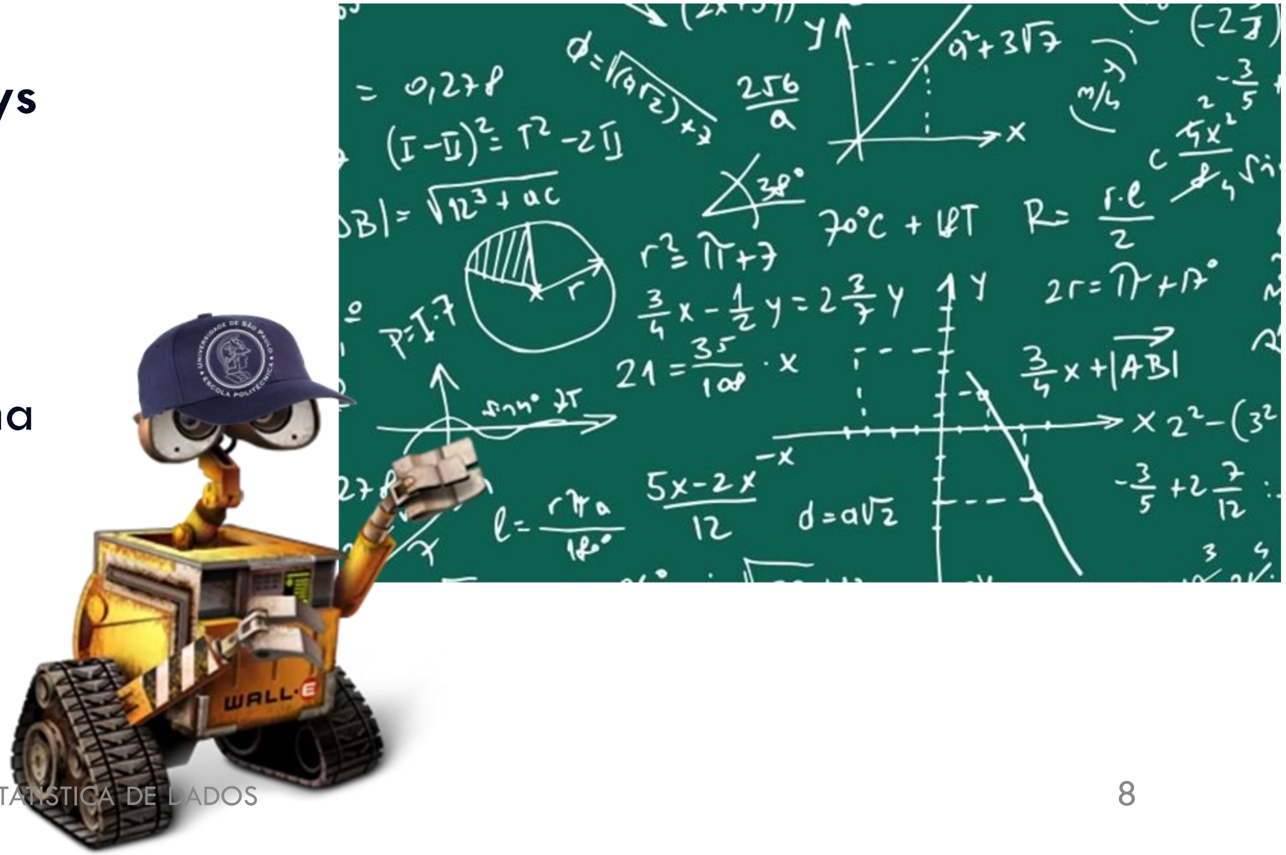
Nós temos dados. Máquinas ou computadores só entendem números.

A Álgebra Linear é **a matemática dos arrays** — tecnicamente chamados de vetores, matrizes e tensores.

Ela é essencial em ML e Deep Learning (DL).

É a base matemática que resolve o problema de representação de dados e cálculos em modelos de ML.

Portanto, o primeiro passo para aprender matemática para ML é aprender álgebra linear.



ESTOU PERDIDO!

Felizmente, não precisamos conhecer álgebra linear em toda sua amplitude e profundidade para melhorar nossa compreensão e aplicação do aprendizado de máquina.

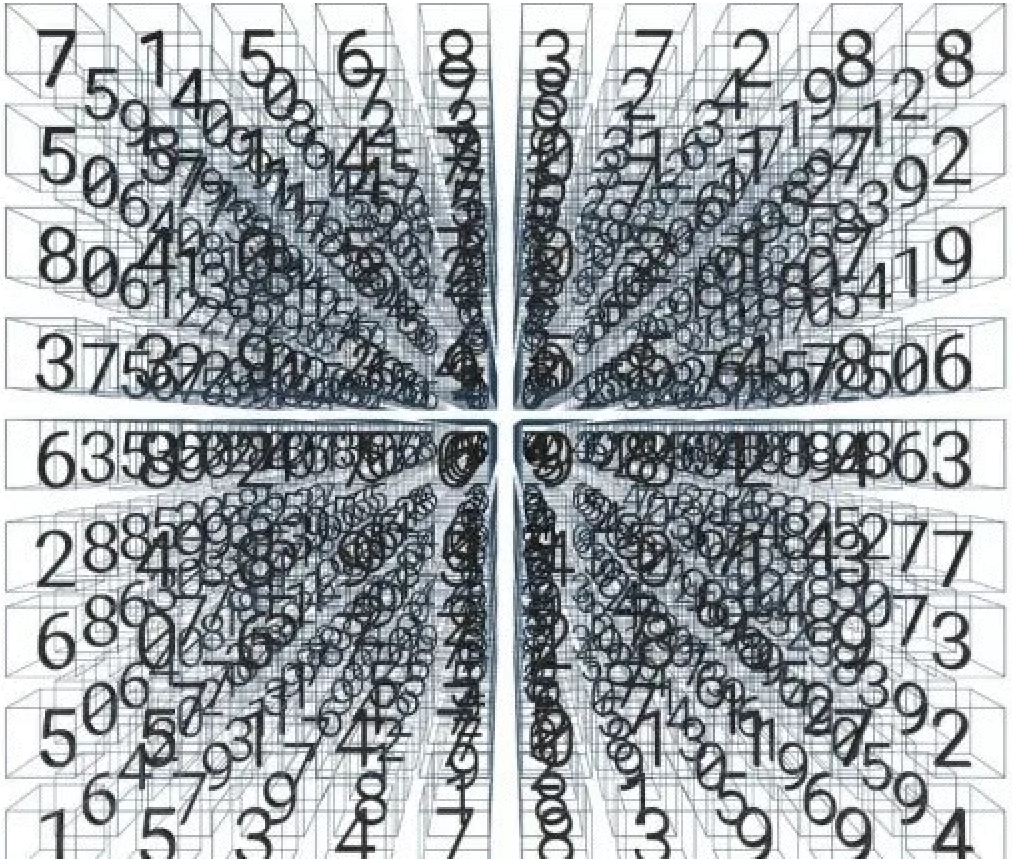
Então não será difícil!!! Você só precisará relembrar alguns conceitos!

Você não tem tempo, e nem deve, mergulhar em livros didáticos de álgebra linear e cursos on-line projetados para estudantes de graduação.

Ela deve ser encarada como mais um conjunto de ferramentas que podemos aproveitar em nossa jornada em direção ao domínio do aprendizado de máquina.

Vamos rever os conceitos básicos rapidamente e cobrir alguns tópicos importantes com maior profundidade.

PECE Programa de Educação Continuada
Escola Politécnica da USP



ESCALARES, VETORES, MATRIZES, TENSORES

Notação básica
Operações e propriedades
Cálculo matricial

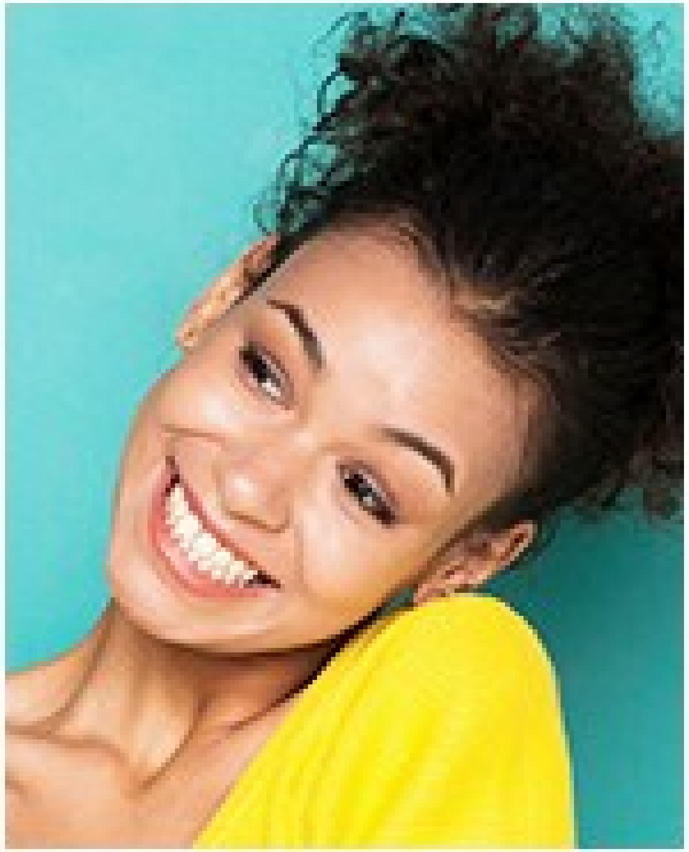
$$\mathcal{A} \in \mathbb{R}^{N_1 \times N_2 \times \cdots \times N_d}$$

'A' é um tensor de ordem-d

$d = 0$

Tensor 0D (Escalar)

Shape: ()



$= 24\ (anos)$

$$\mathcal{A} \in \mathbb{R}^{N_1 \times N_2 \times \cdots \times N_d}$$

'A' é um tensor de ordem-d

$d = 0$
Tensor 0D (Escalar)
Shape: ()

$d = 1$
Tensor 1D (Vetor)
Shape: (3,)

Lista de atributos de um objeto!

24 anos
feminino
0 filhos
3 anos com emprego fixo
2200 reais de renda mensal

$$= \begin{bmatrix} 24 \\ 0 \\ 0 \\ 3 \\ 2200 \end{bmatrix}$$

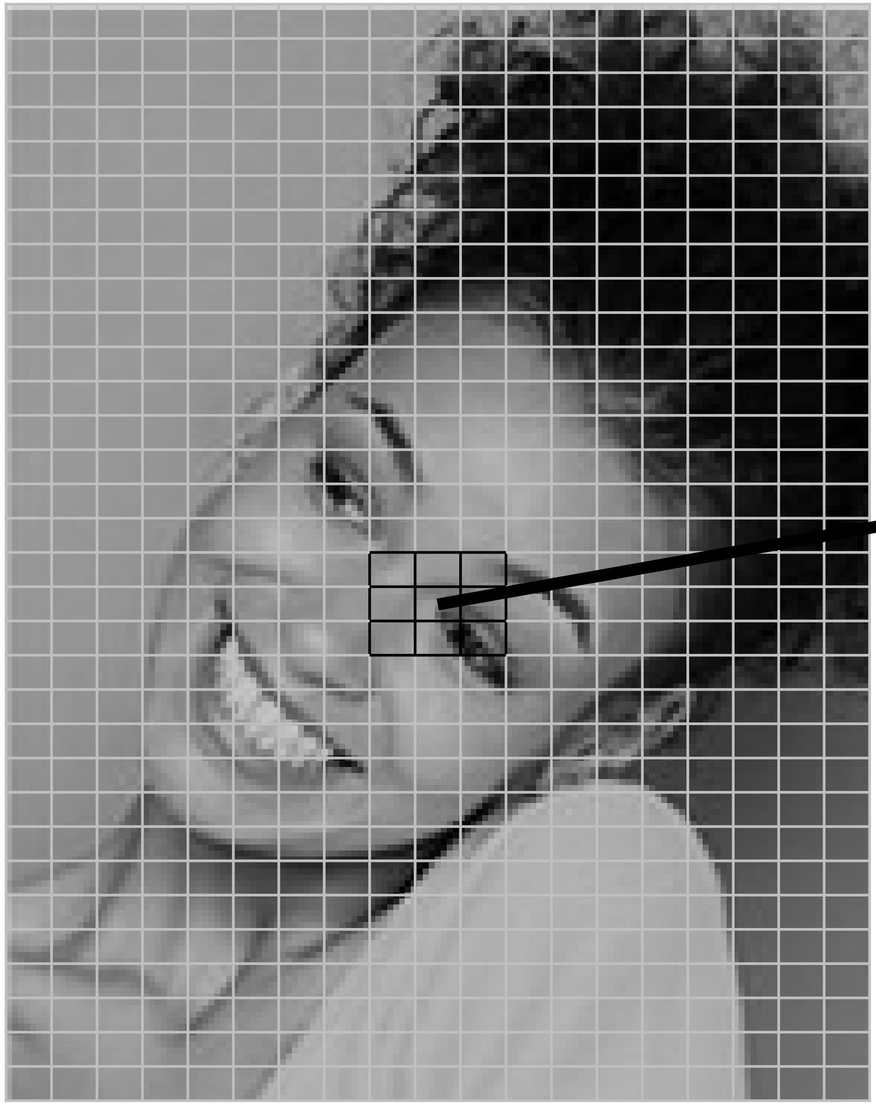
$$\mathcal{A} \in \mathbb{R}^{N_1 \times N_2 \times \cdots \times N_d}$$

'A' é um tensor de ordem-d

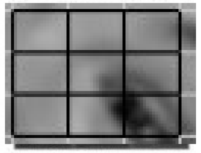
$d = 0$
Tensor 0D (Escalar)
Shape: ()

$d = 1$
Tensor 1D (Vetor)
Shape: (3,)

$d = 2$
Tensor 2D (Matriz)
Shape: (3,3)



97	71	92
56	82	102
43	48	63



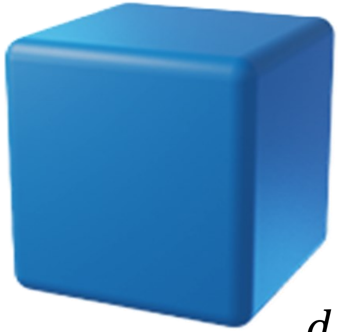
$$\mathcal{A} \in \mathbb{R}^{N_1 \times N_2 \times \cdots \times N_d}$$

'A' é um tensor de ordem-d

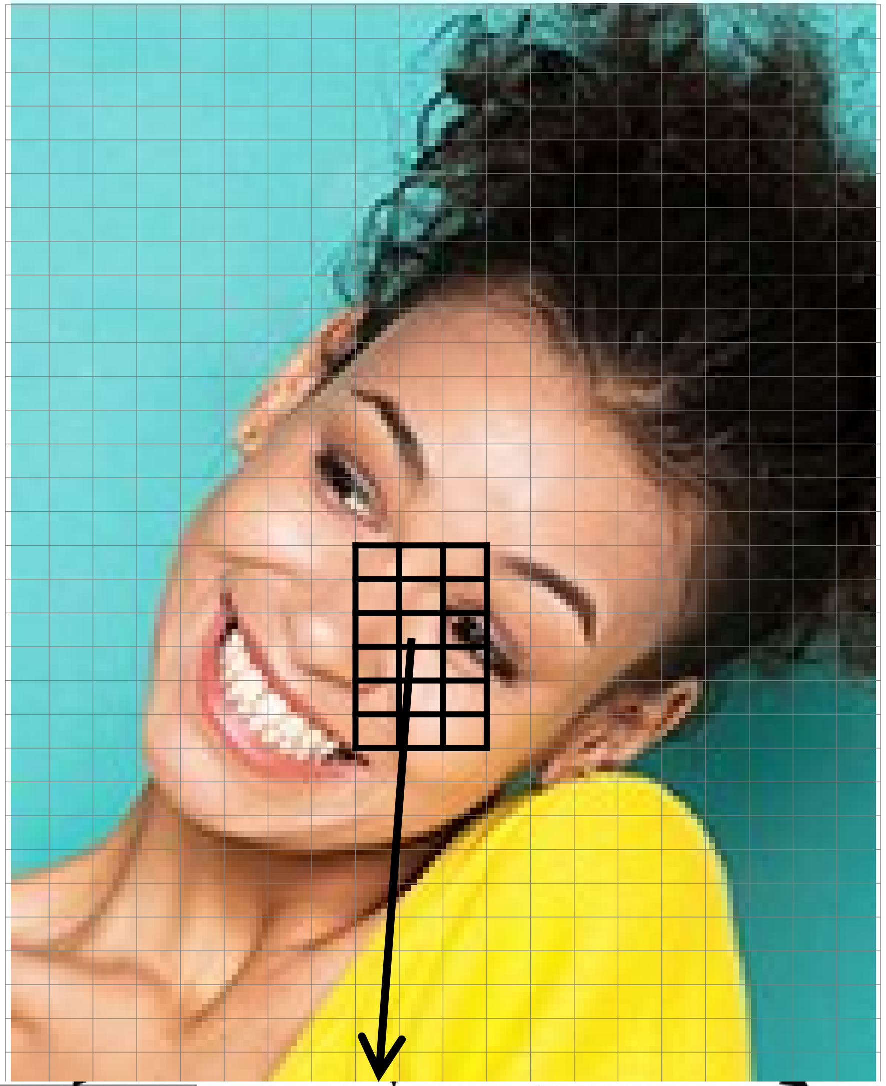
$d = 0$
Tensor 0D (Escalar)
Shape: ()

$d = 1$
Tensor 1D (Vetor)
Shape: (3,)

$d = 2$
Tensor 2D (Matriz)
Shape: (3,3)



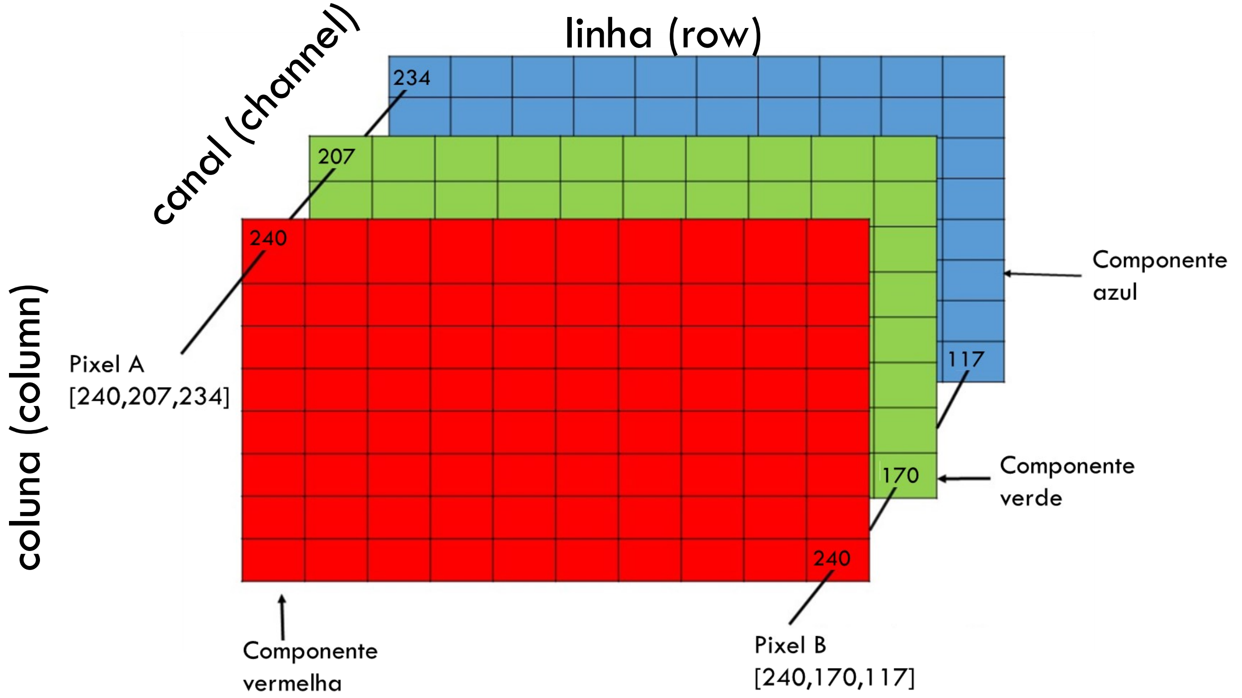
$d = 3$
Tensor 1D (Tensor)
Shape: (3,3,3)



240	241	241
240	237	238
239	240	240
238	237	240
240	240	239
239	240	240

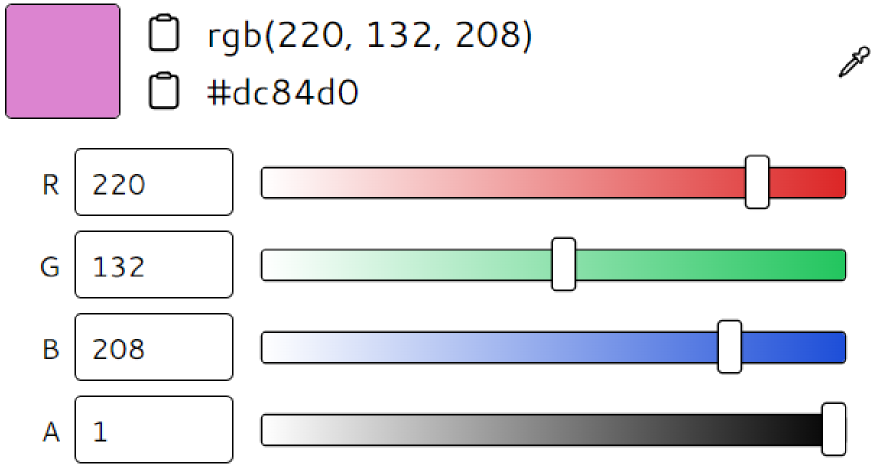
207	199	196
183	163	195
183	166	184
176	172	181
184	167	176
182	180	170

234	231	225
223	213	225
219	211	195
176	205	189
168	141	117
160	142	117



```
data=np.array(img)
print(data.shape)
data = data[:, :, :3]
print(np.shape(data[0,0,:]))
data[0,0,:]
```

```
(725, 507, 4)
(3,)
array([220, 132, 208], dtype=uint8)
```



$$\mathcal{A} \in \mathbb{R}^{N_1 \times N_2 \times \cdots \times N_d}$$

'A' é um tensor de ordem-d

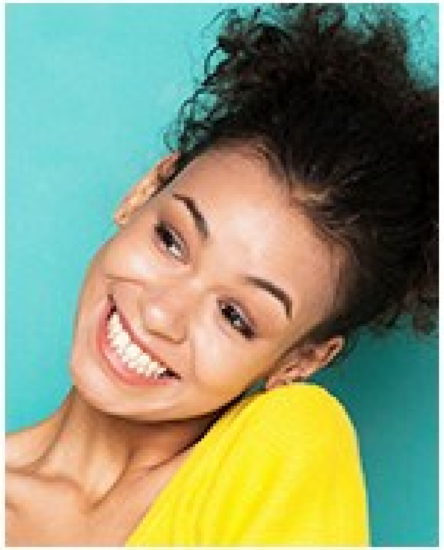
$d = 0$
Tensor 0D (Escalar)
Shape: ()

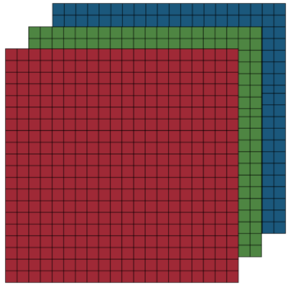
$d = 1$
Tensor 1D (Vetor)
Shape: (3,)

$d = 2$
Tensor 2D (Matriz)
Shape: (3,3)

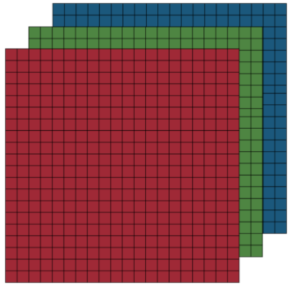
$d = 3$
Tensor 1D (Tensor)
Shape: (3,3,3)

$d = 4$
Tensor 4D (Tensor)
Shape: (3,3,3,3)





Feliz (0)



Triste (1)

$$\mathcal{A} \in \mathbb{R}^{N_1 \times N_2 \times \cdots \times N_d}$$

'A' é um tensor de ordem-d

$d = 0$
Tensor 0D (Escalar)
Shape: ()

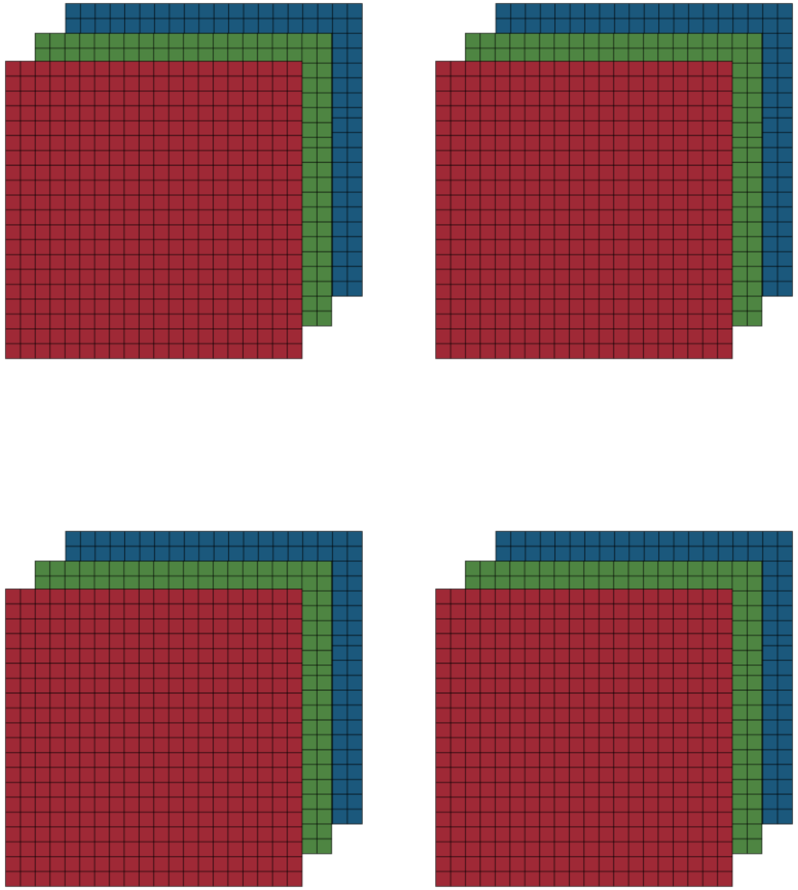
$d = 1$
Tensor 1D (Vetor)
Shape: (3,)

$d = 2$
Tensor 2D (Matriz)
Shape: (3,3)

$d = 3$
Tensor 1D (Tensor)
Shape: (3,3,3)

$d = 4$
Tensor 4D (Tensor)
Shape: (3,3,3,3)

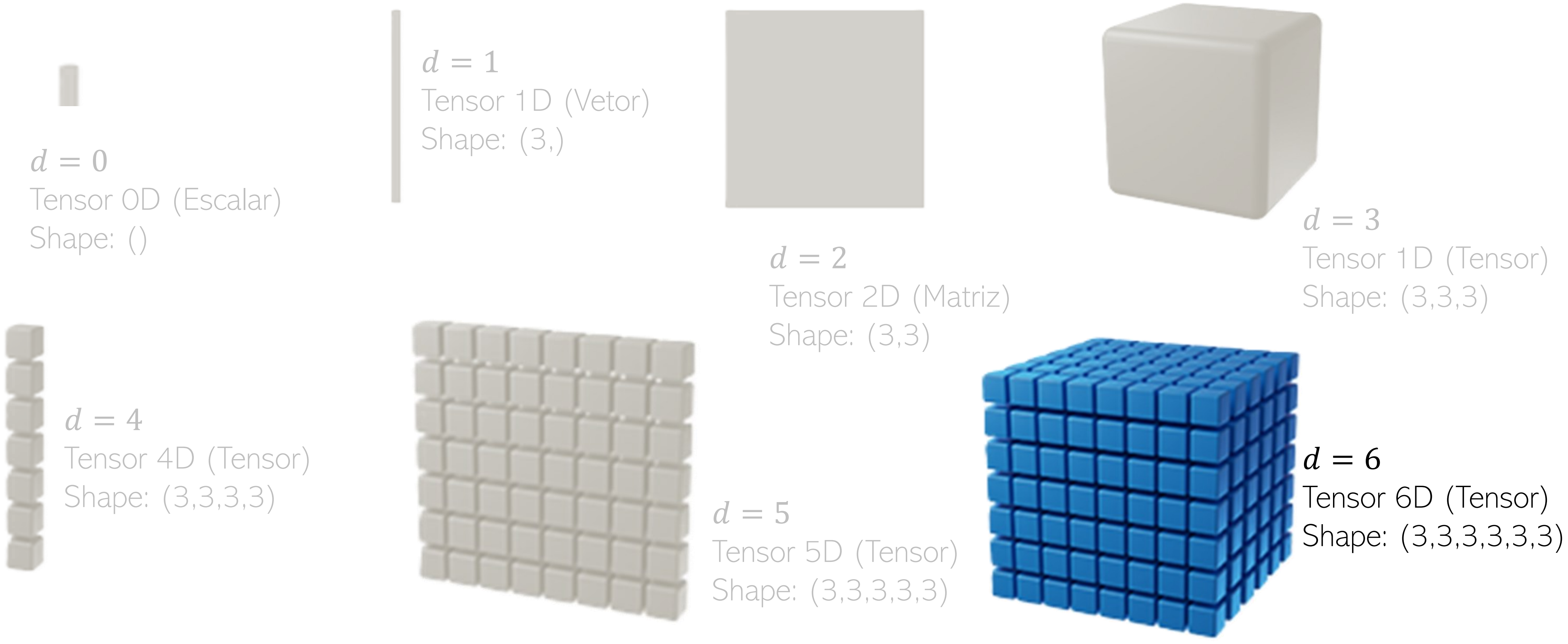
$d = 5$
Tensor 5D (Tensor)
Shape: (3,3,3,3,3)

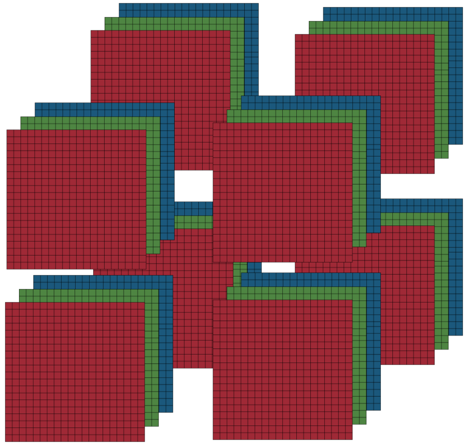


$pessoa\ 0$ $pessoa\ 1$

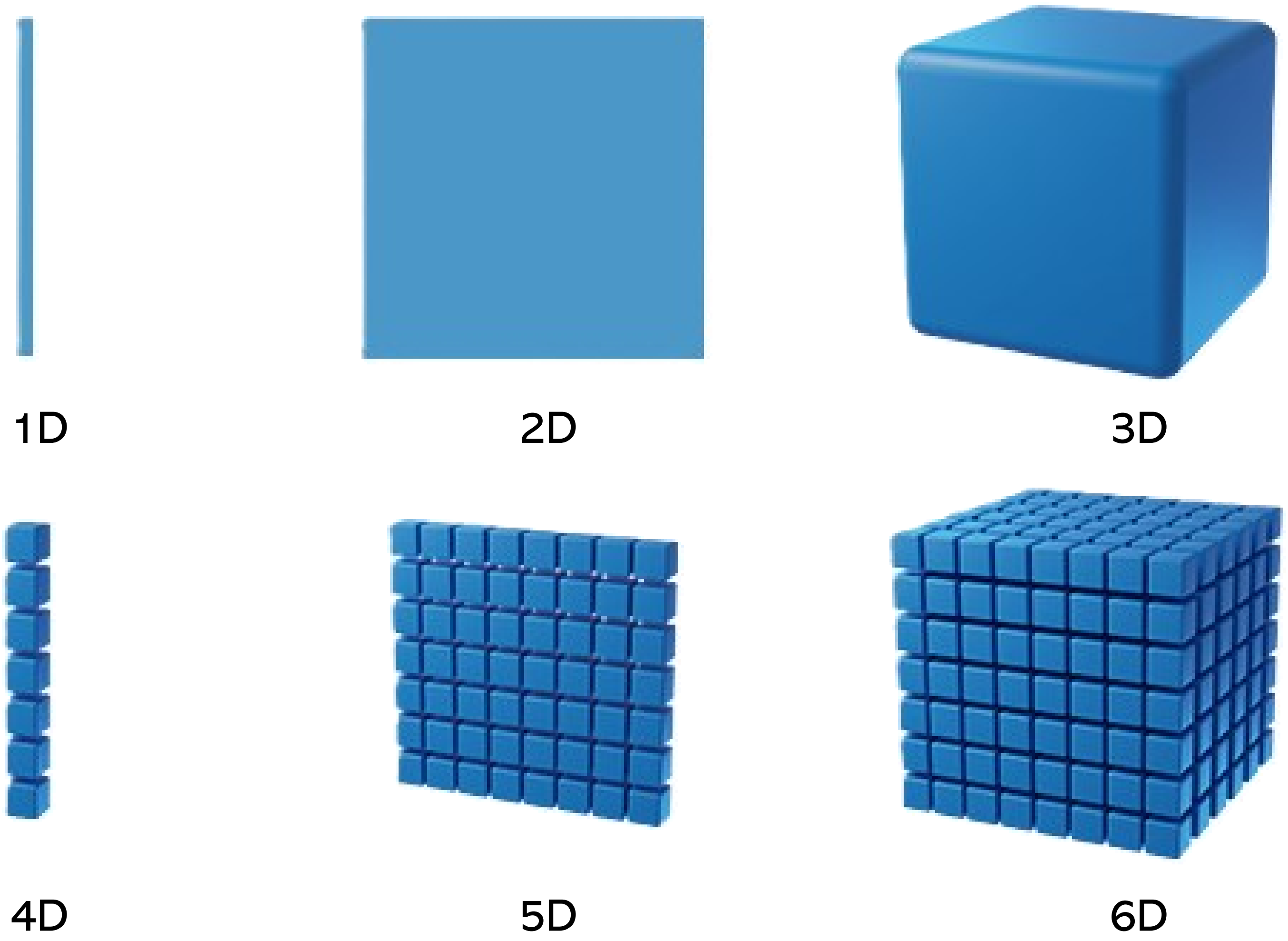
$$\mathcal{A} \in \mathbb{R}^{N_1 \times N_2 \times \cdots \times N_d}$$

'A' é um tensor de ordem-d

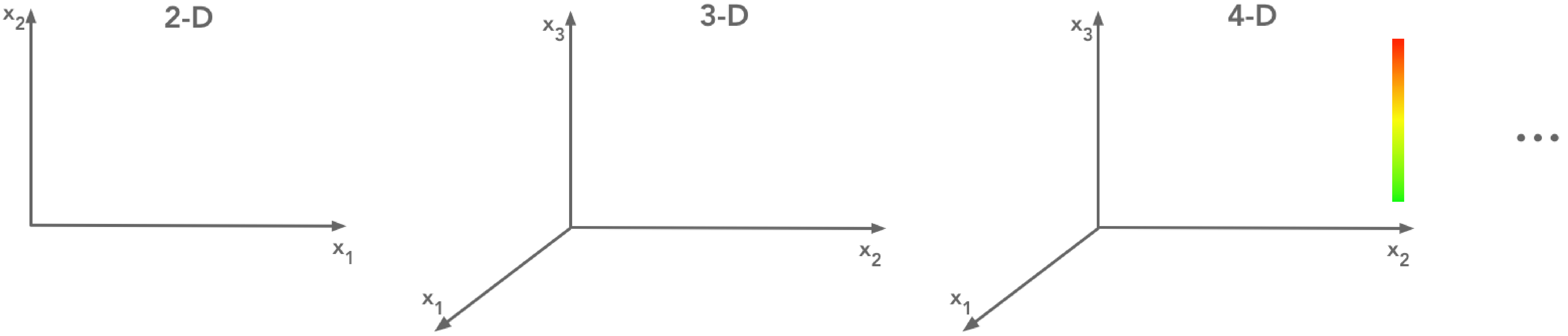




pessoa 0 *pessoa* 1


1D
2D
3D
4D
5D
6D

REPRESENTAÇÃO ESPACIAL



PECE Programa de Educação Continuada
Escola Politécnica da USP

VETORES

VETORES

O vetor $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$ é dito vetor coluna de dimensão n se possuir n linhas e 1 coluna

$$\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{bmatrix}$$

x_i é o i-ésimo elemento do vetor x

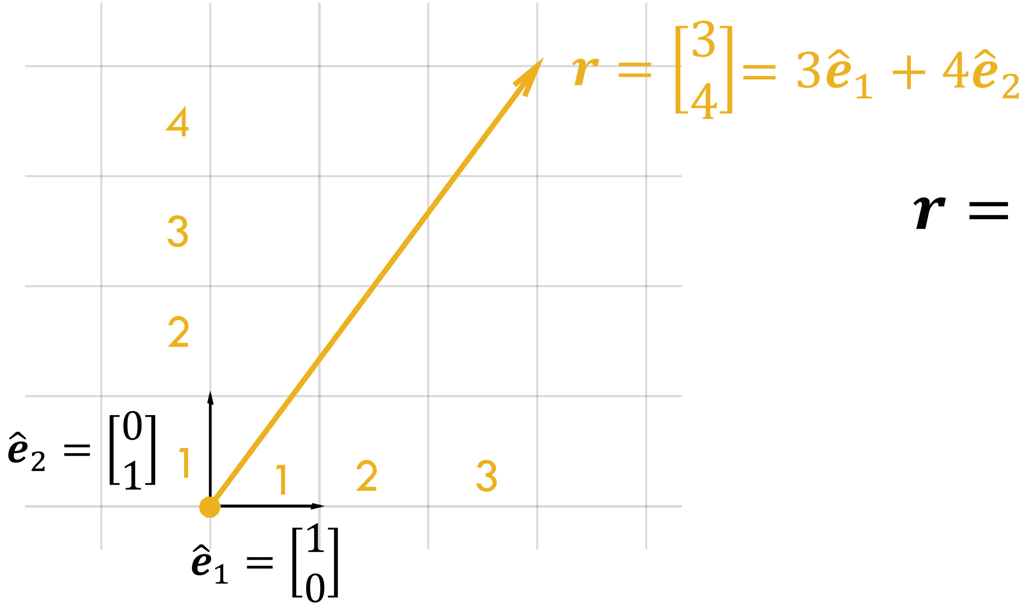
$$\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} 1 & 2 \end{bmatrix}$$

Para expressar o vetor linha,

$$\boldsymbol{x}^T = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & \dots & x_n \end{bmatrix}$$

calcula-se o transposto de $\boldsymbol{x}$, isto é, um vetor de 1 linha e n colunas.

BASE DE UM CONJUNTO DE VETORES



$$\boldsymbol{r} = r_1\hat{\boldsymbol{e}}_\mathbf{1} + r_2\hat{\boldsymbol{e}}_\mathbf{2}$$

Base de vetores (bidimensional) de nosso sistema de coordenadas.

“VETOR DE CARACTERÍSTICAS”

Para nosso universo de IA, vetor é uma lista de atributos de um objeto!

450 m^2
5 quartos
6 banheiro
850000 reais

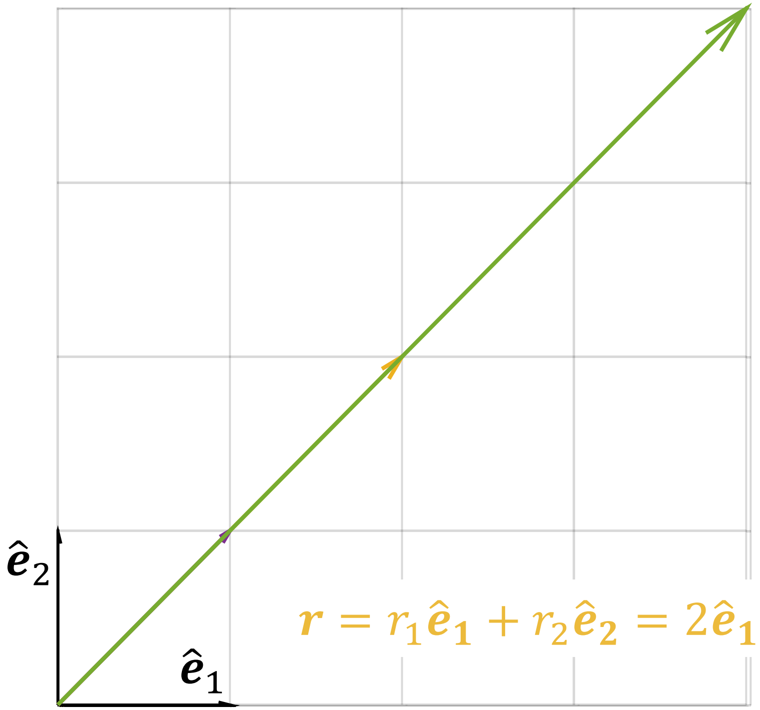
$$\begin{bmatrix} 450 \\ 5 \\ 6 \\ 850 \end{bmatrix}$$

OPERAÇÕES BÁSICAS COM VETORES

$$\frac{\boldsymbol{r}}{2} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{r} = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix}$$ #quartos
#banheiros

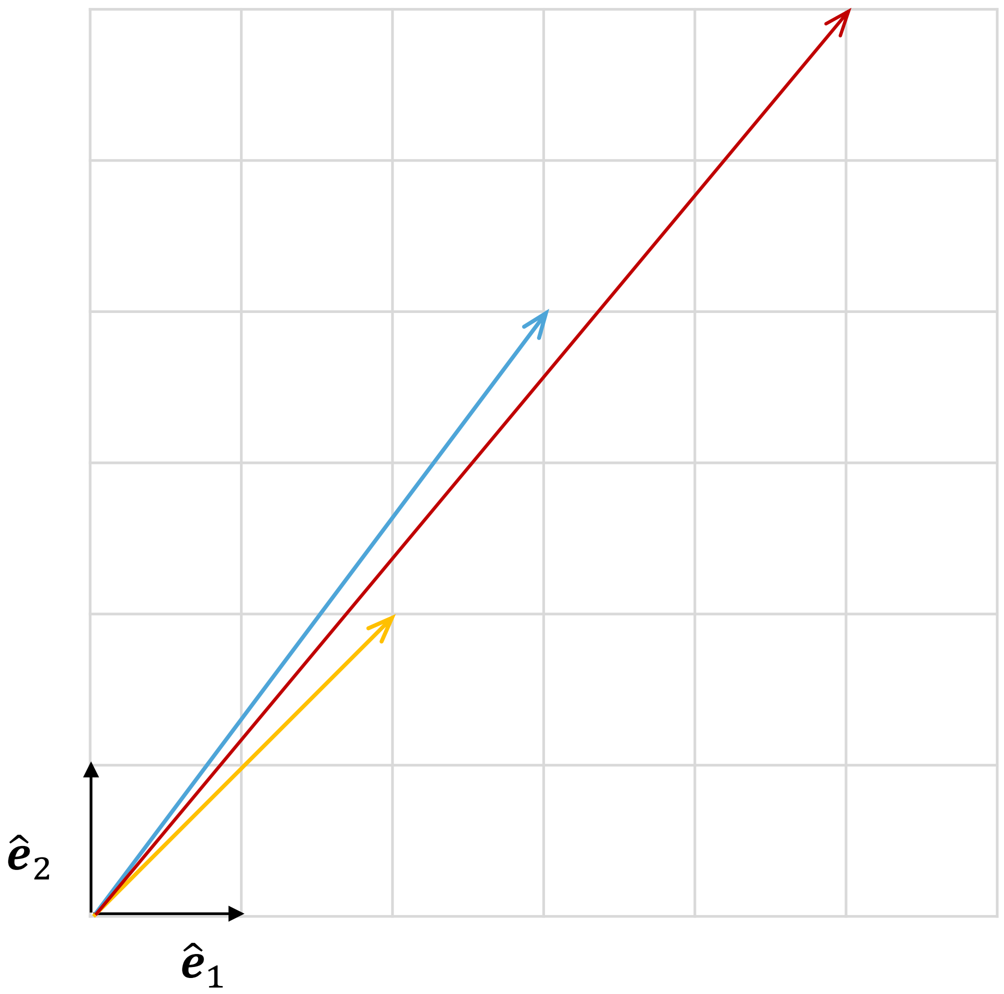
$$2\boldsymbol{r} = \begin{bmatrix} 4 \\ 4 \end{bmatrix}$$



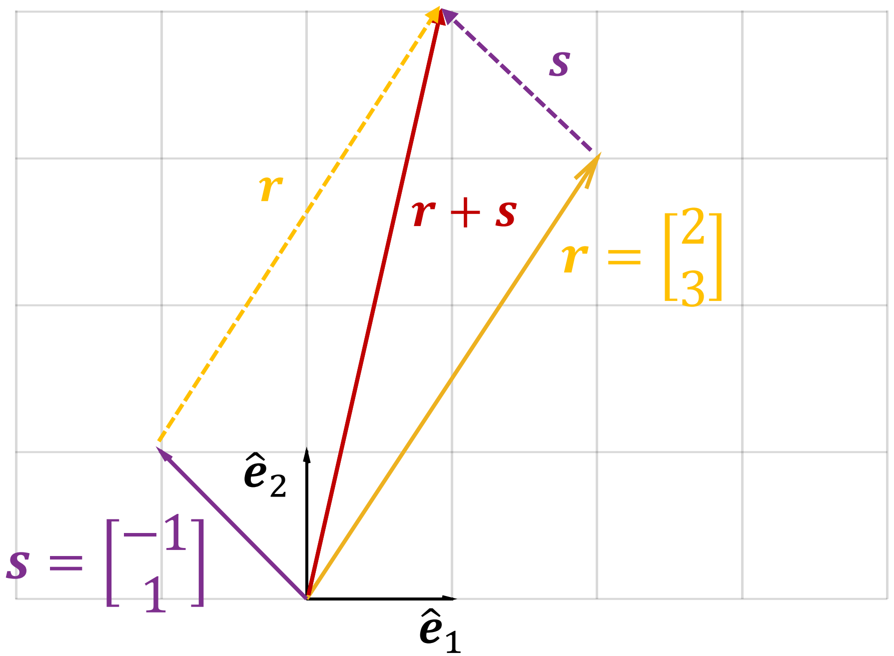
$$\boldsymbol{r} = r_1\hat{\boldsymbol{e}}_1 + r_2\hat{\boldsymbol{e}}_2 = 2\hat{\boldsymbol{e}}_1 + 2\hat{\boldsymbol{e}}_2$$

$$4 \times \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \times 4 \\ 2 \times 4 \\ 3 \times 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 8 \\ 12 \end{bmatrix}$$

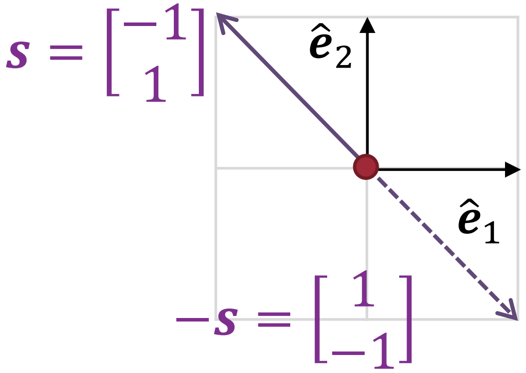
$$\boldsymbol{r}' = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 6 \end{bmatrix}$$



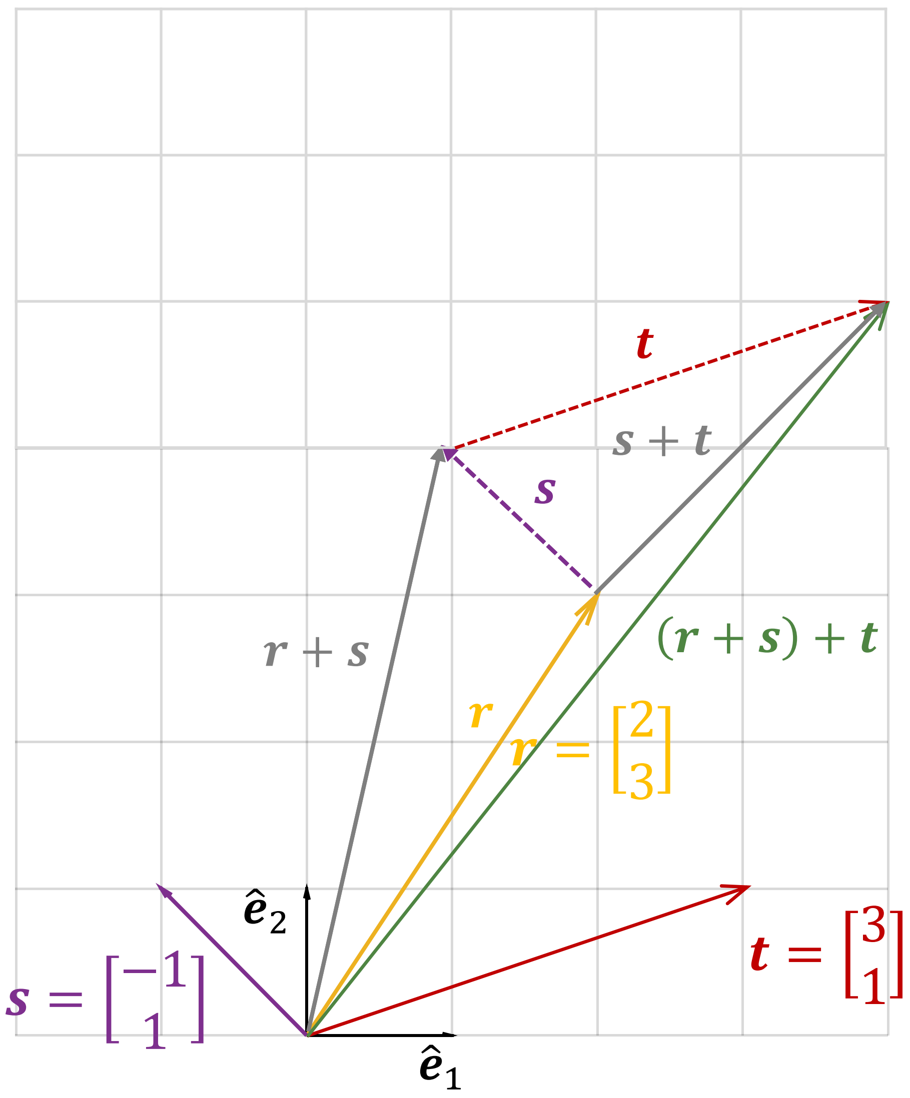
PECE Programa de Educação Continuada
Escola Politécnica da USP



$$\boldsymbol{s}+\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}+\boldsymbol{s}=\begin{bmatrix}-1\\1\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}2\\3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\\4\end{bmatrix}$$



$$\boldsymbol{s}+(-\boldsymbol{s})=\begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix}$$



$$\boldsymbol{r}+\boldsymbol{s}+\boldsymbol{t}=\begin{bmatrix}-1\\1\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}2\\3\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}3\\1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}4\\5\end{bmatrix}$$

$$(\boldsymbol{r}+\boldsymbol{s})+\boldsymbol{t}=\boldsymbol{r}+(\boldsymbol{s}+\boldsymbol{t})$$

$$\left(\begin{bmatrix}2\\3\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}-1\\1\end{bmatrix}\right)+\begin{bmatrix}3\\1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2\\3\end{bmatrix}+\left(\begin{bmatrix}-1\\1\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}3\\1\end{bmatrix}\right)$$

PRODUTO INTERNO ENTRE VETORES

O produto escalar é a principal ferramenta para calcular projeções de vetores, decomposições de vetores e determinar ortogonalidade.

$\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^n$ calcula-se $\boldsymbol{x}^T\boldsymbol{y} \in \mathbb{R}$

$$\boldsymbol{v} = \boldsymbol{x}^T\boldsymbol{y} = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & \dots & x_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \dots \\ y_n \end{bmatrix} = x_1y_1 + x_2y_2 + \cdots + x_ny_n = \sum_{i=1}^{n} x_iy_i$$

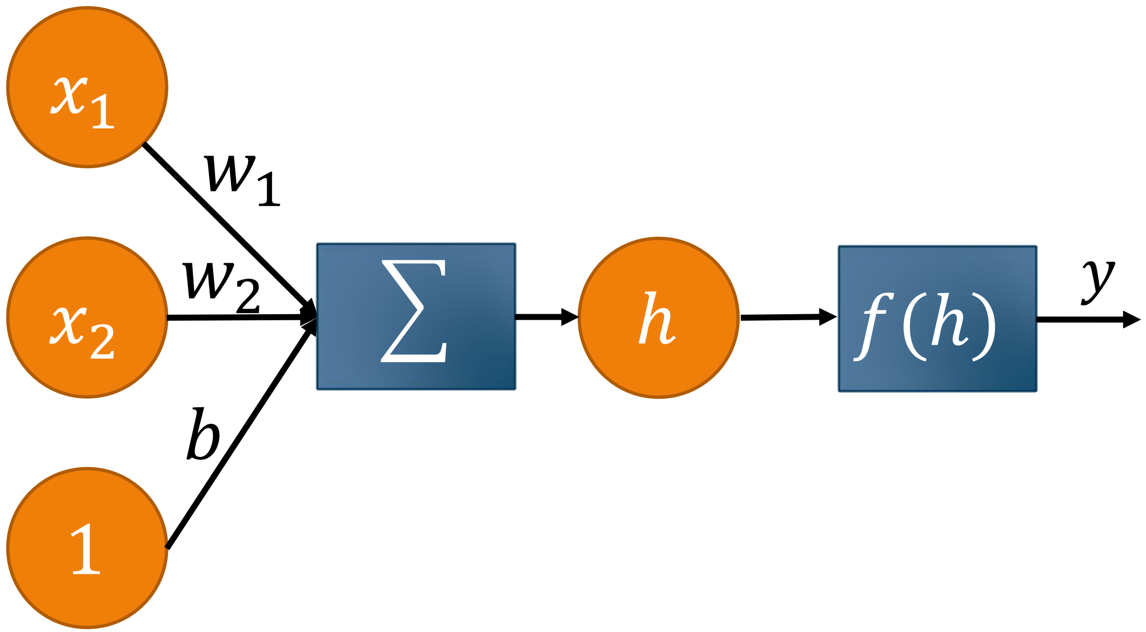
$$\boldsymbol{x}^T\boldsymbol{y} = \boldsymbol{y}^T\boldsymbol{x}$$

POR EXEMPLO...

Ache o produto interno entre os seguintes vetores,

$$\boldsymbol{r} = \begin{bmatrix} -5 \\ 3 \\ 2 \\ 8 \end{bmatrix} \quad \boldsymbol{s} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

PORQUE PRODUTO INTERNO É IMPORTANTE...



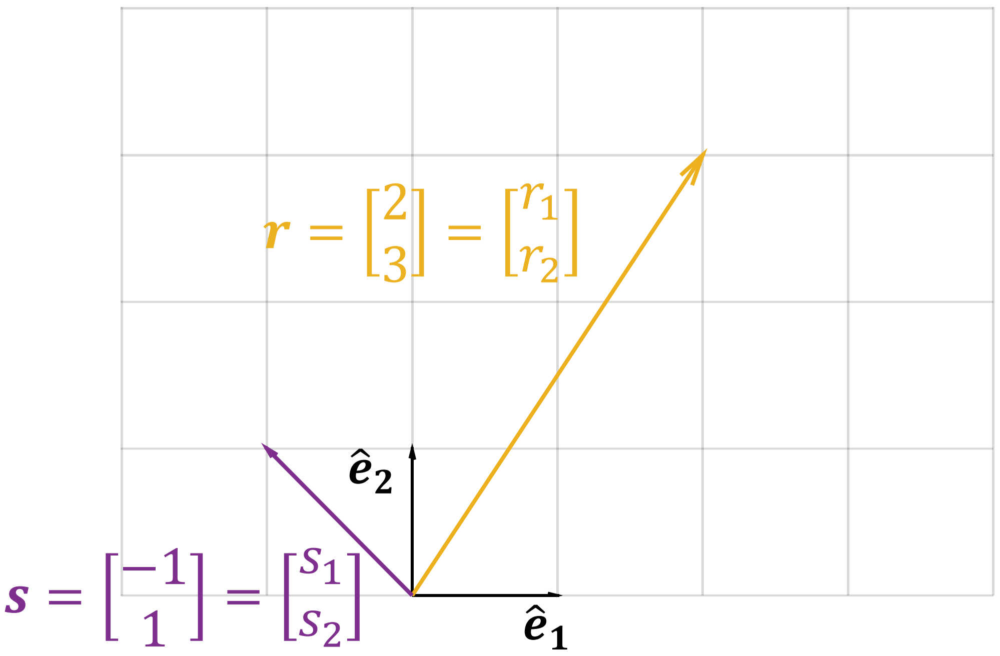
$$y = f(h)$$

$$y = f(w_1 x_1 + w_2 x_2 + b)$$

$$y = f\left(\sum_i w_i x_i + b\right)$$

$$h = \begin{bmatrix} 1 & x_1 & x_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b \\ w_1 \\ w_2 \end{bmatrix}$$

CARACTERÍSTICAS DO PRODUTO INTERNO

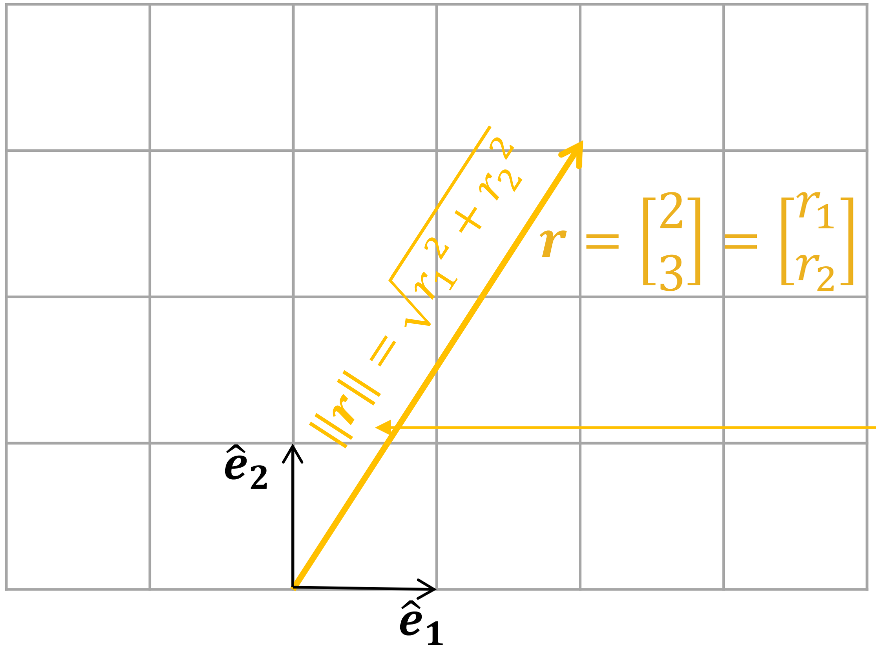


$$\boldsymbol{r} \cdot \boldsymbol{s} = \boldsymbol{s} \cdot \boldsymbol{r} = -1 \times 2 + 1 \times 3 = 1$$

$$\boldsymbol{r} \cdot (\boldsymbol{s} + \boldsymbol{t}) = \boldsymbol{r} \cdot \boldsymbol{s} + \boldsymbol{r} \cdot \boldsymbol{t}$$

$$\boldsymbol{r} \cdot (a\boldsymbol{s}) = a(\boldsymbol{r} \cdot \boldsymbol{s})$$

CARACTERÍSTICAS DO PRODUTO INTERNO



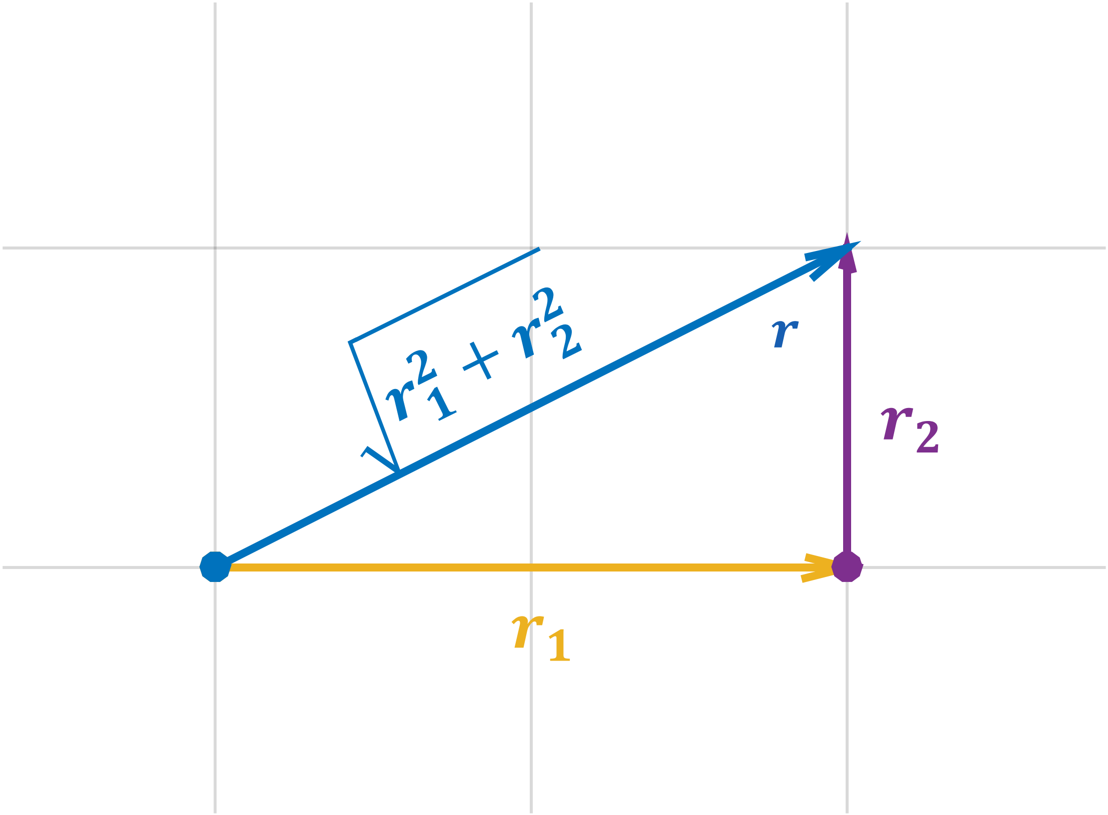
$$\boldsymbol{r} = r_1 \hat{\boldsymbol{e}}_1 + r_2 \hat{\boldsymbol{e}}_2 = 2\hat{\boldsymbol{e}}_1 + 3\hat{\boldsymbol{e}}_2$$

$$\boldsymbol{r} \cdot \boldsymbol{r} = \begin{bmatrix} r_1 & r_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} r_1 \\ r_2 \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{r} \cdot \boldsymbol{r} = r_1^2 + r_2^2 = \left(\boxed{\sqrt{r_1^2 + r_2^2}} \right)^2 = \|\boldsymbol{r}\|^2$$

Se queremos saber a dimensão de um vetor, basta tirar a raiz do seu produto interno.

EXTRAPOLANDO...

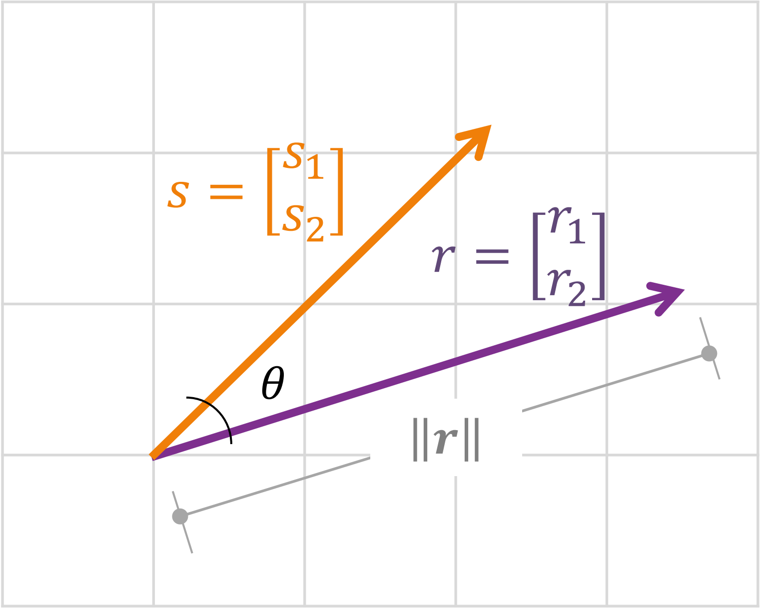


Podemos extender para qualquer dimensão: o tamanho de um vetor é a raíz quadrada da soma dos quadrados de seus componentes. Por exemplo,

$$\boldsymbol{s} = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 5 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$||\boldsymbol{s}|| = \sqrt{36} = 6$$

PRODUTO INTERNO E O ÂNGULO ENTRE VETORES



Relação entre produto interno e ângulo,

$$\boldsymbol{r} \cdot \boldsymbol{s} = \boldsymbol{r}^T \boldsymbol{s} = \|\boldsymbol{r}\| \|\boldsymbol{s}\| \cos\theta$$

$$(\boldsymbol{r} \cdot \boldsymbol{s} = \boldsymbol{r}^T \boldsymbol{s} = \boldsymbol{s}^T \boldsymbol{r})$$

$$\boldsymbol{r} = \begin{bmatrix} r_1 \\ r_2 \end{bmatrix}, \boldsymbol{s} = \begin{bmatrix} s_1 \\ s_2 \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{r}^T \boldsymbol{s} = [r_1 \quad r_2] \begin{bmatrix} s_1 \\ s_2 \end{bmatrix} = r_1\, s_1 + r_2\, s_2$$

$$\boldsymbol{r} \cdot \boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}^T \boldsymbol{r} = [r_1 \quad r_2] \begin{bmatrix} r_1 \\ r_2 \end{bmatrix} = r_1 r_1 + r_2 r_2 = r_1^2 + r_2^2 = \|\boldsymbol{r}\|^2$$

VETORES ORTOGONAIS E ORTONORMAIS

Dois vetores são ortogonais, $\cos\theta = 90^o$, se seu produto interno é nulo,

$$\frac{\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{s}}{\|\boldsymbol{r}\|} = \|\boldsymbol{s}\|\cos\theta \rightarrow \boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{s} = 0$$

Dois vetores $\boldsymbol{r}, \boldsymbol{s}$ são ditos ortogonais quando separados por 90^o.

Um vetor é normalizado se sua dimensão é unitária, ié,

$$\|\boldsymbol{r}\| = 1$$

Vetor unitário ou versor é aquele cuja norma é 1 .

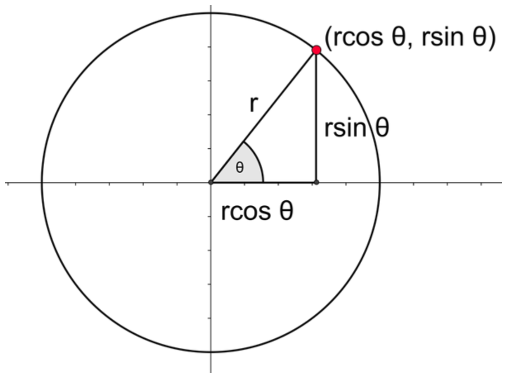
Podemos normalizar um vetor...

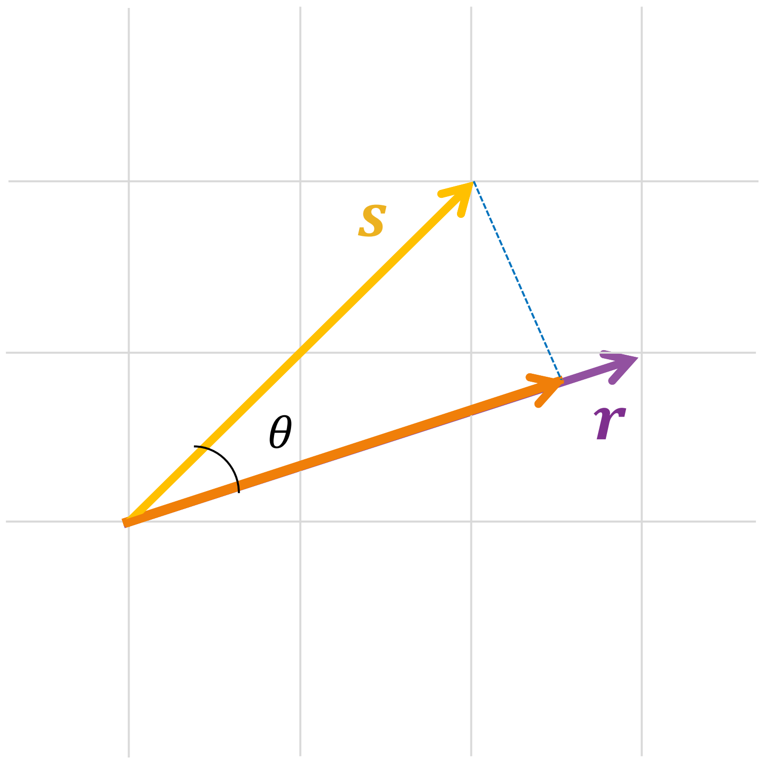
$$\boldsymbol{r}' = \frac{\boldsymbol{r}}{\|\boldsymbol{r}\|}, \boldsymbol{s}' = \frac{\boldsymbol{s}}{\|\boldsymbol{s}\|}, \boldsymbol{r}'\cdot\boldsymbol{s}' = 0$$

Quando a norma dos vetores ortogonais é unitária, eles são chamados ortonormais $(\boldsymbol{r}', \boldsymbol{s}')$.

É impossível ter mais de n vetores independentes mutuamente ortogonais em $\mathbb{R}^n$

PROJEÇÃO ESCALAR E VETORIAL





Projeção escalar é o *tamanho* do vetor laranja.

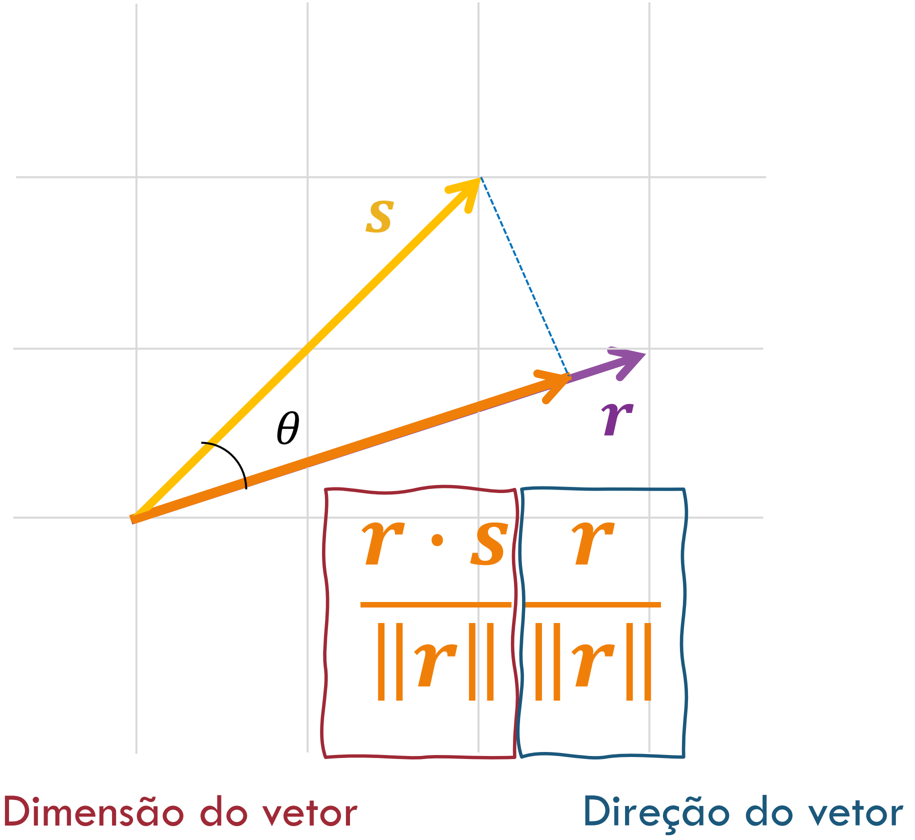
$$\frac{\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{s}}{\|\boldsymbol{r}\|} = \|\boldsymbol{s}\|\cos\theta$$

Projeção vetorial é um escalonamento do vetor $\boldsymbol{r}$

$$\boxed{\frac{\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{s}}{\|\boldsymbol{r}\|}\frac{\boldsymbol{r}}{\|\boldsymbol{r}\|} = \frac{\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{s}}{\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{r}}\boldsymbol{r}}$$

A definição de projeção escalar é o comprimento da projeção vetorial.

RESUMINDO...

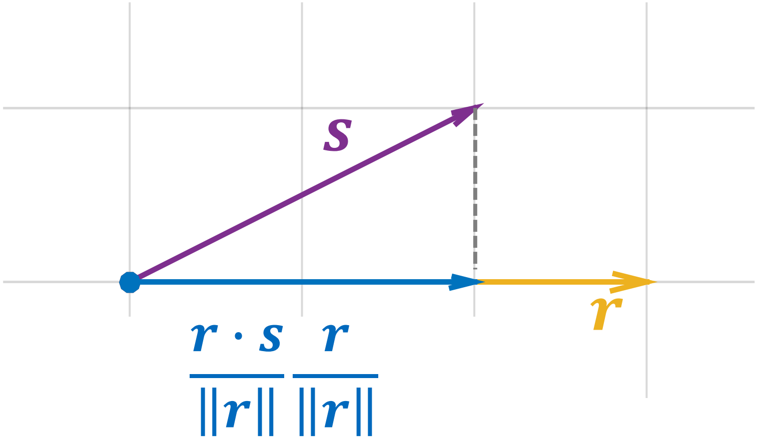


s
r
θ
$\frac{r \cdot s}{\|r\|} \frac{r}{\|r\|}$
Dimensão do vetor
Direção do vetor

EXEMPLO

A projeção pode ser feita em qualquer dimensão. Por exemplo,

$$\boldsymbol{r} = \begin{bmatrix} 3 \\ -4 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \boldsymbol{s} = \begin{bmatrix} 10 \\ 5 \\ -6 \end{bmatrix}$$



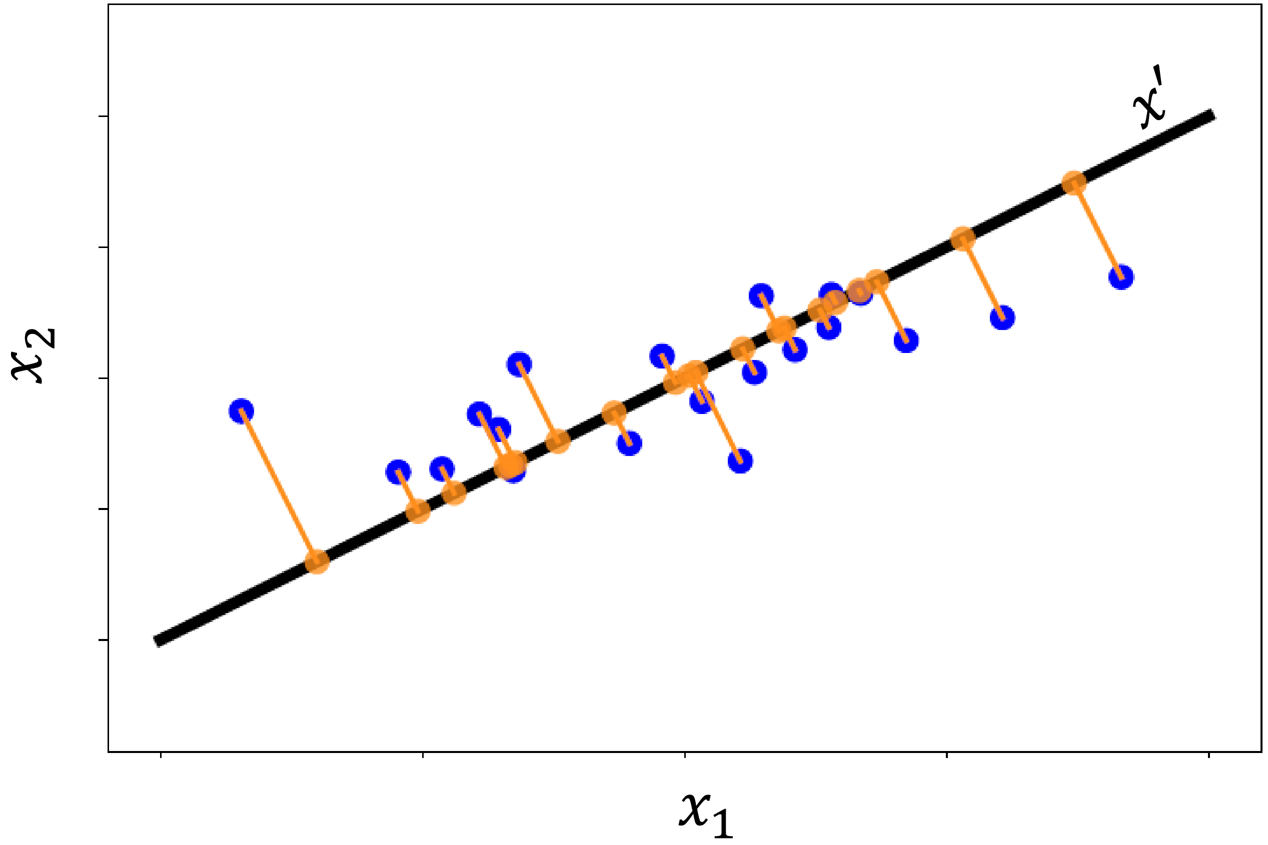
Qual a projeção escalar e vetorial de s em r?

REDUÇÃO DE DIMENSIONALIDADE

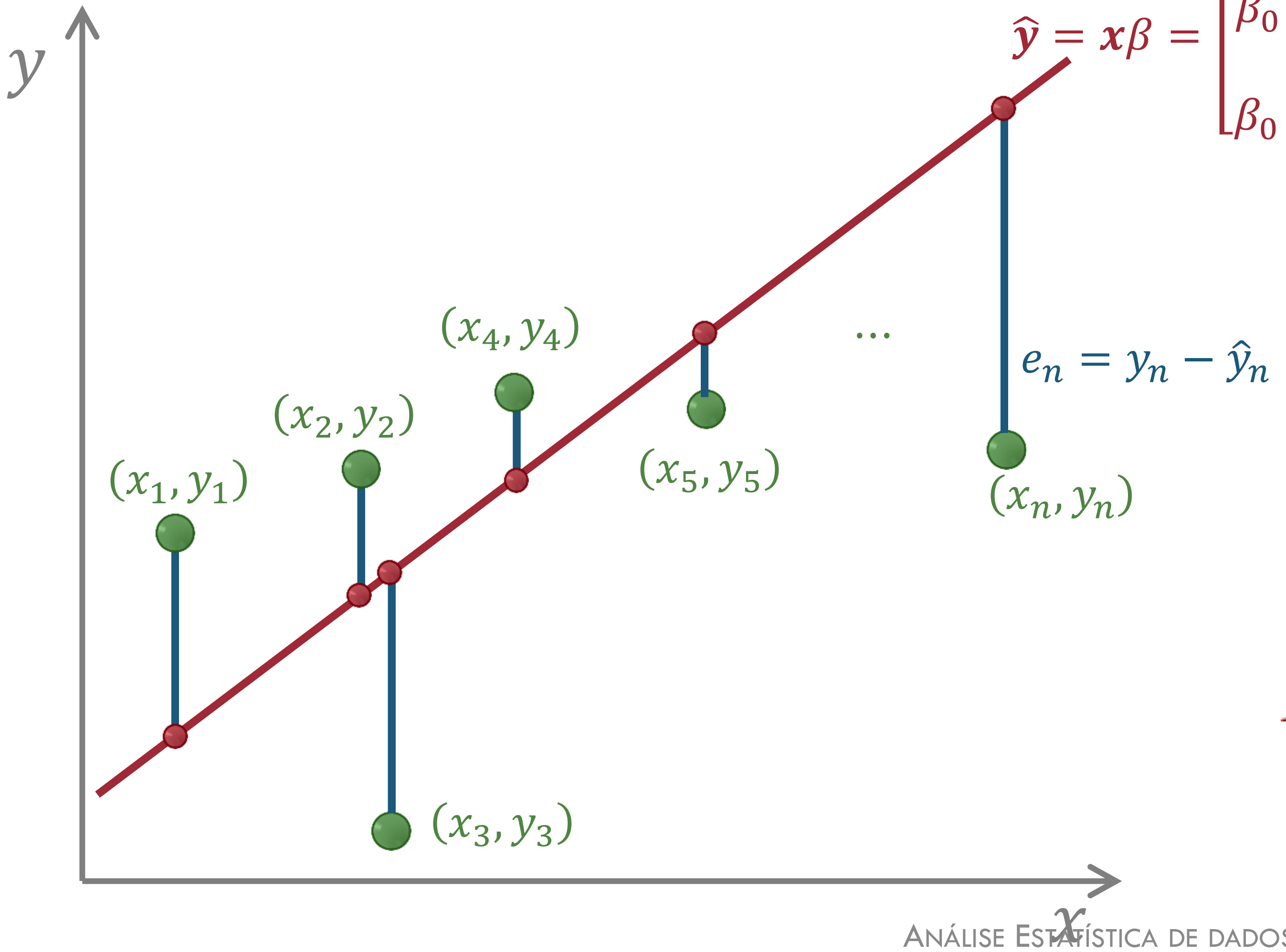
As projeções são uma classe importante de transformações lineares.

No aprendizado de máquina, geralmente lidamos com dados de alta dimensão, que são geralmente são difíceis de analisar ou visualizar.

No entanto, dados de alta dimensão muitas vezes possuem a propriedade de que apenas algumas dimensões contêm mais informações, e a maioria das outras dimensões não são essenciais para descrever as principais propriedades dos dados.



ERRO MÉDIO QUADRÁTICO E O PRODUTO INTERNO



$$\hat{\boldsymbol{y}} = \boldsymbol{x}\beta = \begin{bmatrix} \beta_0 + \beta_1 x_1 \\ \beta_0 + \beta_1 x_2 \\ \vdots \\ \beta_0 + \beta_1 x_n \end{bmatrix}$$

Vetor $n \times 1$ que contém as previsões pontuais

$$\boldsymbol{e}(\beta_0, \beta_1) = \boldsymbol{y} - \boldsymbol{x}\beta = \boldsymbol{y} - \hat{\boldsymbol{y}}$$

$$MSE(\beta) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} e_i^2(\beta)$$

$$MSE(\beta) = \frac{1}{n} [e_1 e_2 \ldots e_n] \begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \\ \vdots \\ e_n \end{bmatrix}$$

PECE Programa de Educação Continuada
Escola Politécnica da USP

MATRIZES

MATRIZ DE CARACTERÍSTICAS

Para nosso universo de IA, matriz é constituída de várias listas de atributos de diferentes objetos!

450 m^2
5 quartos
6 banheiro
850000 reais

$$\begin{bmatrix} 450 \\ 5 \\ 6 \\ 850 \end{bmatrix}$$

MATRIZ DE CARACTERÍSTICAS

Para nosso universo de IA, matriz é constituída de várias listas de atributos de diferentes objetos!

200 m^2
3 quartos
4 banheiro
450000 reais

$$\begin{bmatrix} 450 & 200 \\ 5 & 3 \\ 6 & 4 \\ 850 & 450 \end{bmatrix}$$

MATRIZES

Seja $\boldsymbol{A} \in \mathbb{R}^{m \times n}$ uma matriz com $\boldsymbol{m}$ **linhas e** $\boldsymbol{n}$ **colunas** ($m \times n$ **é a dimensão da matriz**)

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

a_{ij} é o elemento da *i-ésima* linha da *j-ésima* coluna de $\boldsymbol{A}$

A *i-ésima* coluna, $\boldsymbol{a}_i = a_{:,i}$

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} | & | & & | \\ \boldsymbol{a}_1 & \boldsymbol{a}_2 & \cdots & \boldsymbol{a}_n \\ | & | & & | \end{bmatrix}$$

A *j-ésima* linha, $\boldsymbol{a}'_j = a_{j,:}$

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} - & \boldsymbol{a}'_1 & - \\ - & \boldsymbol{a}'_2 & - \\ - & \vdots & - \\ - & \boldsymbol{a}'_m & - \end{bmatrix}$$

PRODUTO EXTERNO ENTRE VETORES

$\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^m, \boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^n$ calcula-se $\boldsymbol{x}\boldsymbol{y}^T \in \mathbb{R}^{m\times n}$

$$\boldsymbol{A} = \boldsymbol{x}\boldsymbol{y}^T = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 & y_2 & \dots & y_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1y_1 & x_1y_2 & \dots & x_1y_n \\ x_2y_1 & x_2y_2 & \dots & x_2y_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ x_my_1 & x_my_2 & \dots & x_my_n \end{bmatrix}$$

EXEMPLO

$\mathbf{1} \in \mathbb{R}^n$ é um vetor linha n-dimensional, cujas entradas são todas iguais a 1. Além disso, considere a matriz $\boldsymbol{A} \in \mathbb{R}^{nxm}$ cujas colunas são todas iguais a algum vetor $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$. Usando produto externo, podemos representar $\boldsymbol{A}$ compactamente como,

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} | & | & | & | \\ \boldsymbol{x} & \boldsymbol{x} & \cdots & \boldsymbol{x} \\ | & | & | & | \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 & x_1 & \cdots & x_1 \\ x_2 & x_2 & \cdots & x_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_m & x_m & \cdots & x_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \end{bmatrix} = \boldsymbol{x}\mathbf{1}^T$$

MATRIZ TRANSPOSTA

A transposição de uma matriz resulta na troca das linhas pelas colunas. Dada uma matriz $\boldsymbol{A} \in \mathbb{R}^{mxn}$, sua transposição, escrita $\boldsymbol{A}^T \in \mathbb{R}^{nxm}$, é a matriz $n \times m$ cujas entradas são dadas por

$$(\boldsymbol{A}^T)_{ij} = a_{ji}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$$

$$(\boldsymbol{A}^T)^T = \boldsymbol{A}$$
$$(\boldsymbol{AB})^T = \boldsymbol{B}^T\boldsymbol{A}^T$$
$$(\boldsymbol{A} + \boldsymbol{B})^T = \boldsymbol{A}^T + \boldsymbol{B}^T$$

Quando $\boldsymbol{A}^T = \boldsymbol{A}$ **a matriz é dita simétrica** (somente matrizes quadradas, $m = n$, podem ser simétricas).

$$
\begin{array}{cc} & n \\ m & \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{bmatrix}^{T} \end{array} = \begin{array}{cc} & m \\ n & \begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 2 & 4 & 6 \end{bmatrix} \end{array}
$$

PRODUTO ENTRE MATRIZ E VETOR

$\boldsymbol{A} \in \mathbb{R}^{m \times n}$ e $\boldsymbol{v}, \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^{n \times 1}$

$$\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{v}$$

$$\underset{2 \times 2}{\begin{bmatrix} \boxed{1 \quad 2} \\ \boxed{3 \quad 4} \end{bmatrix}} \underset{2 \times 1}{\begin{bmatrix} \boxed{\begin{matrix} x_1 \\ x_2 \end{matrix}} \end{bmatrix}} = \underset{2 \times 1}{\begin{bmatrix} \boxed{1x_1 + 2x_2} \\ \boxed{3x_1 + 4x_2} \end{bmatrix}}$$

$$\boldsymbol{v} = \boldsymbol{Ax} = \begin{bmatrix} - & \boldsymbol{a}'_1 & - \\ - & \boldsymbol{a}'_2 & - \\ - & \vdots & - \\ - & \boldsymbol{a}'_m & - \end{bmatrix} \boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{a}'_1 \boldsymbol{x} \\ \boldsymbol{a}'_2 \boldsymbol{x} \\ \vdots \\ \boldsymbol{a}'_m \boldsymbol{x} \end{bmatrix}$$

a *i-ésima* entrada de $\boldsymbol{v}$ é igual ao produto da *i-ésima* linha de $\boldsymbol{A}$ por $\boldsymbol{x}$, $v_i = \boldsymbol{a}'_i \boldsymbol{x}$

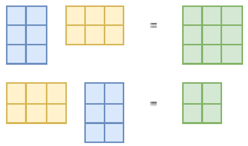
PRODUTO ENTRE MATRIZ E VETOR

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1x_1 + 2x_2 \\ 3x_1 + 4x_2 \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{v} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} | & | & & | \\ \boldsymbol{a}_1 & \boldsymbol{a}_2 & \cdots & \boldsymbol{a}_n \\ | & | & & | \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{a}_1 \end{bmatrix} x_1 + \begin{bmatrix} \boldsymbol{a}_2 \end{bmatrix} x_2 + \cdots + \begin{bmatrix} \boldsymbol{a}_n \end{bmatrix} x_n$$

$\boldsymbol{v}$ é uma combinação linear das colunas de $\boldsymbol{A}$, onde os coeficientes da combinação linear são dados pelas entradas de $\boldsymbol{x}$.

PRODUTO ENTRE MATRIZES

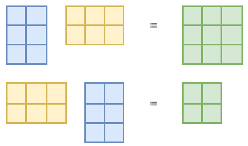


$$\boldsymbol{A} \in \mathbb{R}^{m\times n}, \boldsymbol{B} \in \mathbb{R}^{n\times p} \longrightarrow \boldsymbol{C} \in \mathbb{R}^{m\times p}$$

$$\boldsymbol{C} = \boldsymbol{AB} = \underset{m\times n}{\begin{bmatrix} - & \boldsymbol{a}_1' & - \\ - & \boldsymbol{a}_2' & - \\ - & \vdots & - \\ - & \boldsymbol{a}_m' & - \end{bmatrix}} \underset{n\times p}{\begin{bmatrix} | & | & & | \\ \boldsymbol{b}_1 & \boldsymbol{b}_2 & \cdots & \boldsymbol{b}_p \\ | & | & & | \end{bmatrix}} = \underset{m\times p}{\begin{bmatrix} \boldsymbol{a}_1'\boldsymbol{b}_1 & \boldsymbol{a}_1'\boldsymbol{b}_2 & \cdots & \boldsymbol{a}_1'\boldsymbol{b}_p \\ \boldsymbol{a}_2'\boldsymbol{b}_1 & \boldsymbol{a}_2'\boldsymbol{b}_2 & \cdots & \boldsymbol{a}_2'\boldsymbol{b}_p \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \boldsymbol{a}_m'\boldsymbol{b}_1 & \boldsymbol{a}_m'\boldsymbol{b}_2 & \cdots & \boldsymbol{a}_m'\boldsymbol{b}_p \end{bmatrix}}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 10 & 20 \\ 30 & 40 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} & \\ & \end{bmatrix}$$

PRODUTO ENTRE MATRIZES

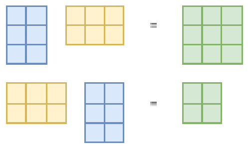


$$\boldsymbol{A} \in \mathbb{R}^{m\times n}, \boldsymbol{B} \in \mathbb{R}^{n\times p} \Rightarrow \boldsymbol{C} \in \mathbb{R}^{m\times p}$$

$$\boldsymbol{C} = \boldsymbol{AB} = \underset{m \times n}{\begin{bmatrix} - & \boldsymbol{a}_1' & - \\ - & \boldsymbol{a}_2' & - \\ - & \vdots & - \\ - & \boldsymbol{a}_m' & - \end{bmatrix}} \underset{n \times p}{\begin{bmatrix} | & | & & | \\ \boldsymbol{b}_1 & \boldsymbol{b}_2 & \cdots & \boldsymbol{b}_p \\ | & | & & | \end{bmatrix}} = \underset{m \times p}{\begin{bmatrix} \boldsymbol{a}_1'\boldsymbol{b}_1 & \boldsymbol{a}_1'\boldsymbol{b}_2 & \cdots & \boldsymbol{a}_1'\boldsymbol{b}_p \\ \boldsymbol{a}_2'\boldsymbol{b}_1 & \boldsymbol{a}_2'\boldsymbol{b}_2 & \cdots & \boldsymbol{a}_2'\boldsymbol{b}_p \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \boldsymbol{a}_m'\boldsymbol{b}_1 & \boldsymbol{a}_m'\boldsymbol{b}_2 & \cdots & \boldsymbol{a}_m'\boldsymbol{b}_p \end{bmatrix}}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 10 & 20 \\ 30 & 40 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 70 & \\ & \end{bmatrix}$$

PRODUTO ENTRE MATRIZES



$$\boldsymbol{A} \in \mathbb{R}^{m\times n}, \boldsymbol{B} \in \mathbb{R}^{n\times p} \longrightarrow \boldsymbol{C} \in \mathbb{R}^{m\times p}$$

$$\boldsymbol{C} = \boldsymbol{AB} = \underset{m \times n}{\begin{bmatrix} - & \boldsymbol{a}_1' & - \\ - & \boldsymbol{a}_2' & - \\ - & \vdots & - \\ - & \boldsymbol{a}_m' & - \end{bmatrix}} \underset{n \times p}{\begin{bmatrix} | & | & & | \\ \boldsymbol{b}_1 & \boldsymbol{b}_2 & \cdots & \boldsymbol{b}_p \\ | & | & & | \end{bmatrix}} = \underset{m \times p}{\begin{bmatrix} \boldsymbol{a}_1'\boldsymbol{b}_1 & \boldsymbol{a}_1'\boldsymbol{b}_2 & \cdots & \boldsymbol{a}_1'\boldsymbol{b}_p \\ \boldsymbol{a}_2'\boldsymbol{b}_1 & \boldsymbol{a}_2'\boldsymbol{b}_2 & \cdots & \boldsymbol{a}_2'\boldsymbol{b}_p \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \boldsymbol{a}_m'\boldsymbol{b}_1 & \boldsymbol{a}_m'\boldsymbol{b}_2 & \cdots & \boldsymbol{a}_m'\boldsymbol{b}_p \end{bmatrix}}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 10 & 20 \\ 30 & 40 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 70 & \mathbf{100} \\ & \end{bmatrix}$$

PRODUTO ENTRE MATRIZES

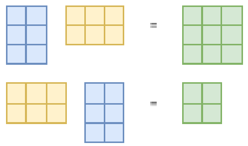
$$\begin{bmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}10 & 20\\ 30 & 40\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}70 & 100\\ 150 & \end{bmatrix}$$

$\boldsymbol{A} \in \mathbb{R}^{m\times n}, \boldsymbol{B} \in \mathbb{R}^{n\times p}$ $\quad$ $\boldsymbol{C} \in \mathbb{R}^{m\times p}$

$$\boldsymbol{C} = \boldsymbol{AB} = \underset{m\times n}{\begin{bmatrix} - & \boldsymbol{a}_1' & - \\ - & \boldsymbol{a}_2' & - \\ - & \vdots & - \\ - & \boldsymbol{a}_m' & - \end{bmatrix}} \underset{n\times p}{\begin{bmatrix} | & | & & | \\ \boldsymbol{b}_1 & \boldsymbol{b}_2 & \cdots & \boldsymbol{b}_p \\ | & | & & | \end{bmatrix}} = \underset{m\times p}{\begin{bmatrix} \boldsymbol{a}_1'\boldsymbol{b}_1 & \boldsymbol{a}_1'\boldsymbol{b}_2 & \cdots & \boldsymbol{a}_1'\boldsymbol{b}_p \\ \boldsymbol{a}_2'\boldsymbol{b}_1 & \boldsymbol{a}_2'\boldsymbol{b}_2 & \cdots & \boldsymbol{a}_2'\boldsymbol{b}_p \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \boldsymbol{a}_m'\boldsymbol{b}_1 & \boldsymbol{a}_m'\boldsymbol{b}_2 & \cdots & \boldsymbol{a}_m'\boldsymbol{b}_p \end{bmatrix}}$$

$$\begin{bmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}10 & 20\\ 30 & 40\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}70 & 100\\ \mathbf{150} & \end{bmatrix}$$

PRODUTO ENTRE MATRIZES

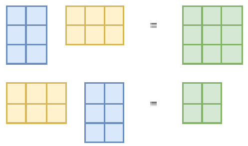


$$\boldsymbol{A} \in \mathbb{R}^{m\times n}, \boldsymbol{B} \in \mathbb{R}^{n\times p} \Rightarrow \boldsymbol{C} \in \mathbb{R}^{m\times p}$$

$$\boldsymbol{C} = \boldsymbol{AB} = \underset{m \times n}{\begin{bmatrix} - & \boldsymbol{a}_1' & - \\ - & \boldsymbol{a}_2' & - \\ - & \vdots & - \\ - & \boldsymbol{a}_m' & - \end{bmatrix}} \underset{n \times p}{\begin{bmatrix} | & | & & | \\ \boldsymbol{b}_1 & \boldsymbol{b}_2 & \cdots & \boldsymbol{b}_p \\ | & | & & | \end{bmatrix}} = \underset{m \times p}{\begin{bmatrix} \boldsymbol{a}_1'\boldsymbol{b}_1 & \boldsymbol{a}_1'\boldsymbol{b}_2 & \cdots & \boldsymbol{a}_1'\boldsymbol{b}_p \\ \boldsymbol{a}_2'\boldsymbol{b}_1 & \boldsymbol{a}_2'\boldsymbol{b}_2 & \cdots & \boldsymbol{a}_2'\boldsymbol{b}_p \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \boldsymbol{a}_m'\boldsymbol{b}_1 & \boldsymbol{a}_m'\boldsymbol{b}_2 & \cdots & \boldsymbol{a}_m'\boldsymbol{b}_p \end{bmatrix}}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 10 & 20 \\ 30 & 40 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 70 & 100 \\ 150 & \mathbf{220} \end{bmatrix}$$

PRODUTO ENTRE MATRIZES



$$\boldsymbol{A} \in \mathbb{R}^{m\times n}, \boldsymbol{B} \in \mathbb{R}^{n\times p} \Longrightarrow \boldsymbol{C} \in \mathbb{R}^{m\times p}$$

$$\boldsymbol{C} = \boldsymbol{AB} = \underset{m\times n}{\begin{bmatrix} - & \boldsymbol{a}_1' & - \\ - & \boldsymbol{a}_2' & - \\ - & \vdots & - \\ - & \boldsymbol{a}_m' & - \end{bmatrix}} \underset{n\times p}{\begin{bmatrix} | & | & & | \\ \boldsymbol{b}_1 & \boldsymbol{b}_2 & \cdots & \boldsymbol{b}_p \\ | & | & & | \end{bmatrix}} = \underset{m\times p}{\begin{bmatrix} \boldsymbol{a}_1'\boldsymbol{b}_1 & \boldsymbol{a}_1'\boldsymbol{b}_2 & \cdots & \boldsymbol{a}_1'\boldsymbol{b}_p \\ \boldsymbol{a}_2'\boldsymbol{b}_1 & \boldsymbol{a}_2'\boldsymbol{b}_2 & \cdots & \boldsymbol{a}_2'\boldsymbol{b}_p \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \boldsymbol{a}_m'\boldsymbol{b}_1 & \boldsymbol{a}_m'\boldsymbol{b}_2 & \cdots & \boldsymbol{a}_m'\boldsymbol{b}_p \end{bmatrix}}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 10 & 20 \\ 30 & 40 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 70 & 100 \\ 150 & 220 \end{bmatrix}$$

EXEMPLO

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \\ 10 & 11 & 12 \end{bmatrix} \quad \boldsymbol{B} = \begin{bmatrix} 2 & 7 \\ 1 & 2 \\ 3 & 6 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \\ 10 & 11 & 12 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 7 \\ 1 & 2 \\ 3 & 6 \end{bmatrix} = \quad ?$$

VÁRIAS VISÕES DE $\boldsymbol{C = AB}$

$$\boldsymbol{C} = \boldsymbol{AB} = \begin{bmatrix} | & | & & | \\ \boldsymbol{a}_1 & \boldsymbol{a}_2 & \cdots & \boldsymbol{a}_n \\ | & | & & | \end{bmatrix} \begin{bmatrix} - & \boldsymbol{b}_1' & - \\ - & \boldsymbol{b}_2' & - \\ - & \vdots & - \\ - & \boldsymbol{b}_n' & - \end{bmatrix} = \sum_{\boldsymbol{i=1}}^{\boldsymbol{n}} \boldsymbol{a}_i \boldsymbol{b}_i'$$

Multiplicação de matrizes vista como **produto externo**

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{bmatrix} =$$

VÁRIAS VISÕES DE $\boldsymbol{C = AB}$

$$\boldsymbol{C} = \boldsymbol{AB} = \begin{bmatrix} | & | & & | \\ \boldsymbol{a}_1 & \boldsymbol{a}_2 & \cdots & \boldsymbol{a}_n \\ | & | & & | \end{bmatrix} \begin{bmatrix} - & \boldsymbol{b}_1' & - \\ - & \boldsymbol{b}_2' & - \\ - & \vdots & - \\ - & \boldsymbol{b}_n' & - \end{bmatrix} = \sum_{\boldsymbol{i}=1}^{\boldsymbol{n}} \boldsymbol{a}_i \boldsymbol{b}_i'$$

Multiplicação de matrizes vista como **produto externo**

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1\times5 & 1\times6 \\ 3\times5 & 3\times6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 6 \\ 15 & 18 \end{bmatrix}$$

VÁRIAS VISÕES DE $\boldsymbol{C = AB}$

$$\boldsymbol{C} = \boldsymbol{AB} = \begin{bmatrix} | & | & & | \\ \boldsymbol{a}_1 & \boxed{\boldsymbol{a}_2} & \cdots & \boldsymbol{a}_n \\ | & | & & | \end{bmatrix} \begin{bmatrix} - & \boldsymbol{b}_1' & - \\ - & \boldsymbol{b}_2' & - \\ - & \vdots & - \\ - & \boldsymbol{b}_n' & - \end{bmatrix} = \sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{a}_i \boldsymbol{b}_i'$$

Multiplicação de matrizes vista como **produto externo**

$$\begin{bmatrix} 1 & \boxed{2} \\ 3 & \boxed{4} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 5 & 6 \\ \boxed{7} & \boxed{8} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1\text{x}5 + \boxed{2\text{x}7} & 1\text{x}6 + \boxed{2\text{x}8} \\ 3\text{x}5 + \boxed{4\text{x}7} & 3\text{x}6 + \boxed{4\text{x}8} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5+\boxed{14} & 6+\boxed{16} \\ 15+\boxed{28} & 18+\boxed{32} \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{C} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{B} = \boldsymbol{A}\begin{bmatrix} | & | & & | \\ \boldsymbol{b}_1 & \boldsymbol{b}_2 & \cdots & \boldsymbol{b}_p \\ | & | & & | \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} | & \boxed{\begin{matrix} | \\ \boldsymbol{A}\boldsymbol{b}_2 \\ | \end{matrix}} & & | \\ \boldsymbol{A}\boldsymbol{b}_1 & & \cdots & \boldsymbol{A}\boldsymbol{b}_p \\ | & & & | \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{c}_i = \boldsymbol{A}\boldsymbol{b}_i$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \text{x} \begin{bmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1\text{x}5 + 2\text{x}7 & 1\text{x}6 + 2\text{x}8 \\ 3\text{x}5 + 4\text{x}7 & 3\text{x}6 + 4\text{x}8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5+14 & 6+16 \\ 15+28 & 18+32 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 19 & 22 \\ 43 & 50 \end{bmatrix}$$

Colunas de $\boldsymbol{C}$ vistas como produtos entre a matriz $\boldsymbol{A}$ e os vetores formados pelas colunas de $\boldsymbol{B}$

$$\boldsymbol{C} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{B} = \begin{bmatrix} - & \boldsymbol{a}_1' & - \\ - & \boldsymbol{a}_2' & - \\ - & \vdots & - \\ - & \boldsymbol{a}_m' & - \end{bmatrix} \boldsymbol{B} = \begin{bmatrix} - & \boldsymbol{a}_1'\boldsymbol{B} & - \\ - & \boldsymbol{a}_2'\boldsymbol{B} & - \\ - & \vdots & - \\ - & \boldsymbol{a}_m'\boldsymbol{B} & - \end{bmatrix}, \qquad \boldsymbol{c}_i' = \boldsymbol{a}_i'\boldsymbol{B}$$

$$\begin{bmatrix} \boxed{1\ 2} \\ \boxed{3\ 4} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 5\ 6 \\ 7\ 8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \boxed{1\text{x}5 + 2\text{x}7 \quad 1\text{x}6 + 2\text{x}8} \\ \boxed{3\text{x}5 + 4\text{x}7 \quad 3\text{x}6 + 4\text{x}8} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \boxed{5{+}14 \quad 6{+}16} \\ \boxed{15{+}28 \quad 18{+}32} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 19 & 22 \\ 43 & 50 \end{bmatrix}$$

Linhas de $\boldsymbol{C}$ vistas como produtos entre os vetores formados pelas linhas de $\boldsymbol{A}$ e a matriz $\boldsymbol{B}$.

TREINE O RACIOCÍNIO...

$$\boldsymbol{C} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \\ 10 & 11 & 12 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 7 \\ 1 & 2 \\ 3 & 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \times 1 + 1 \times 2 + 3 \times 3 & 7 \times 1 + 2 \times 2 + 6 \times 3 \\ 2 \times 4 + 1 \times 5 + 3 \times 6 & 7 \times 4 + 2 \times 5 + 6 \times 6 \\ 2 \times 7 + 1 \times 8 + 3 \times 9 & 7 \times 7 + 2 \times 8 + 6 \times 9 \\ 2 \times 10 + 1 \times 11 + 3 \times 12 & 7 \times 10 + 2 \times 11 + 6 \times 12 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 13 & 29 \\ 31 & 74 \\ 49 & 119 \\ 67 & 164 \end{bmatrix}$$

Resolva usando as seguintes formas:

$$\sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{a}_i \boldsymbol{b}_i'$$

$$\boldsymbol{c}_i = \boldsymbol{A}\boldsymbol{b}_i$$

$$\boldsymbol{c}_i' = \boldsymbol{a}_i' \boldsymbol{B}$$

TRAÇO DE UMA MATRIZ

O traço de uma matriz é a soma de sua diagonal principal,

$$\operatorname{tr} \boldsymbol{A} = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}$$

$\boldsymbol{A} \in \mathbb{R}^{\boldsymbol{n}\times\boldsymbol{n}}, \qquad \operatorname{tr} \boldsymbol{A} = \operatorname{tr} \boldsymbol{A}^T$

$\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B} \in \mathbb{R}^{\boldsymbol{n}\times\boldsymbol{n}}, \qquad \operatorname{tr}(\boldsymbol{A} + \boldsymbol{B}) = \operatorname{tr} \boldsymbol{A} + \operatorname{tr} \boldsymbol{B}$

$\boldsymbol{A} \in \mathbb{R}^{\boldsymbol{n}\times\boldsymbol{n}}, k \in \mathbb{R} \quad \operatorname{tr}(k\boldsymbol{A}) = k \operatorname{tr} \boldsymbol{A}$

$\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}$ tal que $\boldsymbol{AB}$ é quadrada $\operatorname{tr}(\boldsymbol{AB}) = \operatorname{tr}(\boldsymbol{BA})$

$\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}, \boldsymbol{C}$ tal que $\boldsymbol{ABC}$ é quadrada $\operatorname{tr}(\boldsymbol{ABC}) = \operatorname{tr}(\boldsymbol{BCA}) = \operatorname{tr}(\boldsymbol{CAB})$

$$\begin{bmatrix} 0 & 2 & 3 \\ 1 & 6 & 4 \\ 2 & 6 & 1 \end{bmatrix}$$

Traço

$$0 + 6 + 1 = 7$$

PROPRIEDADES DA MULTIPLICAÇÃO DE MATRIZES

Multiplicação de matrizes é distributiva e associativa,

$$(\boldsymbol{AB})\boldsymbol{C} = \boldsymbol{A}(\boldsymbol{BC})$$
$$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{B} + \boldsymbol{C}) = \boldsymbol{AB} + \boldsymbol{AC}$$

mas somente em casos especiais é comutativa. Em geral,

$$\boldsymbol{AB} \neq \boldsymbol{BA}$$

IMPORTANTE... $ABC \neq CAB \neq BCA$

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 4 & 12 \\ 7 & 6 \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{B} = \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{C} = \begin{bmatrix} 6 & 6 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{ABC} = \begin{bmatrix} 360 & 432 \\ 180 & 171 \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{CAB} = \begin{bmatrix} 498 & 126 \\ 259 & 33 \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{BCA} = \begin{bmatrix} -63 & -54 \\ 393 & 594 \end{bmatrix}$$

Lembram-se da propriedade do traço?

$$\mathrm{Tr}(\boldsymbol{ABC}) = \mathrm{Tr}(\boldsymbol{CAB}) = \mathrm{Tr}(\boldsymbol{BCA}) = 531$$

PECE Programa de Educação Continuada
Escola Politécnica da USP

MATRIZES ESPECIAIS

Simétricas, ortogonais, identidade...

MATRIZ SIMÉTRICA E ANTI-SIMÉTRICA, $A \in \mathbb{R}^{m \times m}$

Simétrica

$$\boldsymbol{A} = \boldsymbol{A}^T$$

Anti-simétrica

$$\boldsymbol{A} = -\boldsymbol{A}^T$$

Toda matriz pode ser escrita como uma soma de uma parcela simétrica e outra anti-simétrica,

$$\boldsymbol{A} = \frac{1}{2}(\boldsymbol{A} + \boldsymbol{A}^T) + \frac{1}{2}(\boldsymbol{A} - \boldsymbol{A}^T)$$

SÓ PARA CONSTAR...

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 3 & 3 & -1 \\ -2 & -2 & 1 \\ -4 & -5 & 2 \end{bmatrix} \quad \boldsymbol{A}^T = \begin{bmatrix} 3 & -2 & -4 \\ 3 & -2 & -5 \\ -1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{D} = \boldsymbol{A} + \boldsymbol{A}^T = \begin{bmatrix} 3+3 & 3-2 & -1-4 \\ -2+3 & -2-2 & 1-5 \\ -4-1 & -5+1 & 2+2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & 1 & -5 \\ 1 & -4 & -4 \\ -5 & -4 & 4 \end{bmatrix}$$ Simétrica... $(\boldsymbol{D} = \boldsymbol{D}^T)$

$$\boldsymbol{S} = \boldsymbol{A} - \boldsymbol{A}^T = \begin{bmatrix} 3-3 & 3+2 & -1+4 \\ -2-3 & -2+2 & 1+5 \\ -4+1 & -5-1 & 2-2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 5 & 3 \\ -5 & 0 & 6 \\ -3 & -6 & 0 \end{bmatrix}$$ Anti-Simétrica... $(\boldsymbol{S} = -\boldsymbol{S}^T)$

$$\frac{1}{2}(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{A}^T)=\frac{1}{2}\begin{bmatrix} 6 & 1 & -5 \\ 1 & -4 & -4 \\ -5 & -4 & 4 \end{bmatrix}$$

$$\frac{1}{2}(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{A}^T)=\frac{1}{2}\begin{bmatrix} 0 & 5 & 3 \\ -5 & 0 & 6 \\ -3 & -6 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\frac{1}{2}\begin{bmatrix} 6 & 1 & -5 \\ 1 & -4 & -4 \\ -5 & -4 & 4 \end{bmatrix}+\frac{1}{2}\begin{bmatrix} 0 & 5 & 3 \\ -5 & 0 & 6 \\ -3 & -6 & 0 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \frac{6}{2}+0 & \frac{1}{2}+\frac{5}{2} & \frac{-5}{2}+\frac{3}{2} \\ \frac{1}{2}+\frac{-5}{2} & \frac{-4}{2} & \frac{-4}{2}+\frac{6}{2} \\ \frac{-5}{2}+\frac{-3}{2} & \frac{-4}{2}+\frac{-6}{2} & \frac{4}{2} \end{bmatrix}=\boxed{\begin{bmatrix} 3 & 3 & -1 \\ -2 & -2 & 1 \\ -4 & -5 & 2 \end{bmatrix}}$$

$\boldsymbol{A}$

MATRIZ IDENTIDADE, $\boldsymbol{I} \in \mathbb{R}^{n \times n}$

É uma matriz quadrada de dimensões $n \times n$, definida como valor 1 nos termos da diagonal principal e 0 nos demais,

$$I_{ij} = \begin{cases} 1 & i = j \\ 0 & i \neq j \end{cases}$$

$$I = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Para $\boldsymbol{A} \in \mathbb{R}^{m \times n}$,

$$\boldsymbol{AI} = \boldsymbol{A} = \boldsymbol{IA}$$

MATRIZ DIAGONAL

Uma matriz diagonal é uma matriz quadrada em que todos os termos fora da diagonal são 0. Denomina-se, normalmente,

$$\boldsymbol{D} = \text{diag}\,(d_1, d_2, \dots, d_n)$$

com

$$d_{ij} = \begin{cases} d_i & i = j \\ 0 & i \neq j \end{cases}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 8 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$

A matriz identidade é um caso particular da matriz diagonal

$$\boldsymbol{I} = \text{diag}\,(1,1, \dots, 1)$$

MATRIZ IDENTIDADE E MATRIZ INVERSA

$$AA^{-1} = I$$

A^{-1} é a matriz inversa de A

$$\underbrace{\begin{bmatrix} -3 & 1 \\ 5 & 0 \end{bmatrix}}_{A} \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{5} \\ 1 & \frac{3}{5} \end{bmatrix}}_{A^{-1}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

MATRIZES ORTOGONAIS

Uma matriz quadrada $\boldsymbol{U} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ é **ortogonal** se todas as suas colunas forem ortogonais entre si e normalizadas (as colunas são chamadas de ortonormais). Segue-se imediatamente da definição de ortogonalidade e normalidade que,

$$\boldsymbol{U}^T \boldsymbol{U} = \boldsymbol{I} = \boldsymbol{U} \boldsymbol{U}^T$$

Exemplo clássico é a matriz de rotação... $\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$

OPA, E O QUE É VETOR ORTONORMAL???

$$\boldsymbol{U} = \begin{pmatrix} \boxed{\begin{matrix}\cos\theta \\ \sin\theta\end{matrix}} & \boxed{\begin{matrix}-\sin\theta \\ \cos\theta\end{matrix}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} | & | \\ \boldsymbol{u}_1 & \boldsymbol{u}_2 \\ | & | \end{pmatrix}$$

São normalizados?

$$\boldsymbol{u}_1 = \begin{pmatrix}\cos\theta \\ \sin\theta\end{pmatrix} \qquad \|\boldsymbol{u}_1\|^2 = \boldsymbol{u}_1 \cdot \boldsymbol{u}_1 = {u_1}_1^2 + {u_1}_2^2 = \cos^2\theta + \sin^2\theta = 1$$

$$\boldsymbol{u}_2 = \begin{pmatrix}-\sin\theta \\ \cos\theta\end{pmatrix} \qquad \|\boldsymbol{u}_2\|^2 = \boldsymbol{u}_2 \cdot \boldsymbol{u}_2 = {u_2}_1^2 + {u_2}_2^2 = (-\sin\theta)^2 + \cos^2\theta = 1$$

OPA, E O QUE É VETOR ORTONORMAL???

$$\boldsymbol{U} = \begin{pmatrix} \boxed{\begin{matrix}\cos\theta \\ \sin\theta\end{matrix}} & \boxed{\begin{matrix}-\sin\theta \\ \cos\theta\end{matrix}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} | & | \\ \boldsymbol{u}_1 & \boldsymbol{u}_2 \\ | & | \end{pmatrix}$$

São ortogonais?

$$\boldsymbol{u}_1 = \begin{pmatrix}\cos\theta \\ \sin\theta\end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{u}_1 \cdot \boldsymbol{u}_2 = u_{1_{\mathbf{1}}} u_{2_{\mathbf{1}}} + u_{1_{\mathbf{2}}} u_{2_{\mathbf{2}}}$$

$$\boldsymbol{u}_1 \cdot \boldsymbol{u}_2 = \cos\theta\,(-\sin\theta) + \sin\theta\cos\theta = 0$$

$$\boldsymbol{u}_2 = \begin{pmatrix}-\sin\theta \\ \cos\theta\end{pmatrix}$$

PECE Programa de Educação Continuada
Escola Politécnica da USP

OPERAÇÕES BÁSICAS

LEMBRAM-SE DA MATRIZ $\boldsymbol{I}$?

Primeiro, vamos pensar
em uma matriz que
não muda nada.

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \times 1 \\ 1 \times 2 \\ 1 \times 3 \\ 1 \times 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix}$$

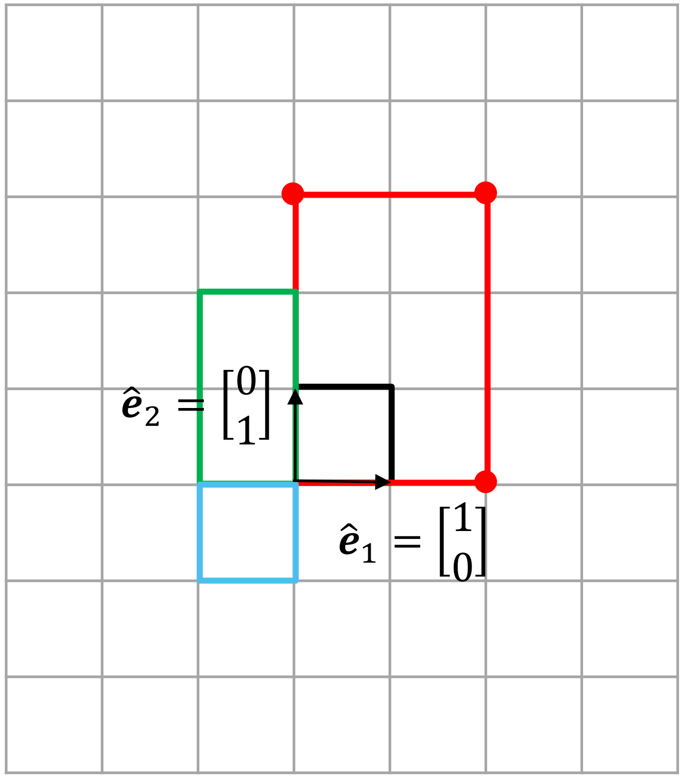
MODIFICANDO A IDENTIDADE...

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$ Escalona em torno do ponto $(0{,}0)$

$\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ Escalona em torno do ponto $(0{,}0)$ na direção y e gira em torno de y

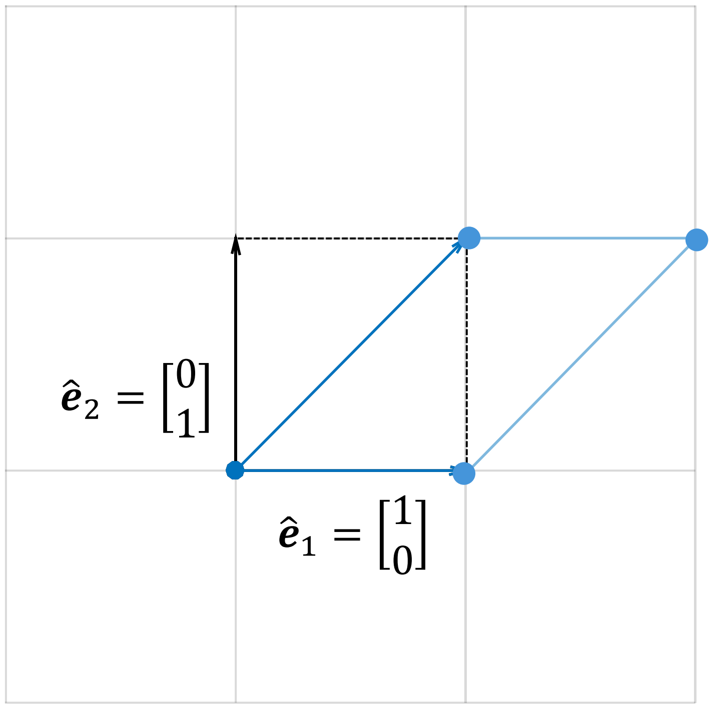
$\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ Gira em torno do ponto $(0{,}0)$, ie, em torno de x e y.



$$\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$



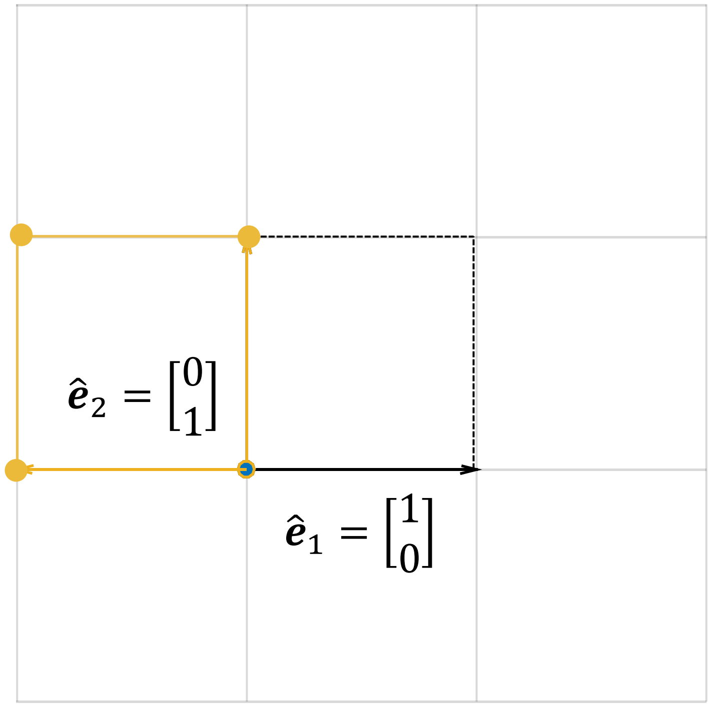
Distorção

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

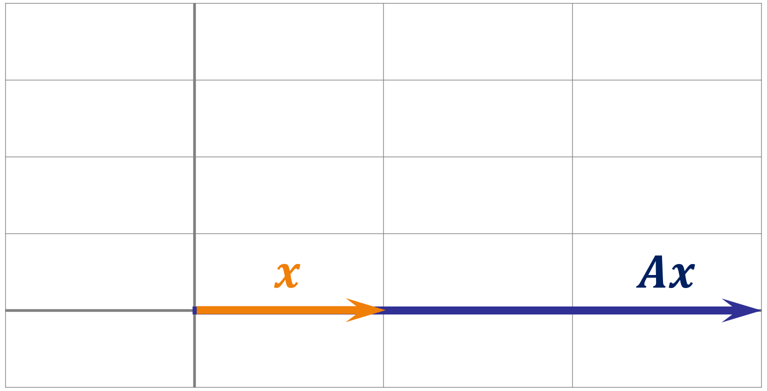


Rotação

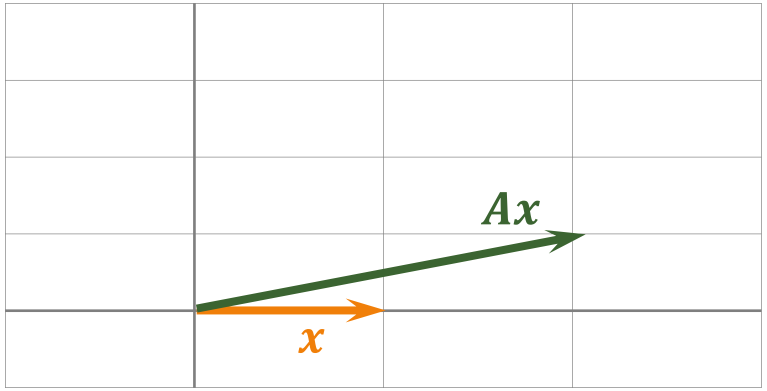
$$\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Rotação: $\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$

TREINE: $\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ QUAL RESULTADO $\boldsymbol{Ax}$?

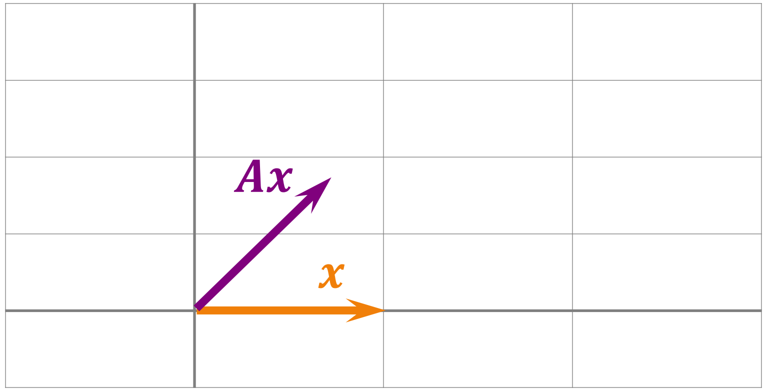


$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

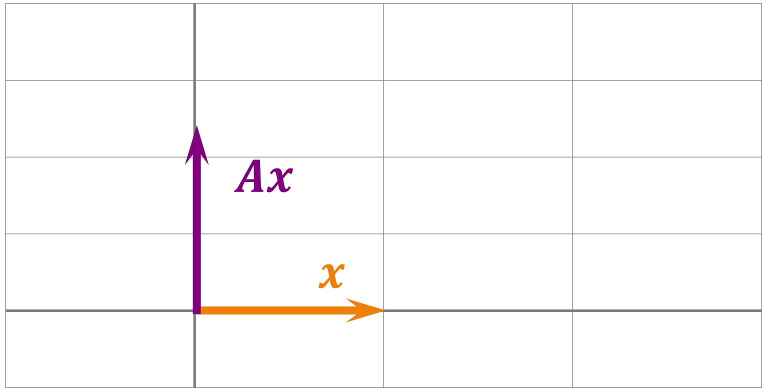


$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$$

TREINE: $x = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ QUAL RESULTADO $\boldsymbol{Ax}$?

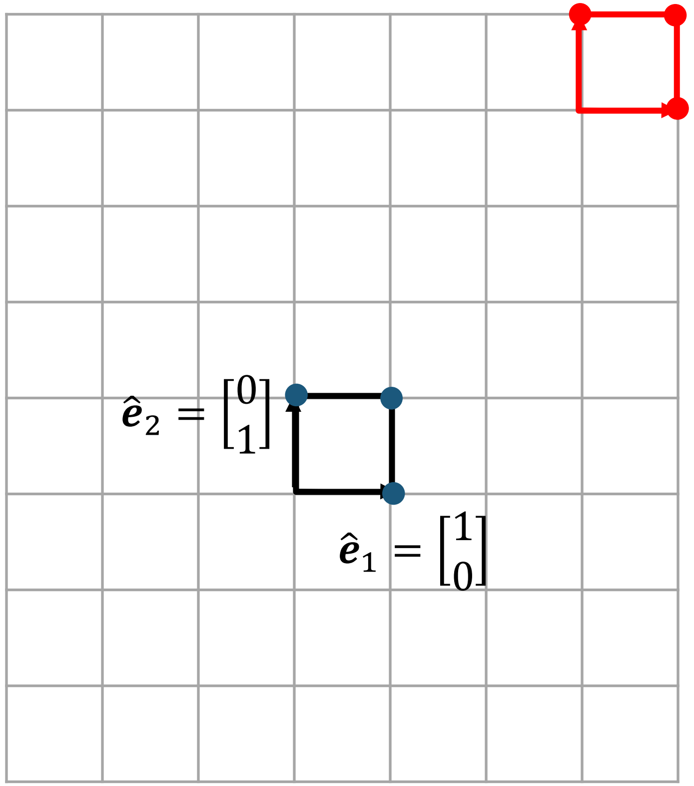


$$A = \begin{pmatrix} \cos 45° & -\sin 45° \\ \sin 45° & \cos 45° \end{pmatrix}$$



$$A = \begin{pmatrix} \cos 90° & -\sin 90° \\ \sin 90° & \cos 90° \end{pmatrix}$$

E SE EU QUISER **TRANSLADAR** ???



Ao multiplicar um vetor 2D por uma matriz 2x2 qualquer, você não consegue transladá-lo.

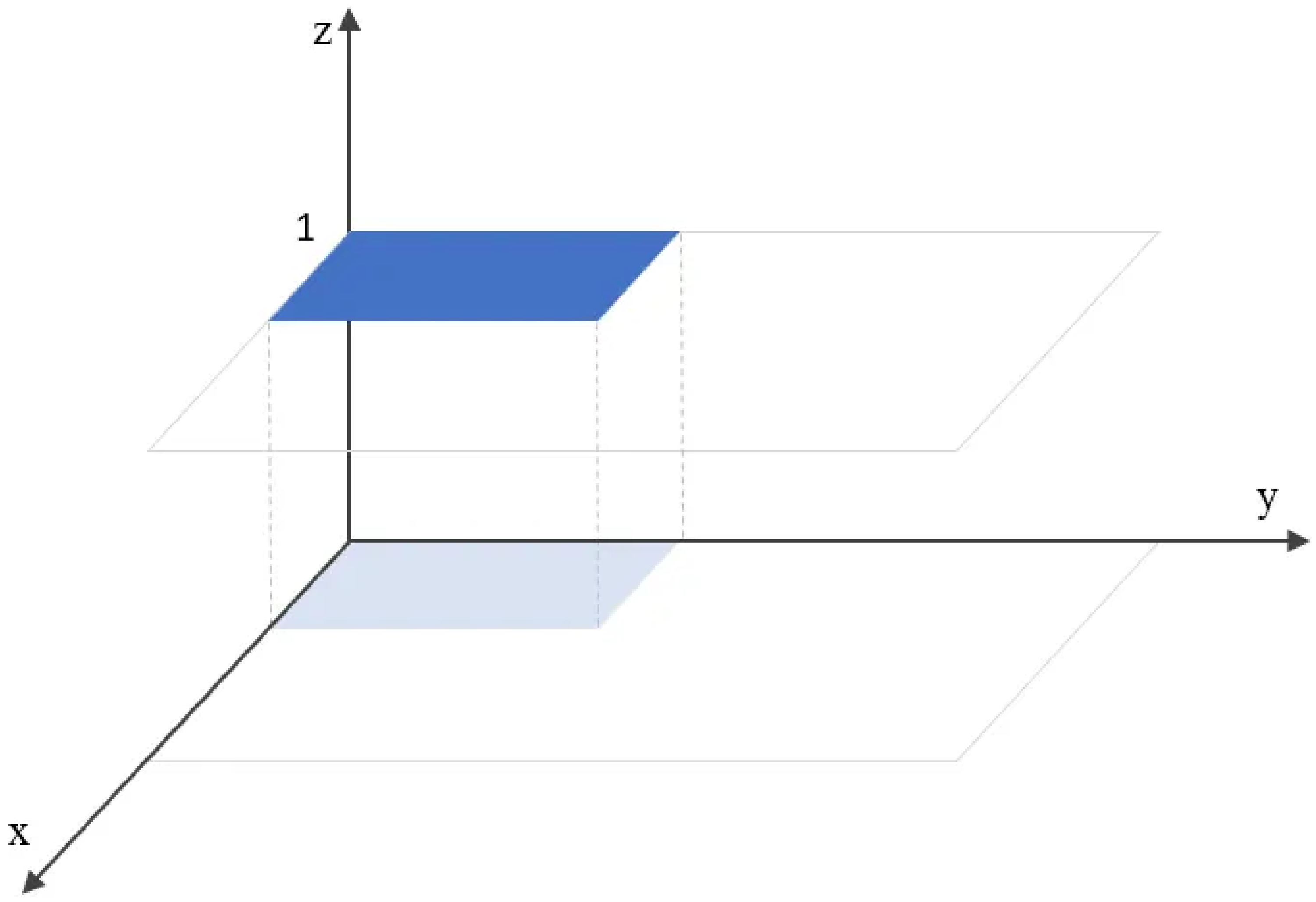
Na transformação linear: escalonamento, distorção e rotação, os vetores de base permanecem todos na mesma origem (0,0) antes e depois da transformação.

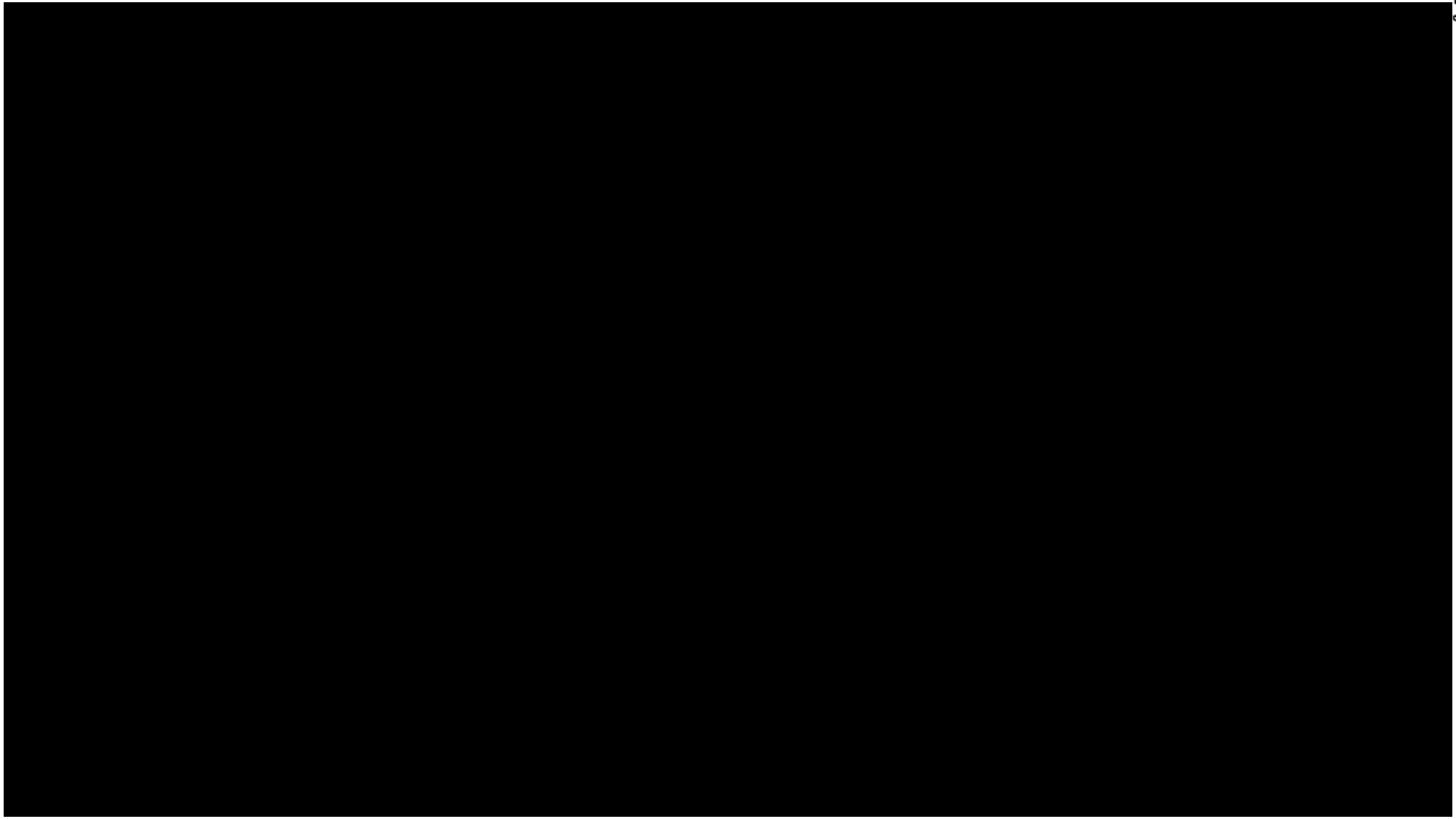
Isso significa que o ponto (0,0) nunca muda de localização. Para transladar, você precisa adicionar um vetor após a transformação da matriz...

$$\boxed{\begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \end{bmatrix}} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \boxed{\begin{bmatrix} p_1 \\ p_2 \end{bmatrix}} + \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix}$$

nova localização após a transformação

localização original


z
1
y
x



TRANSFORMAÇÃO GEOMÉTRICA DA IMAGEM

Envie cada pixel p da posição original (x, y) para a correspondente posição $(x', y') = T(x, y)$ na imagem transformada

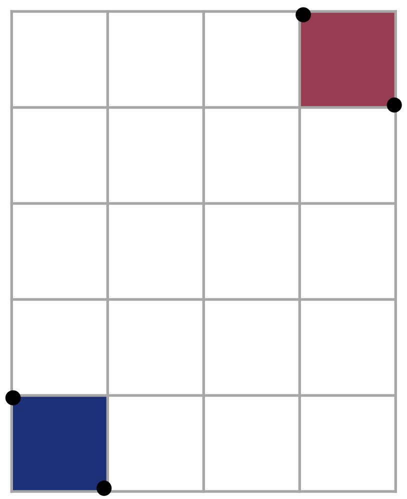
Escalonamento, distorção e rotação

Translação

$$\begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_1 \\ p_2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

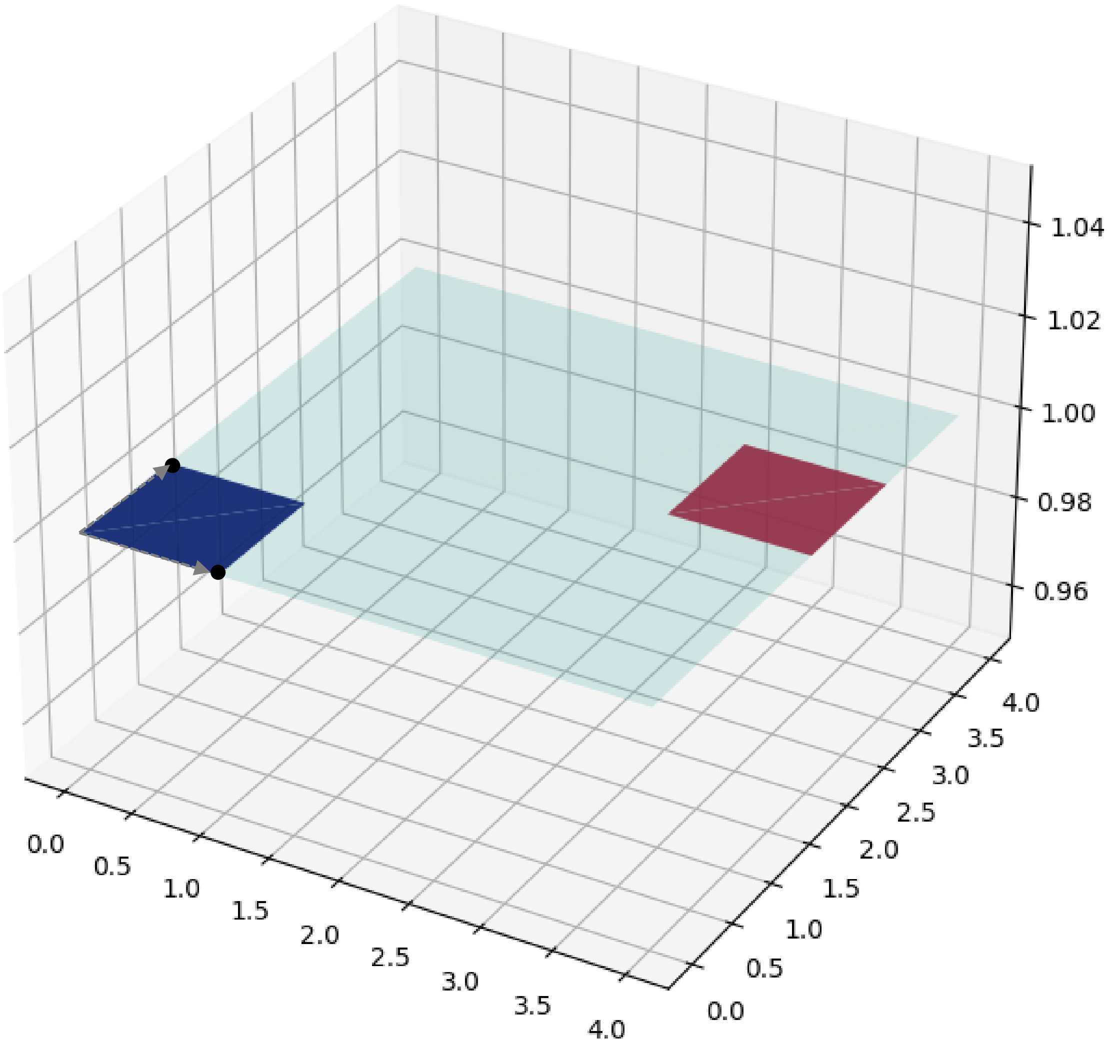
Fixando a imagem no plano $z = 1$

PORTANTO...



$$\begin{pmatrix}1 & 0 & 3\\0 & 1 & 2\\0 & 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4\\2\\1\end{pmatrix}$$

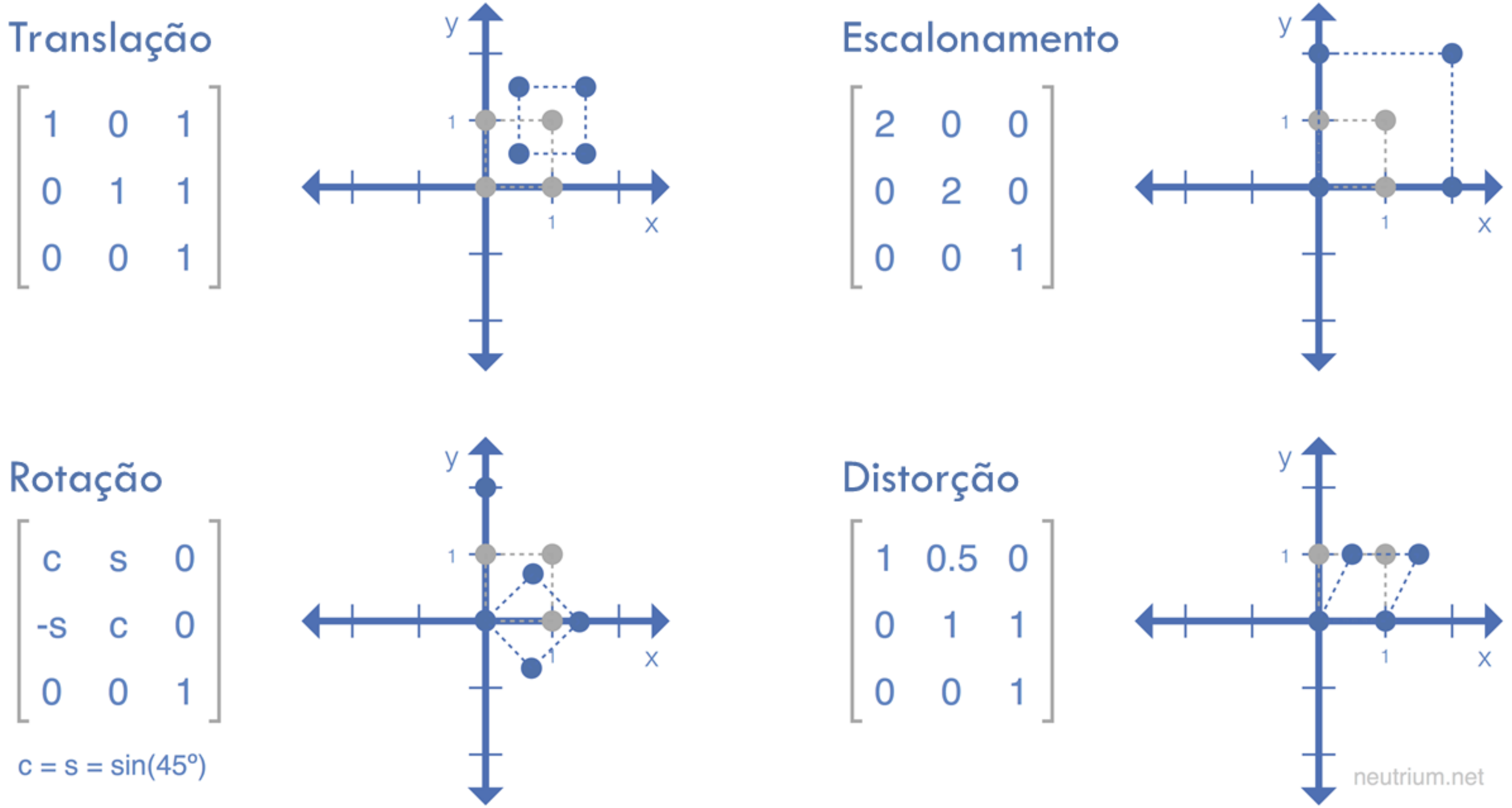
$$\begin{pmatrix}1 & 0 & 3\\0 & 1 & 2\\0 & 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3\\5\\1\end{pmatrix}$$



TRANSFORMAÇÃO AFIM

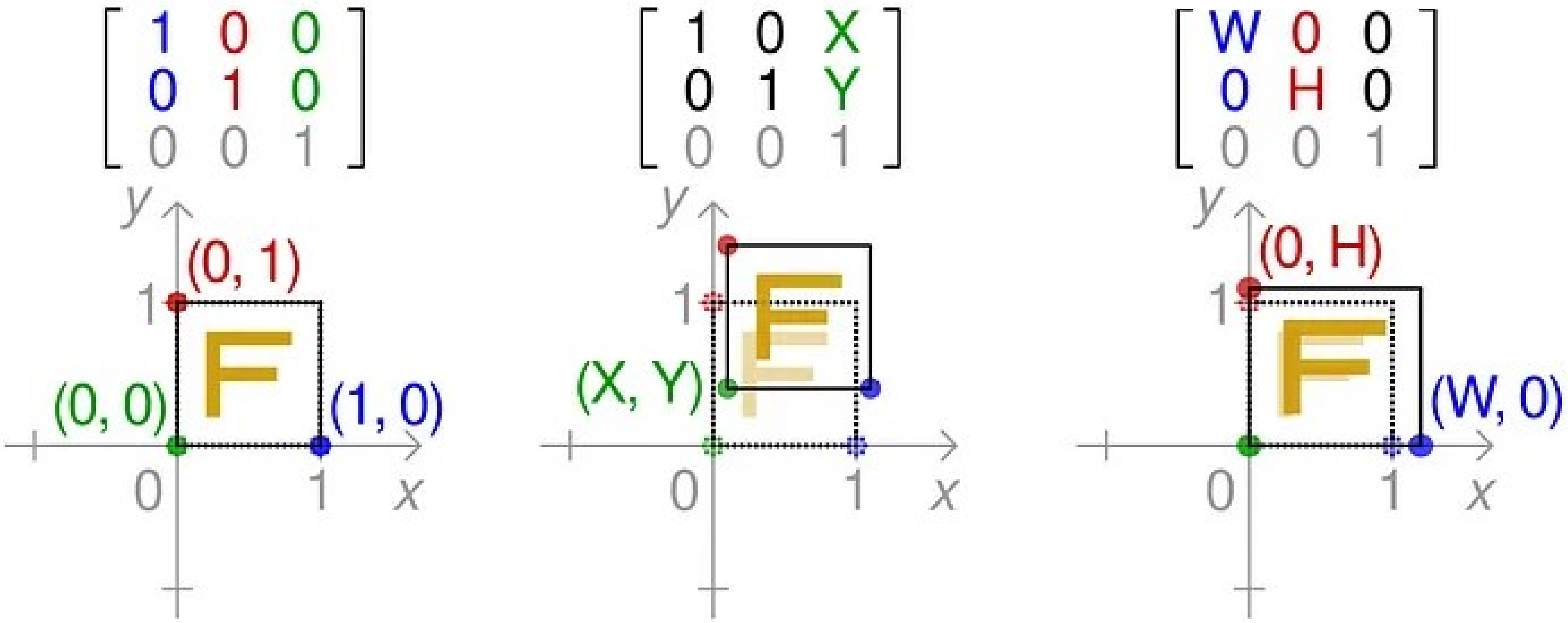
Uma transformação afim é qualquer transformação que preserva a colinearidade (ou seja, todos os pontos que se encontram em uma linha inicialmente ainda permanecem em uma linha após a transformação) e razões de distâncias (por exemplo, o ponto médio de um segmento de linha permanece o ponto médio após a transformação).

Em geral, uma transformação afim é uma composição de rotações, translações, escalonamentos e distorções.



TRANSLAÇÃO E ESCALONAMENTO

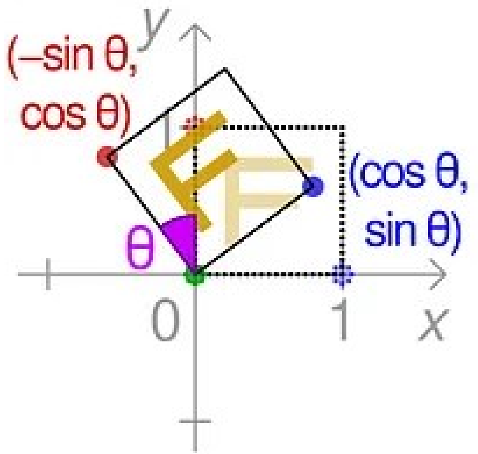
ORIGINAL | TRANSLAÇÃO | ESCALONAMENTO



ROTAÇÃO E DISTORÇÃO

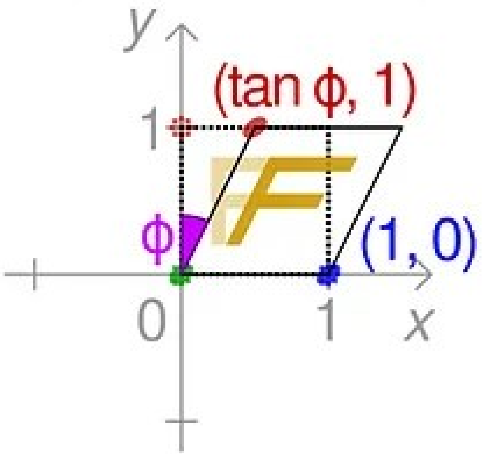
ROTAÇÃO EM TORNO DA ORIGEM

$$\begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$



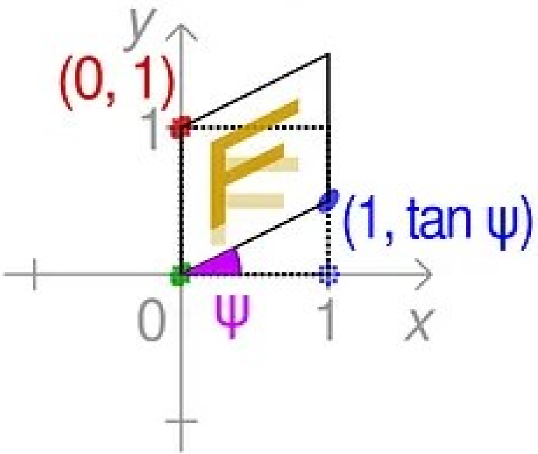
DISTORÇÃO EM TORNO EIXO X

$$\begin{bmatrix} 1 & \tan\phi & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$



DISTORÇÃO EM TORNO EIXO Y

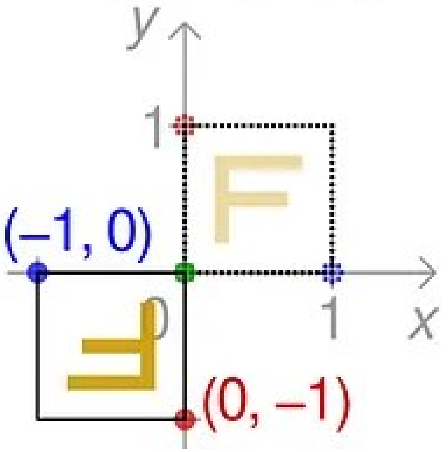
$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \tan\psi & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$



REFLEXÃO

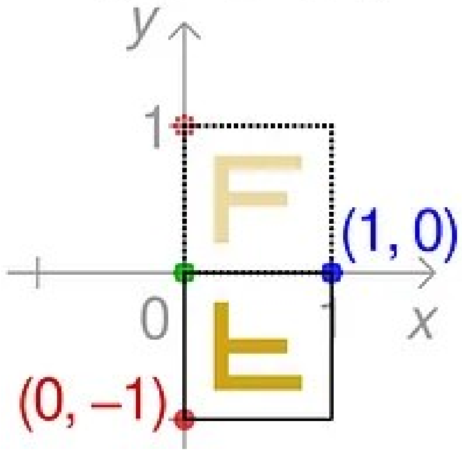
REFLEXÃO EM TORNO DA ORIGEM

$$\begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$



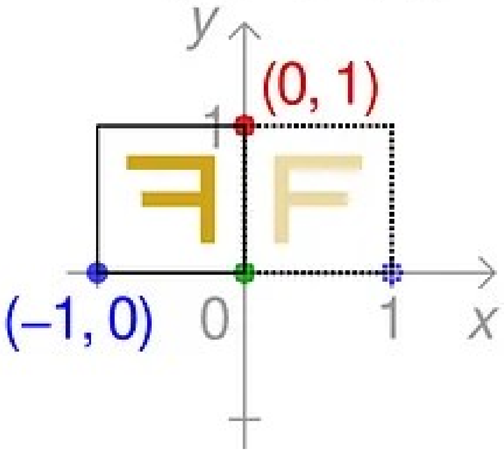
EM TORNO EIXO X

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

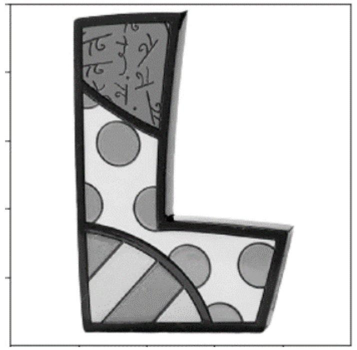


EM TORNO EIXO Y

$$\begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$



POR EXEMPLO...



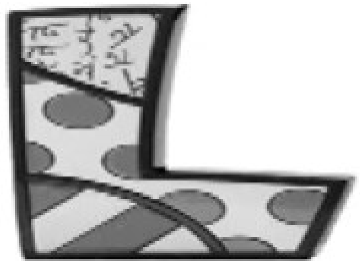
Sabendo que a letra **L** da figura ao lado sofreu seguinte transformação,

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{bmatrix} = \boldsymbol{T} \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix}$$ onde $\boldsymbol{T}$ é composta das matrizes

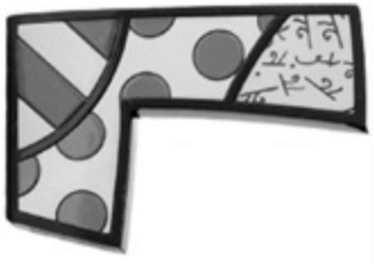
de escalonamento e rotação, respectivamente,

$$\boldsymbol{S} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \boldsymbol{R} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

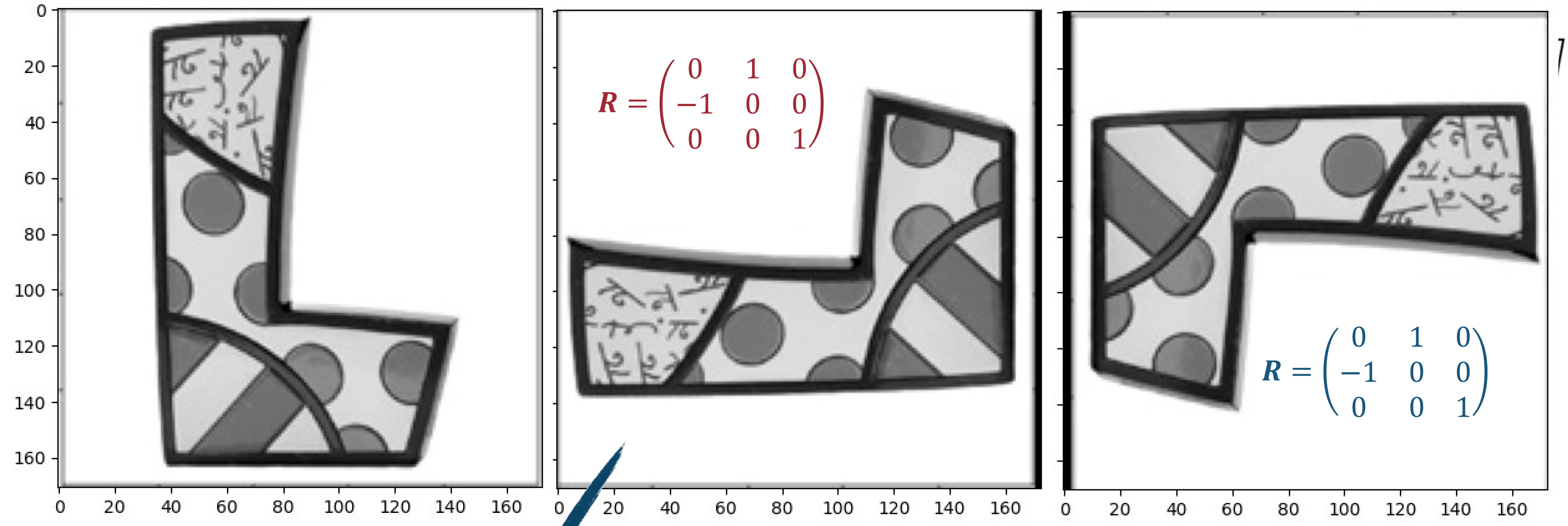
Defina a matriz $\boldsymbol{T}$ para as seguintes transformações,



(✓) $\boldsymbol{T} = \boldsymbol{S}$
( ) $\boldsymbol{T} = \boldsymbol{R}$



( ) $\boldsymbol{T} = \boldsymbol{S}$
(✓) $\boldsymbol{T} = \boldsymbol{R}$



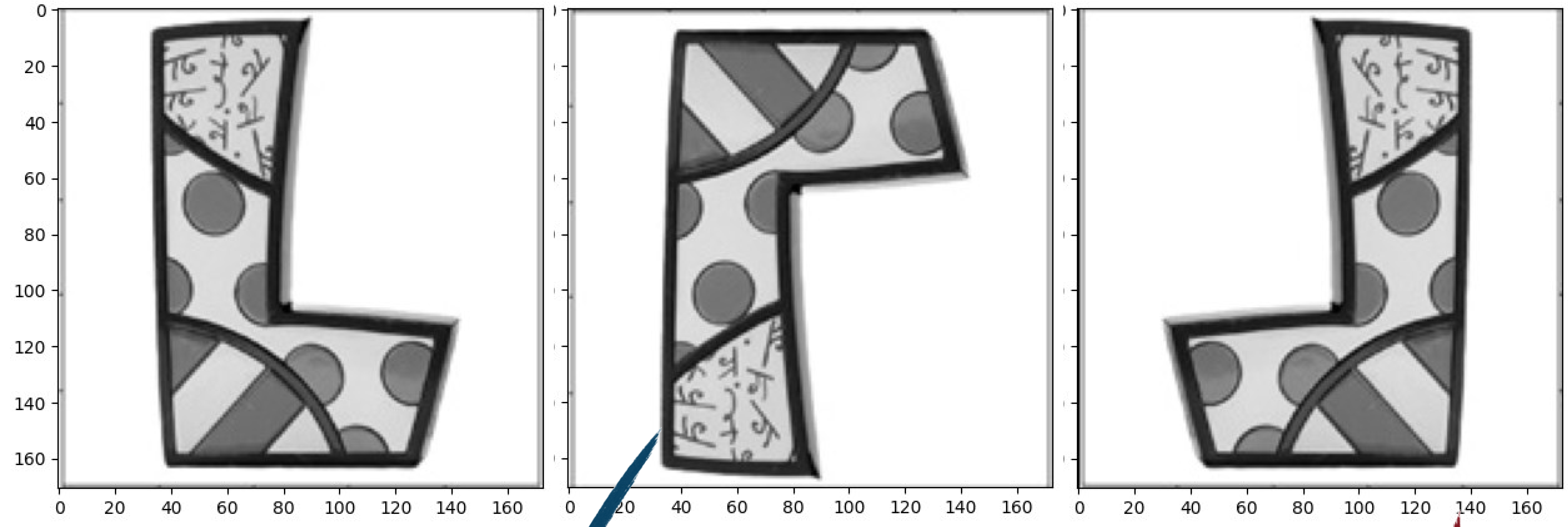
$$\boldsymbol{R} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Rotação de $\theta = -90^{o}$:

```
mat_rot = np.array([[0,1,0],[-1,0,0],[0,0,1]]) @ np.array([[1,0,-w],[0,1,0],[0,0,1]])
```

Rotação de $\theta = 90^{o}$:

```
mat_rot = np.array([[0,-1,0],[1,0,0],[0,0,1]]) @ np.array([[1,0,0],[0,1,-h],[0,0,1]])
```



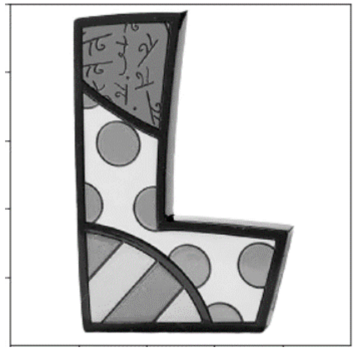
Reflexão em torno do eixo **x**:

```
mat_reflect = np.array([[-1,0,0],[0,1,0],[0,0,1]]) @ np.array([[1,0,-w],[0,1,0],[0,0,1]])
```

Reflexão em torno do eixo **y**:

```
mat_reflect = np.array([[1,0,0],[0,-1,0],[0,0,1]]) @ np.array([[1,0,0],[0,1,-h],[0,0,1]])
```

POR EXEMPLO...



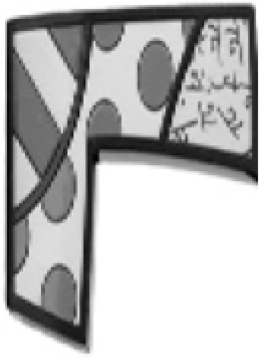
Sabendo que a letra **L** da figura ao lado sofreu seguinte transformação,

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{bmatrix} = \boldsymbol{T} \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix}$$ onde $\boldsymbol{T}$ é composta das matrizes

de escalonamento e rotação, respectivamente,

$$\boldsymbol{S} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \boldsymbol{R} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Defina a matriz $\boldsymbol{T}$ para as seguintes transformações,



( ) $\boldsymbol{T} = \boldsymbol{SR}$
(✓) $\boldsymbol{T} = \boldsymbol{RS}$

(✓) $\boldsymbol{T} = \boldsymbol{SR}$
( ) $\boldsymbol{T} = \boldsymbol{RS}$

$$\boldsymbol{RS} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

- Revejam o material disponibilizado em aula.
- Refaçam exercícios.

ACABOU...

Até a próxima semana!!!