

Matemáticas de la Especialidad Técnicas Energéticas
Prueba de evaluación progresiva 2 — Mayo de 2025

Nombre y apellidos:

Número de matrícula:

INFORMACIÓN IMPORTANTE:

- Se dispone de **dos minutos** para **descargar** los archivos necesarios de Moodle.
- A partir de entonces, es obligatorio **cerrar el explorador de internet** y tener el ordenador en **modo avión**. El incumplimiento de esta norma se considera una infracción grave, equivalente al uso de un teléfono móvil, y conllevará la expulsión de la prueba y la posterior sanción correspondiente.
- Es obligatorio **incluir el nombre y los apellidos en cada archivo** (en una línea cualquiera) en forma de comentario.
- Al finalizar el tiempo del examen, hay que **cerrar todos los programas**, incluyendo Matlab. Entonces, se permitirá el acceso a internet y a Moodle durante **dos minutos** para **subir** los códigos. Está terminantemente prohibido abrir o editar ningún archivo durante ese tiempo.
- Si alguien desea **entregar antes** de la finalización del examen, deberá **avisar** a alguno de los profesores para subir los archivos a Moodle de forma vigilada.
- Si los códigos entregados contienen errores de ejecución, se **corregirá hasta** donde se produzca el **error**.

Tiempo:

2h 30 min.

Problema 1 (continúa en la siguiente página)

Para estudiar el movimiento de la Tierra y otros cuerpos alrededor del Sol, se establece un sistema de referencia cartesiano OXY . El Sol se halla siempre en el origen del mismo y se supone que las órbitas de la Tierra y los otros cuerpos están contenidas en dicho plano.

El día 23 de mayo de 2025 a las 11:30:00, que consideraremos como instante inicial $t = 0$, el planeta Tierra se encuentra en la posición $x_T = \cos(\phi_0)$, $y_T = \sin(\phi_0)$ y se mueve con una velocidad $\dot{x}_T = -v_0 \sin(\phi_0)$, $\dot{y}_T = v_0 \cos(\phi_0)$, siendo $\phi_0 = 0.0635$ rad, $v_0 = \sqrt{G}$ y $G = 2.96 \cdot 10^{-4}$ la constante de gravitación universal¹. En ese mismo instante, un meteorito se dirige hacia el Sistema Solar desde la posición dada por $x_m = -3.7$, $y_m = -2.4$, con una velocidad $\dot{x}_m = 0.0076$ y $\dot{y}_m = 0.0088$. (Nótese el uso del punto para denotar la derivada respecto del tiempo, es decir, $\dot{x} = dx/dt$.)

Por simplicidad, se supone que el sistema de referencia considerado es inercial, que la Tierra sólo es atraída por la fuerza gravitatoria del Sol, y que el meteorito sólo es atraído por la fuerza gravitatoria del Sol y de la Tierra. En ese caso, el movimiento de la Tierra está gobernado por las ecuaciones

$$\ddot{x}_T = -G \frac{x_T}{(x_T^2 + y_T^2)^{3/2}}, \quad \ddot{y}_T = -G \frac{y_T}{(x_T^2 + y_T^2)^{3/2}},$$

y el del meteorito por

$$\begin{aligned} \ddot{x}_m &= -G \frac{x_m}{(x_m^2 + y_m^2)^{3/2}} - GM_T \frac{x_m - x_T}{\left((x_m - x_T)^2 + (y_m - y_T)^2\right)^{3/2}}, \\ \ddot{y}_m &= -G \frac{y_m}{(x_m^2 + y_m^2)^{3/2}} - GM_T \frac{y_m - y_T}{\left((x_m - x_T)^2 + (y_m - y_T)^2\right)^{3/2}}, \end{aligned}$$

donde $M_T = 3 \cdot 10^{-6}$ es la masa de la Tierra.

Cuestión 1 (1.75pt): Implementar una función de la forma `udot = Meteorito_fun(t,u)` que, recibido el valor del tiempo t y el vector columna $\mathbf{u} = [x_T, y_T, \dot{x}_T, \dot{y}_T, x_m, y_m, \dot{x}_m, \dot{y}_m]^T$, devuelva un vector `udot` con las derivadas temporales de los elementos en \mathbf{u} .

Supongamos que se dispone de una solución numérica almacenada a través de las variables

$$\mathbf{tv} = [t^0, \dots, t^N], \quad \mathbf{um} = \left[\begin{array}{c|c|c} \mathbf{u}(t^0) & \dots & \mathbf{u}(t^N) \end{array} \right].$$

Cuestión 2 (1.25pt): Implementar una función `RepresentarTrayectorias(Deltat, tv, um)` que cree una animación de las trayectorias de la Tierra y del meteorito de acuerdo al Algoritmo 1.

Algoritmo 1: Representación de las trayectorias

```

1 definir Deltaj = ceil(1/Delt).
2 abrir figura
3 for j=0:Deltaj:N do
4     representar posición del sol en  $t^j$  con un círculo rojo (opción 'or')
5     ejecutar hold on
6     representar órbita completa de la Tierra en azul
7     representar posición de la Tierra en  $t^j$  con un círculo azul (opción 'ob')
8     representar órbita completa del meteorito en verde
9     representar posición del meteorito en  $t^j$  con un círculo verde (opción 'og')
10    ejecutar hold off
11    añadir etiquetas en los ejes
12    añadir título, por ejemplo, con el comando title(['t=', num2str(t^j)])
13    ejecutar axis('equal')
14    ejecutar pause(0.01)
15 end
  
```

¹Todas las variables están expresadas en el *sistema de unidades astronómicas*, en el que la unidad de longitud es la distancia media de la Tierra al Sol ($149.6 \cdot 10^9$ m), la unidad de masa es la masa del Sol ($1.9885 \cdot 10^{30}$ kg) y la unidad de tiempo es el día (86400 s).

Pueden utilizarse las funciones codificadas `Meteorito_fun1` y `RepresentarTrayectoria1` en lo que sigue.

Se desea crear una función `Problema1` que permita estudiar la trayectoria de la Tierra y del meteorito durante un año, es decir, desde $t = 0$ hasta $t = 365.25$. En particular, la función debe realizar los siguientes pasos:

1. Integrar las ecuaciones mediante el método Runge–Kutta explícito RK4 con un paso de tiempo $\Delta t = 10^{-3}$.
2. Llamar a `RepresentarTrayectoria1` para representar una animación del movimiento de la Tierra y del meteorito.
3. Representar, en escala logarítmica para el eje vertical (comando `semilogy`), la evolución de la distancia entre el meteorito y el centro de la Tierra, definida como $d = \sqrt{(x_m - x_T)^2 + (y_m - y_T)^2}$, frente al tiempo con una línea azul (opción `'b'`). Representar también, sobre la misma figura, una línea horizontal negra discontinua (opción `'--k'`) indicando el radio de la Tierra, $R_T = 4.26 \cdot 10^{-5}$.
4. Mostrar por pantalla la distancia mínima d^{\min} entre el meteorito y la Tierra (puede utilizarse el comando `min`).

Cuestión 3 (1.25pt): *Implementar la función `Problema1`.*

Cuestión 4 (0.75pt): *¿Cuál es el valor de d^{\min} obtenido? (Con tres cifras significativas es suficiente). ¿Impacta el meteorito contra la Tierra? ¿Se trata de un problema rígido? (Puede responderse aquí abajo y/o en hojas aparte.)*

Problema 2 (continúa en la siguiente página)

Se desea hallar numéricamente la curva $u(x)$ descrita por un cable sin rigidez que cuelga entre dos puntos de coordenadas fijas. Dicha curva satisface la ecuación diferencial y las condiciones de contorno

$$\frac{d^2 u}{dx^2} - \frac{1}{\mu} \sqrt{1 + \left(\frac{du}{dx}\right)^2} = 0, \quad x \in (0, 1), \quad u(0) = u_L, \quad u(1) = u_R, \quad (1)$$

donde μ es la tensión horizontal del cable², mientras que $u_L := \mu \cosh(0.2/\mu)$ y $u_R := \mu \cosh(0.8/\mu)$ representan la altura del cable en los extremos.

Para ello, se empleará el método de diferencias finitas. En particular, se utilizarán N_x nodos x_1, \dots, x_{N_x} equiespaciados en el intervalo $(0, 1)$ y diferencias centradas tanto para la derivada primera como para la derivada segunda. En ese caso, la Ec. (1) conduce a un sistema no lineal de la forma

$$f_1(\mathbf{u}) := \quad \quad \quad = 0, \quad (2)$$

$$f_i(\mathbf{u}) := C_1 u_{i+1} + C_2 u_i + C_3 u_{i-1} - \frac{1}{\mu} \sqrt{1 + (C_4 (u_{i+1} - u_{i-1}))^2} = 0, \quad i = 2, \dots, N_x - 1, \quad (3)$$

$$f_{N_x}(\mathbf{u}) := \quad \quad \quad = 0, \quad (4)$$

donde $\mathbf{u} = [u_1, \dots, u_{N_x}]^T$ es un vector con el valor aproximado de u en cada nodo de la malla,

$$C_1 = \quad, \quad C_2 = \quad, \quad C_3 = \quad, \quad C_4 = \quad,$$

y h es la distancia horizontal entre dos nodos consecutivos.

Cuestión 5 (0.25pt): *Completar las expresiones anteriores para f_1 , f_{N_x} , C_1 , C_2 , C_3 y C_4 en términos de u_1, \dots, u_{N_x} y h .*

En lugar del sistema original (2)-(4), se considera el sistema preconditionado

$$g_i(\mathbf{u}) := \left(\frac{df_i(\mathbf{u})}{du_i} \right)^{-1} f_i(\mathbf{u}) = 0, \quad i = 1, \dots, N_x. \quad (5)$$

Dicho sistema se resolverá mediante el método de Anderson, tomando como condición inicial en cada nodo $u_i^0 = u_L + (u_R - u_L)x_i$, una tolerancia de 10^{-10} , un máximo de 1000 iteraciones y una memoria $m = 100$. Recuérdese que la sintaxis del método de Anderson es `Anderson1(fun, u0, Tol, MaxIter, m)`, y que `fun` es una función que recibe un solo argumento y devuelve el residuo preconditionado, es decir, debe ser de la forma `g=fun(u)`.

Cuestión 6 (2.75pt): *Implementar una función de la forma `g = Catenaria_Residuo(xv, mu, uv)` que, recibido un vector \mathbf{xv} con las coordenadas x de nodos de la malla, el valor de μ y el vector columna \mathbf{u} de incógnitas, devuelva el vector residuo preconditionado $\mathbf{g} = [g_1, \dots, g_{N_x}]^T$ definido por (5).*

En lo que sigue, puede utilizarse la función codificada `Catenaria_Residuo1`.

A continuación, se desea implementar una función `Problema2(mu, Nx)` que, recibidos μ y N_x , realice los siguientes pasos:

1. Resolver el sistema (5) mediante el método de Anderson.
2. Representar, en la misma gráfica, la solución exacta $u^{\text{ex}}(x) = \mu \cosh((x - 0.2)/\mu)$ con una línea con cruces azules (opción `'xb'`) y la solución numérica con una línea roja (opción `'r'`).
3. Mostrar por pantalla el error máximo η en los nodos de la malla, es decir, $\eta := \max_i |u_i - u^{\text{ex}}(x_i)|$.

²Todas las variables están adimensionalizadas con la distancia horizontal entre los extremos y el peso por unidad de longitud de la cuerda.

Cuestión 7 (1.25pt): *Implementar la función $\text{Problema2}(\mu, N_x)$.*

Cuestión 8 (0.75pt): *Fijando $\mu = 0.4$, hallar el error η para los valores de N_x indicados en la Tabla 1 (con tres cifras significativas es suficiente). Sabiendo que $\eta = \mathcal{O}(h^\alpha)$, ¿cuál es aproximadamente (una cifra significativa) el orden de convergencia α ? (Responder debajo de la tabla.)*

Tabla 1: Resultados del Problema 2.

N_x	Error η
50	
100	
200	