Problema 1

Para estudiar el movimiento de la Tierra y otros cuerpos alrededor del Sol, se establece un sistema de referencia cartesiano OXY. El Sol se halla siempre en el origen del mismo y se supone que las órbitas de la Tierra y los otros cuerpos están contenidas en dicho plano.

El día 23 de mayo de 2025 a las 11:30:00, que consideraremos como instante inicial $t = 0$, el planeta Tierra se encuentra en la posición $x_T = \cos(\phi_0)$, $y_T = \sin(\phi_0)$ y se mueve con una velocidad $\dot{x}_T = -v_0 \sin(\phi_0)$, $\dot{y}_T = v_0 \cos(\phi_0)$, siendo $\phi_0 = 0.0635$ rad, $v_0 = \sqrt{G}$ y $G = 2.96 \cdot 10^{-4}$ la constante de gravitación universal[1]. En ese mismo instante, un meteorito se dirige hacia el Sistema Solar desde la posición dada por $x_m = -3.7$, $y_m = -2.4$, con una velocidad $\dot{x}_m = 0.0076$ y $\dot{y}_m = 0.0088$. (Nótese el uso del punto para denotar la derivada respecto del tiempo, es decir, $\dot{x} = \mathrm{d}x/\mathrm{d}t$.)

Por simplicidad, se supone que el sistema de referencia considerado es inercial, que la Tierra sólo es atraída por la fuerza gravitatoria del Sol, y que el meteorito sólo es atraído por la fuerza gravitatoria del Sol y de la Tierra. En ese caso, el movimiento de la Tierra está gobernado por las ecuaciones

$$\ddot{x}_T = -G\frac{x_T}{\left(x_T^2 + y_T^2\right)^{3/2}}, \qquad \ddot{y}_T = -G\frac{y_T}{\left(x_T^2 + y_T^2\right)^{3/2}}, \tag{1}$$

y el del meteorito por

$$\ddot{x}_m = -G\frac{x_m}{(x_m^2 + y_m^2)^{3/2}} - GM_T\frac{x_m - x_T}{\left((x_m - x_T)^2 + (y_m - y_T)^2\right)^{3/2}}, \tag{2}$$

$$\ddot{y}_m = -G\frac{y_m}{(x_m^2 + y_m^2)^{3/2}} - GM_T\frac{y_m - y_T}{\left((x_m - x_T)^2 + (y_m - y_T)^2\right)^{3/2}}, \tag{3}$$

donde $M_T = 3 \cdot 10^{-6}$ es la masa de la Tierra.

Cuestión 1 (1.75pt): *Implementar una función de la forma* `udot = Meteorito_fun(t,u)` *que, recibido el valor del tiempo t y el vector columna* $\mathtt{u} = [x_T, y_T, \dot{x}_T, \dot{y}_T, x_m, y_m, \dot{x}_m, \dot{y}_m]^{\mathrm{T}}$, *devuelva un vector* `udot` *con las derivadas temporales de los elementos en* `u`*.*

Solución: Si consideramos el vector de variables $\mathbf{u}$ descrito arriba, el sistema de ecuaciones diferenciales a integrar se escribe de la forma

$$\frac{\mathrm{d}\mathbf{u}}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\begin{bmatrix} x_T \\ y_T \\ \dot{x}_T \\ \dot{y}_T \\ x_m \\ y_m \\ \dot{x}_m \\ \dot{y}_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{x}_T \\ \dot{y}_T \\ \ddot{x}_T \\ \ddot{y}_T \\ \dot{x}_m \\ \dot{y}_m \\ \ddot{x}_m \\ \ddot{y}_m \end{bmatrix} := \mathbf{f}(t, \mathbf{u}).$$

Para construir el vector $\mathbf{f}$, las velocidades $\dot{x}_T$, $\dot{y}_T$, $\dot{x}_m$, $\dot{y}_m$ se obtienen fácilmente a partir del vector $\mathbf{u}$, mientras que las aceleraciones $\ddot{x}_T$, $\ddot{y}_T$, $\ddot{x}_m$, $\ddot{y}_m$ se obtienen a partir de $\mathbf{u}$ a través de las ecuaciones (1)-(3).

Para integrar en el tiempo un sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias, el primer paso es implementar la función $\mathbf{f}(t, \mathbf{u})$, que es el propósito de esta cuestión.

Véase ahora la función `Meteorito_fun1`. □

[1] Todas las variables están expresadas en el *sistema de unidades astronómicas*, en el que la unidad de longitud es la distancia media de la Tierra al Sol ($149.6 \cdot 10^9$ m), la unidad de masa es la masa del Sol ($1.9885 \cdot 10^{30}$ kg) y la unidad de tiempo es el día (86400 s).

Supongamos que se dispone de una solución numérica almacenada a través de las variables

$$\mathtt{tv} = \left[t^0, \ldots, t^N\right], \quad \mathtt{um} = \left[\ \mathbf{u}(t^0) \ \middle| \ \cdots \ \middle| \ \mathbf{u}(t^N)\ \right].$$

Cuestión 2 (1.25pt): *Implementar una función `RepresentarTrayectorias(Deltat, tv, um)` que cree una animación de las trayectorias de la Tierra y del meteorito de acuerdo al Algoritmo 1.*

Algoritmo 1: Representación de las trayectorias

definir `Deltaj = ceil(1/`Δt`)`.
abrir figura
for *`j=0:Deltaj:N`* **do**
  representar posición del sol en t^j con un círculo rojo (opción `'or'`)
  ejecutar `hold on`
  representar órbita completa de la Tierra en azul
  representar posición de la Tierra en t^j con un círculo azul (opción `'ob'`)
  representar órbita completa del meteorito en verde
  representar posición del meteorito en t^j con un círculo verde (opción `'og'`)
  ejecutar `hold off`
  añadir etiquetas en los ejes
  añadir título, por ejemplo, con el comando `title(['t=',num2str(`t^j`)])`
  ejecutar `axis('equal')`
  ejecutar `pause(0.01)`
end

Solución: Véase la función `RepresentarTrayectorias1`. □

Pueden utilizarse las funciones codificadas `Meteorito_fun1` y `RepresentarTrayectoria1` en lo que sigue.

Se desea crear una función `Problema1` que permita estudiar la trayectoria de la Tierra y del meteorito durante un año, es decir, desde $t = 0$ hasta $t = 365.25$. En particular, la función debe realizar los siguientes pasos:

1. Integrar las ecuaciones mediante el método Runge–Kutta explícito `RK4` con un paso de tiempo $\Delta t = 10^{-3}$.
2. Llamar a `RepresentarTrayectoria1` para representar una animación del movimiento de la Tierra y del meteorito.
3. Representar, en escala logarítmica para el eje vertical (comando `semilogy`), la evolución de la distancia entre el meteorito y el centro de la Tierra, definida como $d = \sqrt{(x_m - x_T)^2 + (y_m - y_T)^2}$, frente al tiempo con una línea azul (opción `'b'`). Representar también, sobre la misma figura, una línea horizontal negra discontinua (opción `'--k'`) indicando el radio de la Tierra, $R_T = 4.26 \cdot 10^{-5}$.
4. Mostrar por pantalla la distancia mínima $d^{\text{mín}}$ entre el meteorito y la Tierra (puede utilizarse el comando `min`).

Cuestión 3 (1.25pt): *Implementar la función `Problema1`.*

Solución: Véase la función `Problema1`. □

Cuestión 4 (0.75pt): *¿Cuál es el valor de $d^{\text{mín}}$ obtenido? (Con tres cifras significativas es suficiente). ¿Impacta el meteorito contra la Tierra? ¿Se trata de un problema rígido? (Puede responderse aquí abajo y/o en hojas aparte.)*

Solución: La distancia mínima es $3.25 \cdot 10^{-5} < R_T$. Por tanto, sí, impacta contra la Tierra. Si se tratase de un problema rígido, al integrar con un método explícito la solución numérica se debería hacer inestable a no ser que se utilizara un paso de tiempo prohibitivamente pequeño. En este caso, podemos integrar con un paso de tiempo razonable (la simulación dura apenas unos segundos) y la solución numérica es estable. Por tanto, no es un problema rígido.

Problema 2

Se desea hallar numéricamente la curva $u(x)$ descrita por un cable sin rigidez que cuelga entre dos puntos de coordenadas fijas. Dicha curva satisface la ecuación diferencial y las condiciones de contorno

$$\frac{\mathrm{d}^2 u}{\mathrm{d}x^2} - \frac{1}{\mu}\sqrt{1 + \left(\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}\right)^2} = 0, \quad x \in (0,1), \quad u(0) = u_L, \quad u(1) = u_R, \tag{4}$$

donde μ es la tensión horizontal del cable[2], mientras que $u_L := \mu\cosh(0.2/\mu)$ y $u_R := \mu\cosh(0.8/\mu)$ representan la altura del cable en los extremos.

Para ello, se empleará el método de diferencias finitas. En particular, se utilizarán N_x nodos $x_1, \ldots, x_{N_x}$ equiespaciados en el intervalo $(0,1)$ y diferencias centradas tanto para la derivada primera como para la derivada segunda. En ese caso, la Ec. (4) conduce a un sistema no lineal de la forma

$$f_1(\mathbf{u}) := \qquad\qquad = 0, \tag{5}$$

$$f_i(\mathbf{u}) := C_1 u_{i+1} + C_2 u_i + C_3 u_{i-1} - \frac{1}{\mu}\sqrt{1 + \left(C_4\left(u_{i+1} - u_{i-1}\right)\right)^2} = 0, \quad i = 2, \ldots, N_x - 1, \tag{6}$$

$$f_{N_x}(\mathbf{u}) := \qquad\qquad = 0, \tag{7}$$

donde $\mathbf{u} = [u_1, \ldots, u_{N_x}]^{\mathrm{T}}$ es un vector con el valor aproximado de u en cada nodo de la malla,

$$C_1 = \qquad, \quad C_2 = \qquad, \quad C_3 = \qquad, \quad C_4 = \qquad,$$

y h es la distancia horizontal entre dos nodos consecutivos.

Cuestión 5 (0.25pt): *Completar las expresiones anteriores para f_1, f_{N_x}, C_1, C_2, C_3 y C_4 en términos de $u_1, \ldots, u_{N_x}$ y h.*

Solución:

$$f_1 := u_1 - u_L, \quad f_{N_x} := u_{N_x} - u_R, \quad C_1 = 1/h^2, \quad C_2 = -2/h^2, \quad C_3 = 1/h^2, \quad C_4 = 1/(2h).$$

En lugar del sistema original (5)-(7), se considera el sistema precondicionado

$$g_i(\mathbf{u}) := \left(\frac{\mathrm{d}f_i(\mathbf{u})}{\mathrm{d}u_i}\right)^{-1} f_i(\mathbf{u}) = 0, \quad i = 1, \ldots, N_x. \tag{8}$$

Dicho sistema se resolverá mediante el método de Anderson, tomando como condición inicial en cada nodo $u_i^0 = u_L + (u_R - u_L)x_i$, una tolerancia de 10^{-10}, un máximo de 1000 iteraciones y una memoria $m = 100$. Recuérdese que la sintaxis del método de Anderson es `Anderson1(fun, u0, Tol, MaxIter, m)`, y que `fun` es una función que recibe un solo argumento y devuelve el residuo precondicionado, es decir, debe ser de la forma `g=fun(u)`.

Cuestión 6 (2.75pt): *Implementar una función de la forma `g = Catenaria_Residuo(xv, mu, uv)` que, recibido un vector `xv` con las coordenadas x de nodos de la malla, el valor de μ y el vector columna $\mathbf{u}$ de incógnitas, devuelva el vector residuo precondicionado $\mathbf{g} = [g_1, \ldots, g_{N_x}]^{\mathrm{T}}$ definido por (8).*

Solución: Notemos que

$$\frac{\mathrm{d}f_1(\mathbf{u})}{\mathrm{d}u_1} = 1, \qquad \frac{\mathrm{d}f_i(\mathbf{u})}{\mathrm{d}u_i} = -\frac{2}{h^2}, \quad i = 2, \ldots, N_x - 1, \qquad \frac{\mathrm{d}f_{N_x}(\mathbf{u})}{\mathrm{d}u_{N_x}} = 1.$$

Véase ahora la función `Catenaria_Residuo1`. □

[2] Todas las variables están adimensionalizadas con la distancia horizontal entre los extremos y el peso por unidad de longitud de la cuerda.

En lo que sigue, puede utilizarse la función codificada `Catenaria_Residuo1`.

A continuación, se desea implementar una función `Problema2(mu, Nx)` que, recibidos μ y N_x, realice los siguientes pasos:

1. Resolver el sistema (8) mediante el método de Anderson.
2. Representar, en la misma gráfica, la solución exacta $u^{\mathrm{ex}}(x) = \mu \cosh((x-0.2)/\mu)$ con una línea con cruces azules (opción `'xb'`) y la solución numérica con una línea roja (opción `'r'`).
3. Mostrar por pantalla el error máximo η en los nodos de la malla, es decir, $\eta := \max_i |u_i - u^{\mathrm{ex}}(x_i)|$.

Cuestión 7 (1.25pt): *Implementar la función `Problema2(mu, Nx)`.*

Solución: Véase la función `Problema2`. □

Cuestión 8 (0.75pt): *Fijando $\mu = 0.4$, hallar el error η para los valores de N_x indicados en la Tabla 1 (con tres cifras significativas es suficiente). Sabiendo que $\eta = \mathcal{O}(h^{\alpha})$, ¿cuál es aproximadamente (una cifra significativa) el orden de convergencia α? (Responder debajo de la tabla.)*

Solución: Como puede verse en la Tabla 1, al dividir el tamaño de malla h entre dos, el error se divide aproximadamente entre cuatro. Por tanto, el orden de convergencia es aproximadamente $\alpha = 2$. □

Tabla 1: Resultados del Problema 2.

N_x	Error η
50	2.27E-5
100	5.55E-6
200	1.34E-6