

Problema 1 (4.5pt)

Se desea desarrollar una regla de cuadratura para integrales de la forma

$$\int_{-1}^1 (1+x)^{1/8} g(x) dx \approx \sum_{j=0}^N w_j g(x_j), \quad (1)$$

donde $g(x)$ es una función suficientemente suave, es decir, todas sus derivadas son finitas, x_0, \dots, x_N son los nodos de cuadratura y w_0, \dots, w_N son los pesos. Se tomarán los nodos de Chebyshev, es decir, $x_j = -\cos(j\pi/N)$, $j = 0, \dots, N$.

Cuestión 1 (1.5pt): *Demostrar que, si la regla (1) es exacta cuando $g(x)$ es un polinomio cualquiera de grado menor o igual que N , entonces*

$$\begin{bmatrix} 2^{1/8+1}/(1/8+1) \\ 2^{1/8+2}/(1/8+2) \\ \vdots \\ 2^{1/8+N+1}/(1/8+N+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \cdots & 1 \\ (1+x_0) & \cdots & (1+x_N) \\ \vdots & & \vdots \\ (1+x_0)^N & \cdots & (1+x_N)^N \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_0 \\ w_1 \\ \vdots \\ w_N \end{bmatrix}. \quad (2)$$

Solución: Si la regla (1) es exacta cuando $g(x)$ es un polinomio de grado menor o igual que N , entonces debe ser exacta si $g(x) = (1+x)^i$, $i = 0, \dots, N$. En ese caso,

$$\int_{-1}^1 (1+x)^{1/8} (1+x)^i dx = \sum_{j=0}^N w_j (1+x_j)^i, \quad i = 0, \dots, N.$$

El lado izquierdo de la ecuación anterior es igual a

$$\int_{-1}^1 (1+x)^{1/8+i} dx = \left(\frac{(1+x)^{1/8+i+1}}{1/8+i+1} \right)_{x=-1}^{x=1} = \frac{2^{1/8+i+1}}{1/8+i+1}.$$

Por tanto

$$\frac{2^{1/8+i+1}}{1/8+i+1} = \sum_{j=0}^N w_j (1+x_j)^i, \quad i = 0, \dots, N,$$

como queríamos demostrar. □

Cuestión 2 (1.5pt): *Implementar una función de la forma $[\mathbf{xQuad}, wQuad] = \text{ReglaCuadratura}(N)$ que, recibido N , devuelva un vector columna $\mathbf{xQuad} = [x_0, \dots, x_N]^T$ con los nodos de cuadratura y un vector columna $wQuad = [w_0, \dots, w_N]^T$ con los valores de los pesos.*

Solución: Véase la función `ReglaCuadratura1`. □

Se desea calcular una aproximación numérica a

$$I := \int_{-1}^1 (1+x)^{1/8} e^{-x} \cos x dx. \quad (3)$$

Cuestión 3 (1pt): *Implementar una función de la forma `Problema1(N)` que, recibido N , calcule una aproximación al valor de I utilizando (i) la regla con nodos de Chebyshev vista en clase (función `ChebyshevGauss1`) y (ii) la regla (1), y muestre ambos resultados por pantalla. Rellenar la Tabla 1 con los valores aproximados de I obtenidos (con cuatro cifras significativas es suficiente).*

Solución: Véase función Problema1 y la Tabla 1. □

Cuestión 4 (0.5pt): *A la vista de los resultados en la Tabla 1, ¿cuál de las dos reglas converge antes? ¿Por qué?*

Solución: La regla de Chebyshev–Gauss vista en clase es para integrales de la forma $\int_{-1}^1 f(x) dx$. Comparando esta expresión con la definición (3) de I , es claro que $f(x) = (1+x)^{1/8} e^{-x} \cos x$. Así pues, en este caso tenemos que multiplicar los pesos de cuadratura de dicha regla por los valores de $f(x)$ en los nodos.

Igualmente, comparando (3) con (1), es claro que $g(x) = e^{-x} \cos x$. No obstante, notemos que, para usar la regla (1), no hay que multiplicar los pesos por el valor de $f(x)$ en los nodos, sino por el valor de $g(x)$, tal y como indica la ecuación (1).

La regla (1) converge antes, como muestra la Tabla 1-

Cuando se calculan reglas de cuadratura para integrales de la forma $\int_{-1}^1 f(x) dx$, lo que se está haciendo en realidad es hallar el polinomio de interpolación en unos ciertos nodos y calcular su integral. Sin embargo, en este caso, la función $f(x) = (1+x)^{1/8} e^{-x} \cos x$ tiene una singularidad en $x = -1$ debido al término $(1+x)^{1/8}$; en particular, sus derivadas se hacen infinitas en $x = -1$. Debido a que los polinomios son funciones suaves (es decir, todas sus derivadas son finitas), $f(x)$ no puede entonces aproximarse bien por un polinomio y, por tanto, el resultado así obtenido no es preciso.

Por el contrario, la función $g(x) = e^{-x} \cos x$ sí es suave y puede aproximarse bien por un polinomio, tal y como exige la regla (1), por lo que el resultado proporcionado por ésta es más preciso. □

Tabla 1: Valor aproximado de I .

N	ChebyshevGauss1	Regla (1)
1	0.217	1.544
2	1.406	1.762
4	1.734	1.790
8	1.779	1.790
16	1.788	1.790

Problema 2 (5.5pt) (continúa por detrás)

Un líquido de densidad $\rho = 1$ y viscosidad cinemática $\nu = 0.2$ se encuentra situado entre dos cilindros coaxiales, infinitamente largos, y de radios $R_1 = 1$ y $R_2 = 2$. El líquido y los cilindros se hallan inicialmente en reposo. En $t = 0$, un motor comienza a rotar el cilindro interior con una velocidad angular¹ $\omega(t) = 1 - e^{-t/0.1}$. Entonces, bajo hipótesis de viscosidad dominante, el líquido adquiere un campo de velocidades con simetría rotacional (véase Fig. 1), en el que la velocidad azimuthal $u(t, r)$ satisface la ecuación diferencial

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \nu \left(\frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} - \frac{u}{r^2} \right), \quad (4)$$

junto con las condiciones inicial y de contorno

$$u(0, r) = 0, \quad u(t, R_1) = \omega(t)R_1, \quad u(t, R_2) = 0. \quad (5)$$

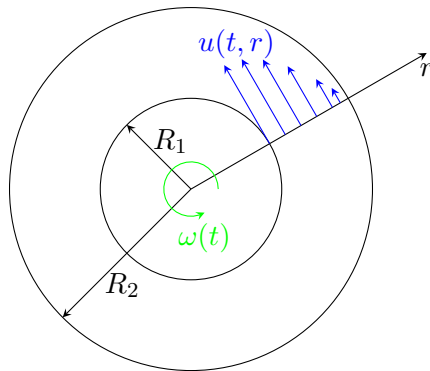


Figura 1: Esquema de los dos cilindros coaxiales y del líquido comprendido entre ambos.

Para resolver este problema, primero se discretizará la ecuación (4) en el espacio. En particular, se dividirá el dominio espacial (R_1, R_2) en una malla de $N = 50$ nodos equiespaciados, r_1, \dots, r_N , y se aproximarán las derivadas respecto de r (tanto primeras como segundas) por diferencias finitas centradas. En ese caso, la ecuación (4) queda discretizada en el espacio como

$$\frac{du_i}{dt} = \nu (C_{i1}u_{i-1} + C_{i2}u_i + C_{i3}u_{i+1}), \quad i = 2, \dots, N-1, \quad (6)$$

donde

$$C_{i1} = \quad, \quad C_{i2} = \quad, \quad C_{i3} = \quad, \quad (7)$$

y h es la distancia entre dos nodos consecutivos. Por otra parte, derivando respecto del tiempo las condiciones de contorno en (5), se tiene

$$\frac{du_1}{dt} = \quad, \quad \frac{du_N}{dt} = \quad, \quad (8)$$

mientras que la condición inicial se puede escribir como

$$u_i(0) = \quad, \quad i = 1, \dots, N. \quad (9)$$

Las ecuaciones (6)-(8) y la condición inicial (9) forman un sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias que será integrado mediante un método Runge-Kutta.

Cuestión 5 (0.5pt): Es conocido que los autovalores asociados al sistema (6)-(8) son del orden de ν/h^2 . ¿Qué problema puede presentar esto de cara a su integración?

¹Todas las variables están adimensionalizadas con la densidad del líquido, el radio del cilindro interior y la velocidad angular máxima.

Solución: Que el problema se vuelve rígido si h disminuye, lo cual puede ser necesario para disminuir el error debido a la discretización por diferencias finitas. Por ejemplo, si $h \sim 10^{-3}$, entonces los autovalores serán del orden de 10^6 , lo cual forzaría a utilizar un paso de tiempo $\Delta t \sim 10^{-6}$ en caso de utilizar un método explícito.

Cuestión 6 (3pt): Completar las expresiones (7)-(9) e implementar una función de la forma `[u_dot, JJ] = TaylorCouette_fun(rv, nu, t, uv, CalcJ)` que, recibido un vector $\mathbf{rv} = [r_1, \dots, r_N]^T$, el valor de ν , el valor del tiempo t , el vector columna $\mathbf{uv} = [u_1, \dots, u_N]^T$ y una variable booleana `CalcJ`, devuelva un vector $\mathbf{u_dot} = [du_1/dt, \dots, du_N/dt]^T$ con las derivadas temporales de los elementos en \mathbf{uv} y, si `CalcJ=true`, devuelva también la matriz Jacobiana correspondiente.

Solución: Si empleamos diferencias finitas centradas tenemos, para los nodos $i = 2, \dots, N-1$,

$$\begin{aligned} \frac{du_i}{dt} &= \nu \left[\frac{1}{r_i} \frac{u_{i+1} - u_{i-1}}{2h} + \frac{u_{i+1} - 2u_i + u_{i-1}}{h^2} - \frac{u_i}{r_i^2} \right] \\ &= \nu \left[\left(\frac{1}{h^2} - \frac{1}{2r_i h} \right) u_{i-1} - \left(\frac{2}{h^2} + \frac{1}{r_i^2} \right) u_i + \left(\frac{1}{h^2} + \frac{1}{2r_i h} \right) u_{i+1} \right], \end{aligned}$$

de donde

$$C_{i1} = \frac{1}{h^2} - \frac{1}{2r_i h}, \quad C_{i2} = -\left(\frac{2}{h^2} + \frac{1}{r_i^2} \right), \quad C_{i3} = \frac{1}{h^2} + \frac{1}{2r_i h}.$$

Por otra parte, derivando en el tiempo las condiciones de contorno en (5), se tiene

$$\frac{du_1}{dt} = \frac{d\omega}{dt} R_1 = 10 e^{-t/0.1} R_1, \quad \frac{du_N}{dt} = 0,$$

mientras que la condición inicial se discretiza como

$$u_i(0) = 0, \quad i = 1, \dots, N.$$

Véase la función `TaylorCouette_fun1`.

Puede utilizarse la función codificada `TaylorCouette_fun1` en lo que sigue.

Se desea crear una función `Problema2`, sin argumentos de entrada ni de salida, que realice los siguientes pasos:

1. Integrar las ecuaciones (6)-(9) mediante el método Runge-Kutta implícito `RK4I` desde $t = 0$ hasta $t = 5$ con un paso de tiempo fijo $\Delta t = 0.01$. Recuérdese que la función que se pasa como argumento a la función `RungeKuttaI` depende únicamente de tres argumentos (`t, uv, CalcJ`).
2. Mostrar por pantalla el error máximo en los nodos en el instante final, dado por $\eta := \max_i |u_i(t = 5) - u^{\text{ex}}(r_i)|$, donde $u^{\text{ex}}(r) = 4/(3r) - r/3$.
3. Representar la solución numérica $u(t, r)$ frente a r para el primer instante de simulación t^j tal que $t^j \geq 0.1$. Repítase esto para $t^j \geq 0.5$ y para $t^j \geq 5$. Pueden utilizarse figuras diferentes. Puede ser de utilidad saber que, dado un vector $\mathbf{tv} = [\mathbf{tv}(1), \dots, \mathbf{tv}(M)]$, la primera componente \mathbf{k} que satisface $\mathbf{tv}(\mathbf{k}) \geq a$ puede hallarse con el comando `k = find(tv>=a, 1, 'first')`.
4. El esfuerzo viscoso en la superficie del cilindro interior viene dado por

$$\tau(t) = \rho \nu \left(\frac{u(t, R_1)}{R_1} - \frac{\partial u(t, R_1)}{\partial r} \right), \quad (10)$$

mientras que la potencia por unidad de longitud necesaria para girar el eje es

$$W(t) = \tau(t) 2\pi R_1^2 \omega(t). \quad (11)$$

Representar $W(t)$ frente a t . Para ello, puede aproximarse $\partial u(t, R_1)/\partial r$ en (10) por una diferencia finita de dos nodos.

Cuestión 7 (2.0pt): *Implementar la función Problema2.*

Solución: El esfuerzo viscoso en la pared del cilindro interior se puede aproximar por la fórmula

$$\tau = \rho\nu \left(\frac{u_1}{R_1} - \frac{u_2 - u_1}{h} \right).$$

Véase la función Problema2.