Matemáticas de la Especialidad Técnicas Energéticas

Prueba de evaluación progresiva 1 — Marzo de 2025

Nombre y apellidos: Número de matrícula:

Instrucciones:

- Sólo se permite tener abierto Moodle y Matlab en el ordenador.
- Se permite utilizar el material disponible en Moodle, así como los apuntes de clase.
- No se permite utilizar el teléfono móvil.
- Al final del examen, hay que contestar por escrito (en papel) a algunas de las preguntas formuladas y subir los códigos requeridos a Moodle. Para las respuestas escritas en papel, se pueden utilizar todas las hojas que se desee y no es necesario separar las respuestas a preguntas diferentes en hojas diferentes. Indicar el nombre y los apellidos en todas las hojas.
- Los archivos deben subirse en formato `.m`.
- Recuérdese que la instrucción `help fun` de Matlab muestra ayuda sobre la función `fun`.
- Los archivos `*.p` disponibles en Moodle son funciones codificadas. Son llamadas igual que una función `*.m`, pero no se puede leer su código.

Tiempo:

2h 15 min.

Problema 1

Sobre el eje x hay situadas N cargas eléctricas puntuales $Q_1, \ldots, Q_N$ que pueden moverse únicamente en la dirección del mismo. Además del campo eléctrico generado por ellas mismas, las cargas están sometidas al campo eléctrico generado por dos hilos infinitos de densidad lineal de carga λ, perpendiculares al plano del papel, que pasan por los puntos $P_1 = (0,0)$ y $P_2 = (L,0)$, véase Fig. 1.

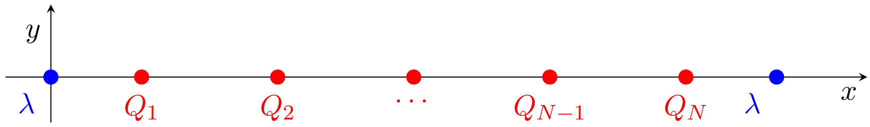

Figura 1: Esquema de las variables del Problema 1.

Se desea hallar la posición de equilibrio estático de las cargas. Se sabe que esto ocurre cuando el campo eléctrico sobre cada carga Q_i, dado por

$$E_i(\mathbf{x}) = 2K\lambda \left(\frac{1}{x_i} - \frac{1}{L - x_i} \right) + K \sum_{k=1,\ k\neq i}^{N} Q_k \frac{x_i - x_k}{|x_i - x_k|^3}, \quad i = 1, \ldots, N,$$

es nulo. En la ecuación anterior, x_i es la coordenada horizontal de la carga Q_i, $\mathbf{x} = [x_1, \ldots, x_N]^{\mathrm{T}}$ y K es la constante de Coulomb.

Cuestión 1 (1pt): *Demostrar que*

$$\frac{\partial E_i}{\partial x_j} = \begin{cases} -2K\lambda \left(\dfrac{1}{x_i^2} + \dfrac{1}{(L - x_i)^2} \right) - 2K \displaystyle\sum_{k=1,\ k\neq i}^{N} Q_k \frac{1}{|x_i - x_k|^3}, & i = j, \\ 2KQ_j \dfrac{1}{|x_i - x_j|^3}, & i \neq j. \end{cases}$$

Cuestión 2 (2.5pt): *Implementar una función de la forma*

```
function [E,J] = CargasElectricasResiduo(K,lambda,L,Q,x,CalcJ)
```

que reciba los valores de K, λ y L, un vector columna $\mathbf{Q} = [Q_1, \ldots, Q_N]^{\mathrm{T}}$ con los valores de las cargas puntuales, el vector columna $\mathbf{x} = [x_1, \ldots, x_N]^{\mathrm{T}}$ con las posiciones de las mismas y una variable booleana `CalcJ` y devuelva un vector columna $\mathbf{E} = [E_1, \ldots, E_N]^{\mathrm{T}}$ con el campo eléctrico en cada carga y, si `CalcJ=true`, el Jacobiano del mismo, definido como $J_{ij} := \partial E_i / \partial x_j$. Subir la función a Moodle. Puede ser útil saber que la función valor absoluto está implementada bajo el comando `abs`.

De ahora en adelante, utilícese la función codificada `CargasElectricasResiduo1` disponible en Moodle. Asimismo, considérense los parámetros $K = 2.1$, $\lambda = 0.4$ y $L = 8$, así como $N = 10$ cargas puntuales de idéntico valor $Q_i = 0.5$, $i = 1, \ldots, N$.

A continuación, se implementará una función de la forma `function Problema1`, sin argumentos de entrada ni de salida, que realice los siguientes pasos:

1. Definir los parámetros K, λ y L y el vector de cargas $\mathbf{Q}$.
2. Resolver el sistema de ecuaciones $E_i(\mathbf{x}) = 0$, $i = 1, \ldots, N$, mediante el método de Newton–Raphson para hallar la posición de equilibrio estático de cada carga. Tómese, como condición inicial $\mathbf{x}^0$, un vector de N componentes equiespaciadas entre $0.1L$ y $0.9L$, así como una tolerancia de 10^{-8} y un máximo de 20 iteraciones. Para ello, puede ser útil definir la función auxiliar

   ```
   fun = @(x,CalcJ) CargasElectricasResiduo1(K,lambda,L,Q,x,CalcJ);
   ```

   y llamar al método de Newton–Raphson mediante `NewtonRaphson1(fun, ...)`.
3. Dibujar, en una nueva figura, la posición de cada carga con un círculo azul (opción `'ob'`) en el comando `plot`. Supóngase que la coordenada vertical de cada carga es cero.

Cuestión 3 (1.5pt): *Crear la función `Problema1` y subirla a Moodle.*

Problema 2

Sea $\mathbb{A} \in \mathbb{R}^{N\times N}$ una matriz cuyos elementos no nulos son

$$a_{ii} = 12, \quad a_{i+\alpha_i,i} = -1, \quad a_{i,i+\beta_i} = -5, \quad i = 1, \ldots, N-1,$$

y $a_{NN} = 12$, donde

$$\alpha_i = \left\lceil (N-i)\left(0.01 + 0.49\left(1 - \cos\left(\frac{5\pi i}{N}\right)\right)\right)\right\rceil, \quad \beta_i = \left\lceil (N-i)\left(0.01 + 0.49\left(1 + \cos\left(\frac{5\pi i}{N}\right)\right)\right)\right\rceil,$$

y $\lceil\cdot\rceil$ representa la función techo (orden `ceil`).

Cuestión 4 (2pt): *Crear una función de la forma* `function A=MatrizExamen(N)` *que, recibido el valor de N, construya la matriz dispersa $\mathbb{A}$. Subir la función a Moodle.*

De ahora en adelante, utilícese la función codificada `MatrizExamen1` disponible en Moodle.

Se desea implementar una función de la forma `function Problema2(N)`, sin argumentos de salida, que realice los siguientes pasos:

1. Crear la matriz $\mathbb{A}$ anterior llamando a la función `MatrizExamen1` y representar el patrón de elementos no nulos (orden `spy`) en una nueva figura. Obsérvese que la figura indica el número total de elementos no nulos.
2. Crear los vectores columna de N componentes definidos por $\mathbf{x}^* = [1, \ldots, 1]^{\mathrm{T}}$ y $\mathbf{b} := \mathbb{A}\mathbf{x}^*$.
3. Hallar la factorización LU más adecuada, mostrando el tiempo empleado por pantalla, y representar el patrón de elementos no nulos de $\mathbb{L} + \mathbb{U}$ en una nueva figura.
4. Resolver el sistema $\mathbb{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}$ utilizando dicha factorización, mostrando el tiempo empleado por pantalla.

Existe una factorización *LU* aproximada, $\mathbb{A} \approx \mathbb{L}\mathbb{U}$, llamada *factorización LU incompleta* o *ILU0*, que consiste en realizar la factorización LU estándar y anular los términos de llenado (*fill-in*). De esta forma, $\mathbb{L} + \mathbb{U}$ tiene el mismo patrón de elementos no nulos que $\mathbb{A}$ y $a_{ij} = \sum_{k=1}^{N} l_{ik}u_{kj}$ para todos los elementos no nulos a_{ij}. Dicha factorización puede obtenerse con la instrucción `[L,U]=ilu0(A)`, siendo `ilu0` una función disponible en Moodle. Realizar los siguientes pasos adicionales:

5. Hallar la factorización ILU0 llamando a la función `ilu0`, mostrando el tiempo empleado por pantalla, y representar el patrón de elementos (orden `spy`) no nulos de $\mathbb{L}+\mathbb{U}$ en una nueva figura. (No confundir estas matrices $\mathbb{L}$ y $\mathbb{U}$ con las del paso 3.)
6. Resolver el sistema
$$\mathbf{g}(x) := \mathbb{U}^{-1}\mathbb{L}^{-1}(\mathbb{A}\mathbf{x} - \mathbf{b}) = \mathbf{0} \tag{1}$$
mediante el método de Anderson, mostrando por pantalla el tiempo empleado y el número de iteraciones. Tómese el vector nulo como condición inicial, una tolerancia de 10^{-8}, un máximo de 100 iteraciones y 20 pasos almacenados.

Cuestión 5 (1pt): *Justificar la definición del residuo precondicionado* $\mathbf{g}$ *dado por la Ec.* (1).

Cuestión 6 (2pt): *Crear la función* `Problema2` *y subirla a Moodle. Ejecutar la función para $N = 10^5$ (reducir sucesivamente este valor a la mitad si el ordenador tarda más de dos minutos) y completar la Tabla 1 (con dos cifras significativas es suficiente). ¿Qué método es más eficiente? ¿A qué se debe la diferencia?*

Tabla 1: Resultados del Problema 2.

N	
Coste [s] factorización LU Coste [s] resolución a partir de LU Número de elementos no nulos en $\mathbb{L} + \mathbb{U}$	
Coste [s] factorización ILU0 Coste [s] resolución con Anderson Número de elementos no nulos en $\mathbb{L} + \mathbb{U}$ Número de iteraciones Anderson	