Matemáticas de la Especialidad Técnicas Energéticas
Examen global — Junio de 2025

Nombre y apellidos: Número de matrícula:

INFORMACIÓN IMPORTANTE:

- **No** se permite **utilizar internet** en ningún momento a no ser que el profesor lo indique.
- Si alguien desea **entregar antes** de la finalización del examen, deberá **avisar** a alguno de los profesores para subir los archivos a Moodle de forma vigilada.
- Si los códigos entregados contienen errores de ejecución, se **puntuarán con un cero** a no ser que hayan producido algún resultado visible.
- Las cuestiones de **teoría** se pueden responder **en hojas aparte**, sin límite de folios. Incluir nombre y apellidos en todas las hojas.

Tiempo:

2h 30 min.

Problema 1 (4.5pt)

Se desea desarrollar una regla de cuadratura para integrales de la forma

$$\int_{-1}^{1} (1+x)^{1/8}\ g(x)\,\mathrm{d}x \approx \sum_{j=0}^{N} w_j g(x_j), \tag{1}$$

donde $g(x)$ es una función suficientemente suave, es decir, todas sus derivadas son finitas, $x_0, \dots, x_N$ son los nodos de cuadratura y $w_0, \dots, w_N$ son los pesos. Se tomarán los nodos de Chebyshev, es decir, $x_j = -\cos(j\pi/N)$, $j = 0, \dots, N$.

Cuestión 1 (1.5pt) *Demostrar que, si la regla* (1) *es exacta cuando* $g(x)$ *es un polinomio cualquiera de grado menor o igual que* N*, entonces*

$$\begin{bmatrix} 2^{1/8+1}/(1/8+1) \\ 2^{1/8+2}/(1/8+2) \\ \vdots \\ 2^{1/8+N+1}/(1/8+N+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \cdots & 1 \\ (1+x_0) & \cdots & (1+x_N) \\ \vdots & & \vdots \\ (1+x_0)^N & \cdots & (1+x_N)^N \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_0 \\ w_1 \\ \vdots \\ w_N \end{bmatrix}. \tag{2}$$

Cuestión 2 (1.5pt) *Implementar una función de la forma* `[xQuad, wQuad] = ReglaCuadratura(N)` *que, recibido* N*, devuelva un vector columna* `xQuad` $= [x_0, \dots, x_N]^{\mathrm{T}}$ *con los nodos de cuadratura y un vector columna* `wQuad` $= [w_0, \dots, w_N]^{\mathrm{T}}$ *con los valores de los pesos.*

Se desea calcular una aproximación numérica a

$$I := \int_{-1}^{1} (1+x)^{1/8}\ \mathrm{e}^{-x} \cos x \,\mathrm{d}x.$$

Cuestión 3 (1pt) *Implementar una función de la forma* `Problema1(N)` *que, recibido* N*, calcule una aproximación al valor de* I *utilizando (i) la regla con nodos de Chebyshev vista en clase (función* `ChebyshevGauss1`*) y (ii) la regla* (1)*, y muestre ambos resultados por pantalla. Rellenar la Tabla 1 con los valores aproximados de* I *obtenidos (con cuatro cifras significativas es suficiente).*

Cuestión 4 (0.5pt) *A la vista de los resultados en la Tabla 1, ¿cuál de las dos reglas converge antes? ¿Por qué?*

Tabla 1: Valor aproximado de I.

N	`ChebyshevGauss1`	Regla (1)
1		
2		
4		
8		
16		

Problema 2 (5.5pt) (continúa por detrás)

Un líquido de densidad $\rho = 1$ y viscosidad cinemática $\nu = 0.2$ se encuentra situado entre dos cilindros coaxiales, infinitamente largos, y de radios $R_1 = 1$ y $R_2 = 2$. El líquido y los cilindros se hallan inicialmente en reposo. En $t = 0$, un motor comienza a rotar el cilindro interior con una velocidad angular[1] $\omega(t) = 1 - \mathrm{e}^{-t/0.1}$. Entonces, bajo hipótesis de viscosidad dominante, el líquido adquiere un campo de velocidades con simetría rotacional (véase Fig. 1), en el que la velocidad azimutal $u(t, r)$ satisface la ecuación diferencial

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \nu \left(\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} - \frac{u}{r^2} \right), \tag{3}$$

junto con las condiciones inicial y de contorno

$$u(0, r) = 0, \quad u(t, R_1) = \omega(t) R_1, \quad u(t, R_2) = 0. \tag{4}$$

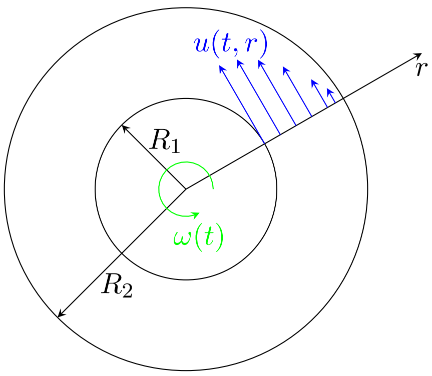

Figura 1: Esquema de los dos cilindros coaxiales y del líquido comprendido entre ambos.

Para resolver este problema, primero se discretizará la ecuación (3) en el espacio. En particular, se dividirá el dominio espacial (R_1, R_2) en una malla de $N = 50$ nodos equiespaciados, $r_1, \ldots, r_N$, y se aproximarán las derivadas respecto de r (tanto primeras como segundas) por diferencias finitas centradas. En ese caso, la ecuación (3) queda discretizada en el espacio como

$$\frac{\mathrm{d}u_i}{\mathrm{d}t} = \nu \left(C_{i1} u_{i-1} + C_{i2} u_i + C_{i3} u_{i+1} \right), \quad i = 2, \ldots, N-1, \tag{5}$$

donde

$$C_{i1} = \qquad\qquad\qquad , \quad C_{i2} = \qquad\qquad\qquad , \quad C_{i3} = \qquad\qquad\qquad , \tag{6}$$

y h es la distancia entre dos nodos consecutivos. Por otra parte, derivando respecto del tiempo las condiciones de contorno en (4), se tiene

$$\frac{\mathrm{d}u_1}{\mathrm{d}t} = \qquad\qquad\qquad , \quad \frac{\mathrm{d}u_N}{\mathrm{d}t} = \qquad\qquad\qquad , \tag{7}$$

mientras que la condición inicial se puede escribir como

$$u_i(0) = \qquad\qquad\qquad , \quad i = 1, \ldots, N. \tag{8}$$

Las ecuaciones (5)-(7) y la condición inicial (8) forman un sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias que será integrado mediante un método Runge–Kutta.

Cuestión 5 (0.5pt) *Es conocido que los autovalores asociados al sistema* (5)-(7) *son del orden de* ν/h^2. *¿Qué problema puede presentar esto de cara a su integración?*

[1] Todas las variables están adimensionalizadas con la densidad del líquido, el radio del cilindro interior y la velocidad angular máxima.

Cuestión 6 (3pt) *Completar las expresiones* (6)-(8) *e implementar una función de la forma* `[udot, J] = TaylorCouette_fun(rv, nu, t, uv, CalcJ)` *que, recibido un vector* `rv` $= [r_1, \ldots, r_N]^{\mathrm{T}}$*, el valor de* ν*, el valor del tiempo* t*, el vector columna* `uv` $= [u_1, \ldots, u_N]^{\mathrm{T}}$ *y una variable booleana* `CalcJ`*, devuelva un vector* `udot` $= [\mathrm{d}u_1/\mathrm{d}t, \ldots, \mathrm{d}u_N/\mathrm{d}t]^{\mathrm{T}}$ *con las derivadas temporales de los elementos en* `uv` *y, si* `CalcJ=true`*, devuelva también la matriz Jacobiana correspondiente.*

Puede utilizarse la función codificada `TaylorCouette_fun1` en lo que sigue.

Se desea crear una función `Problema2`, sin argumentos de entrada ni de salida, que realice los siguientes pasos:

1. Integrar las ecuaciones (5)-(8) mediante el método Runge–Kutta implícito `RK4I` desde $t = 0$ hasta $t = 5$ con un paso de tiempo fijo $\Delta t = 0.01$. Recuérdese que la función que se pasa como argumento a la función `RungeKuttaI` depende únicamente de tres argumentos (`t,uv,CalcJ`).
2. Mostrar por pantalla el error máximo en los nodos en el instante final, dado por $\eta := \max_i |u_i(t = 5) - u^{\mathrm{ex}}(r_i)|$, donde $u^{\mathrm{ex}}(r) = 4/(3r) - r/3$.
3. Representar la solución numérica $u(t, r)$ frente a r para el primer instante de simulación t^j tal que $t^j \geq 0.1$. Repítase esto para $t^j \geq 0.5$ y para $t^j \geq 5$. Pueden utilizarse figuras diferentes. Puede ser de utilidad saber que, dado un vector `tv=[tv(1), ..., tv(M)]`, la primera componente `k` que satisface `tv(k)`$\geq$`a` puede hallarse con el comando `k = find(tv>=a, 1, 'first')`.
4. El esfuerzo viscoso en la superficie del cilindro interior viene dado por

$$\tau(t) = \rho\nu \left(\frac{u(t, R_1)}{R_1} - \frac{\partial u(t, R_1)}{\partial r} \right), \tag{9}$$

   mientras que la potencia por unidad de longitud necesaria para girar el eje es

$$W(t) = \tau(t) 2\pi R_1^2 \omega(t). \tag{10}$$

   Representar $W(t)$ frente a t. Para ello, puede aproximarse $\partial u(t, R_1)/\partial r$ en (9) por una diferencia finita de dos nodos.

Cuestión 7 (2.0pt) *Implementar la función* `Problema2`*.*