Resolução P2

Prova_02 - 2023.2

2

Se $\{\mathbf{v_1}, \mathbf{v_2}, \mathbf{v_3}\}$ formam um conjunto de vetores linearmente independentes, então as diferenças $\mathbf{u_1} = \mathbf{v_2} - \mathbf{v_3}, \mathbf{u_2} = \mathbf{v_1} - \mathbf{v_3}$ e $\mathbf{u_3} = \mathbf{v_1} - \mathbf{v_2}$ são linearmente dependentes ou linearmente independentes? Prove.

Resposta

Se os vetores $\mathbf{u_1}, \mathbf{u_2}$ e $\mathbf{u_3}$ forem dependentes, então existe algum c_i, $i = 1, 2, 3$, diferente de zero tal que:

$$c_1\mathbf{u_1} + c_2\mathbf{u_2} + c_2\mathbf{u_3} = 0 \tag{1}$$

Caso contrário, os vetores serão independentes. Vamos substituir os valores dos vetores na equação (1) e reoganizar os termos

$$\begin{aligned}
c_1(\mathbf{v_2} - \mathbf{v_3}) + c_2(\mathbf{v_1} - \mathbf{v_3}) + c_3(\mathbf{v_1} - \mathbf{v_2}) &= 0 && (2)\\
c_1\mathbf{v_2} - c_1\mathbf{v_3} + c_2\mathbf{v_1} - c_2\mathbf{v_3} + c_3\mathbf{v_1} - c_3\mathbf{v_2} &= 0 && (3)\\
\mathbf{v_1}(c_2 + c_3) + \mathbf{v_2}(c_1 - c_3) - \mathbf{v_3}(c_1 + c_2) &= 0 && (4)
\end{aligned}$$

Sabemos pelo exercício que $\mathbf{v_1}, \mathbf{v_2}, \mathbf{v_3}$ são L.I., portanto, para que a equação (4) tenha solução

$$\begin{cases} c_2 + c_3 &= 0 \\ c_1 - c_3 &= 0 \\ c_1 + c_2 &= 0 \end{cases}$$

Vamos escrever os coeficientes desse sistema numa matriz A. Se o $det(A) \neq 0$, então os vetores $\mathbf{u_1}, \mathbf{u_2}, \mathbf{u_3}$ serão independentes.

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \rightarrow \; det(A) = -1 + 1 = 0$$

Temos que o $det(A) = 0$, portanto, os vetores são L.D.

3

Considerando o sistema de equações abaixo, calcule o impacto de uma pequena variação em a ao redor do ponto $x, y, a) = (1, 0, 2)$:

$$\begin{cases} x^2 + axy + y^2 - 1 & = 0 \\ x^2 + y^2 - a^2 + 3 & = 0 \end{cases}$$

Resposta

Vamos calcular o Jacobiano

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x} & \frac{\partial f_1}{\partial y} \\ \frac{\partial f_1}{\partial x} & \frac{\partial f_1}{\partial y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2x + ay & ax + 2y \\ 2x & 2y \end{bmatrix}$$

Substituindo nos pontos $(x, y, a) = (1, 0, 2)$

$$\mathbf{J}_{(1,0,2)} = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$$

Então temos que o $det(\mathbf{J}) = -4$

Vamos calcular as derivadas parciais de a na primeira e na segunda equação e avaliar nos pontos de interesse

$$\begin{aligned} \frac{\partial f_1}{\partial a} &= xy & \frac{\partial f_2}{\partial a} &= -2a \\ \frac{\partial f_1}{\partial a} &= 0 & \frac{\partial f_2}{\partial a} &= -4 \end{aligned}$$

Aplicando o teorema da função implícita, temos que

$$\begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial a} \\ \frac{\partial y}{\partial a} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 4 \end{bmatrix}$$

Avaliando o impacto de a em x

$$\frac{\partial x}{\partial a} = \frac{det \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 4 & 0 \end{bmatrix}}{det(\mathbf{J})} = \frac{-8}{-4} = 2$$

Avaliando o impacto de a em y

$$\frac{\partial y}{\partial a} = \frac{det \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}}{det(\mathbf{J})} = \frac{8}{-4} = -2$$

O impacto de uma variação positiva de $0,1$ em a sobre x e y é dada pelas seguintes equações

$$\begin{aligned} x &\approx x_0 + \frac{\partial x}{\partial a}\Delta a & y &\approx y_0 + \frac{\partial y}{\partial a}\Delta a \\ x &\approx 1 + 2(0,1) & y &\approx 0 - 2(0,1) \\ x &\approx 1,2 & y &\approx -0,2 \end{aligned}$$

4

Encontre os pontos críticos de $f(x,y) = xy(a-x-y)$ e os classifique como pontos de máximo local, mínimo local, sela ou não é possível dizer.

Resposta

Para encontrar os pontos críticos, vamos derivar a função e igualar a zero. Primeiro vamos aplicar a distributiva na função,

$$f(x,y) = xya - x^2y - xy^2$$

Calculando as derivadas parciais de x e y, e igualando a zero

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x} &= ay - 2xy - y^2 & \frac{\partial f}{\partial y} &= ax - x^2 - 2xy \\ 0 &= ay - 2xy - y^2 & 0 &= ax - x^2 - 2xy \end{aligned}$$

Encontramos que $2xy = ay - y^2 \quad (1)$ e $2xy = ax - x^2 \quad (2)$, portanto

$$\begin{aligned} ay - y^2 &= ax - x^2 \\ ay - ax &= y^2 - x^2 \\ a(y-x) &= (y-x)(y+x) \\ &\text{sendo } y \neq x \text{ então} \\ a &= y + x \\ y &= a - x \end{aligned}$$

Vamos substiruir y em (2)

$$\begin{aligned} 2x(a-x) &= ax - x^2 \\ 2ax - 2x^2 &= ax - x^2 \\ ax - x^2 &= 0 \\ x(a-x) &= 0 \end{aligned}$$

Ou $x = 0$, ou $x = a$. Quando $x = 0, y = a$, quando $x = a, y = 0$. Temos dois pontos críticos $(0,a), (a,0)$. Agora vamos calcular o hessiano dessa função para descobrirmos se os pontos são de máximo local, mínimo local, sela ou não é possível dizer.

Calculando as segundas derivadas e a derivada cruzada.

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x} = -2y; \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y} = -2x; \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = a - 2x - 2y$$

$$\mathbf{H} = \begin{bmatrix} -2y & a - 2x - 2y \\ a - 2x - 2y & -2x \end{bmatrix}$$

Nos pontos $(0, a); (a, 0)$

$$\mathbf{H}_{(0,a)} = \begin{bmatrix} -2a & -a \\ -a & 0 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{H}_{(a,0)} = \begin{bmatrix} 0 & -a \\ -a & -2a \end{bmatrix}$$

Em ambos os pontos temos um ponto de sela, pois o $det(H_2) = -a^2$ nos dois pontos.