# Resolução p1

## Prova_01 - 2023.2

**1. (3,0 pontos) As seguintes seis matrizes são matrizes de coeficientes de sistemas de equações lineares. Para cada matriz, atribua um valor para x e um valor para y (quando houver y) de forma que o conjunto de soluções do sistema de equações lineares correspondente tenha as propriedades especificadas. Justifique suas respostas.**

**(a) (0,5 ponto)** $\begin{bmatrix} 3 & 2 \\ x & 1 \end{bmatrix}$ **1 única solução para qualquer** $b \equiv (b_1, b_2)$**.**

Para que o sistema tenha uma única solução para qualquer vetor de termos independentes $b$, a matriz dos coeficientes deve ser uma matriz quadrada e ter determinante não nulo. Isso garante a existência e a unicidade da solução.

Neste caso, a matriz é quadrada, pois tem dimensões 2x2, e para que o determinante seja não nulo, é necessário que:

$$\begin{bmatrix} 3 & 2 \\ x & 1 \end{bmatrix} = (3 \cdot 1) - (2 \cdot x) \neq 0$$

Para que o determinante seja sempre não nulo, é necessário que $3 - 2x \neq 0$. Portanto, podemos encontrar um valor para x que satisfaça isso:

$$x \neq \frac{3}{2}$$

Então, $\forall x \neq \frac{3}{2}$, a matriz terá uma única solução para qualquer $b$.

**(b) (0,5 ponto)** $\begin{bmatrix} 1 & x \\ 2 & 1 \\ 3 & y \end{bmatrix}$ **0 ou infinitas soluções a depender de** $b \equiv (b_1, b_2, b_3)$**.**

Se o $rank(B) < ncol(B)$, existe variável livre no sistema e portanto, caso exista solução, existem infinitas soluções.

Se o $rank(B) < nlin(B)$, existe algum $b$ da matriz aumentada $\hat{B}$, tal que, $0 \cdot w_1 + 0 \cdot w_2 \neq 0$ para o qual não existe solução.

Para que obedeça os requisitos é preciso que o $rank(B) = 1$, ou seja, após o escalonamento a segunda e a terceira linha precisam estar zeradas. Multiplicando a primeira linha por $-2$ e $-3$ e, somando a segunda e terceira linhas, respectivamente, obtemos

$$\begin{bmatrix}1 & x\\ 2 & 1\\ 3 & y\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1 & x\\ 0 & -2x+1=0\\ 0 & -3x+y=0\end{bmatrix}$$

Para satisfazer as condições, temos que $x = \frac{1}{2},\ y = \frac{3}{2}$

**(c) (0,5 ponto)** $\begin{bmatrix}2 & 1\\ 1 & 3\\ 2 & x\end{bmatrix}$ **0 ou 1 solução a depender de** $b \equiv (b_1, b_2, b_3)$**.**

Se o $rank(C) = ncol(C)$ então não existe variável livre, caso haja solução, ela será única.

Se o $rank(B) < nlin(B)$, existe algum $b$ da matriz aumentada $\hat{B}$, tal que, $0 \cdot w_1 + 0 \cdot w_2 \neq 0$ para o qual não existe solução.

Para que os requisitos sejam obedecidos, o $rank(C) = 2$, então após o escalonamento a terceira linha ficará toda zerada.

$$\begin{bmatrix}2 & 1\\ 1 & 3\\ 2 & x\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}2 & 1\\ 0 & \frac{5}{2}\\ 0 & -1+x=0\end{bmatrix}$$

Portanto, para que o sistema possua 0 ou 1 solução, $x = 1$.

**(d) (0,5 ponto)** $\begin{bmatrix}1 & 3 & x\\ 4 & y & 1\end{bmatrix}$ **infinitas soluções para qualquer** $b \equiv (b_1, b_2)$**.**

Se o $rank(D) < ncol(D)$, então existe pelo menos variável livre no sistema, ou seja, quando houver soluções, existirão infinitas soluções.

Se o $rank(D) = nlin(D)$, então existe solução para qualquer $b$.

Seguindo esses dois requisitos, após o escalonamento, a segunda linha da matriz precisa ter um pivo na segunda coluna. Multiplicando a primeira linha por $-4$ e somando a segunda linha obtemos

$$\begin{bmatrix}1 & 3 & x\\ 4 & y & 1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1 & 3 & x\\ 0 & -12+y \neq 0 & 4x+1\end{bmatrix}$$

Ou seja, $y \neq 12$ e $x$ pode assumir qualquer valor.

**(e) (0,5 ponto)** $\begin{bmatrix}x & 4 & 3\\ 4 & y & 2\end{bmatrix}$ **0 ou infinitas soluções a depender** $b \equiv (b_1, b_2)$**.**

Se o $rank(E) < ncol(E)$, então existe pelo menos variável livre no sistema, ou seja, quando houver soluções, existiram infinitas soluções.

Se o $rank(E) < nlin(E)$, existe algum $b$ da matriz aumentada $\hat{E}$, tal que, $0 \cdot w_1 + 0 \cdot w_2 \neq 0$ para o qual não existe solução.

Obedecendo as restrições postas, a segunda linha da matriz ficará toda zerada. Para isso, Multiplicamos a primeira linha por $-\frac{2}{3}$

$$\begin{bmatrix}x & 4 & 3\\ 4 & y & 2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}x & 4 & 3\\ -\frac{2}{3}x+4=0 & -\frac{8}{3}+y=0 & 0\end{bmatrix}$$

Portanto, $x = 6,\ y = \frac{8}{3}$

**(f) (0,5 ponto)** $\begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 0 & x & 4 \\ 1 & 4 & 3 \end{bmatrix}$ **0 ou infinitas soluções a depender** $b \equiv (b_1, b_2, b_3)$**.**

Se o $rank(F) < ncol(F)$ então existe pelo menos variável livre no sistema, ou seja, quando houver soluções, existiram infinitas soluções.

Se o $rank(F) < nlin(F)$, existe algum $b$ da matriz aumentada $\hat{F}$, tal que, $0 \cdot w_1 + 0 \cdot w_2 + 0 \cdot w_3 \neq 0$ para o qual não existe solução.

Nesse caso, precisamos que a terceira linha fique toda zerada, e a segunda linha tenha um pivô na segunda coluna. Multiplicando a primeira linha por $-\frac{1}{3}$ e somando à terceira linha. Depois, obtendo o resultado para teceira linha, multiplicamos a segunda linha por $-\frac{2}{3}$, obtemos

$$\begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 0 & x & 4 \\ 1 & 4 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 0 & x & 4 \\ 0 & \frac{10}{3} & \frac{8}{3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 0 & x & 4 \\ 0 & -\frac{2}{3}x + \frac{10}{3} = 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Para satisfazer os requerimentos, $x = 5$

## 2. (2,0 pontos) Seja $A$ uma matriz de tamanho $m_{\times}n$, onde $m < n$. Prove que $A$ possui inversa à direita se e somente se $rank(A) = m$. Havendo inversa à direita de $A$, ela é única? Por quê?

- **Prova de que $A$ possui inversa à direita se, e somente se,** $rank(A) = m$

A matriz $A$ só terá inversa se $rank(A)$ for máximo. Como o $rank(A) \leq min(nlin(A), ncol(A))$, o posto máximo que a matriz pode assumir é $m$. Portanto, a matriz $A$ só possui inversa se, e somente se, $rank(A) = m$.

- **Testando unicidade**

Dado duas matrizes $B$ e $C$, ambas inversas à direita de $A$, temos que tanto $AC = I$, quanto $AB = I$.

$$\begin{aligned} AC &= I = AB \\ AC &= AB \\ C &= B \end{aligned}$$

Portanto, havendo inversa à direita de $A$ ela será única.

## 3. (2,0 pontos) Seja $A = VBV$ . Encontre uma expressão para $A^n$, onde $n$. é um número inteiro positivo.

$$\begin{aligned} A &= VBV^{-1} \\ A^n &= (VBV^{-1})^n \\ A^n &= (VBV^{-1})(VBV^{-1}) \ldots (VBV^{-1}) \\ A^n &= VBV^{-1} \cdot VBV^{-1} \ldots VBV^{-1} \end{aligned}$$

Como $V^{-1}V = I$, temos que

$$A^n = VBI \cdot BI \cdot BI \ldots BV^{-1}$$
$$A^n = VB \cdot B \cdot B \ldots V^{-1}$$
$$A^n = VB^nV^{-1}$$

## 4. (2,0 pontos) Imagina duas firmas ($i = 1, 2$) que competem em um mercado escolhendo cada uma a sua respectiva quantidade produzida $q_i$. O comportamento ótimo, maximizador de lucro da firma $i$ é determinado pela seguinte equação: $a - 2q_i - q_j - c_i = 0$, onde $a > 0$ é um parâmetro proveniente da demanda de mercado e $c_i > 0$ é uma medida de custo da firma $i$

**(a). (1,0 ponto) Sabendo que, em equilíbrio, ambas as firmas comportam-se otimamente, encontre as quantidades produzidas, $q_1$ e $q_2$, via regra de Cramer.**

**(b) (0,5 ponto) Que condição deve ser imposta para que, em equilíbrio, $q_1 > 0$? Interprete.**

**(c) (0,5 ponto) Que condições devem ser impostas para que, em equilíbrio, $q_1 = q_2 > 0$? Interprete.**

## 5. (1,0 ponto) Prove que, se $A^TA = I$, então $det(A) = \pm 1$.

Se $A^TA = I$, então $det(A^TA) = det(I)$. Pelas propriedades dos determinantes, $det(AB) = det(A) \cdot det(B)$, então:

$$det(A^TA) = det(I)$$
$$det(A^TA) = 1$$
$$det(A^T) \cdot det(A) = 1$$

Também sabemos que $det(A^T) = det(A)$, portanto:

$$det(A)^2 = 1$$
$$det(A) = \sqrt{1}$$
$$det(A) = \pm 1$$