Resolução P1

Prova_01 - 2020

1. (3,0 pontos) Considere os cinco últimos algarismos do seu número de matrícula. Chame-os de a, b, c, d, e. Por exemplo, $210edcba$. As seguintes cinco matrizes são matrizes de coeficientes de sistemas de equações lineares. Para cada matriz, o que você pode dizer sobre o número de soluções no sistema correspondente: (i) quando o lado direito é $b_1 = \dots = b_m = 0$, e (ii) para um lado direito geral $b_1, \dots, b_m$? Justifique suas respostas.

- (a) $\begin{bmatrix} 1 & 4 & 1 \\ a & b & c \end{bmatrix}$
- (b) $\begin{bmatrix} 6 & 4 \\ d & e \end{bmatrix}$
- (c) $\begin{bmatrix} b & 4 & 1 \\ a & b & c \end{bmatrix}$
- (d) $\begin{bmatrix} 1 & 4 & 3 \\ d & e & a \\ 0 & e & a \end{bmatrix}$
- (e) $\begin{bmatrix} 3 & 2 \\ b & c \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$

2. (2,0 pontos) Seja uma economia habitada por N indivíduos, indexados por $i = 1, \dots, N$. Nesta economia existem cinco bens, cujos preços são p_1, p_2, p_3, p_4 e p_5. O indivíduo $i \in \{1, \dots, N\}$ possui dotação e_l^i do bem $l \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$. A demanda do indivíduo i pelo bem l é dada por:

$$x_l^i = \sum_{j=1}^{5} \frac{p_j e_j^i}{5p_l}$$

O mercado do bem l está em equilíbrio quando a sua demanda é igual à sua oferta, ou seja:

$$\sum_{i=1}^{N} x_l^i = \sum_{i=1}^{N} e_l^i \equiv e_l$$

Mantendo em mente que os sobrescritos acima são índices ao invés de expoentes, fixe um dos preços igual a 1 e encontre os demais pela regra de Cramer.

3. (2,0 pontos) Seja a matriz E abaixo. Prove que $det(E) = 0$.

$$E = \begin{bmatrix} (1-n)e_1 & e_2 & \cdots & e_n \\ e_1 & (1-n)e_2 & \cdots & e_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ e_1 & e_2 & \cdots & (1-n)e_n \end{bmatrix}$$

Observe que os elementos em cada coluna são iguais, com exceção da diagonal principal. No caso da primeira coluna, $a_{21} = a_{31} = \cdots = a_{n1}$. Na segunda coluna, $a_{12} = a_{32} = \cdots = a_{n2}$. Ou seja, sempre que $i \neq j$, os elementos de cada coluna são iguais.

Vamos somar à primeira linha todas as demais linhas

$$E = \begin{bmatrix} e_1(n-1) + (1-n)e_1 & e_2(n-1) + (1-n)e_2 & \cdots & e_n(n-1) + (1-n)e_n \\ e_1 & (1-n)e_2 & \cdots & e_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ e_1 & e_2 & \cdots & (1-n)e_n \end{bmatrix}$$

$$E = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ e_1 & (1-n)e_2 & \cdots & e_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ e_1 & e_2 & \cdots & (1-n)e_n \end{bmatrix}$$

Pela proprieda dos determinantes, sabemos que se uma matriz possui uma linha ou coluna toda composta de zero, então seu determinante é zero, portanto $det(E) = 0$.