Resolução P1

Prova_01 - 2021

1. (4,0 pontos) As seguintes cinco matrizes são matrizes de coeficientes de sistemas deequações lineares. Para cada matriz, o que você pode dizer sobre o número de soluções no sistema correspondente: (i) quando o lado direito é $b_1 = \cdots = b_m = 0$, e (ii) para um lado direito geral $b_1, \ldots, b_m$? Justifique suas respostas.

- (a) $\begin{bmatrix} 3 & 2 & 3 \\ A & B & C \end{bmatrix}$

Essa é uma matriz 3×2, o posto máximo que ela pode assumir é $rank(A) = 2$, que é menor que o número de colunas, portanto, caso a segunda linha, formada por A, B, C seja diferente de zeros após o escalonamento, o sistema terá infinitas soluções. Caso a segunda linha seja toda de zeros, então existe algum b para qual o qual não existe solução.

- (b) $\begin{bmatrix} 3 & 2 \\ D & E \end{bmatrix}$

Essa é uma matriz $ 2 ×2$, o posto máximo que ela pode assumir é igual ao número de linhas e de colunas, portanto, caso haja solução, existirá uma única solução. Caso o $rank(B) < nlin(B)$, então não existirá solução para o sistema, pois existe algum b para o qual $0 \cdot w_1 + 0 \cdot w_2 = b_2$ não exista solução.

- (c) $\begin{bmatrix} B & 1 & 4 \\ A & B & C \end{bmatrix}$

Como o número de colunas é maior que o número de linhas, caso haja solução para este sistema, existirá infinitas soluções. E se $rank(C) < nlin(C)$, então não haverá solução para o sistema.

- (d) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ D & E & A \\ 0 & E & A \end{bmatrix}$

Esse sistema admite 0 ou infinitas soluções. Apesar de ser uma matriz quadrada, com a possibilidade de solução única, o segundo e terceiro elementos da segunda e terceira são iguais, o que implica que após o escalonamento, a terceira linha será composta apenas de zeros e, portanto, existe algum b para o qual a equação da terceira linha não apresente solução. Nesse caso o $rank(D) < ncol(D)$ e existirá variável livre no sistema, ou seja, infinitas soluções possíveis.

- (e) $\begin{bmatrix} 3 & 2 \\ B & C \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$

Esse sistema admite 0 solução, pois o $rank(E) \leq min\{nlin(E), ncol(E)\}$, portanto, o posto máximo da matriz é 2, que é menor que o número de linhas. Isto implica que haverá uma linha composta toda de zeros, para o qual o sistema não possui solução. Caso o $rank(E) = ncol(E)$ quando houver, existirá apenas uma solução. Caso o $rank(E) < ncol(E)$ quando houver, existirá infinitas soluções.

2. (3,0 pontos) Imagine $n = max\{A, B, C, D, E\}$ firmas $(i = 1, ..., n)$ que competem em um mercado escolhendo cada uma a sua respectiva quantidade produzida, q_i. O comportamento ótimo, maximizador de lucro, da firma i é determinado pela seguinte equação:

$$a - 2q_i - \sum_{j \neq i} q_j - c = 0, \tag{1}$$

Onde $a > 0$ é um parâmetro proveniente da demanda de mercado e $c > 0$ é uma medida de custo da firma. Note que a e c são iguais para todas as firmas, assim como a forma funcional da equação (1). Sabendo que, em equilíbrio, todas as firmas comportam-se otimamente, encontre as quantidades produzidas, $q_1, ..., q_n$, via regra de Cramer.

3. (3,0 pontos) Se $\{v1, v2, v3\}$ formam um conjunto de vetores linearmente independentes, então as diferenças $u_1 = v_2 - v_3, u_2 = v_1 - v_3$ e $u_3 = v_1 - v_2$ são linearmente dependentes ou linearmente independentes? Prove.