Resolução P1

Prova_01_2018.Diurno

3. (1,5 ponto) Seja uma economia habitada por N indivíduos, indexados por $i = 1, \dots, N$. Nesta economia existem três bens, cujos preços são p_1, p_2 e p_3. O indivíduo $i \in \{1, \dots, N\}$ possui dotação (exógena) e_l^i do bem $l \in \{1, 2, 3\}$. A demanda do indivíduo i pelo bem l é dada por:

$$x_l^i = \frac{p_1 e_1^i + p_2 e_2^i + p_3 e_3^i}{p_1 + p_2 + p_3}$$

O mercado do bem l está em equilíbrio quando a sua demanda é igual à sua oferta, ou seja:

$$\sum_{i=1}^{N} x_l^i = \sum_{i=1}^{N} e_l^i \equiv e_l$$

Com base nessas informações, e tendo em mente que os sobrescritos acima são índices ao invés de expoentes, responda:

- **(a) (1,0 ponto) Existe um vetor de preços $p = (p_1, p_2, p_3)$ que equilibra todos os mercados simultaneamente? Caso esse vetor exista, ele é único? Explique.**

O equilíbrio no mercado do bem $l = 1, 2, 3$ é determinado pela igualdade entre a demanda e a oferta desse bem. Ou seja:

$$\sum_{i=1}^{N} \frac{p_1 e_1^i + p_2 e_2^i + p_3 e_3^i}{p_1 + p_2 + p_3} = \sum_{i=1}^{N} e_l^i$$

Expandindo o somatório, temos que

$$\frac{1}{p_1 + p_2 + p_3} \left(p_1 \sum_{i=1}^{N} e_1^i + p_2 \sum_{i=1}^{N} e_2^i + p_3 \sum_{i=1}^{N} e_3^i \right) = \sum_{i=1}^{N} e_l^i$$

Aplicando a notação proposta, $\sum_{i=1}^{N} e_l^i \equiv e_l$, encontramos que

$$\frac{1}{p_1 + p_2 + p_3} (p_1 e_1 + p_2 e_2 + p_3 e_3) = e_l$$

Reorganizando os termos da equação acima

$$p_1 e_1 + p_2 e_2 + p_3 e_3 - (p_1 + p_2 + p_3) e_l = 0$$

Aplicando a equação acima para os três mercados chegamos no seguinte sistema de equações lineares:

$$\cancel{p_1e_1} + p_2e_2 + p_3e_3 - \cancel{p_1e_1} - p_2e_1 - p_3e_1 = 0$$
$$p_1e_1 + \cancel{p_2e_2} + p_3e_3 - p_1e_2 - \cancel{p_2e_2} - p_3e_2 = 0$$
$$p_1e_1 + p_2e_2 + \cancel{p_3e_3} - p_1e_3 - p_2e_3 - \cancel{p_3e_3} = 0$$

$$p_2(e_2 - e_1) + p_3(e_3 - e_1) = 0$$
$$p_1(e_1 - e_2) + p_3(e_3 - e_2) = 0$$
$$p_1(e_1 - e_3) + p_2(e_2 - e_3) = 0$$

Esse é um sistema homogêneo e, portanto, admite a solução trivial, $p = (p1, p2, p3) = (0, 0, 0)$. Entretanto, existem dois problemas com essa solução. Primeiro, se $p_l = 0$, a demanda por esse bem não está definida. Segundo, preços iguais a zero significa que não há escassez, o que evidentemente não descreve a realidade em que vivemos. Precisamos então analisar se o modelo admite outras soluções. Para descobrir se a solução desse sistema é única, precisamos encontrar o posto da sua matriz de coeficientes. Para isso, uma alternativa é escaloná-la. A matriz de coeficientes é

$$A = \begin{bmatrix} 0 & (e_2 - e_1) & (e_3 - e_1) \\ (e_1 - e_2) & 0 & (e_3 - e_2) \\ (e_1 - e_3) & (e_2 - e_3) & 0 \end{bmatrix}$$

Chamemos $e_1 - e_2 = X, e_1 - e_3 = Y$ e $e_2 - e_3 = Z$. Então

$$A = \begin{bmatrix} 0 & -X & -Y \\ X & 0 & -Z \\ Y & Z & 0 \end{bmatrix}$$

Trocando a primeira linha pela terceira

$$A^* = \begin{bmatrix} Y & Z & 0 \\ X & 0 & -Z \\ 0 & -X & -Y \end{bmatrix}$$

Multiplicando a primeira linha por $\frac{-X}{Y}$ e somando a segunda.

$$A_1^* = \begin{bmatrix} Y & Z & 0 \\ 0 & \frac{-XZ}{Y} & -Z \\ 0 & -X & -Y \end{bmatrix}$$

Multiplicando a segunda linha por $\frac{-Y}{Z}$ e somando a terceira.

$$B = \begin{bmatrix} Y & Z & 0 \\ 0 & \frac{-XZ}{Y} & -Z \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

A última linha da matriz B, que é a forma escalonada por linha de A, é composta apenas por zeros. Sendo assim, $rank(A) = 2 < ncol(A)$. Isso significa que p_3 é variável livre, já que não existe pivô na terceira coluna de B. Nessas condições, concluímos que o sistema possui infinitas soluções, ou seja, existem infinitos vetores de preços que equilibram os três mercados simultaneamente.

Como o lado direito de todas as equações do sistema são iguais a zero, sabemos que a matriz aumentada de B é possui a coluna toda composta de zeros. Portanto, não há qualquer contradição.

- **(0,5 ponto) Que restrição deve ser imposta sobre as dotações iniciais totais (e_1, e_2, e_3) para que exista um equilíbrio em que $p_1 = p_2 = p_3 > 0$?**

Vamos acrescentar mais uma equação no sistema de forma que $p_1 = p_2 = p_3 > 0$, ou seja, $p_1 - p_2 - p_3 = b$, sendo $b < 0$

$$\begin{gathered}
p_2(e_2 - e_1) + p_3(e_3 - e_1) = 0 \\
p_1(e_1 - e_2) + p_3(e_3 - e_2) = 0 \\
p_1(e_1 - e_3) + p_2(e_2 - e_3) = 0 \\
p_1 - p_2 - p_3 = b
\end{gathered}$$

Chamemos $e_1 - e_2 = X, e_1 - e_3 = Y$ e $e_2 - e_3 = Z$ e A a matriz de coeficientes

$$A = \begin{bmatrix} 0 & -X & -Y & | & 0 \\ X & 0 & -Z & | & 0 \\ Y & Z & 0 & | & 0 \\ 1 & -1 & -1 & | & b \end{bmatrix}$$

Vamos trocar a primeira linha pela última

$$A^* = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 & | & b \\ X & 0 & -Z & | & 0 \\ Y & Z & 0 & | & 0 \\ 0 & -X & -Y & | & 0 \end{bmatrix}$$

Multiplicando a primeira linha por $-X$ e somando a segunda, multiplicando a primeira linha por$-Y$ e somando a terceira, obtemos

$$A_1^* = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 & | & b \\ 0 & X & -XZ & | & -Xb \\ 0 & YZ & Y & | & -Yb \\ 0 & -X & -Y & | & 0 \end{bmatrix}$$

Multiplicando a segunda por $\frac{-YZ}{X}$ e somando a terceira linha, somando a segunda a quarta linha, temos

$$A_2^* = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 & | & b \\ 0 & X & -XZ & | & -Xb \\ 0 & 0 & YZZ + Y & | & Yb(Z-1) \\ 0 & 0 & XYZ & | & -Xb \end{bmatrix}$$

Multiplicando a terceira linha por $-\frac{XYZ}{YZZ+Y}$ e somando a última

$$B = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 & | & b \\ 0 & X & -Z(X) & | & -Xb \\ 0 & 0 & YZZ + Y & | & Yb(Z-1) \\ 0 & 0 & 0 & | & Yb(Z-1) \cdot -\frac{XYZ}{YZZ+Y} - Xb \end{bmatrix}$$