Resolução P2

Prova_02 - 2023.1

1

Se $\{\mathbf{v_1}, \mathbf{v_2}, \mathbf{v_3}\}$ formam um conjunto de vetores linearmente independentes, então as diferenças $\mathbf{u_1} = \mathbf{v_2} - \mathbf{v_3}, \mathbf{u_2} = \mathbf{v_1} - \mathbf{v_3}$ e $\mathbf{u_3} = \mathbf{v_1} - \mathbf{v_2}$ são linearmente dependentes ou linearmente independentes? Prove.

Resposta

Se os vetores $\mathbf{u_1}, \mathbf{u_2}$ e $\mathbf{u_3}$ forem dependentes, então existe algum c_i, $i = 1, 2, 3$, diferente de zero tal que:

$$c_1\mathbf{u_1} + c_2\mathbf{u_2} + c_2\mathbf{u_3} = 0 \tag{1}$$

Caso contrário, os vetores serão independentes. Vamos substituir os valores dos vetores na equação (1) e reoganizar os termos

$$\begin{aligned}
c_1(\mathbf{v_2} - \mathbf{v_3}) + c_2(\mathbf{v_1} - \mathbf{v_3}) + c_3(\mathbf{v_1} - \mathbf{v_2}) &= 0 && (2)\\
c_1\mathbf{v_2} - c_1\mathbf{v_3} + c_2\mathbf{v_1} - c_2\mathbf{v_3} + c_3\mathbf{v_1} - c_3\mathbf{v_2} &= 0 && (3)\\
\mathbf{v_1}(c_2 + c_3) + \mathbf{v_2}(c_1 - c_3) - \mathbf{v_3}(c_1 + c_2) &= 0 && (4)
\end{aligned}$$

Sabemos pelo exercício que $\mathbf{v_1}, \mathbf{v_2}, \mathbf{v_3}$ são L.I., portanto, para que a equação (4) tenha solução

$$\begin{cases} c_2 + c_3 & = 0 \\ c_1 - c_3 & = 0 \\ c_1 + c_2 & = 0 \end{cases}$$

Vamos escrever os coeficientes desse sistema numa matriz A. Se o $det(A) \neq 0$, então os vetores $\mathbf{u_1}, \mathbf{u_2}, \mathbf{u_3}$ serão independentes.

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \rightarrow \ det(A) = -1 + 1 = 0$$

Temos que o $det(A) = 0$, portanto, os vetores são L.D.

2

Considere o modelo $IS - LM$ abaixo:

- Equilíbrio no mercado de bens e serviços: $Y = C + I + G$;
- Consumo: $C = \alpha + \beta(Y - T + T_r) - \gamma i, \quad 0 < \beta < 1$;
- Tributação: $T = \eta Y, \quad 0 < \eta < 1$;
- Transferências: $T_r = \theta Y, \quad 0 < \theta < \eta$;
- Investimento: $I = \mu Y - \phi i$;
- Equilíbrio no mercado monetário: $M_s = \rho Y - \lambda i$;
- Todos os parâmetros são estritamente positivos.

(a)

Use a regra de Cramer para encontrar o produto Y^* e a taxa de juros i^* que equilibram a economia.

Resposta

Vamos escrever as equações dos dois mercados ($IS - LM$) em um sistema de equações

$$\begin{cases} Y = \alpha + \beta(Y - \eta Y + \theta Y) + \mu Y - \phi i + G \\ M_s = \rho Y - \lambda i \end{cases}$$

Vamos isolar Y e i em ambas as equações

$$\begin{cases} (1 - \beta(1 + \eta - \theta) - \mu)Y + (\phi)i = \alpha + \beta(T_r - T) + G & (f_1) \\ (\rho)Y + (\lambda)i = M^s & (f_2) \end{cases}$$

Escrevendo o sistema na forma matricial, encontramos que:

$$\begin{bmatrix} (1 - \beta(1 + \eta - \theta) - \mu) & \phi \\ \rho & \lambda \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Y \\ i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha + G \\ M^s \end{bmatrix}$$

Aplicando a regra de Cramer:

$$Y^* = \frac{\begin{vmatrix} \alpha + G & \phi \\ M^s & \lambda \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} (1 - \beta(1 + \eta - \theta) - \mu) & \phi \\ \rho & \lambda \end{vmatrix}} = \frac{\lambda[\alpha + G] - M^s G}{\lambda(1 - \beta(1 + \eta - \theta) - \mu) - \rho\phi}$$

$$i^* = \frac{\begin{vmatrix} (1 - \beta(1 + \eta - \theta) - \mu) & \alpha + G \\ \rho & M^s \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} (1 - \beta(1 + \eta - \theta) - \mu) & \phi \\ \rho & \lambda \end{vmatrix}} = \frac{M^s(1 - \beta(1 + \eta - \theta) - \mu) - \rho(\alpha + G)}{\lambda(1 - \beta(1 + \eta - \theta) - \mu) - \rho\phi}$$

(b)

Mostre como um aumento em M_s impacta Y^* e i^*

Resposta

Tudo mais constante, um aumento de M^s impacta positivamente tanto o produto quanto a taxa de juros de equilíbrio.

(c)

Mostre como um aumento em θ impacta Y^* e i^*

3

Considere um mercado com duas firmas: 1 e 2. Suponha que a demanda pelo bem produzido pela firma 1 seja dada por

$$q_1(p_1, m, p_2) = f(p_1, m) + bp_2$$

onde q_1 é a quantidade demandada pelo bem da firma 1, p_1 é o preço cobrado pela firma 1, m é o gasto com marketing da firma 1 e $p_2 > 0$ é o preço do bem produzido pela firma 2. A função f é duas vezes continuamente diferenciável e o coeficiente $b > 0$ mede o grau de substitutibilidade entre os bens das duas firmas. O custo da firma 1 é dado por $c(q_1, m) = cq_1 + m$, onde $c > 0$. Assim, o lucro da firma 1 é

$$\pi(p_1, m, p_2) = (p_1 - c)[f(p_1, m) + bp_2] - m$$

A firma 1 escolhe o seu preço, p_1, e o seu gasto com marketing, m, de forma a maximizar o seu lucro. Admita que

$$\frac{\partial f(p_1, m)}{\partial p_1} < 0, \quad \frac{\partial^2 f(p_1, m)}{\partial p_1^2} < 0 \quad \text{e} \quad \frac{\partial f(p_1, m)}{\partial m} > 0$$

Com base nessas informações, responda os itens a seguir.

(a)

Assumindo solução interior $p_1^* > 0$ e $m^* > 0$ encontre as condições de primeira ordem para maximização de lucro da firma 1. Com base no que você encontrou, determine o sinal (positivo ou negativo) de $p_1^* - c$ e de $q_1(p_1^*, m, p_2)$

Resposta

O lucro da firma 1 é dado por $\pi(p_1, m, p_2) = (p_1 - c)[f(p_1, m) + bp_2] - m$, sendo que ela pode determinar apenas p_1 e m. Vamos calcular as condições de primeira ordem:

$$\frac{\partial \pi}{\partial p_1} = 0 \qquad \frac{\partial \pi}{\partial m} = 0$$

$$f(p_1, m) + bp_2 + (p_1 - c)\left(\frac{\partial f(p_1, m)}{\partial p_1}\right) = 0 \quad (1) \qquad (p_1 - c)\left(\frac{\partial f(p_1, m)}{\partial m}\right) - 1 = 0 \quad (2)$$

Isolando $(p_1 - c)$ em (2) obtemos:

$$(p_1^* - c) = \frac{1}{\frac{\partial f(p_1, m)}{\partial m}}$$

Foi dado pelo enunciado que $\frac{\partial f(p_1, m)}{\partial m} > 0$, logo o denominador é positivo e $(p_1^* - c)$ é positivo.

Sabemos que $q_1(p_1, m, p_2) = f(p_1, m) + bp_2$. Vamos substituir em (1) e isolar q_1

$$q_1^* = -\underbrace{(p_1^* - c)}_{> 0}\underbrace{\left(\frac{\partial f(p_1, m)}{\partial p_1}\right)}_{< 0}$$

Avaliando no ponto crítico, q_1 também é positivo.

(b)

Encontre as condições suficientes de segunda ordem para que (p_1^*, m^*) que resolve o item anterior constitua um ponto de máximo local estrito. Qual condição deve ser imposta sobre $\frac{\partial^2 f(p_1^*, m^*)}{\partial m^2}$?

Resposta

Vamos calcular as condições de segunda ordem:

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial^2 \pi}{\partial p_1} &= 2\frac{\partial f(p_1, m)}{\partial p_1} + \frac{\partial^2 f(p_1, m)}{\partial p_1^2}(p_1 - c) \\
\frac{\partial^2 \pi}{\partial m} &= \frac{\partial^2 f(p_1, m)}{\partial m^2}(p_1 - c) \\
\frac{\partial^2 \pi}{\partial m \partial p_1} &= \frac{\partial^2 f(p_1, m)}{\partial m} + \frac{\partial^2 f(p_1, m)}{\partial p_1 \partial m}(p_1 - c)
\end{aligned}
$$

Montando o hessiano

$$
\mathbf{H} = \begin{bmatrix} 2\frac{\partial f(p_1,m)}{\partial p_1} + \frac{\partial^2 f(p_1,m)}{\partial p_1^2}(p_1 - c) & \frac{\partial^2 f(p_1,m)}{\partial m} + \frac{\partial^2 f(p_1,m)}{\partial p_1 \partial m}(p_1 - c) \\ \frac{\partial^2 f(p_1,m)}{\partial m} + \frac{\partial^2 f(p_1,m)}{\partial m \partial p_1}(p_1 - c) & \frac{\partial^2 f(p_1,m)}{\partial m^2}(p_1 - c) \end{bmatrix}
$$

Para que as CSO constituam um ponto de máximo local estrito, é necessário que $\mathbf{H}$ seja negativo definido. Então

$$
2\frac{\partial f(p_1, m)}{\partial p_1} + \frac{\partial^2 f(p_1, m)}{\partial p_1^2}(p_1 - c) < 0
$$

E o $det(\mathbf{H}) > 0$

4

Considere o problema de maximizar $u(x,y) = (\sqrt{x} + \sqrt{y})^2$ sujeito a restrição $x + 3y = z$ pelo método de Lagrange.

(a)

Mostre que a qualificação de restrição é satisfeita.

Resposta

Se o gradiente ∇ da restrição for diferente do vetor $(0,0)$ então a restrição será satisfeita.

$$\nabla h(x,y) = (1,3) \neq (0,0)$$

(b)

Encontre o candidato a solução do problema, ou seja, a solução para as condições de primeira ordem.

Resposta

Montando o Lagrangeano:

$$\mathcal{L} = (\sqrt{x} + \sqrt{y})^2 - \lambda[x + 3y - z]$$

Calculando CPO:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x} = \frac{2(\sqrt{x} + \sqrt{y})}{2\sqrt{x}} - \lambda = 0 \tag{5}$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial y} = \frac{2(\sqrt{x} + \sqrt{y})}{2\sqrt{y}} - 3\lambda = 0 \tag{6}$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \lambda} = -(x + 3y = z) = 0 \tag{7}$$

Pelas equações (5) e (6) temos que:

$$\frac{(\sqrt{x} + \sqrt{y})}{\sqrt{x}} = \frac{(\sqrt{x} + \sqrt{y})}{3\sqrt{y}} \tag{8}$$

$$\sqrt{x} = 3\sqrt{y} \tag{9}$$

$$x = 9y \tag{10}$$

Subsituindo (10) em $z = x + 3y$, depois substituindo y em (10), obtemos:

$$y^* = \frac{z}{12} \qquad x^* = \frac{3z}{4}$$

(c)

Qual o impacto de um aumento marginal em z sobre o valor de $u(x^*, y^*)$? Qual a relação desse impacto com o multiplicador de Lagrange?

Resposta

Vamos substituir os valores de x^*, y^* encontrados na função utilidade:

$$
\begin{aligned}
u(x^*, y^*) &= (\sqrt{x^*} + \sqrt{y^*})^2 \\
&= \left(\sqrt{\frac{3z}{4}} + \sqrt{\frac{z}{12}}\right)^2 \\
&= \left(\sqrt{\frac{9z}{12}} + \sqrt{\frac{z}{12}}\right)^2 \\
&= \left(\frac{\sqrt{9z} + \sqrt{z}}{\sqrt{12}}\right)^2 \\
&= \left(\frac{3\sqrt{z} + \sqrt{z}}{\sqrt{12}}\right)^2 \\
&= \left(\frac{4\sqrt{z}}{\sqrt{12}}\right)^2 \\
&= \frac{16z}{12} \\
\frac{\partial u}{\partial z} &= \frac{4}{3}
\end{aligned}
$$

O multiplicador mede justamente o impacto marginal da restrição sobre a função valor. Resolvendo λ para os valores encontrados, temos que:

$$\lambda = \frac{4}{3}$$