Resolução P1

Prova_01 - 2022.Noturno

1. (3,0 pontos) Dê um exemplo de matriz de coeficientes, A, com pelo menos 2 linhas e 2 colunas, tal que o sistema de equações lineares $Ax = b$ tenha:

(a) 0,75 ponto) 0 ou 1 solução, dependendo de b.

Para que o sistema de equações não apresente solução o $rank(A) < nlin(A)$, ou seja, quando a matriz for escalonada pelo alguma linha será composta toda de zeros. E para que o sistema apresente exatamente uma solução, o $rank(A) = ncol(A)$, isso implica que, quando houver solução ela será única pois não haverá variável livre no sistema. Um exemplo de matriz para este caso é:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$$

Escalonando essa matriz, nós teremos um $rank(A) = 2$, que é menor que o número de linhas e igual ao número de colunas.

$$A_{escalonada} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

(b) (0,75 ponto) infinitas soluções, independentemente de b.

Se o $rank(A) = nlin$ e o $rank(A) < ncol(A)$, garantiremos que sempre haverá solução $\forall b$, pois após o escalonamento não haverá nenhuma linha toda de zeros na matriz A e existirá pelo menos uma variável livre no sistema. Uma sugestão de matriz é:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$$

Escalonando essa matriz, nós teremos um $rank(A) = 2$, que é igual ao número de linhas mas menor que número de colunas.

$$A_{escalonada} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

(c) (0,75 ponto) 0 ou infinitas soluções, dependendo de b.

Se o $rank(A) < ncol(A)$, então existe variável livre e, portanto, quando houver solução, existem infinitas soluções. E, se o $rank(A) < nlin(A)$, existe alguma linha k da matriz A tal que $0 \cdot x_1 + 0 \cdot x_2 + \cdots + 0 \cdot x_n = b_k$ para o qual não existe solução.

Uma sugestão de matriz é:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \end{bmatrix}$$

Escalonando essa matriz, nós teremos um $rank(A) = 1$, que é menor queo número de linhas e menor que número de colunas.

$$A_{escalonada} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

(d) (0,75 ponto) 1 solução, independentemente de b.

Dado que uma matriz não-singular possui solução única e, o determinante de uma matriz não-singular (matriz quadrada cujo posto é igual ao número de linhas e de colunas), é sempre diferente de zero, basta encontrarmos uma matriz não-singular, abaixo uma sugestão:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$$

De tal modo que o $det(A) \neq 0$

$$det(A) = (1 \cdot 4) - (2 \cdot 3) \neq 0$$

2. (2,5 pontos) Sejam os vetores $u = (1, 0, -2), v = (1, 3, 1)$ e $w = (-1, 1, 1)$ e considere as seguintes matrizes:

$$U = \begin{bmatrix} x & 1 & 2 \\ 0 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{bmatrix}, V = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & y & 1 \\ 1 & 3 & 2 \end{bmatrix}, W = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 1 \\ 2 & 0 & z \end{bmatrix},$$

Utilizando a regra de Cramer, determine x, y e z de forma que os vetores $\tilde{u} = Uu, \tilde{v} = Vv$ e $\tilde{w} = Ww$ sejam ortogonais. Encontre os vetores unitários correspondentes para $\tilde{u}, \tilde{v}$ e $\tilde{w}$.

3. (2,5 pontos) Seja A uma matriz de tamanho $n \times n$. Suponha que a soma dos elementos de cada linha seja igual a 1 ($\sum_{j=1}^{n} a_{ij} = 1$, para todo $i = 1, 2, \dots, n$). Qual é $det(A - I)$? Justifique.

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}, \quad I = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix}$$

Primeiro, vamos calcular o resultado de $A - I$. Como os únicos elementos diferente de zero da matriz identidade estão na diagonal principal $a_{11}, a_{22}, \dots, a_{nn}$, a soma de A com $-I$, alterará apenas os elementos da diagonal principal de A, que serão subtraídos de 1

$$A - I = \begin{bmatrix} a_{11} - 1 & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} - 1 & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} - 1 \end{bmatrix}$$

Agora, vamos escalonar essa matriz $A - I$ por colunas. Iremos somar à última coluna, todas as demais colunas, ou seja,

$$\underbrace{a_{in}}_{ultima\ coluna} + \underbrace{\textstyle\sum_{j=1}^{n-1} a_{ij}}_{demais\ colunas}, \ \forall i \in (1, 2, \dots, n)$$

Através desse escalonamento, chegamos na seguinte matriz

$$A - I = \begin{bmatrix} a_{11} - 1 & a_{12} & \cdots & a_{11} + a_{12} + \cdots + a_{1n} - 1 \\ a_{21} & a_{22} - 1 & \cdots & a_{11} + a_{12} + \cdots + a_{2n} - 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{n1} + a_{n2} + \cdots + a_{nn} - 1 \end{bmatrix}$$

Pelo enunciado, sabemos que $\sum_{j=1}^{n} a_{ij} = 1, \forall\ i = 1, 2, \dots, n$, então a última coluna dessa matriz será composta toda de zeros e, o $det(A - I) = 0$.

4. (2,0 pontos) Sejam β e b dois vetores no $\mathbb{R}^k$. Sejam y e ϵ dois vetores no $\mathbb{R}^n$. Finalmente, seja X uma matriz $n \times k$. Sendo $b = (X^T X)^{-1} X^T y$ e $y = X\beta + \epsilon$, mostre que $b - \beta = (X^T X)^{-1} X^T \epsilon$.

$$b = (X^T X)^{-1} X^T y$$

Substituindo y em b, temos

$$b = (X^T X)^{-1} X^T (X\beta + \epsilon)$$

Aplicando a distributiva

$$b = (X^T X)^{-1} X^T \cdot X\beta + (X^T X)^{-1} X^T \cdot \epsilon$$

Podemos aplicar a propriedade $(AB)^{-1} = B^{-1} A^{-1}$

$$b = X^{-1} (X^T)^{-1} X^T \cdot X\beta + (X^T X)^{-1} X^T \cdot \epsilon$$

Sabemos que $A^{-1} A = I$ e que $AI = A$, então

$$b = X^{-1} \underbrace{(X^T)^{-1} X^T}_{I} X\beta + (X^T X)^{-1} X^T \cdot \epsilon$$

$$b = X^{-1} I X\beta + (X^T X)^{-1} X^T \cdot \epsilon$$
$$b = X^{-1} X\beta + (X^T X)^{-1} X^T \cdot \epsilon$$
$$b = I\beta + (X^T X)^{-1} X^T \cdot \epsilon$$

Agora vamos somar $-\beta$ aos dois lados da equação

$$b - \beta = \beta - \beta + (X^T X)^{-1} X^T \cdot \epsilon$$
$$b = (X^T X)^{-1} X^T \cdot \epsilon$$