# Resolução P1

## Prova_01_2023.1_Substitutiva

**3. (2,0 pontos) Seja $A$ a seguinte matriz $n \times n$:**

$$A = \begin{bmatrix} \lambda & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & \lambda & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & \cdots & \lambda \end{bmatrix}$$

**Mostre que, se $\lambda = 1 - n$, então $det(A) = 0$.**

Vamos substituir $\lambda$ por $(1 - n)$ na matriz $A$

$$A = \begin{bmatrix} (1-n) & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & (1-n) & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & \cdots & (1-n) \end{bmatrix}$$

Observe que os elementos fora da diagonal são todos iguais, ou seja, $\forall\ i \neq j$, $a_{ij} = a_{ij}$. Observe também que o elementos da diagonal principal são iguais entre si, sempre que $i = j$, $a_{ij} = (1 - n)$. Vamos escalonar essa matriz somando à primeira linha todas as demais linhas da matriz. Como os elementos de cada coluna são iguais a 1, iremos somar à primeira $1 \cdot (n - 1)$, pois só existe um elemento em cada coluna diferente de 1, o que implica que na soma a primeira linha, a soma será feita $(n - 1)$ vezes

$$A_1 = \begin{bmatrix} \cancel{(1-n)+(n-1)} & \cancel{(1-n)+(n-1)} & \cdots & \cancel{(1-n)+(n-1)} \\ 1 & (1-n) & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & \cdots & (1-n) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & (1-n) & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & \cdots & (1-n) \end{bmatrix}$$

Observe que os elementos da primeira linha se anulam, e pelas propriedades das matrizes, sabemos que se uma linha ou coluna é toda composta de zeros, então o $det(A) = 0$.