Resolução P1

Prova_01 - 2023.2.Substitutiva

1. (3,0 pontos) As seguintes seis matrizes são matrizes de coeficientes de sistemas de equações lineares. Para cada matriz, atribua um valor para x e um valor para y (quando houver y) de forma que o conjunto de soluções do sistema de equações lineares correspondente tenha as propriedades especificadas. Justifique suas respostas.

- **(a) (0,5 ponto)** $\begin{bmatrix} 3 & 2 \\ x & 1 \end{bmatrix}$ **1 única solução para qualquer** $b \equiv (b_1, b_2)$**.**

Para que o sistema tenha uma única solução para qualquer vetor de termos independentes b, a matriz dos coeficientes deve ser uma matriz quadrada e ter determinante não nulo. Isso garante a existência e a unicidade da solução.

Neste caso, a matriz é quadrada, pois tem dimensões 2x2, e para que o determinante seja não nulo, é necessário que:

$$\begin{bmatrix} 3 & 2 \\ x & 1 \end{bmatrix} = (3 \cdot 1) - (2 \cdot x) \neq 0$$

Para que o determinante seja sempre não nulo, é necessário que $3 - 2x \neq 0$. Portanto, podemos encontrar um valor para x que satisfaça isso:

$$x \neq \frac{3}{2}$$

Então, $\forall x \neq \frac{3}{2}$, a matriz terá uma única solução para qualquer b.

- **(b) (0,5 ponto)** $\begin{bmatrix} 1 & x \\ 2 & 1 \\ 3 & y \end{bmatrix}$ **0 ou infinitas soluções a depender de** $b \equiv (b_1, b_2, b_3)$**.**

Se o $rank(B) < ncol(B)$, existe variável livre no sistema e portanto, caso exista solução, existem infinitas soluções.

Se o $rank(B) < nlin(B)$, existe algum b da matriz aumentada $\hat{B}$, tal que, $0 \cdot w_1 + 0 \cdot w_2 \neq 0$ para o qual não existe solução.

Para que obedeça os requisitos é preciso que o $rank(B) = 1$, ou seja, após o escalonamento a segunda e a terceira linha precisam estar zeradas. Multiplicando a primeira linha por -2 e -3 e, somando a segunda e terceira linhas, respectivamente, obtemos

$$\begin{bmatrix} 1 & x \\ 2 & 1 \\ 3 & y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & x \\ 0 & -2x + 1 = 0 \\ 0 & -3x + y = 0 \end{bmatrix}$$

Para satisfazer as condições, temos que $x = \frac{1}{2},\ y = \frac{3}{2}$

- **(c) (0,5 ponto)** $\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \\ 2 & x \end{bmatrix}$ **0 ou 1 solução a depender de $b \equiv (b_1, b_2, b_3)$.**

Se o $rank(C) = ncol(C)$ então não existe variável livre, caso haja solução, ela será única.

Se o $rank(B) < nlin(B)$, existe algum b da matriz aumentada $\hat{B}$, tal que, $0 \cdot w_1 + 0 \cdot w_2 \neq 0$ para o qual não existe solução.

Para que os requisitos sejam obedecidos, o $rank(C) = 2$, então após o escalonamento a terceira linha ficará toda zerada.

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \\ 2 & x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & \frac{5}{2} \\ 0 & -1 + x = 0 \end{bmatrix}$$

Portanto, para que o sistema possua 0 ou 1 solução, $x = 1$.

- **(d) (0,5 ponto)** $\begin{bmatrix} 1 & 3 & x \\ 4 & y & 1 \end{bmatrix}$ **infinitas soluções para qualquer $b \equiv (b_1, b_2)$.**

Se o $rank(D) < ncol(D)$, então existe pelo menos variável livre no sistema, ou seja, quando houver soluções, existirá infinitas soluções.

Se o $rank(D) = nlin(D)$, então existe solução para qualquer b.

Seguindo esses dois requisitos, após o escalonamento, a segunda linha da matriz precisa ter um pivo na segunda coluna. Multiplicando a primeira linha por -4 e somando a segunda linha obtemos

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & x \\ 4 & y & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 3 & x \\ 0 & -12 + y \neq 0 & 4x + 1 \end{bmatrix}$$

Ou seja, $y \neq 12$ e x pode assumir qualquer valor.

- **(e) (0,5 ponto)** $\begin{bmatrix} x & 4 & 3 \\ 4 & y & 2 \end{bmatrix}$ **0 ou infinitas soluções a depender $b \equiv (b_1, b_2)$.**

Se o $rank(E) < ncol(E)$, então existe pelo menos variável livre no sistema, ou seja, quando houver soluções, existirá infinitas soluções.

Se o $rank(E) < nlin(E)$, existe algum b da matriz aumentada $\hat{E}$, tal que, $0 \cdot w_1 + 0 \cdot w_2 \neq 0$ para o qual não existe solução.

Obedecendo as restrições postas, a segunda linha da matriz ficará toda zerada. Para isso, Multiplicamos a primeira linha por $-\frac{2}{3}$

$$\begin{bmatrix} x & 4 & 3 \\ 4 & y & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x & 4 & 3 \\ -\frac{2}{3}x + 4 = 0 & -\frac{8}{3} + y = 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Portanto, $x = 6, \ y = \frac{8}{3}$

- **(f) (0,5 ponto)** $\begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 0 & x & 4 \\ 1 & 4 & 3 \end{bmatrix}$ **0 ou infinitas soluções a depender $b \equiv (b_1, b_2, b_3)$.**

Se o $rank(F) < ncol(F)$ então existe pelo menos variável livre no sistema, ou seja, quando houver soluções, existirá infinitas soluções.

Se o $rank(F) < nlin(F)$, existe algum b da matriz aumentada $\hat{F}$, tal que, $0 \cdot w_1 + 0 \cdot w_2 + 0 \cdot w_3 \neq 0$ para o qual não existe solução.

Nesse caso, precisamos que a terceira linha fique toda zerada, e a segunda linha tenha um pivô na segunda coluna. Multiplicando a primeira linha por $-\frac{1}{3}$ e somando à terceira linha. Depois, obtendo o resultado para teceira linha, multiplicamos a segunda linha por $-\frac{2}{3}$, obtemos

$$\begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 0 & x & 4 \\ 1 & 4 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 0 & x & 4 \\ 0 & \frac{10}{3} & \frac{8}{3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 0 & x & 4 \\ 0 & -\frac{2}{3}x + \frac{10}{3} = 0 & 0 \end{bmatrix}$$

2. (3,0 pontos) Prove que:

- **(a) (1,0 ponto)** $det(S^{-1}AS) = det(A)$**.**

Primeiro, lembre-se de que o determinante de um produto de matrizes é igual ao produto dos determinantes das matrizes individuais. Portanto, podemos escrever:

$$\det(S^{-1}AS) = \det(A)\det(S^{-1}S) \tag{1}$$

Sabemos que $SS^{-1} = I$, e que $det(I) = 1$, então $det(S^{-1}S) = det(I) = 1$. Substituindo em (1)

$$det(S^{-1}AS) = det(S^{-1}S)det(A) = 1 \cdot det(A) = det(A)$$

- **(b) (1,0 ponto) Se M é uma matriz quadrada idempotente invertível, então M é a matriz identidade.**

Se M é idempotente, então $M^n = M$. Vamos pré-multiplicar por M^{-1} ambos os lados da igualdade $M^n = M$

$$M^n = M$$
$$M^n M^{-1} = MM^{-1}$$
$$M^{n-1}(MM^{-1}) = MM^{-1}$$

Como sabemos , que M é invertível, então existe uma única inversa M^{-1}, tal que $M^{-1}M = I = MM^{-1}$, então

$$M^{n-1}I = I$$

Sabemos que $IA = A = AI$. E, observando que $M^{n-1} = M^n = M$, temos

$$M^{n-1}I = I$$
$$MI = I$$
$$M = I$$

- **(c) (1,0 ponto) Sejam A e B duas matrizes $n \times n$. Se $AB = -BA$, então $det(A)det(B) \neq -det(B)det(A)$ para n par**

Sabemos que $det(AB) = det(A)det(B)$, e que $det(rA) = r^n det(A)$, pelo enunciado $r = -1$. Então

$$\begin{gathered} AB = -BA \\ det(AB) = det((-1)BA) \\ det(AB) = (-1)^n det(BA) \\ det(A)det(B) = (-1)^n det(B)det(A) \end{gathered}$$

Quando n é par, $det(A)det(B) = det(B)det(A)$, isso é sempre válido. Portanto, a igualdade $\det(A)\det(B) = (-1)^n \det(B)\det(A)$ é sempre verdadeira quando n é par, e isso implica que $\det(A)\det(B) \neq -\det(B)\det(A)$, uma vez que $-1^n = 1$ para n par.

3. (2,0 pontos) Seja $A = VBV^{-1}$. Encontre uma expressão para A^n, onde n. é um número inteiro positivo.

$$\begin{aligned} A &= VBV^{-1} \\ A^n &= (VBV^{-1})^n \\ A^n &= (VBV^{-1})(VBV^{-1}) \ldots (VBV^{-1}) \\ A^n &= VBV^{-1} \cdot VBV^{-1} \ldots VBV^{-1} \end{aligned}$$

Como $V^{-1}V = I$, temos que

$$\begin{aligned} A^n &= VBI \cdot BI \cdot BI \ldots BV^{-1} \\ A^n &= VB \cdot B \cdot B \ldots V^{-1} \\ A^n &= VB^nV^{-1} \end{aligned}$$