Resolução P1

Prova_01_2019.Noturno

3. (2,0 pontos) Quando se analisa uma rede social, frequentemente se deseja calcular uma medida de centralidade (às vezes chamada de medida de prestígio) de cada indivíduo. Uma dessas medidas, proposta por Katz, estabelece que o prestígio do indivíduo i, denotado por p_i, é uma soma ponderada do prestígio das pessoas com quem esse indivíduo está conectado. Especificamente, $p_i = \sum_{j=1}^{n} g_{ij} p_j$, onde $0 < g_{ij} \leq 1$, se os indivíduos i e j estão conectados e $g_{ij} = 0$, caso contrário. Por convenção, $g_{ii} = 0$. Expresse matricialmente o problema de cálculo de $p = (p1, \ldots, p_n)$. Qual condição deve ser satisfeita para que exista $p \neq 0$?

Primeiro, vamos expressar o problema num sistema de equações. $p_i = \sum_{j=1}^{n} g_{ij} p_j$, então

$$\begin{gathered} p_1 = g_{11}p_1 + g_{12}p_2 + \cdots + g_{1n}p_n \\ p_2 = g_{21}p_1 + g_{22}p_2 + \cdots + g_{2n}p_n \\ \vdots \\ p_n = g_{n1}p_1 + g_{n2}p_2 + \cdots + g_{nn}p_n \end{gathered}$$

Como sabemos por convenção $g_{11} = g_{22} = \cdots = g_{nn}$, então

$$\begin{gathered} p_1 = \cancel{g_{11}p_1} + g_{12}p_2 + \cdots + g_{1n}p_n \\ p_2 = g_{21}p_1 + \cancel{g_{22}p_2} + \cdots + g_{2n}p_n \\ \vdots \\ p_n = g_{n1}p_1 + g_{n2}p_2 + \cdots + \cancel{g_{nn}p_n} \end{gathered}$$

Subtraindo ambos lados de cada equação por $p_1, p_2, \ldots, p_n$, respectivamente, obtemos

$$\begin{gathered} 0 = -p_1 + g_{12}p_2 + \cdots + g_{1n}p_n \\ 0 = g_{21}p_1 + -p_2 + \cdots + g_{2n}p_n \\ \vdots \\ 0 = g_{n1}p_1 + g_{n2}p_2 + \cdots + -p_n \end{gathered}$$

Vamos colocar as equações na forma matricial. Os p são as variáveis, e os g são os coeficientes

$$A = \begin{bmatrix} -1 & g_{12} & g_{13} & \cdots & g_{1n} \\ g_{21} & -1 & g_{23} & \cdots & g_{2n} \\ g_{31} & g_{32} & -1 & \cdots & g_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ g_{n1} & g_{n2} & g_{n3} & \cdots & -1 \end{bmatrix}$$

Para que $p \neq 0$, então $det(A) \neq 0$.

5. (1,0 ponto) Sejam A, B e C matrizes $n \times n$ tais que $C = ABA^{-1}$. Se C é idempotente, o que podemos dizer sobre B? Demonstre.

Dado que C é idempotente, então $C^n = C$. Vamos elevar ambos os lados da equação por n.

$$C^n = (ABA^{-1})^n$$

$$C \cdot C \cdots C = (ABA^{-1})(ABA^{-1}) \cdots (ABA^{-1})$$

$$C = AB\underbrace{A^{-1}A}_{I}BA^{-1} \cdots ABA^{-1}$$

$$C = A\underbrace{BI}_{B} \cdot \underbrace{BI}_{B} \cdot \underbrace{BI}_{B} \cdots BA^{-1}$$

$$C = AB^nA^{-1}$$

6. (Questão Bônus: 2,0 pontos) Seja I a matriz identidade $n \times n$ e U uma matriz $n \times n$ de uns, ou seja, todos os elementos são iguais a 1. Prove que $det(I + U) = n + 1$.

$$I + U = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 2 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & 2 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 2 \end{bmatrix}$$

Sabemos que o determinante de uma matriz triangular inferior é igual ao $\prod_{i=1}^{n} a_{ii}$, ou seja, o produtório dos elementos da diagonal principal. Chamemos de A a matriz da soma entre I e U. Vamos escalonar essa matriz de modo que ela se transforme numa matriz triangular inferior.

Multiplicando a primeira linha por $-\frac{1}{2}$ e somando as demais linhas, obtemos

$$A_1 = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & \frac{3}{2} & \frac{1}{2} & \cdots & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{3}{2} & \cdots & \frac{1}{2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \cdots & \frac{3}{2} \end{bmatrix}$$

Multiplicando a segunda linha por $-\frac{1}{3}$ e somando as demais linhas, obtemos

$$A_2 = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & \frac{3}{2} & \frac{1}{2} & \cdots & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & \frac{4}{3} & \cdots & \frac{1}{3} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} & \cdots & \frac{4}{3} \end{bmatrix}$$

Observe que conforme escalonamos as linhas, os elementos fora da diagonal principal podem ser descritos como $\frac{1}{i}$, e os elementos da diagonal princiapl como $\frac{i+1}{i}$, sendo i a i-ésima linha. Uma matriz 3×3, poderia ser descrita assim:

$$\begin{bmatrix} \frac{i+1}{i} & \frac{1}{i} & \frac{1}{i} \\ 0 & \frac{i+1}{i} & \frac{1}{i} \\ 0 & 0 & \frac{i+1}{i} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & \frac{3}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & \frac{4}{3} \end{bmatrix}$$

Para uma matriz de tamanho $n \times n$, a matriz A escalonada fica assim

$$A_{escalonada} = \begin{bmatrix} \frac{i+1}{i} & \frac{1}{i} & \frac{1}{i} & \cdots & \frac{1}{i} \\ 0 & \frac{i+1}{i} & \frac{1}{i} & \cdots & \frac{1}{i} \\ 0 & 0 & \frac{i+1}{i} & \cdots & \frac{1}{i} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \frac{i+1}{i} \end{bmatrix}$$

O produtório da diagonal principal será dado por $n \cdot \frac{i+1}{i}$. Observe que a i-ésima linha é igual a n-ésima, então, $n \cdot \frac{n+1}{n}$. Portanto o $det(I+U) = n+1$