Resolução P1

Prova_01 - 2022.Diurno

1. (3,0 pontos) Dê um exemplo de matriz de coeficientes, A, com pelo menos 2 linhas e 2 colunas, tal que o sistema de equações lineares $Ax = b$ tenha:

(a) 0,75 ponto) 0 ou 1 solução, dependendo de b.

Para que o sistema de equações não apresente solução o $rank(A) < nlin(A)$, ou seja, quando a matriz for escalonada pelo alguma linha será composta toda de zeros. E para que o sistema apresente exatamente uma solução, o $rank(A) = ncol(A)$, isso implica que, quando houver solução ela será única pois não haverá variável livre no sistema. Um exemplo de matriz para este caso é:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$$

Escalonando essa matriz, nós teremos um $rank(A) = 2$, que é menor que o número de linhas e igual ao número de colunas.

$$A_{escalonada} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

(b) (0,75 ponto) infinitas soluções, independentemente de b.

Se o $rank(A) = nlin$ e o $rank(A) < ncol(A)$, garantiremos que sempre haverá solução $\forall b$, pois após o escalonamento não haverá nenhuma linha toda de zeros na matriz A e existirá pelo menos uma variável livre no sistema. Uma sugestão de matriz é:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$$

Escalonando essa matriz, nós teremos um $rank(A) = 2$, que é igual ao número de linhas mas menor que número de colunas.

$$A_{escalonada} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

(c) (0,75 ponto) 0 ou infinitas soluções, dependendo de b.

Se o $rank(A) < ncol(A)$, então existe variável livre e, portanto, quando houver solução, existem infinitas soluções. E, se o $rank(A) < nlin(A)$, existe alguma linha k da matriz A tal que $0 \cdot x_1 + 0 \cdot x_2 + \cdots + 0 \cdot x_n = b_k$ para o qual não existe solução.

Uma sugestão de matriz é:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \end{bmatrix}$$

Escalonando essa matriz, nós teremos um $rank(A) = 1$, que é menor queo número de linhas e menor que número de colunas.

$$A_{escalonada} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

(d) (0,75 ponto) 1 solução, independentemente de b.

Dado que uma matriz não-singular possui solução única e, o determinante de uma matriz não-singular (matriz quadrada cujo posto é igual ao número de linhas e de colunas), é sempre diferente de zero, basta encontrarmos uma matriz não-singular, abaixo uma sugestão:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$$

De tal modo que o $det(A) \neq 0$

$$det(A) = (1 \cdot 4) - (2 \cdot 3) \neq 0$$

2. (2,5 pontos) Sejam os vetores $u = (1, 0, -2), v = (1, 3, 1)$ e $w = (-1, 1, 1)$ e considere as seguintes matrizes:

$$U = \begin{bmatrix} x & 1 & 2 \\ 0 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{bmatrix}, V = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & y & 1 \\ 1 & 3 & 2 \end{bmatrix}, W = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 1 \\ 2 & 0 & z \end{bmatrix},$$

Utilizando a regra de Cramer, determine x, y e z de forma que os vetores $\tilde{u} = Uu, \tilde{v} = Vv$ e $\tilde{w} = Ww$ sejam ortogonais.

3. (2,0 pontos) Seja A uma matriz de tamanho $n \times n$. Suponha que $A^T = -A$. Essa matriz é invertível quando n é ímpar? Justifique.

Sabemos que o $det(A^T) = det(A)$ (1) e que o $det(rA) = r^n det(A)$ (2). Vamos escolher $r = -1$, e substituindo em (2)

$$det(-A) = (-1)^n det(A) \qquad (3)$$

Pela suposição $A^T = -A$ e por (1), temos que $det(A^T) = det(-A) = det(A)$, e que por (2) e por (3), $det(A) = (-1)^n det(A)$.

Vamos testar para o caso em que n é ímpar:

- $det(A) = -det(A)$. Isso só é verdade para $det(A) = 0$

Portanto, quando n é ímpar, A não é invertível.

4. (2,0 pontos) Seja A uma matriz de tamanho $m \times n$ onde $m < n$. Prove que A possui inversa à direita se e somente se $rank(A) = m$. Havendo inversa à direita de A, ela é única? Por quê?

A matriz A só terá inversa se $rank(A)$ for máximo. Como o $rank(A) \leq min(nlin(A), ncol(A))$, o posto máximo que a matriz pode assumir é m. Portanto, a matriz A só possui inversa se, e somente se, $rank(A) = m$.

- **Testando unicidade**

Dado duas matrizes B e C, ambas inversas à direita de A, temos que tanto $AC = I$, quanto $AB = I$.

$$\begin{aligned} AC &= I = AB \\ AC &= AB \\ C &= B \end{aligned}$$

5. (2,0 pontos) Seja $A = VBV^{-1}$. Encontre uma expressão para A^n, onde n. é um número inteiro positivo.

$$\begin{aligned} A &= VBV^{-1} \\ A^n &= (VBV^{-1})^n \\ A^n &= (VBV^{-1})(VBV^{-1}) \ldots (VBV^{-1}) \\ A^n &= VBV^{-1} \cdot VBV^{-1} \ldots VBV^{-1} \end{aligned}$$

Como $V^{-1}V = I$, temos que

$$\begin{aligned} A^n &= VBI \cdot BI \cdot BI \ldots BV^{-1} \\ A^n &= VB \cdot B \cdot B \ldots V^{-1} \\ A^n &= VB^nV^{-1} \end{aligned}$$