

22. Analytické vyjádření paraboly, vzájemná poloha přímky a paraboly (MO 02)

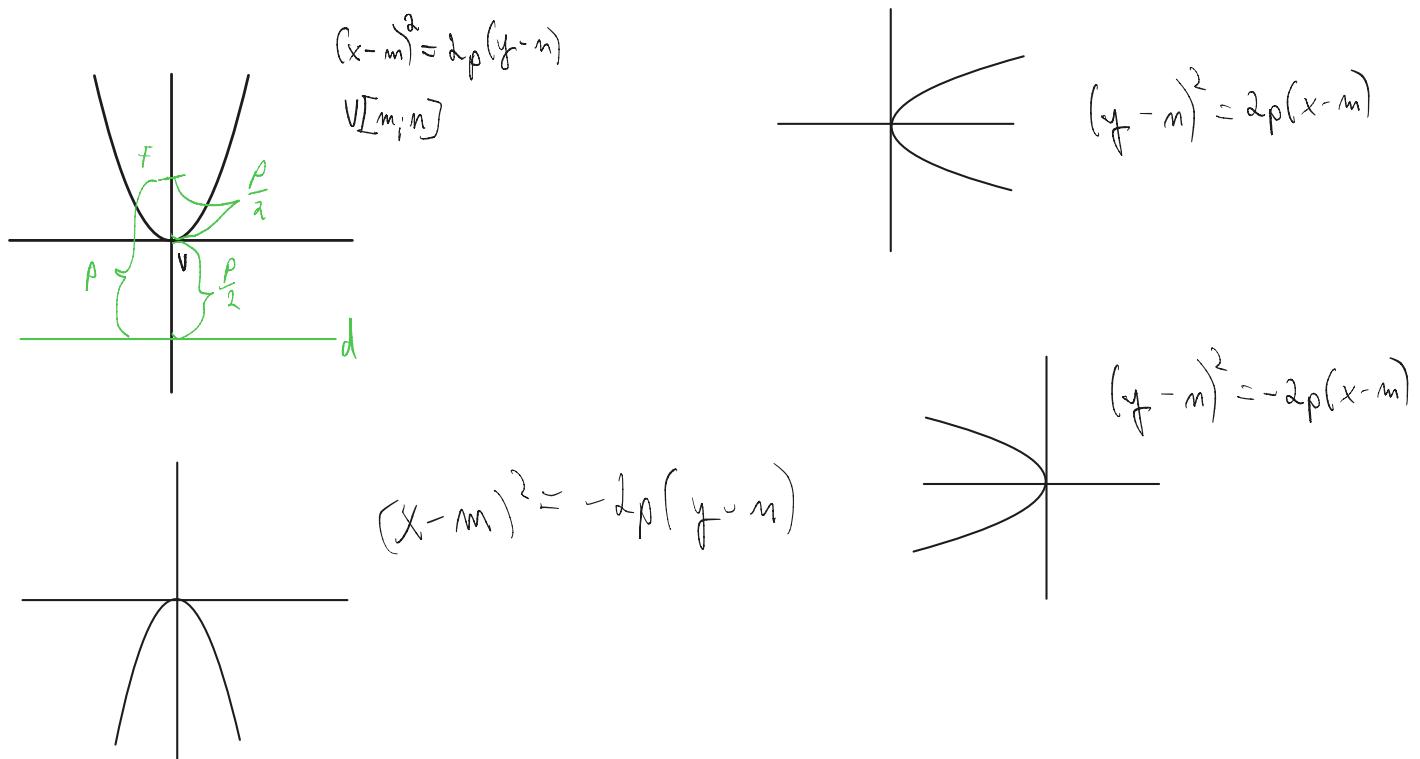
obecná a vrcholová rovnice paraboly

definice křivky, základní prvky křivky (vrchol, ohnisko, řídící přímka,, osa)

vzájemná poloha přímky a paraboly

tečna k parabole

Teorie, vzorce, tabulky:



Dotazy?

Příklady, které mi nešly:

1. Sestavte rovnici paraboly, znáte-li její ohnisko F a řídící přímku d:

a) $F[-7; 0], d: x - 7 = 0$

$$x = 7$$

$$p = 14$$

$$y^2 = -28x$$

b) $F[4; 0], d: y = 2$

$$p = 6 \quad V[4, 1]$$

$$(x - 4)^2 = -4(y - 1)$$

c) $F[4; 2], d: x = 3$

$$p = 1$$

$$V[\frac{7}{2}, 2]$$

$$(y - 2)^2 = 2(x - \frac{7}{2})$$

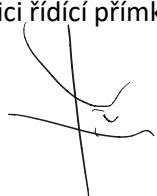
$$[a] y^2 = -28x; \quad b) (x - 4)^2 = -4(y - 1); \quad c) (y - 2)^2 = 2\left(x - \frac{7}{2}\right)]$$

2. Napište rovnici paraboly s vrcholem $V[1; 2]$ a ohniskem $F[1; 4]$. Určete parametr a rovnici řídící přímky.

$$\frac{p}{2} = 2$$

$$p = 4$$

$$(x - 1)^2 = 8(y - 2)$$

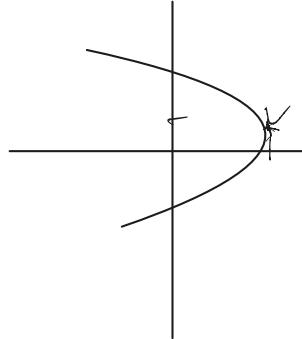


$$[p = 4; (x - 1)^2 = 8(y - 2); d: y = 0]$$

$\cup \{y_1\}$

3. Je dáná parabola $(y - 1)^2 = -6(x - 4)$. Najděte paraboly, které jsou s danou parabolou souměrné podle souřadnicových os.

$$\begin{aligned} P_1: (y + 1)^2 &= 6(x + 4) \\ P_2: (y - 1)^2 &= 6(x + 4) \end{aligned}$$



$$[(y + 1)^2 = -6(x - 4); \quad (y - 1)^2 = 6(x + 4)]$$

4. Určete vzájemnou polohu přímky vůči parbole:

a) p: $6x - y = 12$; $y^2 = 6x$

$$y = 6x - 12$$

$$\begin{cases} 6x^2 - 144x + 144 = 6x \\ 6x^2 - 144x - 6x + 144 = 0 \end{cases}$$

$$6x^2 - 150x + 144 = 0$$

$$\Delta = 5^2 - 4ac = 49 \rightarrow \text{sečna}$$

b) p: $2x - 3y = 4$; $x^2 = 12y$

$$y = \frac{2x-4}{3}$$

$$x^2 = 4(2x - 4)$$

$$x^2 - 8x + 16 = 0$$

$$\Delta = 0 \rightarrow \text{tečna}$$

c) p: $y + \frac{7}{2} = 0$; $y^2 = 7x$

$$y = -\frac{7}{2}$$

$$\frac{49}{4} = 7x$$

$$\frac{7}{4} = x \quad \text{LN} \rightarrow \text{rovnoběžka s osou}$$

5. Zrcadlová plocha světlometu vznikla otáčením paraboly kolem její osy souměrnosti. Průměr skla reflektoru je 20 cm a hloubka reflektoru je 10 cm. V jaké vzdálenosti od vrcholu parabolického zrcadla je třeba umístit bodový zdroj světla?

$$\begin{aligned} y^2 &= 4px \quad 100 = 4p \cdot 10 \\ x &= 10 \text{ cm} \quad 10 = 4p \\ y &= 10 \text{ cm} \quad p = 2,5 \text{ cm} \end{aligned}$$

[2,5cm]

6. Napište rovnice tečny vedené k parabole $y^2 = 8x$ z bodu A[0; -2].

$$\begin{aligned} t_1: y + 2 &= h(x) + h \cdot 0 \quad y^2 = -4y \\ \text{takže: } -4y &= h \cdot x \quad y^2 + 4y = 0 \\ x &= -\frac{1}{2}y \quad y(y+4) = 0 \\ t_1: 0 &= 0 + h \cdot 0 \quad y_1 = 0 \quad T_1[0; 0] \\ x &= 0 \quad y_2 = -4 \quad T_2[-4; 0] \end{aligned}$$

$$t_2: -4y = 8 + 4x \quad | : 4 \\ -y = 2 + x \\ y = -x - 2$$

$$t_2: x + y + 2 = 0$$

$[x + y + 2 = 0; x = 0]$

7. Je dána parabola $(y + 3)^2 = 6(x - 2)$. Napište rovnici tečny rovnoběžné s přímkou určenou body A[0; 5] a B[-2; 4].

$$\begin{aligned} \vec{AB} &= (-2; -1) \\ \vec{m} &= (1; -2) \end{aligned}$$

$$t: x - 2y - 2 = 0$$

$$\begin{aligned} t: x - 2y + c &= 0 \\ \text{Tfp: } x &= 2y - c \\ y^2 + 6y + 9 &= 12y - 6c - 12 \\ y^2 - 6y + 21 + 6c &= 0 \end{aligned}$$

$$\Delta = -24c - 48 = 0$$

$$-24c = 48$$

$$c = -2$$

$[x - 2y - 2 = 0]$

8. Určete směrnici přímky $y = kx + 2$, aby byla tečnou paraboly $y^2 = 4x$?

$$k^2x^2 + 4kx + 4 = 4x$$

$$k^2x^2 + 4kx - 4x + 4 = 0$$

$$A = k^2$$

$$B = 4k - 4$$

$$C = 4$$

$$\Delta = -32k + 16 = 0$$

$$k = \frac{1}{2}$$

$$\left[\frac{1}{2} \right]$$

9. Napište rovnici tečny k parabole $y^2 - 6x - 6y + 3 = 0$, která je rovnoběžná s přímkou $3x - 2y + 7 = 0$.

$$t: 3x - 2y + C = 0 \rightarrow x = \frac{2y - C}{3}$$

$$y^2 - 2(2y - C) - 6y + 3 = 0$$

$$y^2 - 4y + 2C - 6y + 3 = 0$$

$$y^2 - 10y + 3 + 2C = 0$$

$$\Delta = 88 - 8C = 0 \quad \rightarrow C = -\frac{88}{8} = 11$$

$$t: 3x - 2y + 11 = 0$$

$$[3x - 2y + 11 = 0]$$

10. Napište rovnici paraboly, která má vrchol v počátku soustavy souřadnic a prochází bodem A[-1; -3].

$$P_1: x^2 = -2px \quad y$$

$$A \in P_1$$

$$1 = -2(-3)p$$

$$p = \frac{1}{6}$$

$$P_1: x^2 = -\frac{1}{3}y \quad y$$

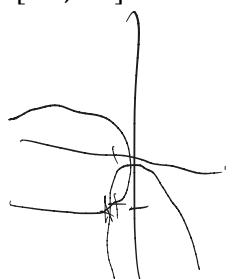
$$P_2: y^2 = -2qx$$

$$A \in P_2$$

$$9 = 2q$$

$$q = \frac{9}{2}$$

$$P_2: y^2 = -9x$$



$$[x^2 = -\frac{1}{3}y; y^2 = -9x]$$

11. Napište rovnici paraboly, která má vrchol $V[-1; 2]$, osu rovnoběžnou s osou y a prochází bodem $B[6; 0]$. Určete souřadnice jejího ohniska a napište rovnici její řídící přímky.

$$P: (x+1)^2 = 2p(y-2) \quad F\left[-1; -\frac{33}{8}\right]$$

$B[6, 0] \in P$

$$\begin{aligned} 49 &= -4p \\ p &= -\frac{49}{4} \end{aligned}$$

$$d: y = \frac{65}{8}$$

$$P: (x+1)^2 = -\frac{49}{2}(y-2) \quad 2 + \frac{49}{8} = \frac{65}{8}$$

$$\frac{p}{2} = \frac{49}{4} \cdot \frac{1}{2} = \frac{49}{8} \quad 2 - \frac{49}{8} = -\frac{33}{8}$$

$$(x+1)^2 = -\frac{49}{2}(y-2); F\left[-1; -\frac{33}{8}\right]; d: y = \frac{65}{8}$$

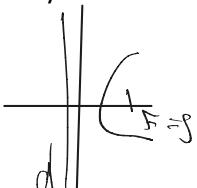
12. Napište rovnici kružnice, která má střed v ohnisku paraboly $y^2 = 2px$ a která se dotýká řídící přímky paraboly. Určete průsečíky paraboly a kružnice.

$$\begin{array}{ll} r=p & V[0, 0] \\ S=F & F\left[\frac{p}{2}, 0\right] \end{array}$$

$$\begin{array}{l} A=1 \\ B=p \\ C=-\frac{3}{4}p^2 \end{array}$$

$$\begin{array}{l} y^2 = Ax + \frac{C}{A} \\ y^2 = p \\ 2 = \pm p \end{array}$$

$$P_1\left[\frac{p}{2}; p\right] \quad P_2\left[\frac{p}{2}; -p\right]$$



Příklad:

$$x^2 - 4px + \frac{p^2}{4} + 2px - p^2 = 0$$

$$\frac{-4p \pm \sqrt{16p^2 - 4p^2}}{2} = \frac{-4p \pm \sqrt{12p^2}}{2} = \frac{-4p \pm 2p\sqrt{3}}{2}$$

$$(x - \frac{p}{2})^2 + y^2 = p^2; P_1\left[\frac{p}{2}; p\right]; P_2\left[\frac{p}{2}; -p\right]$$

$$x^2 + px - \frac{3}{4}p^2 = 0$$

$$x_1 = \frac{p}{2} \quad x_2 = -\frac{3}{2}p \quad \times$$

13. Určete vzájemnou polohu paraboly $(y-2)^2 = 4x - 20$ a přímky $p: y = kx + 2$ v závislosti na reálném parametru k .

$$y^2 - 4y + 4 = 4x - 20$$

$$y^2 - 4y + 20 = 4x$$

$$A = y^2$$

$$B = -4$$

$$C = 20$$

$$D = 16 - 40 \cdot 20 = 16 - 80k^2$$

$$D = 0$$

$$-80k^2 = -16$$

$$k^2 = \frac{1}{5}$$

$$k = \pm \frac{1}{\sqrt{5}} = \pm \frac{\sqrt{5}}{5} \quad (\text{sečna})$$

$$D > 0$$

$$-80k^2 + 16 > 0$$

$$-80k^2 < -16$$

$$k^2 > \frac{1}{5}$$

$$k > \frac{\sqrt{5}}{5} \quad (\text{vnější přímka})$$

$$k \in (-\infty; -\frac{\sqrt{5}}{5}) \cup (\frac{\sqrt{5}}{5}; \infty)$$

$$D < 0$$

$$k \in \left(-\frac{\sqrt{5}}{5}; \frac{\sqrt{5}}{5}\right) - \{0\}$$

sečna

$$[\text{tečna pro } k = \pm \frac{\sqrt{5}}{5}; \text{ sečna pro } k \in \left(-\frac{\sqrt{5}}{5}; \frac{\sqrt{5}}{5}\right) - \{0\}; \text{ vnější přímka pro } k \in \left(-\infty; -\frac{\sqrt{5}}{5}\right) \cup \left(\frac{\sqrt{5}}{5}; \infty\right)]$$

$$y = \lambda p \quad V[-1; 2]$$

$$\rho = 2 \rightarrow F[-2; 2]$$

14. Ohniskem paraboly $(y - 2)^2 = -4(x + 1)$ je vedena přímka svírající s kladnou poloosou x úhel 120° . Napište rovnici této přímky a určete délku vzniklé tětivy.

$$P: y = kx + q \quad k = \tan 120^\circ = -\sqrt{3}$$

$$y = -\sqrt{3}x + q$$

F & p:

$$2 = -\sqrt{3}(-1) + q$$

$$2 = 2\sqrt{3} + q$$

$$q = 2 - 2\sqrt{3} = 2(1 - \sqrt{3})$$

$$P: y = -\sqrt{3}x + 2(1 - \sqrt{3}) \rightarrow y = -\sqrt{3}x + 2 - 2\sqrt{3}$$

$$(-\sqrt{3}x + 2 - 2\sqrt{3} - 2)^2 = -4x - 4$$

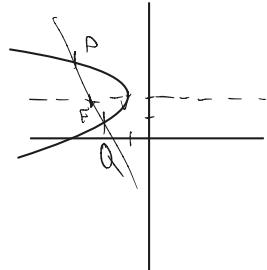
$$(-\sqrt{3}x - 2\sqrt{3})^2 = -4x - 4$$

$$3x^2 + 12x + 12 + 4x + 4 = 0$$

$$3x^2 + 16x + 16 = 0$$

$$\begin{cases} x_1 = -\frac{4}{3} & y_1 = \frac{4}{3}\sqrt{3} + 2(1 - \sqrt{3}) = -\frac{2\sqrt{3}}{3} + 2 \\ x_2 = -4 & y_2 = 4\sqrt{3} + 2(1 - \sqrt{3}) = 2\sqrt{3} + 2 \end{cases}$$

$$[y = -\sqrt{3}x + 2(1 - \sqrt{3}); l = \frac{16}{3}]$$



15. Napište rovnici paraboly a její řídící přímky, jestliže parabola prochází průsečíky osy prvního a třetího kvadrantu s kružnicí $x^2 + y^2 + 6x = 0$ a je souměrná podle jedné osy kartézského systému souřadnic.

$$O_1: y = x$$

$$O_2: y = -x$$

$$Q: x^2 + y^2 + 6x = 0$$

$O_1 \cap Q$

$$x^2 + x^2 + 6x = 0$$

$$2x(x + 3) = 0$$

$$x_1 = 0$$

$$x_2 = -3 \rightarrow P$$

$$y_1 = 0 \quad y_2 = 3$$

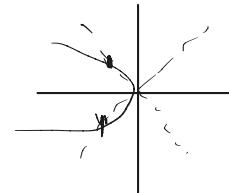
$$y^2 = -2\rho x$$

P & P

$$q = -2\rho(-3)$$

$$\begin{matrix} 3 \\ 2 \end{matrix} \frac{\partial}{\partial} = P$$

$$P: y^2 = -3x \quad d: x = \frac{3}{4}$$



$O_2 \cap Q$

$$x^2 + y^2 + 6x = 0$$

$$2x(x + 3) = 0$$

$$x_1 = 0 \quad x_2 = -3$$

$$y_1 = 0 \quad y_2 = 3$$

Nepřekrývají oběma přím.

$$[p: x^2 = -3y; d: y = \frac{3}{4} \text{ nebo } p: y^2 = -3x; d: x = \frac{3}{4}]$$

16. Napište rovnice tečen vedených k parabole $(x - 2)^2 = 4(y + 1)$ bodem A[5; -1].

$$t_1: (x_0 - 2)(x - 2) = 2(y_0 + 1) + 2(y + 1)$$

Ale t

$$(x_0 - 2)(3) = 2(y_0 + 1) + 2(0)$$

$$3x_0 - 6 = 2y_0 + 2$$

$$x_0 = \frac{2y_0 + 8}{3}$$

T ∈ P

$$\left(\frac{2y_0 + 8}{3} - 2\right)^2 = 4y_0 + 4$$

$$\left(\frac{2y_0 + 8}{3} - \frac{6}{3}\right)^2 = 4y_0 + 4$$

$$\left(\frac{2y_0 + 2}{3}\right)^2 = 4y_0 + 4$$

$$\frac{4y_0^2 + 8y_0 + 4}{9} = 4y_0 + 4 \quad | \cdot 9$$

$$4y_0^2 + 8y_0 + 4 = 36y_0 + 36$$

$$4y_0^2 - 28y_0 - 32 = 0$$

$$y_{01} = 8 \quad y_{02} = -1$$

$$x_{01} = 8 \quad x_{02} = 2$$

$$t_1: 6x - 12 = 18 + 2y + 2$$

$$6x - 2y - 32 = 0$$

$$t_1: 3x - y - 16 = 0$$

$$[y + 1 = 0; 3x - y - 16 = 0]$$

17. Určete souřadnice průsečíků P₁, P₂ paraboly y² - 12x + 24 = 0 s přímkou 2x + y - 4 = 0. Napište rovnice tečen k parabole v bodech P₁, P₂.

$$y^2 - 12x + 24 = 0$$

$$(y - 2x)^2 - 12x + 24 = 0$$

$$16 - 16x + 4x^2 - 12x + 24 = 0$$

$$4x^2 - 28x + 40 = 0$$

$$x_1 = 5 \quad x_2 = 2$$

$$y_1 = -6 \quad y_2 = 0$$

$$P_1[5; -6]$$

$$P_2[2; 0]$$

$$t_1: y_0 y = 12(x - 2)$$

$$y_0 y = 6(x_0 - 2) + 6(x - 2)$$

$$-6y_0 = 6(3) + 6x - 12$$

$$-6x - 6y_0 - 6 = 0$$

$$t_1: x + y + 1 = 0$$

$$t_2: 0 = 6(-2) + 6x - 12$$

$$6x = 12$$

$$t_2: x = 2$$

$$[P_1[2; 0]; P_2[5; -6]; t_1: x = 2; t_2: x + y + 1 = 0]$$

18. Napište rovnici paraboly, která prochází body K[3; 1], L[2; 2], víte-li, že osa této paraboly je rovnoběžná s osou x a obsahuje bod K.

$$\sqrt{3; 1}$$

$$(y-1)^2 = 2p(x-3)$$

Lép

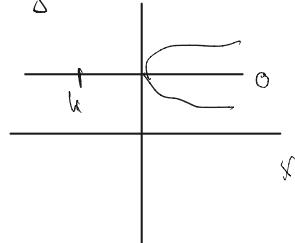
$$1 = 2p(-1)$$

$$1 = -2p$$

$$p = -\frac{1}{2}$$

$$(y-1)^2 = -(x-3)$$

Jelikož k je z b.d P, tak je to vrchol



19. Načrtněte pěkně křivku:

$$a) 2x^2 + 6x + 3y + 6 = 0$$

$$2[x^2 + 3x] = -6 - 3y$$

$$2[(x + \frac{3}{2})^2 - \frac{9}{4}] = -3(y + 2)$$

$$2(x + \frac{3}{2})^2 - \frac{9}{2} = -3(y + 2) + \frac{9}{2}$$

$$2(x + \frac{3}{2})^2 = -3(y + 2) + 6 + \frac{9}{2}$$

$$2(x + \frac{3}{2})^2 = -3(y + 2 + \frac{3}{2})$$

$$(x + \frac{3}{2})^2 = -\frac{3}{2}(y + \frac{7}{2})$$

$$b) 2y^2 - 10x - 4y - 18 = 0.$$

$$2[y^2 - 2y] = 10x + 18$$

$$2[(y-1)^2 - 1] = 10x + 18$$

$$2(y-1)^2 - 2 = 10x + 18$$

$$(y-1)^2 = \frac{10}{2}x + \frac{18}{2} + \frac{2}{2}$$

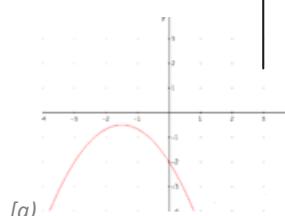
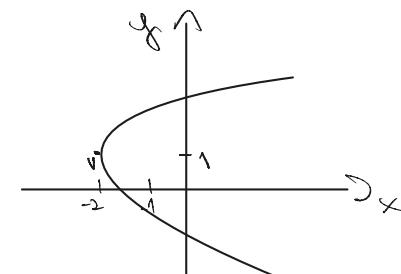
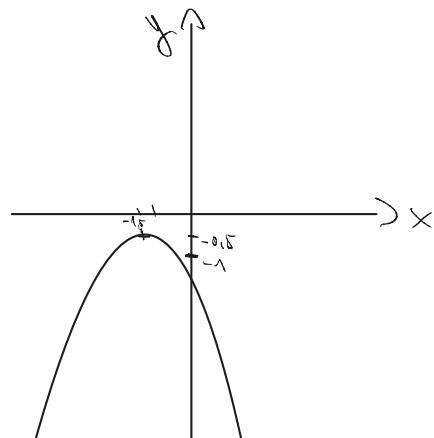
$$(y-1)^2 = 5x + 10$$

$$(y-1)^2 = 5(x+2)$$

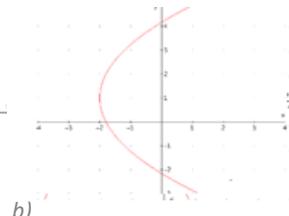
$$\sqrt{-2; 1}$$

$$\sqrt{-1; 5; -0; 5}$$

Λ



[a]



b)

bachu nupřesně xy

20. Napište rovnici paraboly, která prochází průsečíky přímky $x + y = 0$ a kružnice $x^2 + y^2 + 4x = 0$ a je souměrná podle osy y .

P6P

$$(x-m)^2 = 2p y$$

$$(0-m)^2 = 2p \cdot 0$$

$$m^2 = 0$$

Q6P

$$x^2 = 2py$$

$$y = \frac{1}{2p}x^2$$

$$y = \frac{1}{2}x^2$$

$$p = 1 \rightarrow$$

$$x^2 = 2y$$

$$\mathbb{P}[0;0] \quad \mathbb{Q}[-2;2]$$

$$[x^2 = 2y]$$

21. Najděte rovnici kolmice spuštěné z vrcholu paraboly $x^2 + 2x - 2y + 5 = 0$ na přímku protínající osy souřadnic v bodech A[1;0], B[0;2].

$$(x+1)^2 - 1 = 2y - 5$$

$$\overrightarrow{AB} = \vec{m} = B - A = (-1; 2)$$

$$[x - 2y + 5 = 0]$$

$$(x+1)^2 = 2y - 5$$

$$(x+1)^2 = 2(y - \frac{5}{2})$$

$$\text{qf: } -x + 2y + c = 0$$

$$\mathbb{V}[-1;2]$$

$$\mathbb{V} \in \text{qf}$$

$$1 + b + c = 0$$

$$c = -5$$

$$\text{qf: } -x + 2y - 5 = 0$$

$$\text{qf: } x - 2y + 5 = 0$$