21. Analytické vyjádření hyperboly, vzájemná poloha přímky a hyperboly (MO 29)

obecná a středová rovnice hyperboly

ohniska, excentricita, délky poloos, náčrt křivky

asymptoty

vzájemná poloha přímky a hyperboly

tečna k hyperbole

rovnoosá hyperbola

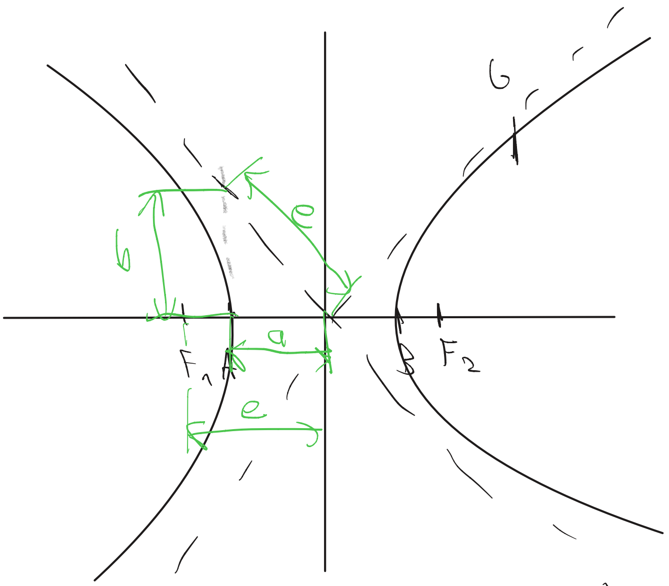
Teorie, vzorce, tabulky:

$S[0;0]$

$EF \parallel x \quad +\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$

$|GF_1| + |GF_2| = 2a$

$EF \parallel y \quad -\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1$



$e^2 = a^2 + b^2$ (hlavní osa || s x)

Dotazy?

Příklady, které mi nešly:

15, 16

1. Napište rovnici hyperboly, která má délku hlavní poloosy 5, výstřednost 8 a ohniska v bodech $F_1[-e; 0]$, $F_2[e; 0]$.

$S[0;0]$

$e=8$

$e^2=a^2+b^2$

$64=25+b^2$

$b^2=39$

$$\mathcal{H}: \frac{x^2}{25}-\frac{y^2}{39}=1$$

$[39x^2 - 25y^2 - 975 = 0]$

2. Napište rovnici hyperboly, která má délku hlavní poloosy 8 a ohniska v bodech $F_1[-2; 0]$, $F_2[18; 0]$.

$S=\frac{F_1+F_2}{2}=[8;0]$

$e=\frac{1}{2}|F_1F_2|=10$

$e^2=a^2+b^2$

$b^2=100-64=36$

$$\mathcal{H}: \frac{(x-8)^2}{64}-\frac{y^2}{36}=1$$

$[9x^2 - 16y^2 - 144x = 0]$

3. Určete vzájemnou polohu přímky p: $x = 3 - t, y = -1 + t$ a hyperboly $9x^2 - 4y^2 = 36$.

$\vec{u}_p=(-1;1)$

$\vec{n}_p=(1;1)$

$x+y+c=0$

$3-1+c=0$

$c=-2$

$p: x+y-2=0 \rightarrow x=-y-2$

$9(y+2)^2-4y^2=36$

$9(y^2+4y+4)-4y^2=36$

$9y^2+36y+36-4y^2-36=0$

$5y^2+36y=0$

$A=5$

$B=36$

$C=0$

$D=b^2-4ac=36^2$

$D>0 \rightarrow$ sečna

[sečna]

4. Určete vzájemnou polohu přímky p: $2x - y + 4 = 0$ a hyperboly $4x^2 - y^2 = 4$.

$\to y = 2x + 4$

$4x^2 - (2x+4)^2 = 4$

$4x^2 - (4x^2 + 16x + 16) - 4 = 0$

$\cancel{4x^2} - \cancel{4x^2} - 16x - 16 - 4 = 0$

$-16x = 20$

$x = -\frac{20}{16} = -\frac{5}{4}$

není kv. a jen jeden prus.

rovn. s asymptotou

[rovnoběžka s asymptotou]

5. Určete vzájemnou polohu přímky $20x - 9y - 18 = 0$ a hyperboly $16x^2 - 9y^2 = 144$.

$\to x = \frac{9y+18}{20}$

$16\left(\frac{9y+18}{20}\right)^2 - 9y^2 = 144$

$16\,\frac{81y^2 + 324y + 324}{400} - 9y^2 = 144 \quad | \cdot 400$

$1296y^2 + 5184y + 5184 - 3600y^2 - 57600 = 0$

$-2304y^2 + 5184y - 52416 = 0$

$D = 5184^2 - 4(-2304)(-52416) = -456\,192\,000$

$D < 0 \to$ vn. přímka

[vnější přímka]

6. Napište rovnici tečny k hyperbole k hyperbole $4x^2 - y^2 - 12 = 0$ v jejím bodě T[-2; -2].

$4x_0x - y_0y - 12 = 0$

$-8x + 2y - 12 = 0 \quad | : -2$

$t: 4x - y + 6 = 0$

[$4x - y + 6 = 0$]

7. Napište rovnici tečny k hyperbole k hyperbole $9(x+3)^2 - 25(y-2)^2 = 225$ v jejím bodě T[2; y_T].

$t: 9(x_0+3)(x+3) - 25(y_0-2)(y-2) = 225$ $T[2;2]$

$T \in \mathcal{H}$ $9(5)^2 - 25(y^2-4y+4) - 225 = 0$

$225 - 25y^2 + 100y - 100 - 225 = 0$

$-25y^2 + 100y - 100 = 0$

$y = 2$

$45x - 90 = 0$

$t: x - 2 = 0$

$9 \cdot 5(x+3) - 25 \cdot 0 = 225$

$45x + 135 - 225 = 0$

[x − 2 = 0]

8. Je dána hyperbola $x^2 - 4y^2 - 6x - 3 = 0$ a bod M[0;0]. Určete odchylku tečen k hyperbole sestrojených z bodu M.

$(x-3)^2 - 9 - 4y^2 - 3 = 0$

$\mathcal{H}: (x-3)^2 - 4y^2 - 12 = 0$

$t: (x_0-3)(x-3) - 4y_0y - 12 = 0$

$M \in t$ $(x_0-3)(-3) - 0 - 12 = 0$

$-3x_0 + 9 - 12 = 0$

$-3x_0 = 3$

$x_0 = -1$

$T \in \mathcal{H}$

$(-1-3)^2 - 4y_0^2 - 12 = 0$

$16 - 12 - 4y_0^2 = 0$

$-4y_0^2 = -4$

$y_0 = \pm 1$

$T_1[-1;1]$

$T_2[-1;-1]$

$\vec{u} = \overrightarrow{MT_1} = T_1 - M = (-1;1)$

$\vec{v} = \overrightarrow{MT_2} = T_2 - M = (-1;-1)$

$\cos\varphi = \frac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{|\vec{u}||\vec{v}|} = \frac{1-1}{|\vec{u}||\vec{v}|} = \frac{0}{|\vec{u}||\vec{v}|} \Rightarrow \varphi = 90°$

[90°]

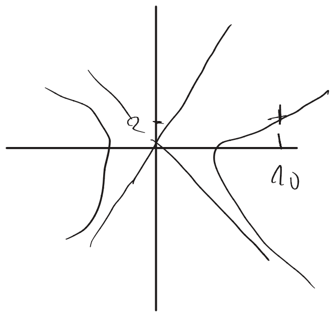
9. Napište rovnici hyperboly, která prochází bodem M[10; 2] a jejíž asymptoty mají rovnice $y = \pm 2x$, má rovnici.

$2x = -2x$

$4x = 0$

$S[0;0]$

$k_2 = \frac{b}{a} = 2 \rightarrow b = 2a$



$M[10;2]$

$\mathcal{H}: \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{4a^2} = 1$ $\qquad \frac{1}{a^2} = d$

$\frac{100}{a^2} - \frac{\cancel{4}}{\cancel{4}a^2} = 1$ $\qquad \frac{1}{99} = \frac{1}{a^2}$

$100d - d = 1$ $\qquad a = 99$

$99d = 1$

$d = \frac{1}{99}$

$\mathcal{H}: \frac{x^2}{99} - \frac{y^2}{396} = 1$

[$4x^2 - y^2 = 396$]

10. Vypočtěte délku tětivy, která prochází pravým ohniskem hyperboly $16x^2 - 25y^2 = 400$ kolmo k ose *x* soustavy souřadnic. $S[0;0]$

$\mathcal{H}: \frac{x^2}{25} - \frac{y^2}{16} = 1$ $\qquad o_x: y = 0$

$e^2 = a^2 + b^2 = 41$ $\qquad p: x = \sqrt{41}$

$e = \sqrt{41}$

$F[\sqrt{41};0]$

$16 \cdot 41 - 25y^2 - 400 = 0$

$-25y^2 + 256 = 0$

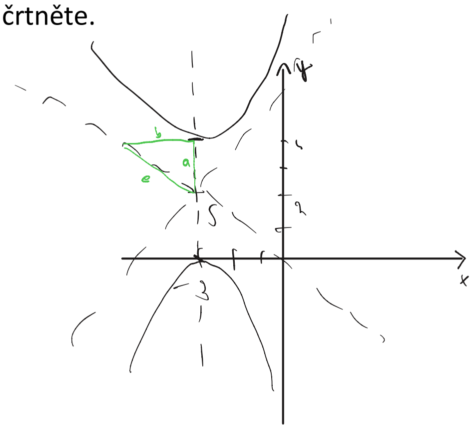
$y_1 = \frac{16}{5} \qquad y_2 = \frac{-16}{5}$

$P[\sqrt{41}; \frac{16}{5}] \quad Q[\sqrt{41}; -\frac{16}{5}]$

$|PQ| = \sqrt{0 + \left(\frac{16}{5} + \frac{16}{5}\right)^2} = \sqrt{\left(\frac{32}{5}\right)^2} = \frac{32}{5} = 6,4$

[6,4]

11. Rozhodněte, zda je rovnice $4x^2 - 5y^2 + 24x + 20y + 36 = 0$ rovnicí hyperboly. V kladném případě určete její střed, směr hlavní osy a délky poloos, excentricitu, hyperbolu načrtněte.



$4x^2+24x-5y^2+20y+36=0$

$4[x^2+6x]-5[y^2-4y]+36=0$

$4[(x+3)^2-9]-5[(y-2)^2-4]+36=0$

$4(x+3)^2-36-5(y-2)^2+20+36=0$

$4(x+3)^2-5(y-2)^2=-20 \quad |:-20$

$H: -\frac{(x+3)^2}{5}+\frac{(y-2)^2}{4}=1$

$b^2 \nearrow \quad a^2 \nearrow$

$S[-3;2]$

$b=\sqrt{5}$ $\quad e^2=a^2+b^2 \rightarrow e=\sqrt{5+4}=3$

$a=2$

$a \parallel y$

[*hyperbola*; $S[-3;2]$; *hlavní osa* $\parallel$ *s osou* $y, a=2, b=\sqrt{5}; e=3$]

12. Je dána hyperbola $x^2 - 9y^2 = 1$. Napište rovnice všech přímek, které procházejí bodem M[3, 1] a mají s hyperbolou společný právě jeden bod.

$S[0;0]$

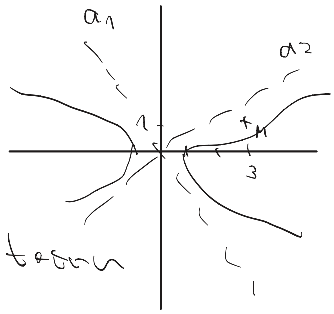
$H: x^2-9y^2=1 \rightarrow H: \frac{x^2}{1}-\frac{y^2}{\frac{1}{9}}=1$

$a_1: y=\frac{b}{a}x=\frac{b}{a}x$

$a_1: y=\frac{1}{3}x$

$a_2: y=-\frac{1}{3}x$

[$x + 3y - 6 = 0; 5x - 12y - 3 = 0$]



$M \in H$?

$9-9=1$

$L<P \rightarrow$ vn. bod

$M \in a_1 \wedge a_2$?

$M \in a_2 \rightarrow$ budeme dělat tečnu

$p: y+\frac{1}{3}x+c=0$

$M \in p$

$1+1=-c$

$c=-2$

$p: \frac{1}{3}x+y-2=0$

$t: x_t x-9y_t y=1$

$M \in t$

$3x_t-9y_t-1=0 \rightarrow x_t=\frac{9y_t+1}{3}$

$T \in H$

$\left(\frac{9y_t+1}{3}\right)^2-9y_t^2=1$

$\cancel{81y_t^2}+18y_t+1-\cancel{81y_t^2}=9$

$18y_t=8$

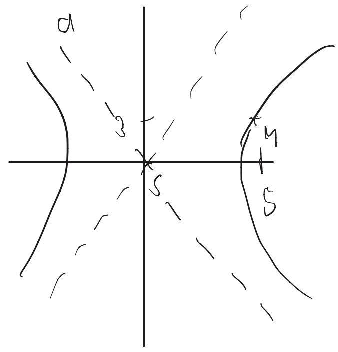
$y_t=\frac{4}{9}$

$3x_t-\cancel{9}\cdot\frac{4}{\cancel{9}}-1=0$

$x_t=\frac{5}{3}$

$t: \frac{5}{3}x-4y-1=0$

13. Napište rovnici hyperboly se středem S[0;0], která prochází bodem M[5, 2] a jedna z jejích asymptot má rovnici $2x + 3y = 0$. Určete velikosti poloos hyperboly.



$a: \; y = -\frac{2}{3}x \rightarrow y = -\frac{b}{a}x$

$\frac{2}{3} = \frac{b}{a}; \; b = \frac{2}{3}a \qquad b = \frac{2}{3}\cdot 4 = \frac{8}{3}$

$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{\frac{4}{9}a^2} = 1 \qquad H: \frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{\frac{64}{9}} = 1$

$\frac{25}{a^2} - \frac{4}{\frac{4}{9}a^2} = 1$

$\frac{25}{a^2} - \frac{9\cdot 4}{4a^2} = 1$

$25 - 9 = a^2$

$a^2 = 16$

$a = 4$

[$4x^2 - 9y^2 = 64$; $a = 4$; $b = \frac{8}{3}$]

14. Vypočtěte souřadnice průsečíků hyperboly $3x^2 - y^2 - 6x + 4y = 4$ a přímky, která prochází bodem A[2; 0] kolmo k přímce $x - y = 7$.

$p: \; x - y - 7 = 0$

$q: \; x + y + c = 0$

$A \in q$

$2 + c = 0$

$c = -2$

$q: \; x + y - 2 = 0 \rightarrow x = 2 - y$

$3\cdot(2-y)^2 - y^2 - 6(2-y) + 4y = 4$

$3(4 - 4y + y^2) - y^2 - 12 + 6y + 4y - 4 = 0$

$12 - 12y + 3y^2 - y^2 - 12 + 6y + 4y - 4 = 0$

$2y^2 - 2y - 4 = 0$

$y_1 = 2 \quad y_2 = -1$

$x_1 = 2 - 2 = 0$

$x_2 = 2 + 1 = 3$

P[0;2]

Q[3;−1]

[P1[0;2], P2[3;-1].]

15. Napište rovnici hyperboly, která je určena ohnisky $F_{1,2}\left[1 \pm 2\sqrt{3};\ -2\right]$ a prochází bodem A[7;1].

$|F_1F_2| = 2e = \sqrt{(1+2\sqrt{3} - 1 + 2\sqrt{3})^2 + (-2+2)^2} = 2\sqrt{3}$

$e^2 = a^2 + b^2$

$a^2 = e^2 - b^2 = 12 - b^2$

$a^2 = 12 - 3 = 9$

$S = \frac{F_1 + F_2}{2}$ $\quad S\left[\frac{1+\sqrt{3}+1-\sqrt{3}}{2}; -2\right]$

$S[1; -2]$

$S[0; -2]$

$\mathcal{H}: \frac{(x-1)^2}{a^2} - \frac{(y+2)^2}{b^2} = 1$

$a^2 = 12 - 36$

$A \in \mathcal{H}$

$\frac{36}{12-b^2} - \frac{9}{b^2} = 1 \quad | \ b^2(12-b^2)$

$\boxed{\mathcal{H}: \frac{(x-1)^2}{9} - \frac{(y+2)^2}{3} = 1}$

$36b^2 - 108 + 9b^2 = 12b^2 - b^4$

$b^2 = F$

$b^4 + 33b^2 - 108 = 0$

$B = b^2$

$F^2 + 33F - 108 = 0$

$F_1 = 3 \quad F_2 = -36$ ✗

$[(x-1)^2 - 3(y+2)^2 = 9]$

16. Načrtněte pěkné křivky

a) $2xy - 4x + 3y = 0$

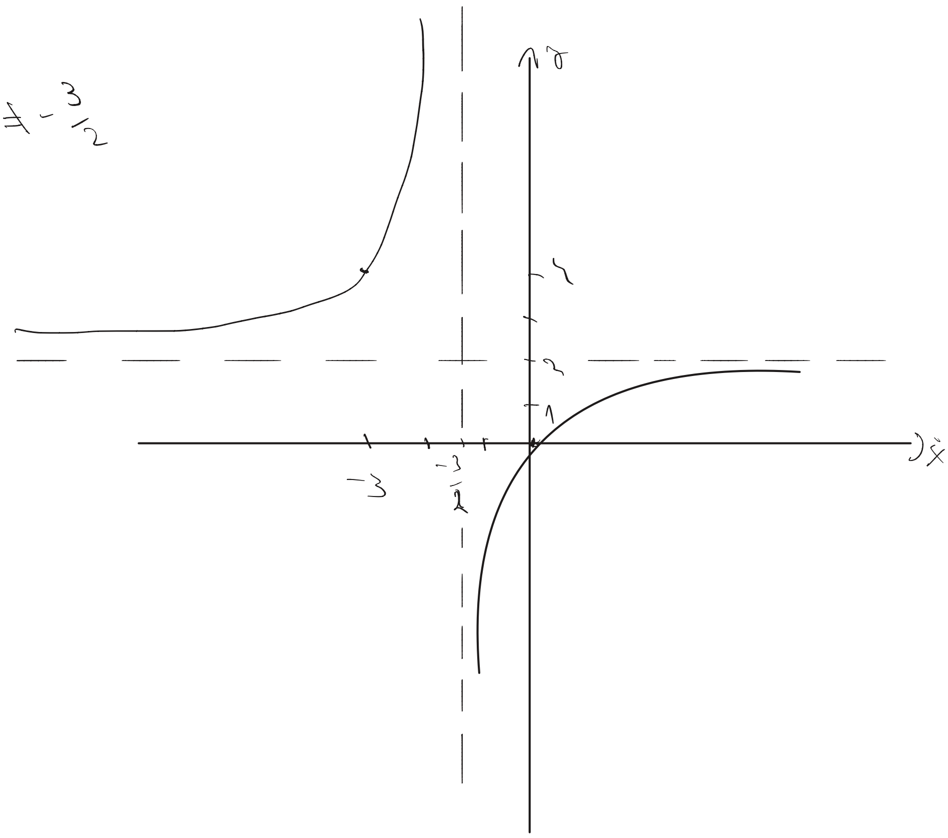
$y(2x+3) = 4x$ $\quad x \neq -\frac{3}{2}$

$y = \frac{4x}{2x+3}$

$4x : (2x+3) = 2 - \frac{6}{2x+3}$

$0 - 6$

$y = 2 - \frac{6}{2x+3}$



b) $9x^2 - 16y^2 - 18x - 32y - 151 = 0$

$9x^2 - 18x - 16y^2 - 32y - 151 = 0$

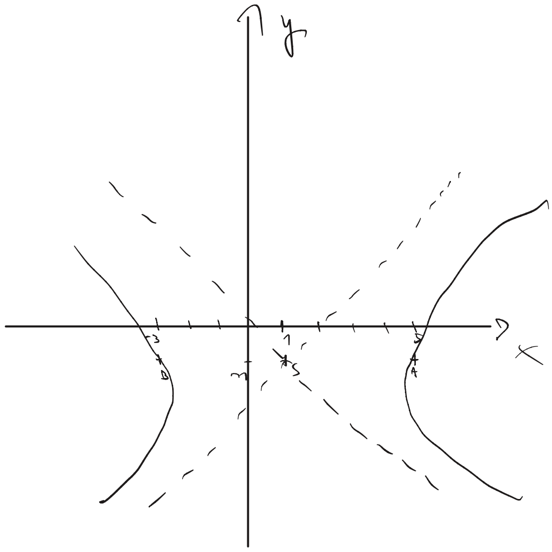
$9[x^2 - 2x] - 16[y^2 + 2y] = 151$

$9[(x-1)^2 - 1] - 16[(y+1)^2 - 1] = 151$

$9(x-1)^2 - 16(y+1)^2 = 144$

$H: \frac{(x-1)^2}{16} - \frac{(y+1)^2}{9} = 1$

$S[1;-1]$



c) $4x^2 - y^2 - 8x - 6y - 4 = 0$

$4x^2 - 8x - y^2 - 6y - 4 = 0$

$4[x^2 - 2x] - [y^2 + 6y] - 4 = 0$

$4[(x-1)^2 - 1] - [(y+3)^2 - 9] - 4 = 0$

$4(x-1)^2 - 4 - (y+3)^2 + 9 - 4 = 0$

$4(x-1)^2 - (y+3)^2 = -1$

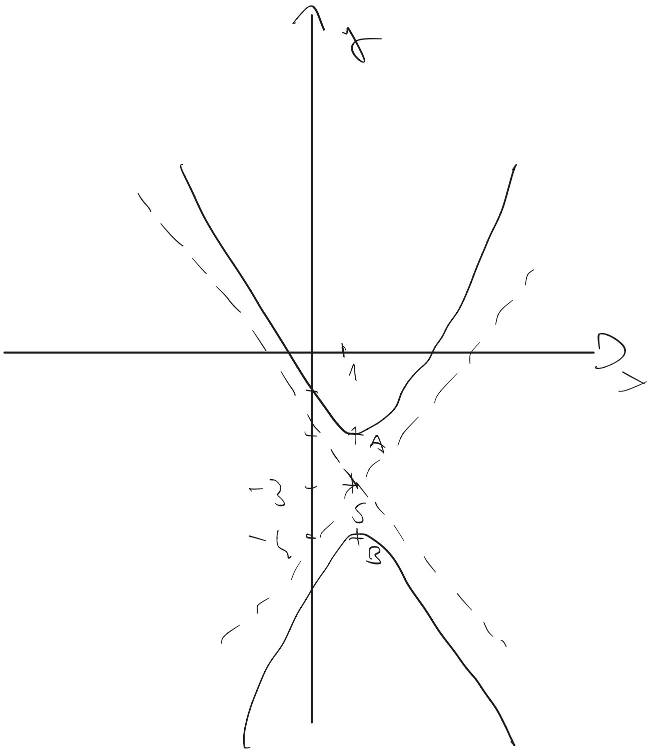
$-4(x-1)^2 + (y+3)^2 = 1$

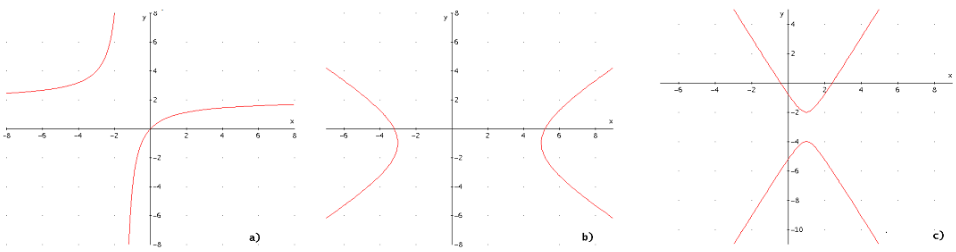
$-\frac{(x-1)^2}{\frac{1}{4}} + \frac{(y+3)^2}{1} = 1$

a

b^2

$S[1;-3]$





17. Hyperbola prochází bodem $M\left[6;\frac{3}{2}\sqrt{5}\right]$, je souměrná podle os souřadnic a má hlavní poloosu $a = 4$. Napište rovnice kolmic spuštěných z levého ohniska hyperboly na její asymptoty.

$S[0;0]$

$\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{b^2} = 1$

$\frac{x^2}{16} - y^2 d = 1$

$M \in H$

$\frac{36}{16} - \frac{9}{4} \cdot 5 d = 1$

$\frac{9}{4} - \frac{45}{4} d = 1$

$9 - 45d = 4$

$-45d = -5 \rightarrow d = \frac{5}{45} = \frac{1}{9}$

$\frac{1}{b^2} = d$

$\frac{1}{9} = \frac{1}{b^2}$

$b^2 = 9$

$H: \frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1$

$e^2 = a^2 + b^2$

$e = \sqrt{16+9} = 5$

$a: y = \pm \frac{b}{a} x$

$a: y = \pm\frac{4}{3} x$

$E[-5;0]$

$k_1: \frac{4}{3}x - y + c = 0$

$E \in k_1$

$-\frac{20}{3} - 0 + c = 0$

$c = \frac{20}{3}$

$k_1: \frac{4}{3}x - y + \frac{20}{3} = 0 \;|\cdot 3$

$k_1: 4x - 3y + 20 = 0$

$k_2: \frac{4x}{3} + y + c = 0$

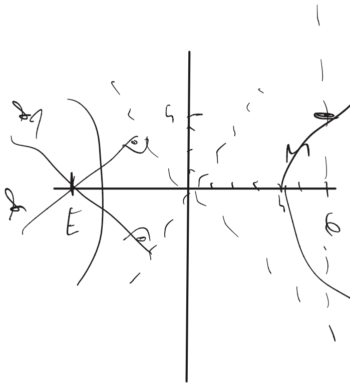
$E \in k_2$

$-\frac{20}{3} + 0 + c = 0$

$c = \frac{20}{3}$

$\frac{4x}{3} + y + \frac{20}{3} = 0 \;|\cdot 3$

$k_2: 4x + 3y + 20 = 0$



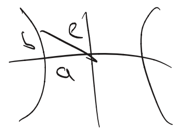
[$4x + 3y + 20 = 0$; $4x - 3y + 20 = 0$]

18. Napište obecnou rovnici hyperboly, která má $S[0;0]$, poloosu $a = 2$, která má společná ohniska elipsou $16x^2 + 25y^2 - 1600 = 0$.

$e: 16x^2 + 25y^2 = 1600 \;|:1600$

$e: \frac{x^2}{100} + \frac{y^2}{64} = 1$

$a^2 \nearrow \quad b^2 \nearrow$



$e_e^2 = a^2 - b^2 = 100 - 64 = 36$

$e_e = 6$

$E[\pm 6;0]$

$e_H^2 = a^2 + b^2$

$b^2 = e^2 - a^2 = 36 - 4 = 32$

$e^2 = a^2 + b^2$

$H: \frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{32} = 1 \;|\cdot 32 \cdot 4$

$32x^2 - 4y^2 = 128 \;|:4$

$H: 8x^2 - y^2 - 32 = 0$

[$8x^2 - y^2 - 32 = 0$]