19. Analytické vyjádření kružnice (MO 09)

středová a obecná rovnice kružnice

vzájemná poloha kružnice a přímky

rovnice tečny ke kružnici

Teorie, vzorce, tabulky: $S[m;n]$

Středová rovnice $k: (x-m)^2+(y-n)^2=r^2$

Obecná rovnice $k: ax^2+by^2+cx+dy+e=0$

tečna $(x_0-4)(x-4)+(y_0-5)(y-5)=r^2$, kde $T[x_0;y_0]$

Dotazy?

Příklady, které mi nešly:

10, 6

1. Napište rovnici kružnice se středem $S[1;-2]$, která prochází bodem B[4; 2]. Určete směrnici tečny ke kružnici v tomto bodě.

$k: (x-1)^2+(y+2)^2=r^2$; $k: (x-1)^2+(y+2)^2=25$

$B \in k$ $\quad 9+16=r^2$

$r^2=25$

$t: 3x+4y-20=0$

$y=-\frac{3}{4}x-20$

$k=-\frac{3}{4}$

$t: (x_0-1)(x-1)+(y_0+2)(y+2)=25$

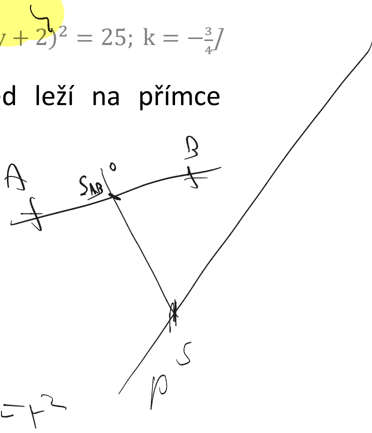
$t: 3x-3+4y+8-25=0$

[$(x-1)^2+(y+2)^2=25$; $k=-\frac{3}{4}$]

2. Najděte rovnici kružnice, která prochází body $A[4;-2], B[10;-4]$ a jejíž střed leží na přímce $p: x-2y-8=0$.

$\vec{AB}=\vec{n_o}=B-A=(6;-2)=(3;-1)$

$S_{AB}=\frac{A+B}{2}=[7;-3]$



$o: 3x-y+c=0$

$3\cdot 7+3+c=0$

$c=-24$

$p: x-2y-8=0 \to x=2y+8$

$6y+24-y-24=0$

$5y=0$

$y=0$

$x=2\cdot 0+8$

$x=8$

$S[8;0]$

$k: (x-8)^2+y^2=r^2$

$A \in k$ $\quad 16+4=r^2$

$r^2=20$

$k: (x-8)^2+y^2=20$

[$(x-8)^2+y^2=20$]

3. Sestavte středovou rovnici kružnice o průměru AB, kde $A[1;1], B[7;9]$. Vypočtěte délku tětivy, kterou kružnice vytne na ose y. Určete rovnice tečen ke kružnici v krajních bodech této tětivy.

$S_{AB}=\frac{A+B}{2}$

$S_{AB}[4;5]$

$k: (x-4)^2+(y-5)^2=r^2$; $(x-4)^2+(y-5)^2=25$

$A \in k$ $\quad (-3)^2+(-4)^2=r^2$

$r^2=25$

$x=0$

$16+y^2-10y+25=25$

$y^2-10y+16=0$

$y_{1,2} = 8;\ 2$

$T_1[0;8]$

$T_2[0;2]$

$t_1: (x_0-4)(x-4)+(y_0-5)(y-5)=25$

$-4x+16+3y-15-25=0$

$t_1: -4x+3y-24=0$

délka tětivy: $8-2=6$

$t_2: (x_0-4)(x-4)+(y_0-5)(y-5)=25$

$-4x+16-3y+15-25=0$

$t_2: -4x-3y+6=0$

[$(x-4)^2+(y-5)^2=25$; $d=6$; $t_1: -4x+3y-24=0$; $t_2: 4x+3y-6=0$]

4. Sestavte středovou rovnici kružnice se středem na ose x, která prochází počátkem soustavy souřadnic a bodem $M[2; 4]$.

$S[z; 0]$

$M \in k$

$(x-z)^2 + y^2 = r^2$

1) $(2-z)^2 + 16 = r^2$ $\quad 4 - 4z + \cancel{z^2} + 16 = \cancel{z^2}$

$-4z = -20$

$z = 5$

2) $(0-z)^2 = r^2$

$z^2 = r^2$

$k: (x-5)^2 + y^2 = 25$

[$(x-5)^2 + y^2 = 25$]

5. Najděte rovnice tečen ke kružnici $(x+2)^2 + (y-1)^2 = 5$, které jsou rovnoběžné s přímkou $2x - y + 1 = 0$

$t: 2x - y + c = 0 \to x = \frac{y-c}{2}$

$k: (x+2)^2 + (y-1)^2 = 5$

$\left(\frac{y-c}{2} + 2\right)^2 + y^2 - 2y + 1 = 5$

$\frac{y^2 - 2yc + c^2}{4} + \frac{4 \cdot (y-c)}{2} + 4 + y^2 - 2y + 1 = 5 \quad | \cdot 4$

$y^2 - 2yc + c^2 + \cancel{8y} - 8c + 16 + 4y^2 - \cancel{8y} + 4 = 20$

$5y^2 - 2yc + c^2 - 8c = 0$

$D = 0 \to b^2 - 4ac = 4c^2 - 20(c^2 - 8c) = 4c^2 - 20c^2 + 160c = 0$

kalk.

$c_1 = 10$

$c_2 = 0$

$t_1: 2x - y + 10 = 0$

$t_2: 2x - y = 0$

[$2x - y = 0$; $2x - y + 10 = 0$]

6. Sestavte rovnici kružnice procházející bodem $A[6; 9]$ s poloměrem r=5 a se středem na přímce $y = 6 - \frac{x}{3}$.

$A[6; 9]$ $\quad x^2 + y^2 = 25$

$y = 6 - \frac{x}{3}$

$(6-x)^2 + (9-y)^2 = 25$

$(6-x)^2 + \left(9 - 6 + \frac{x}{3}\right)^2 = 25$

$x^2 - 12x + 36 + 9 - 6 \cdot \frac{x}{3} + \frac{x^2}{9} = 25$

$\frac{10}{9}x^2 - 10x + 45 = 25$

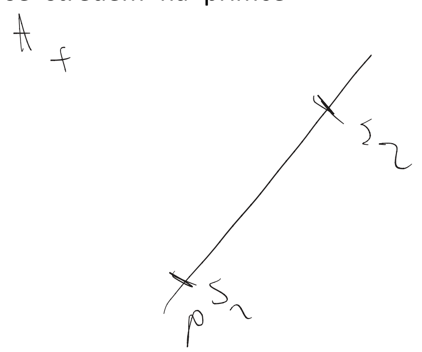
$\frac{10}{9}x^2 - 10x + 20 = 0$

$x_1 = 6 \quad y_1 = 4$

$x_2 = 3 \quad y_2 = 5$

$k_1: (x-6)^2 + (y-4)^2 = 25$

$k_2: (x-3)^2 + (y-5)^2 = 25$



$|AS| = 5$

[$(x-3)^2 + (y-5)^2 = 25$; $(x-6)^2 + (y-4)^2 = 25$]

7. Určete rovnici tečen vedených ke kružnici o poloměru r = 1 se středem $S[0;1]$, z bodu $M[-3;0]$ a souřadnice tečných bodů.

$k: x^2+(y-1)^2=1$ $M \in t$ $M[-3;0]$

$t: x_0x+(y_0-1)(y-1)=1$

$T[x_0;y_0]$

$M \in t: -3x_0-y_0=0 \to y_0=-3x_0$

$T \in k: x_0^2+(y_0-1)^2=1$

$x_0^2+(-3x_0-1)^2=1$

$x_0^2+9x_0^2+6x_0+\cancel{1}-\cancel{1}=0$

$10x_0^2+6x_0=0$

$x_{01}=-\frac{3}{5}$ $x_{02}=0$

$y_{01}=\frac{9}{5}$

$y_{02}=0$

$T_1\left[-\frac{3}{5};\frac{9}{5}\right]$ $T_2[0;0]$

$t_1: -\frac{3}{5}x+\left(\frac{9}{5}-1\right)(y-1)=1$

$-\frac{3}{5}x+\frac{4}{5}y-\frac{4}{5}-1=0$

$t_1: -3x+4y-9=0$

$t_2: 0-y+1=1 \to t_2: y=0$

[$t_1: y=0$; $t_2: -3x+4y-9=0$; $T_1[0;0]$; $T_2\left[-\frac{3}{5};\frac{9}{5}\right]$]

8. Určete číslo c tak, aby přímka $x+y+c=0$ byla a) tečnou, b) sečnou, c) vnější přímkou kružnice $x^2+y^2=1$.

$x+y+c=0 \to y=-x-c$

$x^2+(-x-c)^2=1$

$x^2+x^2+2cx+c^2=1$

$2x^2+2cx-1+c^2=0$

$A=2$

$B=2c$

$C=c^2-1$

$D=b^2-4ac=4c^2-4(2)(c^2-1)=4c^2-8c^2+8=-4c^2+8$

a) $D=0$

$-4c^2+8=0$

$c=\pm\sqrt{2}$

b) $D>0$

$-4c^2+8>0$

$-4c^2>-8$

$c^2<2$

$|c|<\sqrt{2} \to c\in(-\sqrt{2};\sqrt{2})$

d) $|c|>\sqrt{2} \to c\in(-\infty;-\sqrt{2})\cup(\sqrt{2};\infty)$

[a) $c=\pm\sqrt{2}$ b) $c\in(-\sqrt{2};\sqrt{2})$; c) $c\in(-\infty;-\sqrt{2};)\cup(\sqrt{2};\infty)$]

9. Určete délku tětivy, kterou na přímce $x+5y+13=0$ vytne kružnice se středem $S[0;0]$ a poloměrem r=$\sqrt{13}$.

$k: x^2+y^2=13$

$x+5y+13=0 \to x=-5y-13$

$(-5y-13)^2+y^2=13$

$25y^2+130y+169+y^2=13$

$13y^2+65y+78=0$

$y=\frac{-65\pm\sqrt{169}}{26}=$ $y_1=-2$, $y_2=-3$

$x_1=+10-13=-3$

$x_2=15-13=2$

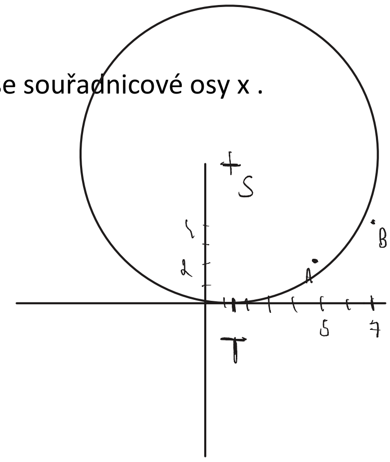
$A[-3;-2]$

$B[2;-3]$

$|AB|=\sqrt{(-3-2)^2+(-2+3)^2}=\sqrt{26}$

[$\sqrt{26}$]

10. Najděte rovnici kružnice, která prochází body $A[5;2], B[7;4]$ a dotýká se souřadnicové osy x .



$A[5;2]$ $T[t;0]$
$B[7;4]$ $S[t;r]$

$k: (x-t)^2+(x-r)^2=r^2$

$A \in k$
$(5-t)^2+(2-r)^2=r^2$
$25-10t+t^2+4-4r+r^2=r^2$
$t^2-10t+29-4r=0$

$B \in k$
$(7-t)^2+(4-r)^2=r^2$
$49-14t+t^2+16-8r+r^2=r^2$
$t^2-14t+65-8r=0$

$1: t^2-10t+29-4r=0 \quad / \cdot(-2)$
$-2t^2+20t-58+8r=0$
$2: t^2-14t+65-8r=0$

$-t^2+6t+7=0$
$t_1=7 \quad t_2=-1$
$7^2-10\cdot 7+29-4r_1=0$
$-4r_1=-8$
$r_1=2$

$1+10+29-4r_2=0$
$-4r_2=40$
$r_2=10$

$k_1: (x-7)^2+(y-2)^2=4$
$k_2: (x+1)^2+(y-10)^2=100$

$[(x-7)^2+(y-2)^2=4; (x+1)^2+(y-10)^2=100]$

11. Převeďte rovnici kružnice na středový tvar, určete souřadnice středu a poloměr.

a) $x^2+y^2-6x+10y-27=0$

$x^2-6x+y^2+10y-27=0$
$(x-3)^2-9+(y+5)^2-25-27=0$
$(x-3)^2+(y+5)^2=61$

$S[3;-5]$
$r=\sqrt{61}$

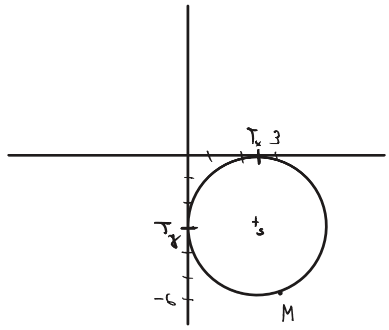
b) $2x^2+2y^2+2x-10y-37=0$

$2x^2+2x+2y^2-10y-37=0$
$2[(x+\frac{1}{2})^2-\frac{1}{4}]+2[(y-\frac{5}{2})^2-\frac{25}{4}]-37=0$
$2(x+\frac{1}{2})^2-\frac{1}{2}+2(y-\frac{5}{2})^2-\frac{25}{2}-37=0$
$(x+\frac{1}{2})^2+(y-\frac{5}{2})^2=(\frac{74}{2}+\frac{25}{2}+\frac{1}{2})/2$
$(x+\frac{1}{2})^2+(y-\frac{5}{2})^2=25$

$S[-\frac{1}{2};\frac{5}{2}]$
$r=5$

$[a)\ (x-3)^2+(y+5)^2=61; S[3;-5]; r=\sqrt{61}; \quad b)\ (x+\frac{1}{2})^2+(y-\frac{5}{2})^2=25; S[-\frac{1}{2};\frac{5}{2}]; r=5\ ]$

12. Napište středovou rovnici kružnice, která se dotýká osy x a osy y souřadnicového systému a prochází bodem $M[3;-6]$.



$T_x[t_x;0]$ $T_y[0;t_y]$ $M[3;-6]$ $S[r;-r]$

$k: (x-r)^2+(y+r)^2=r^2$

$M \in k$

$(3-r)^2+(-6+r)^2=r^2$

$9-6r+\cancel{r^2}+36-12r+r^2=\cancel{r^2}$

$r^2-18r+45=0$

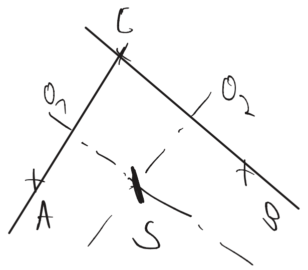
$r_1=15 \quad r_2=3$

$k_1: (x-15)^2+(y+15)^2=225$

$k_2: (x-3)^2+(y+3)^2=9$

$[(x-3)^2+(y+3)^2=9; (x-15)^2+(y+15)^2=225]$

13. Napište středovou rovnici kružnice opsané trojúhelníku ABC, určete její střed a poloměr, je-li $A[0;0]$, $B[4;0]$, $C[4;8]$.



vzoreček

$O_1=\frac{A+C}{2}$ $O_1[2;4]$

$\vec{n}_{o_1}: \vec{AC}=C-A=(4;8)$

$o_1: 4x+8y+c=0$

$4\cdot 2+8\cdot 4+c=0$

$c=-40$

$o_1: 4x+8y-40=0$

$O_2=\frac{B+C}{2}$ $O_2[4;4]$

$\vec{n}_{o_2}=\vec{BC}=C-B=(0;8)$

$o_2: 0x+8y+c=0$

$32+c=0$

$c=-32$

$o_2: 8y-32=0$

$y=4$

$4x+8\cdot 4-40=0$

$x=2$

$S[2;4]$

$S \in o_1 \cap o_2$

$r=|AS|=\sqrt{(2-0)^2+(4-0)^2}=2\sqrt{5}$

$(x-2)^2+(y-4)^2=20$

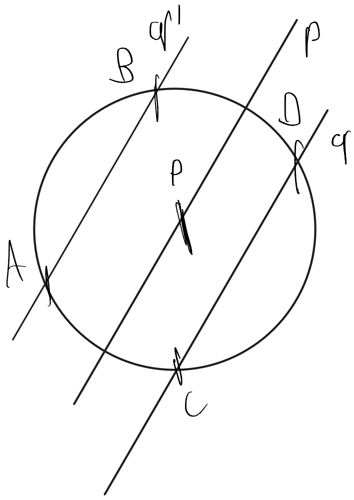
$[a)\ (x-2)^2+(y-4)^2=20; S[2;4]; r=2\sqrt{5}\ ]$

14. Na kružnici k se středem v počátku soustavy souřadnic a s poloměrem r=$\sqrt{26}$ nalezněte takové body, které mají od přímky $2x-3y=0$ vzdálenost d=$\sqrt{13}$.

$S[0;0]$ $\quad d=\sqrt{13}$

$r=\sqrt{26}$

/[−5; 1], [1; 5], [−1; −5], [5; −1]/



$k: x^2+y^2=26$ $\quad p: 2x-3y=0$

$P[0;0]$ vzoreček

$$\sqrt{13}=\frac{|2\cdot 0-3\cdot 0+c|}{\sqrt{4+9}}$$

$\pm 13 = c$

$q: 2x-3y+13=0$

$q': 2x-3y-13=0$

C D)

$q: 2x-3y+13=0$

$x=\frac{3y-13}{2}$

dosadit do k

$$\frac{(3y-13)^2}{4}+y^2=26$$

$$\frac{9y^2-78y+169}{4}+y^2=26$$

$$9y^2-78y+169+4y^2=104$$

$$13y^2-78y+65=0$$

$y_1=5 \quad x_1=\frac{3\cdot 5-13}{2}=1$

$y_2=1 \quad x_2=\frac{3\cdot 1-13}{2}=-5$

$C[1;5]$

$D[-5;1]$

AB) $q': 2x-3y-13=0 \rightarrow x=\frac{3y+13}{2}$

$$\left(\frac{3y+13}{2}\right)^2+y^2=26$$

$$9y^2+78y+169+4y^2=104$$

$$13y^2+78y+65=0$$

$y_1=-1 \quad x_1=\frac{3\cdot(-1)+13}{2}=5$

$y_2=-5 \quad x_2=\frac{3\cdot(-5)+13}{2}=-1$

$A[5;-1]$

$B[-1;-5]$