17. Operace s vektory, analytické vyjádření přímky v rovině a v prostoru (MO 25)

souřadnice bodu, vektoru, velikost úsečky, střed úsečky

skalární a vektorový součin, úhel vektorů

parametrická, obecná, směrnicová rovnice přímky

vzdálenost bodu od přímky, vzdálenost rovnoběžek

vzájemná poloha přímek, průsečík různoběžek, odchylka přímek

obsah trojúhelníku

rovnice přímky v prostoru

Teorie, vzorce, tabulky:

$$\cos \varphi = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{|\vec{u}| \cdot |\vec{v}|}$$

$$T = \frac{A+B+C}{3}$$

Dotazy?

Příklady, které mi nešly:

1. Určete číslo t tak, aby vektory $\vec{u} = (1; 1; 2t)$ a $\vec{v}(t; t; -1)$ byly navzájem kolmé.

$\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$

$t + t - 2t = 0$

$0 = 0$

$t \in R$

[t∈R]

2. Zjistěte, je-li vektor $\vec{u} = (3; -1; 1)$ lineární kombinací vektorů $\vec{a} = (3; 1; 0)$, $\vec{b} = (2; 2; -1)$.

$k\vec{a} + l\vec{b} = \vec{u}$

$3k + 2l = 3$

$k + 2l = -1 \quad | \cdot -1$

$3k + \cancel{2l} = 3$

$-k - \cancel{2l} = 1$

$2k = 4$

$k = 2$

$2 + 2l = -1$

$2l = 1$

$l = \frac{1}{2}$

$-l = 1$

$-\frac{1}{2} \neq 1$

není lin komb.

[Není]

3. Najděte jednotkový vektor kolmý k vektorům $\vec{u} = (-3; 2; 0)$ $\vec{v} = (2; -1; 5)$.

$\vec{u} \times \vec{v}$

$-3; 2; 0$

$2; -1; 5$

$(10; 15; -1)$

$\sqrt{100 + 225 + 1} = \sqrt{326}$

$\vec{w} = \left(\frac{\sqrt{326}}{10}; \frac{\sqrt{326}}{15}; -\frac{\sqrt{326}}{1}\right)$

[$\vec{w} = \pm\frac{\sqrt{326}}{326}(10; 15; -1)$]

4. V trojúhelníku *ABC*, kde *A*=[2;3], *B*=[6;-1], *C*=[5;3]. Určete

a) velikost jeho vnitřích úhlů

$$\cos\alpha = \frac{\vec{AC}\cdot\vec{AB}}{|\vec{AC}||\vec{AB}|} = \frac{12}{\sqrt{9}\cdot\sqrt{32}} \to \alpha = 45^\circ$$

$\vec{AC} = C - A = (3;0)$

$\vec{AB} = B - A = (4;-4)$

$\vec{BC} = C - B = (-1;4)$

$$\cos\beta = \frac{\vec{AB}\cdot\vec{BC}}{|\vec{AB}||\vec{BC}|} = \frac{-4-16}{\sqrt{32}\cdot\sqrt{17}} \to \beta = 180 - \cos^{-1}\left(\frac{-20}{\sqrt{32}\cdot\sqrt{17}}\right) = 30^\circ 58'$$

$$180 - (45 + 30^\circ 58') = 104^\circ 2'$$

b) velikost výšky v_c a velikost těžnice t_c

$t_c = |\vec{S_{AB}C}| = \sqrt{5}$

$S_{AB} = \frac{A+B}{2} = [4;1]$ $\quad C - S_{AB} = (1;2)$

$\vec{n} = (4;4) = (1;1)$

$c: x - y + c = 0$

$2 - 3 + c = 0$

$c = 1$

$$|CP| = \sqrt{\left(\frac{7}{2}-5\right)^2 + \left(\frac{9}{2}-3\right)^2} = \frac{3\sqrt{2}}{2}$$

$v_c: x + y + c = 0$

$x + y - 8 = 0 \to x = 8 - y$

$C \in v_c$

$5 + 3 + c = 0$

$c = -8$

$8 - y - y + 1 = 0$

$-2y = -9$

$y = \frac{9}{2}$ $\quad P\left[\frac{7}{2}; \frac{9}{2}\right]$

c) polohu těžiště tohoto trojúhelníka

$$T_x = \frac{2+6+5}{3} = \frac{13}{3}$$

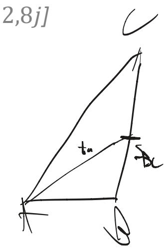
$$T_y = \frac{3-1+3}{3} = \frac{5}{3}$$

$$T\left[\frac{13}{3}; \frac{5}{3}\right]$$

d) obvod trojúhelníku ABC

$$|\vec{AC}| + |\vec{AB}| + |\vec{BC}| = 3 + \sqrt{32} + \sqrt{17} = 12{,}8$$

[a) 45°, 30°58', 104°2'b) $v_c=\frac{3\sqrt{2}}{2}$, $t_c=\sqrt{5}$;c) $T\left[\frac{13}{3};\frac{5}{3}\right]$, $o = 12{,}8j$]



5. Body A=[3;6;0], B=[1;4;5], C=[5;2;7] tvoří vrcholy trojúhelníku. Vypočtěte velikost těžnice t_a a obsah trojúhelníku.

$S_{BC} = \frac{B+C}{2} = [3;3;6]$

$\vec{AS_{BC}} = S_{BC} - A = (0;-3;6)$

$|t_a| = \sqrt{9+36} = \sqrt{45} = 3\sqrt{5}$

$\vec{AB} = B - A = (-2;-2;5)$

$\vec{AC} = C - A = (2;-4;7)$

$\vec{AB} \times \vec{AC}$

$-2;-2;5$

$2;-4;7$

$(-6;24;-12)$

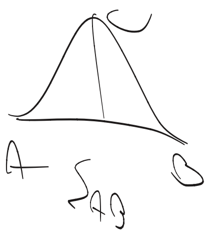
$S = \frac{1}{2}|\vec{AB} \times \vec{AC}|$

$= \frac{1}{2}\sqrt{36+24^2+144} = 3\sqrt{21}$

$= 13{,}75$

[$3\sqrt{5}$; 13,75]

6. Vypočtěte velikost úhlu, který svírá těžnice t_c se stranou a v trojúhelníku ABC, je-li A=[1;-5;5], B=[3;1;1], C=[5;-3;3].



$S_{AB} = \frac{A+B}{2} = [2;-2;3]$

$\vec{CS_{AB}} = S_{AB} - C = (-3;1;0)$

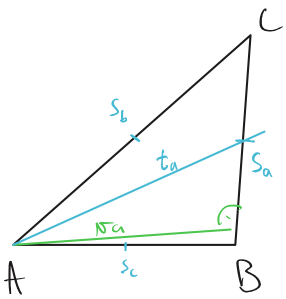
$\vec{BC} = C - B = (2;-4;2)$

$\cos\varphi = \frac{-6-4}{\sqrt{9+1}\,\sqrt{4+16+4}} \Rightarrow \varphi = 130°12'$

$180 - 130°12' = 49°48'$

[49°48′]

7. Jsou dány body $A=[3;2]$, $B=[-1;1]$. Určete souřadnice bodu C, je-li $\overrightarrow{BC}(12;-5)$. Dokažte, že body A, B, C jsou vrcholy trojúhelníku.



$\overrightarrow{AB} = B - A = (-4;-1)$
$\overrightarrow{AC} = C - A = (8;-6)$
$\overrightarrow{BC} = (12;-5)$

$C - B = (12;-5)$
$12 = x+1 \rightarrow x = 11$
$-5 = y-1 \rightarrow y = -4$
$C[11;-4]$

Napište rovnice přímek, na nichž leží

a) napište obecné rovnice stran trojúhelníku

a: $5x+12y+c=0$
$B \in a$
$5(-1)+12(1)+c=0$
$c=-7$

b: $6x+8y+c=0$
$A \in b$
$6\cdot 3+8\cdot 2+c=0$
$c=-34$

c: $x-4y+c=0$
$A \in c$
$3-4(2)+c=0$
$c=5$

$a: 5x+12y-7=0$ $\quad$ $b: 3x+4y-17=0$ $\quad$ $c: x-4y+5=0$

b) napište parametrické rovnice výšek trojúhelníku

v_a: $\vec{u}=(5;12)$
$x=3+5r$
$y=2+12r$

v_b: $\vec{u}=(3;4)$
$x=-1+3t$
$y=1+4t$

v_c: $\vec{u}=(1;-4)$
$x=11+p$
$y=-4-4p$

c) napište směrnicové rovnice těžnic trojúhelníku

$S_a = \frac{B+C}{2} = [5;-\frac{3}{2}]$
$\overrightarrow{AS_a} = S_a - A = (2;-\frac{7}{2})$
$\frac{7}{2}x+2y+c=0$
$A \in t_a$ $\quad \frac{21}{2}+4+c=0$
$c=-\frac{29}{2}$
$\frac{7}{2}x+2y-\frac{29}{2}=0$
$t_a: y=-\frac{7}{4}x+\frac{29}{4}$

$S_b = \frac{A+C}{2} = [7;-1]$
$\overrightarrow{BS_b} = S_b - B = (8;-2) \Rightarrow (4;-1)$
$x+4y+c=0$
$B \in t_b$
$-1+4+c=0$
$c=-3$
$x+4y-3=0$
$t_b: y=-\frac{x}{4}+\frac{3}{4}$

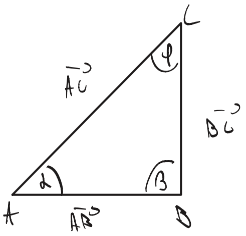
$S_c = \frac{A+B}{2} = [1;\frac{3}{2}]$
$\overrightarrow{CS_c} = S_c - C = (-10;\frac{11}{2})$
$\frac{11}{2}x+10y+c=0$
$C \in t_c$
$\frac{121}{2}-40+c=0$
$c=-\frac{41}{2}$
$\frac{11}{2}x+10y-\frac{41}{2}=0$
$t_c: y=-\frac{11}{20}x+\frac{41}{20}$

d) napište parametrické rovnice os stran trojúhelníku

o_a: $\vec{u}=(5;12)$
$x=5+5t$
$y=-\frac{3}{2}+12t$

o_b: $\vec{u}=(3;4)$
$x=7+3r$
$y=-1+4r$

o_c: $\vec{u}=(1;-4)$
$x=1+1p$
$y=\frac{3}{2}-4p$



$\vec{AB} = (-4; -1)$
$\vec{AC} = (8; -6)$
$\vec{BC} = (12; -5)$

$\vec{AB} = B - A = (-4; -1)$
$\vec{AC} = C - A = (8; -6)$
$\vec{BC} = (12; -5)$

e) určete vnitřní úhly trojúhelníku ABC

$\cos\alpha = \frac{\vec{AB}\,\vec{AC}}{|\vec{AB}||\vec{AC}|} = \frac{-32+6}{\sqrt{17}\cdot 10} \rightarrow \alpha = \cos^{-1}\left(\frac{-26}{10\sqrt{17}}\right) = 129°6'$

$\cos\beta = \frac{\vec{BA}\,\vec{BC}}{|\vec{BA}||\vec{BC}|} = \frac{48-5}{\sqrt{17}\cdot 13} \rightarrow \beta = \cos^{-1}\left(\frac{43}{13\sqrt{17}}\right) = 36°39'$

$\cos\varphi = \frac{\vec{CA}\,\vec{CB}}{|\vec{CA}||\vec{CB}|} = \frac{96+30}{10\cdot 13} \rightarrow \varphi = \cos^{-1}\left(\frac{126}{130}\right) = 14°15'$

f) určete souřadnice těžiště

$T = \frac{A+B+C}{3}$

$T_x = \frac{3-1+11}{3} = \frac{13}{3}$

$T_y = \frac{2+1-4}{3} = \frac{-1}{3}$

$T\left[\frac{13}{3}; -\frac{1}{3}\right]$

k jinému Δ, který má $A[3;2]$ $B[-1;-1]$ $C[11;-6]$

$C[11; -6]$
$a) 5x + 12y + 17 = 0; x + y - 5 = 0; 3x - 4y - 1 = 0$
$b) x = 3 + 5t, y = 2 + 12t; x = -1 + t, y = -1 + t; x = 11 + 3t, y = -6 - 4t$
$c) y = -\frac{11}{4}x + \frac{41}{4}; y = -\frac{1}{8}x - \frac{9}{8}; y = -\frac{13}{20}x + \frac{23}{20}$
$d) x = 5 + 5t, y = -3{,}5 + 12t; x = 7 + t, y = -2 + t; x = 1 + 3t, y = 0{,}5 - 4t$
$e)$ 98°8′, 59°29′, 22°23′
$f) T\left[\frac{13}{3}; -\frac{5}{3}\right]$

8. Napište rovnici přímky *q*, která prochází bodem *M*=[-4;6;-15] a je rovnoběžná s přímkou $\boldsymbol{p}: x = -1 - t; y = 5 - 2t; z = -7 + 5t$. Najděte průsečík přímky *q* s osou *x*?

[x=-4-t, y=6-2t,z=-15+5t; P=[-7;0;0]]

$p: x = -1 - t$
$y = 5 - 2t$
$z = -7 + 5t$

$q: x = -4 - t$
$y = 6 - 2t$
$z = -15 + 5t$

$P[x; 0; 0]$

$0 = 6 - 2t$
$-6 = -2t$
$t = 3$

$x = -4 - 3 = -7$

$P[-7; 0; 0]$

9. Určete vzájemnou polohu přímek: (pro různoběžky určete jejich společný bod.)

a) *AB*, *CD* jestliže: *A*=[0;0;2], *B*=[3;2;5], *C*=[4;1;5], *D*=[0;4;2].

$\vec{u}_{AB} = B-A = (3;2;3)$ → nejsou rovn.
$\vec{u}_{CD} = D-C = (-4;3;-3)$

AB: $x = 3t$, $y = 2t$, $z = 2+3t$

CD: $x = -4r$, $y = 4+3r$, $z = 2-3r$

$3t = -4r \quad /(2)$
$2t = 4+3r \quad /(-3)$
$-6t = 8r$
$6t = 12+9r$
$0 = 17r + 12$
$r = -\frac{12}{17}$

$3t = +\frac{48}{17}$
$t = \frac{16}{17}$
$2+3\cdot\frac{16}{17} = 2-3\left(-\frac{12}{17}\right)$
$L = \frac{82}{17} \quad P = \frac{70}{17}$

$L \neq P$ → mimoběžky

b) *KL*, *MN* jestliže *K*=[3;1;6], *L*=[4;0;8], *M*=[1;5;7], *N*=[0;8;10].

$\vec{u}_{KL} = L-K = (1;-1;2)$
$\vec{u}_{MN} = N-M = (-1;3;3)$ → LN

KL: $x = 3+t$, $y = 1-t$, $z = 6+2t$

MN: $x = 1-r$, $y = 5+3r$, $z = 7+3r$

$3+t = 1-r$
$1-t = 5+3r$
$4 = 6+2r$
$-2 = 2r$
$r = -1$

$3+t = 2$
$t = -1$

$6-2 = 7-3$
$4 = 4$ → různoběžky

$P[2;2;4]$

c) $\boldsymbol{p}: x = 2+4t; y = 3-t; z = -1+t$ a $\boldsymbol{q}: x = -2+12r; y = 4-3r; z = -2+3r$.

p: $x = 2+4t$, $y = 3-t$, $z = -1+t$

q: $x = -2+12r$, $y = 4-3r$, $z = -2+3r$

$P \in q$?
$2 = -2+12r$
$4 = 12r$
$r = \frac{1}{3}$

$y = 4-1 = 3$
$3 = 3$
$z = -2+1 = -1$
$-1 = -1$

$\vec{u}_p = (4;-1;1)$ ✓ $\vec{u}_q = (12;-3;3) = (4;-1;1)$

$P[2;3;-1]$ ∥

splývající rovnoběžky ← $P \in q$

d) $\boldsymbol{a}: x = 1+3t; y = 2-t; z = t$ a $\boldsymbol{b}: x = 1-6r; y = 2+2r; z = 3-2r$

a: $x = 1+3t$, $y = 2-t$, $z = t$

b: $x = 1-6r$, $y = 2+2r$, $z = 3-2r$

$\vec{u}_a = (3;-1;1)$
$\vec{u}_b = (-6;2;-2) = (3;-1;1)$
$\vec{u}_a \parallel \vec{u}_b$

$P[1;2;0]$ $P \in b$?

$1 = 1-6r \to r = 0$
$2 = 2+0$
$0 \neq 3-2$
$P \notin b$ → rovnoběžky různé

[a) mimoběžky b) různoběžky, P=[2,2,4] c)rovnoběžky splývající d)rovnoběžky různé]

10. Určete hodnotu parametrů *b* a *c*, aby přímka ***p***: $6x + by + c = 0$ byla totožná s přímkou *AB*, kde *A*=[1;2], *B*=[2;-1].

$A \in p$

$6+2b+c=0$

$B \in p$

$12-b+c=0 \quad |\cdot 2$

$24-2b+2c=0$

$6+2b+c=0$

$30+3c=0$

$c=-10$

$12-b-10=0$

$-b=-2$

$b=2$

[b = 2 ∧ c = -10]

11. Určete hodnotu parametrů *b* a *c*, aby přímky ***p***: $2x + by + 1 = 0$ a *AB*, kde *A*=[-3;c], *B*=[2;-1] byly totožné.

$A \in p$

$-6+cb+1=0$

$cb-5=0$

$B \in p$

$4-b+1=0$

$-b+5=0 \quad |\cdot c$

$-bc+5c=0$

$bc-5=0$

$5c=5$

$c=1$

$b-5=0$

$b=5$

[b = 5 ∧ c = 1]

12. Najděte průsečík přímky $x + 2y - 7 = 0$ a úsečky $x = 1 + 4t; y = 1 + 2t, kde\ t \in \langle 0; 1 \rangle$.

$x=1+4t$

$y=1+2t$

$\to x=7-2y$

$7-2y=1+4t$

$7-2(1+2t)=1+4t \qquad 7-2-4t-1-4t=0$

$-8t=-4$

$t=\frac{1}{2}$ [odpovídá intervalu]

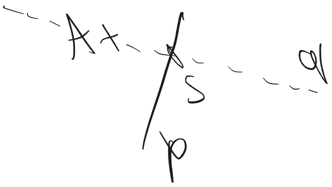
$x=1+4\cdot\frac{1}{2}=3$

$y=1+2\cdot\frac{1}{2}=2$

$P[3;2]$

[P[3;2]]

13. Najděte obraz bodu *A*=[4,0] v osové souměrnosti s osou ***p***: $x - 2y + 1 = 0$. $\to x=2y-1$



$p \perp q$

$q: 2x+y+c=0$

$8+c=0$

$c=-8$

$q: 2x+y-8=0$

$p \cap q$

$2(2y-1)+y-8=0$

$4y-2+y-8=0$

$5y=10$

$y=2$

$S[3;2]$

$\frac{A+A'}{2}=S$

$\frac{4+x}{2}=3$

$4+x=6$

$x=2$

$\frac{0+y}{2}=2$

$y=4$

$A'[2;4]$

[A′[2;4]]

14. Určete vzájemnou polohu přímek **p**: $x = 1 + t; y = -2 - 2t, t \in \boldsymbol{R}$ a **q:** $x + 2y - 1 = 0$, v případě různoběžnosti najděte průsečík.

$p: x = 1 + t$
$y = -2 - 2t$

$q: x + 2y - 1 = 0$
$\vec{n_q} = (1;2)$
$\vec{u_q} = (2;-1)$

$\vec{n_p} = (1;-2)$
$\vec{u_q} = (2;-1)$

LN (nejsou rovn)

$p \cap q$

$1 + t + 2(-2-2t) - 1 = 0$
$t - 4 - 4t = 0$
$-3t = 4$
$t = \frac{-4}{3}$

$x = 1 - \frac{4}{3} = -\frac{1}{3}$
$y = -2 + \frac{8}{3} = \frac{2}{3}$

$P[-\frac{1}{3}; \frac{2}{3}]$

[přímky jsou různoběžné, P[$-\frac{1}{3}$; $\frac{2}{3}$]]

15. Určete, pro které hodnoty parametru *b* budou přímky ***p*** a ***q*** navzájem kolmé.
p: $2x - (b + 2)y + 1 = 0$, ***q***: $x = 1 + bt; y = -1 - 4t, t \in \boldsymbol{R}$.

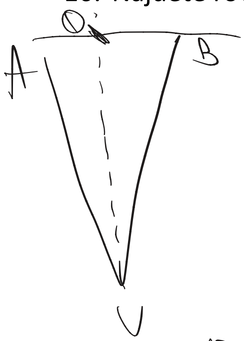
$\vec{n_p} = (2;(-b-2))$
$\vec{u_q} = (b;-4)$
$\vec{n_p} = (4;b)$

jsou kolmé když sk. souč = 0

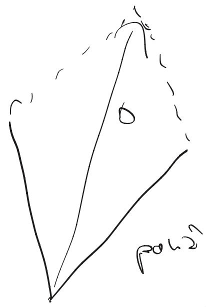
$8 + b(-b-2) = 0$
$8 - b^2 - 2b = 0$
$-b^2 - 2b + 8 = 0$
$b_1 = 2 \quad b_2 = -4$

[b = 2 ∨ b = -4]

16. Najděte rovnici osy úhlu *AVB*, kde *V*=[1;2], *A*=[4;6], *B*=[11;2].



$\vec{AV} = V - A = (-3;-4)$
$\vec{VA} = (3;4)$
$\vec{VB} = B - V = (10;0)$
$|\vec{VB}| = 10$
$|\vec{VA}| = 5$



posčítáme jedn. vek, musí být stejně dlouhý

$\vec{n_o} = (\frac{3}{5};\frac{4}{5})$ $N(\frac{10}{10};0)$
$\vec{u_o} = (\frac{8}{5};\frac{4}{5})$
$\vec{n_o} = (\frac{4}{5};\frac{-8}{5})$

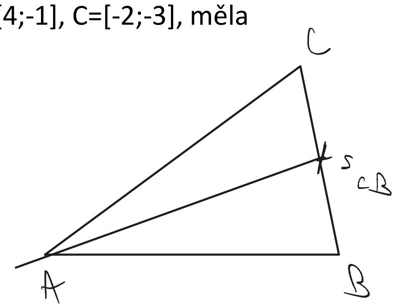
$V \in O$ $\frac{4}{5}x - \frac{8}{5}y + c = 0$
$\frac{4}{5} - \frac{16}{5} + c = 0$
$c = \frac{12}{5}$

$O: \frac{4}{5}x - \frac{8}{5}y + \frac{12}{5} = 0 \quad | \cdot \frac{5}{4}$

$O: x - 2y + 3 = 0$

[x-2y+3=0]

17. Určete hodnotu parametru *a*, aby těžnice t_a trojúhelníku ABC, kde A=[a;3], B=[4;-1], C=[-2;-3], měla délku $\sqrt{26}$j.



$A[a;3]\ ;\ B[4;-1]\ ;\ C[-2;-3]$

$|t_a| = \sqrt{26}$ $\qquad S_{CB} = \frac{C+B}{2} = [1;-2]$

$|AS_{CB}| = \sqrt{26}$

$\sqrt{(a-1)^2 + (3+2)^2} = \sqrt{26} \quad /^2$

$a^2 - 2a + 1 + 25 - 26 = 0$

$a^2 - 2a = 0$

$a_1 = 2 \quad a_2 = 0$

$a = 2$
$a = 0$

[a = 0 ∨ a = 2]

18. Určete odchylku přímek ***p***: $\sqrt{3}x + y - 4 = 0$ a **q**: $y = \sqrt{3}x$.

$p: \sqrt{3}x + y - 4 = 0 \qquad q: -\sqrt{3}x + y = 0$

$\vec{n}_p = (\sqrt{3};1) \qquad \vec{n}_q = (-\sqrt{3};1)$

$\cos\varphi = \frac{\vec{n}_p \cdot \vec{n}_q}{|\vec{n}_p||\vec{n}_q|} = \frac{-3+1}{\sqrt{3+1}\cdot\sqrt{3+1}} = \frac{-2}{4} = -\frac{1}{2}$

$\varphi = \cos^{-1}\left(-\frac{1}{2}\right) = 120^\circ$

$180 - 120 = 60^\circ$

[$\frac{1}{3}\pi$]