20. Analytické vyjádření elipsy (MO 26)

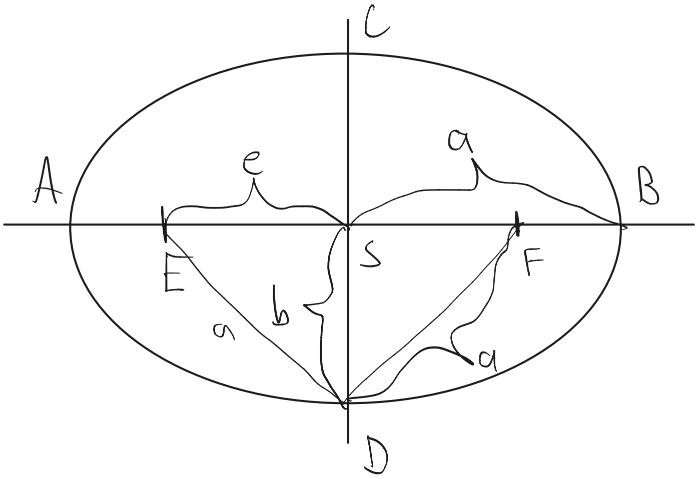
Obecná a středová rovnice elipsy

Ohniska, excentricita, délky poloos

vzájemná poloha přímky a elipsy

tečna k elipse

Teorie, vzorce, tabulky:



$a > b$

$e^2 + b^2 = a^2$

$e^2 = a^2 - b^2$

$e = \sqrt{a^2 - b^2}$

knedlík: $\frac{(x-m)}{a^2} + \frac{(x-n)^2}{b^2} = 1$

kebab: $\frac{(x-m)^2}{b^2} + \frac{(x-n)^2}{a^2} = 1$

$e^2 = a^2 - b^2$

Dotazy?

Příklady, které mi nešly:

6

1. Najděte rovnici elipsy, jejíž ohniska leží v bodech $F_1[-3;2], F_2[3;2]$ a délka hlavní poloosy je 5.

$|F_1F_2| = 2e \to e = 0{,}5 \cdot \sqrt{6^2} = 3$

výborně

$S = F_1 + F_2 / 2 = [0;2]$

$a = 5$

$b^2 = a^2 - e^2 = 16$

$e: \frac{x^2}{25} + \frac{(y-2)^2}{16} = 1$

$[\frac{x^2}{25} + \frac{(y-2)^2}{16} = 1]$

2. Určete polohu přímky $p: 2x + y - 6 = 0$ vzhledem k elipse dané rovnicí $4x^2 + y^2 = 20$.

$e: 4x^2 + y^2 = 20$

$\to y = 6 - 2x$

$4x^2 + (6-2x)^2 = 20$

$4x^2 + 36 - 24x + 4x^2 = 20$

$8x^2 - 24x + 16 = 0$

$D = b^2 - 4ac = 24^2 - 4 \cdot 8 \cdot 16 = 64$

$D > 0 \to$ sečna

[sečna]

3. Určete rovnici tečny k elipse $x^2 + 4y^2 - 4x + 32y + 48 = 0$ v tečném bodě $T[x_T > 0; -2]$.

$T \in e:$

$x_t^2 + 4 \cdot 4 - 4x_t - 64 + 48 = 0$

$x_t^2 - 4x_t = 0$

$x_t(x_t - 4) = 0$

$x_{t_1} = 0$

$x_{t_2} = 4$

$y_t = -2$ $T[4;-2]$

$x_t = 4$

$x^2 - 4x + 4y^2 + 32y + 48 = 0$

$(x-2)^2 - 4 + 4(y+4)^2 - 64 + 48 = 0$

$(x-2)^2 + 4(y+4)^2 = 20$

$t: (x_t - 2)(x-2) + 4(y_t + 4)(y+4) = 20$

$2x - 4 + 4 \cdot 2(y+4) = 20$

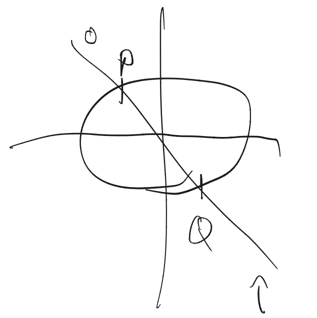
$2x - 4 + 8y + 32 - 20 = 0$

$2x + 8y + 8 = 0 \quad | : 2$

$t: x + 4y + 4 = 0$

$[x + 4y + 4 = 0]$

4. Určete velikost tětivy, kterou na elipse $x^2 + 2y^2 = 27$ vytíná osa II. a IV. kvadrantu.



$o \cap e$

$|PQ| = \sqrt{(3+3)^2 + (-3-3)^2} = \sqrt{36+36}$
$= \sqrt{72} = 6\sqrt{2}$

$x^2 + 2x^2 = 27$
$3x^2 = 27$
$x^2 = 9$
$x = \pm 3 \quad y_1 = -3$
$y_2 = 3$

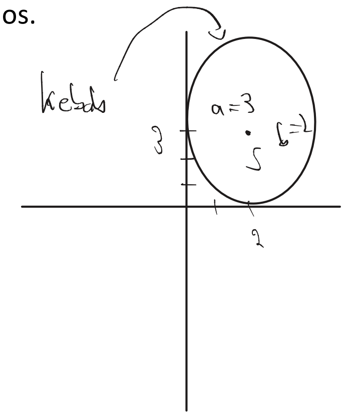
$o: y = -x$

$P[3; -3]$
$Q[-3; 3]$

$[6\sqrt{2}]$

5. Sestavte rovnici elipsy se středem v bodě $S[2; 3]$ dotýkající se obou souřadnicových os.

$$e: \frac{(x-2)^2}{4} + \frac{(y-3)^2}{9} = 1$$

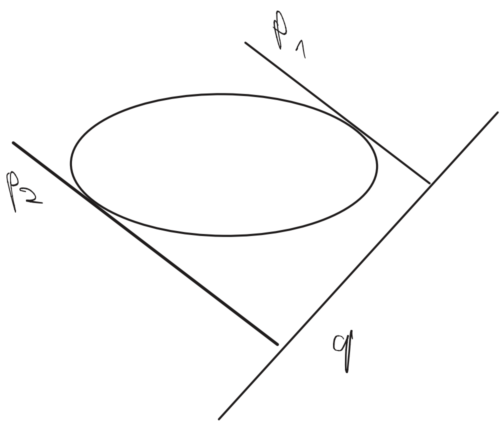


$[\frac{(x-2)^2}{4} + \frac{(y-3)^2}{9} = 1]$

6. Najděte rovnice tečen k elipse $x^2 + 4y^2 = 4$, které jsou kolmé k přímce $q: 3x + 2y = 0$.

$e: x^2 + 4y^2 = 4$ $\quad p: 2x - 3y + c = 0$
$-3y = -2x - c$
$y = \frac{-(2x+c)}{-3}$

$x^2 + 4 \cdot \frac{4x^2 + 4xc + c^2}{9} = 4$



$9x^2 + 4(4x^2 + 4xc + c^2) = 36$

$9x^2 + 16x^2 + 16xc + 4c^2 - 36 = 0$

$25x^2 + 16xc - 36 + 4c^2 = 0$

$A = 25$
$B = 16c$
$C = -36 + 4c^2$

$D = b^2 - 4ac = 256c^2 - 4 \cdot 25(-36 + 4c^2) = 256c^2 + 3600 - 400c^2$

$D = 0: -144c^2 + 3600 = 0$

$c_{1,2} = 5, -5$

$[2x - 3y \pm 5 = 0]$

$p: 2x - 3y \pm 5 = 0$

vedlejší

7. Napište obecnou rovnici elipsy, která má $S[2;-1]$, hlavní osu rovnoběžnou s osou x, velikost vedlejší poloosy $b=\sqrt{2}$, excentricitu $e=\sqrt{2}$,. Zjistěte vzájemnou polohu bodu $A[1;2]$ a elipsy.

$e^2 = a^2 - b^2$

$a^2 = e^2 + b^2 = 2 + 2 = 4$

$e: \frac{(x-2)^2}{4} + \frac{(y+1)^2}{2} = 1$

$x^2 - 4x + 4 + 2(y^2 + 2y + 1) = 4$

$x^2 - 4x + 4 + 2y^2 + 4y + 2 - 4 = 0$

$e: x^2 + 2y^2 - 4x + 4y + 2 = 0$

$A \in e$?

$\frac{(1-2)^2}{4} + \frac{(2+1)^2}{2} = 1$

$\frac{1}{4} + \frac{9}{2} = 1$

$L = \frac{19}{4}$

$P = 1$

$L > P \rightarrow$ vnější bod

$[x^2 + 2y^2 - 4x + 4y + 2 = 0]$

8. Napište obecnou rovnici elipsy, která má $S[0;0]$, vedlejší poloosu $b=8$, která má společná ohniska hyperbolou $8x^2 - y^2 - 32 = 0$.

$\mathcal{H}: \frac{8x^2}{32} - \frac{y^2}{32} = 1$

$\mathcal{H}: \frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{32} = 1 \rightarrow S[0;0]$

a^2, b^2

$e^2 = a^2 + b^2 = 36$

$e^2 = a^2 - b^2$

$36 = a^2 - 64$

$a^2 = 100$

$e: \frac{x^2}{100} + \frac{y^2}{64} = 1 \quad / \cdot 100 \cdot 64$

$64x^2 + 100y^2 = 6400$

$64x^2 + 100y^2 - 6400 = 0 \quad / : 4$

$e: 16x^2 + 25y^2 - 1600 = 0$

$[16x^2 + 25y^2 - 1600 = 0]$

9. Napište rovnici tečen k elipse $6x^2 + 27y^2 - 162 = 0$ v bodě $T[3; y_T]$. $T[3; \pm 2]$

$T \in e$

$6 \cdot 9 + 27 y_t^2 - 162 = 0$

$27 y_t^2 = 162 - 54$

$y_t^2 = 4$

$y_t = \pm 2$

$t: 6 x_t x + 27 y_t y - 162 = 0$

$6 \cdot 3x + 27 \cdot 2y - 162 = 0$

$18x + 54y - 162 = 0 \quad / : 18$

$t_1: x + 3y - 9 = 0$

$6 \cdot 3x - 27 \cdot 2y - 162 = 0$

$18x - 54y - 162 = 0$

$t_2: x - 3y - 9 = 0$

$[x + 3y - 9 = 0;\ x - 3y - 9 = 0]$

10. Napište osovou rovnici elipsy, která má střed $S[0;0]$ a prochází body $M_1[2;3], M_2[-1;-4]$. Určete souřadnice ohnisek.

$S[0;0]$
$M_1[2;3]$
$M_2[-1;-4]$

$e: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$

$e: \frac{3x^2}{55} + \frac{7y^2}{55} = 1$

$e = \sqrt{\frac{55}{3} - \frac{55}{7}} = 3{,}236$

$F_{12}[0; \pm 3{,}236]$

$j = \frac{1}{a^2}$ $i = \frac{1}{b^2}$

$4j + 9i = 1$
$1j + 16i = 1 \quad |\cdot(-4)$

$4j + 9i = 1$
$-4j - 64i = -4$

$0j - 55i = -3$
$i = \frac{3}{55}$

$\frac{3}{55} = \frac{1}{b^2}$

$j + \frac{16\cdot 3}{55} = 1$
$j = \frac{55}{55} - \frac{48}{55}$
$j = \frac{7}{55}$
$\frac{1}{a^2} = \frac{7}{55}$

$i > j$

tzn.

$[\frac{7x^2}{55} + \frac{3y^2}{55} = 1; F_{1,2}[0; \pm 3{,}24],]$

11. Určete kuželosečku $16x^2 + 25y^2 - 64x - 150y - 111 = 0$. (Druh kuželosečky, střed, poloosy, excentricitu, souřadnice vrcholů a ohnisek.) Kuželosečku načrtněte.

$16x^2 - 64x + 25y^2 - 150y - 111 = 0$
$16[x^2 - 4x] + 25[y^2 - 6y] - 111 = 0$
$16[(x-2)^2 - 4] + 25[(y-3)^2 - 9] - 111 = 0$
$16(x-2)^2 - 64 + 25(y-3)^2 - 225 - 111 = 0$
$16(x-2)^2 + 25(y-3)^2 = 400$

$\frac{(x-2)^2}{25} + \frac{(y-3)^2}{16} = 1$

$e^2 = a^2 - b^2 \Rightarrow e = \sqrt{25-16} = 3$

$S[2;3]$
$a = 5$
$b = 4$

$A[-3;3]$
$B[7;3]$
$C[2;-1]$
$D[2;7]$

$[\frac{(x-2)^2}{25} + \frac{(y-3)^2}{16} = 1;\ S[2;3]; a = 5; b = 4; e = 3]$

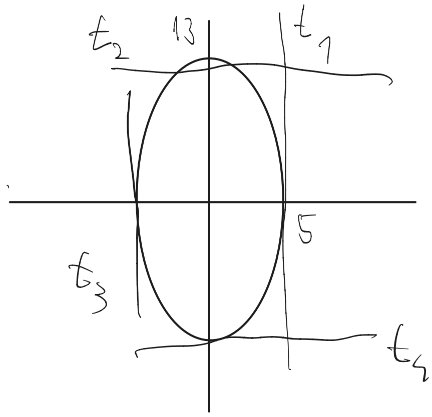
$S[0;0]$

12. Je dána elipsa $169x^2 + 25y^2 = 4225$. Vypočtěte velikost poloos *a*, *b*, excentricitu *e* a napište rovnici tečen k dané elipse v jejích vrcholech.

$169x^2 + 25y^2 = 4225 \;/ : 4225$

$\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{169} = 1$

b^2 $\quad a^2 \to$ kebal



$b = \sqrt{25} = 5$

$a = \sqrt{169} = 13$

$e = \sqrt{a^2 - b^2} = \sqrt{144} = 12$

$t_{13}: y = \pm 5$

$t_{24}: x = \pm 13$

! a > b !

Uhedlik

$[a = 5; b = 13; e = 12; y = \pm 13; x = \pm 5]$

13. Napište rovnici elipsy, která má hlavní osu rovnoběžnou s osou *x*, střed $S[2;1]$, hlavní osa je dvakrát delší než vedlejší osa a elipsa prochází počátkem soustavy souřadnic.

$a = 2b \quad S[2;1]$

$X \in e \quad X[0;0]$

$e: \frac{(x-2)^2}{8} + \frac{(y-1)^2}{2} = 1$

$e: \frac{(x-2)^2}{4b^2} + \frac{(y-1)^2}{b^2} = 1$

$X \in e: \frac{4}{4b^2} + \frac{1}{b^2} = 1$

$4 + 4 = 4b^2$

$4b^2 = 8$

$b^2 = 2$

$[\frac{(x-2)^2}{8} + \frac{(y-1)^2}{2} = 1]$

14. Určete, pro které hodnoty parametru $k \in \boldsymbol{R}$ má přímka $p: y = kx$ s elipsou $x^2 + 4y^2 - 6x + 1 = 0$ a) právě jeden společný bod, b) dva společné body, c) žádný společný bod.

$p: y = kx$

$e: x^2 + 4y^2 - 6x + 1 = 0$

$x^2 + 4k^2x^2 - 6x + 1 = 0$

$A = 1 + 4k^2$

$B = -6$

$C = 1$

a) $D = 0$

$D = B^2 - 4AC = 36 - 4 - 16k^2 = 0$

$32 = 16k^2$

$k^2 = 2$

$k = \pm\sqrt{2}$

b) $D > 0$

$32 - 16k^2 > 0$

$-16k^2 > -32$

$k^2 < 2$

$|k| < \sqrt{2}$

$k \in (-\sqrt{2}; \sqrt{2})$

c) $D < 0$

$|k| > \sqrt{2}$

$k \in (-\infty, -\sqrt{2}) \cup (\sqrt{2}; \infty)$

[a) $k = \pm\sqrt{2}$ b) $k \in (-\sqrt{2}; \sqrt{2})$; c) $k \in (-\infty; -\sqrt{2};) \cup (\sqrt{2}; \infty)$]

15. Napište rovnice tečen k elipse $x^2 + 9y^2 = 5$, které jsou rovnoběžné s přímkou $p: 2x - 3y = 0$.

$e: x^2 + 9y^2 - 5 = 0$

$t: 2x - 3y + c = 0 \rightarrow x = \frac{3y - c}{2}$

$\frac{9y^2 - 6yc + c^2}{4} + 9y^2 - 5 = 0 \quad | \cdot 4$

$9y^2 - 6yc + c^2 + 36y^2 - 20 = 0$

$a = 45$

$b = -6c$

$c = c^2 - 20$

$D = 0$

$D = b^2 - 4ac = 36c^2 - 4 \cdot 45(c^2 - 20)$

$36c^2 - 180c^2 + 3600 = 0$

$c = \pm 5$

[$2x - 3y \pm 5 = 0$]

$t: 2x - 3y \pm 5 = 0$

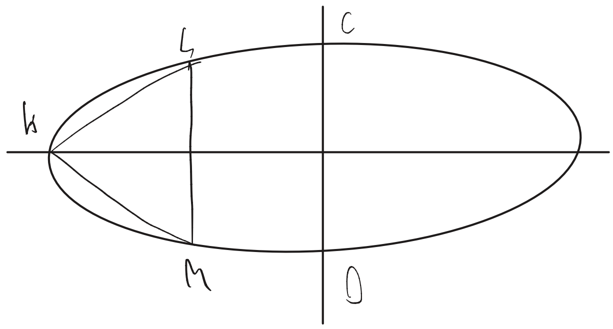
16. Do elipsy $x^2 + 3y^2 = 36$ vepište rovnostranný trojúhelník *KLM* tak, aby vrchol *K* splýval s hlavním vrcholem elipsy a vrcholy *L*, *M* ležely na dané elipse. Vypočítejte souřadnice vrcholů trojúhelníku *KLM* a délku jeho strany.

[$K_{1,2}[\pm 6; 0]$; $L[0; -2\sqrt{3}]$; $M[0; 2\sqrt{3}]$]

$e: x^2 + 3y^2 - 36 = 0$ $\quad |KL| = |LM| = |KM|$

$K = A$ $\quad A[-6;0]$

$L, M \in e$ $\quad K[-6;0]$



$e: \frac{x^2}{36} + \frac{y^2}{12} = 1$ $\quad L[x;y]$

$M[x;-y]$

$a = 6$

$|KL| = |LM|$

$\sqrt{(x+6)^2 + (y)^2} = \sqrt{(x-x)^2 + (y+y)^2}$

$x^2 + 12x + 36 + y^2 = 4y^2$

$3y^2 = x^2 + 12x + 36$

$y^2 = \frac{x^2 + 12x + 36}{3}$ ← dosadit do rce. elipsy

$\frac{x^2}{36} + \frac{1}{12} \cdot \frac{x^2 + 12x + 36}{3} = 1$ $\quad y^2 = \frac{0 + 0 + 36}{3}$

$x^2 + x^2 + 12x + \cancel{36} = \cancel{36}$ $\quad y = \pm\sqrt{12} = \pm 2\sqrt{3}$

$2x^2 + 12x = 0$ $\quad \boxed{L[0; 2\sqrt{3}]}$

$x_1 = -6$ ✗ $\quad \boxed{M[0; -2\sqrt{3}]}$

jedná se o vrchol

$x_2 = 0$ ✓