

Chapter 1

Elemente de Teoria Probabilităților

1.1 Spațiu de probabilitate

Pentru a defini conceptul de *spațiu de probabilitate*, vom considera un experiment, al cărui rezultat nu se poate preciza cu siguranță înaintea efectuării lui, dar pentru care mulțimea tuturor rezultatelor posibile este cunoscută.

Numim *eveniment elementar* oricare din rezultatele efectuării experimentului considerat. Spre exemplu, în cazul aruncării unui zar, *aparitia feței cu numărul 5 este un eveniment elementar*.

Vom nota prin Ω mulțimea tuturor evenimentelor elementare (mulțimea tuturor rezultatelor posibile ale experimentului considerat).

Numim *eveniment* o submulțime de a lui Ω (un eveniment este deci o mulțime de evenimente elementare).

În general, vom nota evenimentele cu majuscule (spre exemplu A, B, C, \dots) iar evenimentele elementare cu minuscule (spre exemplu $\omega, \omega_1, \omega_2, \dots$) sau prin alte simboluri (spre exemplu prin $1, 2, \dots, 6$ în cazul aruncării unui zar).

Distingem două evenimente importante:

- *evenimentul sigur* (notat Ω): este evenimentul ce apare la *fiecare efectuare a experimentului*;
- *evenimentul imposibil* (notat \emptyset): este evenimentul ce *nu apare la nici o efectuare a experimentului*.

Exemplul 1.1.1 *La aruncarea unui zar (considerând $\Omega = \{1, 2, \dots, 6\}$) putem considera ca evenimente:*

- A : *aparitia feței 3 (adică $A = \{3\}$)*
- B : *aparitia unui număr par (adică $A = \{2, 4, 6\}$)*
- C : *aparitia unui număr mai mare sau egal cu 3 (adică $C = \{3, 4, 5, 6\}$)*

Exemplul 1.1.2 *La aruncarea unui ban (considerând $\Omega = \{B, S\}$) putem considera ca evenimente:*

- A_1 : apariția banului (adică $A_1 = \{B\}$)
- A_2 : apariția stemei (adică $A_2 = \{S\}$)

Dat fiind un spațiu Ω de evenimente elementare, pentru două evenimente $A, B \subset \Omega$ introducem următoarele definiții:

Spunem că evenimentele A și B sunt **incompatibile** dacă ele **nu pot apare simultan la nici o efectuare a experimentului**;

Spunem că evenimentul A este **conținut** în evenimentul B și notăm $A \subset B$, dacă **realizarea evenimentului A atrage după sine realizarea evenimentului B** ;

Definim **reuniunea** evenimentelor A și B , notată prin $A \cup B$, ca fiind evenimentul ce constă în **realizarea lui A sau realizarea lui B** ;

Definim **intersecția** evenimentelor A și B , notată prin $A \cap B$, ca fiind evenimentul ce constă în **realizarea simultană a evenimentelor A și B** ;

Definim **evenimentul contrar** evenimentului A , notat prin A^c , ca fiind evenimentul ce constă în **nerealizarea evenimentului A** ;

Definim **diferența** evenimentelor A și B (în această ordine), notată prin $A - B$, ca fiind evenimentul ce constă în **realizarea lui A și nerealizarea lui B** .

Spunem ca evenimentele $A_1, A_2, \dots, A_n \subset \Omega$ formează un **sistem complet de evenimente** dacă sunt două **câte două incompatibile** și **reuniunea lor este întreg spațiul de evenimente Ω** , adică dacă au loc:

$$i) \quad A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n = \Omega$$

$$ii) \quad A_i \cap A_j = \emptyset, \quad \text{oricare ar fi } 1 \leq i, j \leq n$$

Observația 1.1.3 Pentru a defini probabilitatea asociată unui eveniment A , o posibilitate ar fi să repetăm experimentul de un număr $n \geq 1$ de ori, și să determinăm numărul (frecvența) $f_n(A)$ de apariții a evenimentului A în cele n repetări ale experimentului.

Raportul

$$fr_n(A) = \frac{f_n(A)}{n}$$

dă frecvența relativă a realizării lui A în cele n repetări ale experimentului, și am putea defini probabilitatea evenimentului A ca fiind

$$P(A) = \lim_{n \rightarrow \infty} fr_n(A) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f_n(A)}{n}.$$

Această definiție ar prezenta însă lacune din punct de vedere matematic (spre exemplu garantarea existenței limitei de mai sus, a independenței valorii limitei de o eventuală repetare a experimentelor de către “o altă persoană”, șamd).

Pentru a defini conceptul de probabilitate asociată unui eveniment, vom folosi o abordare modernă, axiomatică. Începem prin a defini noțiunea de algebră / σ -algebră, după cum urmează:

Definiția 1.1.4 *Dată fiind o mulțime nevidă $\Omega \neq \emptyset$, numim algebră / corp de părți a lui Ω o familie nevidă $\mathcal{F} \subset \mathcal{P}(\Omega) = \{A : A \subset \Omega\}$ de părți a lui Ω , cu proprietățile:*

i) \mathcal{F} este închisă la complementară, adică

$$A \in \mathcal{F} \implies A^c \in \mathcal{F}$$

ii) \mathcal{F} este închisă la reuniune, adică

$$A, B \in \mathcal{F} \implies A \cup B \in \mathcal{F}.$$

Exemplul 1.1.5 *Pentru $\Omega = \{B, S\}$, $\mathcal{F}_1 = \{\emptyset, \Omega\}$ (algebra “minimală”), $\mathcal{F}_2 = \mathcal{P}(\Omega) = \{\emptyset, \{B\}, \{S\}, \Omega\}$ (algebra “maximală”) sunt algebre ale lui Ω .*

In general, pentru o algebră \mathcal{F} arbitrară a unei mulțimi de evenimente elementare Ω are loc

$$\mathcal{F}_1 \subset \mathcal{F} \subset \mathcal{F}_2,$$

unde $\mathcal{F}_1 = \{\emptyset, \Omega\}$ și $\mathcal{F}_2 = \mathcal{P}(\Omega)$

Propoziția 1.1.6 *Dacă \mathcal{F} este o algebră a lui Ω , atunci au loc următoarele:*

a) $\emptyset, \Omega \in \mathcal{F}$

b) $A, B \in \mathcal{F} \implies A \cap B \in \mathcal{F}$

c) Pentru orice $n \geq 1$ și $A_1, \dots, A_n \in \mathcal{F}$, avem $A_1 \cup \dots \cup A_n, A_1 \cap \dots \cap A_n \in \mathcal{F}$

d) $A, B \in \mathcal{F} \implies A - B, B - A, A \Delta B \stackrel{\text{def}}{=} (A - B) \cup (B - A) \in \mathcal{F}$

Definiția 1.1.7 *Dată fiind o mulțime nevidă $\Omega \neq \emptyset$, numim σ -algebră / σ -corp de părți a lui Ω o familie nevidă $\mathcal{F} \subset \mathcal{P}(\Omega) = \{A : A \subset \Omega\}$ de părți a lui Ω , cu proprietățile:*

i) \mathcal{F} este închisă la complementară, adică

$$A \in \mathcal{F} \implies A^c \in \mathcal{F}$$

ii) \mathcal{F} este închisă la reuniuni numărabile, adică

$$A_1, A_2, \dots \in \mathcal{F} \implies \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{F}.$$

Are loc următoarea:

Propoziția 1.1.8 *Dacă \mathcal{F} este o σ -algebră a lui Ω , atunci au loc următoarele:*

a) $\emptyset, \Omega \in \mathcal{F}$

b) Pentru orice $n \geq 1$ și $A_1, \dots, A_n \in \mathcal{F}$, avem $A_1 \cup \dots \cup A_n, A_1 \cap \dots \cap A_n \in \mathcal{F}$

c) Pentru orice șir de evenimente $A_1, A_2, \dots \in \mathcal{F}$, avem $\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{F}$

d) $A, B \in \mathcal{F} \implies A \Delta B \stackrel{\text{def}}{=} (A - B) \cup (B - A) \in \mathcal{F}$

O mulțime nevidă Ω pentru care s-a definit o σ -algebră \mathcal{F} se numește **spațiu măsurabil**, și se notează (Ω, \mathcal{F}) .

Definiția 1.1.9 Numim (măsură de) **probabilitate** pe spațiul măsurabil (Ω, \mathcal{F}) o funcție $P : \mathcal{F} \rightarrow [0, \infty)$ cu proprietățile:

- i) $P(\Omega) = 1$
- ii) Oricare ar fi evenimentele $A_1, A_2, \dots \in \mathcal{F}$ incompatibile (disjuncte) două câte două, avem

$$P\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} P(A_n).$$

Definiția 1.1.10 Numim **spațiu (câmp) de probabilitate complet aditiv** un triplet (Ω, \mathcal{F}, P) unde

- $\Omega \neq \emptyset$ este mulțimea evenimentelor elementare;
- \mathcal{F} este o σ -algebră a lui Ω ;
- P este o măsură de probabilitate pe spațiul măsurabil (Ω, \mathcal{F}) .

Are loc următoarea:

Propoziția 1.1.11 Dacă (Ω, \mathcal{F}, P) este un spațiu de probabilitate complet aditiv, atunci au loc următoarele:

1. $P(\emptyset) = 0$
2. $P(A_1 \cup \dots \cup A_n) = P(A_1) + \dots + P(A_n)$, oricare ar fi $A_1, \dots, A_n \in \mathcal{F}$ disjuncte două câte două
3. $P(A) \leq P(B)$, oricare ar fi $A, B \in \mathcal{F}$ cu $A \subset B$
4. $0 \leq P(A) \leq 1$, oricare ar fi $A \in \mathcal{F}$
5. $P(A^c) = 1 - P(A)$, oricare ar fi $A \in \mathcal{F}$
6. $P(B - A) = P(B) - P(A)$, oricare ar fi $A, B \in \mathcal{F}$ cu $A \subset B$
7. $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$, oricare ar fi $A, B \in \mathcal{F}$.

Demonstrație. Exercițiu. ■

Exemplul 1.1.12 În cazul aruncării unui zar, putem considera ca spațiu de probabilitate (Ω, \mathcal{F}, P) , unde

- $\Omega = \{1, 2, \dots, 6\}$
- $\mathcal{F} = \mathcal{P}(\Omega) = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \dots, \{6\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \dots, \{5, 6\}, \dots, \{1, 2, \dots, 6\}\}$
- $P : \mathcal{F} \rightarrow [0, \infty)$, $P(\{1\}) = P(\{2\}) = \dots = P(\{6\}) = \frac{1}{6}$

Exemplul 1.1.13 În cazul aruncării unui ban, putem considera ca spațiu de probabilitate (Ω, \mathcal{F}, P) , unde

- $\Omega = \{B, S\}$
- $\mathcal{F} = \mathcal{P}(\Omega) = \{\emptyset, \{B\}, \{S\}, \{B, S\}\}$
- $P : \mathcal{F} \rightarrow [0, \infty)$, $P(\{B\}) = P(\{S\}) = \frac{1}{2}$ (sau $P(\{B\}) = p$, $P(\{S\}) = 1 - p$, $0 < p < 1$, în cazul în care banul este “măsluit”)

Exemplul 1.1.14 În cazul aruncării a două monede, putem considera ca spațiu de probabilitate (Ω, \mathcal{F}, P) , unde

- $\Omega = \{(B, B), (B, S), (S, B), (S, S)\}$
- $\mathcal{F} = \mathcal{P}(\Omega)$
- $P : \mathcal{F} \rightarrow [0, \infty)$, $P((B, B)) = P((B, S)) = P((S, B)) = P((S, S)) = \frac{1}{4}$

1.1.1 Exerciții

1. În câte moduri se pot forma cuvinte cu 3 litere a, b, c ?
2. La un examen se prezintă 2 băieți și 3 fete. Câte liste de rezultate (presupunând notele obținute distincte) se pot obține? Dar dacă rezultatele obținute sunt afișate pe liste diferite pentru băieți și fete?
3. 4 cărți de matematică, 3 cărți de chimie și două de geografie trebuie aranjate pe un raft, grupate pe subiecte. În câte moduri diferite se poate face aceasta?
4. În câte moduri diferite se pot acorda premiile I, II și III la 5 elevi?
5. În câte moduri se pot acorda 3 mențiuni la 5 elevi?
6. În câte moduri se poate forma un comitet de 3 persoane din 20 de oameni?
7. Câte grupuri de 5 persoane, formate din 2 bărbați și 3 femei se pot forma cu 5 bărbați și 7 femei?
8. Fie E , F și G trei evenimente. Să se descrie evenimentele:
 - (a) Numai E
 - (b) E și G dar nu F
 - (c) Cel puțin unul din evenimentele E , F , G
 - (d) Cel puțin două din evenimentele E , F , G
 - (e) Toate trei evenimentele E , F , G
 - (f) Nici unul din evenimentele E , F , G
 - (g) Cel mult unul din evenimentele E , F , G

- (h) Cel mult două din evenimentele E, F, G
- (i) Exact două din evenimentele E, F, G
- (j) Cel mult trei din evenimentele E, F, G

9. Să se simplifice expresiile:

- (a) $(E \cup F) \cap (E \cup F^c)$
- (b) $(E \cup F) \cap (E^c \cup F) \cap (E \cup F^c)$
- (c) $(E \cup F) \cap (F \cup G)$

10. Să se demonstreze inegalitatea lui Boole:

$$P\left(\bigcap_{i=1}^n E_i\right) \leq \sum_{i=1}^n P(E_i)$$

11. Dacă $P(E) = 0.9$ și $P(F) = 0.8$, să se demonstreze că $P(E \cap F) \geq 0.7$.
Mai general, să se demonstreze inegalitatea lui Bonferroni:

$$P(E \cap F) \geq P(E) + P(F) - 1.$$

12. Să se arate că aprobabilitatea ca exact unul din evenimentele E și F are loc este

$$P(E) + P(F) - P(E \cap F)$$

13. Să se demonstreze relația

$$P(E \cap F^c) = P(E) - P(E \cap F)$$

14. Să se demonstreze relația

$$P(E^c \cap F^c) = 1 - P(E) - P(F) + P(E \cap F)$$

15. O urnă conține M bile negre și N bile albe. Dacă din urnă se extrag r bile, care este probabilitatea ca exact k să fie bile albe? Dar dacă $N = k = 1$?