Mihai Andrei-Alexandru 06.06.2022.

Examen SAI

1) Notăm cu $m = \min(a,b)$ și $M = \max(a,b)$. Determinați $a, b, m, M$

$a = 5$ (Mihai)

$b = 9$ (Alexandru)

$m = \min(a,b) = \min(5,9) = 5$

$M = \max(a,b) = \max(5,9) = 9$

2) Câte permutări de ordin $m(5)$ se află în grupul de permutări $S_5$?

Fie $\sigma \in S_9$ și $l_1 \dots l_k$ - lungimea ciclurilor disjuncți din descompunerea lui $\sigma$

Atunci, $ord_{S_9}(\sigma) = [l_1 \dots \cancel{l} \; l_k]$

Cum $l_1 \dots l_k \geq 2$ și $m = 5$ este prim $\Rightarrow$

$ord_{S_9}(\sigma) = 5 \Leftrightarrow l_1 = \dots = l_k = 5$

- Dacă am avea minim 2 cicluri disjuncți de lungime 5 în descompunerea lui $\sigma$, atunci $9 \geq 5+5 \Rightarrow$ contradicție

- Deci $k = 1$. În total avem $C_9^5 = \frac{9!}{5! \cdot 4!} \Rightarrow \frac{\cancel{6} \cdot 7 \cdot \overset{2}{\cancel{8}} \cdot 9}{1 \cdot \cancel{2} \cdot \cancel{3} \cdot \cancel{4}} =$

126 permutări de ordin 5 în $S_9$.

3) Se consideră permutarea $\sigma = (1, \dots 5)(6, \dots 18)(19, \dots 27)$ un produs de 3 cicli disjuncți $S_{27}$. Determinați toate permutările ~~$\tau \in S_{34}$ as~~ $\tau \in S_{27}$ astfel încât $\tau^2 = \sigma$

4) Calculați ~~9~~ $M^{a^{b^m}} \pmod{31}$

$M^{a^{b^m}}$ / $= 9^{5^{9^5}} \pmod{31}$

\ (mod 31)

Din teorema lui Euler, cum $(9,31)=1$ avem $9^{\varphi(31)} \xrightarrow{31 \text{ prim}} 9^{30} \equiv 1 \pmod{31}$

Căutăm $5^{9^5} \pmod{30}$. Observăm următoarele:

$5^1 \equiv 5 \pmod{30}$; $5^2 \equiv 25 \equiv -5 \pmod{30}$

$5^3 \equiv -25 \equiv 5 \pmod{30}$

Vom demonstra că $\begin{cases} 5^{2n+1} \equiv 5 \pmod{30} \\ 5^{2n+2} \equiv 25 \pmod{30} \end{cases}$, $(\forall)\, n \geq 0$

- pentru $n=0$ (baza inducției) am calculat mai sus.
- pentru $n \geq 1$ avem $5^{2n+1} \cancel{= 5^{(2n+1)}} = 5^{2(n-1)+1} \cdot 5^2 \xrightarrow{\text{pasul de inducție}} 5 \cdot 25 = 5^3 \equiv 5 \pmod{30}$

$5^{2n+2} = 5^{2(n-1)} \cdot 5^2 \xrightarrow{\text{pasul de inducție}} 25 \cdot 25 \equiv (-5)\cdot(-5) \equiv 25 \pmod{30}$

- Cum $9^5$ este impar $\Rightarrow 5^{9^5} \equiv 5 \pmod{30}$

$9^{5^{9^5}} \equiv 9^{5^{9^5}} \pmod{30}$ $\cancel{\equiv 9^5} \cancel{\equiv 9^2 \cdot 9^2 \cdot 9}$

$\equiv 19 \cdot 19 \cdot 9 \equiv 361 \cdot 9 \equiv 51 \cdot 9 \equiv 20 \cdot 9 \equiv 180 \equiv 25 \pmod{31}$

5) Determinați cel mai mare număr natural de 4 cifre cu proprietatea că dacă îl împărțim pe rând la numerele 13, 14, 15, obținem resturile 5, 5 respectiv 9.

$(13,14)=(13,15)=(14,15)=1$

Fie $x$ numărul căutat. Atunci

$$\begin{cases} x\equiv 5 \pmod{13} \\ x\equiv 5 \pmod{14} \\ x\equiv 9 \pmod{15} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\equiv 5 \pmod{13} \\ x\equiv 5 \pmod{14} \\ x\equiv -6 \pmod{15} \end{cases}$$

$N=13\cdot 14\cdot 15=2730$

$N_1=\frac{N}{n_1}=14\cdot 15=210$

$N_2=13\cdot 15=195$

$N_3=13\cdot 14=182$

Căutăm $x_1, x_2, x_3$ astfel încât

$$\begin{cases} 210\,x_1\equiv 1 \pmod{13} \\ 195\,x_2\equiv 1 \pmod{14} \\ 182\,x_3\equiv 1 \pmod{15} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 1\cdot 2\cdot x_1\equiv 1 \pmod{13} \\ (-1)\cdot 1\cdot x_2\equiv 1 \pmod{14} \\ (-2)\cdot(-1)\cdot x_3\equiv 1 \pmod{15} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_1\equiv 7 \pmod{13} \\ x_2\equiv 13 \pmod{14} \\ x_3\equiv 8 \pmod{15} \end{cases}$$

Alegem $x_1=7$; $x_2=-1$; $x_3=-7$

Deci: $x\equiv 5\cdot 210\cdot 7+5\cdot 195\cdot(-1)-6\cdot 182\cdot(-7)\equiv 14019$
$\equiv 369 \pmod{2730}$ ⟸ din Lema Chineză a resturilor

$\Rightarrow$ $x$ căutat este $2730\cdot 3+369=8559$
$(8559<10000)$

4

6) Determinați numărul elementelor de ordin 12 din grupul produs direct $(\mathbb{Z}_{2^a},+)\times(\mathbb{Z}_{6^b},+)$

$(\mathbb{Z}_{2^5},+)\times(\mathbb{Z}_{6^9},+) =: G$

Fie $(\hat{x},\bar{y})\in G$. Atunci $ord_G(\hat{x},\bar{y}) = [ord_{\mathbb{Z}_{2^5}}(\hat{x}), ord_{\mathbb{Z}_{6^9}}(\bar{y})]$

$12 = [1,12] = [2,12] = [4,12] = [4,6] = [4,3]$

$\varphi(2) = 1$; $\varphi(4) = 2$, $\varphi(6) = 2$

$\varphi(3) = 2$ $\varphi(12) = 4$

Deci avem: $1\cdot 4 + 1\cdot 4 + 2\cdot 4 + 2\cdot 2 + 2\cdot 2$

$4+4+8+8 = 24$ elemente de ordin 12.

7) Considerăm pe $\mathbb{R}$ relația binară $\rho$ dată astfel: $x \rho y$ dacă $x^2 - 5x + \cancel{5} - \cancel{8} = y^2 - 5y + \cancel{5} - \cancel{8}$. Să se arate că $\rho$ este relație de echivalență, să se calculeze clasele de echivalență ale lui a și b și să se determine un sistem complet de reprezentanți pentru această relație de echivalență. Este funcția $f: \mathbb{R}/\rho \to \mathbb{R}$, ~~$f(\hat{x}) = 2x^2 - 25$~~
$f(\hat{x}) = 2x^2 - 10x + 25 - 45$ bine definită?

$f(\hat{x}) = 2x^2 - 10x - 20$

8) Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ definită astfel

$$f(x)=\begin{cases} ax+b(1-M) & \text{dacă } x<m \\ 4ax^2-4a(M+m)x+a^2(a+2b)+b(ab+1) & \text{dacă } m\le x\le M \\ bx-aM+m & \text{dacă } x>M \end{cases}$$

$$f(x)=\begin{cases} 5x-72; & \text{dacă } x<5 \\ 20x^2-280x+989; & \text{dacă } 5\le x\le 9 \\ 9x-40; & \text{dacă } x>9 \end{cases}$$

- decideți dacă funcția este injectivă, surjectivă, respectiv bijectivă! Calculați $f^{-1}([4,10])$

$5x-72\in(-\infty,-47)$; pt $x<5$

$9x-40\in(41,+\infty)$; pt $x>9$

Pt $5<x<9$ fie $g(x)=20x^2-280x+989$

$g(x)'=40x-280=0 \Rightarrow x=7\in(5,9)$

$f(5)=89=f(9)\Rightarrow f$ nu este injectivă (1)

$\Rightarrow 20x^2-280x+989\in[g(7),89]=[9,89]$, pt $5\le x\le 9$.

- așadar, $\operatorname{Im}(f)=(-\infty,-47)\cup[9,89]\cup(41,+\infty)$

$\neq\mathbb{R}\Rightarrow f$ nu este surjectivă (2)

$(1)+(2)\Rightarrow f$ nu este bijectivă

$f^{-1}([4,10])=\{x\in\mathbb{R}\mid 4\le f(x)\le 10\}$

Deci, căutăm $x \in [5,9]$ a.î. $9 \le f(x) \le 10$

$20x^2 - 280x + 989 = 10$

$20x^2 - 280x + 979 = 0$

$20(x^2 - 14x + 49) - 1 = 0$

$x - 7 = \pm \frac{1}{\sqrt{20}} \Rightarrow x = \pm \frac{\sqrt{5}}{20} + 7$

Deci, $f^{-1}([9,10]) = \cancel{\left\{7 - \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{20}}\right.}$

$\Rightarrow \left[7 - \frac{\sqrt{5}}{20}, 7 + \frac{\sqrt{5}}{20}\right]$

9) Determinați toate morfismele de grupuri $\phi$ : ~~$(\mathbb{Z}_9,+) \to (\mathbb{Z}_{12},+)$~~ $(\mathbb{Z}_5,+) \to (\mathbb{Z}_9,+)$ și specificați care dintre acestea sunt injective, surjective, bijective.

- fie $\phi : (\mathbb{Z}_5,+) \to (\mathbb{Z}_9,+)$ un morfism de grupuri

Notăm $\hat{x} \in \mathbb{Z}_5$ și $\bar{y} \in \mathbb{Z}_9$ , $\hat{x}^n = \underbrace{\hat{x} + \dots \hat{x}}_{n \text{ ori}}$

- presupunem că $\exists\ \hat{x} \in \mathbb{Z}_5$, $\hat{x} \neq \hat{0}$ a.î. $\phi(\hat{x}) \neq \bar{0}$
- cum $\phi$ morfism atunci

$$\phi(\hat{x})^{\text{ord}_{\mathbb{Z}_9}(\phi(\hat{x}))} = \text{ord}_{\mathbb{Z}_9}(\phi(\hat{x})) \mid 9 \quad (1)$$

$$\phi(\hat{x}^{\text{ord}_{\mathbb{Z}_9}(\phi(\hat{x}))}) \Rightarrow \hat{x}^{\text{ord}_{\mathbb{Z}_9}(\phi(\hat{x}))} \in \text{Ker}(\phi) \lhd \mathbb{Z}_5$$

$\text{Ker}(\phi) \lhd \mathbb{Z}_5 \Rightarrow \text{Ker}(\phi) \in \{[\hat{0}], \mathbb{Z}_5\}$

Din presupunerea făcută avem că $\text{Ker}\,\phi = \{\hat{0}\}$,
deci $\hat{x}^{\text{ord}_{\mathbb{Z}_9}(\phi(\hat{x}))} = \hat{0} \Rightarrow 5 \mid \text{ord}_{\mathbb{Z}_9}(\phi(\hat{x}))$ (2)

Din (1) + (2) obținem o contradicție $\Rightarrow$ unicul morfism este cel trivial, $\phi(\hat{x}) = \bar{0}$, $\forall\ \hat{x} \in \mathbb{Z}_5$

- acesta nu este nici injectiv, nici surjectiv, implicit nici bijectiv.

10) Determinați constantele $c, d \in \mathbb{Q}$ astfel încât polinoamele $X^5 - 9X + 1$ și $cX + d$ să fie în aceeași clasă de echivalență în inelul $\mathbb{Q}[X] / (X^2 - a^2 + b)$.

$$\widehat{X^5 - 9X + 1} = \widehat{cX + d}$$

$$\frac{\mathbb{Q}[X]}{(X^2 - 16)} = \{\widehat{aX + b} ; a, b \in \mathbb{Q}\}$$

- fie $f \in \mathbb{Q}[X] \Rightarrow \exists\, q, r \in \mathbb{Q}[X]$, a.î. $f = (X^2 - 16) \cdot q + r \Rightarrow \hat{f} = \hat{r}$

$\widehat{aX + b} = \widehat{cX + d} \Rightarrow X^2 - 16 \mid (a - c)X + b - d$

$\Rightarrow a = c \wedge b = d$

- așadar, căutăm restul împărțirii lui $X^5 - 9X + 1$ la $X^2 - 16$

$$
\begin{array}{l|l}
X^5 + 0X^4 + 0X^3 + 0X^2 - 9X + 1 & X^2 - 16 \\
\hline
X^5 + 0X^4 - 16X^3 & X^3 + 16X \\
\hline
\quad 16X^3 + 0X^2 - 9X & \\
\quad 16X^3 + 0X^2 - 256X & \\
\hline
\qquad\qquad 247X + 1 &
\end{array}
$$

- așadar, $\begin{cases} c = 247 \\ d = 1 \end{cases}$