Se consideră funcția reală: $f(x)=\begin{cases}-6k\cdot x^2, & x\in[-1,0)\\ 6k^2\cdot x, & x\in[0,1)\\ 0, & \text{în rest}\end{cases}$

a) *Determinați* $k\in\mathbb{R}$ *astfel încât* $f(x)$ *să fie densitatea de probabilitate a unei v.a.* X *;*

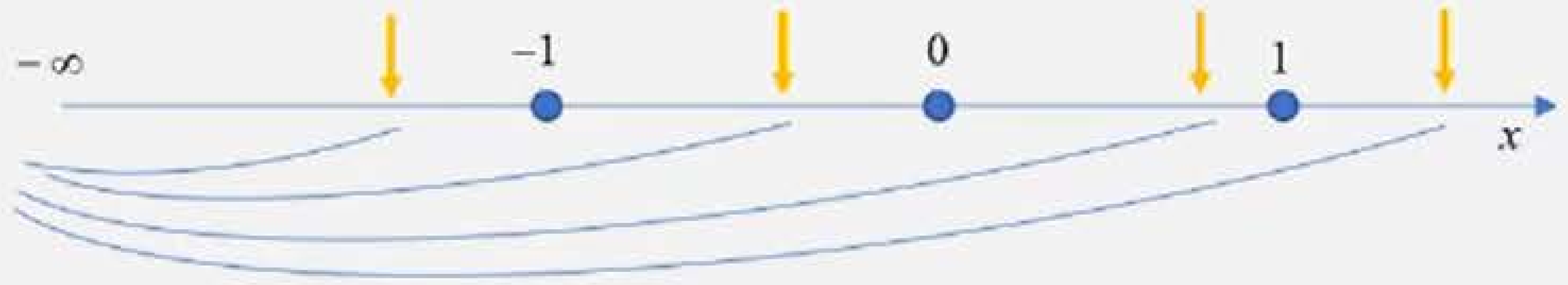
b) *Să se determine funcția de repartiție* $F_X(x)$ *;*

c) *Să se determine* $M[X]$, $D^2[X]$ *;*

d) *Să se calculeze:* $P\left(X\in\left[-1,\frac{1}{2}\right]\middle| X\geq 0\right)$.

$$\left.\begin{array}{l}\textbf{a)}\ \text{din condiția } f(x)\geq 0 \Rightarrow k\leq 0\\ \text{din condiția } \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx=1,\ \text{adică } \int_{-\infty}^{-1}0dx-6k\int_{-1}^{0}x^2dx+6k^2\int_0^1 x\,dx+\int_1^{\infty}0\,dx=1\ \text{obținem } 3k^2-2k-1=0\end{array}\right\}\ k=\frac{-1}{3}$$

$$f(x)=\begin{cases}2x^2, & x\in[-1,0)\\ \frac{2}{3}x, & x\in[0,1)\\ 0, & \text{în rest}\end{cases}$$



b) *pentru* $x \in (-\infty, -1)$, $F_X(x) = 0$;

pentru $x \in [-1, 0)$, $F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\,dt = \int_{-\infty}^{-1} 0\,dt + 2\int_{-1}^{x} t^2\,dt = \frac{2}{3}\left(x^3 + 1\right)$;

$$f(x) = \begin{cases} 2x^2, & x \in [-1, 0) \\ \frac{2}{3}x, & x \in [0, 1) \\ 0, & \text{în rest} \end{cases}$$

pentru $x \in [0, 1)$, $F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\,dt = \int_{-\infty}^{-1} 0\,dt + 2\int_{-1}^{0} t^2\,dt + \frac{2}{3}\int_{0}^{x} t\,dt = \frac{1}{3}\left(2 + x^2\right)$;

pentru $x \in [1, +\infty)$, $F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\,dt = \int_{-\infty}^{-1} 0\,dt + 2\int_{-1}^{0} t^2\,dt + \frac{2}{3}\int_{0}^{1} t\,dt + \int_{1}^{x} 0\,dt = 1$.

$$F_X(x) = \begin{cases} 0, & x \in (-\infty, -1) \\ \frac{2}{3}\left(x^3 + 1\right), & x \in [-1, 0) \\ \frac{1}{3}\left(2 + x^2\right), & x \in [0, 1) \\ 1, & x \in [1, +\infty) \end{cases}$$

$$f(x)=\begin{cases}2x^2, & x\in[-1,0)\\ \frac{2}{3}x, & x\in[0,1)\\ 0, & \text{în rest}\end{cases}$$

c) $$M[X]=\int_{-\infty}^{\infty}x\cdot f(x)\,dx=\int_{-1}^{0}2x^3dx+\int_{0}^{1}\frac{2}{3}x^2dx=-\frac{5}{18}$$

$$M[X^2]=\int_{-\infty}^{\infty}x^2\cdot f(x)\,dx=\int_{-1}^{0}2x^4dx+\int_{0}^{1}\frac{2}{3}x^3dx=\frac{17}{30}$$

$$D^2[X]=M[X^2]-(M[X])^2=\frac{793}{1620}\simeq 0.489$$

d) $$P\left(X\in\left[-1,\frac{1}{2}\right]\middle|X\geq 0\right)=\frac{P\left(X\in\left[0,\frac{1}{2}\right]\right)}{P(X\geq 0)}=\frac{F\left(\frac{1}{2}\right)-F(0)}{1-F(0)}=\frac{\frac{3}{4}-\frac{2}{3}}{1-\frac{2}{3}}=\frac{1}{4}$$

$$F_X(x)=\begin{cases}0, & x\in(-\infty,-1)\\ \frac{2}{3}(x^3+1), & x\in[-1,0)\\ \frac{1}{3}(2+x^2), & x\in[0,1)\\ 1, & x\in[1,+\infty)\end{cases}$$

CARACTERISTICI NUMERICE ALE VARIABILE ALEATOARE (II)

În cele ce urmează, pentru cazul discret vom considera o variabilă aleatoare de forma:

$$X = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \cdots & x_n \\ p_1 & p_2 & \cdots & p_n \end{pmatrix}, \text{ cu } p_i \geq 0 \text{ și } \sum_{i=1}^{n} p_i = 1$$

iar pentru cazul continuu vom considera o variabilă aleatoare $X = \begin{pmatrix} x \\ f(x) \end{pmatrix}$, *cu* $x \in \mathbb{R}$.

FUNCȚIA GENERATOARE DE MOMENTE

Se folosește pentru simplificarea calculelor momentelor unei variabile aleatoare.

Funcţie generatoare de momente *a variabilei aleatoare* X, *este valoarea medie a variabilei* $e^{t\cdot X}$, *unde* $t \in \mathbb{R}$.

Notăm funcţia generatoare de momente cu $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, *dată prin:* $g_X(t) = M\left[e^{t\cdot X}\right]$.

V.a. discretă simplă

$$g_X(t) = M\left[e^{t\cdot X}\right] = \sum_{i=1}^{n} e^{t\cdot x_i} p_i$$

V.a. continuă

$$g_X(t) = M\left[e^{t\cdot X}\right] = \int_{-\infty}^{\infty} e^{t\cdot x} f(x)\, dx$$

PROPRIETĂȚI ALE FUNCȚIEI GENERATOARE DE MOMENTE

Considerăm variabila aleatoare X cu funcția generatoare de momente $g_X(t)$. Atunci:

1 $g_X(0)=1$

2 *Dacă $X_1, X_2, ..., X_n$ sunt variabile aleatoare independente atunci:* $g_{X_1+X_2+...+X_n}(t)=g_{X_1}(t)\cdot g_{X_2}(t)\cdot ....\cdot g_{X_n}(t)$

3 *Dacă $Y=aX+b$, cu $a,b\in\mathbb{R}$ atunci:* $g_Y(t)=g_X(at)\cdot e^{bt}$

4 *Dacă X admite momente finite de orice ordin, atunci* $g_X(t)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{t^k}{k!}\cdot m_k$

5 ***Formula generării momentelor inițiale***

Funcţia generatoare de momente este de n ori derivabilă în raport cu t şi $g^{(k)}(t)\big|_{t=0}=m_k$

V.a. discretă simplă

$$g_X(t)=\sum_{i=1}^{n}e^{t\cdot x_i}p_i \Rightarrow g_X^{(k)}(t)=\sum_{i=1}^{n}x_i^k\cdot e^{t\cdot x_i}p_i$$

$$g_X^{(k)}(t)\big|_{t=0}=g_X^{(k)}(0)=\sum_{i=1}^{n}x_i^k p_i=m_k$$

V.a. continuă

$$g_X(t)=\int_{-\infty}^{\infty}e^{t\cdot x}f(x)dx \Rightarrow g_X^{(k)}(t)=\int_{-\infty}^{\infty}x^k\cdot e^{t\cdot x}f(x)dx$$

$$g_X^{(k)}(t)\big|_{t=0}=g_X^{(k)}(0)=\int_{-\infty}^{\infty}x^k f(x)dx=m_k$$

Determinați funcția generatoare de momente a variabilei aleatoare uniforme, care are densitatea de repartiție:

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{b-a}, & x\in(a,b)\\ 0, & x\notin(a,b)\end{cases}\quad, b>a\in\mathbb{R}$$

$$g_X(t)=M\left[e^{t\cdot X}\right]=\int_{-\infty}^{\infty}e^{t\cdot x}f(x)\,dx$$

$$g_X(t)=M\left[e^{t\cdot X}\right]=\int_{-\infty}^{\infty}e^{t\cdot x}f(x)\,dx=\int_a^b e^{t\cdot x}\cdot\frac{1}{b-a}\,dx=\frac{1}{b-a}\cdot\left.\frac{e^{t\cdot x}}{t}\right|_a^b=\frac{e^{t\cdot b}-e^{t\cdot a}}{t(b-a)}$$ *pentru orice* $t\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$

$$g_X(0)=M\left[e^{0\cdot X}\right]=M[1]=1$$

$$g_X(t)=\begin{cases}\dfrac{e^{t\cdot b}-e^{t\cdot a}}{t(b-a)}, & t\in\mathbb{R}\setminus\{0\}\\ 1, & t=0\end{cases}$$

Se consideră o variabilă aleatoare distribuită exponențial (are densitatea de repartiție $f(x) = \lambda e^{-\lambda \cdot x}$*, cu* $x \geq 0$, $\lambda > 0$. *Să se deducă expresia funcției generatoare de momente și să se calculeze cu ajutorul ei media și dispersia variabilei exponențiale.*

Funcția generatoare de momente pentru variabile aleatoare continue este: $g_X(t) = M\left[e^{t \cdot X}\right] = \int_{-\infty}^{\infty} e^{t \cdot x} f(x)\,dx$

Pentru variabila exponențială vom avea:

$$g_X(t) = M\left[e^{t \cdot X}\right] = \int_{-\infty}^{\infty} e^{t \cdot x} f(x)\,dx = \int_0^{\infty} e^{t \cdot x} \cdot \lambda \cdot e^{-\lambda \cdot x} dx = \int_0^{\infty} e^{t \cdot x} \cdot \lambda \cdot e^{-\lambda \cdot x} dx = \lambda \int_0^{\infty} e^{(t-\lambda) \cdot x} dx = \boxed{\lambda \left. \frac{e^{(t-\lambda) \cdot x}}{t-\lambda} \right|_0^{\infty}} = -\frac{\lambda}{t-\lambda},$$

pentru orice $t < \lambda$

Pentru $t \geq \lambda$ *integrala este divergentă, funcția generatoare de momente NU este definită.*

Media variabilei aleatoare exponențiale, calculată cu ajutorul funcției generatoare de momente, este:

$$M[X] = g'_X(t)\Big|_{t=0} = \left(-\lambda(t-\lambda)^{-1}\right)'\Big|_{t=0} = \lambda(t-\lambda)^{-2}\Big|_{t=0} = \frac{1}{\lambda}$$

Determinați funcția generatoare de momente a variabilei aleatoare uniforme, care are densitatea de repartiție:

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{b-a}, & x\in(a,b)\\ 0, & x\notin(a,b)\end{cases}\quad, b>a\in\mathbb{R}$$

$$g_X(t)=M\left[e^{t\cdot X}\right]=\int_{-\infty}^{\infty}e^{t\cdot x}f(x)\,dx$$

$$g_X(t)=M\left[e^{t\cdot X}\right]=\int_{-\infty}^{\infty}e^{t\cdot x}f(x)\,dx=\int_a^b e^{t\cdot x}\cdot\frac{1}{b-a}\,dx=\frac{1}{b-a}\cdot\left.\frac{e^{t\cdot x}}{t}\right|_a^b=\frac{e^{t\cdot b}-e^{t\cdot a}}{t(b-a)}$$ *pentru orice* $t\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$

$$g_X(0)=M\left[e^{0\cdot X}\right]=M[1]=1$$

$$g_X(t)=\begin{cases}\dfrac{e^{t\cdot b}-e^{t\cdot a}}{t(b-a)}, & t\in\mathbb{R}\setminus\{0\}\\ 1, & t=0\end{cases}$$

FUNCȚIA CARACTERISTICĂ

Funcția caracteristică este foarte utilă în studiul unei variabile aleatoare deoarece ajută la determinarea funcției de repartiție și momentelor de orice ordin ale variabilei aleatoare.

Pentru introducerea noțiunii de funcție caracteristică este necesară extinderea definiției variabilei aleatoare reale și în cazul complex:

Fie câmpul de probabilitate $\{\Omega, K, P\}$ *și variabilele aleatoare* $X, Y : \Omega \to \mathbb{R}$. *Se numește* ***variabilă aleatoare complexă*** *variabila* $Z = X + iY$ *(unde* $i^2 = -1$*).*

Valoarea medie a variabilei complexe este: $M[Z] = M[X] + i \cdot M[Y]$, *dacă mediile* $M[X]$ *și* $M[Y]$ *există.*

Funcţia caracteristică *a variabilei aleatoare* X *este valoarea medie a variabilei* $e^{i \cdot t \cdot X}$, *unde* $t \in \mathbb{R}$ *şi* $i^2 = -1$.

Notăm funcţia caracteristică cu $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$, *dată prin:* $\varphi_X(t) = M\left[e^{i \cdot t \cdot X}\right]$.

V.a. discretă simplă

$$\varphi_X(t) = M\left[e^{i \cdot t \cdot X}\right] = \sum_{k=1}^{n} e^{i \cdot t \cdot x_k} p_k$$

V.a. continuă

$$\varphi_X(t) = M\left[e^{i \cdot t \cdot X}\right] = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i \cdot t \cdot x} f(x) dx$$

Deoarece $\left|e^{i \cdot t \cdot x}\right| = 1$, *funcția caracteristică existǎ pentru orice variabilǎ aleatoare și este unic determinatǎ de funcția de repartiție.*

Dacă se cunoaște funcția caracteristică a unei variabile aleatoare continue, cum se poate determina funcția de repartiție?

- ***Teorema de inversiune**: Fie* X *o variabilă aleatoare pentru care se cunoaște* $\varphi_X(t)$ *și a cărei funcție de repartiție este* F. *Dacă* $x_1 < x_2$ *sunt două puncte de continuitate pentru* F, *atunci:*

$$F(x_2) - F(x_1) = \frac{1}{2\pi} \lim_{a \to \infty} \int_{-a}^{a} \frac{e^{-itx_1} - e^{-itx_2}}{it} \varphi(t)\, dt$$

- *Dacă* $\varphi_X(t)$ *este absolut integrabilă pe* $\mathbb{R}$, *atunci funcția de repartiție* F *are derivata* f *continuă (densitatea de repartiție) și avem:*

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-itx} \varphi(t)\, dt$$

deci densitatea de repartiție a lui X *este transformata Fourier a lui* $\varphi_X(t)$.

Observație: *Pentru orice* $\alpha \in \mathbb{R}$ *putem scrie formula lui Euler:*

$$e^{i\cdot\alpha} = \cos\alpha + i\sin\alpha$$

$$e^{-i\cdot\alpha} = \cos\alpha - i\sin\alpha$$

PROPRIETĂȚI ALE FUNCȚIEI CARACTERISTICE

Considerăm variabila aleatoare X *cu funcția caracteristică* $\varphi_X(t)$. *Atunci:*

1 $\varphi_X(t)$ *este o funcţie uniform continuă pe* $\mathbb{R}$

2 $\varphi_X(0)=1$ *și* $\left|\varphi_X(t)\right| \le 1$, *pentru* $\forall t \in \mathbb{R}$

3 *Dacă* $X_1, X_2, \ldots, X_n$ *sunt variabile aleatoare independente atunci* $\varphi_{X_1+X_2+\ldots+X_n}(t)=\varphi_{X_1}(t)\cdot\varphi_{X_2}(t)\cdot\ldots\cdot\varphi_{X_n}(t)$

Consecinţe:

- *Dacă* $Y=\sum_{k=1}^{n}\lambda_k \cdot X_k$, *cu* $\lambda_k \in \mathbb{R}$, *atunci* $\varphi_Y(t)=\prod_{k=1}^{n}\varphi_{X_k}(\lambda_k t)$
- *Un produs de funcţii caracteristice este tot o funcţie caracteristică.*

  În particular, $\left[\varphi_X(t)\right]^n$ *este tot o funcţie caracteristică.*

4 *Dacă* $Y=aX$, *cu* $a \in \mathbb{R}$, *atunci* $\varphi_Y(t)=\varphi_X(at)$

5 *Dacă* $Y=aX+b$, *cu* $a, b \in \mathbb{R}$ *atunci* $\varphi_Y(t)=\varphi_X(at)\cdot e^{ibt}$

6 *Formula de legătură cu momentele iniţiale*

Funcţia caracteristică este de n *ori derivabilă în raport cu* t *şi* $\frac{1}{i^k}\varphi^{(k)}(t)\big|_{t=0} = m_k$.

V.a. discretă simplă

$$\varphi_X(t) = \sum_{j=1}^{n} e^{i\cdot t\cdot x_j} p_j \quad \Rightarrow \quad \varphi_X^{(k)}(t) = \sum_{j=1}^{n} i^k \cdot x_j^{\,k} \cdot e^{i\cdot t\cdot x_j} p_j$$

$$\varphi_X^{(k)}(t)\big|_{t=0} = \varphi_X^{(k)}(0) = i^k \sum_{j=1}^{n} x_j^{\,k} p_j = i^k \cdot m_k$$

V.a. continuă

$$\varphi_X(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\cdot t\cdot x} f(x)\,dx \quad \Rightarrow \quad \varphi_X^{(k)}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} i^k \cdot x^k \cdot e^{i\cdot t\cdot x} f(x)\,dx$$

$$\varphi_X^{(k)}(t)\big|_{t=0} = \varphi_X^{(k)}(0) = i^k \int_{-\infty}^{\infty} x^k \cdot f(x)\,dx = i^k \cdot m_k$$

Să se determine funcția caracteristică a variabilei aleatoare discrete $X = \begin{pmatrix} k \\ \frac{2}{3}\cdot\frac{1}{3^{k-1}} \end{pmatrix}_{k\geq 1}$ *, apoi să se calculeze cu ajutorul funcției caracteristice media variabilei aleatoare.*

Variabila aleatoare discretă X *are o infinitate de valori, ceea ce înseamnă că în definiția funcției caracteristice vom folosi o serie în locul sumei:*

$$\varphi_X(t) = M\left[e^{i\cdot t\cdot X}\right] = \sum_{k\geq 1} e^{i\cdot t\cdot x_k} p_k$$

Pentru variabila X *avem* $x_k = k$ *și* $p_k = \frac{2}{3}\cdot\frac{1}{3^{k-1}}$*, deci:*

$$\varphi_X(t) = \sum_{k\geq 1} e^{i\cdot t\cdot k}\,\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{3^{k-1}} = \frac{2}{3}\cdot e^{i\cdot t}\sum_{k\geq 1}\left(\frac{e^{i\cdot t}}{3}\right)^{k-1} \left\{ \begin{array}{l} \text{seria geometrică, cu rația } q = \frac{e^{i\cdot t}}{3} \quad |q| = \frac{1}{3} < 1 \\ \text{convergentă și are suma } \frac{1}{1-q} = \frac{3}{3-e^{i\cdot t}} \end{array} \right\} \varphi_X(t) = \frac{2\cdot e^{i\cdot t}}{3-e^{i\cdot t}}$$

Media variabilei reprezintă momentul inițial de ordinul 1. Din proprietatea 6) a funcției caracteristice (pentru t=0) :

$$\varphi_X^{(k)}(0) = i^k\cdot m_k \qquad \text{deci pentru k=1:} \quad m_1 = M[X] = \frac{\varphi_X'(0)}{i}$$

$$\varphi_X'(t) = \left(\frac{2\cdot e^{i\cdot t}}{3-e^{i\cdot t}}\right)' = \frac{6i\cdot e^{i\cdot t}}{\left(3-e^{i\cdot t}\right)^2} \Rightarrow \varphi_X'(0) = \frac{3i}{2} \Rightarrow M[X] = \frac{\varphi_X'(0)}{i} = \frac{3}{2}$$

Să se determine densitatea de repartiție a variabilei aleatoare continue X a cărei funcție caracteristică este $\varphi_X(t) = e^{-|t|}$, $t \in \mathbb{R}$.

Funcția $\varphi_X(t)$ este absolut integrabilă pe $\mathbb{R}$, deci putem scrie:

$$f(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-itx}\varphi(t)\,dt = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-itx}e^{-|t|}dt = \frac{1}{2\pi}\left(\int_{-\infty}^{0} e^{-itx}e^{t}dt + \int_{0}^{\infty} e^{-itx}e^{-t}dt\right) = \frac{1}{2\pi}\int_{0}^{\infty} e^{-t}\left(e^{itx} + e^{-itx}\right)dt =$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\infty} e^{-t}\cos tx\,dt$$

(am folosit formula $\cos at = \dfrac{e^{ita} + e^{-ita}}{2}$*)*

Se integrează prin părți și se obține:

$$f(x) = \frac{1}{\pi\left(1 + x^2\right)}$$

Determinați funcția caracteristică pentru variabila aleatoare discretă: $X = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0.5 & 0.5 \end{pmatrix}$

Funcția caracteristică pentru o variabilă aleatoare este: $\varphi_X(t) = M\left[e^{i \cdot t \cdot X}\right]$

Pentru variabila aleatoare X *, avem:* $e^{itX} = \begin{pmatrix} e^{-it} & e^{it} \\ 0.5 & 0.5 \end{pmatrix}$, *deci putem scrie funcția caracteristică:*

$$\varphi(t) = M\left[e^{i \cdot t \cdot X}\right] = e^{-it} \cdot 0.5 + e^{it} \cdot 0.5 = 0.5\left(e^{-it} + e^{it}\right) = 0.5(\cos t - i\sin t + \cos t + i\sin t) = \cos t$$

Formula lui Euler (analiză complexă):

$$e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$$

Să se determine repartiția variabilei aleatoare discrete simple X care are funcția caracteristică

$$\varphi_X(t) = \cos^2 t \,,\, t \in \mathbb{R}$$

Scriem $\cos t$ *în formă complexă:* $\cos t = \dfrac{e^{it} + e^{-it}}{2}$ *și funcția caracteristică devine:*

$$\varphi_X(t) = \cos^2 t = \left(\frac{e^{it} + e^{-it}}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}e^{2\cdot it} + \frac{1}{2}e^{0\cdot it} + \frac{1}{4}e^{-2\cdot it}$$

Deoarece pentru o variabilă aleatoare discretă $\varphi_X(t) = M\left[e^{i\cdot t\cdot X}\right] = \sum_{k=1}^{n} e^{i\cdot t\cdot x_k} p_k$

rezultă că repartiția lui X *este:* $X = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 2 \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \end{pmatrix}$