$$(A-2I_4)\begin{pmatrix}x\\y\\z\\t\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\\0\end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix}1 & -1 & 0 & 0\\ 1 & -1 & 0 & 0\\ 3 & 5 & 3 & -3\\ 4 & -1 & 3 & -3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z\\t\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\\0\end{pmatrix}$$

$$\rightarrow \begin{pmatrix}1 & -1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 8 & 3 & -3\\ 0 & 5 & 3 & -3\end{pmatrix} \rightarrow \dots$$

Geom.

1) 2 pct. det. o dr. și numai una
2) o dr. are cel puțin 2 pct.
3) $\exists$ 3 pct. nesituate pe ac. dr.

Paralelism :

2 dr. par. sunt 2 dr. coplanare care nu au pct. comun.

3 pct. necol. $\longrightarrow$ 1 plan și numai unul

G. euclidiană

Plan euclidian $(\mathcal{P}, \mathcal{D})$

$\mathcal{P}$ → mulțime ; mulțimea punctelor

$\mathcal{D}$ → mulțime ; mulțimea dreptelor

→ Verifică prop. exprimate prin:

I ax. incidență
II ax. paralelism
III ax. ordonare
IV ax. continuitate (Cantor, Dedekind)
V ax. congruență

K. Teleman, Stăteșcu, Moraru, Florescu ..
IX, X „Geom. și trig."

carte

P, Δ

I_{AD} (incidență)

$A_1 \wedge \ldots A_n \to T$ (tautologie)

Pr. minimei acțiuni Fermat

În oric. proc. ev. nat. ecou ceva

$\boxed{\text{Spații euclidiene}}$ n-dimensionale:

→ Modele ale geometriei euclidiene n-dimensionale

Geom. euclidiană n-dimensională este o teorie mat. categorică i.e. orice 2 modele de ei sunt izomorfe.

Modelul standard este definit. cu sp. vect. eucl. $(\mathbb{R}^n, +, \cdot, \langle , \rangle)$.

$(\mathbb{R}^n, +, \cdot)$ = sp. vect. real n-dimensional standard (cu structura canonică)

$\langle , \rangle : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ prod. scalar standard pe $\mathbb{R}^n$

lege de comp. internă $+ : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$; $(x^1, \ldots, x^n) + (y^1, \ldots, y^n) = (x^1+y^1, \ldots, x^n+y^n)$, $\forall (x^1, \ldots x^n), (y^1, \ldots y^n) \in$

— // — externă $\cdot : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$; $\lambda(x^1, \ldots, x^n) = (\lambda x^1, \ldots \lambda x^n)$

$\forall \lambda \in \mathbb{R}$

$\forall (x^1, \ldots, x^n) \in \mathbb{R}^n$

$\langle , \rangle : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ (produs scalar) e netrivială nu depinde

$\langle (x^1, \dots x^n), (y^1, \dots y^n) \rangle = \sum_{i=1}^{n} x^i y^i =$

$= x^1 y^1 + \dots + x^n y^n, \quad \forall (x^1, \dots x^n), (y^1, \dots y^n) \in \mathbb{R}^n$

$\to$ formă biliniară, simetrică, și pozit. definită.

$\langle x, y \rangle = \langle y, x \rangle$, $\langle x, x \rangle \geq 0$

$\langle x, x \rangle = 0 \Leftrightarrow x = 0_{\mathbb{R}^n}$

Curs 9

(oblig)
referat + rezumat + probl. sem. (pct. bonus față de ex.)

↓

1) Spații vectoriale
2) Subsp. vectoriale / afine (varietăți algebrice) sub
   ↑ într-un spațiu vectorial

⇔ Descriere prin diferite tipuri de ecuații și / sau sisteme de ecuații : → parametrice
implicite
explicite

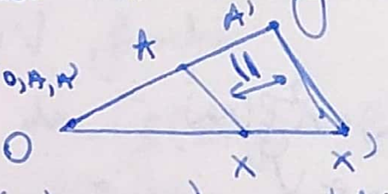
3) (Axiomele geometriei)

$\boxed{3.1)}$ Geometrie euclidiană - plană
- tridimensională

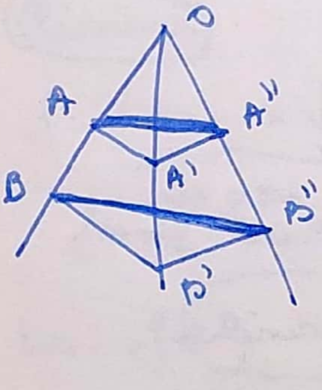
$\boxed{3.2)}$

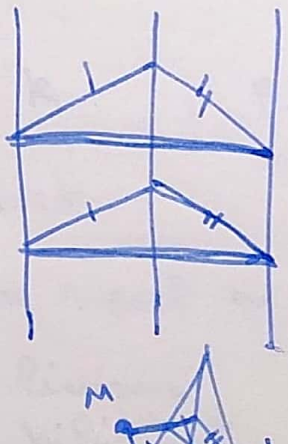
(facultativ) 4) Teorema lui Desargues. (g. afină de la dim. ≥ 3)
→ adv. în planuri arghesiene
↳ notație

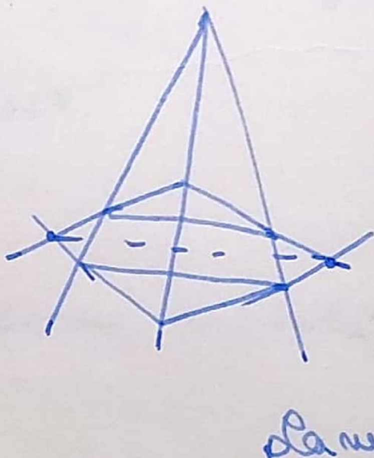
omotetie $H_{O,A,A'}$
? :))

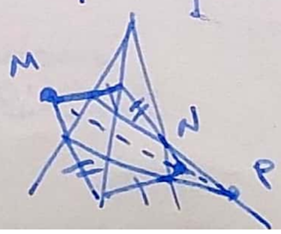


$X' = H_{O,A,A'}(X)$ → X' - omotetic față de X









col.

planuri arghesiene
exemple

Spații vectoriale

Funcții (aplicații liniare)

(T1) → În orice sp. vect. există baze.
(T2) → Orice 2 baze într-un sp. vect. sunt în bijecție.
(T3) → Într-un sp. vect. finit dimensional orice 2 baze au același nr. de elem.

Definiție: = dimens. sp. vect. resp.

Fie $V_{/K} \equiv (V_{/K}, +, \cdot) = (V, +, \cdot)_{/K} = (V, +, \cdot)$ are dim. $n \in \mathbb{N}^*$ și bazele $\mathcal{B} = \{e_1, \dots, e_n\}$ și $\{f_1, \dots, f_n\}$

cu $f_j = \sum_{i=1}^{n} \lambda^i_j e_i = \lambda^i_j e_i$, $j = \overline{1,n}$. $L = (\lambda^i_j)_{i,j=\overline{1,n}}$

$e_j = \sum_{i=1}^{n} \mu^i_j f_i$, $j = \overline{1,n}$ $\qquad M = (\mu^i_j)_{i,j=\overline{1,n}}$

$\mathcal{B} \xrightarrow{L} \mathcal{C}$

$\mathcal{C} \xrightarrow{M = L^{-1}} \mathcal{B}$

În cazul $K = \mathbb{R}$ → sp. vect. reale.

Def. Spunem că bazele $\mathcal{B}, \mathcal{C}$ sunt la fel orientate dacă $\det L > 0$ ($\Leftrightarrow \det M > 0$).

Def. Un sistem $(V, +, \cdot, \mathcal{B})_{/\mathbb{R}}$ unde $\left.\begin{array}{l}(V, +, \cdot) = \text{sp. vect real} \\ \mathcal{B} = \text{bază în acesta}\end{array}\right\} \Rightarrow$

$\Rightarrow$ s.n. sp. vectorial real orientat.

Def. Dc. V, W sunt K-sp. vect. și $f: V \to W$ apl.

f s.n. liniară dc. $\left.\begin{array}{l} f(x+y) = f(x)+f(y) \\ \text{și } f(\lambda x) = \lambda f(x) \end{array}\right\}$ $\begin{array}{l}\forall x,y \in V \\ \forall \lambda \in K\end{array}$

$$\Updownarrow$$

$$f(\lambda x+\mu y) = \lambda f(x) + \mu f(y); \ \forall x,y \in V, \ \forall \lambda,\mu \in K$$

$$\Updownarrow$$

$$\forall p \in \mathbb{N}^*, \forall x_1,\dots x_p \in V, \forall \lambda^1 \dots \lambda^p \in K$$

$$f\left(\sum_{i=1}^{p} \lambda^i x_i\right) = \sum_{i=1}^{p} \lambda^i f(x_i)$$

Def. În cazul $W = V$, o apl. lin $f: V \longrightarrow V$ s.n. <u>endomorfism al lui V</u>.

Def. În cazul $W = K$, o apl. lin. $f: V \longrightarrow K$ s.n. <u>formă liniară</u> pe V.

Def. ~~Teoremă~~: Mulțimea formelor liniare pe V se not. V^* = dualul lui V.

<u>Teoremă</u>: În cazul finit dim, K corp. com. $\Rightarrow$ V și V^* sunt izomorfe. $\mathcal{B} = \{e_1, \dots e_n\}$ bază în V, $\mathcal{B}^* = \{e_1^*, \dots e_n^*\}$.

$e_i^*(e_j) = \delta_{ij}$; $i,j = \overline{1,n}$

și se extinde prin K-liniaritate

$f: V_{/K} \longrightarrow W_{/K}$ K-lin.

$f(0_V) = 0_W$; $f(0_V + 0_V) = f(0_V) + f(0_V)$

$f: V \to W$ K-lin.

$$\boxed{f(e_i) = v_i \in W \quad , i=\overline{1,n}}$$

$x = V$: $x = \sum_{i=1}^{n} x^i e_i \quad f(x) = \sum_{i=1}^{n} x^i u_i \longrightarrow$

$\to$ și în cazul $W = K$: $e_j^*(x) = e_j^*\left(\sum_{i=1}^{n} x^i e_i\right) =$

$$= \sum_{i=1}^{n} x^i e_j^*(e_i) = \sum_{i=1}^{n} x^i \delta_{ij} = x^j$$

Ex. 1) $V = (\mathbb{R}^2, +, \cdot) = \begin{cases} (x_1, x_2) + (y^1, y^2) = (x^1 + y^1, x^2 + y^2) \\ \lambda(x^1, x^2) = (\lambda x^1, \lambda x^2) \end{cases}$

$e_i = \{(1,0), (0,1)\}$

$e_1^* : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} \quad ; \quad e_1^*(x^1, x^2) = x^1$

$e_2^* : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} \quad ; \quad e_2^*(x^1, x^2) = x^2$

2) $(\mathbb{R}^3, +, \cdot) / \mathbb{R}$ $\quad (x^1, x^2, x^3) + (y^1, y^2, y^3) = (x^1 + y^1, x^2 + y^2, x^3 + y^3)$

$\lambda(x^1, x^2, x^3) = (\lambda x^1, \lambda x^2, \lambda x^3)$

$\forall (x^1, x^2, x^3), (y^1, y^2, y^3) \in \mathbb{R}^3, \forall \lambda \in \mathbb{R}$

$\{e_1 = (1,0,0), e_2 (0,1,0), e_3 (0,0,1)\}$ baza canonică în $(\mathbb{R}^3, +, \cdot)$

$(K^n, +, \cdot) / K$

$0, 1$

$\mathcal{B} = \{e_1 = (1, \dots 0), \dots e_n = (0, \dots 1)\}$

$\to e_1^*(x^1, x^2, x^3) = x^1$

$e_2^*(x^1, x^2, x^3) = x^2 \qquad x = (x^1, x^2, x^3) = x^1 e_1 + x^2 e_2 + x^3 e_3$

$e_3^*(x^1, x^2, x^3) = x^3$

Scanned with CamScanner

$f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ formă lin.

$f(e_1) = c_1$
$f(e_2) = c_2$
$f(e_3) = c_3$

$$f(x) = f(x^1 e_1 + x^2 e_2 + x^3 e_3) =$$
$$= x^1 f(e_1) + x^2 f(e_2) + x^3 f(e_3) =$$
$$= x^1 c_1 + x^2 c_2 + x^3 c_3$$

$$= c_1 e_1^*(x) + c_2 e_2^*(x) + c_3 e_3^*(x) = \underbrace{(c_1 e_1^* + c_2 e_2^* + c_3 e_3^*)(x)}_{f(x)}$$

Probleme : 1) Alegeți o bază în $(\mathbb{R}^3, +, \cdot)/_{\mathbb{R}}$ cu str. canonică:

$$\mathcal{B} = \{u_1, u_2, u_3\}$$

2) Considerați $\mathcal{B}$ ca fiind ordonată. $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$

Considerați bazele $\mathcal{B}_\sigma = (e_{\sigma(1)}, e_{\sigma(2)}, e_{\sigma(3)})$ cu $\sigma \in S_3$

Studiați care dintre bazele $\mathcal{B}_\sigma$ sunt la fel orientate cu $\mathcal{B}$ și care au orientare opusă.

3) Generalizați la $(\mathbb{R}^n, +, \cdot)/_{\mathbb{R}}$ acest rezultat.
str. canonică de sp. vect. real.

Dacă $f : V_K \to V$ e endomorfism, $\dim_K V = n$

$\mathcal{B} = \{e_1, \dots e_n\}$; $f \in End_K(V, +, \cdot) = End_K(V)$
(e resp. ordinea)

$$\boxed{f(e_i) = \sum_{j=1}^{n} f_i^j e_j, \; i = \overline{1,n}} \quad \text{repr. (I)}$$

$$F = (f_i^j)_{j,i=\overline{1,n}} = M_{\mathcal{B}}(f)$$

$x = \sum x^i e_i$, în particular $x = (x^1, \dots, x^n) \in K^n$
și $\mathcal{B}$ baza can)

$$f(x) = \sum_{i=1}^{n} x^i \sum_{j=1}^{n} f_i^j e_j =$$ | $$f(x) = y = \sum_{j=1}^{n} y^j e_j$$

$$= \sum_{j=1}^{n} \left(\sum_{i=1}^{n} x^i f_i^j \right) e_j = \sum_{j=1}^{n} y^j e_j \Rightarrow y^j = \sum_{i=1}^{n} x^i f_i^j =$$

K-comut.

$$= \sum_{i=1}^{n} f_i^j x^i$$ repr. lui f în coord. în raport cu baza B

$$\boxed{y^j = \sum_{i=1}^{n} f_i^j x^i, \; j = \overline{1,n}} \quad (2)$$

$$X = \begin{pmatrix} x^1 \\ \vdots \\ x^n \end{pmatrix}, \quad Y = \begin{pmatrix} y^1 \\ \vdots \\ y^n \end{pmatrix}$$

(3) $\boxed{Y = FX}$ repr. matric. a lui f în rap. cu baza B

$(\mathbb{R}^2, +, \cdot)/\mathbb{R}$ str. can. de sp. vect. real.

Exemple (temă): 1) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$; $f(x^1, x^2) = (2x^1 + 3x^2, -x^1 + x^2)$ $\forall (x^1, x^2) \in \mathbb{R}^2$

2) $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$; $f(x^1, x^2, x^3) = \left(x^1 + 2x^2 + 3x^3, \frac{1}{2}x^1 - \frac{1}{6}x^2 - \frac{1}{8}x^3, 3x^1 + 9x^2 + 27x^3 \right)$

$(\mathbb{R}^3, +, \cdot)/\mathbb{R}$ str. can. de sp. vect. real.

Să se arate că 1) ac. apl. sunt liniare.

2) să se det. mat. lui F în rap. cu B (baza canonică) $M_B(f)$

3) — // — $M_{\mathcal{E}}(f)$, $\mathcal{E}$ o bază fixată la alegere

4) — // — reprezinte f i) în coord.

ii) matriceal

iii) în rap. cu baza B

IV) în rap. cu baza $\mathcal{E}$

$n = 3 \Rightarrow f(x) = \sum_{i=1}^{3} (x^i)^2 = (x^1)^2 + (x^2)^2 + (x^3)^2 \ldots$

Curs 10:

Spații euclidiene

$\dim_{\mathbb{R}} V = n,\ n \in$

I Fie $(V,+,\cdot)$ un k-sp. vect., K corp com. $\to k = \mathbb{R}$

Def Un subsp. vect. în $(V,+,\cdot)$ este orice mulțime $U \subset V$ a.î.
$$\begin{cases} U \neq \emptyset \\ x, y \in U \Rightarrow x+y \in U \\ (\lambda \in k \text{ și } x \in U) \Rightarrow \lambda x \in U \end{cases}$$

P $U \subset V$ subsp. vect. $\Leftrightarrow \forall \lambda^1, \lambda^2 \in k,\ \forall u_1, u_2 \in U \Rightarrow$
$\Rightarrow \lambda^1 u_1 + \lambda^2 u_2 \in U \Leftrightarrow \forall p \in \mathbb{N}^*, \forall \lambda^1 \ldots \lambda^p \in k,$

$\forall u_1, \ldots u_p \in U \Rightarrow \sum_{i=1}^{p} \lambda^i u_i \in U$

Def: Un subsp. afin $(V,+,\cdot)$ este orice translatat de subsp. vect. în $(V,+,\cdot)$, i.e. orice mulțime de forma $a+U$, $a \in V$, $U \subseteq V$ subsp. vect.

$T_a(U) = a+U$

$T_a : V \to V$ translația de vector a

$T_a(x) = a + x,\ \forall x \in V$

$A := a + U = \{a + x;\ x \in U\}$

Lemă: În cond. de mai sus

1) $U = \{x - y : x, y \in A\} = \{x - a;\ x \in A\}$, și este unic definit de A

2) Dacă $b \in A$, at. $A = b + U = a + U$

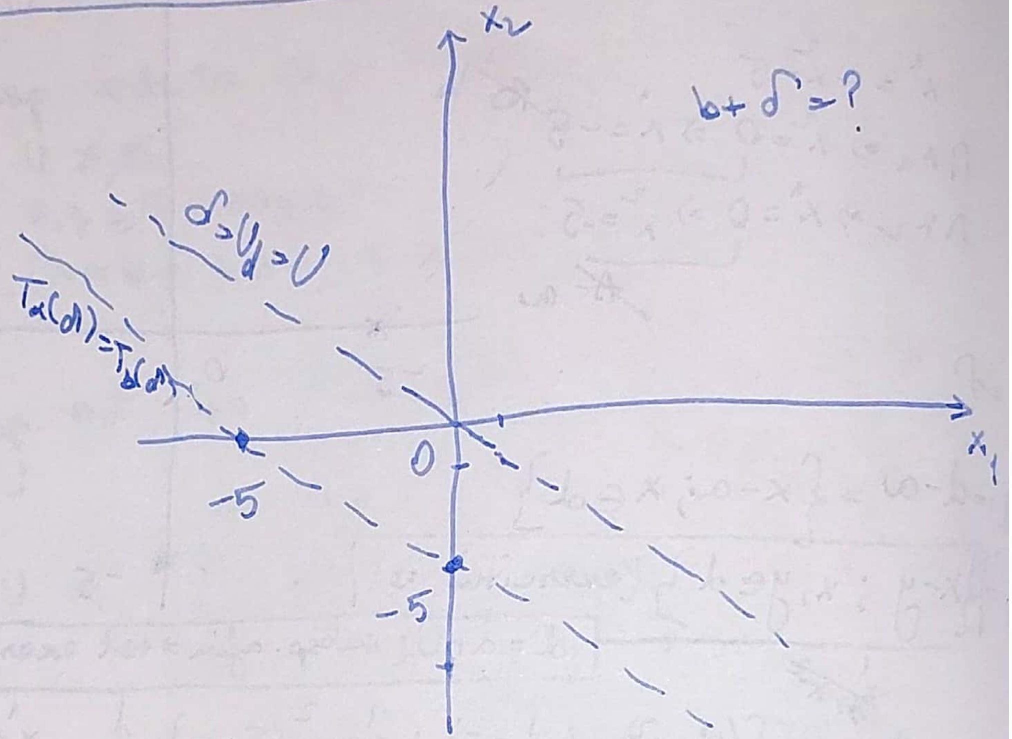
$(x^1, x^2): x^1 + x^2 = 0$

$(\tilde{x}^1, \tilde{x}^2): \tilde{x}^1 + \tilde{x}^2 = 0$

$(x^1 + \tilde{x}^1, x^2 + \tilde{x}^2): (x^1 + \tilde{x}^1) + (x^2 + \tilde{x}^2) = (x^1 + x^2) + (\tilde{x}^1 + \tilde{x}^2) = 0 + 0 = 0$

$\lambda(x^1, x^2) = (\lambda x^1, \lambda x^2): \lambda x^1 + \lambda x^2 = \lambda(x^1 + x^2) = \lambda \cdot 0 = 0$

$\Rightarrow$ QED (subsp. vect $\mathbb{R}^2$)



$b + \delta = \{(-5, 0) + (x^1, x^2) ; x^1 + x^2 = 0\}$

$= \{(-5 + x^1, x^2) ; x^1 + x^2 = 0\}$

~~$\Leftrightarrow x^1 + x^2 - 5 = 0$~~

$= \{(x^1, x^2) \in \mathbb{R}^2 ; x^1 + x^2 + 5 = 0\}$ dc. $y^1 = -5 + x^1$, $y^2 = x^2$

$= \{(y^1, y^2) \in \mathbb{R}^2 ; y^1 + y^2 + 5 = 0\}$ $\left\{ \begin{array}{l} x^1 = y^1 + 5 \\ x^2 = y^2 \end{array} \right.$

Se arată că în $\mathbb{R}^2$ singurele $\boxed{\text{subsp. vect}}$ sunt:

- $\{(0,0)\}$ subsp. nul $\rightarrow$ are dim. 0
- dreptele vect. (care conțin pe $(0,0)$): $\{\lambda x^1 + \mu x^2 = 0\}; (x^1, x^2) \in \mathbb{R}^2$ de forma $\{(x^1, x^2) \in \mathbb{R}^2, \lambda x^1 + \mu x^2 = 0\}$, $\lambda^2 + \mu^2 \neq 0$
- $(\mathbb{R}^2, +, \cdot) \Rightarrow$ dim $= 2$. baza canonică $\{(1,0), (0,1)\}$

(P) Orice subsp. vect. cu op. induse, formează un sp. vect.

$(U, +/_{U\times U}, \cdot/_{\mathbb{R}\times U})$ sp. vect.

$\boxed{\dim_{\mathbb{R}} U \le \dim_{\mathbb{R}} V}$

subsp. afine în $(\mathbb{R}^2, +, \cdot)$:

- $\{(a^1, a^2)\}$
- dreptele $\{(x^1, x^2) \in \mathbb{R}^2 ; \lambda x^1 + \mu x^2 + \delta = 0\}$; $\lambda^2 + \mu^2 \ne 0$

$x^2 = -x^1 + 5$; $\{(x^1, -x^1 - 5) ; x^1 \in \mathbb{R}\}$

Notații: $d: x^1 + x^2 + 5 = 0$ $\Big\}(x^1, x^2) \in \mathbb{R}^2$ → ec. implicită

$d: x^2 = -x^1 - 5$ → explicită

$d: \begin{cases} x^1 = t \\ x^2 = -t - 5, t \in \mathbb{R} \end{cases}$ → ecuații parametrice

---

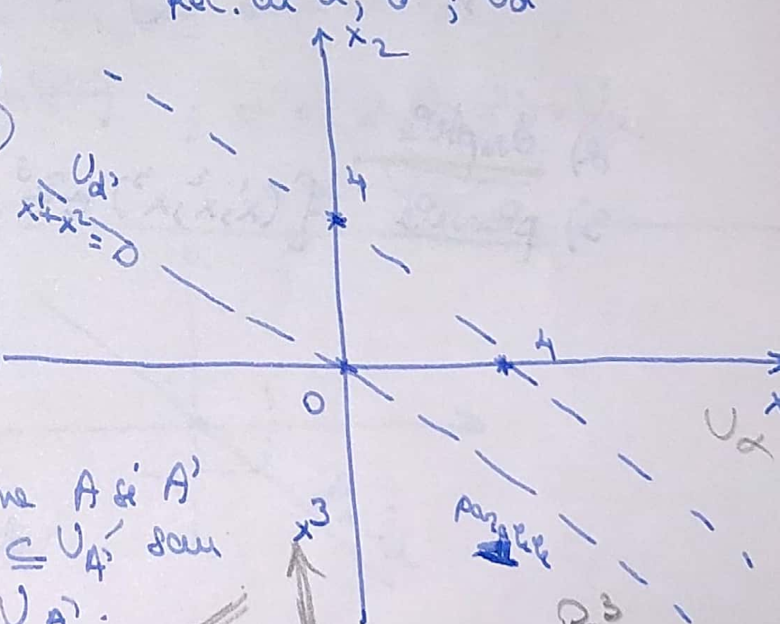
ex.: Fie dreapta d': $x^1 + x^2 - 4 = 0$; $U_{d'} = ?$ Reprezentăm:

Rel. cu d, $\mathcal{A}$; $U_{d'}$

$x^1 = 4 - x^2$

$\cap x^2$: $x^1 = 0 \Rightarrow x^2 = 4 \Rightarrow a(0, 4)$

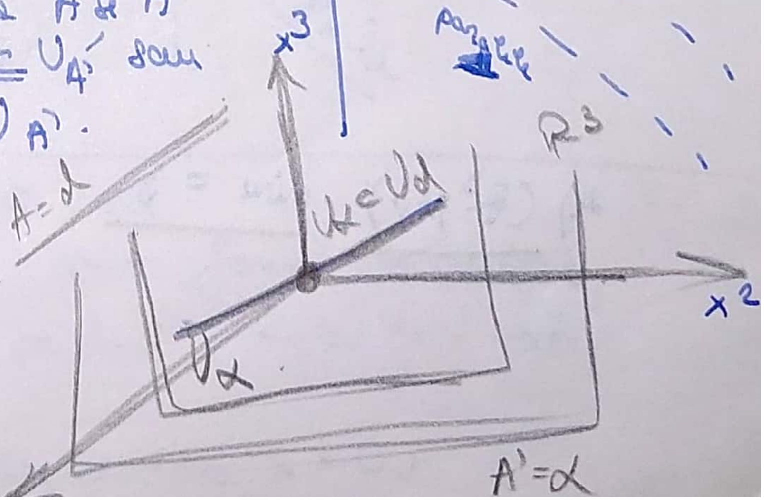
$\cap x^1$: $x^2 = 0 \Rightarrow x^1 = 4 \Rightarrow b(4, 0)$



Def: A - subsp. afin

$\dim_{\mathbb{R}} A \stackrel{def}{=} \dim_{\mathbb{R}} U_A$

Definiție: Două subsp. afine A și A' se zic paralele dacă $U_A \subseteq U_{A'}$ sau $U_{A'} \subseteq U_A$, sau $U_A = U_{A'}$.

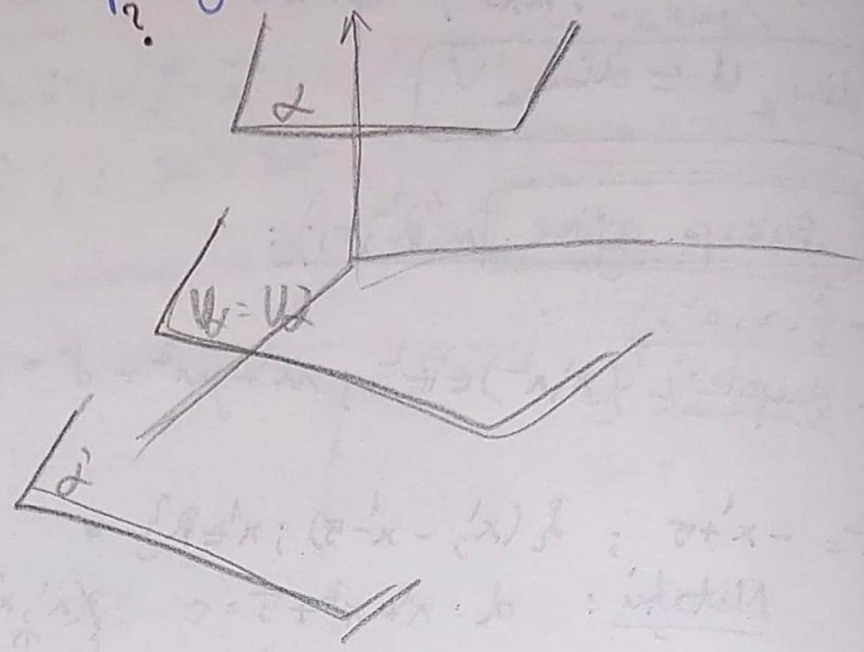


~~Obs.:~~ ~~Ac.~~

$\Rightarrow \dim = 1$

dr. directoare e inclusă în planul U_α

Ex $(\mathbb{R}^3,+,\cdot)$; $A = d$ dr. afin $\quad V_d \underset{\neq}{\subset} V_\alpha$
$A' = \alpha$ plan afin
?



$\boxed{\text{Obs.}}$ Da. $\dim A = \dim A'$
și A, A' sunt $\parallel$ at $V_A = V_{A'}$

$\boxed{\text{Subspațiile afine}}$ ale lui $(\mathbb{R}^3,+,\cdot)$

1) Punctele $\quad \{a\}$, $a \in \mathbb{R}^3$
(mulțimile cu un singur pct) $\quad$ dim 0 ; codimens. $= 3$ $(3-0)$

2) dreptele $\quad$ dim 1 ; codimens $= 2$ $(3-1)$

3) planele $\quad \{(x^1,x^2,x^3) \in \mathbb{R}^3,\ c_1x^1 + c_2x^2 + c_3x^3 + c_0 = 0\}$
$(c_1,c_2,c_3) \neq (0,0,0)$
dim 2

codimensiune $= 1$ $(3-2)$
dim sp. ambiant $-$ dimens. dim.

4) $(\mathbb{R}^3,+,\cdot)$ $\quad$ dim $= 3$

Scanned with CamScanner

Notație:

$d: c_1x^1 + c_2x^2 + c_3x^3 + c_0 = 0$

$d: x^2 = mx^1 - n$ sau $x^1 = mx^2 + n$

$d: \begin{cases} x^1 = a^1 + tu^1 \\ x^2 = a^2 + tu^2, \ t \in \mathbb{R} \end{cases}$

$\{(u^1, u^2)\}$ bază în $\vec{d} = U$

$\neq (0,0)$ → vector director pt d.

$u = (u^1, u^2)$

$U_d: \begin{cases} x^1 = tu^1 \\ x^2 = tu^2, \end{cases} \ t \in \mathbb{R}$

Drepte: $\begin{cases} x^1 = a^1 + tu^1 \\ x^2 = a^2 + tu^2 \\ x^3 = a^3 + tu^3, t \in \mathbb{R}; \end{cases}$ $u = (u^1, u^2, u^3) \neq (0,0,0)$

$U_d = \{tu, t \in \mathbb{R}\}$

Plane: $\alpha = \begin{cases} x^1 = a^1 + su^1 + tv^1 \\ x^2 = a^2 + su^2 + tv^2 \\ x^3 = a^3 + su^3 + tv^3 \\ \text{cu } s,t \in \mathbb{R} \end{cases}$ $U_\alpha: \begin{cases} x^1 = su^1 + tv^1 \\ x^2 = su^2 + tv^2 \\ x^3 = su^3 + tv^3 \end{cases}$ $s,t \in \mathbb{R}$

$\{(u^1, u^2, u^3), (v^1, v^2, v^3)\}$ sist. liber.

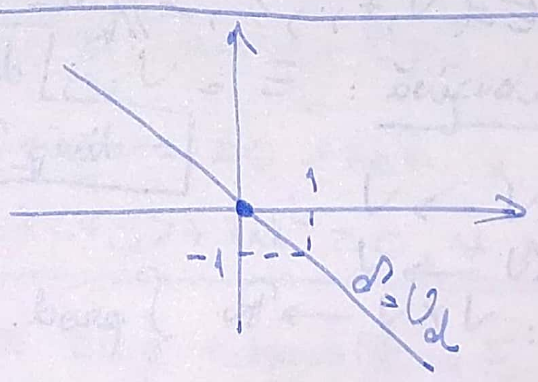
bază în $U_\alpha = \{u, v\}$ bază în U_α

unde $U_\alpha = \{su + tv;\ s,t \in \mathbb{R}\}$; $\alpha = (a^1, a^2, a^3) + U_\alpha$
$= a + U_\alpha$

$d: x^1 + x^2 + 5 = 0$

$\begin{cases} x^1 = t \\ x^2 = -t - 5 \end{cases}$

$(1, -1)$



Def.: Fie $(V, +, \cdot)$ un sp. vect. real.
S.n. produs scalar pe V orice formă biliniară, simetrică și pozitiv definită pe V. ; $\langle , \rangle : V \times V \to \mathbb{R}$.
$\forall x, y \in V: \langle x, y \rangle = \langle y, x \rangle$.
$\forall x \in V: \langle x, x \rangle \geq 0$ și $\langle x, x \rangle = 0 \Leftrightarrow x = 0_V$

Scanned with CamScanner

$(V, +, \cdot, \langle , \rangle)$ s.n. sp. vect. euclidian

$q(x) = \langle x, x \rangle$ forma pătratică · $\langle , \rangle$

Se arată $\langle x, y \rangle = \frac{1}{2} [q(x+y) - q(x) - q(y)]$

$\|x\| = \sqrt{q(x)}$ – fc. normă $\| \ \| : V \to \mathbb{R}_{\geq 0}$

$d(x,y) = \|x-y\|$; $d : V \times V \to \mathbb{R}_{\geq 0}$, distanța.

$$\begin{cases} \|x\| \geq 0 \text{ și } \|x\| = 0 \iff x = 0_V \\ \|\lambda x\| = |\lambda| \cdot \|x\| \\ \|x+y\| \leq \|x\| + \|y\| \end{cases}$$

$$\begin{cases} d(x,y) = d(y,x) \\ d(x,y) \geq 0 \text{ și } d(x,y) = 0 \iff x = y \\ d(x,y) + d(y,z) \geq d(x,z) \to (\text{In. triunghiului}) \end{cases}$$

$|\langle x, y \rangle| \leq \|x\| \cdot \|y\|$ (C.B.S)

$$\boxed{? : 9 \text{ iunie ; ora } 10:00.}$$

Geometrie euclidiană

Fie $E = (V, +, \cdot, \langle , \rangle)_{\mathbb{R}}$ un sp. vect. euclidian

Notație abuzivă : $E = V$; $\dim_{\mathbb{R}} E = \dim E = \dim V$ $= \dim_{\mathbb{R}}(V, +, \cdot) = n \in \mathbb{N}$; $\mathbb{N}^*$

notații

$+ : V \times V \to V$

$\cdot : \mathbb{R} \times V \to V$

$\langle , \rangle : V \times V \to \mathbb{R}$ $\begin{cases} \text{prod. scalar e} \end{cases}$ bilin. (lin. în f. var.) sim.

poz. defin.

$\Updownarrow$

$\langle x, x \rangle \geq 0 ; \forall x \in V$

și $\langle x, x \rangle = 0 \iff x = 0$

prod. scalar

de def.:

1) Forma pătratică $\Rightarrow \varphi : V \to \mathbb{R}_{\geq 0}$, $\boxed{\varphi(x) = \langle x, x \rangle}$

2) Norma $\Rightarrow \| \ \| : V \to \mathbb{R}_{\geq 0}$, $\boxed{\|x\| = \sqrt{\langle x, x\rangle} = \sqrt{\varphi(x)}}, \forall x \in V$

$\Updownarrow$

$\| \ \|_{\langle,\rangle}$

3) Funcție distanță $\Rightarrow d = d_{\langle,\rangle} : V \times V \to \mathbb{R}_{\geq 0}$

$\boxed{d(x, y) = \|x - y\|}; \forall x, y \in V \times V$

Proprietăți:

pt. 1) $\boxed{\varphi(\lambda x) = \lambda^2 \varphi(x)}; \forall \lambda \in \mathbb{R}; x \in V$

$\varphi(x) \geq 0; \forall x \in V$

pt. 2) $\boxed{\|\lambda x\| = |\lambda| \cdot \|x\|}, \forall \lambda \in \mathbb{R}, x \in V$

$\|x\| \geq 0, \forall x \in V$ și $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0_V$

$\boxed{\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|}; \forall x, y \in V \Rightarrow$ ineg. triunghiului.

pt. 3) $d(x, y) = d(y, x)$; $\forall x, y \in V$

$d(x, y) \geq 0$ și $d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$; $\forall x, y \in V$

$\boxed{d(x, y) + d(y, z) \geq d(x, z)}; \forall x, y, z \in V$

ineg. triunghiului pt. dist.

$\boxed{|\langle x, y\rangle| \leq \|x\| \|y\|} \Rightarrow$ Ineg. Cauchy - B - S

$\hookrightarrow \langle x + \lambda y, x + \lambda y \rangle \geq 0 \ \forall \lambda \in \mathbb{R}, x, y \in V$

$\hookrightarrow \|y\|^2 \lambda^2 + 2\lambda \langle x, y\rangle + \|x\|^2 \geq 0, \forall \lambda \in \mathbb{R}$

! **Definiție**: I Se numește bază ortogonală în E orice bază $B = \{u_1, \dots u_n\}$ cu propr. $\langle u_i, u_j \rangle = 0$

$\forall i, j = \overline{1, n}$ cu $i \neq j$.

!! **Definiție**: Într-un sp. vect. eucl. 2 vect. u, v s.n. $\boxed{\text{ortogonali}}$ dc. $\langle u, v\rangle = 0$: $\boxed{u \perp v}$

Obs.: În cazul $u, v \neq 0_V$ am definit

$$\boxed{\cos(\widehat{u,v}) = \frac{\langle u, v\rangle}{\|u\| \cdot \|v\|}}$$

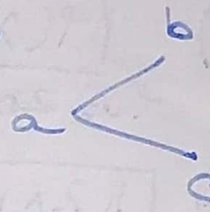
și deci $\langle u, v\rangle = 0 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow \cos(\widehat{u,v}) = 0 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow \mu(\widehat{u,v}) = \frac{\pi}{2}$

Def.: pt. $u, v \in V \setminus \{0_V\}$. $\cos(\widehat{u,v}) = \frac{\langle u, v\rangle}{\|u\| \cdot \|v\|}$

$\exists \cos(\widehat{u0, v})$

din C-B-S $\Longrightarrow$ $\cos(\widehat{u,v}) \in [-1, 1]$

Def.: $\mu(\widehat{u,v}) = \arccos \frac{\langle u, v\rangle}{\|u\| \cdot \|v\|} \in [0, \pi]$



Def.: $a, b, c \in V$; $a \neq b$ și $a \neq c$:

$$\cos(\widehat{bac}) = \cos(\widehat{cab}) = \frac{\langle b-a, c-a\rangle}{\|b-a\| \, \|c-a\|}$$

! Definiție: (VI) O bază ortogonală $\mathcal{B}$ $\{u_1, \dots u_n\}$ s.n. ortonormată dc., în plus, $\|u_i\| = 1$ pt. $\forall i = \overline{1,n}$

i.e. $\langle u_i, u_j\rangle = \delta_{ij}$ $\forall i, j = \overline{1,n}$.

Teoremă

În orice sp. vect. eucl. există baze ortonormate.
(pp. dim $V \in \mathbb{N}^*$)

Procedeul de ortogonalizare Gram - Schmidt:

Dc. o bază $\mathcal{B} = \{u_1, \dots u_n\}$ într-un sp. vect. eucl. $E = (V, +, \cdot, \langle , \rangle)$, există o bază $\rightarrow$ ortonormată (1)

$\tilde{\mathcal{B}} = \{e_1, \dots e_n\}$ a.î.
(2) subsp. vect. $\{u_1, \dots u_p\}$ = subsp. vect $\{e_1, \dots e_p\}$, $\forall p$
(3) Bazele $\mathcal{B}$ și $\tilde{\mathcal{B}}$ sunt la fel orientate ($\det M > 0$, unde $M = M_{\mathcal{B} \to \tilde{\mathcal{B}}}$)

Ex. de sp. vect. eucl.; $n \in \mathbb{N}^*$

$E^n = E_n = (\mathbb{R}^n, +, \cdot, <,>)$ str. canonică pe sp. vect. real (str. standard)

$(x^1, \dots x^n) + (y^1, \dots, y^n) = (x^1+y^1, \dots, x^n+y^n)$

$\lambda(x^1, \dots, x^n) = (\lambda x^1, \dots \lambda x^n)$

$<(x^1, \dots, x^n), (y^1, \dots y^n)> = \sum_{i=1}^{n} x^i y^i$

$f(x) = ?$ $\|x\|$; $d(x,y)$; $\cos(\widehat{u,v})$; $\cos(\widehat{bac})$ → exerciții

---

Lemă: $(0_V = 0_E)$ notații

1) Dacă $u \in E \setminus \{0_V\}$, atunci $u^\perp \overset{def.}{=} \{x \in V; <u,x> = 0\}$ este subsp. vect. în E.

2) Dc. $u \neq 0_V$, at. $u^\perp = n-1$.

Dem: Temă

Problemă: Det. $U \subset V$ subsp. vect., $\underset{(E)}{}$ def. $U^\perp = \{x \in E, u \in U \Rightarrow$ $\Rightarrow <u,x> = 0\}$

Ce puteți spune despre $U^\perp$?

Lemă:

Dc. $\{f_1, \dots, f_n\} \subset E$ este o bază ortogonală atunci

$\{e_1 = \frac{1}{\|f_1\|} \cdot f_1, e_2 = \frac{1}{\|f_2\|} \cdot f_2 \dots e_i = \frac{1}{\|f_i\|} \cdot f_i, \dots e_n = \frac{1}{\|f_n\|} \cdot f_n$

este o bază.

$$\left(\underset{i,j=\overline{1,n}}{<e_i, e_j>} = \frac{1}{\|f_i\|} \cdot \frac{1}{\|f_j\|} <f_i, f_j> = \begin{cases} 0, & i \neq j \\ 1, & i = j \end{cases} \right)$$

$\Longrightarrow$ Dem. + algoritm.

(I) Construim o bază ortogonală $\{f_1 \dots f_n\}$ care satisfac (2) și (3).
↳ inductiv

$f_1 = u_1$

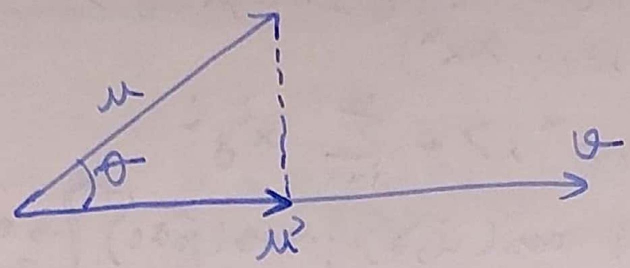
$$\begin{cases} f_2 = u_2 + \lambda_{21} f_1 \\ <f_1, f_2> = 0 \end{cases} \quad \Bigg| \quad 0 = <f_1, u_2> + \lambda_{21} <f_1, f_1> \Rightarrow \lambda_{21} = -\frac{<f_1, u_2>}{<f_1, f_1>} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow f_2 = u_2 - \frac{\langle f_1, u_2 \rangle}{\langle f_1, f_1 \rangle} f_1 = u_2 - pr_{f_2} u_2$$

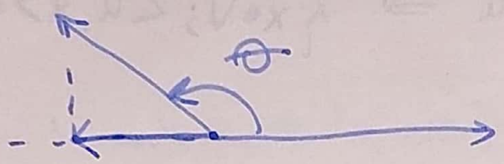
$\downarrow$

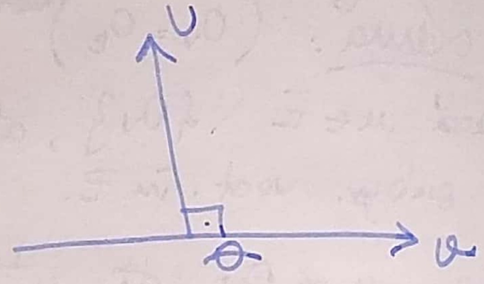
~~proiectia lui f_2 pe u_2~~

proiectia lui u_2 pe f_2



$$u' = \underset{\text{scalar}}{\ldots} \; \underset{\text{versor}}{\frac{1}{\|v\|} v}$$





θ obtuz ⇒ ~~neg~~ scalar negativ

$$u' = \|u\| \cdot \cos(\widehat{u, v}) \frac{1}{\|v\|} v$$

$$= \cancel{\|u\|} \frac{\langle u, v \rangle}{\cancel{\|u\|} \cdot \|v\|} \cdot \frac{1}{\|v\|} \cdot v$$

$$\Rightarrow pr_v u = \frac{\langle u, v \rangle}{\langle v, v \rangle} \cdot v = \frac{\langle u, v \rangle}{\|v\|^2} \cdot v$$

$$\begin{cases} f_3 = u_3 + \lambda_{31} f_1 + \lambda_{32} f_2 \\ \langle f_3, f_1 \rangle = 0 \\ \langle f_3, f_2 \rangle = 0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \lambda_{31} = \dfrac{\langle f_1, u_3 \rangle}{\langle f_1, f_1 \rangle} \\ \lambda_{32} = \dfrac{\langle f_2, u_3 \rangle}{\langle f_2, f_2 \rangle} \\ f_3 = u_3 - pr_{f_1} u_3 - pr_{f_2} u_3 \end{cases}$$

~~pr. lui f_1 pe u_3~~

pr. lui u_3 pe f_1 ; pr. lui u_3 pe f_2

Procedăm inductiv: obținem $f_p = u_p - \sum_{i=1}^{p-1} pr_{f_i} u_p$

$\to f_{p+1} = u_{p+1} \dots$

În final, $f_n = u_n - \sum_{i=1}^{n-1} pr_{f_n} u_n$

Se arată că $\{f_1, \dots f_n\}$ este o bază ortogonală cu prop. 2) și 3).

Se consideră în final $\widetilde{B} = \{e_1, \dots e_n\}$, unde $e_i = \frac{1}{\|f_i\|} \cdot f_i$, $i = \overline{1,n}$, care satisface 1, 2 și 3 din teoremă.

Să se ortogonalizeze folf. procedeul G-S.

în E^2:

1) $B = \{(1,0), (1,1)\}$

în E^3

2) $B = \{(1,-1,2), (0,1,0), (0,2,3)\}$

Definiție: Dat. $E = (V, +, \cdot, <,>)$ un sp. vect. eucl. un endomorfism $f: V \to V$ s.n. automorfism al lui E dc

$\downarrow$ not. $Aut(E)$

1) f este bijectivă

2) f^{-1} este bijectivă

3) $\langle f(x), f(y) \rangle = \langle x, y \rangle$; $\forall x, y \in V$

4) $\langle f^{-1}(x), f^{-1}(y) \rangle = \langle x, y \rangle$; $\forall x, y \in V$

Obs.: f liniară, 1) $\Rightarrow$ f^{-1} liniară, 2)

Teoremă: Fie $E = (V, +, \cdot, <,>)$ un sp. vect. eucl. și $B = \{e_1, \dots e_n\}$ o bază ortonormată fixată. și

---

$E^n = (\mathbb{R}^n, +, \cdot, <,>)$ canonic/standard.

$\Rightarrow \{(1,0,\dots 0) \dots (0, \dots 0, 1)\}$ ortonormată

$\mathbb{R}^2$ $\langle (1,0), (0,1) \rangle = 0$

$f \in End_{\mathbb{R}}(V, +, \cdot)$ at. sunt echivalente:

i) $f \in Aut(E)$
ii) $\langle f(x), f(y) \rangle = \langle x, y \rangle$; $\forall x, y \in E$
iii) $\| f(x) \| = \| x \|$; $\forall x \in E$
iv) $d(f(x), f(y)) = d(x, y)$; $\forall x, y \in E$
v) Dc. $\underset{(a^i_j)_{i,j=\overline{1,n}}}{A} = M_B(f)$, at. $A \cdot A^t = I_n$
$\Leftrightarrow \exists A^{-1}$ și $A^{-1} = A^t$
vi) Dc. $A = M_B(f)$, at $A^t \cdot A = I_n$ ($\Leftrightarrow$ ....)
vii) $\sum_{i=1}^{n} a^i_j \cdot a^i_k = \delta_{jk}$, $\forall j, k \in \overline{1,n}$
viii) $\sum_{i=1}^{n} a^j_i \cdot a^k_i = \delta^{jk}$, $\forall j, k = \overline{1,n}$

Rel. echiv. v – viii sn. rel. de ortogonalitate din care rez. că mat. e ortogonală.

Mulțimea mat. ortog $= O(n)$ $\boxed{\dim_{\mathbb{R}}(V, +, \cdot) = n \in \mathbb{N}^*}$

$\boxed{\text{Seminar}}$

Teoremă: Fie $E = (V, +, \cdot, \langle , \rangle)$ sp. vect. eucl și $B = \{e_1, \dots e_n\}$ o bază ortonormată
Fie $f \in End(V, +, \cdot)$ și $A = M_B(f)$
$\| (a^i_j)_{i,j=\overline{1,n}}$

Sunt echivalente:

i) $f \in Aut(E)$
ii) $x, y \in E \Rightarrow \langle f(x), f(y) \rangle = \langle x, y \rangle$
iii) $x \in E \Rightarrow l(f(x)) = l(x)$
iv) $x \in E \Rightarrow \| f(x) \| = \| x \|$
v) $x, y \in E \Rightarrow d(f(x), f(y)) = d(x, y)$
vi) $A \cdot A^t = I_n$
vii) $A^t \cdot A = I_n$
viii) $\sum_{i=1}^{n} a^i_j \cdot a^i_k = \delta_{jk}$, $\forall j, k = \overline{1,n}$
ix) $\sum_{i=1}^{n} a^j_i \cdot a^k_i = \delta^{jk}$, $\forall j, k = \overline{1,n}$