Exerciții posibile examen

① Există permutări de ordin $a \cdot b - 1$ în grupul de permutări S_{a+b}.

- - - - - - -

Ca să existe astfel de permutare, trebuie ca $a \cdot b - 1$ să dividă $(a+b)!$.

Ca de exemplu, pentru $a = 11$ și $b = 7$

$$a \cdot b = 11 \cdot 7 = 77$$
$$a + b = 18$$
$$a \cdot b - 1 = 77 - 1 = 76$$

Cum $76 \nmid 18!$, nu există.

Totuși, dacă $(a \cdot b - 1) \mid (a+b)!$ sunt 2 cazuri

C I $a \cdot b - 1 = 4 \cdot 9 - 1 = 35$, $a = 4$, $b = 9$

S_{13}

ordin 35 în 13

$35 = 5 \cdot 7$.

O permutare posibilă este un ciclu de lungime 5 și unul de 7.

$\sigma = (1\ 2\ 3\ 4\ 5)(6\ 7\ 8\ 9\ 10\ 11\ 12)$

C II $a = 8$, $b = 7$

$55 = 11 \cdot 5$

Cum $11 + 5 = 16 > 15$ nr de elemente posibile $\Rightarrow$ nu există permutări de ordin 55.

2. Se consideră permutarea $\sigma = (1 \dots a)(a+1 \dots a+3)$ un produs de 2 cicli disjuncți de lungime a, respectiv 3, din S_{a+3}. Det. toate permutările $\tau \in S_{a+3}$ a.î. $\tau^3 = \sigma$

Pot exista două cazuri pt acest ex.

① Un ciclu de lungime $a+3$, cu urm condiții:

să fie ciclari de lungime egală, și să fie câte ~~te~~ este puterea τ^x.

De ex, pt $\tau^3 = \sigma$, un $(1\,2\,3\,4)(5\,6\,7\,8)(9\,10\,11\,12)$ este ok. Sau, pt $\tau^2 = \sigma$, un $(1\,2\,3\,4\,5)(6\,7\,8\,9\,10)$ este ok, în timp ce $(1\,2\,3\,4)(5\,6\,7\,8\,9)$ nu este ok pt acest caz.

② Cicli de lungime a și ~~a+3~~ 3

Ca aceștia să existe, trebuie ca nici a, nici 3 să nu fie ~~divizibil cu~~ divizibil cu puterea lui τ. Pt $\tau^3 = \sigma$, $a = 6$ și $3 = 5$ nu merge, deoarece 6 div cu 3. Dacă $a = 5$ și $3 = 7$, ~~va~~ va exista un sg caz, în care trb să deduci τ din $\tau^3 = \sigma$

Ex Cum $\sigma^3 = (1\,2\,3\,4\,5)$, $(\sigma^3)^5 \Rightarrow \sigma = (1\,4\,3\,5\,2)$

① Dacă condiția este îndeplinită, vor fi lungimea unui ciclu coresp.

(3) Determinați cel mai mic număr natural nenul n care împărțit la 5 dă restul 3, împărțit la 7 dă restul 2 și împărțit la 9 dă restul 8.

Acest ex este o aplicație directă pentru lema chineză a resturilor.

$n \equiv 3 \bmod 5 \Rightarrow a_1 = 3;\ n_1 = 5$

$n \equiv 2 \bmod 7 \Rightarrow a_2 = 2;\ n_2 = 7$

$n \equiv 8 \bmod 9 \Rightarrow a_3 = 8,\ n_3 = 9$

Observăm că $(n_1, n_2) = (n_2, n_3) = (n_3, n_1) = 1$

(99% din cazuri astea 3 sunt prime)

$N = n_1 \cdot n_2 \cdot n_3 \Leftrightarrow N = 5 \cdot 7 \cdot 9$

$N_1 = \frac{N}{n_1} \Leftrightarrow \cancel{5 \cdot 9}\ 7 \cdot 9$

$N_2 = \frac{N}{n_2} = 5 \cdot 9$

$N_3 = \frac{N}{n_3} \Leftrightarrow 5 \cdot 7$

$63 \% 5 = 3$

$N_1 \cdot x_1 \equiv 1 (\bmod n_1) \Leftrightarrow 63 x_1 \equiv 1 (\bmod 5) \Leftrightarrow 3 x_1 = 1 (\bmod 5) \Rightarrow$

$\Rightarrow x_1 \equiv 2 (\bmod 5)$

$N_2 \cdot x_2 \equiv 1 (\bmod n_2) \Leftrightarrow 45 x_2 \equiv 1 (\bmod 7) \Rightarrow 3 x_2 \equiv 1 (\bmod 7) \Rightarrow$

$\Rightarrow x_2 \equiv 5 (\bmod 7)$

Aici trebuie, ca de ex la N_2, să găsești cel mai mic multiplu de 3 care poate fi scris ca $7k+1$, res fiind k

3/

$N_3 x_3 \equiv 1 \pmod{n_3} \Leftrightarrow 35 x_3 \equiv 1 \pmod 9 \Rightarrow 8 x_3 \equiv 1 \pmod 9$

$\Rightarrow x_3 \equiv 8 \pmod 9$

Soluția unică modulo $N = 5 \cdot 7 \cdot 9 = 315$ este $x \pmod N$ unde

$$x = a_1 \cdot N_1 x_1 + a_2 N_2 x_2 + a_3 N_3 x_3$$

$$\Rightarrow x = 3 \cdot 63 \cdot 2 + 2 \cdot 45 \cdot 5 + 8 \cdot 35 \cdot 8.$$
$$= 3068$$

$3068 \pmod{315} \equiv 233 \pmod{315}$

$\Rightarrow$ Soluția este 233.

Dacă cerința solicită altul decât cel mai mic număr, soluțiile sunt de perioadă c.m.m.m.c dintre nr, adică produsul, deoarece sunt prime. Alte soluții pt acest ex, în afară de 233 sunt 548 sau 863, la diferență de 315.

Scanned with CamScanner

(4) Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ definită astfel:

$$f(x) = \begin{cases} ax + b(1+a), & x < -b \\ ax^2 + 2a(a-1)x + a^3 - 2a^2 + a + b \end{cases}$$

Decideți dacă funcția f este injectivă, surjectivă, respectiv bijectivă. Calculați $f^{-1}(\{-b-1, b+1\})$

Când avem astfel de funcție, cel mai ușor este să facem graficul funcției, de unde deducem natura prin paralele la Ox. (Eventual te verifici cu photomath).

Preimaginea, în general, se bazează pe faptul că $f(A\cup B) = f(A)\cup f(B)$. Totodată cu condiția $f(x) =$ capăt al intervalului.

Imaginea e fix invers, evident...

5) Se consideră o relație binară $x \rho y$ dacă $x = y$ sau $x+y=14$. E rel. de echiv? Clase de echiv pt 7 și 2022. SCR. Bine definită.

Relație de echivalență

Aici trb să fie reflexivă ($a \sim a$), simetrică ($a \sim b \Rightarrow b \sim a$), tranzitivă (dc. $a \sim b$ și $b \sim c \Rightarrow a \sim c$)

Clase de echiv

Toate elementele cu care, de ex, 7 și 2022 sunt în relație.

$x=7$

$\cancel{x}=7$

$\cancel{x}=14-7=7 \Rightarrow \hat{7}=\{7\}$

$x=2022$

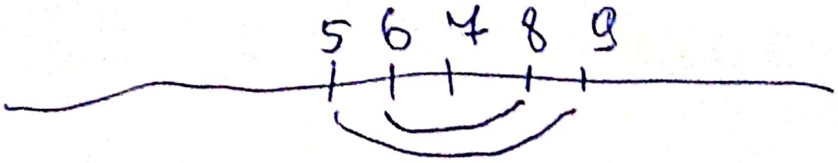
$2022=2022$

$x=\cancel{2}\,14-2022=-2008$

$\widehat{2022}=\{2022,-2008\}$.

SCR

Un interval/mulțime unde sunt cuprinse toate clasele de echivalență. De ex pt relația dată.



Practic, un SCR este $(-\infty, 7]$ sau $[7, \infty)$. Dacă ar cuprinde și 6, nu ar mai fi SCR, deoarece 8 este în clasa de echiv pt 6.

Relația bine definită.

Cu de ex, cum avem $x=y$ sau $x+y=14$, vom avea de demonstrat că $f(x)=f(14-x)$, unde $f(x)=4x^2-56x+200$, $f:\mathbb{R}/g\to\mathbb{R}$.

$$\cancel{f(x)}\ 4(x^2-14x+50)=4[(14-x^2)-(14-x)\cdot 14+50]$$
$$x^2-14x+50=(14-x)(14-x-14)+50$$
$$x^2-14x=x^2-14x\ (A) \Rightarrow f \text{ este bine definită.}$$

(6) Determinați numărul elementelor de ordin 8 din grupul produs direct $(\mathbb{Z}_{2^a},+)\times(\mathbb{Z}_{2^b},+)$

Considerăm $a=8$ și $b=7$, astfel vom avea $\mathbb{Z}_{256}\times\mathbb{Z}_{128}$

Fie $(\hat{a},\bar{b})\in(\mathbb{Z}_{256},+)\times(\mathbb{Z}_{128},+)$

Știm că: $ord((\hat{a},\bar{b}))=[ord(\hat{a}),ord(\bar{b})]\Rightarrow$

$\Rightarrow [ord(\hat{a}),ord(\bar{b})]=8\Rightarrow ord(\hat{a})\,|\,8$
$ord(\bar{b})\,|\,8\Rightarrow$

$\Rightarrow ord(\hat{a})\in\{1,2,4,8\}$ și $ord(\bar{b})\in\{1,2,4,8\}$

$\hat{a} \in \mathbb{Z}_{256} \Rightarrow ord(\hat{a}) = \frac{256}{(256, a)}$ ⟵ TEORIE

$ord(\hat{a}) = 1 \Rightarrow 256 = (256, a) \Rightarrow \hat{a} = \widehat{256} = \hat{0}$

$ord(\hat{a}) = 2 \Rightarrow 256 = 2 \cdot (256, a)$

$128 = (256, a) \Rightarrow \hat{a} = \widehat{128} \in \mathbb{Z}_{256}$

$ord(\hat{a}) = 4 \Rightarrow 256 = 4 \cdot (256, a)$

$\cancel{128}\ 64 = (256, a) \Rightarrow \hat{a} = \widehat{64} \in \mathbb{Z}_{256}$

$ord(\hat{a}) = 8 \Rightarrow 256 = 8 \cdot (256, a)$

$(256, a) = 32 \Rightarrow \hat{a} = \widehat{32} \in \mathbb{Z}_{256}$

$(ord(\hat{a}), ord(\bar{b})) \in \{(1,8), (2,8), (4,8), (8,8), (8,1), (8,2), (8,4)\}.$

$\hat{a} \in \{\widehat{32}, \widehat{64}, \widehat{128}, \hat{0}\}.$

$ord(\bar{b}) = \frac{128}{(128, b)}$

$ord(\bar{b}) = 1 \Rightarrow 128 = (128, b) \Rightarrow \bar{b} = \overline{128} = \bar{0}$

$ord(\bar{b}) = 2 \Rightarrow (128, b) = 64 \Rightarrow \bar{b} = \overline{64}$

$ord(\bar{b}) = 4 \Rightarrow (128, b) = 32 \Rightarrow \bar{b} = \overline{32}$

$ord(\bar{b}) = 8 \Rightarrow (128, b) = 16 \Rightarrow \bar{b} = \overline{16}$

Acum asamblăm rezultatele.

$\Rightarrow b \in \{\bar{0}, \overline{16}, \overline{32}, \overline{64}\}$

$\Rightarrow (\hat{a}, b) \in \{(\hat{0}, \overline{16}), (\widehat{128}, \overline{16}), (\widehat{64}, \overline{16}), (\widehat{32}, \overline{16}),$

$(\widehat{32}, \bar{0}), (\widehat{32}, \overline{64}), (\widehat{32}, \overline{32})$

$\Rightarrow$ 7 elemente