SE REȚINE !!!!!

EVENIMENTELE (*A* ȘI *B*)

INCOMPATIBILE: $A \cap B = \varnothing$

$$\boxed{P(A \cap B) = 0}$$

COMPATIBILE: $A \cap B \neq \varnothing$

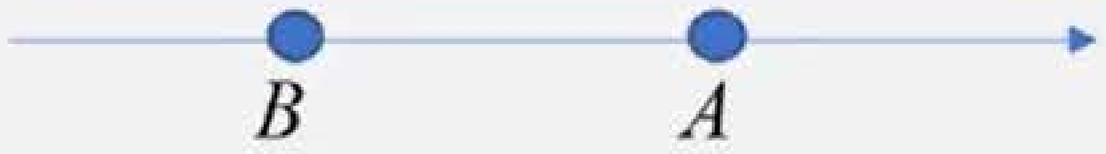
$$\boxed{P(A \cap B) \neq 0}$$

INDEPENDENTE:

$$\boxed{P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)}$$

CONDIȚIONATE:

$$\boxed{P(A \cap B) = P(B) \cdot P_B(A)}$$



FORMULA PROBABILITĂȚII TOTALE

Fie (Ω, K, P) un câmp finit de probabilitate, $A_i \in K$, $i = \overline{1,n}$, un sistem complet de evenimente şi $B \in K$ un eveniment oarecare. Atunci:

$$\boxed{P(B) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i) \cdot P_{A_i}(B)}$$

$$P(B) = P(A_1) \cdot P_{A_1}(B) + P(A_2) \cdot P_{A_2}(B) + ... + P(A_n) \cdot P_{A_n}(B)$$

FORMULA LUI BAYES

Formula lui Bayes, numită și "teorema ipotezelor" permite calculul probabilității condiționate $P_B(A_i)$, *numită "probabilitate a posteriori" , adică probabilitatea de realizare a ipotezei* A_i, *știind că evenimentul* B *s-a realizat.*

Fie (Ω, K, P) un câmp finit de probabilitate, $A_i \in K$, $i = \overline{1,n}$, un sistem complet de evenimente şi $B \in K$ un eveniment oarecare. Atunci:

$$\boxed{P_B(A_i) = \frac{P_{A_i}(B) \cdot P(A_i)}{P(B)}}$$

Se consideră două urne identice. Una conţine 3 bile albe şi 4 bile negre iar cealaltă 4 bile albe şi 5 bile negre. Din una din aceste urne, aleasă la întâmplare, se extrage o bilă. Care este probabilitatea ca bila extrasă să fie albă?

Specificarea "urne identice" din enunț se referă la faptul că probabilitatea de a extrage dintr-una dintre urne este egală cu probabilitatea de a extrage din cealaltă.

Considerăm următoarele evenimente:

A_1 = *"extragem bila din prima urnă"*

A_2 = *"extragem bila din a doua urnă"*

sistem complet de evenimente

evenimentele A_1 *și* A_2 *sunt echiprobabile:* $P(A_1) = P(A_2) = \frac{1}{2}$.

B = *" bilă extrasă este albă".*

Bila albă se poate extrage din prima urnă sau a doua, ***probabilitatea extragerii fiind condiționată*** *(structura urnelor nu este identică):*

$$P_{A_1}(B) = \frac{3}{7} \qquad P_{A_2}(B) = \frac{4}{9}$$

Pentru calcularea probabilității extragerii unei bile albe folosim formula probabilității totale:

$$P(B) = P(A_1)\cdot P_{A_1}(B) + P(A_2)\cdot P_{A_2}(B) = \frac{1}{2}\cdot\frac{3}{7} + \frac{1}{2}\cdot\frac{4}{9} = \frac{55}{126} = 0.436$$

Într-un club sportiv 4% dintre băieți și 1% dintre fete sunt mai înalți de 1.80 m. În cadrul clubului, 60% dintre sportivi sunt fete. Dacă este selectat la întâmplare un sportiv și acesta este mai înalt de 1.80 m, care este probabilitatea ca acesta să fie fată?

Considerăm următoarele evenimente:

$$\left.\begin{aligned} A_1 &= \text{"elevul selectat este fată"} \\ A_2 &= \text{"elevul selectat este băiat"} \end{aligned}\right\} \text{ sistem complet de evenimente (fete – băieți)}$$

B = *"elevul selectat are peste 1.80m"*

Deoarece se cunoaște ponderea de fete și de băieți (și avem sistem complet de evenimente – fete-băieți), avem:

$$P(A_1) = \frac{6}{10} \qquad P(A_2) = \frac{4}{10}$$

Se folosește mai întâi formula probabilității totale pentru a afla probabilitatea de a selecta un sportiv cu înălțimea peste 1.80m:

$$P(B) = P(A_1) \cdot P_{A_1}(B) + P(A_2) \cdot P_{A_2}(B) = \frac{6}{10} \cdot \frac{1}{100} + \frac{4}{10} \cdot \frac{4}{100} = \frac{22}{1000} \simeq 0.022$$

Pentru a afla probabilitatea ca sportivul selectat, cu înălțimea peste 1.80 m să fie fată, folosim formula lui Bayes:

$$P_B(A_1) = \frac{P(A_1) \cdot P_{A_1}(B)}{P(B)} = \frac{6}{1000} \cdot \frac{1000}{22} = \frac{3}{11} \simeq 0.272$$

Un lot de 100 de produse este supus controlului de calitate. Condiția ca lotul să fie respins este de a găsi cel puțin un rebut din trei produse alese aleator din lot (produsele sunt alese fără repunere). Se știe că procentul de rebuturi este 7%. Care este probabilitatea ca lotul să fie acceptat?

Lotul de produse este acceptat dacă cele trei produse, extrase succesiv, nu sunt rebuturi.

Considerăm următoarele evenimente:

A_i =*"produsul extras al* i *-lea este bun",* $i=\overline{1,3}$

B = *"lotul este acceptat".*

Evenimentele A_i *sunt condiționate succesiv și folosind formula probabilităților condiționate avem:*

$$P(B)=P(A_1\cap A_2\cap A_3)=P(A_1)\cdot P_{A_1}(A_2)\cdot P_{A_1\cap A_2}(A_3)=\frac{93}{100}\cdot\frac{92}{99}\cdot\frac{91}{98}=0.802$$

Un aparat de măsură poate fi achiziționat de la 5 depozite care au următoarea structură: două depozite au câte 80 de aparate bune și 2 defecte, un depozit are 93 de aparate bune și 4 defecte iar două depozite au 96 de aparate bune și 3 defecte. Care este probabilitatea ca alegând la întâmplare un aparat dintr-unul dintre cele cinci depozite, acesta să fie defect?

Considerăm următoarele evenimente:

A_i =*"aparatul ales provine de la al* i *-lea depozit",* $i=\overline{1,5}$

B = *"aparatul este defect".*

Deoarece aparatul este ales "la întâmplare" dintr-unul dintre cele cinci depozite, evenimentele A_i *sunt <u>echiprobabile</u> și formează un sistem complet de evenimente (aparatul nu poate proveni din altă parte), deci:* $P\left(A_i\right)=\frac{1}{5}$

Aplicăm formula probabilității totale și avem:

$$P\left(B\right)=\sum_{k=1}^{5}P\left(A_k\right)\cdot P_{A_k}\left(B\right)=\frac{1}{5}\cdot\frac{2}{82}+\frac{1}{5}\cdot\frac{2}{82}+\frac{1}{5}\cdot\frac{4}{97}+\frac{1}{5}\cdot\frac{3}{99}+\frac{1}{5}\cdot\frac{3}{99}=\frac{1}{5}\left(\frac{4}{82}+\frac{4}{97}+\frac{6}{99}\right)=0.03$$

Fie 3 urne care conţin bile albe şi roşii astfel: U_1: 2 bile roşii şi 4 bile albe, U_2: 1 bilă roşie şi 2 bile albe, U_3: 5 bile roşii şi 4 bile albe. Fie A_i evenimentul de a extrage o bilă oarecare din urna U_i, cu $i=\overline{1,3}$. Presupunem că probabilitatea de a extrage o bilă din urna U_1 este $P(A_1)=\frac{1}{3}$, din urna U_2 este $P(A_2)=\frac{1}{6}$ şi din urna U_3 este $P(A_3)=\frac{1}{2}$. Se face o singură extragere (nu se specifică urna). Se cere:

- ***a)*** *probabilitatea de a extrage o bilă roşie.*
- ***b)*** *Dacă se extrage o bilă roşie, care este probabilitatea să fie din urna U_1? Dar din U_2? Dar din U_3?*

Considerăm următoarele evenimente:

A_1 =*"extragem bila din prima urnă"*, $P(A_1)=\frac{1}{3}$

A_2 = *"extragem bila din a doua urnă"*, $P(A_2)=\frac{1}{6}$

A_3 = *"extragem bila din a treia urnă"*, $P(A_3)=\frac{1}{2}$

B = *" bilă extrasă este roșie".*

Evenimentele $\{A_1, A_2, A_3\}$ formează sistem complet de evenimente (suma probabilităților este 1). Bila roșie se poate extrage din prima urnă, a doua sau a treia, probabilitatea extragerii fiind condiționată (structura urnelor nu este identică):

$$P_{A_1}(B)=\frac{2}{6} \qquad P_{A_2}(B)=\frac{1}{3} \qquad P_{A_3}(B)=\frac{5}{9}$$

a) *Folosim formula probabilității totale:*

$$P(B)=P\left(A_1\right)\cdot P_{A_1}(B)+P\left(A_2\right)\cdot P_{A_2}(B)+P\left(A_3\right)\cdot P_{A_3}(B)=\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3}+\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{3}+\frac{1}{2}\cdot\frac{5}{9}=\frac{4}{9}=0.444$$

b) *Pentru calcularea acestor probabilități se folosește formula lui Bayes:*

$$P_B\left(A_1\right)=\frac{P_{A_1}(B)\cdot P\left(A_1\right)}{P(B)}=\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{9}{4}=\frac{1}{4}=0.25$$

$$P_B\left(A_2\right)=\frac{P_{A_2}(B)\cdot P\left(A_2\right)}{P(B)}=\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{9}{4}=\frac{1}{8}=0.125$$

$$P_B\left(A_3\right)=\frac{P_{A_3}(B)\cdot P\left(A_3\right)}{P(B)}=\frac{1}{2}\cdot\frac{5}{9}\cdot\frac{9}{4}=\frac{5}{8}=0.625$$

Într-un circuit sunt introduse 3 rezistoare. Într-un regim de suprasolicitare, aceste rezistoare se ard cu probabilitățile 0.02; 0.05; 0.01. Să se calculeze probabilitatea ca într-un astfel de regim de funcționare să se întrerupă curentul. Se vor considera cazurile:

a) *rezistoarele sunt legate în serie.*

b) *rezistoarele sunt legate în paralel.*

Considerăm evenimentele A_i *= "se arde rezistorul* i*",* $i=\overline{1,3}$. *Evenimentele sunt* *<u>independente.</u>*

a) *Legare în serie – curentul se întrerupe dacă s-a ars cel puțin un rezistor:*

$$P(A_1\cup A_2\cup A_3)=P(A_1)+P(A_2)+P(A_3)-\underbrace{P(A_1\cap A_2)}_{P(A_1)\cdot P(A_2)}-\underbrace{P(A_2\cap A_3)}_{P(A_2)\cdot P(A_3)}-\underbrace{P(A_1\cap A_3)}_{P(A_1)\cdot P(A_3)}+\underbrace{P(A_1\cap A_2\cap A_3)}_{P(A_1)\cdot P(A_2)\cdot P(A_3)}=0.07831$$

b) *Legare în paralel – curentul se întrerupe dacă se ard toate rezistoarele:*

$$P(A_1\cap A_2\cap A_3)=P(A_1)\cdot P(A_2)\cdot P(A_3)=0.00001$$

Într-un atelier există de două ori mai multe șurubelnițe cu vârf magnetic decât fără vârf magnetic. Se știe că 30% dintre șurubelnițele cu vârf magnetic și 10% dintre cele fără vârf magnetic au vârful în cruce. Un mecanic ia o șurubelniță din atelier, la întâmplare, și vede că are vârful în cruce. Care este probabilitatea ca șurubelnița aleasă de către mecanic să fie cu vârf magnetic?

Definim evenimentele:

A_1 =*"aleg șurubelnița cu vârf magnetic"*, $P(A_1) = \frac{2}{3}$;

A_2 =*"aleg șurubelnița fără vârf magnetic"*, $P(A_2) = \frac{1}{3}$;

B =*"aleg șurubelnița cu vârf în cruce"*, $P_{A_1}(B) = \frac{3}{10}$; $P_{A_2}(B) = \frac{1}{10}$.

Aplicăm formula probabilității totale: $P(B) = P(A_1) \cdot P_{A_1}(B) + P(A_2) \cdot P_{A_2}(B) = \frac{2}{3} \cdot \frac{3}{10} + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{10} = \frac{7}{30}$

Aplicăm formula lui Bayes: $P_B(A_1) = \frac{P(A_1) \cdot P_{A_1}(B)}{P(B)} = \frac{2}{3} \cdot \frac{3}{10} \cdot \frac{30}{7} = \frac{6}{7}$

La un examen auto se prezintă de 2 ori mai puține femei decât bărbați. Se știe că 30% dintre femei și 10% dintre bărbați nu trec examenul. Din sala de examen iese un bărbat. Care este probabilitatea ca acesta să fi picat examenul?

Se consideră evenimentele:

A_1 =*"se prezintă o femeie la examen"*, $P(A_1) = \frac{1}{3}$;

A_2 =*"se prezintă un bărbat la examen"*, $P(A_2) = \frac{2}{3}$;

B =*"persoana pică examenul"*

Calcularea probabilităților condiționate: $P_{A_1}(B) = \frac{3}{10}$ $\quad P_{A_2}(B) = \frac{1}{10}$