Corolar

Fie $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq (0,\infty)$ a.î. $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{x_{n+1}}{x_n} = l$

$l \in \overline{\mathbb{R}}$ a.t. $\exists \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{x_n} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{x_{n+1}}{x_n}$

Lema lui Cesaro - Stolz $\left(\frac{\infty}{\infty}\right)$

y_n strict $\nearrow$, $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = \infty$

$\exists \lim\limits_{n\to\infty} \frac{x_{n+1} - x_n}{y_{n+1} - y_n} = l \in \overline{\mathbb{R}}$

$\Downarrow$

$\exists \lim\limits_{n\to\infty} \frac{x_n}{y_n} = l.$

Pentru a putea trece mai departe la limite superioare și inferioare va trebui să știți ce înseamnă infimumul și supremum.

⊛ Fie $(X, \leq)$ o mulțime ordonată și A o submulțime $\neq \emptyset$ a lui X, $m \in X$

$\Rightarrow$ m s.n. majorant al lui A dacă pt $\forall$ $a \in A$ avem $a \leq m$

$\Rightarrow$ m minorant al lui A dacă pt $\forall$ $a \in A \Rightarrow a \geq m$

⊛ Infimum = cel mai mare mai mic (cel mai mare dintre minoranți)

Supremum = cel mai mic mai mare (cel mai mic dintre majoranți)

(dacă $\exists$ min A / max A $\Rightarrow$ Inf A = min A, Sup A = max A.

(m ∈ X aparține și lui A)

① $x_n = \frac{n\cdot(-1)^n}{2n+1} + tg\frac{n\pi}{3}$, $\underline{\lim} = ?$ $\overline{\lim} = ?$

Mai întâi tb să observăm cum arată șirul x_n

Obs că $(-1)^n = \begin{cases} 1, & n=2k \\ -1, & n=2k+1 \end{cases}$

$\underbrace{tg\frac{n\pi}{3}}_{\text{are 3 forme}} = \begin{cases} tg\, k\pi, & n=3k \\ tg(k\pi+\frac{\pi}{3}), & n=3k+1 \\ tg(k\pi+\frac{2\pi}{3}), & n=3k+2 \end{cases} = \begin{cases} 0, & n=3k \\ \sqrt{3}, & n=3k+1 \\ -\sqrt{3}, & n=3k+2 \end{cases}$

Astfel observăm că x_n .. diferă în fct. de paritatea lui n sau cum este față de 3.

Așa că vrem ~~să luăm multe subșiruri din șirul mare~~ să ~~tre~~ împărțim șirul x_n în subșiruri care să aibă ace. forma.

Cum n dep de 2 sau de 3 $\Rightarrow$ luăm în fct de 6k

$\Rightarrow$ Aleg subșirurile $(x_{6k}), (x_{6k+1}), (x_{6k+2}), (x_{6k+3}), (x_{6k+4}) (x_{6k+5})$

Acum calculăm punctele limită

$\lim_{k\to\infty} x_{6k} = \lim_{k\to\infty} \frac{6k}{12k+1} + 0 = \frac{6}{12} = \frac{1}{2}$

$\lim_{k\to\infty} x_{6k+1} = \lim_{k\to\infty} \left(\frac{(6k+1)(-1)}{12k+3} + \sqrt{3}\right) = -\frac{6}{12} + \sqrt{3} = \sqrt{3} - \frac{1}{2}$

$\lim_{k\to\infty} x_{6k+2} = \lim_{k\to\infty} \left(\frac{(6k+2)}{12k+5} - \sqrt{3}\right) = \frac{1}{2} - \sqrt{3}$

$(-1)^n = -1$, (0)

$\lim_{k\to\infty} x_{6k+3} = \lim_{k\to\infty} \left(\frac{(6k+3)(-1)}{12k+7} + 0\right) = -\frac{1}{2}$

$\lim_{k\to\infty} x_{6k+4} = \lim_{k\to\infty} \frac{(6k+4)}{12k+9} + \sqrt{3} = \frac{1}{2} + \sqrt{3}$

$$\lim_{k\to\infty} x_{6k+5} = \lim_{k\to\infty} \frac{(6k+5)(-1)}{12k+11} - \sqrt{3} = -\frac{1}{2} - \sqrt{3}$$

$\Rightarrow$ mult. punctelor limită : $L = \left\{ \frac{1}{2},\ \sqrt{3}-\frac{1}{2},\ \frac{1}{2}-\sqrt{3},\ -\frac{1}{2},\ \frac{1}{2}+\sqrt{3},\ -\frac{1}{2}-\sqrt{3} \right\}$

$$\underline{\lim}\ x_n = \inf(L) = -\frac{1}{2} - \sqrt{3}$$

$$\overline{\lim}\ x_n = \sup_{\text{mult.}}(L) = \frac{1}{2} + \sqrt{3}$$

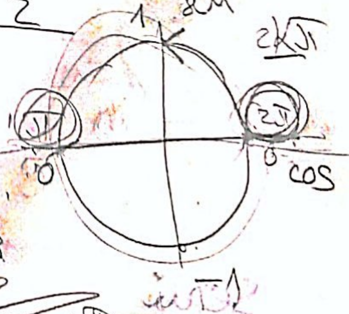
Are șirul x_n limită? Nu pt că $\underline{\lim} \neq \overline{\lim} \Rightarrow \nexists \lim_{n\to}$

Este șirul x_n mărginit? $\underline{\lim}\, x_n,\ \overline{\lim}\, x_n \in \mathbb{R} \Rightarrow$ șir mărg.

imp $2k+1$
pare $2k$

① $x_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n\cdot(-1)^n} + \sin\frac{n\pi}{2}$

$$\sin\frac{n\pi}{2} = \begin{cases} 0 & n = 4k \\ 1 & n = 4k+1 \\ 0 & n = 4k+2 \\ -1 & n = 4k+3 \end{cases}$$



$\frac{n\cancel{\pi}}{2} = 2\cancel{\pi} \Rightarrow n = 4$

$\frac{(4k+1)\pi}{2} = \frac{2k\pi}{1} + \frac{\pi}{2}$

$n = 4k,\ 4k+1;\ 4k+2;\ 4k+3$

$$x_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n(-1)^n} + \sin\frac{n\pi}{2}$$

$$\lim_{k\to\infty} x_{4k} = \lim_{k\to\infty}\Big[\underline{\left(1+\frac{1}{4k}\right)^{4k(-1)^{4k}}} + \underbrace{\sin\frac{4k\pi}{2}}_{0}\Big]$$

$$= \lim_{k\to\infty}\left(1+\frac{1}{4k}\right)^{4k} = \underline{\underline{e}}$$

$$\lim_{k\to\infty} x_{4k+1} = \Big[\underline{\left(1+\frac{1}{4k+1}\right)^{-(4k+1)}} + 1\Big] =$$

$$= \frac{1}{e}+1$$

$$\lim_{k\to\infty} x_{4k+2} = \lim_{k\to\infty}\Big[\left(1+\frac{1}{4k+2}\right)^{4k+2} + 0\Big] = e$$

$$\lim_{k\to\infty} x_{4k+3} = \lim_{k\to\infty}\Big[\left(1+\frac{1}{4k+3}\right)^{-(4k+3)} + (-1)\Big] = \frac{1}{e}-1$$

$$\left\{e,\ \frac{1}{e}+1,\ \underline{\frac{1}{e}-1}\right\}$$

$$\underline{\lim}\, x_n = \frac{1}{e}-1 \qquad \Rightarrow \underline{\lim} \neq \overline{\lim} \Rightarrow \nexists \lim_{n\to\infty} x_n$$

$$\overline{\lim}\, x_n = e$$

Scanned with CamScanner

Serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)(n+2)} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+1)-n}{n(n+1)(n+2)} =$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n(n+2)} - \frac{1}{(n+1)(n+2)} \right) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2} \cdot \frac{(n+2)-n}{n(n+2)} =$$

$$\frac{n+1}{n+2}$$

$$\sum \frac{(n+2)-(n+1)}{(n+1)(n+2)} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+2}\right) - \left(\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2}\right)$$

$$= \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+2}\right) - \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2}\right) =$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{1}-\cancel{\frac{1}{3}}+\frac{1}{2}-\cancel{\frac{1}{4}}+\cancel{\frac{1}{3}}-\cancel{\frac{1}{5}}+\cancel{\frac{1}{4}}-\frac{1}{6}+\cancel{\ldots}\right.$$

$$\left.\ldots+\cancel{\frac{1}{n-2}}-\cancel{\frac{1}{n}}+\cancel{\frac{1}{n-1}}-\frac{1}{n+1}+\cancel{\frac{1}{n}}-\frac{1}{n+2}\right) -$$

$$-\left(\frac{1}{2}-\cancel{\frac{1}{3}}+\cancel{\frac{1}{3}}-\cancel{\frac{1}{4}}+\cancel{\frac{1}{4}}-\cancel{\frac{1}{5}}+\cancel{\ldots}+\cancel{\frac{1}{n}}-\cancel{\frac{1}{n+1}}+\right.$$

$$\left.+\cancel{\frac{1}{n+1}}-\frac{1}{n+2}\right) =$$

$$= \frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{2}-\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2}\right)-\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{n+2}\right) =$$

$$= \cancel{\frac{1}{2}}+\frac{1}{4}-\frac{1}{2n+2}-\frac{1}{2n+4}-\cancel{\frac{1}{2}}+\frac{1}{n+2}$$

$$= \frac{1}{4}-\frac{1}{2n+2}-\frac{1}{2n+4}+\frac{1}{n+2} \longrightarrow \frac{1}{4}$$

$$\sum_{n\geq 1}^{\infty} \frac{2n+1}{n^2(n+1)^2} = \sum_{n\geq 1}^{\infty} \frac{(n+1)^2-n^2}{n^2(n+1)^2} = \sum_{n\geq 1}^{\infty}\left(\frac{1}{n^2}-\frac{1}{(n+1)^2}\right)$$

$$= 1-\cancel{\frac{1}{4}}+\cancel{\frac{1}{4}}-\cancel{\frac{1}{9}}+\cancel{\frac{1}{9}}-\cancel{\frac{1}{16}}+\cancel{\ldots}+\cancel{\frac{1}{(n-1)^2}}-\cancel{\frac{1}{n^2}}$$

$$+\cancel{\frac{1}{n^2}}-\frac{1}{(n+1)^2} = 1-\frac{1}{(n+1)^2} \longrightarrow 1$$

$$\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{(n+1)^2}\right) = 1$$

∃ 2 serii remarcabile:

① Seria geometrică de rație q

$$\sum_{n\geq 0} q^n,\ q\in\mathbb{R},\ q^0=1$$

→ Dacă $q\in(-\infty,-1]$ serie div

$q\in(-1,1)$ serie conv cu $\sum_{n\geq 0} q^n=\frac{1}{1-q}$

$q\in[1,+\infty)$ serie div.

② Seria armonică generalizată

$$\sum_{n\geq 1}\frac{1}{n^\alpha},\ \alpha\in\mathbb{R} \rightarrow \alpha>1 \Rightarrow \text{serie conv}$$

$\alpha<1 \Rightarrow$ — div.

$\alpha=1 \Rightarrow \sum_{n\geq 1}\frac{1}{n}$ seria armonică

↓

divergentă

Criterii

1) Criteriu de comparație cu limită.

$(x_n)_{n\in\mathbb{N}}, (y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ - elem. din $(0,\infty)$.

a) Dc $\lim_{n\to\infty} \frac{x_n}{y_n} \in (0,\infty) \Rightarrow \sum x_n \sim \sum y_n$

de aceeași natură

b) Dc $\lim_{n\to\infty} \frac{x_n}{y_n} = 0$ și $\sum y_n$ este conv. $\Rightarrow \sum x_n$ conv.

c) Dc $\lim_{n\to\infty} \frac{x_n}{y_n} = \infty$ $\sum y_n$ div. $\Rightarrow \sum x_n$ div.

$\sum\limits_{n\geq 1} \sqrt{n^4+3n+1} - n^2$ conv/div ?

$$= \sum_{n\geq 1} \frac{\cancel{n^4}+3n+1-\cancel{n^4}}{\sqrt{n^4+3n+1}+n^2} = \sum_{n\geq 1} \underbrace{\frac{3n+1}{\underbrace{\sqrt{n^4+3n+1}+n^2}_{n^2\left(\sqrt{1+\frac{3}{n^3}+\frac{1}{n^4}}+1\right)}}}_{x_n}$$

$x_n = \frac{3n+1}{\sqrt{n^4+3n+1}+n^2}$

Fie $y_n = \frac{1}{n}$ ~~div~~ $\sum y_n$ div

$$\lim_{n\to\infty} \frac{x_n}{y_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{3n+1}{\sqrt{n^4+3n+1}+n^2} \cdot n =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{\cancel{n^2}\left(3+\frac{1}{n}\right)}{\cancel{n^2}\left(\sqrt{1+\frac{3}{n^3}+\frac{1}{n^4}}+1\right)} = \frac{3}{2} \in (0,\infty)$$

Scanned with CamScanner

$\Rightarrow \sum x_n \sim \sum y_n$ div

$\Rightarrow \sum \sqrt{n^4+3n+1} - n^2$ div.

→ crit raportului

Dacă $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ șir de elemente din $(0, \infty)$

a.î. $\exists \lim\limits_{n \to \infty} \frac{x_{n+1}}{x_n} \overset{not}{=} r \Rightarrow \begin{cases} r \in [0, 1) \Rightarrow \sum x_n \text{ conv} \\ r \in (1, \infty) \Rightarrow \sum x_n \text{ div} \end{cases}$

Dacă $r = 1 \Rightarrow$ nu putem preciza nimic, încercăm cu C. Raabe-Duhamel

Scanned with CamScanner

ex 11

$$\sum_{n\geq 1} \frac{(n!)^2}{(2n)!}$$

$$\exists \lim_{n\to\infty} \frac{x_{n+1}}{x_n} ?$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{((n+1)!)^2}{\underset{\underset{\cancel{(2n)!}\cdot(2n+1)(2n+2)}{\parallel}}{(2n+2)!}} \cdot \frac{\cancel{(2n)!}}{(n!)^2} = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{(n+1)!}{n!}\right)^2 \cdot \frac{1}{(2n+1)(2n+2)} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \left(\frac{\cancel{n!}(n+1)}{\cancel{n!}}\right)^2 \cdot \frac{1}{(2n+1)(2n+2)} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)^2}{4n^2+4n+2n+2} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{n^2+2n+1}{4n^2+6n+2} = \frac{1}{4}$$

$\lim \frac{1}{4} \in [0,1) \Rightarrow \sum_{n\geq 1} x_n$ este convergentă

Scanned with CamScanner