$\langle\,,\rangle : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ (produs scalar) — e nebună nu dispare

$\langle (x^1, \dots x^n), (y^1, \dots y^n) \rangle = \sum_{i=1}^{n} x^i y^i =$

$= x^1 y^1 + \dots + x^n y^n, \ \forall (x^1, \dots x^n), (y^1, \dots y^n) \in \mathbb{R}^n$

→ formă biliniară, simetrică și pozit. definită.

$\langle x, y \rangle = \langle y, x \rangle$ $\quad \langle x, x \rangle \geq 0$

$\langle x, x \rangle = 0 \iff x = 0_{\mathbb{R}^n}$

Seminar 8

1.1) Vectori legați în plan, cu o origine fixată

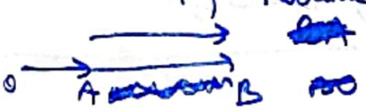
1.2) Vectori liberi în plan

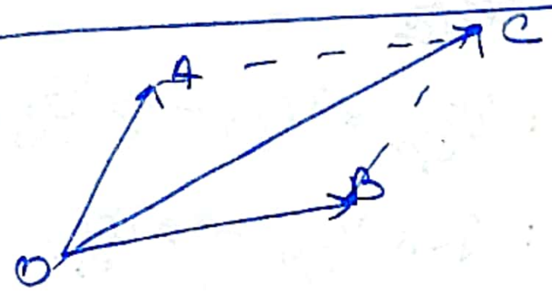
2.1) Vectori legați, cu origine fixată, în spațiul tridimensional

2.2) Vectori liberi în sp. tridim.

1.1) plan $\mathcal{P}$, $\mathcal{V}_{\mathcal{P},O}$

2.1) $\mathcal{S}$, $\mathcal{V}_{\mathcal{S},O}$ spațiu tridim.





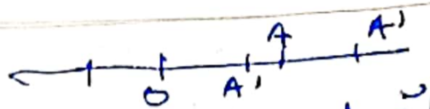
$(O,A), (O,B)$

$(O,A) + (O,B) = (O,C)$ a.î. $OACB$ – paralelogram. dc. O, A, B – necoliniare

Dacă $A = O$ $\quad (O,A) + (O,B) = (O,B)$

$\quad\quad B = O$ $\quad (O,A) + (O,B) = (O,A)$

O, A, B – coliniare și $\neq$ distincte ; $(O,A) + (O,B) = (A,B)$



$\lambda \in \mathbb{R}$

$\lambda(O,A) = (O,A')$:
- $A' = O$, dacă $\boxed{\lambda = 0}$ sau $A = O$
- O, A, A' col(iniare)
- $A' \in (OA$, dc. $\boxed{\lambda > 0}$.
- (și) $O \in (AA')$, dacă $\boxed{\lambda < 0}$
- $d(O,A') = |\lambda| \cdot d(O,A)$

1.1) $+ : \mathcal{V}_{\mathcal{P},O} \times \mathcal{V}_{\mathcal{P},O} \longrightarrow \mathcal{V}_{\mathcal{P},O}$; $(\mathcal{V}_{\mathcal{P},O}, +)$ - grup abelian
$O \in \mathcal{P}$ fixat

$\cdot : \mathbb{R} \times \mathcal{V}_{\mathcal{P},O} \longrightarrow \mathcal{V}_{\mathcal{P},O}$

I
a) $\lambda[(O,A)+(O,B)] = \lambda(O,A) + \lambda(O,B)$

b) $(\lambda+\mu)(O,A) = \lambda \cdot (O,A) + \mu(O,A)$

c) $(\lambda \cdot \mu)(O,A) = \lambda(\mu(O,A))$

d) $1 \cdot (O,A) = (O,A)$

$\forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}$ și $\forall A, B \in \mathcal{P}$

$\underset{a}{\overset{\shortparallel}{(O,A)}}$ $\underset{b}{\overset{\shortparallel}{(O,B)}}$ Notație

2.1) $\cancel{+ \mathcal{V}_{\mathcal{S},O}}$

$+ : \mathcal{V}_{\mathcal{S},O} \times \mathcal{V}_{\mathcal{S},O} \longrightarrow \mathcal{V}_{\mathcal{S},O}$ $O \in \mathcal{S}$ fixat

II a, b, c, d
—//—
Analog

$\cdot : \mathbb{R} \times \mathcal{V}_{\mathcal{S},O} \longrightarrow \mathcal{V}_{\mathcal{S},O}$ $\forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}, \forall A, B \in \mathcal{S}$

unde

$$\mathcal{V}_{\mathcal{P},O} = \{(O,A) : A \in \mathcal{P}\}$$

$$\mathcal{V}_{\mathcal{S},O} = \{(O,A) ; A \in \mathcal{S}\}$$; $(\mathcal{V}_{\mathcal{S},O}, +)$ grup abelian

$(V_{/\mathbb{R}}, +, \cdot)$ sp. I, II

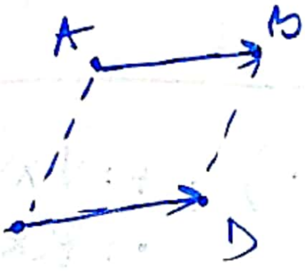
$+ : V \times V \longrightarrow V$

$\cdot : \mathbb{R} \times V \longrightarrow V$

I, II $\forall\, \lambda, \mu \in \mathbb{R}$; $\forall\, a, b \in V$

$\underline{\mathcal{P}}$ $\sim$ rel. de echipolență a vectorilor legați, (este o rel. de echivalență în $\mathcal{P} \times \mathcal{P}$

$(A,B) \sim (C,D)$



$\to$ ABCD - paralelogram

$\begin{cases} AB \parallel CD \\ AC \parallel BD \end{cases}$ în cazul generic A, B, C, D oricare 3 necoliniare

$= ?$

temă celelalte cazuri posibile :)))

$\overrightarrow{AB} = \{ (C,D) \in \mathcal{P} \times \mathcal{P} \mid (C,D) \sim (A,B) \}$ nu mai contează originea doar dir, sensul, mărimea.

v. liber v. legat

$V_{\mathcal{P}} = \{ \overrightarrow{AB} ; A, B \in \mathcal{P} \}$

<u>Lemă</u>

Fixând $O \in \mathcal{P}$; $V_{\mathcal{P}} = \{ \overrightarrow{OA}, A \in \mathcal{P} \}$

$\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{(O,A) + (O,B)}$!

$\lambda \cdot \overrightarrow{OA} = \overrightarrow{\lambda(O,A)}$

1.1, 1.2 $(V_{\mathcal{P}}, +, \cdot)_{/\mathbb{R}}$ sp. peste $\mathbb{R}$ vectorial

2.1, 2.2 $(V_{\mathcal{P}}, +, \cdot)_{/\mathbb{R}}$

$(V, +, \cdot)_{/K}$

sp. vectorial peste un <u>corp</u> K

Spatii vectoriale

, referat

Def. Ex. Propr. Baze alg.

Endomorfisme

Forme multiliniare

Caz part.: Forme biliniare
pătratice.

$(V_{/K}, +, \cdot)$; $+ : V \times V \to V$ $\quad (V, +)$
$\cdot : \mathbb{R} \times V \to V$ $\quad 0_V$

$0 \cdot \theta = 0_V$

$(K, \underbrace{+, \cdot}_{}) \quad 0, 1 \quad x \cdot 0_V = 0_V$

l.comp. interne

Sistem liber de vectori în V. } baze în V
Sistem de generatori în V }

! Într-un sp. vectorial $\forall$ 2 baze sunt în bijecție
(au același cardinal)

! În orice sp. vect. $\exists$ baze.

— Sp. vect. finit-dimensionale: care admit baze finite

Într-un sp. vect. finit-dimensional $\forall$ 2 baze au același nr. de elemente.
$\to$ s.n. dimensiunea (peste corpul de scalari respectiv) a sp. vect.

Dc. $\mathcal{B}=\{u_1,\dots,u_n\}\subset V$ este o bază, at. pt. orice $v\in V$

în $(V,+,\cdot)/_K$

$(\exists!)\ (\lambda^1,\dots\lambda^n)\in K^n)$

$\exists$ și sunt unici scalari $\lambda^1,\dots\lambda^n\in K$, a.î. $v=\lambda^1 u_1+\dots\lambda^n u_n$

$$=\sum_{i=1}^{n}\lambda^i u_i = \lambda^i u_i$$

cond. de sumare al lui Einstein când apare ind. ~~(când apare indic. de 2 ori sus și jos)~~ sus și jos.

Exemple: Fie $(K,+,\cdot)$ un corp.

$(V=K^n,+,\cdot)$ str. canonică de spațiu vectorial peste K.

$$(x^1\dots x^n)+(y^1\dots y^n)=(x^1+y^1,\dots x^n+y^n)$$

$$\lambda(x^1\dots x^n)=(\lambda x^1,\dots\lambda x^n)$$

$\boxed{\lambda^1\dots\lambda^n = \text{coordonatele vect. } v \text{ în baza } \mathcal{B}}$

$$0_V=0_{K^n}=\underbrace{(0,\dots,0)}_{n\text{ ori}}$$

Baza canonică $\left\{\begin{array}{l} e_1=(1,0,\dots 0),\\ e_2=(0,1,\dots 0),\\ \dots\\ e_n=(0,0\dots 1)\end{array}\right\}$

$$(x^1,\dots,x^n)=x^1 e_1+\dots x^n e_n$$

Caz particular: $n=1\Rightarrow V=K$ $\quad\mathcal{B}_1=\{1\}$

$n=2$

$\mathcal{B}_2=\{(1,0)(0,1)\}$

$n=3$

$\mathcal{B}_3=\{(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)\}$

Formule de schimbare a bazei într-un spațiu vectorial n-dimensional

$\mathcal{B} = \{u_1, \dots u_n\}$
$\mathcal{C} = \{v_1, \dots v_n\}$

$v_i = \sum_{j=1}^{n} \lambda_i^j u_i, \; i = \overline{1,n}$

$L = (\lambda_i^j)_{j,i=1,n}$ $\quad \mathcal{B} \xrightarrow{L} \mathcal{C} \quad \det(L) \neq 0 \; \exists L^{-1}$

$\mathcal{C} \xrightarrow{L^{-1}} \mathcal{B}$

$u_i = \mu_i^j v_j \implies M = L^{-1} = (\mu_i^j)_{j,i=\overline{1,n}}$

! Dacă $\boxed{K = \mathbb{R}}$ și dc. $\det(L) > 0$
pt. corpul nr. reale.
$(\det(M) > 0)$ $\det(M) = \frac{1}{\det(L)}$

spunem că bazele $\mathcal{B}$ și $\mathcal{C}$ sunt la fel orientate

---

$f : V \longrightarrow V$ funcție

endomorfism (dom. coincide cu codom.) (liniară) dc. $\begin{cases} f(x+y) = f(x) + f(y) & \forall \lambda \in K, \\ f(\lambda x) = \lambda f(x) & \forall x, y \in V \end{cases} \iff f(\lambda^1 x_1 + \lambda^2 x_2) = \lambda^1 f(x_1) + \lambda^2 f(x_2)$
$(\forall)\, \lambda^1, \lambda^2 \in K, \; (\forall)\, x_1, x_2 \in V$

$f : \underbrace{V \times \dots \times V}_{\text{de } p \text{ ori}} \longrightarrow K \quad , \; p \in \mathbb{N}^*$

formă multiliniară

Dc. f K-liniară (în raport cu fiecare variabilă)

$p = 1 \Rightarrow$ formă liniară
$p = 2 \Rightarrow$ formă biliniară

$f(\lambda^1 x_1 + \lambda^2 x_2, y) = \lambda^1 f(x_1, y) + \lambda^2 f(x_2, y)$
$\Rightarrow$ K - liniaritate în I variabilă

$f(x, \lambda^1 y_1 + \lambda^2 y_2) = \lambda^1 f(x, y_1) + \lambda^2 f(x, y_2) \Rightarrow$ K - liniarit. în a II-a variabilă.

$\lambda, \lambda^1, \lambda_2 \in K; \; x, y, x_1, y_1, x_2, y_2 \in V$

$\varphi : V \longrightarrow K$
$\varphi(x) = f(x, x)$ $\quad$ forma pătratică asociată formei biliniare f.

$\varphi(\lambda x) = \lambda^2 \varphi(x)$

Scanned with CamScanner

Forme multiliniare. Forme liniare
Forme biliniare. Forme pătratice

Def. 1 Dat un sp. vect. $V/_K$, o funcție liniară $f: V \to K$ s.n. <u>formă liniară</u>.

Def 2: Dat un sp. vect. $V/_K$, o funcție $f: V \times V \to K$, biliniară se n. <u>formă biliniară</u>.

Def 3: o fct $f: \underbrace{V \times V \dots \times V}_{p \text{ ori};\ p \in \mathbb{R}^*;\ p \geq 2} \to K$ s.n. multiliniară (p-(multi)liniară)

s.n. formă multiliniară dc. este liniară în fiecare variabilă.

Def. 4: Dc. $f: V \times V \to K$ este o formă biliniară, și i se asociază o <u>formă pătratică</u> $\varphi := \varphi_f : V \to K$; $\varphi(x) = f(x, x)$, $\forall$ ~~x ∈ K~~ $x \in V$

! Obs. $\varphi(\lambda x) = \lambda^2 \cdot \varphi(x)$; $\forall \lambda \in K, x \in V$

Prop.: Dc. forma bil. f este și <u>simetrică</u> și car $K \neq 2$ at f e unic def. de φ.

$x, y \in V$; $f(x+y, x+y) = f(x, x) + f(y, y) + \dots$

$= f(x, x+y) + f(y, x+y) = f(x, x) + f(x, y) + f(y, x)$

$+ f(y, y) = \cancel{f(x) + f(y) + 2f(x,y)}$

$= \varphi(x) + \varphi(y) + 2f(x, y) \Rightarrow \varphi(x+y)$

$\Rightarrow \varphi(x+y) - \varphi(x) - \varphi(y) = 2f(x, y)$

$\Rightarrow f(x,y) = \frac{1}{2}\left[\underline{\varphi(x+y)} - \varphi(x) - \varphi(y)\right] *$

<u>Problema 2:</u> Dc. $f: V\times V \to \mathbb{R}$ și $\varphi: V \to \mathbb{R}$ sunt legate prin rel. „$*$", ce cond. se impun lui φ a.î. f - biliniară?

$f(\alpha x+\beta y)$
$\lambda f(x) + \beta f(y)$

$\cancel{f(\alpha x+\beta y, \alpha x+\beta y) = }$
$\cancel{= f(\alpha x, \alpha x+\beta y) + f(\beta y, \alpha x+\beta y)}$
$\cancel{= \alpha^2 f(x,x) + f(\alpha x, \beta y) + f(\beta y, \alpha x) + \beta^2 f(y)}$
$\cancel{= \alpha^2 \varphi(x) + 2 f(\alpha x, \beta y) + \beta^2 \cdot \varphi(y)}$
$\cancel{\Rightarrow \varphi(\alpha x+\beta y) - \alpha^2 \varphi(x) - \beta^2 \varphi(y) = 2 f(\alpha x, \beta y)}$
$\cancel{\Rightarrow f(\alpha x, \beta y) = \frac{1}{2}[\ \varphi(\alpha x}$

$f(\lambda x, y)$
$\varphi(\lambda x + y)$
$\varphi(\lambda(x+y))$

1)* $\frac{1}{2}[\varphi(\lambda x+y) - \varphi(\lambda x) - \varphi(y)] = \frac{1}{2}$
$\overset{(?)}{=} \lambda\,[f(x+y) - f(x) - f(y)$

$f(\lambda x, y) = \lambda f(x,y)$
$f(x_1+x_2, y) =$
$= f(x_1,y) + f(x_2,y)$!

2) $\varphi(x_1+x_2, y) - \varphi(x_1+x_2) - \varphi(y)$
$= \varphi(x_1,y) + \varphi(x_2,y) - \varphi(x_1) - \varphi(x_2) - \varphi(y)$

$y = 0$
f bil. $\Big\} \Rightarrow f(x,0) = 0$

y

$f(x,0) = f(x, 0+0) = f(x,0) + f(x,0) \Rightarrow f(x,0) = 0$

---

1) pt. $y = 0 \Rightarrow \cancel{\varphi(\lambda x)} - \cancel{\varphi(\lambda x)} - \varphi(y) = 0 \Rightarrow \varphi(0) = 0$

$$f(x) = f(x,x) = f\left(\sum_{i=1}^{n} x^i e_i, \sum_{j=1}^{n} x^j e_j\right) =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} x^i \cdot f\left(e_i, \sum_{j=1}^{n} x^j e_j\right) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} x^i x^j f(e_i, e_j)$$

$\ast \to f(e_i, e_j) \overset{not}{=} f_{ij} \in \mathbb{K}$

$$f(x) = \sum_{i,j=1}^{n} f_{ij} \cdot x^i x^j$$

$f(e_i, e_j) = f(e_j, e_i) \Rightarrow f_{ij} = f_{ji}$ cu $M = (f_{ij})_{i,j=\overline{1,n}}$ simetric

$$f(x,y) = \sum_{i,j=1}^{n} x^i y^j \cdot f_{ij}$$

$$f(x) = \sum_{i,j=1}^{n} f_{ij} x^i x^j$$

$\mathbb{K}$ corp. com.

$k = \mathbb{R}$

$(V = \mathbb{K}^n, +, \cdot)/_{\mathbb{K}}$ sh. ~~com.~~ canonică

$\mathcal{B}$ bază canonică

$e_i = (0, \dots, 0, 1, 0 \dots 0)$ $i = \overline{1,n}$

$e_n = (0, \dots, 0, 1)$

$F = (f_{ij})_{i,j=\overline{1,n}} = \mathcal{M}_{\mathcal{B}}(f)$; $\mathcal{B} = \{e_1, \dots e_n\} \subset V/_{\mathbb{K}}$ bază

f formă bil;

$$f(x) = \sum_{i,j=1}^{n} f_{ij} \cdot x^i y^j = \sum_{i=0} f_{ii} (x^i)^2 + \sum_{i<j} f_{ij} \cdot x^i x^j$$

$$+ \sum_{i>j} f_{ij} x^i x^j$$

$$F = I_n = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & & & \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix}$$

$$f(x) = \sum_{i=1}^{n} f_{ii}(x^i)^2 + 2\sum_{\substack{i<j \\ i,j=\overline{1,n}}} f_{ij} \cdot x^i x^j$$

$$f(x,y) = \sum_{i,j=1}^{n} f_{ij} \cdot x^i y^j$$

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1, & i=j \\ 0, & i \neq j \end{cases}$$

~~$f(x,y) =$~~ $K = \mathbb{R}$

$F = I_n$

~~$f(x,y) = f_{ij}$~~

$$f(x,y) = \sum_{i,j=1}^{n} \delta_{ij} \cdot x^i y^j = \sum_{i=j}^{n} x^i y^i \overset{\text{not.}}{=} \langle x, y \rangle$$

prod. scalar std / canonic pe $\mathbb{R}^n$

$$f(x) = \sum_{i=1}^{n} (x^i)^2$$

$\begin{matrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{matrix}$

$\|x\| = \sqrt{f(x)}$ fc. normă pe V.

$d(x,y) = \|x-y\|$ fc. distanță în V.

pt. $n=2$ $\Rightarrow f(x) = \sum_{i=1}^{2} (x^i)^2 = \cancel{x_1^2+x_2^2} = (x^1)^2 + (x^2)^2$

$\|x\| = \sqrt{(x^1)^2 + (x^2)^2}$

$d = \sqrt{(x^1 - y^1)^2 + (x^2 - y^2)^2}$

și

$$f(x,y) = \sum_{i,j=1}^{2} \delta_{ij} \, x^i y^j = x^1 y^1 + x^2 y^2$$

Obs. $f(x) \geq 0$; $\forall x \in \mathbb{R}^n$

și $f(x) = 0 \Leftrightarrow x(\underbrace{0, \dots, 0}_{n \text{ ori}}) = (0_{\mathbb{R}^n})$

poz. def; biliniară, simetrică $\rightarrow$ prod. scalar

Definim, pt. $x, y \neq 0_{\mathbb{R}^n}$; $\cos(\widehat{x,y}) = \dfrac{\langle x,y \rangle}{\|x\| \cdot \|y\|}$

$\Leftrightarrow \langle x, y \rangle = \|x\| \cdot \|y\| \cdot \cos(\widehat{x,y})$

$$\langle x,y \rangle = \sqrt{(x^1)^2 + (x^2)^2} \cdot \sqrt{(y^1)^2 + (y^2)^2} \cdot \cos(\widehat{x,y}) = x^1 y^1 + x^2 y^2$$

$n=3 \Rightarrow f(x)=\sum_{i=1}^{3}(x^i)^2=(x^1)^2+(x^2)^2+(x^3)^2 \ldots$

Curs 10:

Spații euclidiene

$\dim_{\mathbb{R}} V = n, n\in$

I Fie $(V,+,\cdot)$ un k-sp. vect., K corp comu $\rightarrow k=\mathbb{R}$

$\boxed{\text{Def}}$ Un subsp. vect. în $(V,+,\cdot)$ este orice mulțime $U\subset V$ a.î.
$$\begin{cases} U\neq\emptyset \\ x,y\in U \Rightarrow x+y\in U \\ (\lambda\in k \text{ și } x\in U)\Rightarrow \lambda x\in U \end{cases}$$

(P) $U\subset V$ subsp. vect. $\Leftrightarrow$ $\forall \lambda^1,\lambda^2\in k$, $\forall u_1,u_2\in U \Rightarrow$
$\Rightarrow \lambda^1u_1+\lambda^2v_2\in U$
$\Rightarrow \forall p\in\mathbb{N}^*, \forall\lambda^1\ldots\lambda^p\in k,$
$\forall u_1,\ldots u_p\in U \Rightarrow \sum_{i=1}^{p}\lambda^i u_i\in U$

$\boxed{\text{Def}}$ Un subsp. afin $(V,+,\cdot)$ este orice translatat de subsp. vect. în $(V,+,\cdot)$, i.e. orice mulțime de forma $a+U$, $a\in V$, $U\subseteq V$ subsp. vect.
$T_a(U)=$

$T_a: V\rightarrow V$ translația de vector a.
$T_a(x)=a+x$, $\forall x\in V$

$A:=a+U=\{a+x;\ x\in U\}$

$\boxed{\text{Lemă}}$: În cond. de mai sus
1) $U=\{x-y : x,y\in A\}=\{x-a;\ x\in A\}$, și este unic definit de A
2) Dacă $b\in A$, at. $A=b+U=a+U$

Scanned with CamScanner

$(V,+,\cdot,\langle,\rangle)$ s.n. sp. vect. euclidian

$f(x)=\langle x,x\rangle$ forma pătratică . $\langle,\rangle$

Se arată $\langle x,y\rangle = \frac{1}{2}\left[f(x+y) - f(x) - f(y)\right]$

$\|x\| = \sqrt{f(x)}$ – fc. normă $\|\ \| : V \to \mathbb{R}_{\geq 0}$

$d(x,y) = \|x-y\|$; $d: V\times V \to \mathbb{R}_{\geq 0}$, distanța.

$$\begin{cases} \|x\| \geq 0 \text{ și } \|x\| = 0 \iff x = 0_V \\ \|\lambda x\| = |\lambda| \cdot \|x\| \\ \|x+y\| \leq \|x\| + \|y\| \end{cases}$$

$$\begin{cases} d(x,y) = d(y,x) \\ d(x,y) \geq 0 \text{ și } d(x,y) = 0 \iff x = y \\ d(x,y) + d(y,z) \geq d(x,z) \to (\text{In. triunghiului}) \end{cases}$$

$|\langle x,y\rangle| \leq \|x\| \cdot \|y\|$ (C.B.S)

$\boxed{?\ :\ 9 \text{ iunie ; ora } 10:00.}$

Geometrie euclidiană

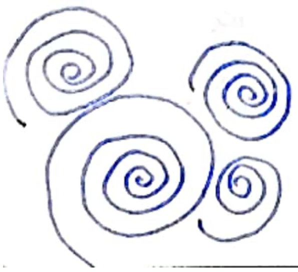
Fie $E=(V,+,\cdot,\langle,\rangle)_{\mathbb{R}}$ un sp. vect. euclidian

Notație abuzivă : $E = V$. ; $\dim_{\mathbb{R}} E = \dim E = \dim V$
$= \dim_{\mathbb{R}}(V,+,\cdot) = n \in \mathbb{N}^*$; $\mathbb{N}^*$
notații

$+ : V\times V \to V$
$\cdot : \mathbb{R}\times V \to V$
$\langle,\rangle : V\times V \to \mathbb{R}$ prod. scalar e
- bilin. (line. în fiec. var.)
- sim.
- poz. defin.

$\Updownarrow$

$\langle x,x\rangle \geq 0 ; \forall x \in V$
și $\langle x,x\rangle = 0 \iff x = 0_V$



Scanned with CamScanner

Se def.: prod. scalar

1) Forma pătratică $\Rightarrow \varphi: V \to \mathbb{R}_{\geq 0}$, $\boxed{\varphi(x) = \langle x, x \rangle}$

2) Norma $\Rightarrow \| \; \| : V \to \mathbb{R}_{\geq 0}$, $\boxed{\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle} = \sqrt{\varphi(x)}}$ $\forall x \in V$

$\Updownarrow$

$\| \; \|_{\langle , \rangle}$

3) Funcție distanță $\Rightarrow d = d_{\langle , \rangle} : V \times V \to \mathbb{R}_{\geq 0}$

$\boxed{d(x, y) = \|x - y\|}$; $\forall x, y \in V \times V$

Proprietăți:

pt. 1) $\boxed{\varphi(\lambda x) = \lambda^2 \varphi(x)}$; $\forall \lambda \in \mathbb{R}$; $x \in V$

$\varphi(x) \geq 0$; $\forall x \in V$

pt. 2) $\boxed{\|\lambda x\| = |\lambda| \cdot \|x\|}$, $\forall \lambda \in \mathbb{R}$, $x \in V$

$\|x\| \geq 0$, $\forall x \in V$ și $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0_V$

$\boxed{\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|}$; $\forall x, y \in V \Rightarrow$ ineg. triunghiului.

pt. 3) $d(x, y) = d(y, x)$; $\forall x, y \in V$

$d(x, y) \geq 0$ și $d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$; $\forall x, y \in V$

$\boxed{d(x, y) + d(y, z) \geq d(x, z)}$; $\forall x, y, z \in V$

— ineg. triunghiului pt. dist.

$\boxed{|\langle x, y \rangle| \leq \|x\| \|y\|} \Rightarrow$ Ineg. Cauchy-B-S

$\hookrightarrow \langle x + \lambda y, x + \lambda y \rangle \geq 0 \; \forall \lambda \in \mathbb{R}, x, y \in V$

$\hookrightarrow \|y\|^2 \lambda^2 + 2\lambda \langle x, y \rangle + \|x\|^2 \geq 0, \forall \lambda \in \mathbb{R}$

! Definiție ① Se numește bază ortogonală în E orice bază $B = \{u_1, \dots u_n\}$ cu propr. $\langle u_i, u_j \rangle = 0$

$\forall i, j = \overline{1, n}$ cu $i \neq j$.

!! Definiție : Într-un sp. vect. eucl. 2 vect. u, v s.n. ortogonali dc. $\langle u, v \rangle = 0$: $\boxed{u \perp v}$

Obs.: În cazul $u, v \neq 0_V$ am definit

$$\boxed{\cos(\widehat{u,v}) = \frac{\langle u,v\rangle}{\|u\|\cdot\|v\|}}$$

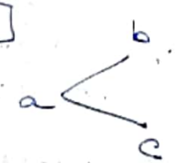
și deci $\langle u,v\rangle = 0 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow \cos(\widehat{u,v}) = 0 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow \mu(\widehat{u,v}) = \frac{\pi}{2}$

Def.: pt. $u, v \in V \setminus \{0_V\}$. $\cos(\widehat{u,v}) = \frac{\langle u,v\rangle}{\|u\|\cdot\|v\|}$

$\exists \cos(\widehat{u\,0_V,v})$

$\xRightarrow{\text{din C-B-S}}$ $\cos(\widehat{u,v}) \in [-1,1]$

Def.: $\mu(\widehat{u,v}) = \arccos\frac{\langle u,v\rangle}{\|u\|\cdot\|v\|} \in [0,\pi]$



Def.: $a,b,c \in V$; $a \neq b$ și $a \neq c$.

$$\cos(\widehat{bac}) = \cos(\widehat{cab}) = \frac{\langle b-a, c-a\rangle}{\|b-a\|\ \|c-a\|}$$

! **Definiție**, $\mathrm{(V)}$ O bază ortogonală $\mathcal{B}$ $=\{u_1,\dots u_n\}$ s.n. **ortonormată** dc., în plus, $\|u_i\| = 1$ pt. $\forall\, i = \overline{1,n}$

i.e. $\langle u_i, u_j\rangle = \delta_{ij}$, $\forall\, i,j = \overline{1,n}$.

$\boxed{\text{Teoremă}}$

În orice sp. vect. eucl. există baze ortonormate.
(sp. din $V \in \mathbb{N}^*$)

Procedeul de ortogonalizare Gram-Schmidt:

Dc. o bază $\mathcal{B} = \{u_1, \dots u_n\}$ într-un sp. vect. eucl. $E = (V, +, \cdot, \langle,\rangle)$, există o bază $\to$ ortonormată (1) $\tilde{\mathcal{B}} = \{e_1, \dots e_n\}$ a.î.

$\begin{cases} \text{(2) subsp. vect. } \{u_1, \dots u_p\} = \\ = \text{subsp. vect } \{e_1, \dots e_p\}, \forall p = \overline{1,n} \\ \text{(3) Bazele } \mathcal{B} \text{ și } \tilde{\mathcal{B}} \text{ sunt} \end{cases}$

la fel orientate ($\det M > 0$, unde $M = M_{\mathcal{B}\to\tilde{\mathcal{B}}}$)

Ex. de sp. vect. eucl.; $n \in \mathbb{N}^*$

$E^n = E_n = (\mathbb{R}^n, +, \cdot, \langle,\rangle)$ str. canonică pe sp. vect. real (str. standard)

$(x^1, \dots x^n) + (y^1, \dots, y^n) = (x^1+y^1, \dots, x^n+y^n)$

$\lambda(x^1, \dots, x^n) = (\lambda x^1, \dots \lambda x^n)$

$\langle (x^1, \dots, x^n), (y^1, \dots y^n)\rangle = \sum_{i=1}^{n} x^i y^i$

$\left[f(x) = ;\ \|x\|;\ d(x,y);\ \cos(\widehat{u,v});\ \cos(\widehat{bac}) \right] \to$ exerciții

Lemă: $(0_V = 0_E)$ notații

1) Dacă $u \in E \setminus \{0_V\}$, atunci $u^\perp \overset{\text{def.}}{=} \{x \in V;\ \langle u, x\rangle = 0\}$ este subsp. vect. în E.

2) Dc. $u \neq 0_V$, at. $u^\perp = n-1$.

Dem: Temă

Problemă: Dct. $U \subset V$ subsp. vect. (E), def. $U^\perp = \{x \in E \mid u \in U \Rightarrow \langle u, x\rangle = 0\}$

Ce puteți spune despre $U^\perp$?

Lemă:

Dc. $\{f_1, \dots, f_n\} \subset E$ este o bază ortogonală atunci

$\left\{ e_1 = \frac{1}{\|f_1\|} f_1;\ e_2 = \frac{1}{\|f_2\|} f_2 \dots\ e_i = \frac{1}{\|f_i\|} f_i, \dots e_n = \frac{1}{\|f_n\|} f_n \right\}$

este o bază.

$$\left(\langle e_i, e_j\rangle = \frac{1}{\|f_i\|} \cdot \frac{1}{\|f_j\|} \langle f_i, f_j\rangle = \begin{cases} 0, & i \neq j \\ 1, & i = j \end{cases} \quad i,j = \overline{1,n} \right)$$

$\Longrightarrow$ Dem. + algoritm.

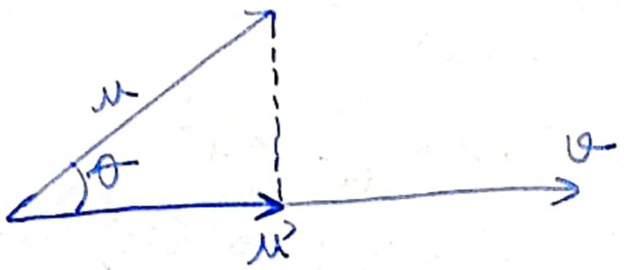
(I) Construim o bază ortogonală $\{f_1 \dots f_n\}$ care satisface (2) și (3).
$\hookrightarrow$ inductiv

$f_1 = u_1$

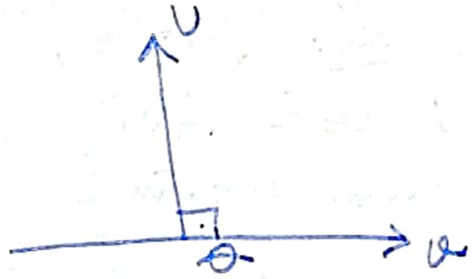
$\begin{cases} f_2 = u_2 + \lambda_{21} f_1 \\ \langle f_1, f_2\rangle = 0 \end{cases} \Big|\ 0 = \langle f_1, u_2\rangle + \lambda_{21}\langle f_1, f_1\rangle \Rightarrow \lambda_{21} = -\frac{\langle f_1, u_2\rangle}{\langle f_1, f_1\rangle} \Rightarrow$

$$\Rightarrow f_2 = u_2 - \frac{\langle f_1, u_2 \rangle}{\langle f_1, f_1 \rangle} f_1 = u_2 - pr_{f_2} u_2$$

~~proiectia lui f_2 pe f_3 u~~
proiectia lui u_2 pe f_2.



$$u' = \underbrace{\dots}_{\text{scalar}} \; \underbrace{\frac{1}{\|v\|} v}_{\text{versor}}$$



θ obtuz ⇒ nr scalar negativ

$$u' = \|u\| \cdot \cos(\widehat{u, v}) \frac{1}{\|v\|} v$$

$$= \cancel{\|u\|} \frac{\langle u, v \rangle}{\cancel{\|u\|} \cdot \|v\|} \cdot \frac{1}{\|v\|} \cdot v$$

$$\Rightarrow pr_v u = \frac{\langle u, v \rangle}{\langle v, v \rangle} \cdot v = \frac{\langle u, v \rangle}{\|v\|^2} \cdot v$$

$$\begin{cases} f_3 = u_3 + \lambda_{31} f_1 + \lambda_{32} f_2 \\ \langle f_3, f_1 \rangle = 0 \\ \langle f_3, f_2 \rangle = 0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \lambda_{31} = \frac{\langle f_1, u_3 \rangle}{\langle f_1, f_1 \rangle} \\ \lambda_{32} = \frac{\langle f_2, u_3 \rangle}{\langle f_2, f_2 \rangle} \\ f_3 = u_3 - pr_{f_1} u_3 - pr_{f_2} u_3 \end{cases}$$

~~pr. lui f_1 pe u_3~~
pr. lui u_3 pe f_1

pr. lui u_3 pe f_2

Procedăm inductiv: obținem $f_p = u_p - \sum_{i=1}^{p-1} pr_{f_i} u_p$

$\to f_{p+1} = u_{p+1} \dots$

În final, $f_n = u_n - \sum_{i=1}^{n-1} pr_{f_n} u_n$

Se arată că $\{f_1, \dots f_n\}$ este o bază ortogonală cu prop. 2) și 3).

Se consideră în final $\tilde{B} = \{e_1, \dots e_n\}$, unde $e_i = \frac{1}{\|f_i\|} \cdot f_i$, $i = \overline{1,n}$, care satisface 1, 2 și 3 din teoremă.

Să se ortogonalizeze f.o.p. procedeul G-S.

în E^2:

1) $B = \{(1,0), (1,1)\}$

în E^3

2) $B = \{(1,-1,2), (0,1,0), (0,2,3)\}$

Definiție: Dat. $E = (V, +, \cdot, <,>)$ un sp. vect. eucl. un endomorfism $f: V \to V$ s.n. automorfism al lui E dc

$$\begin{cases} 1) \ f \text{ este bijectivă} \\ 2) \ f^{-1} \text{ este bijectivă} \\ 3) <f(x), f(y)> = <x,y>; \ \forall x,y \in V \\ 4) <f^{-1}(x), f^{-1}(y)> = <x,y>; \ \forall x,y \in V \end{cases}$$

$\downarrow$ not. $Aut(E)$

Obs.: $\left.\begin{matrix} f \text{ liniară} \\ 1) \end{matrix}\right| \Rightarrow \begin{cases} f^{-1} \text{ liniară} \\ 2) \end{cases}$

Teoremă: Fie $E = (V, +, \cdot, <,>)$ un sp. vect. eucl. și $B = \{e_1, \dots e_n\}$ o bază ortonormată fixată. și

$E^n = (\mathbb{R}^n, +, \cdot, <,>)$ canonic / standard.

$\Rightarrow \{(1,0,\dots 0) \dots (0, \dots 0,1)\}$ ortonormată

$\mathbb{R}^2$ $<(1,0),(0,1)> = 0$

$f \in End_{\mathbb{R}}(V, +, \cdot)$ at. sunt echivalente:

i) $f \in Aut(E)$

ii) $\langle f(x), f(y) \rangle = \langle x, y \rangle$; $\forall x, y \in E$

iii) $\| f(x) \| = \| x \|$; $\forall x \in E$

iv) $d(f(x), f(y)) = d(x,y)$; $\forall x, y \in E$

v) Dc. $A = M_B(f)$, at. $A \cdot A^t = I_n$
$(a_j^i)_{i,j=\overline{1,n}}$ $\iff \exists A^{-1}$ și $A^{-1} = A^t$

vi) Dc. $A = M_B(f)$, at $A^t \cdot A = I_n$ $(\iff \dots)$

vii) $\sum_{i=1}^{n} a_j^i \cdot a_k^i = \delta_{jk}$, $\forall j,k \in \overline{1,n}$

viii) $\sum_{i=1}^{n} a_i^j \cdot a_i^k = \delta^{jk}$, $\forall j,k = \overline{1,n}$

Rel. echiv. v – viii sn. rel. de ortogonalitate din care rez. că mat. e ortogonală.

Mulțimea mat. ortog $= O(n)$ $\boxed{\dim_{\mathbb{R}}(V,+,\cdot) = n \in \mathbb{N}^*}$

Seminar

<u>Teoremă</u>: Fie $E = (V,+,\cdot,\langle , \rangle)$ sp. vect. eucl și $B = \{e_1, \dots e_n\}$ o bază ortonormată
Fie $f \in End(V,+,\cdot)$ și $A = M_B(f)$
$(a_j^i)_{i,j=1,n}$

Sunt echivalente:

i) $f \in Aut(E)$

ii) $x, y \in E \Rightarrow \langle f(x), f(y) \rangle = \langle x, y \rangle$

iii) $x \in E \Rightarrow \ell(f(x)) = \ell(x)$

iv) $x \in E \Rightarrow \| f(x) \| = \| x \|$

v) $x,y \in E \Rightarrow d(f(x), f(y)) = d(x,y)$

vi) $A \cdot A^t = I_n$

vii) $A^t \cdot A = I_n$

viii) $\sum_{i=1}^{n} a_j^i \cdot a_k^i = \delta_{jk}$, $\forall j,k = \overline{1,n}$

ix) $\sum_{i=1}^{n} a_i^j \cdot a_i^k = \delta^{jk}$, $\forall j,k = \overline{1,n}$

$\boxed{Obs.}$: (vi) $\Leftrightarrow \exists A^{-1}$ și $A^{-1} = A^t$
(vii) $\Leftrightarrow \exists A^{-1}$ și $A^{-1} = A^t$

$\{A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) ; A^t \cdot A = I_n\} = O(n)$
mulțimea matr. ortogonale

Notații
i: superior → linie j: inferior → coloană
i, j: primul → linie

Ex.: echiv. vi – ix ; viii – vii

$A = (a_j^i)_{i,j=1,n}$

$$f(e_j) = \sum_{i=1}^{n} a_j^i \cdot e_i ; j = \overline{1,n} \quad (1)$$

$$\boxed{\begin{aligned} y &= f_n(x) \\ x &= \sum_{j=1}^{n} x^j e_j \\ y &= \sum_{j=1}^{n} y^i e_i \end{aligned}}$$

$X = \begin{pmatrix} x^1 \\ \vdots \\ x^n \end{pmatrix} = x^t$

$Y = \begin{pmatrix} y^1 \\ \vdots \\ y^n \end{pmatrix} = y^t$

$$(2)\ y^i = \sum_{j=1}^{n} a_j^i x^j \quad \Leftrightarrow \quad Y = AX \quad (3)$$
cu $i = 1, n$

În cazul $E = E^n$ și $\mathcal{B}$ baza canonică

$$x = \sum_{j=1}^{n} x^j e_j = (x^1, \dots, x^n)$$

$$y = \sum_{i=1}^{n} y^i e_i = (y^1, \dots, y^n)$$

Exemplu:

$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$

$f(x^1, x^2) = (2x^1 - x^2, x^1 + 3x^2)$

(y^1, y^2)

$$\begin{cases} y^1 = 2x^1 - x^2 \\ y^2 = 3x^2 + x^1 \end{cases} \qquad \mathcal{M}_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$$

$f(e_1) = f(1, 0) = f(2, 1)$

$f(e_2) = f(0, 1) = f(-1, 3)$

$$\mathcal{M}_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$$

$A = (a^i_j)_{i,j=\overline{1,n}}$

$B = (b^j_k)_{j,k=\overline{1,n}}$

$A \times B = C$

$C = (c^i_k)_{i,k=\overline{1,n}}$

$c^i_k = \sum_{j=1}^{n} a^i_j \cdot b^j_k = \langle \underset{\text{linia } i \text{ din } A}{A^i}, \underset{\text{col. } k \text{ din } B}{B_k} \rangle$

---

vi → ix

$A \cdot A^t = I_n \qquad A = (a^i_j)_{i,j=\overline{1,n}}$

$A^t = (\tilde{a}^i_j)_{i,j=\overline{1,n}} \qquad \tilde{a}^i_j = a^j_i$

$(A \cdot A^t)^i_k = \sum_{j=1}^{n} a^i_j \cdot \tilde{a}^j_k = \sum_{j=1}^{n} a^i_j \cdot a^k_j$

$(I_n)^i_k = \delta^i_k \qquad A \cdot A^t = I_n$

$(A \cdot A^t)^j_k = \sum_{i=1}^{n} a^j_i \cdot a^k_i = \delta^j_k = \delta^{jk}$

$\boxed{\text{vii} - \text{viii}}$

$(A^t \cdot A)^j_k = \sum_{i=1}^{n} \tilde{a}^j_i \cdot a^i_k = \sum a^i_j \cdot a^i_k = \delta_{jk}$

$(I_n)^j_k = \delta^j_k = \delta_{jk}$

$\Rightarrow A^t \cdot A = I_n$

$n=2$ (viii)

$\begin{pmatrix} a^1_1 & a^1_2 \\ a^2_1 & a^2_2 \end{pmatrix}$

$(a^1_1)^2 + (a^2_1)^2 = 1$

$(a^1_2)^2 + (a^2_2)^2 = 1$

$a^1_1 a^1_2 + a^2_1 a^2_2 = 0$

Rel. de ortogonalitate pt. mat. de $n=2$

$\exists\, \theta$ a.î. $a^1_1 = \cos\theta$, $a^2_1 = \sin\theta$ | $\exists\, \gamma$ a.î. $a^1_2 = \cos\gamma$, $a^2_2 = \sin\gamma$

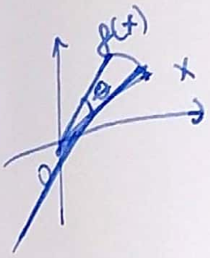
$$A = \begin{pmatrix} \cos\theta & \cos\varphi \\ \sin\theta & \sin\varphi \end{pmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \text{ rotatie în jurul lui } \theta$$

$$\begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta \end{bmatrix}$$

$$\cos\theta\cos\varphi + \sin\theta\sin\varphi = 0$$

$$\cos(\theta - \varphi) = 0$$



rotatia

$SO(2)$

grupul special ortogonal

$SO(2) \subset O(2)$

$SO(n) = \{A \in O(n) ;\ \det(A) = 1\}$

11.05.2022

Seminar 12

Teoreme fundamentale ale geometriei euclidiene:

$E^n = (\mathbb{R}^n, +, \cdot, <,>)$ str. canonică de sp. vect. eucl.

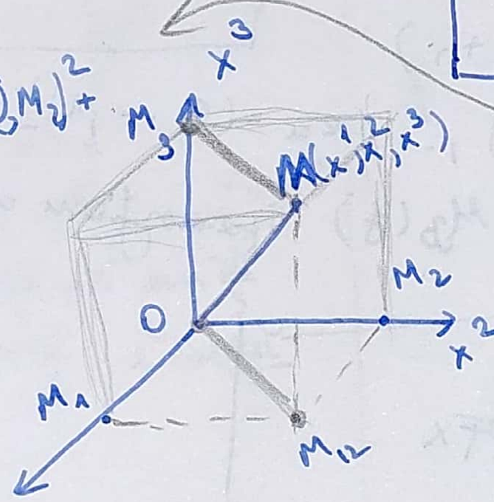
$E^n_0 = (\mathbb{R}^n, d = d_n = d_{<,>})$; $d: \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}_{\geq 0}$; $d(x,y) \stackrel{def}{=} \|x-y\|$

$\|x\| = \sqrt{\varphi(x)} = \sqrt{<x,x>}$

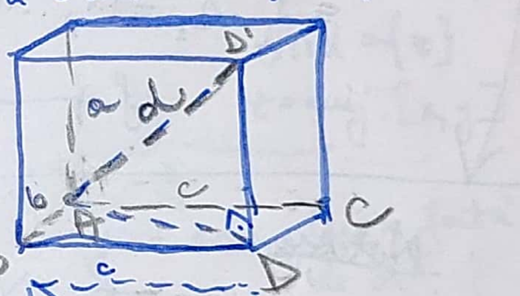
$= \sqrt{\sum_{i=1}^n (x^i)^2} = \left[\sum_{i=1}^n (x^i)^2\right]^{\frac{1}{2}}$

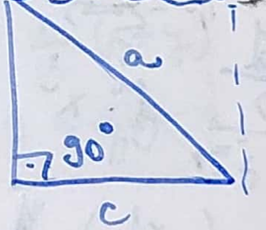
$d(x,y) = \sqrt{\sum_{i=1}^n (x^i - y^i)^2}$

$d^2(O,M) = d(O,M_1)^2 + d(O,M_2)^2 + d(O,M_3)^2$
$= (x^1)^2 + (x^2)^2 + (x^3)^2$



$d^2 = a^2 + b^2 + c^2$; $d = \sqrt{a^2+b^2+c^2}$



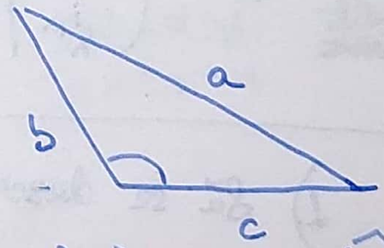


$a^2 = b^2 + c^2$

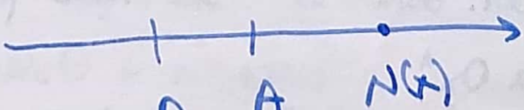
• în refer. trb să repr. punct în xOyz

$M_i = pr_{Ox^i} M$

$M_{ij} = pr_{Ox^ix^j} M$



$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos(\widehat{bc})$



$x = \pm d(O,N)$
- $+$, $N \in (OA$
- 0, $N = O$
- $-$, $N \in (AN)$

Th: Fie $f:\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ o funcție, atunci f este izometrie $(f \in Aut(E_0^n)) \iff \exists F = (f_j^i)_{i,j=\overline{1,n}} \in O(n)$ și $\exists\ a = (a^1, \dots, a^n) \in \mathbb{R}^n$ a.î. dacă $x = (x^1, \dots, x^n) \in \mathbb{R}^n$ și $y = (y^1, \dots, y^n) = f(x)$

$$y^i = \sum_{j=1}^{n} f_j^i x^j + a^i, \quad i = \overline{1,n}$$

pentru $X = \begin{pmatrix} x^1 \\ \vdots \\ x^n \end{pmatrix}$, $Y = \begin{pmatrix} y^1 \\ \vdots \\ y^n \end{pmatrix}$, $A = \begin{pmatrix} a^1 \\ \vdots \\ a^n \end{pmatrix}$ $\quad Y = FX + A$

$X \longmapsto FX : f_0$

$X \longmapsto X + A : T_a$

$f = T_a \circ f_0$

$O(n) = \{ F \in M_n(\mathbb{R});\ F \times F^t = I_n \}$

$(Aut(E^n), \circ) \simeq (O(n), \times)$

$\mathcal{B}$ = baza can în $(\mathbb{R}^n, +, \cdot)$

$= \{ e_1 = (1, \dots, 0), \dots, e_n = (0, \dots, 1) \}$

$f \longmapsto M_{\mathcal{B}}(f)$ izomorfism de grupuri

Notații:

$f(x) = y \iff Y = FX$

$$y^i = \sum_{j=1}^{n} f_j^i x^j$$

$X = \begin{pmatrix} x^1 \\ \vdots \\ x^n \end{pmatrix}$, $Y = \begin{pmatrix} y^1 \\ \vdots \\ y^n \end{pmatrix}$

Probleme:

1) Să se descrie a) în coordonate
b) matriceal

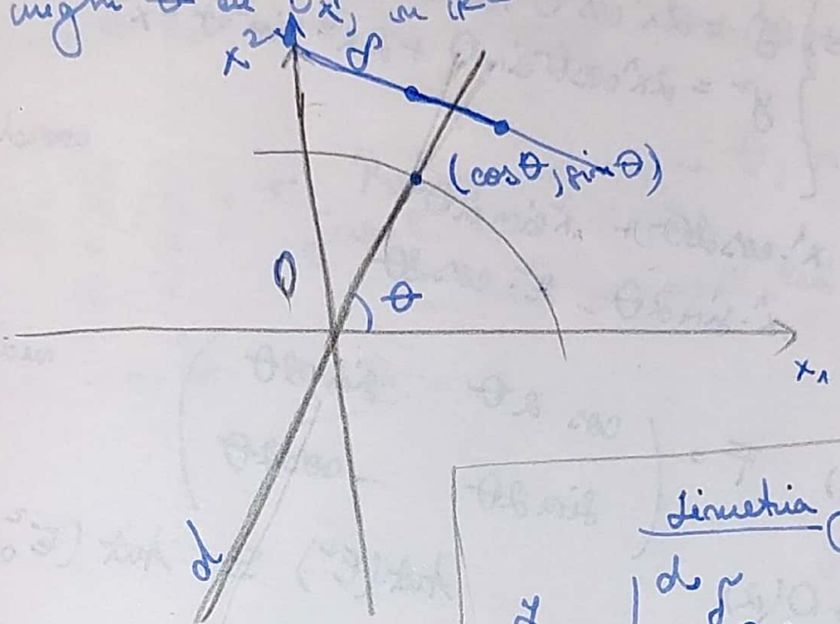
i) simetria față de dr. din $\mathbb{R}^2$ care trece prin $(0,0)$ și face un unghi de $\frac{\pi}{3}$ cu Ox^1.

ii) simetria față de dr. din $\mathbb{R}^2$ care trece prin $(1,1)$ și face un unghi de $\frac{\pi}{6}$ cu Ox^1.

Scanned with CamScanner

iii) simetria față de o dreaptă în $\mathbb{R}^2$ ce trece prin $O(0,0)$ și face un unghi θ cu Ox^1.

iv) simetria față de o dreaptă oarecare ce trece prin $x_0 \in \mathbb{R}^2$ și face un unghi θ cu Ox^1, în $\mathbb{R}^2$



$x = (x^1, x^2)$; $X = x^t$

$y = f(x) = (y^1, y^2)$; $Y = y^t$

$$\begin{cases} y^1 = x^1 \cos\frac{2\pi}{3} + x^2 \sin\frac{2\pi}{3} \\ y^2 = x^1 \sin\frac{2\pi}{3} - x^2 \cos\frac{2\pi}{3} \end{cases}$$

$Y = \dots X$

Simetria față de o dr:

d, δ, z, x, y

$\delta \perp d$

$\delta \ni x$

$\delta \cap d = \{z\}$

$z = \text{mij.}[x, y]$

$\Downarrow$

y = sim. lui x față de d.

$z = \frac{1}{2}(x+y)$

$\Leftrightarrow y = 2z - x$

iii) $$z \begin{cases} d : \begin{cases} x^1 = t\cos\theta \\ x^2 = t\sin\theta \end{cases}, t \in \mathbb{R} \\ \delta : \cos\theta(X^1 - x^1) + \sin\theta(X^2 - x^2) = 0 \end{cases}$$

$\{z\} = d \cap \delta$

$y = 2z - x$

$t \cdot \lambda = \dots$

$\cos\theta(t\cos\theta - x^1) + \sin\theta(t\sin\theta - x^2) = 0$

$t_z = x^1 \cdot \cos\theta + x^2 \cdot \sin\theta$

$$\begin{cases} z^1 = (x^1 \cdot \cos\theta + x^2 \cdot \sin\theta)\cos\theta \\ z^2 = (x^1 \cdot \cos\theta + x^2 \cdot \sin\theta)\sin\theta \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} z^1 = x^1\cos^2\theta + x^2\sin\theta\cos\theta \\ z^2 = x^1\cos\theta\sin\theta + x^2\cdot\sin^2\theta \end{cases}$$

$$y = 2z - x \Rightarrow \begin{cases} y^1 = 2x^1\cos^2\theta + 2x^2\sin\theta\cos\theta - x^1 \\ y^2 = 2x^1\cos\theta\sin\theta + 2x^2\cdot\sin^2\theta - x^2 \end{cases}$$

coord.

a) $$\Rightarrow \begin{cases} y^1 = x^1\cdot\cos 2\theta + x^2\sin 2\theta \\ y^2 = x^1\cdot\sin 2\theta - x^2\cdot\cos 2\theta \end{cases}$$

matriceal

b) $Y = FX$, $F = \begin{pmatrix} \cos 2\theta & \sin 2\theta \\ \sin 2\theta & -\cos 2\theta \end{pmatrix}$

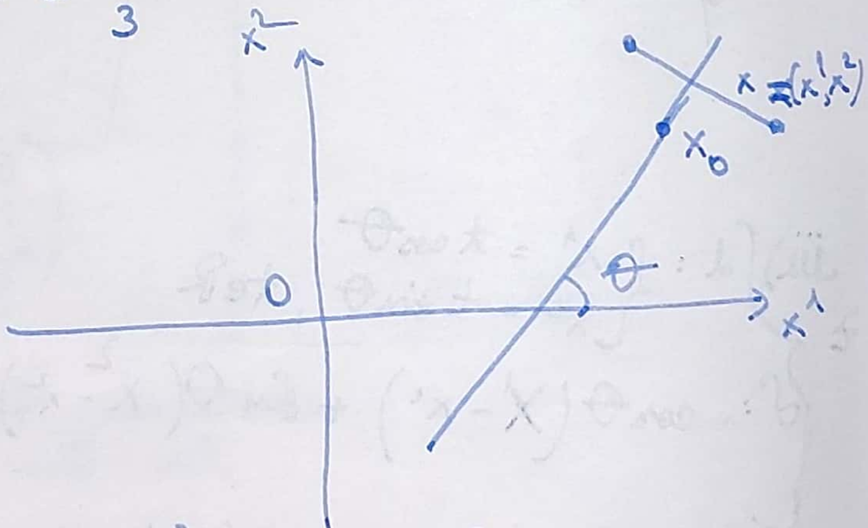
$\mathrm{Aut}(E^2) \subseteq \mathrm{Aut}(E_0^2)$

$$\begin{cases} F \in O(2) \\ \det F = -1 \end{cases}$$

$\hookrightarrow$ generalizarea pt. i)

i) $$\begin{cases} y^1 = x^1\cdot\cos\frac{2\pi}{3} + x^2\cdot\sin\frac{2\pi}{3} = \dots \\ y^2 = x^1\cdot\sin\frac{2\pi}{3} - x^2\cdot\cos\frac{2\pi}{3} = \dots \end{cases}$$

ii)



$$\cos\theta(x_0^1 + t\cos\theta - x^1) + \sin\theta(x_0^2 + t\sin\theta - x^2) = 0$$

$$\Rightarrow t_x = x^1\cos\theta - x_0^1\cos\theta + x^2\sin\theta - x_0^2\sin\theta$$

$$\Rightarrow t_x = \cos\theta(x^1 - x_0^1) + \sin\theta(x^2 - x_0^2)$$

$z = \dots$

$y = 2z - x$

$y = Fx + A$

$$\begin{cases} z_1 = x_0^1 + (-\cos\theta \cdot x_0^1 - \sin\theta \cdot x_0^2 + x^1\cos\theta + x^2\sin\theta)\cos\theta) \\ z_2 = \dots \end{cases}$$

Temă: $\theta \in \left\{ \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{3} \right\}$ + Rotația de unghi θ, în $\mathbb{R}^2$, în jurul lui $O(0,0)$.

\+ —ıı— în jurul lui x_0

sim. + mat. Pb. 2

Trace

Clasificarea cuadricelor în E_0^3

Da. o cuadrică $H_2 : 2(x^1,x^2,x^3) = \sum_{i,j=1}^{3} a_{ij}x^i x^j + 2\sum_{i=1}^{3} a_{i0}x^i + a_{00} = 0$, ex. o transformare $\gamma \in Aut(E_0^3)$ cu $2 \circ \gamma$ cu forma

(I) $\lambda_1(x^1)^2 + \lambda_2(x^2)^2 + \lambda_3(x^3)^2 + \delta = 0$
$\lambda_1 \neq 0$

sau [nu (exclusiv)]

(II) $\lambda_1(x^1)^2 + \lambda_2(x^2)^2 + 2px^3 = 0$, cu $p \neq 0$ $\lambda_1 \neq 0$ $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, p \in \mathbb{R}$ (spec(a) $\ni$ 0) notații curs

nedeg $\Rightarrow 0 \notin$ Spec(a)

---

* Notație: $x = \gamma(\tilde{x})$, $x = (x^1,x^2,x^3)$, $\tilde{x} = (\tilde{x}^1, \tilde{x}^2, \tilde{x}^3) \in \mathbb{R}^3$

$\longrightarrow$ Vom nota $(2\circ\gamma)(\tilde{x})$ tot cu var. x.

$a = (a_{ij})_{i,j=\overline{1,3}}$

$\delta = \det a$

$I = \operatorname{Tr} a = a_{11} + a_{22} + a_{33}$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{10} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{20} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{30} \\ a_{10} & a_{20} & a_{30} & a_{00} \end{pmatrix}$$

$a_{10} = a_{01}$, $a_{20} = a_{02}$, $a_{30} = a_{03}$

$\Delta = \det A$

$Spec(a) = Spec(f_a) = \{\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3\}$ invarianți relativi ai cuadricei

$$P_a(\lambda) = \det(a - \lambda I_3) = \det\begin{pmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33}-\lambda \end{pmatrix}$$

mulțimea soluțiilor pol. ; devin coef. în formulele I și II

$Spec(a) = Spec(f) = \{\lambda \in \mathbb{R};\ P_a(\lambda) = 0\}$

$f = f_a \in End(\mathbb{R}^3, +, \cdot)$

endom pt. care $M_{\beta_{can}}(f) = a$

$f(x) = y$
$x = (x^1, x^2, x^3)$
$y = (y^1, y^2, y^3)$

$\{ y^i = \sum_{j=1}^{3} a_{ij} \cdot x^j ; \ i = \overline{1,3}$

$f(x) = \lambda x \Leftrightarrow \sum_{j=1}^{3} a_{ij} \cdot x^j = \lambda x^i$

Spec → mulțimea valorilor props.

$f(x) = \lambda x \Leftrightarrow \exists (x^1, x^2, x^3) \neq (0,0,0)$ a.î. $\sum_{j=1}^{3} a_{ij} \cdot x^j = \lambda x^i$

$\left\{ \sum_{j=1}^{3} (a_{ij} - \lambda \delta_{ij}) x^j = 0 \quad i = \overline{1,3} \right.$

Clasificarea cuadricelor în E_3:

1) Cu centru unic dc. $\delta \neq 0$

Ec. centrului $c = (c^1, c^2, c^3)$ $\left\{ \sum_{j=1}^{3} a_{ij} \cdot c^j + a_{i0} = 0 \quad i = 1,2,3 \right.$

2) Nedegenerat: $\Delta \neq 0$ / Degenerat: $\Delta = 0$

I

$a = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix}$

$f(x^1, x^2, x^3) = \underline{a_{11}(x^1)^2} + \cancel{a_{12}(x^1 x^2)} + \cancel{a_{13} x^1 x^3} + \cancel{a_{21} x^1 x^2} + \underline{a_{22} x^2 x^2} + \cancel{a_{23} x^2 x^3} + \cancel{a_{31} x^3 x^1} + \cancel{a_{32} x^3 x^2} + \underline{a_{33} x^3 x^3} + 2a_{10} x^1 + 2a_{20} x^2 + 2a_{30} x^3 + a_{00}$

$\delta = \lambda_1 \lambda_2 \lambda_3$ → centru unic: $\lambda_1 \cdot \lambda_2 \cdot \lambda_3 \neq 0$

$I = Tr(a) = \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3$

$\Delta = \begin{vmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \rho \end{vmatrix} = \lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 \rho$ $\Rightarrow$ $\Delta \neq 0 \Leftrightarrow \lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 \rho \neq 0$

nedegenerat ⇒ toate val. dif. de 0

⇓

$\delta \neq 0$ (centru unic la nedegen.)
$0 \notin$ Spec (a).

Centrul

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^{3} a_{ij} c^j + a_{i0} = 0 \\ i = 1,2,3 \end{cases}$$

+ referat

↓

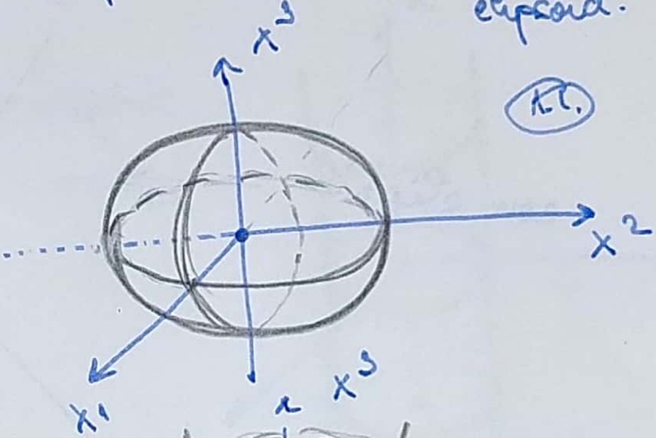
desen + formulă

$$\begin{cases} \lambda_1 c^1 + 0 = 0 \\ \lambda_2 c^2 + 0 = 0 \\ \lambda_3 c^3 + 0 = 0 \end{cases} \Rightarrow (c^1, c^2, c^3) = (0,0,0)$$

I 1) $\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 \delta \neq 0$ – nedeg. cu centru unic $(0,0,0)$

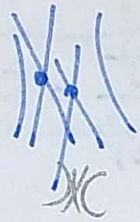
1.1) $\frac{(x^1)^2}{(a_1)^2} + \frac{(x^2)^2}{(a_2)^2} + \frac{(x^3)^2}{(a_3)^2} = 1$ elipsoid.

Intersec. cu planele de coordonate sunt elipse

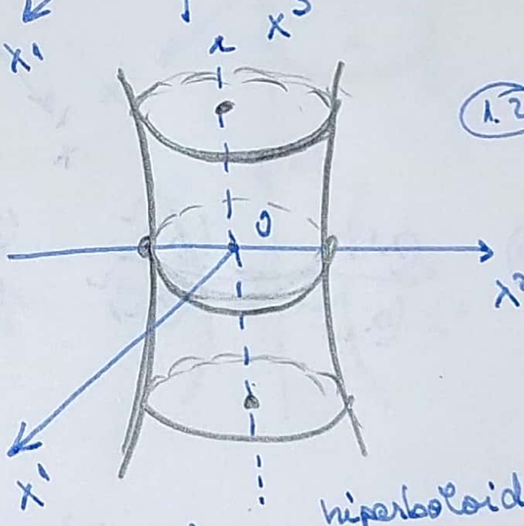


1.2) $\frac{(x^1)^2}{(a_1)^2} + \frac{(x^2)^2}{(a_2)^2} - \frac{(x^3)^2}{(a_3)^2} = 1$

hiperboloid cu o pânză (riglată)



→ prin ∀ pct. trec câte 2 dr. care sunt. generatoare rectilinii →

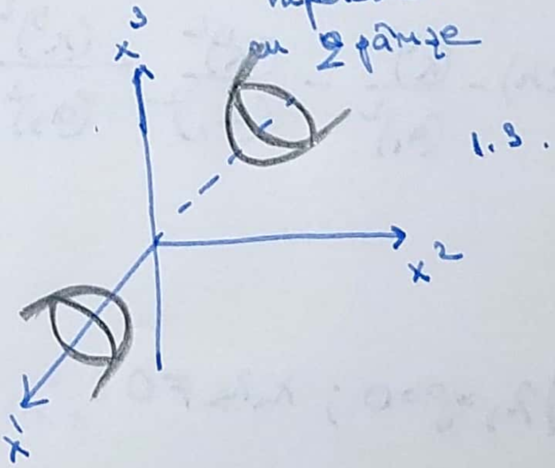


1.3) $\frac{(x^1)^2}{(a_1)^2} - \frac{(x^2)^2}{(a_2)^2} - \frac{(x^3)^2}{(a_3)^2} = 1$

hiperboloid cu 2 pânze

1.4) $-\frac{(x^1)^2}{(a_1)^2} - \frac{(x^2)^2}{(a_2)^2} - \frac{(x^3)^2}{(a_3)^2} = 1$

↓
rez. imaginare doar.



I $\boxed{2}$ $\Delta = 0$

$\rho = 0;\ \lambda_1\lambda_2\lambda_3 \neq 0$

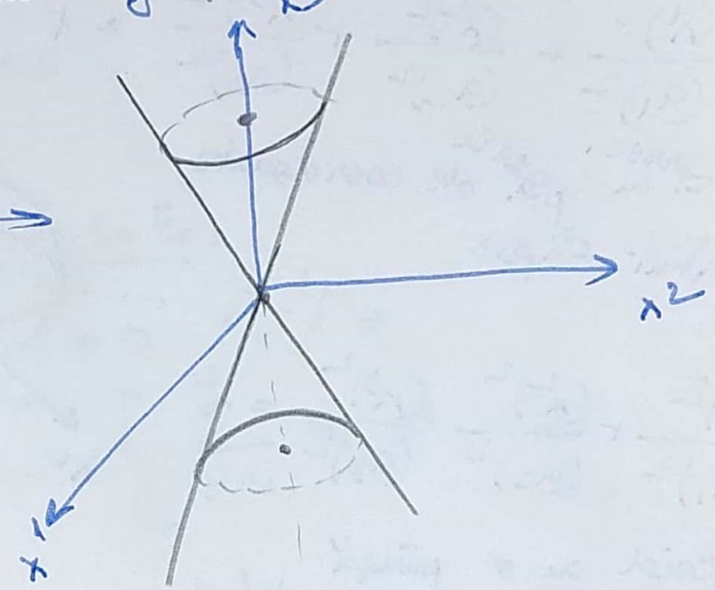
2.1) $$\frac{(x^1)^2}{(a_1)^2} + \frac{(x^2)^2}{(a_2)^2} + \frac{(x^3)^2}{(a_3)^2} = 0$$

un punct: $(0,0,0)$

2.2) $$\frac{(x^1)^2}{(a_1)^2} + \frac{(x^2)^2}{(a_2)^2} - \frac{(x^3)^2}{(a_3)^2} = 0$$

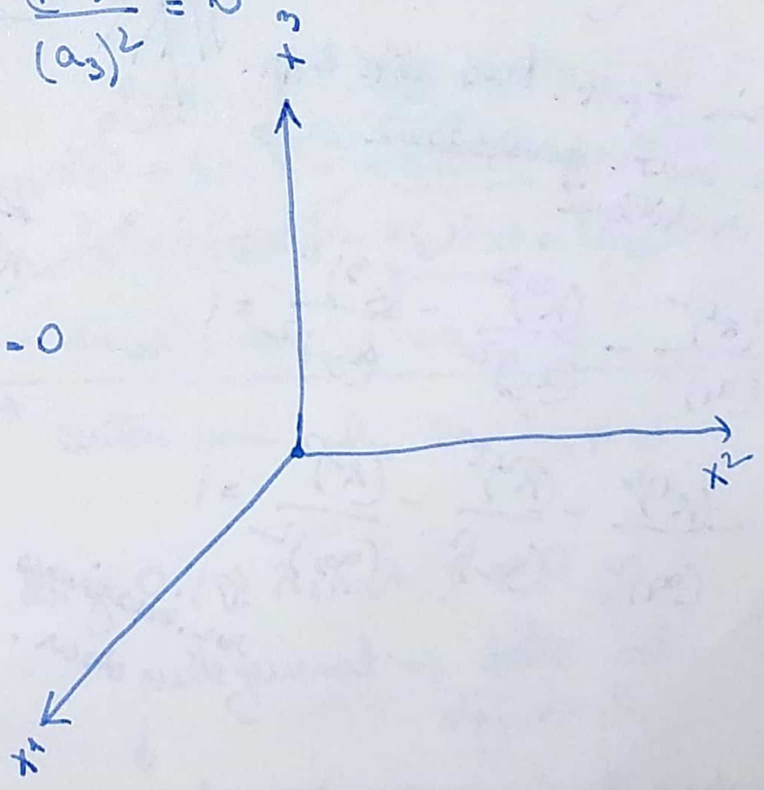
conuri cu vf. în $(0,0,0)$

con eliptic $\longrightarrow$



2.3) $$\frac{(x^1)^2}{(a_1)^2} - \frac{(x^2)^2}{(a_2)^2} - \frac{(x^3)^2}{(a_3)^2} = 0$$

2.4) $$-\frac{(x^1)^2}{(a_1)^2} - \frac{(x^2)^2}{(a_2)^2} - \frac{(x^3)^2}{(a_3)^2} = 0$$



$\boxed{3}$ $\lambda_3 = \rho = 0;\ \lambda_1\lambda_2 \neq 0$

$$\frac{(x^1)^2}{(a_1)^2} + \frac{(x^2)^2}{(a_2)^2} = 0$$

+ dista cu desene și formule ← referate

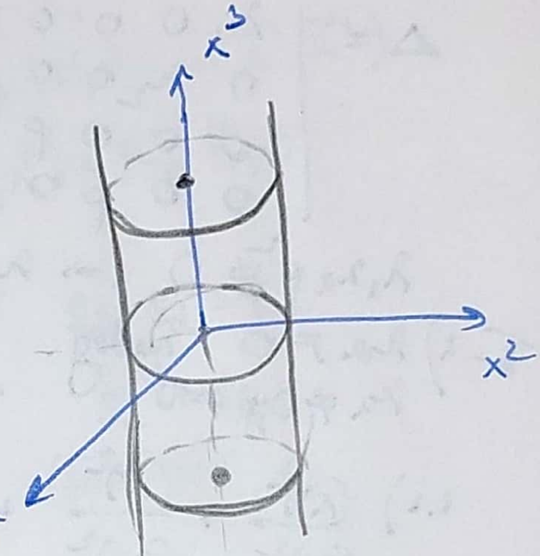
$$\begin{cases} x^1 = 0 \\ x^2 = 0 \end{cases}$$ axa Ox^3

3.2) $\frac{(x^1)^2}{(a_1)^2} - \frac{(x^2)^2}{(a_2)^2} = 0 \Rightarrow \underbrace{\left(\frac{x^1}{a_1} - \frac{x^2}{a_2}\right)}_{0} \underbrace{\left(\frac{x^1}{a_1} + \frac{x^2}{a_2}\right)}_{0} = 0$

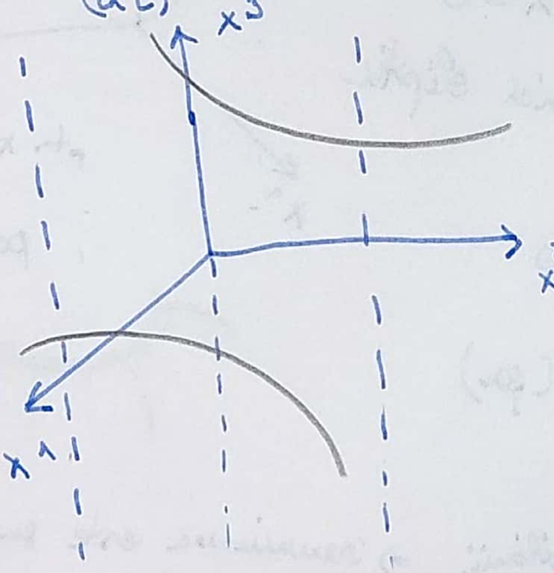
0 sau 0

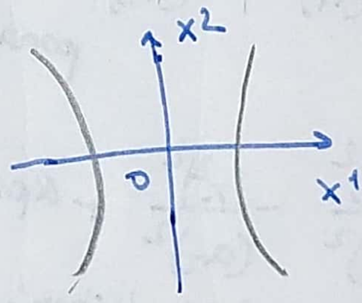
$\boxed{4}$ $\lambda_3 = 0;\ \lambda_1\lambda_2\delta \neq 0$

4.1) $\frac{(x^1)^2}{(a_1)^2} + \frac{(x^2)^2}{(a_2)^2} = 1$ cilindru eliptic →



4.2) $\frac{(x^1)^2}{(a_1)^2} - \frac{(x^2)^2}{(a_2)^2} = 1$





$\boxed{5}$ $\lambda_2\lambda_3 = 0;\ \lambda_1\delta \neq 0$

5.1) $\frac{(x^1)^2}{(a_1)^2} = 1$

$x^1 = \pm a_1$

→ 2 planuri paralele și paralele cu Ox^2x^3

5.2) $\frac{(x^1)^2}{(a_1)^2} = -1$ imaginară

$\boxed{6}$ $\lambda_2 = \lambda_3 = p = 0$; $(x^1)^2 = 0 \rightarrow Ox^1x^2$

III

$$\delta = \begin{vmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

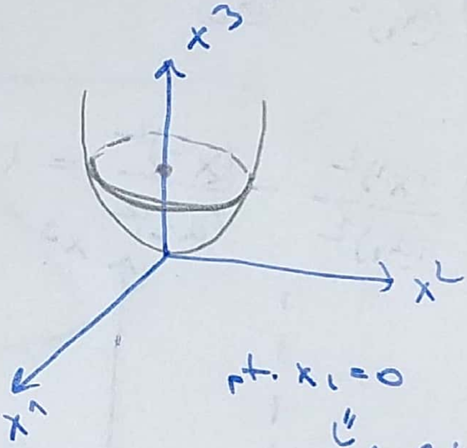
$$\Delta = \begin{vmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & p \\ 0 & 0 & p & 0 \end{vmatrix} = \lambda_1 \lambda_2 (-p^2)$$

$\lambda_1 \lambda_2 p^2 \neq 0 \iff \lambda_1 \lambda_2 p \neq 0$

III 1) $\lambda_2 \neq 0$ nedeg.
$\lambda_1 \neq 0; p \neq 0$

1.1) $\frac{(x^1)^2}{(a_1)^2} + \frac{(x^2)^2}{(a_2)^2} + 2px^3 = 0$

paraboloid eliptic

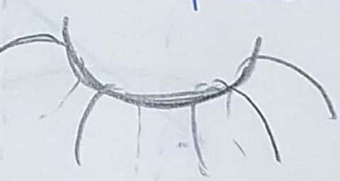


pt. $x_1 = 0$
⇓
parabolă

1.2) $\frac{(x_1)^2}{(a_1)^2} - \frac{(x^2)^2}{(a_2)^2} + 2px^3 = 0$

paraboloid hiperbolic (şa)

(e. riglate)



2 familii de generat. rectilinii. ⇒ reuniunea este supr. respect.

III 2. $\lambda_2 = 0$: $\frac{(x^1)^2}{(a_1)^2} + 2px^3 = 0$ cilindru parabolic

Să se descrie transformata unei conice printr-o izometrie:

$4(x^1)^2 - x^2 = 0$

• $\frac{(x^1)^2}{4} + \frac{(x^2)^2}{9} = 1$

$\frac{(x^1)^2}{25} - \frac{(x^2)^2}{4} = 1$

rotatie de unghiuri $\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{3}, \pi$

simetrie fata de o dr. vectoriala ce face unghiul $\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{3}, \pi$

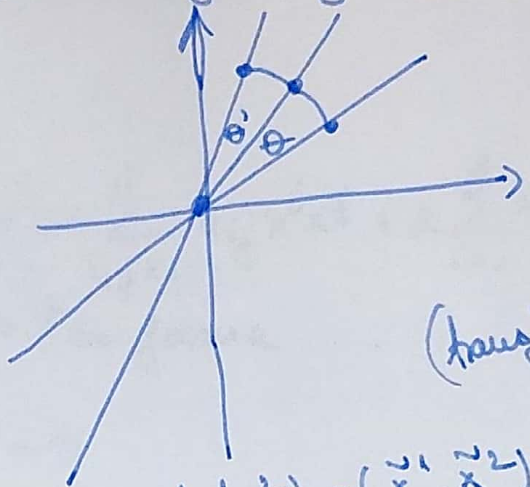
$R_\theta \circ R_{\theta'} =$

$$\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \cos\theta' & -\sin\theta' \\ \sin\theta' & \cos\theta' \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \cos(\theta+\theta') & -\sin(\theta+\theta') \\ \ldots & \end{pmatrix} =$$

$= R_{\theta+\theta'}$

$\Rightarrow (R_{-\theta})^{-1} = R_\theta$



(transformata)

$R_\theta(x^1, x^2) = (\tilde{x}^1, \tilde{x}^2)$

$(x^1, x^2) = R_\theta^{-1}(\tilde{x}^1, \tilde{x}^2)$

$S_\alpha : S_\alpha \begin{pmatrix} \cos 2\alpha & \sin 2\alpha \\ \sin 2\alpha & -\cos 2\alpha \end{pmatrix}$

$S_\alpha \circ S_\alpha = I_d$

$S_\alpha^{-1} = S_\alpha$

(simetria)

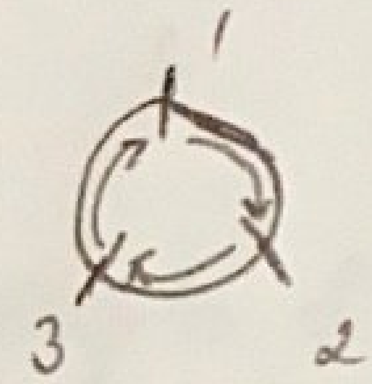
19.05.2022

Seminar 13
GAL
=geometrie=

- Produsul vectorial a doi vectori în (E^3, B_{can})

$\times : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$

$$e_1 \times e_1 = e_2 \cdot e_2 = e_3 \cdot e_3 = (0,0,0)$$
$$e_1 \times e_2 = e_3 = -e_2 \times e_1$$
$$e_2 \times e_3 = e_1 = -e_3 \times e_2$$
$$e_3 \times e_1 = e_2 = -e_1 \times e_3$$



→ prelungire prin biliniaritate

$$x = (x^1, x^2, x^3) = x^1 e_1 + x^2 e_2 + x^3 e_3$$
$$y = (y^1, y^2, y^3) = y^1 e_1 + y^2 e_2 + y^3 e_3$$
$$z = (z^1, z^2, z^3) = z^1 e_1 + z^2 e_2 + z^3 e_3$$

$$x \times y \overset{formal}{=} \begin{vmatrix} x^1 & y^1 & e_1 \\ x^2 & y^2 & e_2 \\ x^3 & y^3 & e_3 \end{vmatrix}$$

$$\langle x \times y, z \rangle = \begin{vmatrix} x^1 & y^1 & z^1 \\ x^2 & y^2 & z^2 \\ x^3 & y^3 & z^3 \end{vmatrix} \quad \text{(produs mixt)}$$

$$\overset{\shortparallel}{(x,y,z)}$$

$$(x,y,z) = (y,z,x) = (z,x,y) = -(y,x,z) = -(z,y,x) = -(x,z,y)$$

- $\langle x \times y, x \rangle = 0$ $\qquad x \times y \perp x$
- $\langle x \times y, y \rangle = 0$ $\qquad x \times y \perp y$

} Ac. rel. au și semnif. geometrică dacă vectorii x, y sunt nenuli.

→ exerciții

1) Să se dea 3 vectori $x, y, z \in \mathbb{R}^3 \setminus \{(0,0,0)\}$

2) Să se calculeze $x \times y$ și (x,y,z)
$y \times z$ și (y,z,x)
$z \times x$ și (z,x,y).

3) Să se calculeze $\langle x \times y, x\rangle$ și $\langle x \times y, y\rangle$.
+ modulele vectorilor

1. $x = (1, 2, 4)$
$y = (3, 6, 9)$
$z = (9, 8, 6)$

2. $x \times y = (1,2,4) \times (3,6,9) = \begin{vmatrix} 1 & 3 & e_1 \\ 2 & 6 & e_2 \\ 4 & 9 & e_3 \end{vmatrix} =$

$= \cancel{6e_3} + 18e_1 + 12e_2 - 24e_1 - 9e_2 - \cancel{6e_3} =$

$= 3e_2 - 6e_1 =$

$= 3(0,1,0) - 6(1,0,0) =$

$\cancel{= (0,0,3) - (6,0,0) =}$

$\cancel{= (-6,0,3)} \quad = (-6, 3, 0)$

$(x,y,z) = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 9 \\ 2 & 6 & 8 \\ 4 & 9 & 6 \end{vmatrix} = \cancel{36} + 162 + 96 - \cancel{54} - 216$
$- 72 - \cancel{36} =$

$y \times z = \begin{vmatrix} 3 & 9 & e_1 \\ 6 & 8 & e_2 \\ 9 & 6 & e_3 \end{vmatrix} = 24e_3 + 36e_1 + 81e_2$
$- 72e_1 - 18e_2 - 54e_3 .$

3. $\langle x \times y, x\rangle = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & x_1 \\ x_2 & y_2 & x_2 \\ x_3 & y_3 & x_3 \end{vmatrix} = 0$; ANALOG $\langle x \times y, y\rangle$

$\Downarrow$
un det. cu 2 coloane identice.

→ problemă

Să se arate că $\|x \times y\|^2 = \begin{vmatrix} \langle x, x\rangle & \langle x, y\rangle \\ \langle y, x\rangle & \langle y, y\rangle \end{vmatrix}$

și că, în cazul $x, y \neq (0,0,0)$,

$$\|x \times y\| = \|x\| \, \|y\| \sin(\widehat{x, y}),$$

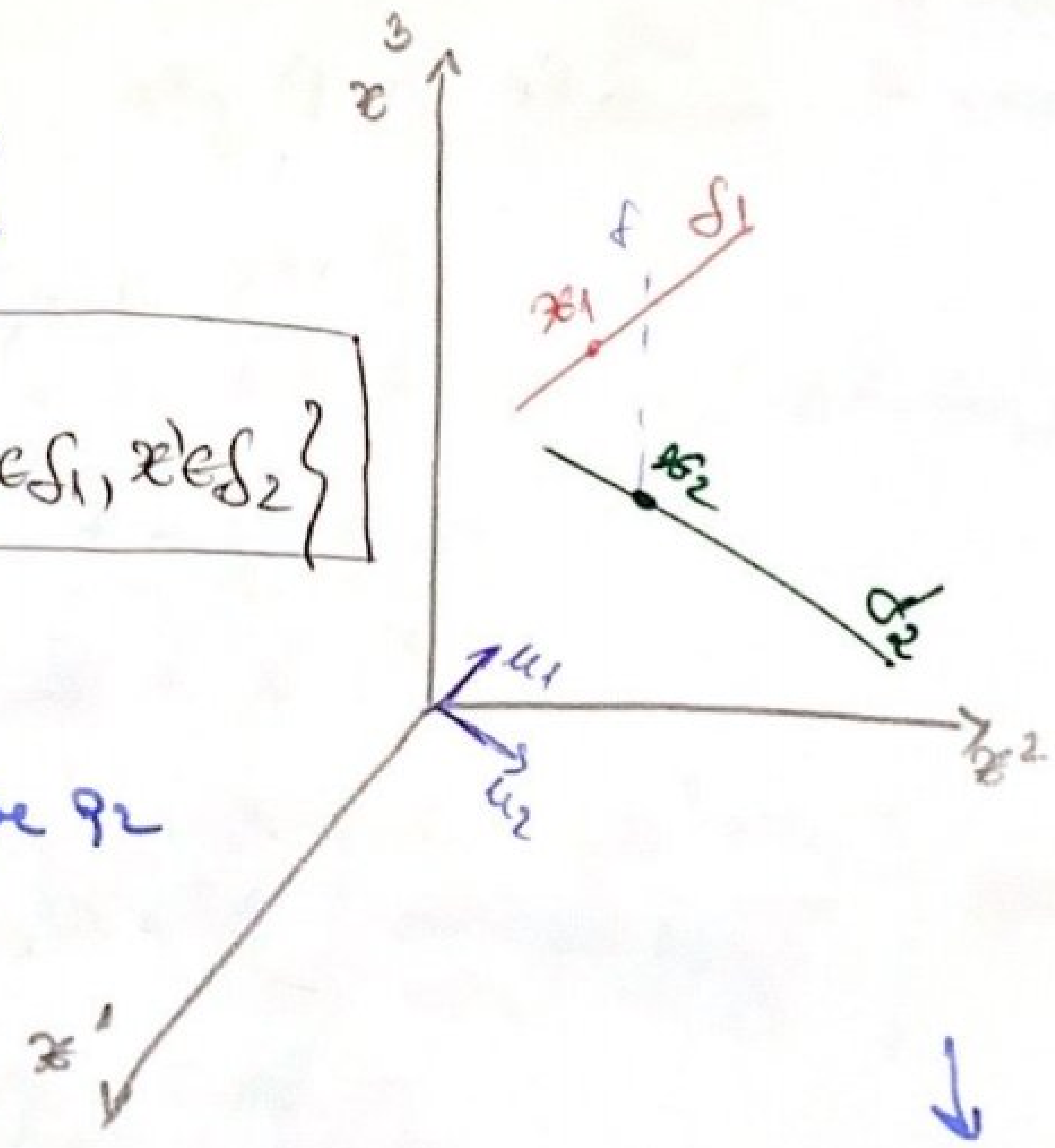
$$\cos(\widehat{x, y}) = \frac{\langle x, y\rangle}{\|x\| \, \|y\|}.$$

→ aplicație

Calculul distanței dintre două drepte δ_1, δ_2, aflate în poziție oarecare (necoplanare) din E_3.

Fie: $\delta_1 : x = x_1 + t u_1$
$\delta_2 : x = x_2 + t u_2$

$$\boxed{d(\delta_1, \delta_2) \overset{def}{=} \inf \{ d(x, x') ; x \in \delta_1, x' \in \delta_2 \}}$$

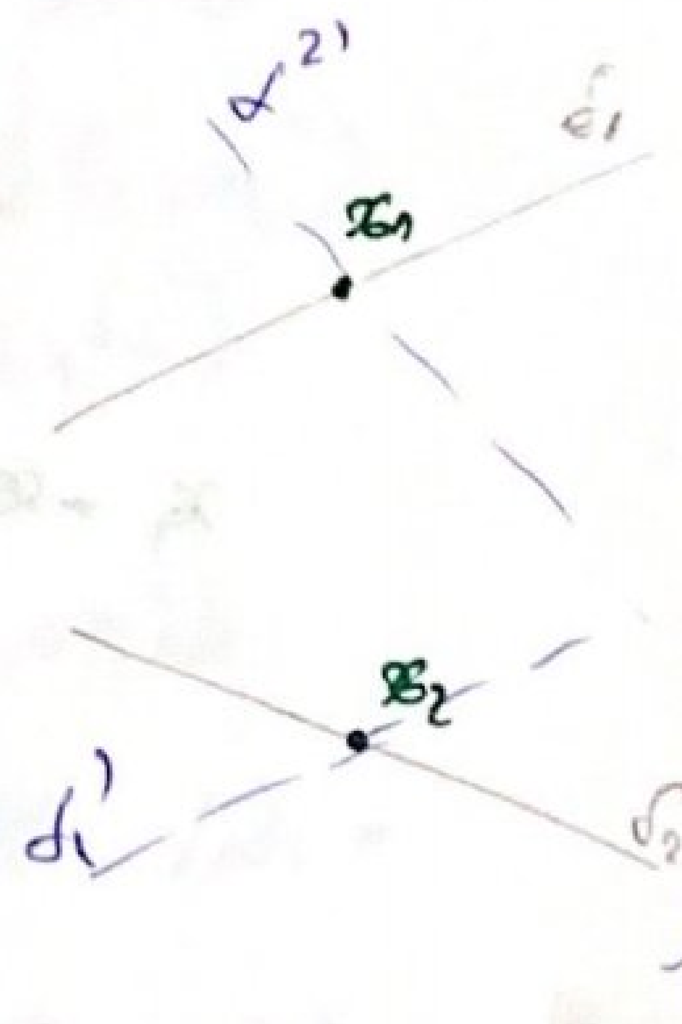


Cons. $\delta \perp p_1 \Rightarrow$ va fi $\perp$ și pe p_2

Referat facultativ:
→ o dr $\perp$ pe ambele plane (construcție)
→ $\perp$ 2 dr. copl

$\boxed{\underbrace{p_1, p_2}_{plane}}$

($\perp$ a comună a δ_1, δ_2, care (2 drepte) necopl le taie pe amândouă)



$\delta_2' \parallel \delta_2$
$\delta_2' \ni x_1$
$p_1 = pl(\delta_1, \delta_2')$

$\delta_1' \parallel \delta_1$
$\delta_1' \ni x_2$
$p_2 = pl(\delta_2, \delta_1')$

(I) • distanța de la un punct la o dreaptă în $\mathbb{R}^2$

$$d(x_0,\delta) = d(x_0,x_1), \text{ unde } x_1 = pr_\delta\, x_0$$

(II) • distanța ——"—— un plan în $\mathbb{R}^3$

(I)

→ pt. $\delta: \alpha_1 x^1 + \alpha_2 x^2 + \alpha_3 x^3 = 0$

$x_0 = (x^1_0, x^2_0)$

(M, d) - sp metric
$A, B \subset M$
$d(A,B) \overset{def}{=} \inf\{d(x,x') \mid x\in A, x'\in B\}$

→ fie x_1 $pr_\delta\, x_0$

$\delta' \ni x_0$, $\delta' \perp \delta$ $\quad \{x\} = \delta \cap \delta'$

$(\alpha_1,\alpha_2) \perp \delta$ $\quad$ vector director pt normala

$$\delta': X = x_0 + t(\alpha_1,\alpha_2)$$

parametrice $\begin{cases} x^1 = x^1_0 + t\alpha_1 \\ x^2 = x^2_0 + t\alpha_2 \end{cases}$ $\quad t\in\mathbb{R}$

$$\delta\cap\delta': \alpha_1(x^1_0+t\alpha_1)+\alpha_2(x^2_0+t\alpha_2)+\alpha_3=0$$

$$t_1 = -\frac{\alpha_1 x_1^0+\alpha_2 x_2^0+\alpha_3}{(\alpha_1)^2+(\alpha_2)^2}$$

$x_1 = x_0 + t_1(\alpha_1,\alpha_2)$

$$d(x_0,\delta) = d(x_0,x_1) = \|x_1-x_0\| = |t_1\cdot(\alpha_1,\alpha_2)| =$$

$$= |t_1|\cdot\|(\alpha_1,\alpha_2)\|$$

! $\Rightarrow$ $$d(x_0,\delta) = \frac{|\alpha_1 x_0^1+\alpha_2 x_0^2+\alpha_3|}{\sqrt{(\alpha_1)^2+(\alpha_2)^2}}$$

(II) punctul x_0, planul p

$p: \alpha_1 x^1 + \alpha_2 x^2 + \alpha_3 x^3 + \alpha_4 = 0$

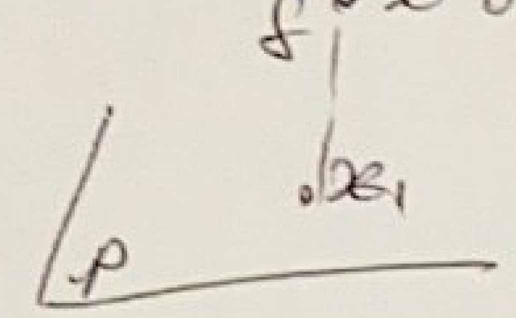
$(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) \perp p$

$d(x_0, p) = d(x_0, x_1)$, unde $x_1 = pr_p x_0$.

$(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) \perp p$

$\delta': x = x_0 + t(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) \quad t \in \mathbb{R}$

ec. parametrice



$\delta \perp p$
$\delta \ni x_0$
$x_1 = pr_p x_0$

$$\begin{cases} x^1 = x_0^1 + t\alpha_1 \\ x^2 = x_0^2 + t\alpha_2 \\ x^3 = x_0^3 + t\alpha_3 \end{cases}$$

$p \cap \delta': \alpha_1(x_0^1 + t\alpha_1) + \alpha_2(x_0^2 + t\alpha_2) + \alpha_3(x^3 + t\alpha_3) + \alpha_4 = 0$

$$t_1 = -\frac{\alpha_1 x_0^1 + \alpha_2 x_0^2 + \alpha_3 x_0^3 + \alpha_4}{(\alpha_1)^2 + (\alpha_2)^2 + (\alpha_3)^2}$$

! $d(x_0, p) = d(x_0, x_1) = \left| \dfrac{\alpha_1 x_0^1 + \alpha_2 x_0^2 + \alpha_3 x_0^3 + \alpha_4}{\sqrt{(\alpha_1)^2 + (\alpha_2)^2 + (\alpha_3)^2}} \right|$

Calculul distanței dintre 2 drepte în $\mathbb{R}^3$

unic determinate

Se consideră $\delta_1' \parallel \delta_1$, $\delta_1' \ni x_2$; și $p_1 = pl(\delta_1, \delta_2')$

$\delta_2' \parallel \delta_2$, $\delta_2' \ni x_1$; $p_2 = pl(\delta_2, \delta_1')$

Considerăm $\delta \perp p_1$, $\delta \ni x_2$ (1)

Se obține $\delta \perp \delta_1$, $\delta \perp \delta_2' \xrightarrow{\text{rel. de paralelism}} \delta \perp \delta_1'$ și $\delta \perp \delta_2' \Rightarrow$

$\delta \perp p_2$ (2)

$\overset{(1),(2)}{\Rightarrow} \rho_1 \parallel \rho_2$

$\{x_1'\} = f \cap \rho_1$

$\rightarrow$ Obținem că dist. $d(x_2, \rho_1) = d(x_2, x_1') =$

$= d(\rho_1, \rho_2) = d(f_1, f_2)$

$\rho_1 \ni x_1$: $\langle u_1 \times u_2, (x^1, x^2, x^3) \rangle + \alpha_4 = 0. \Rightarrow \langle u_1 \times u_2, x - x_1 \rangle = 0$

$\alpha_1 x^1 + \alpha_2 x^2 + \alpha_3 x^3 + \alpha_4 = 0$

$\Leftrightarrow \langle \underbrace{(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)}_{\text{vect. normal}}, (x^1, x^2, x^3) \rangle + \alpha_4 = 0$

$$\boxed{d(x_2, \rho_1) = \frac{|\langle u_1 \times u_2, x_2 - x_1 \rangle|}{\|u_1 \times u_2\|}}$$

$\rightarrow$ ex. 3: Să se aleagă un punct și un plan în $\mathbb{R}^3$ și să se calc dist de la punct la plan.

$\rightarrow$ ex. 4. Să se dea 2 dr necopl. în $\mathbb{R}^3$ și să se calc dist dintre acestea.

3. PUNCT: $x_0 = (1, 2, 3)$

PLAN: $\rho: 3x^1 + 2x^2 + 5x^3 - 7 = 0$

$$d(x_0, \rho) = \frac{|3 \cdot 1 + 2 \cdot 2 + 3 \cdot 5 - 7|}{\sqrt{9 + 4 + 25}} = \frac{15}{\sqrt{38}}$$

4. ~~DR. 1 : $x^1 + 2x^2 - 3x^3 + 1 = 0$; DR. 2 : $3x^1 - 6x^2 + x^3 - 2 = 0$~~

$f_1 : x = (1, 0, 2) + t(\underset{u_1}{3, 1, 2})$; $f_2 : x = (0, 4, 2) + t\underset{u_2}{(1, 2, 2)}$

$t \in \mathbb{R}$

$$d(f_1, f_2) = \frac{|\langle (3,1,2) \times (1,2,2), (0,4,2) - (1,0,2) \rangle|}{\|(3,1,2) \times (1,2,2)\|}$$

$$= \frac{\left|\begin{vmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 4 \\ 2 & 2 & 0 \end{vmatrix}\right|}{\|(3,1,2) \times (1,2,2)\|} = \frac{14}{\sqrt{45}}$$

$$\begin{matrix} 1 & 2 \\ 2 & 2 \end{matrix} = -2 \qquad \begin{matrix} 3 & 1 \\ 2 & 2 \end{matrix} = -4 \qquad \begin{matrix} 3 & 1 \\ 1 & 2 \end{matrix} = 5$$

$-2, -4, +5$

Scanned with CamScanner