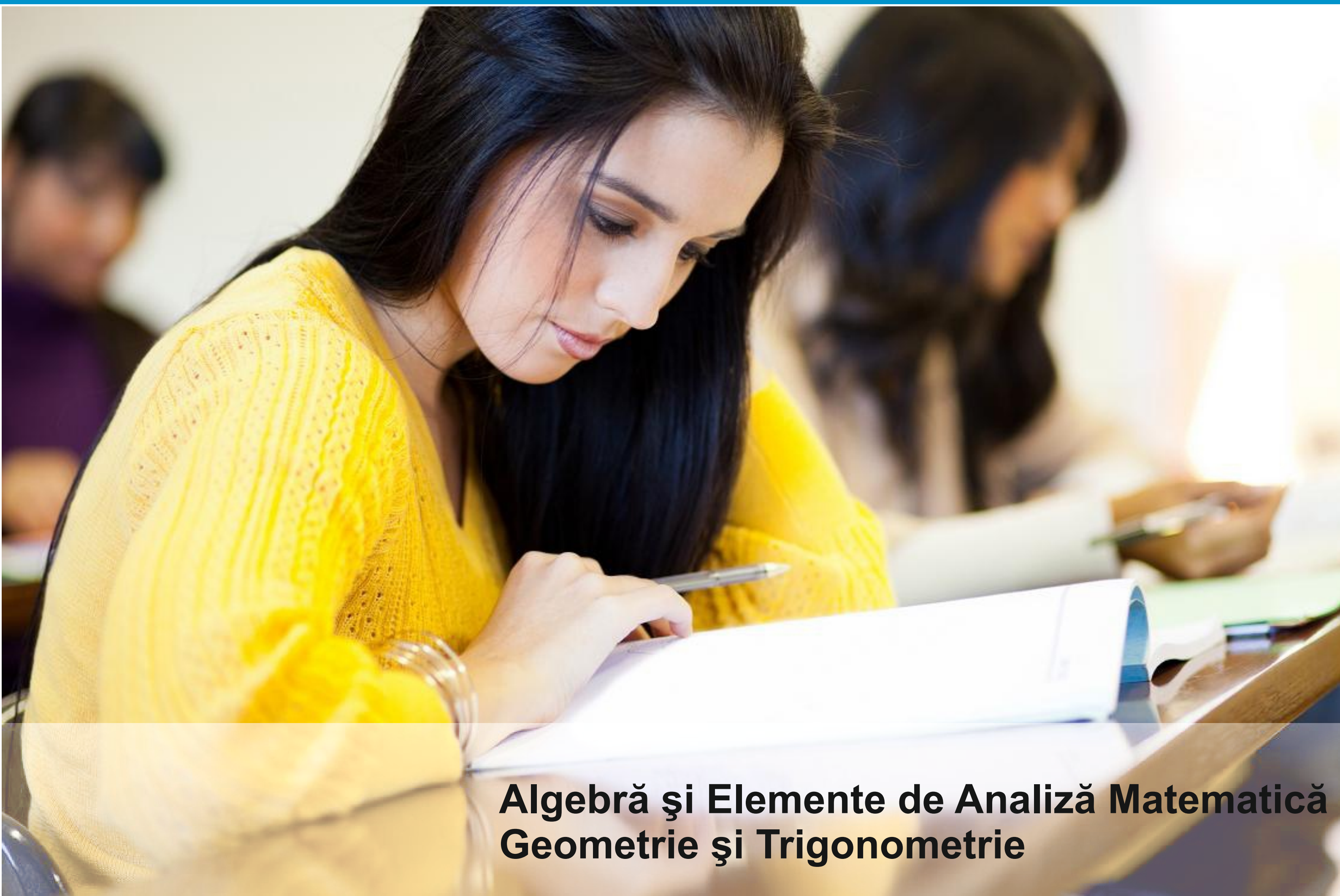
TESTE ADMITERE



Enunţuri însoţite de soluţii

2000 - 2013

1. Să se determine suma S a soluţiilor ecuaţiei $x^3 - 4x^2 = 5x$.

   a) $S = 0$; b) $S = 6$; c) $S = 4$; d) $S = \sqrt{2}$; e) $S = 5$; f) $S = 2$.

   Soluţie. Din relaţiile lui Viete rezultă $x_1 + x_2 + x_3 = 4$.

2. Să se calculeze $L = \lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{k=0}^{n} \dfrac{k+1}{10^k}$.

   a) $L = \infty$; b) $L = \frac{10}{9}$; c) $L = \frac{10}{81}$; d) $L = \frac{1000}{9}$; e) $L = \frac{100}{81}$; f) $L = \frac{9}{10}$.

   Soluţie. Avem $S_n = \sum\limits_{k=0}^{n}(k+1)(\frac{1}{10})^k$. Fie $f(x) = \sum\limits_{k=0}^{n} x^{k+1}$. Pentru $x \neq 1$ avem suma unei progresii geometrice de raţie x deci $f(x) = \dfrac{x^{n+2}-x}{x-1}$. Derivând obţinem $f'(x) = \sum\limits_{k=0}^{n}(k+1)x^k = \dfrac{(n+1)x^{n+2}-(n+2)x^{n+1}+1}{(x-1)^2}$. Pentru $x = \dfrac{1}{10}$, rezultă $S_n = \dfrac{\frac{n+1}{10^{n+2}} - \dfrac{n+2}{10^{n+1}} + 1}{(\frac{9}{10})^2}$. Cum $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n+1}{10^{n+2}} = 0$, deducem $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = \dfrac{100}{81}$.

3. Să se determine $m \in \mathbb{R}$ dacă ecuaţia $m(x+1) = e^{|x|}$ are exact două soluţii reale şi distincte.

   a) $m \in (1,\infty)$; b) $m \in \big(-\infty, -e^2\big) \cup (1,\infty)$; c) $m \in \big(-\infty,-e^2\big] \cup [1,\infty)$;
   d) $m \in \big(-\infty,-e^2\big) \cup (0,1)$; e) nu există m;
   f) nici una dintre celelalte afirmaţii nu este adevărată.

   Soluţie. Cum $x = -1$ nu este soluţie, ecuaţia se scrie $m = \frac{e^{|x|}}{x+1}$. Funcţia $f : \mathbb{R}\backslash\{-1\} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{e^{|x|}}{x+1} - m$ se scrie desfăşurat

   $$f(x) = \begin{cases} \frac{e^{-x}}{x+1} - m, & x \in (-\infty,-1)\cup(-1,0) \\ \frac{e^{x}}{x+1} - m, & x \in [0,\infty) \end{cases} \quad \Rightarrow f'(x) = \begin{cases} -\frac{e^{-x}(x+2)}{(x+1)^2}, & x \in (-\infty,-1)\cup(-1,0) \\ \frac{e^{x}\cdot x}{(x+1)^2}, & x \in (0,\infty). \end{cases}$$

   Pentru şirul lui Rolle se consideră valorile $\{-\infty,-2,-1,0,\infty\} \subset \bar{\mathbb{R}}$,

$m\backslash x$	$-\infty$	-2	-1	0	∞	
$f(x)$	$-\infty$	$-m-e^2$	$-\infty\vert\infty$	$1-m$	∞	Discuţie
$m \in (-\infty,-e^2)$	$-$	$+$	$-\vert+$	$+$	$+$	$x_1 \neq x_2$
$m = -e^2$	$-$	0	$-\vert+$	$+$	$+$	$x_1 = x_2 = -2$
$m \in (-e^2, 1)$	$-$	$-$	$-\vert+$	$+$	$+$	nu are rădăcini
$m = 1$	$-$	$-$	$-\vert+$	0	$+$	$x_1 = x_2 = 0$
$m \in (1,\infty)$	$-$	$-$	$-\vert+$	$-$	$+$	$x_1 \neq x_2$

   Deci $m \in (-\infty,-e^2)\cup(1,\infty)$.

4. Să se calculeze $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x^3-8}{x^2-4}$.

   a) -4; b) 2; c) 3; d) ∞; e) 0; f) 1.

   Soluţie. Avem $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{(x-2)(x^2+2x+4)}{(x-2)(x+2)} = 3$.

5. Să se calculeze $\ell = \lim\limits_{n\to\infty} \displaystyle\int_0^2 \frac{|x-n|}{x+n}\, dx$.

   a) $\ell = 2$; b) $\ell = \infty$; c) $\ell = 1$; d) limita nu există; e) $\ell = 0$; f) $\ell = -3$.

Soluţie. Fie $I_n = \int_0^2 \frac{|x-n|}{x+n}dx$, pentru $n \geq 2$ avem

$$I_n = \int_0^2 \frac{n-x}{n+x}dx = \int_0^2 \left(\frac{2n}{x+n} - 1\right) dx = 2n \ln\left(1+\frac{2}{n}\right) - 2 = \ln\left(1+\frac{2}{n}\right)^{2n} - 2 = 4\ln\left(1+\frac{2}{n}\right)^{n/2} - 2.$$

Deci $\lim_{n\to\infty} I_n = 4\ln e - 2 = 4 - 2 = 2$.

6. Fie matricea $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$. Să se calculeze $B = \frac{1}{2}\left(A^2 + A\right)$.

   a) $\left(\begin{smallmatrix} 2 & 5 \\ 5 & 8 \end{smallmatrix}\right)$; b) $\left(\begin{smallmatrix} 3 & 5 \\ 5 & 8 \end{smallmatrix}\right)$; c) $\left(\begin{smallmatrix} 8 & 5 \\ 5 & 2 \end{smallmatrix}\right)$; d) $\left(\begin{smallmatrix} 3 & 8 \\ 5 & 5 \end{smallmatrix}\right)$; e) $\left(\begin{smallmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right)$; f) $B = \frac{1}{2}A$.

   Soluţie. Obţinem $A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 8 \\ 8 & 13 \end{pmatrix}$; $B^2 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 6 & 10 \\ 10 & 16 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 5 & 8 \end{pmatrix}$.

7. Să se determine n natural dacă $C_n^4 = \frac{5}{6}n\,(n-3)$.

   a) $n = 3$; b) $n = 5$; c) $n = 4$; d) $n = 6$; e) $n = 12$; f) nu există n.

   Soluţie. Avem $n \geq 4$ şi $\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{24} = \frac{5n(n-3)}{6} \Leftrightarrow (n-1)(n-2) = 20$, deci $n = 6$.

8. Să se determine două numere reale strict pozitive x şi y astfel încât

$$x + y = xy = x^2 - y^2.$$

   a) $x = \frac{3+\sqrt{5}}{2}, y = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$; b) $x = \frac{3-\sqrt{5}}{2}, y = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$; c) $x = 0, y = 0$;
   d) $x = \frac{3+\sqrt{5}}{2}, y = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$; e) $x = 1, y = 0$; f) $x = \frac{1}{2}, y = -1$.

   Soluţie. Din $\begin{cases} x, y > 0, \quad x + y = xy = (x-y)(x+y) \\ x + y = (x-y)(x+y) \end{cases}$ rezultă $x-y = 1$. Din $x+y = xy$, prin înlocuirea lui $x = y + 1$, obţinem

$$y + 1 + y = (y+1)y \Leftrightarrow y^2 - y - 1 = 0 \Leftrightarrow y \in \left\{\frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}\right\}.$$

   Dar $y > 0$, deci $y = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ şi $x = \frac{3+\sqrt{5}}{2}$.

9. Câte numere complexe distincte z verifică relaţia $z \cdot \bar{z} = 1$?
   a) 3; b) două; c) nici unul; d) 1; e) 4; f) o infinitate.

   Soluţie. Avem $z \cdot \bar{z} = 1 \Leftrightarrow |z|^2 = 1 \Leftrightarrow |z| = 1$. Deci $z = \cos\alpha + i\sin\alpha; \alpha \in [0, 2\pi)$ şi deci o infinitate de soluţii.

10. Să se determine $m \in \mathbb{R}$ dacă inecuaţia $e^{2x} + me^x + m - 1 > 0$ este verificată pentru orice x real.

    a) nu există m; b) $m \in (1, \infty)$; c) $m = 1$; d) $m \in (-\infty, 1]$; e) $m \in [-1, 1]$; f) $m \in [1, \infty)$.

    Soluţie. Notăm $e^x = y$, iar condiţia devine $y^2 + my + m - 1 > 0, \forall y > 0$. Descompunem $y^2 + my + m - 1 = (y-1)(y+1) + m(y+1) = (y+1)(y-1+m) > 0, \forall y > 0$. Dacă $y \to 0$, se obţine condiţia necesară (care este şi suficientă) $m \geq 1$. Avem $\Delta = (m-2)^2$, deci f are rădăcini reale. Prin urmare

$$f(y) > 0, \forall y > 0 \Leftrightarrow y_1, y_2 \leq 0 \Leftrightarrow (P = y_1 y_2 \geq 0; S = y_1 + y_2 \leq 0) \Leftrightarrow (P = m - 1 \geq 0; S = -m \leq 0),$$

    deci $m \geq 1$.

11. Să se determine câtul împărţirii polinomului $f = X^3 + X^2 + 2X - 3$ la $g = X^2 + 2X - 3$.

    a) $X + 1$; b) $X - 1$; c) $X + 2$; d) X^2; e) $X + 3$; f) $X + 4$.

    Soluţie. Aplicând teorema împărţirii cu rest obţinem $X^3 + X^2 + 2X - 3 = (X^2 + 2X + 3)(X - 1) + X$, deci câtul este $X - 1$.

12. Să se calculeze $f'(1)$ pentru funcţia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ \ f(x) = \dfrac{x-1}{x^2+1}$.

a) 2; b) 0; c) 1; d) $\frac{3}{2}$; e) $\frac{1}{2}$; f) -3.

Soluţie. Avem $f'(x) = \dfrac{x^2+1-2x^2+2x}{(x^2+1)^2} = \dfrac{-x^2+2x+1}{(x^2+1)^2}$. Deci $f'(1) = \dfrac{1}{2}$.

13. Să se calculeze $E = 0,02 \cdot \dfrac{314}{3,14} \cdot \sqrt{\dfrac{9}{4}}$.

a) $E = 30$; b) $E = \pi$; c) $E = 3$; d) $E = \sqrt{3}$; e) $E = 1$; f) $E = 300$.

Soluţie. $E = \dfrac{2}{100} \cdot \dfrac{314}{314} \cdot 100 \cdot \dfrac{3}{2} = 3$.

14. Să se rezolve ecuaţia $\sqrt{x^2+1} - 1 = 0$.

a) $x_{1,2} = \pm\sqrt{2}$; b) $x_{1,2} = \pm 1$; c) $x = 2$; d) $x_1 = 0, \quad x_2 = \sqrt{2}$; e) $x = 0$; f) $x_{1,2} = \pm i$.

Soluţie. Avem $\sqrt{x^2+1} = 1$. Prin ridicare la pătrat, egalitatea devine $x^2+1 = 1 \Leftrightarrow x^2 = 0$, deci $x = 0$.

15. Să se calculeze suma primilor 20 de termeni ai unei progresii aritmetice (a_n), $n \geq 1$, ştiind că $a_6 + a_9 + a_{12} + a_{15} = 20$.

a) 100; b) 50; c) nu se poate calcula; d) 0; e) 20; f) 2000.

Soluţie. Din $a_6 + a_9 + a_{12} + a_{15} = 20$, rezultă $a_1 + 5r + a_1 + 8r + a_1 + 11r + a_1 + 14r = 20$, deci $2a_1 + 19r = 10$. Prin urmare $S_{20} = \dfrac{(a_1+a_{20})20}{2} = (2a_1+19r)10 = 100$.

16. Se consideră mulţimea $M = \{x^2+x+1 \mid x \in \mathbb{R}\}$. Atunci

a) $M = \left(\frac{3}{4}, \infty\right)$; b) $M = \left[\frac{3}{4}, \infty\right)$; c) $M = \left(-\infty, \frac{3}{4}\right)$; d) $M = \left[-\frac{3}{4}, \frac{3}{4}\right]$; e) $M = \mathbb{R}$; f) $M = \varnothing$.

Soluţie. Mulţimea valorilor funcţiei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = ax^2+bx+c, a > 0$ este $\left[-\frac{\triangle}{4a}, \infty\right)$. În cazul nostru $\operatorname{Im} f = \left[\frac{3}{4}, \infty\right)$.

17. Să se determine elementul neutru pentru legea de compoziţie

$$x \circ y = xy + 3x + 3y + 6$$

definită pe mulţimea $\mathbb{R}$.

a) -2; b) 1; c) 0; d) 3; e) nu există; f) -4.

Soluţie. Din $x \circ e = x$ şi $e \circ x = x, \forall x \in \mathbb{R}$ rezultă $xe + 3x + 3e + 6 = x, \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow (x+3)(e+2) = 0, \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow e = -2$.

18. Să se calculeze aria mulţimii

$$M = \{(x,y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid 0 \leq x \leq 1,\ 0 \leq y \leq xe^{x+1}\}.$$

a) $\ln 2$; b) e^2; c) $2e$; d) $e+1$; e) e; f) $2\ln 2$.

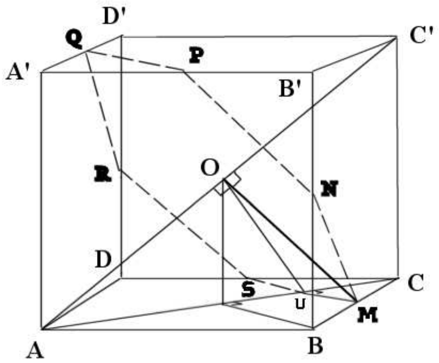
Soluţie. Folosind integrarea prin părţi rezultă aria

$$A = \int_0^1 xe^{x+1}dx = xe^{x+1}\Big|_0^1 - \int_0^1 e^{x+1}dx = e^2 - e^2 + e = e.$$

1. Un cub $ABCDA'B'C'D'$ se secţionează cu planul mediator al diagonalei AC'. Să se specifice forma secţiunii obţinute.

   a) triunghi; b) hexagon; c) trapez; d) pătrat; e) octogon; f) pentagon.

   Soluţie. Fie O mijlocul diagonalei AC' a cubului $ABCDA'B'C'D'$, fie π planul perpendicular pe AC' care trece prin punctul O şi fie a lungimea laturii cubului (vezi figura).

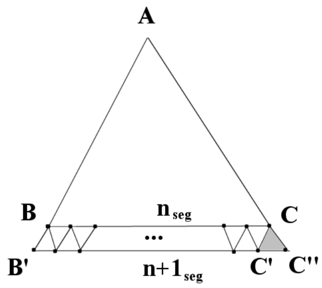


   Ducem din O perpendiculara pe AC' în planul ACC'. Aceasta intersectează diagonala AC a bazei în punctul U. Avem $\Delta C'AC \sim UOA$ (triunghiuri dreptunghice cu vârful $C'AC$ comun), deci $\frac{AO}{AC} = \frac{AU}{AC'} \Leftrightarrow \frac{a\sqrt{3}/2}{a\sqrt{2}} = \frac{AU}{a\sqrt{3}}$, deci $AU = \frac{3}{4}a\sqrt{2} \Rightarrow \frac{CU}{CA} = \frac{1}{4}$. Fie $UM \perp AC, M \in BC$. Atunci $\Delta CUM \sim \Delta CBA$ (triunghiuri dreptunghice cu vârful ACB comun), deci $\frac{CU}{CB} = \frac{CM}{CA} \Leftrightarrow a\sqrt{2}/4a = \frac{CM}{a\sqrt{2}} \Rightarrow CM = a/2$, deci M este mijlocul muchiei AB a cubului. Pe de altă parte, se observă că MU este perpendicular pe planul ACC' ($MU \perp AC$ din construcţie şi $MU \perp CC'$ deoarece CC' este perpendicular pe planul ABC, deci $CC' \perp CM \Rightarrow CM \perp CC'$). De asemenea, $OU \perp AC'$ (din construcţie), deci folosind teorema celor trei perpendiculare, rezultă $MO \perp AC'$, deci $M \in \pi$. Analog se arată că mijloacele N, P, Q, R, S ale muchiilor $BB', B'A', A'D', D'D, DC$ respectiv, aparţin planului π. Atunci şi segmentele care unesc aceste puncte, MN, NP, PQ, QR, RS, SM, care au lungime egală cu $a/\sqrt{2}$ sunt incluse în acest plan, deci şi hexagonul $MNPQRS$ determinat de acestea. Laturile opuse ale acestui hexagon sunt paralele între ele (fiind paralele cu diagonale omologe ale feţelor opuse ale cubului), deci hexagonul este regulat. Prin urmare π intersectează cubul după hexagonul regulat $MNPQRS$.

2. Un triunghi echilateral este descompus în N triunghiuri echilaterale disjuncte în modul următor: fiecare latură a triunghiului dat este împărţită în n părţi egale ($n > 7$) şi prin punctele de diviziune se duc drepte paralele cu laturile triunghiului. Să se determine N.

   a) 2^n; b) 5^{n-3}; c) n^3; d) n^2; e) $n(n+1)$; f) 3^{n-1}.

   Soluţie. Paralelele duse la baza triunghiului echilateral prin cele $n-1$ puncte de pe latura AB a triunghiului împart triunghiul în n benzi care conţin respectiv $1, 3, 5, \ldots, 2n-1$ triunghiuri mici. În total triunghiul dat conţine $N = \sum_{k=1}^{n}(2k-1) = 2\sum_{k=1}^{n} k \ - n = 2\frac{n(n+1)}{2} - n = n^2$ triunghiuri mici. Putem verifica acest lucru prin inducţie: pentru $n = 1$ avem $n^2 = 1$, deci un singur triunghi, iar dacă pentru laturi divizate în câte n segmente egale avem $N = n^2$, atunci triunghiul cu $n+1$ segmente egale va avea în plus o bandă inferioară cu $2n+1$ triunghiuri mici (vezi figura).

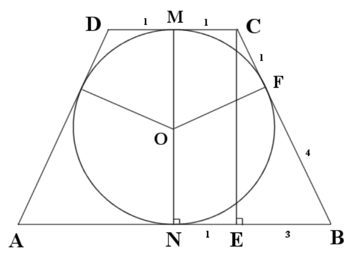


Deci noul triunghi (omologul celui vechi cu numărul de diviziuni incrementat) va avea $N' = n^2+(2n+1) = (n+1)^2$, c.c.t.d.

3. Un trapez isoscel, circumscris unui cerc, are lungimile bazelor de 8 şi 2. Să se calculeze aria trapezului.

a) 28; b) 16; c) 12; d) 20; e) 15; f) 10.

Soluţie. Înalţimea trapezului este $CE = \sqrt{CB^2 - BE^2}$ (vezi figura).



Dar $CB = CF + FB = CM + BN = \frac{CD}{2} + \frac{BA}{2} = 1 + 4 = 5$, unde am folosit faptul că tangentele duse dintr-un punct exterior la un cerc sunt de aceeaşi lungime. Pe de altă parte, $BE = BN - EN = BN - CM = \frac{BA}{2} - \frac{CD}{2} = 4 - 1 = 3$. Deci $CE = \sqrt{5^2 - 3^2} = 4$, iar aria trapezului este $\mathcal{A} = \frac{AB+CD}{2} \cdot CE = \frac{5+1}{2} \cdot 4 = 12$.

4. Să se calculeze $\sin 2x$ dacă $\operatorname{tg} x = 3$.

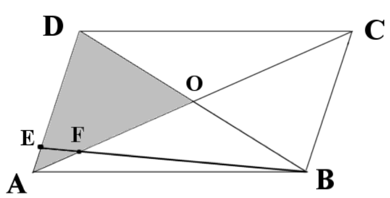
a) $\frac{3}{4}$; b) $\frac{1}{2}$; c) $\frac{3}{5}$; d) $\frac{\sqrt{2}}{2}$; e) $\frac{5}{7}$; f) $\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Soluţie. Avem $\sin 2x = \dfrac{2 \operatorname{tg} x}{1 + \operatorname{tg}^2 x} = \dfrac{2 \cdot 3}{1+9} = \dfrac{6}{10} = \dfrac{3}{5}$.

5. Pe latura AD a paralelogramului $ABCD$ se consideră punctul E astfel încât $AE = \dfrac{1}{2000} AD$. Fie F punctul de intersecţie al dreptei BE cu diagonala AC. Să se calculeze raportul $\dfrac{AF}{AC}$.

a) $\frac{1}{1999}$; b) $\frac{1}{2000}$; c) $\frac{1}{1998}$; d) $\frac{1}{2001}$; e) alt răspuns; f) $\frac{1}{2002}$.

Soluţie. Fie O punctul de intersecţie al diagonalelor AD şi BC ale paralelogramului (vezi figura).



Aplicând teorema Menelaus pentru secanta BE şi triunghiul AOD, rezultă

$$\frac{FA}{FO} \cdot \frac{BO}{BD} \cdot \frac{ED}{EA} = 1 \Rightarrow \frac{AF}{FO} = \frac{BD}{BO} \cdot \frac{EA}{DE} = \frac{2}{1} \cdot \frac{\frac{1}{2000} AD}{AD - \frac{1}{2000} AD} = \frac{2}{1999}.$$

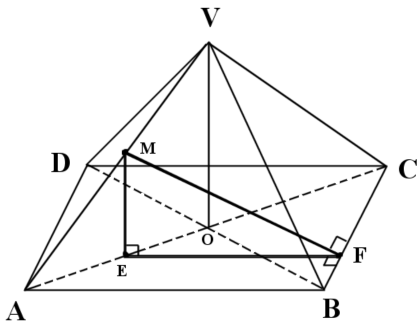
Prin urmare, avem

$$\frac{AF}{AF+FO}=\frac{2}{2+1999}=\frac{2}{2001} \Rightarrow \frac{AF}{FO}=\frac{2}{2001} \Rightarrow \frac{AF}{AC}=\frac{AF}{2AO}=\frac{1}{2001}.$$

6. Fie $VABCD$ o piramidă patrulateră regulată cu toate muchiile de lungime 4. Să se calculeze distanţa de la mijlocul M al muchiei laterale VA la muchia BC a bazei.

a) $\frac{5}{2}$; b) 3; c) $\frac{7}{3}$; d) $\frac{1}{2}\sqrt{11}$; e) $\sqrt{11}$; f) $\sqrt{14}$.

Soluţie. Fie $\{O\}=AC\cap BD$, E proiecţia lui M pe planul bazei ($E\in AC$) şi fie F proiecţia lui E pe BC ($E\in BC$). Folosind teorema celor trei perpendiculare, rezultă $MF\perp BC$ (vezi figura).



Dar $ME=\frac{VO}{2}$ (din $\Delta AME\sim\Delta AVO$) iar $EF=\frac{3}{4}\cdot AB$ (din $\Delta EFC\sim\Delta ABC$ şi $AE=EO\Rightarrow CE=\frac{3}{4}\cdot AC$). Pe de altă parte, în triunghiul dreptunghic VOC avem

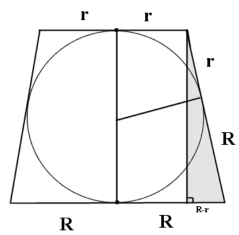
$$VO=\sqrt{VC^2-OC^2}=\sqrt{VC^2-\left(\frac{AB\sqrt{2}}{2}\right)^2}=\sqrt{4^2-\left(\frac{4\sqrt{2}}{2}\right)^2}=2\sqrt{2}.$$

Deci $ME=\frac{VO}{2}=\sqrt{2}$, iar $EF=\frac{3}{4}\cdot AB=3$. Aplicând teorema lui Pitagora în triunghiul dreptunghic MEF, rezultă $MF=\sqrt{ME^2+EF^2}=\sqrt{2+9}=\sqrt{11}$.

7. Aria unei sfere înscrise într-un trunchi de con cu razele bazelor R şi r este

a) $4\pi Rr$; b) πRr; c) $\pi\left(R^2-r^2\right)$; d) $2\pi Rr$;
e) nu se poate calcula; f) $\pi\left(R^2+r^2\right)$.

Soluţie. O secţiune prin axa de simetrie a trunchiului de con are forma unui trapez circumscris unui cerc mare al sferei (vezi figura).

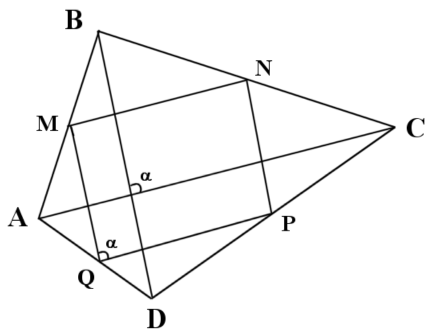


Fie ρ raza sferei. Aplicând teorema lui Pitagora în triunghiul haşurat, obţinem înălţimea $h=2\rho$ a trapezului, $h=\sqrt{(R+r)^2-(R-r)^2}=\sqrt{4Rr}=2\sqrt{Rr}$. Deci $\rho=\sqrt{Rr}$, iar aria sferei este $\mathcal{A}=4\pi\rho^2=4\pi Rr$.

8. Fie $ABCD$ un patrulater convex şi M,N,P,Q respectiv mijloacele laturilor AB,BC,CD,DA. Să se determine raportul $r=\dfrac{\mathcal{A}_{ABCD}}{\mathcal{A}_{MNPQ}}$.

a) $r=\frac{4}{3}$; b) $r=\frac{3}{2}$; c) $r=4$; d) $r=\sqrt{2}$; e) $r=3$; f) $r=2$.

Soluţie. Se observă că MN este linie mijlocie în ΔBAC (vezi desenul), deci $\Delta BMN\sim\Delta BAC$, cu raportul de asemănare $\frac{MN}{AC}=\frac{1}{2}$, deci $\dfrac{\mathcal{A}_{\Delta BMN}}{\mathcal{A}_{\Delta BAC}}=\left(\dfrac{1}{2}\right)^2=\dfrac{1}{4}$.



Analog obţinem $\dfrac{\mathcal{A}_{\Delta DQP}}{\mathcal{A}_{\Delta ADC}} = \dfrac{\mathcal{A}_{\Delta CNP}}{\mathcal{A}_{\Delta CBD}} = \dfrac{\mathcal{A}_{\Delta AMQ}}{\mathcal{A}_{\Delta ABD}} = \dfrac{1}{4}$. Deci

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_{ABCD} &= \mathcal{A}_{MNPQ} + (\mathcal{A}_{BMN} + \mathcal{A}_{DQP}) + (\mathcal{A}_{CNP} + \mathcal{A}_{MNQ}) = \\ &= \mathcal{A}_{MNPQ} + \frac{1}{4}(\mathcal{A}_{ABC} + \mathcal{A}_{ADC}) + \frac{1}{4}(\mathcal{A}_{CBD} + \mathcal{A}_{ABD}) = \\ &= \mathcal{A}_{MNPQ} + \frac{1}{4}(\mathcal{A}_{ABCD} + \mathcal{A}_{ABCD}) = \mathcal{A}_{MNPQ} + \frac{1}{2} \cdot \mathcal{A}_{ABCD}, \end{aligned}$$

deci $\mathcal{A}_{MNPQ} = \dfrac{1}{2}\mathcal{A}_{ABCD} \Rightarrow \dfrac{\mathcal{A}_{\Delta MNPQ}}{\mathcal{A}_{\Delta ABCD}} = \dfrac{1}{2}$. *Altă rezolvare.* Avem $\mathcal{A}_{ABCD} = \frac{AC \cdot BD \cdot \sin\alpha}{2}$, unde α este unghiul format de diagonalele patrulaterului. Dar α are aceeaşi mărime cu unghiul format de laturile paralelogramului $MNPQ$ (laturile paralelogramului sunt paralele cu diagonalele şi sunt egale respectiv cu $1/2$ din lungimile acestora, fiind linii mijlocii în triunghiurile $\Delta ABC, \Delta ADC, \Delta CBD, \Delta ABD$). Aria paralelogramului $MNPQ$ este

$$\mathcal{A}_{MNPQ} = QM \cdot QP \cdot \sin\alpha = \frac{BD}{2} \cdot \frac{AC}{2} \cdot \sin\alpha = \frac{AC \cdot BD \cdot \sin\alpha}{4} = \frac{\mathcal{A}_{ABCD}}{2}.$$

9. Să se calculeze produsul $P = \sin 30° \cos 45° \ \mathrm{tg}\, 60°$.

   a) $\frac{\sqrt{6}}{2}$; b) $\frac{4}{\sqrt{6}}$; c) $\frac{\sqrt{6}}{4}$; d) $\sqrt{6}$; e) $\frac{\sqrt{6}}{3}$; f) $\frac{\sqrt{2}}{4\sqrt{3}}$.

   Soluţie. Avem $P = \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \sqrt{3} = \frac{\sqrt{6}}{4}$.

10. În triunghiul ABC, dreptunghic în A, lungimile laturilor satisfac relaţiile $b = c + 1$, $a < 5$. Atunci

    a) $0 < c < 3$; b) $c = \pi$; c) $c = 3,1$; d) $c = 3$; e) $c > 4$; f) $c = 2\sqrt{3}$.

    Soluţie. Din teorema lui Pitagora, obţinem $a = \sqrt{b^2 + c^2}$. Folosind condiţiile din ipoteză, rezultă

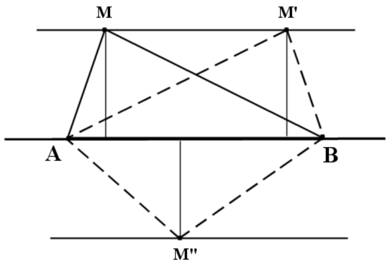
    $$a < 5 \Leftrightarrow \sqrt{(c+1)^2 + c^2} < 5 \Rightarrow c^2 + c - 2 < 0 \Leftrightarrow (c-1)(c+2) < 0 \Leftrightarrow c \in (-2, 1).$$

    Dar $c > 0$, deci $c \in (0, 1)$, prin urmare $0 < c < 3$.

11. Fie A şi B două puncte distincte fixate într-un plan. Să se determine mulţimea punctelor M din plan pentru care aria triunghiului MAB este constantă.

    a) un punct; b) reuniunea a două drepte concurente;
    c) o dreaptă paralelă cu AB;
    d) reuniunea a două drepte paralele; e) o dreaptă perpendiculară pe AB;
    f) un cerc trecând prin A şi B.

    Soluţie. Aria triunghiului este $\mathcal{A} = \frac{AB \cdot d(M, AB)}{2}$, deci $\mathcal{A}$ şi AB constante conduc la $d(M, AB) = \frac{2\mathcal{A}}{AB}$ =const. Prin urmare M descrie o pereche de drepte paralele cu dreapta AB, aflate la distanţa $\frac{2\mathcal{A}}{AB}$ de această dreaptă (vezi desenul).



12. Să se determine $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ astfel încât $\cos x = \sqrt{3} \sin x$.

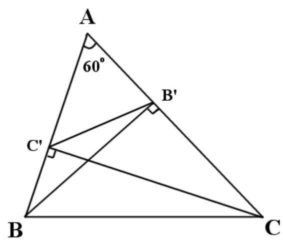
a) $\frac{\pi}{3}$; b) $\frac{\pi}{5}$; c) $\frac{\pi}{6}$; d) alt răspuns; e) nu există; f) $\frac{\pi}{4}$.

Soluţie. Se observă că $x \in (0, \frac{\pi}{2}) \Rightarrow \cos x > 0$. Împărţind ecuaţia prin $\cos x \neq 0$, obţinem $\operatorname{tg} x = \frac{1}{\sqrt{3}}$, deci $x = \frac{\pi}{6} \in (0, \frac{\pi}{2})$.

13. În triunghiul ascuţitunghic ABC, punctele C' şi B' sunt picioarele înălţimilor duse din vârfurile C şi B. Se dă $m(\hat{A}) = 60°$ şi $BC = a$. Să se calculeze $B'C'$.

a) $\frac{a}{2}$; b) $\frac{a}{\sqrt{3}}$; c) $\frac{a}{3}$; d) nu se poate calcula; e) $\frac{a}{4}$; f) $\frac{a\sqrt{2}}{2}$.

Soluţie. Se observă că $\widehat{BC'C} = \widehat{BB'C} = 90°$, deci $BCB'C'$ este patrulater inscriptibil (diagonalele formează unghiuri congruente cu laturi opuse), deci suma unghiurilor opuse ale patrulaterului este de $180°$ (vezi figura).



Prin urmare $\widehat{AC'B'} = 180° - \widehat{C'B'C} = \widehat{ABC}$ şi analog se obţine $\widehat{AC'B'} = \widehat{ACB}$. Deci $\Delta AB'C' \sim \Delta ABC$ (au unghiurile respectiv egale). Pe de altă parte, din triunghiul dreptunghic $AC'C$ avem $AC' = AC \cos \hat{A}$, deci raportul de asemănare al triunghiurilor $\Delta AC'B'$ şi ΔABC este dat de raportul laturilor omologe $\frac{AC'}{AC} = \cos \hat{A} = \frac{1}{2}$, şi deci $\frac{B'C'}{BC} = \frac{1}{2} \Rightarrow B'C' = a \cdot \frac{1}{2} = \frac{a}{2}$.

14. Volumul unui cub de diagonală d este

a) $\frac{d^3\sqrt{3}}{9}$; b) $2d^3$; c) $\frac{d^3\sqrt{2}}{9}$; d) $3d^3$; e) d^3; f) $\frac{d^3\sqrt{3}}{12}$.

Soluţie. Dacă a este latura cubului, atunci $d = a\sqrt{3}$, deci $a = d/\sqrt{3}$, iar volumul este $V = a^3 = \frac{d^3}{3\sqrt{3}} = \frac{d^3\sqrt{3}}{9}$.

15. Un tetraedru are volumul V şi aria totală A. Să se calculeze raza sferei înscrise în tetraedru.

a) $\frac{V}{A}$; b) $\frac{2V}{A}$; c) $\frac{3V}{A}$; d) $\frac{V}{3A}$; e) $\frac{V}{2A}$; f) $\frac{2V}{3A}$.

Soluţie. Fie r raza sferei înscrise în tetraedru. Unind centrul sferei cu vârfurile fiecărei feţe a tetraedrului, se obţin patru tetraedre - fiecare de volum $\frac{\sigma \cdot r}{3}$, unde σ este aria unei feţe. Suma celor patru volume este $\mathcal{V}$, deci $r = \frac{3\mathcal{V}}{\mathcal{A}}$.

16. Fie a, b, c lungimile laturilor unui triunghi ABC. Să se calculeze $\cos A$, dacă $a = \dfrac{7c}{3}$ şi $b = \dfrac{8c}{3}$.

a) $\frac{\sqrt{3}}{2}$; b) $\frac{2}{3}$; c) $\frac{1}{3}$; d) $\frac{1}{2}$; e) $-\frac{1}{4}$; f) $\frac{\sqrt{2}}{2}$.

Soluţie. Aplicând teorema cosinusului în triunghiul dat, obţinem

$$\cos \hat{A} = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} = \frac{(8c/3)^2 + c^2 - (7c/3)^2}{2 \cdot (8c/3) \cdot c} = \frac{64 + 9 - 49}{9} \cdot \frac{3}{16} = \frac{24}{9} \cdot \frac{3}{16} = \frac{1}{2}.$$

17. Să se calculeze aria triunghiului ale cărui vârfuri au afixele

$$z_1 = 2 + i,\ z_2 = 2 - i,\ z_3 = i.$$

a) $\sqrt{2}$; b) 4; c) $\frac{1}{2}$; d) $2\sqrt{2}$; e) 3; f) 2.

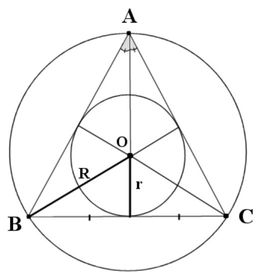
Soluţie. Coordonatele vârfurilor triunghiului asociat celor trei numere complexe, sunt $(2, 1), (2, -1), (0, 1)$, deci folosind formula ariei cu determinant, rezultă

$$\mathcal{A} = \frac{1}{2}\left|\begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix}\right| = \frac{1}{2}|-4| = 2.$$

18. Se dă o coroană circulară de raze R, r $(R > r)$. Cercul mic este înscris, iar cercul mare este circumscris aceluiaşi triunghi. Să se calculeze raportul R/r.

a) 8; b) problema nu are soluţie; c) $\sqrt{3}$; d) 2; e) $\sqrt{2}$; f) 3.

Soluţie. Dacă O este cercul centrului circumscris, acesta coincide din ipoteză cu centrul cercului înscris în triunghi (vezi figura).



Prin urmare în triunghi mediatoarele coincid respectiv cu bisectoarele, deci sunt şi mediane, şi înălţimi. Deci triunghiul este echilateral, iar înălţimea sa este împărţită de centrul său de greutate O în raportul $\frac{R}{r} = \frac{2}{1} = 2$.

1. Să se calculeze $\lim_{x\to-\infty}\left(x+\sqrt{x^2+4x}\right)$.

   a) ∞; b) -2; c) 2; d) $-\infty$; e) nu există; f) 0.

   Soluţie. Amplificând cu conjugata, obţinem:

$$\lim_{x\to-\infty}(x+\sqrt{x^2+4x})=\lim_{x\to-\infty}\frac{x^2+4x-x^2}{\sqrt{x^2+4x}-x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{4x}{|x|\sqrt{1+\frac{4}{x}}-x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{4x}{-x\left(\sqrt{1+\frac{4}{x}}+1\right)}=-2.$$

2. Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\begin{cases} x^2+1, & x>0\\ m, & x=0\\ 1-x^2, & x<0.\end{cases}$
   Să se determine m real astfel încât să existe $f'(0)$.

   a) -1; b) 2; c) -2; d) 1; e) 0; f) $m\in(-1,1)$.

   Soluţie. Continuitatea în 0 este asigurată de condiţiile $l_s(0)=f(0)=l_d(0)$ şi deci $m=1$. Pentru $m=1$ funcţia f este continuă în 0 şi $\lim_{x\to 0}f'(x)=0$. Din consecinţa teoremei lui Lagrange rezultă că f este derivabilă în 0 şi $f'(0)=0$.

3. Să se determine numărul întreg cel mai apropiat de $\sqrt[4]{44}$.

   a) 3; b) 6; c) 2; d) 4; e) 5; f) 7.

   Soluţie. Avem $7>\sqrt{44}>6,5$ şi deci $\sqrt{7}>\sqrt[4]{44}>\sqrt{6,5}$, adică $2,65>\sqrt[4]{44}>2,54$. Deci cel mai apropiat întreg este 3.

4. Câte cifre în baza 10 are numărul

$$N=1+2\cdot 10+3\cdot 10^2+\cdots+9\cdot 10^8+10\cdot 10^9\quad ?$$

   a) 11; b) 14; c) 9; d) 10; e) 12; f) 8.

   Soluţie. Avem $10\cdot 10^9<N<10^9+10\cdot 10^9$ deci $10^{10}<N<10^{11}$, adică N are 11 cifre.

5. Să se calculeze $f''(0)$ pentru funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x\,e^x+\ln(x^2+1)$.

   a) 4; b) -1; c) 6; d) 0; e) 2; f) 8.

   Soluţie. Avem $f'(x)=(x+1)e^x+\dfrac{2x}{x^2+1}$ şi

$$f''(x)=(x+2)e^x+\frac{2(x^2+1)-2x(2x)}{(x^2+1)^2}=(x+2)e^x+\frac{2(1-x^2)}{(x^2+1)^2}$$

   şi deci $f''(0)=2+2=4$.

6. Să se calculeze aria mulţimii cuprinse între curba de ecuaţie $y=x\,e^x$ şi dreptele $x=-1$, $x=0$, $y=0$.

   a) $1-\frac{2}{e}$; b) 2; c) 3; d) -1; e) -2; f) e.

   Soluţie. Aria este $\int_{-1}^0|xe^x|\,dx=\int_{-1}^0-(xe^x)dx=e^x(1-x)\,\Big|_{-1}^0=1-\frac{2}{e}$.

7. Să se calculeze integrala $\displaystyle\int_3^{19}\sqrt{x+6-6\sqrt{x-3}}\;dx$.

   a) $\frac{38}{3}$; b) $\frac{19}{2}$; c) $\frac{39}{2}$; d) $\frac{18}{5}$; e) $\frac{36}{5}$; f) $\frac{38}{5}$.

   Soluţie. Din condiţia de existenţă a radicalului $\sqrt{x-3}$, avem $x-3\geq 0\Leftrightarrow x\in[3,\infty)$. Cum $x\in[3,19]$, această condiţie este satisfăcută. Se observă că

$$\sqrt{x+6-6\sqrt{x-3}}=\sqrt{(\sqrt{x-3}-3)^2}=|\sqrt{x-3}-3|=\begin{cases}3-\sqrt{x-3}, & x\in[3,12]\\ \sqrt{x-3}-3, & x\in[12,19].\end{cases}$$

Atunci

$$I=\int_3^{19}\sqrt{x+6-6\sqrt{x-3}}\ \mathrm{d}x\ =\int_3^{12}(3-\sqrt{x-3})dx+\int_{12}^{19}(\sqrt{x-3}-3)dx.$$

Efectuăm schimbarea de variabilă $y=\sqrt{x-3}$, deci $x=y^2+3$, $dx=2ydy$ şi $x=3\Rightarrow y=0$, $x=12\Rightarrow y=3$, $x=19\Rightarrow y=4$. Rezultă

$$I=\int_0^3(3-y)2ydy+\int_3^4(y-3)2ydy=\left(3y^2-\frac{2}{3}y^3\right)\Big|_0^3+\left(\frac{2}{3}y^3-3y^2\right)\Big|_3^4=\frac{38}{3}.$$

8. Fie a şi b numere reale astfel încât $-5<a<2$ şi $-7<b<1$. Atunci valorile posibile ale produsului ab sunt cuprinse în intervalul:

a) $(2,35)$; b) $(-14,7)$; c) $(-12,3)$; d) $(-14,35)$; e) $(-35,2)$; f) $(-14,2)$.

Soluţie. Pentru $a,b>0$ avem $ab<2\cdot 1=2$. Pentru $a,b<0$ avem $0<-a<5$ şi $0<-b<7$ şi deci $ab<35$. Pentru $a<0<b$ avem $0<-a<5$ si $0<b<1$ şi deci $-ab<5\Leftrightarrow ab>-5$. Dacă $b<0<a$ rezultă $0<-b<7$ şi $0<a<2$. Prin înmulţire avem $-ab<14$, deci $ab>-14$. Din aceste consideraţii avem $-14<ab<35\Leftrightarrow ab\in(-14,35)$. Acest rezultat este optim deoarece $\lim\limits_{\varepsilon\searrow 0}(-5+\varepsilon)(-7+\varepsilon)=35$ şi $\lim\limits_{\varepsilon\searrow 0}(2-\varepsilon)(-7+\varepsilon)=-14$.

9. Se consideră permutările

$$\sigma=\begin{pmatrix}1&2&3&4\\2&1&3&4\end{pmatrix},\quad \tau=\begin{pmatrix}1&2&3&4\\1&3&4&2\end{pmatrix}.$$

Să se rezolve ecuaţia $\sigma^{11}\cdot x=\tau$.

a) $x=\begin{pmatrix}1&2&3&4\\2&1&4&3\end{pmatrix}$; b) $x=\begin{pmatrix}1&2&3&4\\3&1&4&2\end{pmatrix}$; c) $x=\begin{pmatrix}1&2&3&4\\1&2&4&3\end{pmatrix}$;
d) $x=\begin{pmatrix}1&2&3&4\\1&2&3&4\end{pmatrix}$; e) $x=\begin{pmatrix}1&2&3&4\\3&4&2&1\end{pmatrix}$; f) $x=\begin{pmatrix}1&2&3&4\\2&3&4&1\end{pmatrix}$.

Soluţie. Avem $\sigma^2=e$ şi deci $\sigma^{11}=\sigma^{10}\cdot\sigma=\sigma$. Ecuaţia devine $\sigma\cdot x=\tau$ şi de aici

$$x=\sigma^{-1}\tau=\begin{pmatrix}1&2&3&4\\2&1&3&4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&2&3&4\\1&3&4&2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&2&3&4\\2&3&4&1\end{pmatrix}.$$

10. Dacă $2x-y+z=0$, $x+y-z=0$ şi $y\neq 0$, să se calculeze valoarea raportului

$$\frac{x^2-2y^2+z^2}{x^2+y^2+z^2}.$$

a) 2; b) 4; c) $\frac{1}{2}$; d) $-\frac{1}{2}$; e) 3; f) 0.

Soluţie. Din $2x+z=y$ şi $x-z=-y$ rezultă $x=0$ şi $z=y$, deci $\dfrac{x^2-2y^2+z^2}{x^2+y^2+z^2}=\dfrac{-2y^2+y^2}{y^2+y^2}=-\dfrac{1}{2}$.

11. Valoarea raportului $\frac{\ln 15}{\lg 15}$ este

a) $\frac{e}{15}$; b) 15; c) 5; d) $\lg e$; e) $\ln 10$; f) 1.

Soluţie. Avem $\lg 15=\dfrac{\ln 15}{\ln 10}$ şi deci $\dfrac{\ln 15}{\lg 15}=\ln 10$.

12. Să se determine suma soluţiilor ecuaţiei $x^3+x+\hat{2}=\hat{0}$ în $\mathbb{Z}_6$.

a) $\hat{0}$; b) $\hat{4}$; c) $\hat{5}$; d) $\hat{1}$; e) $\hat{3}$; f) $\hat{2}$.

Soluţie. Observăm că $\hat{2}$ verifică ecuaţia $x^3+x+\hat{2}=0$. Aplicăm schema lui Horner şi obţinem

	x^3	x^2	x^1	x^0
	$\hat{1}$	$\hat{0}$	$\hat{1}$	$\hat{2}$
$\hat{2}$	$\hat{1}$	$\hat{2}$	$\hat{5}$	$\hat{0}$

Deci $x^3+x+\hat{2}=(x-\hat{2})(x^2+\hat{2}x+\hat{5})$. Prin încercări cu elementele din $\mathbb{Z}_6$ deducem că $x^2+\hat{2}x+\hat{5}=\hat{0}$ nu are soluţii. Deci singura soluţie este $\hat{2}$.

13. Robinetul A umple un rezervor gol în două ore, iar robinetul B umple acelaşi rezervor în patru ore. În câte minute vor umple acelaşi rezervor gol robinetele A şi B curgând împreună ?

a) 40 min; b) 80 min; c) 100 min; d) 360 min; e) 180 min; f) 60 min.

Soluţie. Într-o oră primul robinet umple $\frac{1}{2}$ din bazin iar al doilea umple $\frac{1}{4}$ din bazin. Ambele robinete umplu bazinul în $\frac{1}{\frac{1}{2}+\frac{1}{4}}$ ore adică $\frac{4}{3}\cdot 60 = 80\,\text{min}$.

14. Câţi termeni raţionali sunt în dezvoltarea $\left(\sqrt{2}+\frac{1}{\sqrt[3]{2}}\right)^{25}$?

a) 6; b) 4; c) 5; d) 24; e) nici unul; f) 25.

Soluţie. Termenul general este $T_{k+1} = C_{25}^{k}(\sqrt{5})^{25-k}\cdot(\frac{1}{\sqrt[3]{2}})^{k} = C_{25}^{k}2^{\frac{5(15-k)}{6}}, k=\overline{0,25}$. Este necesar şi suficient ca $\frac{15-k}{6} = h \in \mathbb{Z}$ deci $k = 15-16h$. Cum $0 \le k \le 25$ avem $0 \le 15-6h \le 25 \Leftrightarrow -\frac{10}{6} \le h \le \frac{5}{2}$ deci $h \in \{-1,0,1,2\}$. Există deci patru termeni raţionali.

15. Să se determine m real dacă există o singură pereche (x,y) de numere reale astfel încât $y \ge x^2+m$ şi $x \ge y^2+m$.

a) nu există m; b) $m=\frac{1}{4}$; c) $m=0$; d) $m \ge \frac{1}{8}$; e) $m<\frac{1}{8}$; f) $m=1$.

Soluţie. Adunând relaţiile, obţinem

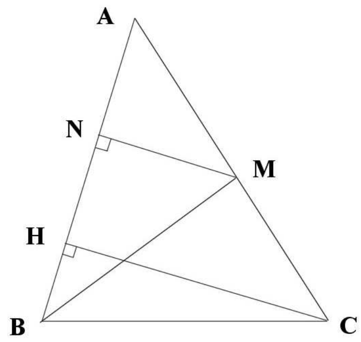
$$x^2+y^2-x-y+2m \le 0 \Leftrightarrow \left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\left(y-\frac{1}{2}\right)^2 \le -2m+\frac{1}{2}.$$

Dacă $-2m+\frac{1}{2}<0$ se obţine o contradicţie. Dacă $m=\frac{1}{4}$, atunci $(x-\frac{1}{2})^2+(y-\frac{1}{2})^2=0$. Deci $x=\frac{1}{2}, y=\frac{1}{2}$. Dacă $m<\frac{1}{4}$ alegem $x=y$, $x^2-x+m \le 0$ deci $x \in \left[\frac{1-\sqrt{1-4m}}{2}, \frac{1+\sqrt{1+4m}}{2}\right]$, deci există o infinitate de soluţii cu proprietatea din enunţ. Deci răspunsul este $m=\frac{1}{4}$.

1. Într-un triunghi ascuţitunghic ABC, înălţimea CH are aceeaşi lungime cu mediana BM. Să se determine măsura unghiului $\widehat{MBA}$.

   a) 60^o; b) 45^o; c) 40^o; d) 30^o; e) $67^o30'$; f) $22^o30'$.

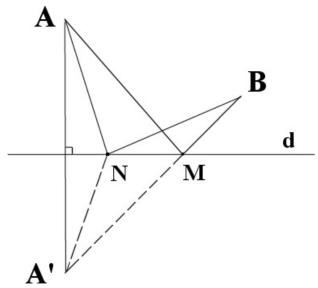
   Soluţie. Fie N proiecţia lui M pe AB. M este mijlocul lui AC, deci $MN = \frac{1}{2}CH$. Se observă că $MN||CH$ deoarece MN este linie mijlocie pentru $\triangle AHC$. Deci $MN = \frac{1}{2}BM$ şi deci $\sin(\widehat{MBA}) = \frac{MN}{BM} = \frac{MN}{CH} = \frac{1}{2}$ rezultă $\widehat{MBA} = 30°$.



2. În plan se consideră o dreaptă d şi două puncte distincte A, B situate de aceeaşi parte a lui d. Dacă pentru punctul $M \in d$ suma $AM+MB$ este minimă, atunci

   a) AM şi BM fac acelaşi unghi ascuţit cu d; b) $m(\widehat{AMB}) = 60^o$;
   c) $AM \equiv MB$; d) $AM \perp d$; e) $m(\widehat{AMB}) = 90^o$; f) $BM \perp d$.

   Soluţie. Fie A' simetricul lui A faţă de dreapta d şi fie M intersecţia lui $A'B$ cu d (vezi desenul). Dacă $N \in d$, atunci $NA = NA'$. Dar $MA = MA'$, deci folosind inegalitatea laturilor triunghiului în $\Delta A'NB$, avem $NA + NB = NA' + NB \geq A'B = AM + MB$, cu egalitate pentru $N = M$ (când triunghiul degenerează într-un segment).



3. Să se determine perioada principală pentru funcţia

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = \sin\tfrac{2x}{3} + \cos\tfrac{x}{2}.$$

   a) 4π; b) 3π; c) 12π; d) 9π; e) 2π; f) 6π.

   Soluţie. Fie $T > 0$ o perioadă pentru f. Avem $f(x+T) = f(x), \forall\, x \in \mathbb{R}$ şi deci $\sin(\frac{2x}{3}+\frac{2T}{3})+\cos(\frac{x}{2}+\frac{T}{2}) = \sin\frac{2x}{3} + \cos\frac{x}{2}$. Derivând de două ori, obţinem

$$\frac{4}{9}\sin\left(\frac{2x}{3}+\frac{2T}{3}\right) + \frac{1}{4}\cos\left(\frac{x}{2}+\frac{T}{2}\right) = \frac{4}{9}\sin\frac{2x}{3} + \frac{1}{4}\sin\frac{x}{2}.$$

   Rezultă $\sin(\frac{2x}{3}+\frac{2T}{3}) = \sin\frac{2x}{3}$ şi $\cos(\frac{x}{2}+\frac{T}{2}) = \cos\frac{x}{2}$ şi apoi $\frac{2T}{3} = 2k\pi, \frac{T}{2} = 2h\pi, k, h \in \mathbb{Z}$. Avem $T = 3\pi k = 4h\pi \Leftrightarrow 3k = 4h$. Minimul lui k este 4 (se obţine $h_0 = 3$) şi deci minimul lui T este 12π.

4. Să se determine mulţimea soluţiilor ecuaţiei $\sin x + \cos x = \sqrt{3}$.

a) $\left\{\frac{\pi}{6} + 2k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\right\}$; b) $\left\{\frac{\pi}{4} + k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\right\}$; c) $\left\{\frac{\pi}{4} + 2k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\right\}$; d) $\mathbb{R}$;
e) mulţimea vidă; f) $\frac{\pi}{6}$.

Soluţie. Avem succesiv: $\sin x + \cos x = \sqrt{3} \Leftrightarrow \frac{\sqrt{2}}{2}\sin x + \frac{\sqrt{2}}{2}\cos x = \frac{\sqrt{6}}{2} \Leftrightarrow \sin(x + \frac{\pi}{4}) = \frac{\sqrt{6}}{2} > 1$, şi prin urmare ecuaţia nu are soluţii. *Altfel.* Ridicând ecuaţia la pătrat, obţinem

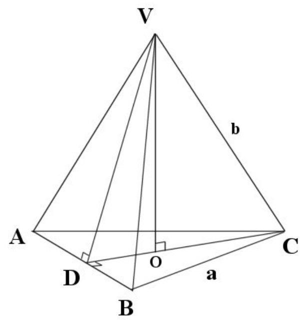
$$(\sin x + \cos x)^2 = 3 \Rightarrow 1 + 2\sin x\cos x = 3 \Leftrightarrow \sin 2x = 2 > 1,$$

deci ecuaţia nu are soluţii.

5. Într-o piramidă triunghiulară regulată cu vârful V, lungimea laturii bazei este a şi a muchiei laterale b $(0 < a < b\sqrt{3})$. Să se determine aria secţiunii duse printr-o muchie laterală şi prin înălţimea din V.

a) $\frac{a}{4}\sqrt{3b^2 - a^2}$; b) $\sqrt{3b^4 - a^4}$; c) $\frac{a}{3}\sqrt{3b^2 - a^2}$; d) $\frac{a}{2}\sqrt{3b^2 - a^2}$; e) $\frac{a}{2}\sqrt{a^2 + b^2}$; f) $\frac{ab}{2}$.

Soluţie. Secţiunea este triunghiul VDC (vezi desenul) a cărui bază este segmentul CD, de lungime egală cu înălţimea triunghiului echilateral de latură $a = AB$, deci $CD = \frac{a\sqrt{3}}{2}$. În triunghiul echilateral ABC avem $OC = \frac{2}{3}CD = \frac{a}{\sqrt{3}}$. Aplicând teorema lui Pitagora în triunghiul dreptunghic VOC, obţinem înălţimea triunghiului VDC, $VO = \sqrt{b^2 - \frac{a^2}{3}}$. Aria triunghiului de secţiune VDC este deci $\frac{1}{2} \cdot DC \cdot VO = \frac{a}{4}\sqrt{3b^2 - a^2}$.



6. Să se scrie sub formă trigonometrică numărul complex $z = \frac{\sqrt{3}+i}{\sqrt{3}-i}$.

a) $\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}$; b) $\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}$; c) $\sin\frac{\pi}{4} + i\cos\frac{\pi}{4}$; d) $\cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3}$;
e) $\sin\frac{\pi}{3} + i\cos\frac{\pi}{3}$; f) $\frac{1+i\sqrt{3}}{2}$.

Soluţie. Avem $z = \dfrac{\sqrt{3}+i}{\sqrt{3}-i} = \dfrac{(\sqrt{3}+i)^2}{(\sqrt{3}-i)(\sqrt{3}+i)} = \dfrac{3 + 2\sqrt{3}i - 1}{3+1} = \dfrac{1}{2} + i\dfrac{\sqrt{3}}{2} = \cos\dfrac{\pi}{3} + i\sin\dfrac{\pi}{3}$.

7. Să se calculeze $\arcsin\left(\sin\frac{5\pi}{6}\right)$.

a) $\frac{\pi}{6} + k\pi$; b) $\frac{\pi}{6}$; c) $\frac{5\pi}{6}$; d) $\frac{5\pi}{6} + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}$; e) $\frac{\pi}{3}$; f) $\frac{5\pi}{6} + 2k\pi$.

Soluţie. Avem succesiv $\arcsin(\sin\frac{5\pi}{6}) = \arcsin(\frac{1}{2}) = \frac{\pi}{6}$.

8. Să se determine $x \in (0, \pi)$ dacă $(x - 4)\sin 2x = 0$.

a) 4 şi $\frac{\pi}{2}$; b) $\frac{\pi}{2}$; c) $\frac{\pi}{3}$; d) $\frac{k\pi}{2}, \quad k \in \mathbb{Z}$; e) $\frac{3\pi}{2}$; f) 0.

Soluţie. Avem $(x-4)\sin 2x = 0 \Leftrightarrow x = 4$ sau $2x = k\pi, k \in \mathbb{Z}$. Dar $x \in (0, \pi)$, deci $x = \frac{\pi}{2}$.

9. Volumul trunchiului de con circular drept având razele bazelor 5 şi 2, iar generatoarea 5, este

a) 26π; b) 50π; c) 14π; d) 42π; e) 5π; f) 52π.

Soluţie. Avem $h = \sqrt{a^2 - (R-r)^2} = \sqrt{25 - 9} = 4$ şi deci $V = \frac{\pi h}{3}(R^2 + Rr + r^2) = 52\pi$.

10. Aria hexagonului convex regulat cu lungimea laturii $\frac{2}{\sqrt[4]{3}}$ este

a) 2; b) 18; c) $6\sqrt{3}$; d) 6; e) $\frac{9}{8}$; f) $2\sqrt{3}$.

Soluţie. Aria hexagonului de latură a este $S = 6\frac{a^2\sqrt{3}}{4}$. Pentru $a = \frac{2}{\sqrt[4]{3}}$ rezultă $S = 6 \cdot \frac{\frac{4}{\sqrt{3}} \cdot \sqrt{3}}{4} = 6$.

11. Un plan determină pe o sferă de rază R două calote sferice cu raportul ariilor $\frac{1}{3}$. Să se determine raza cercului de secţiune.

a) $R\sqrt{2}$; b) $\frac{R}{2}$; c) $\frac{R\sqrt{3}}{2}$; d) $\frac{R}{3}$; e) $\frac{R\sqrt{2}}{2}$; f) R.

Soluţie. Fie h înălţimea calotei mici. Avem $\frac{2\pi Rh}{2\pi R(2R-h)} = \frac{1}{3}$ şi deci $h = \frac{R}{2}$. Raza cercului de secţiune este $r = \sqrt{R^2 - \frac{R^2}{4}} = \frac{R\sqrt{3}}{2}$.

12. Să se calculeze raportul dintre aria cercului înscris şi aria cercului circumscris unui pătrat.

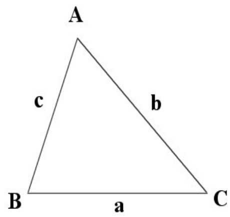
a) $\frac{\pi}{\sqrt{2}}$; b) $\frac{1}{4}$; c) $\sqrt{2}$; d) $\frac{1}{2}$; e) $\frac{1}{\sqrt{2}}$; f) 2.

Soluţie. Dacă latura pătratului este a, atunci razele celor două cercuri sunt $\frac{a}{2}$ şi $\frac{a\sqrt{2}}{2}$ iar raportul este $\frac{\pi(\frac{a}{2})^2}{\pi(\frac{a\sqrt{2}}{2})^2} = \frac{1}{2}$.

13. Dacă într-un triunghi ABC avem $\sin A = \sin B + \sin C$, atunci

a) triunghiul este isoscel; b) $m(\hat{A}) = 105^o$; c) triunghiul este dreptunghic;
d) triunghiul este echilateral; e) nu există un astfel de triunghi; f) $m(\hat{A}) = 75^o$.

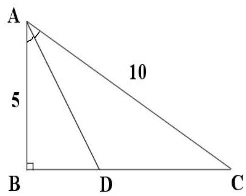
Soluţie. Fie a, b, c laturile triunghiului (vezi desenul). Din teorema sinusului $\dfrac{a}{\sin A} = \dfrac{b}{\sin B} = \dfrac{c}{\sin C}$, rezultă egalitatea $\dfrac{a}{\sin A} = \dfrac{b+c}{\sin B + \sin C}$, deci relaţia din enunţ devine $a = b + c$, ceea ce contrazice inegalitatea triunghiului $a < b + c$. Deci nu există un astfel de triunghi.



14. Fie un triunghi ABC cu $AB = 5, AC = 10$ şi $m(\widehat{BAC}) = 60^o$.
Să se calculeze lungimea bisectoarei din A.

a) 3; *b*) 4; c) $\frac{10\sqrt{3}}{3}$; d) $5\sqrt{3}$; e) 6; f) $\frac{14}{3}$.

Soluţie. Notând cu l_a lungimea bisectoarei AD din dusă din A şi $b = AC$, $c = AB$, are loc relaţia $l_a = \frac{2bc}{b+c} \cos \frac{A}{2}$. Obţinem $l_a = \frac{2 \cdot 5 \cdot 10}{15} \cos 30° = \frac{10\sqrt{3}}{3}$.

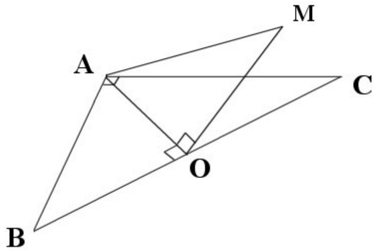


Altfel. Aplicăm teorema cosinusului în ΔABC şi obţinem $BC = \sqrt{5^2 + 10^2 - 2 \cdot 5 \cdot 10 \cdot \cos 60°} = \sqrt{75} = 5\sqrt{3}$. Dar numerele $5, 10, 5\sqrt{3}$ sunt pitagoreice, deci ΔABC este dreptunghic cu $\hat{B} = 90°$. Atunci, deoarece AD este bisectoare în triunghiul dreptunghic ABD (vezi desenul), avem $\widehat{BAD} = 30°$, deci $AD = \frac{AB}{\cos \widehat{BAD}} = \frac{5}{\sqrt{3}/2} = \frac{10}{\sqrt{3}} = \frac{10\sqrt{3}}{3}$.

15. Se consideră un triunghi dreptunghic isoscel ABC $(AB \equiv AC)$. Atunci mulţimea tuturor punctelor M din spaţiu pentru care are loc relaţia $MB^2 + MC^2 = 2MA^2$ este

a) sfera de diametru BC; b) reuniunea a două plane; c) ipotenuza $[BC]$; d) dreapta BC; e) un plan; f) mulţimea vidă.

Soluţie. Fie O mijlocul lui BC. Din teorema medianei, avem $MO^2 = \frac{MB^2+MC^2}{2} - \frac{BC^2}{4}$. Relaţia $MB^2 + MC^2 = 2MA^2$ se scrie $2MO^2 + \frac{BC^2}{2} = 2MA^2$. Folsind $\frac{BC}{2} = AO$, rezultă $MA^2 - MO^2 = \frac{BC^2}{4} = AO^2$, deci $MA^2 = MO^2 + AO^2$, care implică $MO \perp AO$.



Dar $AO \perp BC$, deci $AO \perp (MBC)$ şi locul geometric al punctului M este planul perpendicular în O pe AO.

1. Fie matricele $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ şi $B = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$. Să se determine numerele reale a şi b dacă $AB = BA$.

   a) $a = 2,\ b = 0$; b) $a = 1,\ b = 1$; c) $a = -2,\ b = 0$; d) $a = 2,\ b \in \mathbb{R}$; e) $a = 2,\ b = 2$; f) $a \in \mathbb{R},\ b = 0$.

   Soluţie. Avem $AB = BA \Leftrightarrow \begin{pmatrix} a & b+4 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & 2a+b \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \Leftrightarrow b + 4 = 2a + b$, adică $a = 2, b \in \mathbb{R}$.

2. Să se rezolve ecuaţia $9^x - 4 \cdot 3^x + 3 = 0$.

   a) 0; b) $\ln 3$; c) 1; d) 0 şi 1; e) -1; f) nu are soluţii.

   Soluţie. Notăm $3^x = y$ şi avem $y > 0$ si $y^2 - 4y + 3 = 0 \Leftrightarrow y \in \{1, 3\}$. Atunci $y = 1 \Leftrightarrow 3^x = 1 \Leftrightarrow x = 0$, sau $y = 3 \Leftrightarrow 3^x = 3 \Leftrightarrow x = 1$. În concluzie $x \in \{0, 1\}$.

3. Să se calculeze $\displaystyle\int_0^1 \frac{x}{x^2+1}\,dx$.

   a) 1; b) 2; c) 0; d) $\frac{1}{2}\ln 2$; e) -1; f) $\ln 2$.

   Soluţie. Avem $\int_0^1 \frac{x}{x^2+1}dx = \frac{1}{2}\ln(x^2+1)\Big|_0^1 = \frac{1}{2}\ln 2$.

4. Să se rezolve ecuaţia $\sqrt[3]{x} = x$.

   a) 1; b) 0; c) 0, 1, i; d) 0, 1; e) 1, -1; f) 0, 1, -1.

   Soluţie. Prin ridicare la cub obţinem $\sqrt[3]{x} = x \Leftrightarrow x = x^3 \Leftrightarrow x(x-1)(x+1) = 0 \Leftrightarrow x \in \{-1, 0, 1\}$.

5. Să se calculeze $C_6^4 + A_5^2$.

   a) 35; b) 102; c) 10; d) 15; e) 20; f) 25.

   Soluţie. Cum $C_6^4 = \frac{6\cdot 5}{1\cdot 2} = 15$ si $A_5^2 = 5 \cdot 4 = 20$, rezultă $C_6^4 + A_5^2 = 35$.

6. Să se determine abscisele punctelor de extrem local ale funcţiei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\quad f(x) = x^3 - 3x$.

   a) 0, -1; b) 0, $\sqrt{3}$, $-\sqrt{3}$; c) 0; d) 1, -1; e) $\sqrt{3}$; f) 1.

   Soluţie. Avem $f'(x) = 3x^2 - 3$ şi deci $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x \in \{-1, 1\}$. Cum semnul lui f' se schimbă în $x_1 = -1, x_2 = 1$ rezultă că abscisele căutate sunt -1 şi 1.

7. Să se aşeze în ordine crescătoare numerele 1, $\ln 2$, $\ln 3$, π.

   a) $\ln 2$, 1, $\ln 3$, π; b) 1, $\ln 2$, π, $\ln 3$; c) $\ln 2$, $\ln 3$, 1, π; d) 1, $\ln 3$, π, $\ln 2$; e) 1, $\ln 2$, $\ln 3$, π; f) 1, π, $\ln 2$, $\ln 3$.

   Soluţie. Avem $2 < e < 3 < e^\pi$ şi deci logaritmând şirul de inegalităţi $\ln 2 < 1 < \ln 3 < \pi$.

8. Să se determine m real dacă funcţia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} 2x + m, & x \le 1 \\ m^2 x + 2, & x > 1 \end{cases}$ este continuă pe $\mathbb{R}$.

   a) 2; b) nu există; c) 0 şi 1; d) -1; e) 1; f) 0.

   Soluţie. Funcţia f este continuă pe $(-\infty, 1) \cup (1, \infty)$. Continuitatea în $x = 1$ are loc d.n.d. $\lim\limits_{x \nearrow 1} f(x) = 2 + m = \lim\limits_{x \searrow 1} f(x) = m^2 + 2 = f(1) \Leftrightarrow m^2 + 2 = 2 + m \Rightarrow m \in \{0, 1\}$.

9. Să se calculeze $\sqrt{a^2 - b^2}$ pentru $a = 242,5$ şi $b = 46,5$.

   a) 196; b) $\sqrt{46640}$; c) 240,75; d) 283; e) 238; f) 238,25.

   Soluţie. Avem $\sqrt{a^2 - b^2} = \sqrt{(242.5 - 46.5)(242.5 + 46.5)} = \sqrt{196 \cdot 289} = \sqrt{14^2 \cdot 17^2} = 238$.

10. Să se determine m real dacă ecuaţia $x^2-(m+3)x+m^2=0$ are două soluţii reale şi distincte.

a) $m\in(-\infty,3)$; b) $m\in\mathbb{R}$; c) $m=-3$; d) $m\in(3,\infty)$; e) $m\in(-\infty,-1)$; f) $m\in(-1,3)$.

Soluţie. Condiţia este $\triangle>0$ adică

$$(m+3)^2-4m^2>0 \Leftrightarrow (m+3-2m)(3+m+2m)>0 \Leftrightarrow m\in(-1,3).$$

11. Fie funcţia $f:(-1,\infty)\to\mathbb{R},\quad f(x)=x\cdot\ln(x+1)$. Să se calculeze $f(1)+f'(0)$.

a) 0; b) $\ln 2$; c) 1; d) $1+\ln 2$; e) ∞; f) $\ln 3$.

Soluţie. Cum $f'(x)=\ln(x+1)+\frac{x}{x+1}$, rezultă $f'(0)+f(1)=\ln 1+0+\ln 2=\ln 2$.

12. Să se determine m real dacă $m\cdot\displaystyle\int_1^{\sqrt{2}} e^{mx^2+\ln x}dx=1$.

a) $\ln 2$; b) 2; c) 4; d) $\ln\frac{1}{2}$; e) 1; f) 3.

Soluţie.

Soluţie. Deoarece $e^{\ln x}=x$, folosind schimbarea de variabilă $y=mx^2$ rezultă

$$I=m\int_1^{\sqrt{2}} e^{mx^2}x\,dx=\frac{1}{2}\int_1^{\sqrt{2}} e^{mx^2}(mx^2)'dx=\frac{1}{2}e^{mx^2}\Big|_1^{\sqrt{2}}=\frac{1}{2}\left(e^{2m}-e^m\right),$$

deci, ţinând cont de faptul că $e^m>0,\ \forall m\in\mathbb{R}$, obţinem

$$\frac{1}{2}(e^{2m}-e^m)=1\Leftrightarrow(e^m)^2-e^m-2=0\Leftrightarrow e^m\in\{-1,2\}\cap(0,\infty)=\{2\}\Leftrightarrow e^m=2\Leftrightarrow m=\ln 2.$$

13. Să se calculeze

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1^2}{n^3+1^2}+\frac{2^2}{n^3+2^2}+\cdots+\frac{n^2}{n^3+n^2}\right).$$

a) nu există; b) 2; c) 1; d) 0; e) ∞; f) $\frac{1}{3}$.

Soluţie. Avem $\frac{k^2}{n^3+n^2}\le\frac{k^2}{n^3+k^2}\le\frac{k^2}{n^3+1}$ şi deci sumând pentru $k\in\{1,\cdots,n\}$, rezultă

$$\frac{n(n+1)(2n+1)}{6(n^2+1)}=\frac{\sum_{k=1}^n k^2}{n^3+n^2}\le\sum_{k=1}^n\frac{k^2}{n^3+k^2}\le\frac{\sum_{k=1}^n k^2}{n^3+1}=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6(n^3+1)}.$$

Dar

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n(n+1)(2n+1)}{6(n^3+1)}=\lim_{n\to\infty}\frac{n(n+1)(2n+1)}{6(n^3+n^2)}=\frac{1}{3},$$

deci conform criteriului cleştelui, obţinem $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\sum_1^n\frac{k^2}{n^3+k^2}=\frac{1}{3}$.

14. Să se rezolve ecuaţia $\begin{vmatrix}1&x&x\\x&1&x\\x&x&1\end{vmatrix}=0$.

a) $-\frac{1}{2}$, 1; b) $-\frac{1}{2}$; c) 0; d) 1; e) $\frac{1}{2}$, 1; f) $-\frac{1}{2}$, 0.

Soluţie. Avem

$$\begin{vmatrix}1&x&x\\x&1&x\\x&x&1\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}2x+1&2x+1&2x+1\\x&1&x\\x&x&1\end{vmatrix}=(2x+1)\begin{vmatrix}1&0&0\\x&1-x&0\\x&0&1-x\end{vmatrix}=(2x+1)(1-x)^2.$$

Deci ecuaţia se rescrie $(x-1)^2\left(x+\frac{1}{2}\right)=0\Leftrightarrow x\in\left\{-\frac{1}{2},1\right\}$.

15. Să se calculeze $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^3-5x^2+3x+9}{x^3-4x^2-3x+18}$.

a) $\frac{5}{3}$; b) $-\infty$; c) $\frac{4}{5}$; d) 0; e) $\frac{4}{3}$; f) $-\frac{3}{2}$.

Soluţie. Avem $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^3-5x^2+3x+9}{x^3-4x^2-3x+18}=\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{(x-3)^2(x+1)}{(x-3)^2(x+2)}=\dfrac{4}{5}$.

16. Să se calculeze valoarea expresiei $E=\dfrac{x_2+x_3}{x_1}+\dfrac{x_1+x_3}{x_2}+\dfrac{x_1+x_2}{x_3}$, unde $x_1,\ x_2,\ x_3$ sunt soluţiile ecuaţiei $x^3-6x^2+x+2=0$.

a) -3; b) -1; c) -6; d) 3; e) 0; f) 1.

Soluţie. Folosim relaţiile lui Viete: $x_1+x_2+x_3=6, x_1x_2+x_1x_3+x_2x_3=1, x_1x_2x_3=-2$. Rezultă $x_2+x_3=6-x_1$ şi $\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+\frac{1}{x_3}=\frac{x_2x_3+x_1x_3+x_1x_2}{x_1x_2x_3}=-\frac{1}{2}$. Atunci

$$\begin{aligned} E &= \tfrac{x_2+x_3}{x_1}+\tfrac{x_1+x_3}{x_2}+\tfrac{x_1+x_2}{x_3}=\tfrac{6-x_1}{x_1}+\tfrac{6-x_2}{x_2}+\tfrac{6-x_3}{x_3}=\\ &=6\left(\tfrac{1}{x_1}+\tfrac{1}{x_2}+\tfrac{1}{x_3}\right)-3=6\left(-\tfrac{1}{2}\right)-3=-6. \end{aligned}$$

17. Să se determine cea mai mică valoare posibilă a integralei $\displaystyle\int_{-1}^{1}(x^2-a-bx)^2\mathrm{d}x$ pentru a, b reale.

a) $\frac{8}{45}$; b) $\frac{1}{45}$; c) $\frac{4}{5}$; d) 1; e) 8; f) $\frac{5}{4}$.

Soluţie.

$$\begin{aligned} I &= \textstyle\int_{-1}^{1}(x^4-2bx^3+(b^2-2a)x^2+2abx+a^2)dx=\frac{2}{5}+\frac{2(b^2-2a)}{3}+2a^2=\\ &=2a^2-\tfrac{4a}{3}+\tfrac{2}{5}+\tfrac{2b^2}{3}=2\left(a-\tfrac{1}{3}\right)^2+\tfrac{2b^2}{3}+\tfrac{8}{45}\geq\tfrac{8}{45}, \end{aligned}$$

şi deci minimul căutat este $\frac{8}{45}$.

18. Se consideră funcţia $f:[0,\infty)\to\mathbb{R},\quad f(x)=\mathrm{e}^{\sqrt{x}}+\mathrm{e}^{-\sqrt{x}}$. Să se calculeze

$$\lim_{n\to\infty}\lim_{x\searrow 0}f^{(n)}(x).$$

a) 2; b) 0; c) e; d) 1; e) $\frac{\mathrm{e}^2+1}{\mathrm{e}}$; f) nu există.

Soluţie. Dezvoltăm în serie funcţia exponenţiala[1] $e^x=\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty}\frac{x^k}{k!}$. Rezultă

$$f(x)=e^{\sqrt{x}}+e^{-\sqrt{x}}=\sum_{0}^{\infty}\frac{(\sqrt{x})^k+(-\sqrt{x})^k}{k!}=2\left(1+\frac{x}{2!}+\frac{x^2}{4!}+\cdots+\frac{x^n}{(2n)!}+\cdots\right),$$

deci $f^{(n)}(x)=2\left(\frac{n!}{(2n)!}+\frac{(n+1)n\cdots 2}{(2n+2)}x+\cdots\right)$. Trecând la limită după x obţinem

$$\lim_{x\to 0}f^{(n)}(x)=\frac{2n!}{(2n)!}=\frac{2n!}{(2\cdot 4\cdots 2n)(1\cdot 3\cdots(2n-1))}=\frac{2n!}{2^n n!(2n-1)!!}=\frac{1}{2^{n-1}(2n-1)!!}$$

şi deci $\lim\limits_{n\to\infty}(\lim\limits_{x\to 0}f^{(n)}(x))=0$.

[1] Se presupune că elevii cunosc dezvoltarea în serie a funcţiei exponenţiale.

1. Fie s suma pătratelor lungimilor laturilor unui paralelogram şi d suma pătratelor lungimilor diagonalelor sale. Atunci

   a) $s = 2d$; b) $s < d$; c) $s = 4d$; d) $s > d$; e) $s = 3d$; f) $s = d$.

   Soluţie. Fie $ABCD$ paralelogramul din enunţ, iar O punctul de intersecţie al diagonalelor. Atunci, O fiind mijlocul diagonalei BD, folosind teorema medianei în $\triangle ABD$ pentru mediana OA rezultă

   $$OA^2 = \frac{AB^2 + AD^2}{2} - \frac{BD^2}{4} \Leftrightarrow \frac{AC^2}{4} = \frac{AB^2 + AD^2}{2} - \frac{BD^2}{4} \Leftrightarrow$$
   $$AC^2 + BD^2 = 2(AB^2 + AD^2) = AB^2 + AD^2 + BC^2 + CD^2.$$

   Prin urmare $s = d$.

2. Într-un triunghi dreptunghic ($\hat{A} = 90^0$) se cunoaşte cateta $AB = 3$ şi $\hat{C} = 60^0$. Calculaţi perimetrul triunghiului.

   a) $4 - \sqrt{3}$; b) $4\sqrt{3}$; c) $1 + \sqrt{3}$; d) $3(1 + \sqrt{3})$; e) $3(4 - \sqrt{3})$; f) 10.

   Soluţie. Avem $AC = 3\operatorname{ctg} 60° = \sqrt{3}$ şi $BC = \frac{AB}{\sin 60°} = 2\sqrt{3}$, deci perimetrul este $3 + \sqrt{3} + 2\sqrt{3} = 3(1 + \sqrt{3})$.

3. Unghiurile exterioare ale unui triunghi au măsurile α, β, γ. Dacă $\alpha + \beta = 3\gamma$, atunci triunghiul este

   a) echilateral; b) cu laturile în progresie aritmetică; c) isoscel; d) cu un unghi de 120^0; e) ascuţitunghic; f) dreptunghic.

   Soluţie. Fie A, B, C măsurile interioare ale unghiurilor triunghiului. Atunci $\gamma = A + B, \beta = A + C, \alpha = B + C$. Sumând cele trei egalităţi termen cu termen, obţinem $\alpha + \beta + \gamma = 2(A + B + C) = 360°$. Folosind relaţia din enunţ $\alpha + \beta = 3\gamma$, rezultă $4\gamma = 360° \Rightarrow \gamma = 90°$, deci triunghiul este dreptunghic.

4. Dacă $\alpha \in (\frac{\pi}{2}, \pi)$ şi $\sin \alpha = \frac{1}{3}$, atunci $\operatorname{tg} \alpha$ este

   a) $-\frac{1}{2}$; b) $\frac{\sqrt{2}}{4}$; c) $-\frac{\sqrt{2}}{4}$; d) $\sqrt{3}$; e) $-\sqrt{3}$; f) $\sqrt{2}$.

   Soluţie. Cum $\alpha \in \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right) \Rightarrow \cos \alpha < 0$. Avem $\cos \alpha = -\sqrt{1 - \sin^2 \alpha} = -\frac{2\sqrt{2}}{3}$ si $\operatorname{tg} \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = -\frac{\sqrt{2}}{4}$.

5. Prin secţionarea unei piramide patrulatere regulate cu un plan paralel cu baza se obţine un trunchi de piramidă în care raportul dintre lungimile laturilor bazei mici şi bazei mari este $\frac{3}{5}$. Ştiind că volumul piramidei este 125, volumul trunchiului de piramidă este

   a) 105; b) 98; c) $48\sqrt{2}$; d) 96; e) 102; f) 100.

   Soluţie. Piramidele sunt asemenea şi raportul volumelor este $\frac{V_1}{V_2} = \left(\frac{3}{5}\right)^3$. Daca $V_2 = 125 \Rightarrow V_1 = 27$ şi volumul trunchiului de piramidă este $V_1 - V_2 = 98$.

6. Să se determine suma lungimilor bazelor unui trapez, ştiind că linia sa mijlocie are lungimea 15.

   a) 18; b) 20; c) 16; d) 30; e) 15; f) 24.

   Soluţie. Avem $m = \frac{b+B}{2} = 15$ (unde $m =$linia mijlocie, $b =$baza mică, $B =$baza mare), deci $b + B = 30$.

7. Dacă $\sin^2 15^0 + \cos^2 15^0 = (y + 1)(y - 2)$, $y > 0$, atunci y este egal cu

   a) $\frac{1-\sqrt{13}}{2}$; b) $\frac{1}{7}$; c) $\frac{\sqrt{2}}{2}$; d) $\sqrt{13}$; e) $\sin 15^0$; f) $\frac{1+\sqrt{13}}{2}$.

   Soluţie. Avem $(y + 1)(y - 2) = 1 \Leftrightarrow y^2 - y - 3 = 0 \Leftrightarrow y = \frac{1 \pm \sqrt{13}}{2}$. Cum $y > 0$, rezultă $y = \frac{1+\sqrt{13}}{2}$.

8. Un con şi un cilindru au acelaşi volum. Ştiind că înălţimile lor sunt egale, calculaţi raportul dintre raza conului şi raza cilindrului.

   a) $\frac{4}{3}$; b) $\frac{5}{4}$; c) $\sqrt{3}$; d) $\frac{3}{2}$; e) $\sqrt{5}$; f) $\sqrt{2}$.

   Soluţie. Avem $R_1 =$raza conului, $R_2 =$raza cilindrului $\Rightarrow V_1 = \frac{\pi R_1^2 h}{3} = \pi R_2^2 h \Rightarrow \left(\frac{R_1}{R_2}\right)^2 = 3 \Rightarrow \frac{R_1}{R_2} = \sqrt{3}$.

9. Aflaţi aria unui trapez isoscel având baza mică 6, baza mare 8 şi diagonalele perpendiculare.

a) $14\sqrt{2}$; b) 25; c) 49; d) 36; e) 64; f) $12\sqrt{3}$.

Soluţie. Fie M si N mijloacele bazelor mici şi respectiv mari (AD *si* BC) ale trapezului isoscel $ABCD$. Dacă O este punctul de intersecţie al diagonalelor, atunci M, O, N sunt coliniare, iar triunghiurile AOD şi BOC sunt triunghiuri dreptunghice isoscele cu vârful unghiului drept in O. Avem $OM = \frac{AD}{2} = 3, ON = \frac{BC}{2} = 4$. Deci $MN = 7$. Cum MN este înălţime, rezultă

$$S = \frac{(AB + DC)}{2} MN = 7 \cdot 7 = 49.$$

10. Valoarea expresiei $E = \cos\frac{2\pi}{7} + \cos\frac{4\pi}{7} + \cos\frac{6\pi}{7}$ este

a) $-\frac{\sqrt{2}}{2}$; b) $-\frac{1}{2}$; c) $\frac{\sqrt{2}}{2}$; d) $\sqrt{3}$; e) $\frac{1}{2}$; f) 1.

Soluţie. Avem

$$\begin{aligned} 2E\sin\tfrac{\pi}{7} \quad &= 2\sin\tfrac{\pi}{7}\cos\tfrac{2\pi}{7} + 2\sin\tfrac{\pi}{7}\cos\tfrac{4\pi}{7} + 2\sin\tfrac{\pi}{7}\cos\tfrac{6\pi}{7} = \\ &= \sin\tfrac{3\pi}{7} - \sin\tfrac{\pi}{7} + \sin\tfrac{5\pi}{7} - \sin\tfrac{3\pi}{7} + \sin\pi - \sin\tfrac{5\pi}{7} = \\ &= -\sin\tfrac{\pi}{7} + \sin\pi = -\sin\tfrac{\pi}{7}. \end{aligned}$$

Deci $2E\sin\frac{\pi}{7} = -\sin\frac{\pi}{7} \Rightarrow E = -\frac{1}{2}$.

11. Se consideră un patrulater convex $ABCD$ în care $AB \equiv CD$. Se cere locul geometric al punctelor M din planul patrulaterului ce satisfac relaţia $MA^2 + MB^2 = MC^2 + MD^2$.

a) un cerc tangent la AB şi CD; b) o semidreaptă; c) o dreaptă; d) două drepte paralele; e) un singur punct; f) mulţimea vidă.

Soluţie. Fie E mijlocul lui AB, F mijlocul lui CD. Din teorema medianei pentru mediana ME în triunghiul MAB şi mediana MF în triunghiul MCD, avem

$$ME^2 = \frac{MA^2 + MB^2}{2} - \frac{AB^2}{4},\ MF^2 = \frac{MC^2 + MD^2}{2} - \frac{CD^2}{4}.$$

Dar $MA^2 + MB^2 = MC^2 + MD^2$ si $AB = DC$, deci $ME = MF$. Reciproc, pentru un punct M ales astfel încât $ME = MF$ se arată că are loc egalitatea din enunţ. Prin urmare locul geometric căutat este mediatoarea segmentului EF.

12. Fie O intersecţia diagonalelor AC şi BD ale patrulaterului convex $ABCD$. Dacă $AO = 2OC$ şi $OB = 2OD$, să se calculeze raportul $\frac{\text{aria }(ABCD)}{\text{aria }(DOC)}$.

a) 5; b) 7; c) 8; d) 4; e) 9; f) 3.

Soluţie. Avem $\widehat{AOB} = \alpha$, $OC = x$, $OD = y$. Rezultă $m(\widehat{AOD}) = \pi - \alpha$ şi $S_{AOB} = \frac{2x2y\sin\alpha}{2} = 2xy\sin\alpha$, $S_{AOD} = S_{BOC} = xy\sin\alpha$, $S_{DOC} = \frac{xy\sin\alpha}{2}$. In final obţinem $S_{ABCD} = \frac{9}{2}xy\sin\alpha = 9S_{DOC}$, deci $\frac{S_{ABCD}}{S_{DOC}} = 9$.

13. Într-un cerc de rază R se înscrie un triunghi echilateral. Aria triunghiului este

a) $\frac{R^2\sqrt{3}}{6}$; b) $\frac{3R^2\sqrt{3}}{4}$; c) $\frac{R^2\sqrt{3}}{2}$; d) $\frac{3R^2\sqrt{3}}{2}$; e) $3R^2\sqrt{3}$; f) $\frac{2R^2\sqrt{3}}{3}$.

Soluţie. Avem $a = R\sqrt{3}$, deci $S = \frac{a^2\sqrt{3}}{4} = \frac{3\sqrt{3}R^2}{4}$.

14. Fie O punctul de intersecţie al mediatoarelor unui triunghi oarecare. Atunci O este

a) ortocentrul; b) situat în exteriorul triunghiului; c) un vârf al triunghiului;
d) egal depărtat de laturile triunghiului; e) centrul de greutate; f) egal depărtat de vârfurile triunghiului.

Soluţie. Punctul O este egal depărtat de vârfurile triunghiului.

15. Raportul dintre măsura unui unghi înscris într-un cerc şi măsura arcului cuprins între laturile sale este

a) $\frac{1}{3}$; b) $\frac{1}{4}$; c) $\frac{3}{4}$; d) 1; e) $\frac{1}{2}$; f) $\frac{2}{3}$.

Soluţie. Raportul este $\frac{1}{2}$.

16. Volumul piramidei determinate de trei muchii concurente ale unui cub de latură a este

a) $\frac{a^3\sqrt{3}}{3}$; b) $\frac{2a^3}{3}$; c) $\frac{a^3}{2}$; d) $a^3\sqrt{2}$; e) $\frac{a^3}{6}$; f) $\frac{a^3}{3}$.

Soluţie. Volumul este $V = \frac{\frac{a^2}{2}a}{3} = \frac{a^3}{6}$.

17. Dacă în triunghiul ABC avem $AB = \sqrt{13},\ BC = 3,\ \hat{C} = 60^0$, atunci

a) $AC = 2$; b) $AC = 3\sqrt{3}$; c) $AC = 4\sqrt{2}$; d) $AC = 3\sqrt{2}$; e) $AC = 4\sqrt{3}$;
f) $AC = 4$.

Soluţie. Din teorema cosinusului pentru unghiul $\widehat{B}$ în triunghiul ABC, obţinem $AB^2 = AC^2 + BC^2 - 2 \cdot AC \cdot BC \cdot \cos 60°$, deci notând $AC = x > 0$, rezultă

$$13 = x^2 + 9 - 3x \Leftrightarrow x^2 - 3x - 4 = 0 \Leftrightarrow x \in \{-1, 4\}.$$

Convine doar soluţia pozitivă, deci $AC = x = 4$.

18. Să se calculeze $z = \left(\frac{1+\mathrm{i}\sqrt{3}}{1-\mathrm{i}}\right)^6$

Soluţie. Scriem numărătorul şi numitorul fracţiei in forma trigonometrică:

$$1 + i\sqrt{3} = 2\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right),\ 1 - i = \sqrt{2}\left(\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{-\pi}{4}\right)\right),$$

deci folosind formula lui Moivre, rezultă

$$z = \frac{2^6(\cos 2\pi + i\sin 2\pi)}{\sqrt{2}^6\left(\cos\left(-\frac{3\pi}{2}\right) + i\sin\left(-\frac{3\pi}{2}\right)\right)} = \frac{8}{i} = -8i.$$

Altfel, algebric, folosim binomul lui Newton, avem $(1+i\sqrt{3})^3 = -8$, iar $(1-i)^2 = -2i$. Atunci $\left[\frac{(1+i\sqrt{3})}{1-i}\right]^6 = \frac{(-8)^2}{(-2i)^3} = \frac{64}{8i} = \frac{8}{i} = -8i$.

1. Fie curba de ecuaţie $y = 2x^3 + 4x$. Aflaţi $m \in \mathbb{R}$ ştiind că dreapta de ecuaţie $y = mx + 4$ este tangentă la curbă.

   a) $m = 10$; b) $m = -1$; c) $m = 8$; d) $m = 2$; e) $m = 12$; f) $m = -6$.

   Soluţie. Eliminând y, rezultă $2x^3 + 4x = mx + 4$. Este necesar şi suficient ca ecuaţia $f(x) = 2x^3 + (4 - m)x - 4 = 0$ sa aibă o radacină multiplă reală. Utilizând relaţiile lui Viete avem $x_1 + x_2 + x_3 = 0; x_1x_2x_3 = 2; x_1 = x_2$. Obtinem $x_3 = -2x_1$ si $-2x_1^3 = 2$. Avem deci $x_1 = -1$. Deoarece $f(-1) = 0$, avem $m = 10$.

2. Fie N numărul de soluţii reale ale ecuaţiei $2^x = x^2$. Decideţi:

   a) $N = 0$; b) $N = 3$; c) ecuaţia are numai soluţii întregi; d) $N = 4$; e) $N = 1$; f) $N = 2$.

   Soluţie. Distingem cazurile $x \leq 0$ si $x > 0$.
   1. Considerăm mai intâi $x \leq 0$. Notăm $y = -x \geq 0$ şi deci $1 = y^2 2^y$. Funcţia $f : [0, \infty) \to \mathbb{R}, f(y) = y^2 2^y - 1$ este strict crescătoare şi deci injectivă. Cum $f(0) = -1 < 0$ şi $f(1) = 1 > 0$, rezultă f are soluţie unică, $y_1 \in (0, 1)$. Deci ecuaţia data are o singură soluţie în intervalul $(-\infty, 0], x_1 = -y_1 < 0$.
   2. Pentru $x > 0$, ecuaţia se scrie $x \ln 2 = 2 \ln x$. Fie $g : (0, \infty) \to \mathbb{R}, g(x) = x \ln 2 - 2 \ln x$, deci $g'(x) = \ln 2 - \frac{2}{x}$. Avem $g'(x_0) = 0 \Rightarrow x_0 = \frac{2}{\ln 2}$. Pe de alta parte, $\lim_{x\to 0} g(x) = \infty$ si $\lim_{x\to\infty} g(x) = \infty$. Se observă că $g(2) = 0, g(4) = 0$ iar $x_0 \in (2, 4)$ este singură radacină a derivatei g'. Deci folosind şirul lui Rolle, se deduce că $\{2, 4\}$ sunt singurele soluţii ale ecuaţiei $g(x) = 0$ în intervalul $(0, \infty)$. Prin urmare ecuaţia $2^x = x^2$ are 3 rădăcini reale.

3. Să se calculeze $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1}{x} \displaystyle\int_{x+3}^{2x+3} t\sqrt{t^3 + 9}\ dt$.

   a) 14; b) ∞; c) 10; d) 20; e) 18; f) 0.

   Soluţie. Funcţia continuă $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(t) = t\sqrt{t^3 + 9}$ admite primitive F. Deci $\lim_{x\to 0} \frac{1}{x} \int_{x+3}^{2x+3} f(t)dt = \lim_{x\to 0} \frac{F(2x+3)-F(x+3)}{x}$, deci folosind regula l'Hospital (cazul 0/0), rezultă

   $$\lim_{x\to 0} \frac{2f(2x + 3) - f(x + 3)}{1} = 2f(3) - f(3) = 3\sqrt{3^3 + 9} = 18.$$

4. Fie $e_1 = (1, -1, 0)$ şi $e_2 = (1, 1, 0)$. Să se precizeze pentru care din vectorii e_3 de mai jos, vectorii e_1, e_2, e_3 sunt liniar independenţi în $\mathbb{R}^3$.

   a) $e_3 = (2, -2, 0)$; b) $e_3 = (-2, 2, 0)$; c) $e_3 = (0, 0, 1)$; d) $e_3 = (5, 5, 0)$;
   e) $e_3 = (0, 0, 0)$; f) $e_3 = (2, 3, 0)$.

   Soluţie. Dacă $e_3 = (a, b, c)$, atunci condiţia $\begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ a & b & c \end{vmatrix} \neq 0$ implică $c \neq 0$, deci răspunsul corect este $(0, 0, 1)$.

5. Soluţiile x_1, x_2, x_3 ale ecuaţiei $x^3 - 3x - 10 = 0$ satisfac condiţiile

   a) $x_1 = x_2 \in \mathbb{C}\backslash\mathbb{R}, x_3 \in \mathbb{C}$; b) $x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{C}\backslash\mathbb{R}$; c) $x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{R}$;
   d) $x_1 \in \mathbb{R}, x_2, x_3 \in \mathbb{C}\backslash \mathbb{R}$; e) $x_1, x_2 \in \mathbb{R}, x_3 \in \mathbb{C}\backslash\mathbb{R}$; f) $x_1 = x_2 \in \mathbb{R}, x_3 \in \mathbb{C}$.

   Soluţie. Pentru ecuaţia $f(x) = x^3 - 3x - 10 = 0$, întocmim sirul lui Rolle. Avem $f'(x) = 3x^2 - 3$ si deci $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x \in \{-1, 1\}$. Dar

   $$\lim_{x\to -\infty} f(x) = -\infty < 0, \lim_{x\to\infty} f(x) = \infty, \quad f(-1) = -8 < 0, f(1) = -12 < 0,$$

   deci $x_1 \in \mathbb{R}$ şi $x_2, x_3 \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$.

6. Să se determine parametrul $m \in \mathbb{R}$ dacă graficul funcţiei $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^3 - 2(m+1)x^2 + (m^2 + 2m + 2)x - 2m$, intersectează axa Ox în trei puncte distincte.

a) $m \in \left(-\infty, -2 - 2\sqrt{2}\right) \cup \left(-2 + 2\sqrt{2}, \infty\right)$; b) $m \neq 1$;
c) $m \in \left(-2 - 2\sqrt{2}, -2 + 2\sqrt{2}\right)$;
d) $m \in \left(-\infty, -2 - 2\sqrt{2}\right) \cup \left(-2 + 2\sqrt{2}, 1\right) \cup (1, \infty)$;
e) nu există m; f) $m \neq -2 + 2\sqrt{2}$.

Soluţie. Rezolvăm ecuaţia $f(x) = 0$. Se observa ca $x = m$ este soluţie, deci $f(x) = (x - m)(x^2 - mx - 2x + 2) = (x - m)(x^2 - x(m + 2) + 2)$. Graficul intersectează axa Ox in trei puncte distincte dacă ecuaţia $f(x) = 0$ are 3 rădăcini distincte. Avem $x_1 = m$ (o radacină) iar pentru $x^2 - x(m + 2) + 2 = 0$ impunem condiţiile: $\triangle > 0$ şi $x_1 = m$ să nu fie radacină. Obţinem $\triangle = (m + 2)^2 - 8 > 0 \Leftrightarrow (m + 2)^2 > 8 \Leftrightarrow |m + 2| > 2\sqrt{2} \Leftrightarrow m \in (-\infty, -2 - 2\sqrt{2}) \cup (-2 + 2\sqrt{2}, \infty)$. Pe de altă parte, $x = m$ nu este rădăcina pentru ecuaţia de grad 2 d.n.d. $f(m) \neq x^2 - x(m + 2) + 2 \Leftrightarrow m \neq 1$. Deci soluţia finală este $m \in (-\infty, -2 - 2\sqrt{2}) \cup (-2 + 2\sqrt{2}, 1) \cup (1, \infty)$.

7. Să se găsească $\mathbf{l} = \lim\limits_{n \to \infty} \left(n + 2 - \sqrt{n^2 + n + 3}\right)$.

a) $\mathbf{l} = -1$; b) nu există; c) $\mathbf{l} = \frac{3}{2}$; d) $\mathbf{l} = \infty$; e) $\mathbf{l} = 0$; f) $\mathbf{l} = 1$.

Soluţie. Raţionalizând obţinem

$$\lim_{n \to \infty} \frac{(n+2)^2 - (n^2 + n + 3)}{n + 2 + \sqrt{n^2 + n + 3}} = \lim_{n \to \infty} \frac{3n + 1}{n + 2 + \sqrt{n^2 + n + 3}} = \frac{3}{2}.$$

8. Primitivele $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{\sin^2 x \cdot \cos^2 x}$ sunt

a) $x + \operatorname{tg} x + \mathbf{C}$; b) $\operatorname{tg} x - \operatorname{ctg} x + \mathbf{C}$; c) $x + \operatorname{ctg} x + \mathbf{C}$; d) $\operatorname{tg} x + \operatorname{ctg} x + \mathbf{C}$; e) $\frac{1}{\cos^2 x} + \mathbf{C}$; f) $\frac{1}{\sin^2 x} + \mathbf{C}$.

Soluţie. Folosind formula $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$, putem scrie

$$\int \frac{dx}{\sin^2 x \cos^2 x} = \int \frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{\sin^2 x \cos^2 x} dx = \int \frac{1}{\cos^2 x} dx + \int \frac{1}{sin^2 x} dx = \operatorname{tg} x - \operatorname{ctg} x + c.$$

9. Fie $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \cos(x - 1) + e^{x^2}$. Să se calculeze $f'(1)$.
a) 1; b) 0; c) e^2; d) $2\mathrm{e}$; e) e; f) $\frac{1}{\mathrm{e}}$.

Soluţie. Avem $f'(x) = -\sin(x - 1) + 2xe^{x^2}$, deci $f'(1) = 2e$.

10. Să se rezolve inecuaţia $\dfrac{1 - x}{x} > 0$.

a) $(0, 1)$; b) $(-1, 0)$; c) $[-1, 1]$; d) nu are soluţii; e) $[0, 1)$; f) $(-\infty, 0) \cup (1, \infty)$.

Soluţie. Avem $\frac{1-x}{x} > 0 \Leftrightarrow \frac{x-1}{x} < 0 \Leftrightarrow x \in (0, 1)$.

11. Pe mulţimea $\mathbb{R}^3$ se defineşte legea de compoziţie $(x_1, y_1, z_1) \star (x_2, y_2, z_2) = (x_1 + x_2, y_1 + y_2, z_1 \cdot z_2)$. Găsiţi elementul neutru.

a) $(1, 0, 1)$; b) $(0, 1, 0)$; c) $(0, 1, 1)$; d) $(1, 1, 0)$; e) $(1, 0, 0)$; f) $(0, 0, 1)$.

Soluţie. Aratăm că există $(e_1, e_2, e_3) \in \mathbb{R}^3$ astfel încât pentru orice $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ avem $(e_1, e_2, e_3) \star (x, y, z) = (x, y, z) \star (e_1, e_2, e_3) = (x, y, z)$, adică $e_1 + x = x, e_2 + y = y, e_3 z = z \Rightarrow e_1 = 0, e_2 = 0, e_3 = 1$, deci elementul neutru este $(0, 0, 1)$.

12. Funcţia $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} x^2 + x + 1, & x > 0 \\ ax + b, & x \leq 0 \end{cases}$, este continuă dacă

a) $a = 1$, $b \in \mathbb{R}$; b) $a = -1$, $b = 2$; c) $a = 1$, $b = 2$; d) $a = 1$, $b > 1$;
e) $a = b = -1$; f) $a \in \mathbb{R}$, $b = 1$.

Soluţie. Cum f este continuă pe $(-\infty, 0) \cup (0, \infty)$ este suficient să punem condiţiile pentru continuitate în 0, adică

$$\lim_{x \searrow 0} (x^2 + x + 1) = \lim_{x \nearrow 0} (ax + b) = f(0) \Rightarrow \begin{cases} b = 1 \\ a \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

13. Să se determine o funcţie polinomială P, de grad cel mult doi, care verifică condiţiile $P(1) = 1, \quad P'(1) = 0, \quad P''(1) = 2$.

a) $-x^2 + 2x + 2$; b) $x^2 - 2x + 2$; c) $x^2 + x + 1$; d) $x^2 + x + 2$; e) $-x^2 + 2x$; f) $-x^2 - 2x - 2$.

Soluţie. Avem $f = ax^2 + bx + c$ cu $a \neq 0$. Condiţiile din enunţ se rescriu:

$$\begin{cases} a+b+c=1 \\ 2a+b=0 \\ 2a=2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=1 \\ b=-2 \\ c=2. \end{cases}$$

14. Să se calculeze $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin^2 x}{x^2 + x^2 \cos x}$.

a) ∞; b) 0; c) 1; d) limita nu există; e) $\frac{1}{2}$; f) 2.

Soluţie. Avem $\lim_{x\to 0} \frac{\sin^2 x}{x^2(1+\cos x)} = \lim_{x\to 0} \frac{1}{1+\cos x} = \frac{1}{2}$.

15. Să se rezolve inecuaţia $\ln \mathrm{e}^x + x\mathrm{e}^{\ln x} < 2$.

a) $x \in (0,1)$; b) $x > 0$; c) nu are soluţii; d) $x \in (0, \mathrm{e})$; e) $x \in (-2, 1)$; f) $x > 1$.

Soluţie. Avem $x > 0$. Folosind egalitatea $\ln e^x = x$ inecuaţia se rescrie $x + x^2 - 2 < 0$, deci $x \in (-2,1) \cap (0, \infty) = (0,1)$.

16. Suma numerelor naturale n ce satisfac inegalitatea $\left(1 + \dfrac{1}{n}\right) \cdot C_n^2 < 8$ este

a) 10; b) 6; c) 7; d) 5; e) 8; f) 9.

Soluţie. Inecuaţia se scrie $\frac{n+1}{n} \frac{(n-1)n}{2} < 8$, adica $n^2 - 17 < 0 \Rightarrow n \in [-\sqrt{17}, \sqrt{17}]$. Pentru ca C_n^2 să existe, trebuie să avem $n \geq 2$ si $n \in \mathbb{N}$, deci $n \in \{2,3,4\}$. Soluţia căutată este deci $2 + 3 + 4 = 9$.

17. Matricea $A = \begin{pmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & -1 & a \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$, cu $a \in \mathbb{R}$, este inversabilă pentru

a) $a \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 0\}$; b) $a \in \{-1, 0\}$; c) $a \in \mathbb{R}$; d) $a \neq 0$; e) $a \neq -1$; f) nu există.

Soluţie. Condiţia ca A să fie inversabilă este

$$\det A \neq 0 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} a+1 & 0 & a+1 \\ 1 & -1 & a \\ 3 & 0 & a+3 \end{vmatrix} \neq 0 \Leftrightarrow -(a+1)a \neq 0 \Leftrightarrow a \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 0\}.$$

18. Suma pătratelor soluţiilor ecuaţiei $x^2 - 4x + 1 = 0$ este

a) 14; b) 12; c) -12; d) 16; e) 10; f) 4.

Soluţie. Avem $x_1 + x_2 = 4, x_1 x_2 = 1$ şi deci $x_1^2 + x_2^2 = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1 x_2 = 14$.

1. Să se calculeze volumul piramidei determinate de trei muchii adiacente ale unui cub de latură l.

   a) $\frac{l^3}{6}$; b) $\frac{l^3}{4}$; c) $\frac{l^3}{3}$; d) $\frac{l^3}{2}$; e) $\frac{l^3\sqrt{2}}{3}$; f) $\frac{2l^3}{3}$.

   Soluţie. Baza piramidei este un triunghi dreptunghic cu catetele de lungime l, iar înalţimea este tot l. Atunci $V = \frac{A_b h}{3} = \frac{1}{3}\frac{l^2}{2}l = \frac{l^3}{6}$.

2. Ecuaţia cercului cu centrul $C(1,-1)$ şi de rază 2 este:

   a) $x^2+y^2-2x+2y-1=0$; b) $x^2+y^2-4x-4y=0$; c) $x^2+y^2-x+y=0$; d) $x^2+y^2-2x+2y-2=0$; e) $x^2+y^2-2x+2y-4=0$; f) $x^2+y^2=4$.

   Soluţie. Ecuaţia este $(x-1)^2+(y+1)^2=2^2$, deci $x^2+y^2-2x+2y-2=0$.

3. Un paralelipiped dreptunghic are înălţimea 4, aria bazei 6 şi o latură a bazei 3. Să se calculeze lungimea diagonalei paralelipipedului.

   a) $2\sqrt{5}$; b) $\sqrt{13}$; c) $\sqrt{61}$; d) 4; e) $\sqrt{29}$; f) $\sqrt{43}$.

   Soluţie. Lungimea diagonalei este $d=\sqrt{a^2+b^2+c^2}$, unde $a = inaltimea = 4, b = latura\ bazei = 3$. Atunci aria bazei $A = c\cdot b = 3c \Rightarrow 6 = 3c \Rightarrow c = 2$, si deci $d=\sqrt{16+9+4}=\sqrt{29}$.

4. Fie $z=\dfrac{1}{2}+\mathrm{i}\dfrac{\sqrt{3}}{2}$. Să se calculeze z^{12}.

   a) $1+\mathrm{i}\sqrt{3}$; b) 1+i; c) i; d) -1; e) 0; f) 1.

   Soluţie. Trecând la forma trigonometrică obţinem

$$z=\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3},\quad z^{12}=\left(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}\right)^{12}=\cos\frac{12\pi}{3}+i\sin\frac{12\pi}{3}=\cos 4\pi+i\sin 4\pi=1.$$

5. Fie vectorii $\vec{u}=\vec{i}+\sqrt{3}\vec{j}$ şi $\vec{v}=\sqrt{3}\vec{i}+\vec{j}$. Măsura unghiului dintre aceşti vectori este:

   a) $\frac{\pi}{3}$; b) 0; c) $\frac{\pi}{6}$; d) $\frac{\pi}{2}$; e) $\frac{\pi}{4}$; f) $\frac{2\pi}{3}$.

   Soluţie. Avem formula $\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{v}=||\overrightarrow{u}||\cdot||\overrightarrow{v}||\cos\alpha$. În cazul nostru, egalitatea se rescrie $(i+\sqrt{3}\overrightarrow{j})(\sqrt{3}\overrightarrow{i}+\overrightarrow{j})=\sqrt{(1+3)(3+1)}\cos\alpha$, deci

$$\sqrt{3}+\sqrt{3}=4\cos\alpha\Rightarrow\cos\alpha=\frac{2\sqrt{3}}{4}=\frac{\sqrt{3}}{2};\quad \alpha\in\left\{2k\pi\pm\frac{\pi}{6}\;\middle|\;k\in\mathbb{Z}\right\}.$$

6. Să se determine raza cilindrului circular drept de volum 3 şi înălţime $\dfrac{1}{3\pi}$.

   a) 3; b) 6; c) 3π; d) $\sqrt{2}$; e) 6π; f) 18.

   Soluţie. Dacă V este volumul cilindrului, R raza şi h înălţimea, condiţia din enunţ se rescrie $V=\pi R^2h \Leftrightarrow 3=\pi R^2\frac{1}{3\pi}\Leftrightarrow R^2=9$, şi deci $R=3$.

7. Aria unei sfere de volum $\dfrac{4\pi}{3}$ este:

   a) 8; b) $\frac{3\pi}{2}$; c) 4π; d) 4; e) 3π; f) 2π.

   Soluţie. Avem $A=4\pi R^2$ şi $V=\frac{4\pi R^3}{3}$. Deci $\frac{4\pi R^3}{3}=\frac{4\pi}{3}\Leftrightarrow R=1$, deci $A=4\pi$.

8. Fie $\sin\alpha=\dfrac{4}{5},\quad 0<\alpha<\dfrac{\pi}{2}$. Să se calculeze $\cos\alpha$.

   a) $\frac{3}{5}$; b) $-\frac{3}{5}$; c) $\frac{1}{2}$; d) 0; e) $\frac{1}{5}$; f) $-\frac{1}{5}$.

   Soluţie. Cum $\alpha\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)\Leftrightarrow\cos\alpha>0$ şi deci

$$\cos\alpha=\sqrt{1-\sin^2\alpha}=\sqrt{1-\frac{16}{25}}=\sqrt{\frac{9}{25}}=\frac{3}{5}.$$

9. Fie $E(x) = \sin 2x - \cos x + \operatorname{tg} \dfrac{3x}{2}$. Să se calculeze $E\left(\dfrac{\pi}{6}\right)$.

a) 0; b) 1; c) $\frac{\sqrt{2}}{2}$; d) $\frac{\sqrt{3}}{2}$; e) $\frac{1}{2}$; f) 2.

Soluţie. Avem $E\left(\frac{\pi}{6}\right) = \sin\frac{\pi}{3} - \cos\frac{\pi}{6} + \operatorname{tg}\frac{\pi}{4} = \sqrt{\frac{3}{2}} - \sqrt{\frac{3}{2}} + 1 = 1.$

10. Să se determine numărul soluţiilor ecuaţiei $\cos x = \sqrt{3}\sin x$ situate în intervalul $[0, 2\pi]$.

a) 0; b) 2; c) 4; d) 1; e) 3; f) 6.

Soluţie. Se observa ca daca avem $\cos x = 0$, atunci $\sin x \in \{\pm 1\}$ deci ecuaţia devine $0 = \pm\sqrt{3}$, fără soluţii. Deci $\cos x \neq 0$. Împărţim prin $\cos x$. Ecuaţia se rescrie $\operatorname{tg} x = \frac{1}{\sqrt{3}} \Leftrightarrow \left\{x = \frac{\pi}{6} + k\pi \middle| k \in \mathbb{Z}\right\}$. În intervalul $[0, 2\pi]$ avem doar soluţiile $\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{6} + \pi$, deci două soluţii.

11. Să se determine coordonatele mijlocului segmentului AB unde $A(7, -2, 3)$ şi $B(-3, 4, 1)$.

a) (0,1,2); b) (1,1,1); c) (2,1,2); d) (2,1,0); e) (0,0,0); f) $(-2, -1, 2)$.

Soluţie. Mijlocul M al segmentului AB cu coordonatele

$$\left(\frac{7-3}{2}, \frac{-2+4}{2}, \frac{3+1}{2}\right) = (2, 1, 2).$$

12. Să se determine distanţa dintre punctele $A(5, 0, -2)$ şi $B(1, 4, 0)$.

a) 5,5; b) 6; c) 5; d) $\sqrt{6}$; e) 4; f) 4,5.

Soluţie. Distanta dintre puncte este

$$d = \sqrt{(5-1)^2 + (0-4)^2 + (-2-0)^2} = \sqrt{36} = 6.$$

13. Pe latura AB a triunghiului ABC se ia punctul M astfel încât $AM = \frac{1}{2}AB$, iar pe latura AC se ia punctul N astfel încât $AN = \frac{1}{3}AC$. Fie S' aria ΔAMN şi S aria ΔABC. Să se calculeze raportul $\dfrac{S'}{S}$.

a) $\frac{1}{3}$; b) $\frac{1}{5}$; c) $\frac{1}{4}$; d) $\frac{1}{2}$; e) $\frac{1}{36}$; f) $\frac{1}{6}$.

Soluţie. Se aplică formula de arie $S = \frac{bc\sin A}{2}$ şi avem

$$\frac{S(AMN)}{S(ABC)} = \frac{\frac{AM \cdot AN \sin A}{2}}{\frac{AB \cdot AC \sin A}{2}} = \frac{AM}{AB}\frac{AN}{AC} = \frac{1}{2}\frac{1}{3} = \frac{1}{6}.$$

14. Să se determine ecuaţia planului care trece prin punctul $A(3, -2, -7)$ şi este paralel cu planul $2x - 3z + 5 = 0$.

a) $x + y + z + 6 = 0$; b) $2x - y - 3z + 5 = 0$; c) $2x - 3z = 0$; d) $2x - 3z - 27 = 0$; e) $x - 3y - 9 = 0$; f) $2x - 3z - 20 = 0$.

Soluţie. Planele paralele cu planul $2x - 3z + 5 = 0$ au ecuaţiile de forma $2x - 3z + \lambda = 0$. Cum $A(3, -2, -7)$ se află în plan, rezultă $2 \cdot 3 - 3(-7) + \lambda = 0$, deci $\lambda = -27$.

15. Se consideră triunghiul ABC cu $BC = 2,\ AB = \sqrt{2},\ AC = 1 + \sqrt{3}$. Să se calculeze $\cos A$.

a) $\frac{\sqrt{2}}{2}$; b) $\frac{\sqrt{3}}{2}$; c) $-\frac{\sqrt{2}}{2}$; d) 0; e) $-\frac{1}{2}$; f) $\frac{1}{2}$.

Soluţie. Din teorema cosinusului, obţinem

$$\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} = \frac{AC^2 + AB^2 - BC^2}{2AC \cdot AB} = \frac{2 + 2\sqrt{3}}{2(1+\sqrt{3})\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

16. Să se determine volumul conului circular drept care are secţiunea axială un triunghi echilateral de latură 4.

a) 4π; b) $\frac{2\pi}{3}$; c) $\frac{\pi\sqrt{3}}{3}$; d) $\frac{4\pi}{3}$; e) $\frac{4\pi\sqrt{3}}{3}$; f) $\frac{8\pi\sqrt{3}}{3}$.

Soluţie. Dacă R, G, h sunt respectiv raza, generatoarea şi înălţimea conului, avem $2R = G = 4$ şi deci $R = 2$ şi $h = \sqrt{G^2 - R^2} = \sqrt{16 - 4} = 2\sqrt{3}$. Atunci volumul conului este $V = \frac{\pi R^2 h}{3} = \frac{4\pi 2\sqrt{3}}{3} = \frac{8\pi\sqrt{3}}{3}$.

17. Fie un tetraedru regulat de muchie l. Să se calculeze distanţa dintre mijloacele a două muchii opuse.

a) $l\sqrt{3}$; b) $\frac{l}{\sqrt{2}}$; c) $\frac{l}{4}$; d) $\frac{l}{5}$; e) $\frac{l}{\sqrt{3}}$; f) $l\sqrt{2}$.

Soluţie. Notăm cu $VABC$ tetraedrul dat şi cu M mijlocul laturii BC. Deoarece $AM = VM = \frac{l\sqrt{3}}{2}$ rezultă că triunghiul AMV este isoscel, deci $MN \perp AV$, unde N este mijlocul lui AV. Deci

$$MN^2 = \sqrt{AM^2 - AN^2} = \sqrt{\left(\frac{l\sqrt{3}}{2}\right)^2 - \left(\frac{l}{2}\right)^2} = \frac{l}{\sqrt{2}}.$$

18. Se consideră vectorii $\vec{u} = m\vec{i} + 3\vec{j},\ \vec{v} = 2\vec{i} + n\vec{j},\ m, n \in \mathbb{R}$. Vectorii sunt perpendiculari dacă şi numai dacă:

a) $m + n = 0$; b) $m = 2,\ n = 3$; c) $mn = 5$; d) $m = 1,\ n = 2$; e) $m = n = 0$; f) $2m + 3n = 0$.

Soluţie. Vectorii sunt perpendiculari d.n.d. $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$. Folosind egalităţile $\vec{i}^2 = 1 = \vec{j}^2; \vec{i}\vec{j} = 0$, rezultă

$$(m\vec{i} + 3\vec{j})(2\vec{i} + n\vec{j}) = 0 \Leftrightarrow (2m\vec{i}^2 + (mn + 6)\vec{i}\vec{j} + 3n\vec{j}^2 = 0 \Rightarrow 2m + 3n = 0.$$

1. Să se calculeze $L = \lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt{n+2}-\sqrt{n+1}\right)$.

   a) $L=-1$; b) $L=1$; c) $L=\infty$; d) $L=2$; e) $L=0$; f) nu există.

   Soluţie.

$$L = \lim_{n\to\infty}(\sqrt{n+2}-\sqrt{n+1}) = \lim_{n\to\infty}\frac{n+2-n-1}{\sqrt{n+2}+\sqrt{n+1}} = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{n+2}+\sqrt{n+1}} = 0$$

2. Să se determine suma S a coeficienţilor polinomului $f=\left(8X^3-7\right)^4$.

   a) $S=0$; b) $S=3$; c) $S=1$; d) $S=2$; e) $S=2^{10}$; f) $S=-2$.

   Soluţie. Suma coeficienţilor polinomului $f=\sum_{k=0}^{n}a_kx^k$ este $a_0+\ldots+a_n=f(1)$. În cazul de faţă $f(1)=(8-7)^4=1$.

3. Să se calculeze $\sqrt{0,09}-\sqrt[3]{0,008}$.

   a) 0,3; b) 0,5; c) 0,1; d) $\frac{1}{3}$; e) –0,1; f) 0.

   Soluţie. Avem $\sqrt{0,09}-\sqrt[3]{0,008}=\sqrt{\frac{9}{100}}-\sqrt[3]{\frac{8}{1000}}=\frac{3}{10}-\frac{2}{10}=\frac{1}{10}=0.1$.

4. Funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\begin{cases} x^2+x+1, & x>0\\ 2x+a, & x\le 0\end{cases}$ este continuă dacă

   a) $a=1$; b) $a=2$; c) $a\in\mathbf{R}$; d) $a=0$; e) $a=-1$; f) $a=\frac{3}{2}$.

   Soluţie. Restrictiile funcţiei f la intervalele $(-\infty,0)$ şi $(0,\infty)$ sunt continue deoarece acestea sunt funcţii polinomiale. Pentru punctul $x=0$ avem condiţiile

$$f(0)=\lim_{x\nearrow 0}f(x)=\lim_{x\searrow 0}f(x)\Leftrightarrow a=1,$$

   deci f continua d.n.d. $a=1$.

5. Să se determine $m\in\mathbb{R}$ dacă ecuaţia $|\ln x| = mx$ are trei soluţii reale şi distincte.

   a) $m\in\left(0,\frac{1}{e}\right)$; b) $m>\frac{1}{e}$; c) $m=\frac{1}{e}$; d) $m<\frac{1}{e}$; e) $m=e$; f) $m>0$.

   Soluţie. Existenta logaritmului cere condiţia $x\in(0,\infty)$. Ecuaţia se rescrie sub forma $\frac{|\ln x|}{x}=m$, şi are soluţii d.n.d. $m\in\ \mathrm{Im}\,g$, unde $g(x)=\frac{|\ln x|}{x}$, $g:(0,\infty)\to\mathbb{R}$, deci

$$g(x)=\begin{cases} -\frac{\ln x}{x}, & x\in(0,1]\\ \frac{\ln x}{x}, & x\in(1,\infty).\end{cases}$$

   Funcţia g este compunere de funcţii continue, deci continuă. Aplicând regula lui l'Hospital obţinem

$$\lim_{x\searrow 0}g(x)=\infty,\ \lim_{x\to\infty}g(x)=\lim_{x\to\infty}\frac{1/x}{1}=0$$

   si $g(1)=0$. Avem $g'(x)=\frac{sign(\ln x)\cdot(1-\ln x)}{x^2}, x\in(0,\infty)\setminus\{1\}$, iar $g'_s(1)=-1\neq g'_d(1)=1$. Se observă că $g'(x)=0\Leftrightarrow x=e$ iar $g(e)=\frac{1}{e}$. Avem deci tabelul de variaţie al funcţiei g.

x	0		1		e		∞
$g'(x)$	–	–	$-1\|1$	+	0	–	–
$g(x)$	∞	$\searrow$	0	$\nearrow$	$\frac{1}{e}$	$\searrow$	0

   Deci ecuaţia are $g(x)=m$ are 3 rădăcini distincte d.n.d. $m\in(0,\frac{1}{e})$.

6. Să se scrie în ordine crescătoare numerele: $a = \sqrt{3} - 1,\ b = \sqrt{5} - 2,\ c = 1.$

a) a, b, c; b) c, a, b; c) c, b, a; d) b, c, a; e) b, a, c; f) a, c, b.

Soluţie. Avem $a = \sqrt{3} - 1, b = \sqrt{5} - 2, c = 1$. Aproximând, obţinem

$$a > 1.7 - 1 \approx 0.7, a < 1.8 - 1 \approx 0.8; b < 2.3 - 2 \approx 0.3,$$

deci $b < 0.3 < 0.7 < a < 0.8 < 1 = c$.

7. Fie funcţia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = \sqrt[3]{x^2 + x + 1}$. Atunci $f'(1)$ este

a) 0; b) $\frac{1}{2}$; c) -1; d) $\frac{1}{3}$; e) $\frac{1}{\sqrt[3]{6}}$; f) $\frac{1}{\sqrt[3]{9}}$.

Soluţie. Avem $f'(x) = \frac{2x+1}{3\sqrt[3]{(x^2+x+1)^2}}$ şi deci

$$f'(1) = \frac{3}{3\sqrt[3]{3^2}} = \frac{1}{\sqrt[3]{9}}$$

8. Să se determine $m \in \mathbb{R}$ astfel încât sistemul $\begin{cases} mx + y + z = 0 \\ x + my + 2z = 0 \\ x - y - z = 0 \end{cases}$ să admită numai soluţia nulă (banală).

a) $m \neq -1$ şi $m \neq 2$; b) $m = 0$; c) $m = 2$; d) $m \in \mathbb{R}$; e) nu există; f) $m = -1$.

Soluţie. Pentru ca sistemul să aibă soluţie unică, este necesar şi suficient ca

$$D = \begin{vmatrix} m & 1 & 1 \\ 1 & m & 2 \\ 1 & -1 & -1 \end{vmatrix} \neq 0.$$

Adunam prima coloana la coloana a doua si a treia, dezvoltăm D după linia a treia şi obţinem condiţia $(m + 1)(3 - m - 1) \neq 0$, deci $m \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 2\}$.

9. Să se calculeze limita $L = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin^2 2x}{\sin^2 3x}$.

a) $L = \frac{2}{3}$; b) $L = \frac{4}{9}$; c) $L = \infty$; d) nu există; e) $L = -1$; f) $L = 0$.

Soluţie. Avem

$$L = \lim_{x\to 0} \left(\frac{\sin 2x}{2x}\right)^2 \left(\frac{3x}{\sin 3x}\right)^2 \frac{2^2}{3^2} = \frac{4}{9}.$$

10. Mulţimea soluţiilor ecuaţiei $\sqrt[3]{x - 1} - x = -1$ este

a) $\{\ 0\ \}$; b) $\{1,\ 2,\ 3\}$; c) $\varnothing$; d) $\{0,\ 1,\ 2\}$; e) P; f) $\{\ 1\ \}$.

Soluţie. Ecuaţia se scrie $\sqrt[3]{x - 1} = x - 1$. Ridicăm la cub. Avem $x - 1 = (x - 1)^3 \Leftrightarrow (x - 1)[(x - 1)^2 - 1] = 0 \Leftrightarrow x - 1 = 0$ sau $x - 1 = \pm 1$, şi deci $x \in \{0, 1, 2\}$.

11. Să se determine $a \in \mathbb{R}$ astfel încât polinomul $f = 6X^4 - 7X^3 + aX^2 + 3X + 2$ să se dividă prin polinomul $g = X^2 - X - 1$.

a) $a = -2$; b) $a = 2$; c) $a = -1$; d) $a = -7$; e) $a = 0$; f) $a = 1$.

Soluţie. Facând împărtirea, se obtine câtul $6x^2 - x + a + 1$ şi restul $(a+7)(x+1)$. Condiţia de divizibilitate revine la anularea restului, deci rezultă $a = -7$.

12. Funcţia $f : (0,\ 2) \to \mathbb{R},\ f(x) = \dfrac{2}{x^2 + 2x}$. Să se calculeze $S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \left(f^{(k)}(1) - f^{(k+1)}(1)\right)$.

a) $S_n = (-1)^n \left(1 - \frac{1}{3^{n+2}}\right)$; b) $S_n = -\frac{8}{9} + 2(-1)^n \left(1 - \frac{1}{3^{n+2}}\right)$; c) $S_n = 1 - \frac{1}{3^{n+2}}$; d) $S_n = -\frac{8}{9} + (-1)^n \left(1 - \frac{3}{3^{n+2}}\right)$; e) $S_n = (-1)^n \left(1 - \frac{1}{3^{n+1}}\right)$;
f) $S_n = -\frac{8}{9} + (-1)^n(n + 1)! \left(1 - \frac{1}{3^{n+2}}\right)$.

Soluţie. Avem $f(x)=\frac{2}{x^2+2x}=\frac{1}{x(x+2)}=\frac{1}{x}-\frac{1}{x+2}$. Dar $\left(\frac{1}{ax+b}\right)^{(n)}=\frac{(-1)^n n! a^n}{(ax+b)^{n+1}} \Rightarrow f^{(k)}(x)=\frac{(-1)^k k!}{x^{k+1}}-\frac{(-1)^k k!}{(x+2)^{k+1}}$, deci $f^{(k)}(1)=(-1)^k k\left(1-\frac{1}{3^{k+1}}\right)$. Dezvoltând suma şi reducând termenii egali, obţinem

$$\begin{aligned} S_n &= \textstyle\sum_{k=1}^{n}(f^{(k)}(1)-f^{(k+1)}(1)) = f^{(1)}(1)-f^{(n+1)}(1) = \\ &= -\tfrac{8}{9}-(-1)^{n+1}(n+1)!\left(1-\tfrac{1}{3^{n+2}}\right) = -\tfrac{8}{9}+(-1)^n(n+1)!\left(1-\tfrac{1}{3^{(n+2)}}\right). \end{aligned}$$

13. Fie $A=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 0 & 1\end{pmatrix}$ şi $B=\begin{pmatrix}a & b\\ 0 & 2\end{pmatrix}$. Determinaţi $a,b\in\mathbb{R}$ astfel încât $AB=BA$.

a) $a=b=1$; b) $a\in\mathbb{R},\ b=2$; c) $a=-1,\ b=3$; d) $a=-2,\ b=0$;
e) nu există; f) $a=2,\ b\in\mathbb{R}$.

Soluţie. Din $AB=BA$ deducem

$$\begin{pmatrix}1 & 2\\ 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a & b\\ 0 & 2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a & b\\ 0 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 2\\ 0 & 1\end{pmatrix}\Leftrightarrow\begin{pmatrix}a & b+4\\ 0 & 2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a & 2a+b\\ 0 & 2\end{pmatrix},$$

deci $b+4=2a+b$ adică $a=2$ şi $b\in\mathbb{R}$.

14. Să se calculeze $\mathrm{i}+\mathrm{i}^3+\mathrm{i}^5$, $(\mathrm{i}^2=-1)$.

a) 0; b) 3i; c) -1; d) i; e) $-$i; f) 2i.

Soluţie. Avem $i+i^3+i^5=i-i+i=i$.

15. Să se determine mulţimea $A=\{x\in\mathbb{R}\mid(2x-3)(3x-2)\geq 0\}$.

a) $A=\left(\frac{2}{3},\frac{3}{2}\right)$; b) $A=\mathbb{R}$; c) $A=\varnothing$; d) $A=(-1,1)$; e) $A=\left[\frac{3}{2},\infty\right)$;
f) $A=\left(-\infty,\frac{2}{3}\right]\cup\left[\frac{3}{2},\infty\right)$.

Soluţie. Inecuaţia $(2x-3)(3x-2)\geq 0\Leftrightarrow\left(x-\frac{3}{2}\right)\left(x-\frac{2}{3}\right)\geq 0$ are soluţiile $x\in\left(-\infty,\frac{2}{3}\right]\cup\left[\frac{3}{2},\infty\right)$.

16. Numărul $x=C_6^4+A_5^2-P_4$ este

a) $x=0$; b) $x=\frac{11}{2}$; c) $x=11$; d) $x=10$; e) $x=15$; f) $x=25$.

Soluţie. Avem $C_6^4+A_5^2-P_4=\frac{6\cdot 5}{1\cdot 2}+5\cdot 4-24=15+20-24=11$.

17. Să se rezolve ecuaţia $\log_2 x+\log_2 2x=3$.

a) $x=0$; b) $x=-2$; c) nu are soluţii; d) $x=\pm 2$; e) $x=1$; f) $x=2$.

Soluţie. Obţinem $\log_2 x+\log_2 2x=3\Leftrightarrow\log_2 x\cdot 2x=\log_2 2^3$ cu $x>0$ deci $2x^2=2^3$, de unde rezultă $x=2$.

18. Să se calculeze $I=\int\limits_0^1 x\mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x$.

a) $I=\mathrm{e}$; b) $I=-1$; c) $I=1$; d) $I=0$; e) $I=2\mathrm{e}$; f) $I=-\mathrm{e}$.

Soluţie. Calculăm $I=\int_0^1 xe^x dx$. Integrând prin părţi $g'(x)=e^x, f(x)=x$, rezultă

$$I=e^x x\Big|_0^1-\int_0^1 e^x dx=e-e^x\Big|_0^1=e-(e-1)=1.$$

1. In piramida patrulateră regulată $VABCD$ se dau muchia $VA = 5$ şi diagonala bazei $AC = 8$. Calculaţi distanţa de la vârful V al piramidei la planul bazei.

   a) 3; b) 4; c) 5; d) 6; e) 7; f) 8.

   Soluţie. Dacă O este piciorul înălţimii în planul $ABCD$, atunci $OA = AC/2 = 4$. Aplicând teorema lui Pitagora în triunghiul VOA, rezultă $VO = \sqrt{VA^2 - OA^2} = 3$.

2. Intr-un con circular drept unghiul format de o generatoare cu planul bazei este de $45°$. Raza bazei fiind $R = 3$ să se calculeze aria laterală a conului

   a) $9\pi\sqrt{2}$; b) 9π; c) π; d) $9\pi\sqrt{3}$; e) π^2; f) 3π.

   Soluţie. Generatoarea are lungimea $R\sqrt{2} = 3\sqrt{2}$, deci aria laterală este $\pi RG = 9\pi\sqrt{2}$.

3. In sistemul cartezian $Oxyz$ se consideră planul de ecuaţie $x+y+z-3=0$ şi dreapta de ecuaţii $x = y = z$. Coordonatele punctului de intersecţie dintre dreaptă şi plan sunt

   a) $(1\,,1\,,1)$; b) $(0\,,0\,,0)$; c) $(1\,,2\,,3)$; d) $(2\,,3\,,1)$; e) $(2\,,2\,,2)$; f) $(-1,-1,-1)$.

   Soluţie. Rezolvând sistemul $\begin{cases} x+y+z-3=0 \\ x=y=z \end{cases}$ rezultă $x = y = z = 1$, deci punctul de intersecţie are coordonatele $(1,1,1)$.

4. Aria triunghiului, din planul xOy, determinat de punctele $O(0,0)$, $A(4,0)$ şi $B(0,-3)$ este

   a) 6; b) 12; c) 7; d) 5; e) 4; f) 3.

   Soluţie. Aria $\triangle OAB$ este $|\frac{1}{2}\begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 4 & 0 & 1 \\ 0 & -3 & 1 \end{vmatrix}| = |\frac{1}{2}\begin{vmatrix} 4 & 0 \\ 0 & -3 \end{vmatrix}| = 6$.

5. In planul xOy se dau punctele $A(4,0)$ şi $B(2,2)$. Punctele A, B şi C sunt coliniare pentru C de coordonate

   a) $(0\,,4)$; b) $(0\,,-4)$; c) $(0\,,0)$; d) $(-2\,,2)$; e) $(2\,,-2)$; f) $(0\,,-1)$.

   Soluţie. Punctele A,B si $C(\alpha,\beta)$ sunt colineare dacă $\begin{vmatrix} 4 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \\ \alpha & \beta & 1 \end{vmatrix} = 0$, deci dacă $-2\beta - 2\alpha + 8 = 0$. Singurul punct care satisface egalitatea este $C(0,4)$.

6. Numărul soluţiilor ecuaţiei $\sin x - \cos x = 0$ situate în intervalul $[0\,,2\pi]$ este

   a) 2; b) 1; c) 3; d) 4; e) 0; f) o infinitate.

   Soluţie. Se observă că ecuaţia $\cos x = 0$ admite drept soluţii $\{\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\} \subset [0,2\pi]$, care însă nu satisfac ecuaţia din enunţ. Deci $\cos x \neq 0$. Împărţind prin $\cos x$ ecuaţia dată, rezultă $\operatorname{tg} x = 1$, deci soluţiile sunt $x \in \{\frac{\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}\} \subset [0,2\pi]$, deci ecuaţia admite două soluţii în intervalul $[0,2\pi]$.

7. Pentru numărul complex $z = 1 + \mathrm{i}$, numărul z^2 este

   a) $2\mathrm{i}$; b) $-\mathrm{i}$; c) 1; d) 0; e) -1; f) $1 - \mathrm{i}$.

   Soluţie. Avem $z^2 = (1+i)^2 = 1 + 2i - 1 = 2i$.

8. Modulul numărului complex $z = \cos\dfrac{\pi}{3} + \mathrm{i}\sin\dfrac{\pi}{3}$ este

   a) 1; b) 2; c) $\sqrt{2}$; d) $\frac{1}{\sqrt{3}}$; e) 3; f) 0.

   Soluţie. Avem $|z| = \sqrt{\cos^2\frac{\pi}{3} + \sin^2\frac{\pi}{3}} = 1$.

9. Ecuaţia trigonometrică $\sin^2 x = 1$ are în intervalul $[\pi\,,2\pi]$ soluţia

   a) $\{\frac{3\pi}{2}\}$; b) $\{\frac{5\pi}{4}, \frac{7\pi}{4}\}$; c) $\{\pi\}$; d) $\{\pi\,,2\pi\}$; e) $\{\frac{7\pi}{4}\}$; f) $\{-\frac{\pi}{2}\}$.

   Soluţie. Avem $\sin^2 x = 1 \Leftrightarrow \sin x \in \{\pm 1\}$. Dar $x \in [\pi, 2\pi]$, deci $x = \frac{3\pi}{2}$.

10. In triunghiul ABC se dau : $\hat{A} = 45°$, $AC = \sqrt{2}$ şi $AB = 1$. Atunci latura BC are lungimea

a) 1; b) 2; c) 3; d) $\sqrt{3-\sqrt{2}}$; e) $3+\sqrt{6}$; f) $3-\sqrt{2}$.

Soluţie. Aplicând teorema cosinusului, obţinem $BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2 \cdot AB \cdot AC \cdot \cos 45° \Leftrightarrow BC^2 = 1 \Rightarrow BC = 1$.

11. In triunghiul ABC se dau $\hat{C} = 30°$ şi înălţimea $AD = 2$. (D se află pe dreapta BC.) Atunci latura AC are lungimea

a) 4; b) 2; c) 3; d) 5; e) $\sqrt{3}$; f) 1.

Soluţie. Avem $AC = AD/\sin C = \frac{2}{1/2} = 4$.

12. Produsul scalar al vectorilor $\vec{u} = \vec{i} - 3\vec{j} + 4\vec{k}$ şi $\vec{v} = 2\vec{i} - \vec{j} - \vec{k}$ este

a) 1; b) 2; c) 3; d) 4; e) 5; f) -1.

Soluţie. Avem $\overline{u} \cdot \overline{v} = 1 \cdot 2 + (-3) \cdot (-1) + 4 \cdot (-1) = 2 + 3 - 4 = 1$.

13. Modulul (norma, lungimea) vectorului $\vec{v} = 2\vec{i} - \vec{j} + 2\vec{k}$ este

a) 3; b) 5; c) -3; d) 4; e) 6; f) 0.

Soluţie. Obţinem $|\overline{v}| = \sqrt{2^2 + 1^2 + 2^2} = 3$.

14. Un cerc care conţine punctul $M(3\,,\,4)$ are ecuaţia

a) $x^2 + y^2 - 25 = 0$; b) $x^2 + y^2 - 6x - 8y + 3 = 0$; c) $x^2 + y^2 - 7 = 0$;
d) $x^2 + y^2 - x = 0$; e) $x^2 + y^2 - y = 0$; f) $x^2 + y^2 - 1 = 0$.

Soluţie. Se observă că singura ecuaţie verificată de punctul $(3, 4)$ este $x^2 + y^2 - 25 = 0$.

15. Suma semiaxelor elipsei de ecuaţie $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1$ este

a) 5; b) 1; c) 2; d) 12; e) 4; f) 9.

Soluţie. Avem $a^2 = 4, a > 0 \Rightarrow a = 2$ şi $b^2 = 9, b > 0 \Rightarrow b = 3$, deci suma semiaxelor este $a+b = 2+3 = 5$.

16. Se dau vectorii $\vec{u} = \vec{i} + 3\vec{j}$, $\quad \vec{v} = 6\vec{i} - 4\vec{j}$, $\quad \vec{w} = 5\vec{i} - \vec{j}$. Să se calculeze vectorul $\vec{s} = \vec{u} + \vec{v} - \vec{w}$.

a) $\vec{s} = 2\vec{i}$; b) $\vec{s} = \vec{0}$; c) $\vec{s} = 12\vec{i} - 2\vec{j}$; d) $\vec{s} = 10\vec{i} - 8\vec{j}$; e) $\vec{s} = 3\vec{j}$; f) $\vec{s} = -\vec{i} - \vec{j}$.

Soluţie. Avem $\overline{u} + \overline{v} - \overline{w} = \overline{i} + 3\overline{j} + 6\overline{i} - 4\overline{j} - 5\overline{i} + \overline{j} = 2\overline{i}$.

17. Fiecare din diagonalele feţelor unui cub are lungimea $2\sqrt{2}$. Atunci volumul cubului este

a) 8; b) $16\sqrt{2}$; c) $8\sqrt{2}$; d) 4; e) 10; f) 6.

Soluţie. Latura cubului este $2\sqrt{2}/\sqrt{2} = 2$, deci volumul cubului este $2^3 = 8$.

18. Dreapta, din planul xOy, de ecuaţie $x + y - 3 = 0$ conţine punctul A de coordonate

a) $(2\,,\,1)$; b) $(2\,,\,-1)$; c) $(-2\,,\,1)$; d) $(-2\,,\,-1)$; e) $(2\,,\,2)$; f) $(2\,,\,-2)$.

Soluţie. Singurul punct care satisface condiţia $x + y - 3 = 0$ are coordonatele $(2, 1)$.

1. Fie $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\dfrac{x^2}{x^2+1}$. Să se calculeze $f'(1)$. **(4 pct.)**

   a) $\frac{1}{2}$; b) $-\frac{1}{4}$; c) 0; d) $\frac{1}{4}$; e) $-\frac{1}{2}$; f) 1.

   Soluţie. Avem $f'(x)=\frac{2x(x^2+1)-2x^3}{(x^2+1)^2}=\frac{2x}{(x^2+1)^2}$ şi deci $f'(1)=\frac{1}{2}$.

2. Să se determine $m,n\in\mathbb{R}$ astfel încât ecuaţia $x^4+3x^3+mx^2+nx-10=0$ să admită soluţia $x_1=\mathrm{i}$. **(4 pct.)**

   a) $m=-10,\ n=3$; b) $m=1,\ n=-1$; c) $m=-9,\ n=3$;

   d) $m=0,\ n=0$; e) $m=-3,\ n=10$; f) $m=3,\ n=-10$.

   Soluţie. Înlocuind $x=i$ în ecuaţia $x^4+3x^3+mx^2+nx-10=0$, obţinem $1-3i-m+ni-10=0\Leftrightarrow -(m+9)+i(n-3)=0$, de unde prin identificare deducem $m+9=0$ şi $n-3=0$. Deci $m=-9$ şi $n=3$.

3. Să se determine $m\in\mathbb{R}$ astfel încât funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\begin{cases} x^2-2x+m, & x\le 1\\ \mathrm{e}^x-\mathrm{e}, & x>1\end{cases}$ să fie continuă pe $\mathbf{R}$. **(4 pct.)**

   a) $m=3$; b) $m=1$; c) $m=4$; d) $m=0$; e) nu există; f) $m=3/2$.

   Soluţie. Pe intervalele $(-\infty,1)$ si $(1,\infty)$ funcţia este continuă, fiind sumă de funcţii elementare. Condiţia de continuitate în $x_0=1$ se scrie $\lim\limits_{x\nearrow 1}f(x)=\lim\limits_{x\searrow 1}f(x)=f(1)\Leftrightarrow m-1=0\Leftrightarrow m=1$.

4. Să se rezolve inecuaţia $\sqrt{x}<1$. **(4 pct.)**

   a) [0,1); b) (0,1); c) [0,1]; d) $(-1,1)$; e) nu are soluţii; f) $[0,\infty)$.

   Soluţie. Condiţia de existenţă este $x\ge 0$, iar din $\sqrt{x}<1$ rezultă $x<1$. Prin urmare, avem $x\in[0,1)$.

5. Dacă (a,b) este o soluţie a sistemului de ecuaţii $\begin{cases} x+y=2\\ xy=1\end{cases}$, atunci **(4 pct.)**

   a) $a^2+b^2=1$; b) $a^2+b^2=2$; c) $a^2+b^2<0$; d) $a\ne b$; e) $a^2b^2=2$; f) $a^2+b^2=3$.

   Soluţie. Din $a+b=2$ si $ab=1$ deducem $a^2+b^2=(a+b)^2-2ab=4-2=2$.

6. Să se calculeze termenul al zecelea al progresiei aritmetice cu primul termen $a_1=5$ şi raţia $r=2$. **(4 pct.)**

   a) 10; b) 25; c) 23; d) 20; e) 30; f) 18.

   Soluţie. Din relaţia $a_n=a_1+(n-1)r$ rezultă $a_{10}=a_1+9r=5+18=23$.

7. Să se calculeze $\displaystyle\int_0^1\frac{x^2}{x^3+1}dx$. **(4 pct.)**

   a) $2\ln 2$; b) $\frac{\ln 3}{4}$; c) $\frac{\ln 3}{2}$; d) $3\ln 2$; e) $\ln 2$; f) $\frac{\ln 2}{3}$.

   Soluţie. Avem $\int_0^1\frac{x^2}{x^3+1}dx=\frac{1}{3}\int_0^1\frac{(x^3+1)'}{x^3+1}dx=\frac{1}{3}\ln(x^3+1)\Big|_0^1=\frac{1}{3}\ln 2$.

8. Soluţiile ecuaţiei $9^x-4\cdot 3^x+3=0$ sunt **(4 pct.)**

   a) $x_1=3$; b) $x_1=0,\ x_2=1$; c) nu există; d) $x_1=0, x_2=3$; e) $x_1=1,\ x_2=3$; f) $x_1=-1,\ x_2=-3$.

   Soluţie. Notând $3^x=y$, rezultă $y>0$ şi înlocuind în relaţie obţinem $y^2-4y+3=0$. Soluţiile ecuaţiei sunt $y=1$ şi $y=3$. Din $3^x=1$, obţinem $x=0$ şi din $3^x=3$ rezultă $x=1$; deci $x\in\{0,1\}$.

9. Expresia $E = \dfrac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{2}} + \dfrac{1}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}$, are valoarea **(4 pct.)**

a) $3\sqrt{2}$; b) $3\sqrt{3}$; c) 2; d) $2\sqrt{2}$; e) $2\sqrt{3}$; f) 3.

Soluţie. Aducând la acelaşi numărător relaţia din enunţ obţinem: $E = \frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}-\sqrt{2}} = \frac{2\sqrt{3}}{(\sqrt{3})^2-(\sqrt{2})^2} = 2\sqrt{3}$.

10. Fie ecuaţia $x^2 - ax + 4 = 0$, unde $a \in \mathbb{R}$ este un parametru. Dacă soluţiile x_1 şi x_2 ale ecuaţiei verifică egalitatea $x_1 + x_2 = 5$, atunci **(4 pct.)**

a) $x_1 = x_2$; b) $a < 0$; c) $x_1, x_2 \notin \mathbb{R}$; d) $a = 0$; e) $a = 5$; f) $a = 4$.

Soluţie. Din relaţiile lui Viete $x_1 + x_2 = a$ deducem $a = 5$.

11. Să se calculeze $\lim\limits_{n\to\infty} (\sqrt{n^2+n} - \sqrt{n^2+1})$. **(4 pct.)**

a) $-\dfrac{1}{2}$; b) $\dfrac{1}{2}$; c) ∞; d) nu există; e) 1; f) -1.

Soluţie. Amplificând cu conjugata, obţinem:

$$\lim_{n\to\infty} (\sqrt{n^2+n} - \sqrt{n^2+1}) = \lim_{n\to\infty} \frac{n-1}{\sqrt{n^2+n}+\sqrt{n^2+1}} = \lim_{n\to\infty} \frac{(1-\frac{1}{n})}{\sqrt{1+\frac{1}{n}}+\sqrt{1+\frac{1}{n^2}}} = \frac{1}{2}.$$

12. Pe $\mathbf{R}$ se defineşte legea de compoziţie $x \star y = xy + 2ax + by$. Să se determine relaţia dintre a şi b astfel încât legea de compoziţie să fie comutativă. **(4 pct.)**

a) $a - b = 2$; b) $a = 2b$; c) nu există; d) $a = b$; e) $a = \dfrac{b}{2}$; f) $a + b = 1$.

Soluţie. Pentru orice $x, y \in \mathbb{R}$ avem $x * y = y * x \Leftrightarrow xy + 2ax + by = yx + 2ay + bx \Leftrightarrow (2a-b)(x-y) = 0, \forall a, b \in \mathbb{R} \Leftrightarrow 2a = b \Leftrightarrow a = b/2$.

13. Se consideră funcţia $f : [0,\infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = \displaystyle\int_x^{x+1} \frac{t^2}{\sqrt{t^4+t^2+1}}\, dt$. Decideţi: **(6 pct.)**

a) f este impară; b) f are două puncte de extrem; c) graficul lui f admite o asimptotă oblică; d) graficul lui f admite o asimptotă orizontală; e) $f(0) = 0$; f) f este convexă.

Soluţie. Cum funcţia $g(t) = \dfrac{t^2}{\sqrt{t^4+t^2+1}}$ este continuă, aplicăm teorema de medie pe intervalul $[x, x+1]$ şi avem $f(x) = (x+1-x)f'(\theta_x)$ unde $\theta_x \in (x, x+1)$ şi deci $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \lim\limits_{\theta_x\to\infty} \dfrac{\theta_x^2}{\sqrt{\theta_x^4+\theta_x^2+1}} = 1$. Deci graficul funcţiei f admite asimptota orizontală $y = 1$.

14. Să se calculeze limita şirului $a_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{k(k+1)}{2x^{k-1}}$, unde $|x| > 1$. **(6 pct.)**

a) $\dfrac{x^3}{(x-1)^3}$; b) $\dfrac{x}{x-1}$; c) $\dfrac{1}{x}$; d) $\dfrac{1}{x-1}$; e) $\dfrac{x^2}{(x-1)^2}$; f) ∞.

Soluţie. Pentru $x \neq 1$ avem $x + x^2 + \ldots + x^{n+1} = \frac{x^{n+2}-x}{x-1} = S(x)$ Derivând această relaţie de 2 ori, avem

$$S'(x) = \sum_{k=0}^{n} (k+1)x^k = \frac{((n+2)x^{n+1}-1)(x-1) - x^{n+2} + x}{(x-1)^2} = \frac{(n+1)x^{n+2} - (n+2)x^{n+1} + 1}{(x-1)^2}.$$

Derivând din nou în ambii membri, obţinem

$$S''(x) = \sum_{k=1}^{n} k(k+1)x^{k-1} = \frac{x^{n+2}(n+1)n - 2(n+2)x^{n+1} + (n+2)(n+1)x^4 - 2}{(x-1)^3}.$$

Facând substituţia $x \to \frac{1}{x}$ şi ţinând seama că $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{n^k}{x^n} = 0$, pentru $n \in \mathbb{N}$ şi $|x| > 1$, avem

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{k(k+1)}{2x^{k-1}} = -\frac{2}{2(\frac{1}{x}-1)^3} = \frac{x^3}{(x-1)^3}.$$

15. Să se calculeze $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(x-1)^2-1}{x}$. **(6 pct.)**

a) ∞; b) 2; c) 1; d) nu există; e) -2; f) $-\infty$.

Soluţie. Avem $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{(x-1)^2-1}{x}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x(x-2)}{x}=\lim\limits_{x\to0}(x-2)=-2$.

16. Să se calculeze valoarea minimă a funcţiei $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\sqrt{4x^2+28x+85}+\sqrt{4x^2-28x+113}$. **(8 pct.)**

a) $14\sqrt{2}$; b) 20; c) $12\sqrt{3}$; d) 19; e) $9\sqrt{5}$; f) $8\sqrt{6}$.

Soluţie. Avem $f'(x)=\dfrac{8x+28}{2\sqrt{4x^2+28x+85}}+\dfrac{8x-28}{2\sqrt{4x^2-28x+113}}$. Deci

$$\begin{aligned}
&f'(x)=0\Leftrightarrow\frac{4x+14}{\sqrt{4x^2+28x+85}}+\frac{4x-14}{\sqrt{4x^2-28x+113}}=0\Leftrightarrow\\
&\Leftrightarrow(2x+7)\sqrt{(2x-7)^2+64}=-(2x-7)\sqrt{(2x+7)^2+36}\Rightarrow\\
&\Rightarrow(2x+7)^2(2x-7)^2+64(2x+7)^2=(2x-7)^2(2x+7)^2+36(2x-7)^2\Leftrightarrow\\
&\Leftrightarrow16(2x+7)^2=9(2x-7)^2\Leftrightarrow4(2x+7)=\pm3(2x-7)\Leftrightarrow x\in\{-\tfrac{49}{2},-\tfrac{1}{2}\}.
\end{aligned}$$

Pentru $x\in(-\infty,-\frac12)\backslash\{-\frac{49}{2}\}$, avem $f'(x)<0$, deci funcţia f fiind strict descrescătoare în $x=-\frac{49}{2}$, această valoare nu convine ca abcisă de punct de minim. De asemenea, pentru $x>-\frac12$ avem $f'(x)>0$, deci $x=-\frac12$ este punct de minim. În final, obţinem $f(-\frac12)=14\sqrt{2}$.

17. Să se rezolve ecuaţia $\begin{vmatrix}2&x&0\\x&-1&x\\2&-5&4\end{vmatrix}=0$. **(8 pct.)**

a) $x_1=0,\ x_2=3$; b) $x_1=-5/2$; c) $x_1=3$; d) $x_1=0,\ x_2=4$; e) $x_1=0$; f) $x_1=1,\ x_2=4$.

Soluţie. Avem $\begin{vmatrix}2&x&0\\x&-1&x\\2&-5&4\end{vmatrix}=0\Leftrightarrow x^2-5x+4=0\Leftrightarrow x\in\{1,4\}$.

18. Fie $f:\mathbb{C}\to\mathbb{C}$, $f(z)=z^2+z+1$. Să se calculeze $f\left(\dfrac{-1+\mathrm{i}\sqrt{3}}{2}\right)$. **(8 pct.)**

a) -1; b) i; c) $1-\mathrm{i}$; d) $1+\mathrm{i}$; e) $\sqrt{3}$; f) 0.

Soluţie. Pentru $z=\frac{-1+i\sqrt3}{2}$, rezultă $(2z+1)^2=(i\sqrt{3})^2\Leftrightarrow4z^2+4z+1=-3\Leftrightarrow z^2+z+1=0$, deci $f(z)=z^2+z+1=0$.

1. Să se afle câte soluţii are ecuaţia $\sin x - \sqrt{3}\cos x = 0$ în intervalul $[-\pi, 2\pi]$. **(4 pct.)**

   a) patru; b) o infinitate; c) două; d) trei; e) una; f) nici una.

   Soluţie. Se observă că $\cos x = 0 \Leftrightarrow x = (2k+1)\frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$, care nu satisfac ecuaţia $\sin x - \sqrt{3}\cos x = 0$. Rezultă $\operatorname{tg} x = \sqrt{3}$ cu soluţiile $x = \frac{\pi}{3} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$. În intervalul $[-\pi, 2\pi]$ avem pentru $k \in \{-1, 0, 1\}$ respectiv soluţiile $\{-\frac{2\pi}{3}, \frac{\pi}{3}, \frac{4\pi}{3}\}$.

2. Un triunghi isoscel are două unghiuri de mărime $\dfrac{\pi}{8}$ şi laturile egale de lungime 1. Atunci înălţimea corespunzătoare uneia dintre laturile egale are lungimea **(4 pct.)**

   a) $\dfrac{1}{3}$; b) $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$; c) $\dfrac{1}{2}$; d) $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$; e) $\dfrac{\sqrt{2}}{3}$; f) $\dfrac{3}{\sqrt{2}}$.

   Soluţie. Unghiul de la vârful triunghiului isoscel are măsura $\frac{3\pi}{4}$. Înălţimea corespunzătoare uneia dintre laturile egale este de lungime $\sin\frac{3\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

3. Care este ordinea crescătoare a următoarelor numere: $a = \sin 2$, $b = \sin\dfrac{2\pi}{3}$, $c = \sin 8$? **(4 pct.)**

   a) $c < b < a$; b) $a < b < c$; c) $b < c < a$; d) $b < a < c$; e) $a < c < b$; f) $c < a < b$.

   Soluţie. Avem $\sin 8 = \sin(8 - 2\pi)$ şi $\frac{\pi}{2} < 8 - 2\pi < 2 < \frac{2\pi}{3} < \pi$. În cadranul 2 funcţia sin este strict descrescătoare, deci $\sin 8 > \sin 2 > \sin\frac{2\pi}{3}$ şi deci $c > a > b$.

4. Dreapta care trece prin punctele $A(1,2)$ şi $B(2,5)$ are ecuaţia **(4 pct.)**

   a) $x - 3y = 1$; b) $2x - y = 0$; c) $x - 2y = 0$; d) $3x - y = 1$; e) $x + 3y = 1$; f) $3x + y = 1$.

   Soluţie. Ecuaţia dreptei AB este $\frac{x - x_A}{x_B - x_A} = \frac{y - y_A}{y_B - y_A}$, deci $x - 1 = \frac{y-2}{3} \Leftrightarrow 3(x-1) = y - 2$, prin urmare $3x - y = 1$.

5. Să se determine ecuaţia planului care trece prin punctul $A(3, -2, -7)$ şi este paralel cu planul $2x - 3z + 5 = 0$. **(4 pct.)**

   a) $2x - 3z - 10 = 0$; b) $x - 3z - 27 = 0$; c) $2x - 3z - 20 = 0$; d) $2x - z - 27 = 0$; e) $2x - 3z - 27 = 0$; f) $2x - 3z - 25 = 0$.

   Soluţie. Ecuaţia unui plan paralel cu planul dat este $2x - 3z + \alpha = 0, \alpha \in \mathbb{R}$. Cum planul trece prin $A(3, -2, -7)$, avem $4 + 21 + \alpha = 0$, deci $\alpha = -25$ şi planul cerut are ecuaţia $2x - 3z - 25 = 0$.

6. Un triunghi dreptunghic are ipotenuza de lungime 8 cm şi un unghi de $30°$. Calculaţi lungimea înălţimii corespunzătoare ipotenuzei. **(4 pct.)**

   a) $4\sqrt{3}$; b) $\sqrt{3}$; c) $\frac{\sqrt{3}}{2}$; d) $2\sqrt{3}$; e) 2; f) 4.

   Soluţie. Fie $\triangle ABC$, dreptunghic in B, $BD \perp AC (D \in AC)$ şi $m(\angle BAC) = 30°$. Rezultă $BC = \frac{AC}{2} = \frac{8}{2} = 4$ şi $BD = BC \sin 60° = \frac{4\sqrt{3}}{2} = 2\sqrt{3}$.

7. Dacă $E = \cos\dfrac{\pi}{6} + \mathrm{i}\ \sin\dfrac{\pi}{6}$, să se determine valoarea $a = E^{12}$. **(4 pct.)**

   a) 1; b) $1 - \mathrm{i}$; c) i; d) -1; e) $-\mathrm{i}$; f) 0.

   Soluţie. Pentru $E = \cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}$, avem

   $$a = E^{12}\left(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}\right)^{12} = \cos\frac{12\pi}{6} + i\sin\frac{12\pi}{6} = \cos 2\pi + i\sin 2\pi = 1 \Rightarrow a = 1.$$

8. Un paralelipiped dreptunghic are diagonala de lungime 4 şi laturile bazei de lungimi respectiv 2 şi 3. Atunci înălţimea paralelipipedului are lungimea **(4 pct.)**

   a) $\sqrt{3}$; b) 4; c) 1; d) 2; e) $\sqrt{5}$; f) $\sqrt{2}$.

   Soluţie. File L, l, h si d respectiv lungimea, lăţimea, înălţimea şi diagonala paralelipipedului. Atunci $d^2 = L^2 + l^2 + h^2$, deci $4^2 = 3^2 + 2^2 + h^2$; obţinem $h^2 = 16 - 4 - 9 = 3 \rightarrow h = \sqrt{3}$.

9. Dacă x este un unghi în $\left(0, \dfrac{\pi}{2}\right)$ şi $\sin x = \frac{2}{3}$, să se determine $\operatorname{tg} x$. **(4 pct.)**

a) $-\dfrac{1}{\sqrt{5}}$; b) $\dfrac{2}{\sqrt{5}}$; c) $\dfrac{1}{2}$; d) $\dfrac{1}{\sqrt{5}}$; e) $\sqrt{5}$; f) $\dfrac{\sqrt{5}}{2}$.

Soluţie. Dacă $\sin x = \frac{2}{3}$ şi $x \in (0, \frac{\pi}{2})$, rezultă $\cos x = \sqrt{1 - \sin^2 x} = \sqrt{1 - \frac{4}{9}} = \sqrt{\frac{5}{9}} = \frac{\sqrt{5}}{3}$ şi deci $\operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x} = \frac{2}{\sqrt{5}}$.

10. Aflaţi aria unui triunghi dreptunghic dacă ipotenuza are lungimea 25 cm iar perimetrul este de 60 cm. **(4 pct.)**

a) 50 cm^2 ; b) 125 cm^2 ; c) 150 cm^2 ; d) 325 cm^2 ; e) 100 cm^2 ; f) 225 cm^2 .

Soluţie. Fie a ipotenuza triunghiului, b,c catetele. Avem $a = 25$, si $p = a+b+c = 60$, unde am notat cu p perimetrul triunghiului. Atunci $b+c = 60-25 = 35$, iar prin ridicare la pătrat rezultă $b^2+c^2+2bc = 1225$. Conform teoremei lui Pitagora, avem $a^2 = b^2 + c^2$. Obţinem $2bc = 600$, iar aria este $\frac{bc}{2} = \frac{600}{4} = 150$.

11. Fie $A(2, 3)$, $B(4, -1)$. Să se afle coordonatele punctului M pentru care $\overline{MA} + \overline{MB} = \bar{0}$. **(4 pct.)**

a) (2,2); b) (3,1); c) (1,2); d) (1,3); e) (1,1); f) (2,1).

Soluţie. Fie $M(\alpha, \beta)$, atunci $\overline{MA} = (2-\alpha)\bar{i}+(3-\beta)\bar{j}$ şi $\overline{MB} = (4-\alpha)\bar{i}+(-1-\beta)\bar{j}$. Cum $\overline{MA}+\overline{MB} = \bar{0}$, avem $6 - 2\alpha = 0$ şi $2 - 2\beta = 0$, adică $\alpha = \frac{6}{2}$ şi $\beta = \frac{2}{2}$, deci obţinem $M(3, 1)$, mijlocul segmentului AB.

12. Pentru ce valoare $m \in \mathbb{R}$ vectorii $\vec{a} = m\vec{i} + 3\vec{j} + 4\vec{k}$ şi $\vec{b} = 4\vec{i} + m\vec{j} - 7\vec{k}$ sunt perpendiculari? **(4 pct.)**

a) $m = 3$; b) $m = 5$; c) $m = -4$; d) $m = 4$; e) $m = 2$; f) $m = -3$.

Soluţie. Vectorii $\vec{a}, \vec{b}$ sunt perpendiculari dacă $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$, adică $4m + 3m - 28 = 0$. Rezultă $7m = 28$, deci $m = 4$.

13. Diagonala unei feţe a unui cub de volum 8 este **(6 pct.)**

a) 2; b) $\sqrt{2}$; c) $\sqrt{3}$; d) 4; e) $2\sqrt{2}$; f) 1.

Soluţie. Diagonala unei feţe este $d^2 = 2l^2$ unde l este latura cubului. Volumul cubului este deci $V = l^3 = 8$ deci $l = 2$. Avem $d^2 = 2 \cdot 4$ deci $d = 2\sqrt{2}$.

14. Care dintre următoarele puncte aparţin elipsei raportate la axe cu semiaxele $a = 2$ şi $b = 3$? **(6 pct.)**

a) $(\sqrt{2}, \sqrt{3})$; b) $(-1, 1)$; c) $\left(\sqrt{2}, \dfrac{3}{\sqrt{2}}\right)$; d) (1,0); e) (1,2); f) $\left(2\sqrt{2}, \dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)$.

Soluţie. Ecuaţia elipsei de semiaxe $a = 2, b = 3$ este $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1$. Punctul ce verifica aceasta ecuaţie este deci $(\sqrt{2}, \frac{3}{\sqrt{2}})$.

15. Volumul unui con circular drept de generatoare 5 şi rază 4 este: **(6 pct.)**

a) $\dfrac{80\pi}{3}$; b) 20π; c) 16π; d) $\dfrac{8\pi}{3}$; e) 32π; f) 4π.

Soluţie. Înălţimea conului este H iar volumul conului este $V = \frac{\pi R^2 H}{3}$. Aflam înălţimea; avem $H^2 = G^2 - R^2$ unde G este generatoarea şi R este raza conului; obţinem $H^2 = 25 - 16 = 9$, deci $H = 3$ şi $V = \frac{\pi \cdot 3 \cdot 16}{3} = 16\pi$.

16. Fie $z = (1 + \mathrm{i})^2$. Să se calculeze $\arg z$ $(0 \leq \arg z < 2\pi)$. **(8 pct.)**

a) $\dfrac{\pi}{4}$; b) $\dfrac{\pi}{2}$; c) $\dfrac{2\pi}{5}$; d) $\dfrac{\pi}{3}$; e) $\frac{3\pi}{4}$; f) $\dfrac{\pi}{6}$.

Soluţie. Avem $z = (i + 1)^2 = 2i = 2(cos\frac{\pi}{2} + i \sin\frac{\pi}{2})$, deci $\arg z = \frac{\pi}{2}$.

17. Care este raza cercului de ecuaţie $x^2 + y^2 - 2x - 2y = 0$? **(8 pct.)**

a) 3; b) 2; c) $\sqrt{2}$; d) 1; e) -1; f) $\sqrt{3}$.

Soluţie. Restrangând pătratele, ecuaţia cercului se rescrie $(x - 1)^2 + (y - 1)^2 = (\sqrt{2})^2$, deci $R = \sqrt{2}$.

18. Să se calculeze volumul piramidei ale cărei feţe sunt planele de coordonate şi planul de ecuaţie: $3x + 6y - 2z - 24 = 0$. **(8 pct.)**

a) 64; b) 100; c) 8; d) 32; e) 36; f) $\dfrac{16}{3}$.

Soluţie. Planul intersectează axele de coordonate în punctele $A(x_0, 0, 0), B(0, y_o, 0)$ şi $C(0, 0, z_0)$. Din ecuaţia planului obţinem $x_0 = 8, y_0 = 4$ si $z_0 = -12$, deci volumul cerut este $\frac{1}{6} \mid x_0 y_0 z_0 \mid = 64$.

1. Câte soluţii distincte are ecuaţia $\bar{z} = z^2$, $z \in \mathbb{C}$? **(8 pct.)**

   a) O infinitate; b) 5; c) 3; d) 6; e) 1; f) 4.

   Soluţie. Determinăm numărul de soluţii distincte ale ecuaţiei $\bar{z} = z^2, z \in \mathbb{C}$. Din $\bar{z} = z^2$, obţinem $|\bar{z}| = |z^2| = |z|^2$. Cum $|\bar{z}| = |z|$, avem $|z| = |z|^2$, de unde $|z|(1 - |z|) = 0$. Deci $|z| = 0$ sau $|z| = 1$, de unde $z = 0$ sau $|z| = 1$. Examinăm al doilea caz. Ţinând cont că $z\bar{z} = |z|^2 = 1$, deci $\bar{z} = \frac{1}{z}$, ecuaţia se rescrie echivalent $z^3 = 1$, deci z este una dintre cele trei rădăcini complexe ale unităţii. Avem $z^3 = 1 \Leftrightarrow (z-1)(z^2+z+1) = 0 \Leftrightarrow z \in \{1, \frac{-1\pm i\sqrt{3}}{2}\}$. În final, soluţiile ecuaţiei sunt în număr de patru, $z \in \{0, 1, \frac{-1\pm i\sqrt{3}}{2}\}$.

2. Să se calculeze $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1}{x^4} \displaystyle\int_0^x t^2 \cdot \mathrm{e}^{-t^2} \cdot \sin t \, dt$. **(8 pct.)**

   a) 0; b) ∞ ; c) $\dfrac{1}{4}$; d) 1; e) $\dfrac{1}{\mathrm{e}}$; f) $\dfrac{\sin 1}{\mathrm{e}}$.

   Soluţie. Se cere să se calculeze $\lim\limits_{x\to 0} \frac{1}{x^4} \int_0^x t^2 e^{-t^2} \sin dt$. Se observă că limita este de tipul $0/0$, deci aplicăm regula lui L'Hospital şi obţinem $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\int_0^x t^2 e^{-t^2} \sin t dt}{x^4} = \lim\limits_{x\to 0} \frac{x^2 e^{-x^2} \sin x}{4x^3} = \frac{1}{4} \lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} e^{-x^2} = \frac{1}{4} \cdot 1 \cdot 1 = \frac{1}{4}$.

3. Să se calculeze aria mărginită de dreptele $x = 0$, $x = 1$, axa Ox şi de graficul funcţiei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \dfrac{x}{x^2+1}$. **(8 pct.)**

   a) $2\ln 2$; b) $\frac{1}{2}$; c) 1; d) $\ln 2$; e) $\frac{\pi}{4}$; f) $\frac{1}{2}\ln 2$.

   Soluţie. Aria este egală cu $\displaystyle\int_0^1 \frac{x}{x^2+1} dx = \frac{1}{2} \int_0^1 \frac{2x}{x^2+1} dx = \frac{1}{2} \ln(x^2+1)\Big|_0^1 = \frac{1}{2} \ln 2$.

4. Câte soluţii în $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ are ecuaţia $x^4 - x^3 y - 8y^4 = 0$? **(6 pct.)**

   a) Nici una; b) Una; c) Două; d) Patru; e) Trei; f) O infinitate.

   Soluţie. Determinăm câte soluţii ale ecuaţiei. Dacă $y = 0$, atunci $x = 0$ şi deci $x = y = 0$ este soluţie în $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ a ecuaţiei. Dacă $y \neq 0$, atunci ecuaţia este echivalentă cu $(\frac{x}{y})^4 - (\frac{x}{y})^3 - 8 = 0$. Notând $t = \frac{x}{y} \in \mathbb{Q}$, obţinem $t^4 - t^3 - 8 = 0$. Se observă că $t = 2$ este soluţie a ecuaţiei, care se rescrie $(t-2)(t^3+t^2+2t+4) = 0$. Cum $t^3 + t^2 + 2t + 4 = 0$ nu are rădăcini raţionale, rezultă că $t = 2$ este unica soluţie. Deci $\frac{x}{y} = 2$, de unde $x = 2y$. Se observă că $(0,0)$ satisface această relaţie, deci $\{(2n, n) | n \in \mathbb{Z}\}$ este mulţimea soluţiilor în $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ ale ecuaţiei date. Prin urmare ecuaţia are o infinitate de soluţii.

5. Să se calculeze $f'(2)$ pentru funcţia $f : (0, \infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^x - 2^x - x^2$. **(6 pct.)**

   a) 4; b) -4; c) $4\ln 2$; d) $4(1 + \ln 2)$; e) $2\ln 2$; f) 0.

   Soluţie. Avem $(x^x)' = (e^{\ln x^x})' = (e^{x\ln x})' = e^{x\ln x}(x\ln x)' = x^x(1 + \ln x)$ şi deci $f'(x) = x^x(1 + \ln x) - 2^x \ln 2 - 2x$. Prin urmare $f'(2) = 4(1 + \ln 2) - 4\ln 2 - 4 = 0$.

6. Se cer cea mai mică şi cea mai mare valoare pentru funcţia $f : [0, 3] \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 - 2x - 5$. **(6 pct.)**

   a) $-5, -2$; b) $-6, -2$; c) 1, 3; d) -6, 3; e) 0, 3; f) -5, 3.

   Soluţie. Funcţia este polinomială de gradul doi, deci graficul acesteia este un arc de parabolă, care conţine vârful $(\frac{-b}{a}, \frac{-\Delta}{4a}) = (1, -6)$ şi care are drept capete punctele $(0, f(0)) = (0, -5)$ şi $(3, f(3)) = (3, -2)$. Deci cea mai mica valoare a functiei este -6, iar cea mai mare valoare este -2. *Altă soluţie.* Avem $f'(x) = 2x - 2 = 2(x-1)$, iar tabelul de variaţie este

x	0		1		3
$f'(x)$	-2	$-$	0	$+$	4
$f(x)$	-5	$\searrow$	-6	$\nearrow$	-2

deci cea mai mică valoare a funcţiei este -6 şi cea mai mare valoare este -2.

7. Se cere domeniul maxim de definiţie al funcţiei $f : \mathrm{D} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \ln(1 + 3x)$.**(4 pct.)**

a) $\left(-\frac{1}{3}, \infty\right)$; b) $(0, \infty)$; c) $(3, \infty)$; d) $(-3, \infty)$; e) $(1, \infty)$; f) (e, ∞) .

Soluţie. Condiţia de existenţă a funcţiei este $1 + 3x > 0 \Leftrightarrow x > -\frac{1}{3}$. Domeniul maxim de definiţie al funcţiei este $(-\frac{1}{3}, +\infty)$.

8. Câte matrice de forma $X = \begin{pmatrix} x & y \\ y & x \end{pmatrix}$ verifică relaţia $X^2 = \mathrm{I}_2$; $x, y \in \mathbb{R}$? **(4 pct.)**

a) 4 ; b) 3; c) 2; d) 5; e) 1; f) O infinitate.

Soluţie. Relaţia din ipoteză se rescrie

$$\begin{pmatrix} x & y \\ y & x \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x & y \\ y & x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x^2+y^2 & 2xy \\ 2xy & x^2+y^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2+y^2 = 1 \\ xy = 0, \end{cases}$$

deci $x = 0$ sau $y = 0$. Dacă $x = 0$, atunci $y^2 = 1$, de unde $y = \pm 1$. Dacă $y = 0$, atunci $x^2 = 1$, de unde $x = \pm 1$. Prin urmare matricele căutate sunt $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$, deci patru matrice verifică relaţia din enunţ.

9. Fie $a \geq 0$, $b \geq 0$ astfel încât $\sqrt{a} + \sqrt{b} = \sqrt{a+b}$. Atunci **(4 pct.)**

a) $ab = 1$; b) $a = 0, b = 0$; c) $a > 1$; d) $a = 0$ sau $b = 0$; e) $a < b$; f) $a^2 + b^2 = 1$.

Soluţie. Din $\sqrt{a} + \sqrt{b} = \sqrt{a+b}$, rezultă $(\sqrt{a} + \sqrt{b})^2 = (\sqrt{a+b})^2$, adică $a + b + 2\sqrt{ab} = a + b$, de unde $ab = 0$. Deci $a = 0$ sau $b = 0$.

10. Ecuaţia tangentei la graficul funcţiei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{x^3}{3} - 3x^2 + 5x + 2$ în punctul de inflexiune este **(4 pct.)**

a) $y = 4x - 9$; b) $y = -4x$; c) $y = 4x + 13$; d) $y = -4x + 11$; e) $y = -1$; f) $y = -4x + 13$.

Soluţie. Avem $f'(x) = x^2 - 6x + 5$ si $f''(x) = 2x - 6$. Din $f''(x) = 0$, obţinem $x = 3$ şi punctul de inflexiune $(3, f(3))$, adică $(3, -1)$. Tangenta la grafic în punctul $(3, -1)$ este $y + 1 = f'(3)(x - 3)$. Cum $f'(3) = -4$, tangenta are ecuaţia $y + 1 = -4(x - 3)$, adică $y = -4x + 11$.

11. Să se calculeze $x^2 + y$ dacă $2^x - 3y = 0$, $3^x - 2y = 0$ cu $x, y \in \mathbb{R}$. **(4 pct.)**

a) $\frac{1}{6}$; b) $\frac{5}{6}$; c) $\frac{7}{6}$; d) $\frac{11}{6}$; e) 6 ; f) -6 .

Soluţie. Din cele două relaţii rezultă, respectiv, $y = \frac{2^x}{3}$ şi $y = \frac{3^x}{2}$. Deci $\frac{2^x}{3} = \frac{3^x}{2} \Leftrightarrow 2^{x+1} = 3^{x+1} \Leftrightarrow (\frac{2}{3})^{x+1} = 1 = (\frac{2}{3})^0$, de unde $x = -1$. Atunci $y = \frac{1}{6}$ şi deci $x^2 + y = (-1)^2 + \frac{1}{6} = \frac{7}{6}$.

12. Să se determine abscisele punctelor de extrem local ale funcţiei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^4 - 4x^3$. **(4 pct.)**

a) 0, 2, -2 ; b) 0 ; c) 0 i 3 ; d) 2 ; e) 3 ; f) 2, -2.

Soluţie. Avem $f'(x) = 4x^3 - 12x^2 = 4x^2(x - 3)$. Tabelul de variaţie al funcţiei f este:

x	$-\infty$		0		3		$+\infty$
$f'(x)$	$-\infty$	$-$	0	$-$	0	$+$	$+\infty$
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	0	$\searrow$	-27	$\nearrow$	$+\infty$

de unde se observă că funcţia admite un singur punct de extrem local (minim), de abscisă $x = 3$.

13. Să se rezolve ecuaţia $3^{x+1} = 9^{\sqrt{x}}$. **(4 pct.)**

a) 4; b) 0 şi 1; c) 1; d) 0; e) -1; f) Nu are soluţii.

Soluţie. Rezolvăm ecuaţia $3^{x+1} = 9^{\sqrt{x}}$. Condiţia de existenţă a radicalului este $x \geq 0$. Ecuaţia se rescrie

$$3^{x+1} = 3^{2\sqrt{x}} \Leftrightarrow x + 1 = 2\sqrt{x} \Leftrightarrow x - 2\sqrt{x} + 1 = 0 \Leftrightarrow (\sqrt{x} - 1)^2 = 0,$$

deci $\sqrt{x} = 1$, adică $x = 1$.

14. Să se calculeze valoarea expresiei $E = \dfrac{x_2+x_3}{x_1} + \dfrac{x_1+x_3}{x_2} + \dfrac{x_1+x_2}{x_3}$, unde x_1, x_2, x_3 sunt soluţiile ecuaţiei $x^3 - 6x^2 + x + 2 = 0$. **(4 pct.)**

a) 1; b) -3; c) -6; d) -1; e) 3; f) 0.

Soluţie. Scriem relaţiile lui Viete: $\begin{cases} x_1+x_2+x_3 = 6 \\ x_1x_2+x_1x_3+x_2x_3 = 1 \\ x_1x_2x_3 = -2 \end{cases}$. Obţinem

$$\begin{aligned} E &= \frac{x_2+x_3}{x_1} + \frac{x_1+x_3}{x_2} + \frac{x_1+x_2}{x_3} = \frac{6-x_1}{x_1} + \frac{6-x_2}{x_2} + \frac{6-x_3}{x_3} = \\ &= 6\left(\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+\frac{1}{x_3}\right) - 3 = 6 \cdot \frac{x_2x_3+x_1x_3+x_1x_2}{x_1x_2x_3} - 3 = -6. \end{aligned}$$

15. Să se determine $m \in \mathbb{R}$ dacă sistemul $2x + my = 0$, $3x + 2y = 0$ admite numai soluţia nulă. **(4 pct.)**

a) $m = \frac{3}{4}$; b) $m = \frac{4}{3}$; c) $m \neq \frac{4}{3}$; d) $m \neq 0$; e) $m = -\frac{3}{4}$; f) $m = 3$.

Soluţie. Sistemul are numai soluţia nulă dacă $\begin{vmatrix} 2 & m \\ 3 & 2 \end{vmatrix} \neq 0 \Leftrightarrow 4 - 3m \neq 0 \Leftrightarrow m \neq \frac{4}{3}$.

16. Să se rezolve inecuaţia $\sqrt{-x-2} - \sqrt[3]{x+5} < 3$. **(4 pct.)**

a) $[-6,-5]$; b) $(-6,-2)$; c) $x \in (-\infty,-2]$; d) $(-5,-2)$; e) $x \in (-\infty,-6]$; f) $x \in (-6,-2]$.

Soluţie. Condiţia de existenţă a radicalului de ordin par este

$$-x-2 \geq 0 \Leftrightarrow x \leq -2. \tag{1}$$

Notând $\begin{cases} u = \sqrt{-x-2} \geq 0 \\ v = \sqrt[3]{x+5} \end{cases}$, obţinem relaţiile $\begin{cases} u^2 + v^3 = 3 \\ u - v < 3 \end{cases}$. Din prima relaţie rezultă $u = \sqrt{3-v^3}$, deci înlocuind in inegalitate, obţinem $\sqrt{3-v^3} - v < 3 \Leftrightarrow \sqrt{3-v^3} < v+3$. Distingem două cazuri: i) dacă $v+3 < 0$, obţinem $0 \leq \sqrt{3-v^3} < v+3 < 0$ contradicţie, deci ecuaţia nu are soluţii; ii) dacă $v+3 \geq 0$ atunci

$$v \geq -3 \Leftrightarrow \sqrt[3]{x+5} \geq -3 \Leftrightarrow x \geq -32. \tag{2}$$

Ridicând la pătrat ambii membri ai inegalităţii $\sqrt{3-v^3} < v+3$, obţinem

$$3 - v^3 < v^2 + 6v + 9 \Leftrightarrow v^3 + v^2 + 6v + 6 > 0 \Leftrightarrow (v+1)(v^2+6) > 0 \Leftrightarrow v+1 > 0.$$

Această inegalitate se rescrie

$$\sqrt[3]{x+5} > -1 \Leftrightarrow x+5 > -1 \Leftrightarrow x > -6 \tag{3}$$

Din relaţiile (1), (2) şi (3), obţinem $x \in (-6,-2]$.

17. Numerele x, $2x+3$, $x+2$ sunt termenii unei progresii aritmetice, în ordinea scrisă. Să se determine raţia progresiei. **(4 pct.)**

a) 3 ; b) 2 ; c) $x+3$; d) -1 ; e) 1 ; f) -2 .

Soluţie. Condiţia ca numerele să fie termenii unei progresii aritmetice, în ordinea scrisă, este: $x+(x+2) = 2(2x+3) \Leftrightarrow 2x+2 = 4x+6 \Leftrightarrow 2x = -4 \Leftrightarrow x = -2$, deci termenii devin $-2, -1, 0$, iar raţia este 1.

18. Se cere limita $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{x+\sqrt{x}} - \sqrt{x}\right)$. **(4 pct.)**

a) 1 ; b) $\frac{1}{2}$; c) ∞; d) 2; e) 0; f) Nu există.

Soluţie. Rationalizând, obţinem

$$\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{x+\sqrt{x}} - \sqrt{x}\right) = \lim_{x\to\infty} \frac{x+\sqrt{x}-x}{\sqrt{x+\sqrt{x}}+\sqrt{x}} = \lim_{x\to\infty} \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}\left(\sqrt{1+\frac{1}{\sqrt{x}}}+1\right)} = \frac{1}{2}.$$

1. Un pătrat are aria numeric egală cu 9. Să se determine lungimea diagonalei pătratului. **(4 pct.)**

   a) $\frac{9}{2}$; b) 6; c) $5\sqrt{2}$; d) $3\sqrt{2}$; e) $\frac{3}{2}$; f) 4.

   Soluţie. Dacă a este latura pătratului, atunci diagonala sa este $d = a\sqrt{2}$. Avem $Aria = 3^2 = 9$, de unde $a = 3$. Deci $d = 3\sqrt{2}$.

2. Dacă $\sin x = \frac{1}{3}$ şi $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$, să se calculeze $\operatorname{tg} x$ **(4 pct.)**

   a) $\sqrt{2}$; b) $2\sqrt{2}$; c) $4\sqrt{2}$; d) $\frac{2}{3}$; e) $\frac{\sqrt{2}}{4}$; f) $-\sqrt{2}$.

   Soluţie. Cum $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$, atunci $\cos x > 0$ si deci $\cos x = \sqrt{1 - \sin^2 x} = \sqrt{1 - \frac{1}{9}} = \frac{2\sqrt{2}}{3}$. Obţinem $\operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x} = \frac{1}{3} \cdot \frac{3}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{4}$.

3. Un paralelipiped dreptunghic are lungimile laturilor bazei 3 şi 2, iar diagonala paralelipipedului are lungimea 5. Să se calculeze lungimea înălţimii paralelipipedului. **(4 pct.)**

   a) $2\sqrt{3}$; b) $\sqrt{3}$; c) 1; d) 12; e) 2; f) 4.

   Soluţie. Dacă L, l, h şi d sunt lungimea, lăţimea, înălţimea şi respectiv, diagonala paralelipipedului dreptunghic, atunci $d^2 = L^2 + l^2 + h^2$. Obţinem $h^2 = 25 - 9 - 4 = 12$, de unde $h = 2\sqrt{3}$.

4. Să se determine măsura unghiului B al unui triunghi ABC dreptunghic în A, ştiind că $b + c = a\sqrt{2}$ **(4 pct.)**

   a) $\frac{\pi}{15}$; b) $\frac{\pi}{6}$; c) $\frac{\pi}{12}$; d) $\frac{\pi}{3}$; e) $\frac{5\pi}{12}$; f) $\frac{\pi}{4}$.

   Soluţie. Folosind teorema sinusului $\frac{a}{\sin \hat{A}} = \frac{b}{\sin \hat{B}} = \frac{c}{\sin \hat{C}}$ şi proporţii derivate, obţinem $\frac{a}{\sin \hat{A}} = \frac{b+c}{\sin \hat{B} + \sin \hat{C}}$. Folosind relaţia $b + c = a\sqrt{2}$, rezultă $\sin \hat{B} + \sin \hat{C} = \sqrt{2} \sin \hat{A}$. Dar $\sin \hat{A} = \sin \frac{\pi}{2} = 1$, deci $\sin \hat{B} + \sin \hat{C} = \sqrt{2}$, de unde $2 \sin \frac{\hat{B}+\hat{C}}{2} \cos \frac{\hat{B}-\hat{C}}{2} = \sqrt{2}$. Cum $\sin \frac{\hat{B}+\hat{C}}{2} = \sin \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$, rezultă $\cos \frac{\hat{B}-\hat{C}}{2} = 1$, de unde $\frac{\hat{B}-\hat{C}}{2} = 0$, deci $\hat{B} = \hat{C}$. Prin urmare măsura unghiului $\hat{B}$ este $\frac{\pi}{4}$. *Altfel.* Folosind teorema lui Pitagora, obţinem sistemul

   $$\begin{cases} a^2 = b^2 + c^2 \\ b + c = a\sqrt{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b^2 + c^2 = a^2 \\ b^2 + c^2 + 2bc = 2a^2 \end{cases} \tag{1}$$

   de unde rezultă

   $$a^2 = 2bc \Leftrightarrow \frac{b}{a} \cdot \frac{c}{a} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \sin \hat{B} \cdot \cos \hat{B} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \sin 2\hat{B} = 1 \Leftrightarrow 2\hat{B} = \frac{\pi}{2} \Rightarrow \hat{B} = \frac{\pi}{4}.$$

   Altfel. În sistemul (1) scădem din dublul primei ecuaţii pe cea de-a doua; rezultă $(b - c)^2$, deci $b = c$, triunghi dreptunghic isoscel, deci $\hat{B} = \frac{\pi}{4}$.

5. Să se calculeze aria triunghiului având laturile 10, 10, 12. **(4 pct.)**

   a) 50; b) 48; c) $24\sqrt{2}$; d) 24; e) 42; f) 36.

   Soluţie. Aplicând formula lui Heron, rezultă $A = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$, unde p este semiperimetrul. Avem $p = 16, p - b = 6, p - c = 6, p - c = 4$ şi deci $A = \sqrt{16 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 4} = \sqrt{8^2 \cdot 6^2} = 48$. *Altfel.* Triunghiul este isoscel, deci folosind teorema lui Pitagora, înălţimea corespunzătoare laturii mari este $h = \sqrt{10^2 - \left(\frac{12}{2}\right)^2} = 8$, deci aria este $A = \frac{12 \cdot 8}{2} = 48$.

6. Câte soluţii are ecuaţia $\sin 2x = 1$, situate în intervalul$(0, 3\pi)$? **(4 pct.)**

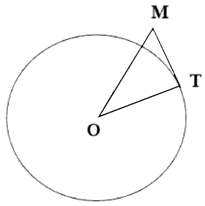
   a) Şase; b) Patru; c) Două; d) Trei; e) Una; f) O infinitate.

   Soluţie. Avem $\sin 2x = 1 \Leftrightarrow 2x \in \{(4k+1)\frac{\pi}{2} | k \in \mathbb{Z}\}$, de unde $x \in \{(4k+1)\frac{\pi}{4} | k \in \mathbb{Z}\}$. Soluţiile din intervalul $(0, 3\pi)$ sunt: $\{\frac{\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}, \frac{9\pi}{4}\}$.

7. Se consideră un cerc de centru O şi un punct M exterior cercului astfel încât $OM = 13$. Se cere raza cercului ştiind că lungimea unei tangente la cerc duse din M este 5. **(4 pct.)**

a) 6; b) 10; c) 13; d) 8; e) 12; f) $\sqrt{194}$.

Soluţie. Fie T punctul de tangenţă. Avem $OM = 13$ şi $MT = 5$.



Dacă R este raza cercului, atunci, aplicând teorema lui Pitagora în triunghiul dreptunghic OMT ($\hat{T} = 90°$), rezultă $R^2 = OT^2 = OM^2 - MT^2 = 13^2 - 5^2 = 144$, de unde $R = 12$.

8. Într-un cerc de diametru 8 se înscrie un triunghi echilateral. Să se calculeze lungimea laturii triunghiului. **(4 pct.)**

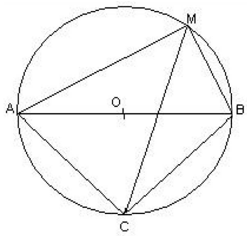
a) 4 ; b) $4\sqrt{2}$; c) $4\sqrt{3}$; d) $\frac{4\sqrt{3}}{3}$; e) $\frac{3\sqrt{2}}{2}$; f) $2\sqrt{3}$.

Soluţie. Dacă R este raza cercului circumscris, iar a este latura triunghiului echilateral înscris, atunci $a = R\sqrt{3}$. Dar $R = 4$, deci $a = 4\sqrt{3}$.

9. Se consideră un cerc de diametru AB (orizontal) şi fie C mijlocul arcului inferior de semicerc. Dacă M este un punct situat pe semicercul superior, să se calculeze raportul $\frac{MA + MB}{MC}$ **(4 pct.)**

a) $\sqrt{3} + 1$; b) 2; c) $1 + \sqrt{2}$; d) 3; e) $\sqrt{3}$; f) $\sqrt{2}$.

Soluţie. Cum C este mijlocul arcului inferior de semicerc, rezultă $\text{măs}\,(\widehat{ABC}) = \text{măs}\,(\widehat{BAC}) = \frac{\pi}{4}$.



Folosind teorema sinusului avem $MA = 2R\sin B, MB = 2R\sin A, MC = 2R\sin\widehat{MAC} = 2R\sin\widehat{MBC}$. Deci

$$MC = \frac{2R\sin\widehat{MAC} + 2R\sin\widehat{MBC}}{2} = R(\sin\widehat{MAC} + \sin\widehat{MBC}) = R\left(\sin\left(A + \frac{\pi}{4}\right) + \sin\left(B + \frac{\pi}{4}\right)\right).$$

Atunci

$$\frac{MA + MB}{MC} = \frac{2R(\sin A + \sin B)}{R(\sin(A + \frac{\pi}{4}) + \sin(B + \frac{\pi}{4}))} = \frac{4\sin\frac{A+B}{2}\cos\frac{A-B}{2}}{2\sin(\frac{A+B}{2} + \frac{\pi}{4})\cos\frac{A-B}{2}} = \frac{2\sin\frac{\pi}{4}}{\sin(\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{4})} = \frac{2\frac{\sqrt{2}}{2}}{1} = \sqrt{2}.$$

10. Să se calculeze aria triunghiului având vârfurile $A\ (-1, -3)$, $B\ (1, 5)$, $C\ (4, 1)$. **(4 pct.)**

a) 16; b) 32; c) 14; d) $12\sqrt{2}$; e) 10; f) $16\sqrt{2}$.

Soluţie. Avem $A = \frac{1}{2}|\triangle|$, unde $\triangle = \begin{vmatrix} -1 & -3 & 1 \\ 1 & 5 & 1 \\ 4 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -32$, deci $A = \frac{1}{2}|-32| = 16$.

11. Să se determine $m \in \mathbb{R}$ dacă vectorii $\vec{a} = \vec{i} + m\vec{j}$, $\vec{b} = 6\vec{i} + 3\vec{j}$ sunt perpendiculari **(4 pct.)**

a) -2; b) ± 2 ; c) 0; d) 2; e) $\pm\frac{1}{2}$; f) $-\frac{1}{2}$.

Soluţie. Condiţia de perpendicularitate a vectorilor $\vec{a}$ şi $\vec{b}$ este $\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle = 0 \Leftrightarrow 1 \cdot 6 + m \cdot 3 = 0$, de unde $m = -2$.

12. Să se determine înălţimea unui con circular drept având raza bazei 1 şi aria totală 3π. **(4 pct.)**

a) $\sqrt{2}$; b) 3; c) $\sqrt{3}$; d) $\pi\sqrt{3}$; e) $\pi\sqrt{2}$; f) $2\sqrt{2}$.

Soluţie. Aria totala a unui con circular drept este $A_t = \pi R(R + G)$, unde R este raza bazei şi G este generatoarea. Obţinem $3\pi = \pi(1 + G)$, de unde $G = 2$. Atunci înălţimea h a conului drept dat este $h = \sqrt{G^2 - R^2} = \sqrt{3}$.

13. Să se calculeze distanţa AB dacă $A\ (1, 2, 1)$, $B\ (2, 4, -1)$. **(6 pct.)**

a) 1; b) 3; c) $\sqrt{5}$; d) 4; e) 9; f) $2\sqrt{2}$.

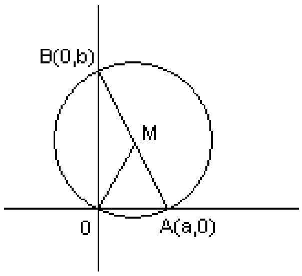
Soluţie. Distanţa dintre cele două puncte este

$$AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 + (z_B - z_A)^2} = \sqrt{(2-1)^2 + (4-2)^2 + (-1-1)^2} = \sqrt{9} = 3.$$

14. Să se scrie ecuaţia cercului circumscris triunghiului OAB având vârfurile $O\ (0,0)$, $A\ (a, 0)$, $B\ (0, b)$, $a > 0$, $b > 0$. **(6 pct.)**

a) $x^2 + y^2 - ax - by = 0$; b) $x^2 + y^2 + ax + by = 0$; c) $x^2 + y^2 - ax = 0$; d) $x^2 + y^2 - by = 0$; e) $x^2 + y^2 - a^2 - b^2 = 0$; f) $x^2 + y^2 - ax + by = 0$.

Soluţie. Avem $A \in Ox, B \in Oy$, deci triunghiul ABC este dreptunghic în O. Atunci centrul cercului este mijlocul M al segmentului AB, iar raza este mediana OM corespunzătoare ipotenuzei. Avem $M\left(\frac{a}{2}, \frac{b}{2}\right)$ şi $OM = \sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 + \left(\frac{b}{2}\right)^2} = \frac{\sqrt{a^2+b^2}}{2}$.



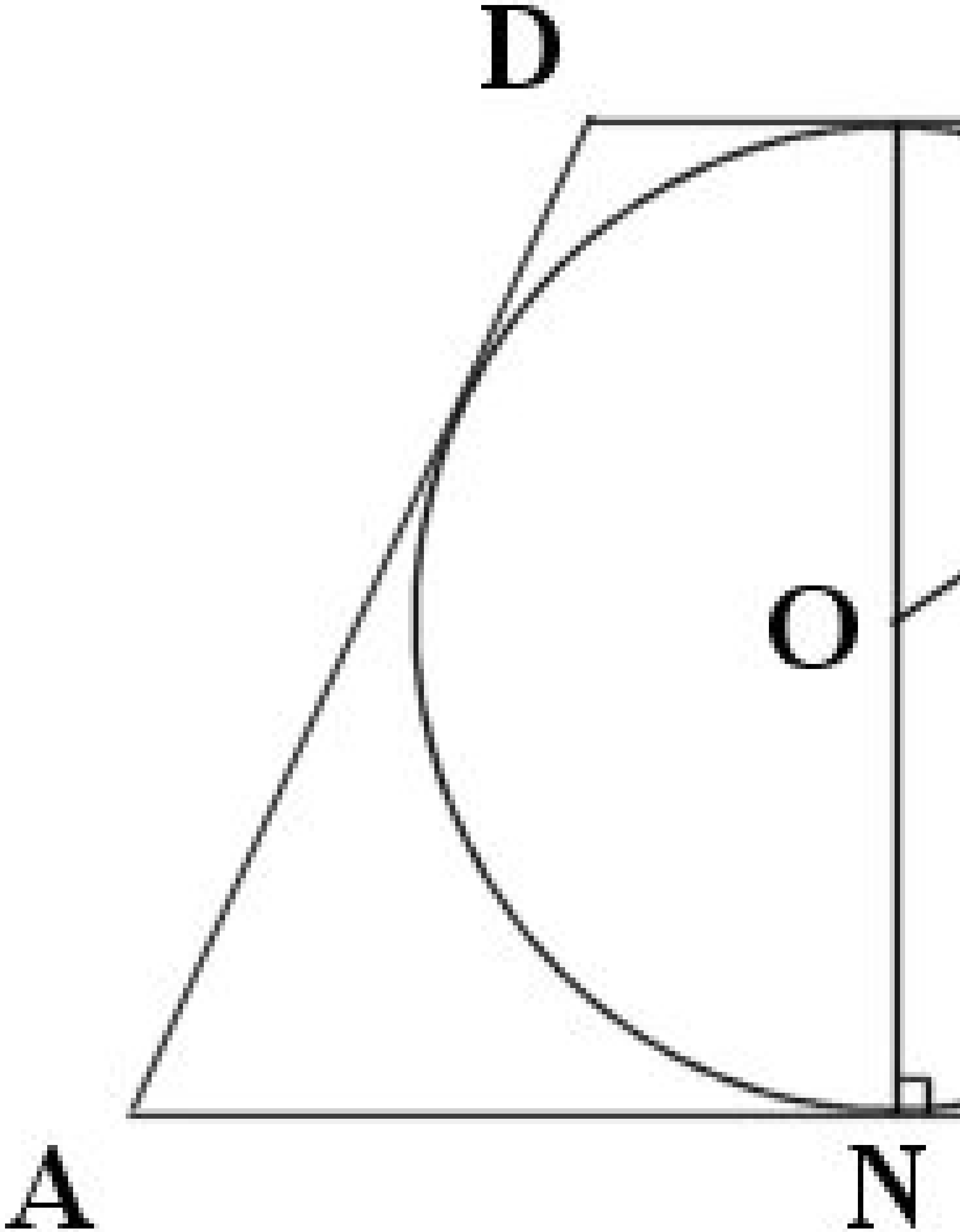
Cercul căutat are centrul în M şi de rază OM, deci are ecuaţia

$$\left(x - \frac{a}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{b}{2}\right)^2 = \left(\frac{\sqrt{a^2+b^2}}{2}\right)^2 \Leftrightarrow x^2 + y^2 - ax - by = 0.$$

15. Un trapez isoscel circumscris unui cerc are lungimile bazelor 8 şi 2. Să se calculeze aria trapezului. **(6 pct.)**

a) 18; b) 28; c) 15; d) 10; e) 12; f) 20.

Soluţie. Fie $ABCD$ trapezul isoscel din enunţ $(AB||CD, AD = BC)$, iar M, N respectiv mijloacele segmentelor CD şi AB (vezi desenul). Avem $MC = 1$, $NB = 4$ şi deci $BC = CP + PB = MC + NB = 5$. Dacă CQ $(Q \in AB)$ este înălţimea trapezului, atunci $CQ^2 = CB^2 - BQ^2 = 5^2 - 3^2 = 16$ şi deci $CQ = 4$. Aria trapezului este deci $\frac{(AB+DC)\cdot CQ}{2} = 20$.


D
O
A
N

16. Se dau 4 puncte în spaţiu, necoplanare. Câte plane distincte care conţin câte trei din punctele date se pot considera? **(8 pct.)**

a) 5; b) 3; c) 4; d) 6; e) 2; f) 8.

Soluţie. Numărul planelor este $C_4^3 = 4$.

17. Se consideră numerele complexe $z_1 = 1$, $z_2 = i$. Să se determine $a \quad (a > 0)$ dacă imaginile punctelor z_1, z_2 şi $z_3 = a\,(1+i)$ formează un triunghi echilateral. **(8 pct.)**

a) $\sqrt{3}$; b) $\dfrac{\sqrt{3}-1}{2}$; c) $\dfrac{1+\sqrt{3}}{2}$; d) $\sqrt{3}+1$; e) $\dfrac{\sqrt{2}+1}{2}$; f) $\dfrac{\sqrt{2}-1}{2}$.

Soluţie. Triunghiul este echilateral dacă $|z_2 - z_1| = |z_3 - z_1| = |z_3 - z_2| \Leftrightarrow |i-1| = |(a-1)+ai| = |a + i(a-1)|$. Deci $\sqrt{2} = \sqrt{(a-1)^2 + a^2}$, de unde $2 = 2a^2 - 2a + 1$, adică $2a^2 - 2a - 1 = 0$. Obţinem $a_{1,2} = \frac{1\pm\sqrt{3}}{2}$, şi cum $a > 0$, rezultă $a = \frac{1+\sqrt{3}}{2}$.

18. Să se determine perechea (m, n) de numere reale, dacă punctele $(1,\ m,\ 3)$, $(2,\ 3,\ n)$, $(3,\ 0,\ 5)$ sunt colineare. **(8 pct.)**

a) $(-6, 4)$; b) $(6, 3)$; c) $(6, 2)$; d) $(6, -2)$; e) $(6, 4)$; f) $(0, 4)$.

Soluţie. Punctele $A(1, m, 3), B(2, 3, n), C(3, 0, 5)$ sunt colineare d.n.d. $\overline{AB} || \overline{AC}$, deci dacă vectorii $\overline{AB} = (2-1)\bar{i} + (3-m)\bar{j} + (n-3)\bar{k}$ şi $\overline{AC} = (3-1)\bar{i} + (0-m)\bar{j} + (5-3)\bar{k}$ au componentele proporţionale. Obţinem şirul de rapoarte egale

$$\frac{1}{2} = \frac{3-m}{-m} = \frac{n-3}{2} \Leftrightarrow \begin{cases} 6-m=0 \\ n-3=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m=6 \\ n=4, \end{cases}$$

deci $(m, n) = (6, 4)$.

1. Să se calculeze $i + i^3 + i^5$. **(4 pct.)**

   a) 1; b) $-i$; c) 0; d) i; e) -1; f) $2i$.

   Soluţie. Folosind relaţiile $i^2 = -1$ şi $i^4 = 1$, rezultă $i + i^3 + i^5 = i - i + i = i$.

2. Fie $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \dfrac{x^3 + 5x}{x^2 + 1}$. Să se calculeze $I = \displaystyle\int_0^3 f^{-1}(t)\,dt$, unde f^{-1} este inversa funcţiei bijective f. **(4 pct.)**

   a) $\frac{1}{2}(5 - 4\ln 2)$; b) $\frac{3 + 4\ln 2}{2}$; c) $\frac{1}{2}(5 + 4\ln 2)$; d) $\ln 2$; e) $\frac{1}{2}(2 + \ln 2)$; f) $\frac{1}{2}(5 - \ln 2)$.

   Soluţie. Dacă $f^{-1}(t) = x$, rezultă $t = f(x)$, $dt = f'(x)dx$, iar $f(0) = 0 \Rightarrow f^{-1}(0) = 0$ şi $f(1) = 3 \Rightarrow f^{-1}(3) = 1$, deci efectuând schimbarea de variabilă $x = f^{-1}(t)$, şi apoi integrând prin părţi, integrala se rescrie

$$I = \int_0^1 xf'(x)dx = xf(x)\,|_0^1 - \int_0^1 f(x)dx = f(1) - \int_0^1 \frac{x(x^2+1) + 4x}{x^2+1}dx =$$
$$= 3 - \int_0^1 xdx - 2\int_0^1 \frac{2x}{x^2+1}dx = 3 - \frac{1}{2} - 2\ln 2 = \frac{5}{2} - 2\ln 2 = \frac{1}{2}(5 - 4\ln 2).$$

3. Să se determine parametrul real m dacă sistemul $x + y = m$, $x + my = 1$ este compatibil nedeterminat. **(4 pct.)**

   a) 2; b) 0, 1; c) 1; d) -1; e) $m \in \mathbb{R}$; f) 0.

   Soluţie. Determinantul matricii coeficienţilor este $\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & m \end{vmatrix} = m - 1$. El se anulează pentru $m = 1$, pentru care cele două ecuaţii sunt echivalente, deci sistem compatibil nedeterminat cu un grad de libertate.

4. Să se determine abscisele punctelor de extrem ale funcţiei $f : \mathbb{R} \longrightarrow R$, $f(x) = x^4 + 8x^3$. **(4 pct.)**

   a) 0; b) -1; c) -2; d) 1; e) -6; f) 0, -6.

   Soluţie. Avem $f'(x) = 4x^3 + 24x^2 = 4x^2(x + 6)$, iar $f'(x) = 0 \Rightarrow x \in \{0, -6\}$. Dar $f'(x) \le 0, \forall x \le -6$ şi $f'(x) \ge 0, \forall x \ge -6$, deci $x = -6$ este singurul punct de extrem.

5. Să se calculeze $\lim\limits_{n\to\infty} \left(n + 2 - \sqrt{n^2 + n + 3}\right)$. **(4 pct.)**

   a) $\frac{5}{2}$; b) 2; c) 1; d) ∞; e) $\frac{3}{2}$; f) 0.

   Soluţie. Amplificând cu conjugata, obţinem succesiv

$$\lim_{n\to\infty}(n + 2 - \sqrt{n^2+n+3}) = 2 + \lim_{n\to\infty} \frac{n^2 - n^2 - n - 3}{n + \sqrt{n^2+n+3}} = 2 - \lim_{n\to\infty} \frac{1 + \frac{3}{n}}{1 + \sqrt{1 + 1/n + 3/n^2}} = 2 - \frac{1}{2} = \frac{3}{2}.$$

6. Să se calculeze aria mărginită de parabola $y = 2x - x^2$ şi axa Ox. **(4 pct.)**

   a) 2; b) 3; c) $-\frac{4}{3}$; d) -1; e) $\frac{4}{3}$; f) 1.

   Soluţie. Aria se află între axa Ox şi arcul de parabolă aflat deasupra acestei axe, deci corespunzător valorilor $x \in [0, 2]$. Obţinem aria $A = \displaystyle\int_0^2 (2x - x^2)dx = \left(x^2 - \frac{x^3}{3}\right)\Big|_0^2 = 4 - \frac{8}{3} = \frac{4}{3}$.

7. Pentru ce valori ale parametrului real m matricea $A = \begin{pmatrix} 1 & m \\ m & 4 \end{pmatrix}$ admite inversă ? **(4 pct.)**

   a) $m = -2$; b) $m \neq \pm 2$; c) $m = 2$; d) $m \in \{-2, 2\}$; e) $m = 0$; f) $m = 4$.

   Soluţie. Matricea trebuie să aibă determinantul nenul, deci $\det A \neq 0 \Leftrightarrow 4 - m^2 \neq 0 \Leftrightarrow m \neq \pm 2$.

8. Să se determine numărul soluţiilor ecuaţiei $\hat{2}x = \hat{0}$ în inelul $\mathbb{Z}_6$. **(4 pct.)**

a) 0; b) 2; c) 4; d) 6; e) 1; f) 3.

Soluţie. Verificând pe rând valorile din $\mathbb{Z}_6 = \{\hat{0}, \hat{1}, \hat{2}, \hat{3}, \hat{4}, \hat{5}\}$, se observă că $\hat{2}x = \hat{0}$ are doar soluţiile $\hat{0}$ şi $\hat{3}$, deci numărul de soluţii este 2.

9. Se cer asimptotele verticale ale graficului funcţiei reale $f : (0, \infty) \setminus \{2\} \longrightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \dfrac{\ln x}{x-2}$. **(4 pct.)**

a) $x = 1$; b) $x = 0$; c) $x = 2$; d) $x = 0$, $x = 1$; e) Nu există; f) $x = 0$, $x = 2$.

Soluţie. Avem $\lim\limits_{x \searrow 0} \frac{\ln x}{x-2} = +\infty$, $\lim\limits_{x \searrow 2} \frac{\ln x}{x-2} = +\infty$, $\lim\limits_{x \nearrow 2} \frac{\ln x}{x-2} = -\infty$, deci $x = 0$ si $x = 2$ sunt asimptotele verticale ale funcţiei f.

10. Să se rezolve ecuaţia $2^{x+1} = 4^{\sqrt{x}}$. **(4 pct.)**

a) 3; b) 2; c) 1; d) 4; e) 0; f) -1.

Soluţie. Condiţia de existenţă a radicalului este $x \geq 0$. Ecuaţia se rescrie $2^{x+1} = 2^{2\sqrt{x}} \Leftrightarrow x + 1 = 2\sqrt{x} \Leftrightarrow (\sqrt{x} - 1)^2 = 0 \Leftrightarrow x = 1$.

11. Să se determine punctele critice ale funcţiei $f : R^{\star} \longrightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x + \dfrac{1}{x}$. **(4 pct.)**

a) 2, -2; b) -1, 1; c) Nu există; d) 1; e) -1; f) 3.

Soluţie. Calculăm derivata funcţiei f; obţinem $f'(x) = 1 - \frac{1}{x^2} = \frac{x^2-1}{x^2}$, deci $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x \in \{\pm 1\}$.

12. Fie x_1 şi x_2 soluţiile ecuaţiei $x^2 - 3x + 2 = 0$. Să se calculeze $x_1 + x_2 + x_1 x_2$. **(4 pct.)**

a) -2; b) 5; c) -5; d) 6; e) 2; f) 0.

Soluţie. Din relaţiile Viétè avem $S = x_1 + x_2 = 3$, $P = x_1 x_2 = 2$, deci $x_1 + x_2 + x_1 x_2 = S + P = 3 + 2 = 5$.

13. Să se rezolve ecuaţia $\sqrt{x+1} + \dfrac{1}{\sqrt{x+1}} = 2$. **(6 pct.)**

a) 3; b) 1; c) 4; d) 2; e) 0; f) $x \neq -1$.

Soluţie. Condiţia de existenţă a radicalului este $x \geq -1$. Notăm $\sqrt{x+1} = t \geq 0$ şi ecuaţia se rescrie $t^2 - 2t + 1 = 0 \Rightarrow t = 1 \geq 0$, deci $\sqrt{x+1} = 1 \Leftrightarrow x = 0$.

14. Să se calculeze $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{(x+1)^3 - (x-1)^3}{2x^2 + x + 1}$. **(6 pct.)**

a) 2; b) ∞; c) 1; d) $-\infty$; e) 3; f) 0.

Soluţie. Obţinem $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{(x+1)^3 - (x-1)^3}{2x^2 + x + 1} = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{6x^2 + 2}{2x^2 + x + 1} = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{6 + \frac{2}{x^2}}{2 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}} = \dfrac{6}{2} = 3$.

15. Să se determine $a^2 + b^2$ dacă $a + 2b = 1$ şi $2a + b = 2$. **(6 pct.)**

a) 3; b) 2; c) 0; d) 4; e) 1; f) -2.

Soluţie. Rezolvând sistemul liniar $\begin{cases} a + 2b = 1 \\ 2a + b = 2 \end{cases}$, obţinem $a = 1, b = 0$, deci $a^2 + b^2 = 1$.

16. Să se calculeze $f'(0)$ pentru $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \dfrac{x}{x^2+1}$. **(8 pct.)**

a) 2; b) -1; c) -2; d) 1; e) 4; f) 0.

Soluţie. Avem $f'(x) = \frac{1-x^2}{(x^2+1)^2}$, deci $f'(0) = 1$.

17. Să se determine valorile parametrului real m dacă polinomul $X^2 - (m+3)X + 9$ are rădăcini duble. **(8 pct.)**

a) 0; b) 3, -9; c) -9; d) 3; e) 1; f) -3, 9.

Soluţie. Punem condiţia ca discriminantul ecuaţiei de gradul doi să se anuleze. Obţinem

$$\Delta = 0 \Leftrightarrow (m+3)^2 - 36 = 0 \Leftrightarrow m + 3 \in \{\pm 6\} \Leftrightarrow m \in \{3, -9\}.$$

18. Fie F primitiva funcţiei $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 + 2x$ care se anulează în punctul $x = 1$. Să se calculeze $F(2)$. **(8 pct.)**

a) 0; b) $\dfrac{20}{3}$; c) 8; d) $\dfrac{16}{3}$; e) 2; f) 1.

Soluţie. Integrăm funcţia f; obţinem $F(x) = \int (x^2 + 2x)dx = \frac{x^3}{3} + x^2 + C$; Condiţia $F(1) = 0$ se rescrie $\frac{4}{3} + C = 0 \Leftrightarrow C = -\frac{4}{3}$, deci $F(2) = \frac{8}{3} + 4 - \frac{4}{3} = \frac{16}{3}$.

1. Un paralelipiped dreptunghic are diagonala de lungime 4 şi laturile bazei de lungime 2 şi respectiv 3. Atunci înălţimea paralelipipedului are lungimea: **(4 pct.)**

   a) 1; b) $\sqrt{3}$; c) 3; d) $\sqrt{2}/2$; e) $\sqrt{2}$; f) $\sqrt{3}/2$.

   Soluţie. Notând cu d, h şi a, b respectiv lungimile diagonalei, înălţimii şi respectiv laturilor bazei, avem $d^2 = a^2 + b^2 + h^2$, deci $h = \sqrt{16 - 4 - 9} = \sqrt{3}$.

2. Dacă planele $(a+2)\,x + 3y + z + 2b - 1 = 0$ şi $6ax + (4-b)\,y - bz + a + 2 = 0$, $a, b \in \mathbb{R}$, sunt paralele, atunci: **(4 pct.)**

   a) $a = 0,\ b = 4$; b) $a = 0,\ b = 0$; c) $a = 1,\ b = 4$; d) $a = 1,\ b = 2$; e) $a = 2,\ b = 1$; f) $a = 1,\ b = -2$.

   Soluţie. Coeficienţii variabilelor x, y, z din ecuaţiile planelor trebuie să fie proporţionali, dar nu şi termenii liberi, deci $\dfrac{a+2}{6a} = \dfrac{3}{4-b} = \dfrac{1}{-b} \neq \dfrac{2b-1}{a+2}$. Obţinem $b = -2$, $a = 1$ iar ultimele fracţii diferă: $\dfrac{1}{-(-2)} \neq \dfrac{-5}{3}$.

3. Câte soluţii are ecuaţia $\sin 2x = 1$ în intervalul $(0,\ 2\pi)$? **(4 pct.)**

   a) Trei; b) Şase; c) Patru; d) Două; e) Una; f) Nici una.

   Soluţie. $2x \in \left\{ 2k\pi + \dfrac{\pi}{2} \;\middle|\; k \in \mathbb{Z} \right\}$, deci $x \in \left\{ k\pi + \dfrac{\pi}{4} \;\middle|\; k \in \mathbb{Z} \right\} \cap (0, 2\pi) = \left\{ \dfrac{\pi}{4}, \dfrac{5\pi}{4} \right\}$, deci două soluţii.

4. Dacă înălţimea unui tetraedru regulat este $\sqrt{2}$, atunci muchia tetraedrului are lungimea: **(4 pct.)**

   a) $\sqrt{2}/2$; b) $\sqrt{3}$; c) $\sqrt{3}/2$; d) $\sqrt{2/3}$; e) $\sqrt{2}$; f) 3.

   Soluţie. Fie a muchia tetraedului regulat; atunci înălţimea este $h = \frac{a\sqrt{6}}{3} \Leftrightarrow \sqrt{2} = \frac{a\sqrt{6}}{3} \Leftrightarrow a = \sqrt{3}$.

5. Pentru ce valoare $m \in \mathbb{R}$, vectorii $\vec{a} = m\vec{i} + \sqrt{3}\vec{j}$ şi $\vec{b} = \sqrt{3}\vec{i} + \vec{j}$ sunt perpendiculari? **(4 pct.)**

   a) $m = 1$; b) $m = \sqrt{3}$; c) $m = -1$; d) $m = 0$; e) $m = -2$; f) $m = 4$.

   Soluţie. Produsul scalar al vectorilor trebuie să fie nul, $\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle = 0 \Leftrightarrow m\sqrt{3} + \sqrt{3} = 0 \Leftrightarrow m = -1$.

6. Dacă punctele $A\,(1,2)$, $B\,(2,4)$ şi $C\,(4,a)$, $a \in R$, sunt coliniare, atunci: **(4 pct.)**

   a) $a = 0$; b) $a = 2$; c) $a = 8$; d) $a = 4$; e) $a = 1$; f) $a = -5$.

   Soluţie. Determinantul coordonatelor celor trei puncte bordate cu 1 trebuie să se anuleze: $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 1 \\ 4 & a & 1 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow a - 8 = 0 \Leftrightarrow a = 8$.

7. Dacă $A\,(2,1,-1)$, $B\,(5,-3,0)$ şi $C\,(2,1,1)$, atunci aria triunghiului ABC este: **(4 pct.)**

   a) 5; b) 4; c) $\sqrt{26}$; d) 7; e) 2; f) 8.

   Soluţie. Lungimile celor trei laturi sunt

   $$AB = \sqrt{9+16+1} = \sqrt{26}; \quad AC = \sqrt{0+0+2^2} = 2; \quad BC = \sqrt{9+16+1} = \sqrt{26}.$$

   Se observă că $AB = BC$, deci $\triangle ABC$ este isoscel. Atunci înălţimea $BM = \sqrt{AB^2 - (AC/2)^2} = \sqrt{26-1} = 5$, deci aria triunghiului este $S = \dfrac{AC \cdot BM}{2} = \dfrac{2 \cdot 5}{2} = 5$.

8. Dacă $E\,(x) = \dfrac{\sin 2x - 2}{2} + \sin x + \cos^2 x$ atunci $E\left(-\dfrac{3\pi}{2}\right)$ este: **(4 pct.)**

   a) -1; b) $-1/2$; c) 1; d) 0; e) $1/2$; f) 2.

   Soluţie. $E\left(-\dfrac{3\pi}{2}\right) = \dfrac{0-2}{2} + 1 + 0 = 0$.

9. Volumul conului circular drept cu generatoarea de lungime 5 şi raza cercului de bază de lungime 4 este: **(4 pct.)**

a) 16π; b) 16; c) 25π; d) 9π; e) 48; f) 9.

Soluţie. Avem generatoarea $G = 5$, raza $R = 4$. Atunci înălţimea este $h = \sqrt{G^2 - R^2} = 3$, şi deci $V = \frac{\pi R^2 h}{3} = \frac{\pi 4^2 \cdot 3}{3} = 16\pi$.

10. Dacă $\operatorname{tg} x = 3$, atunci $\cos 2x$ este: **(4 pct.)**

a) $3/5$; b) 0; c) $1/2$; d) $-4/5$; e) $-1/2$; f) $4/5$.

Soluţie. $\cos 2x = \frac{1 - \operatorname{tg}^2 x}{1 + \operatorname{tg}^2 x} = \frac{1-9}{1+9} = -\frac{4}{5}$.

11. Se consideră triunghiul ABC cu laturile $AB = \sqrt{2}$, $BC = 2$, $AC = 1 + \sqrt{3}$. Atunci măsura unghiului $\hat{A}$ este: **(4 pct.)**

a) $30°$; b) $105°$; c) $45°$; d) $60°$; e) $120°$; f) $90°$.

Soluţie. Din teorema cosinusului, $\cos A = \frac{AB^2 + AC^2 - BC^2}{2AB \cdot AC} = \frac{2 + 4 + 2\sqrt{3} - 4}{2\sqrt{2}(1+\sqrt{3})} = \frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow A = \frac{\pi}{4}$.

12. Distanţa de la punctul $A\,(2,3)$ la dreapta $3x - 4y - 4 = 0$ este: **(4 pct.)**

a) 10; b) $\sqrt{2}$; c) 3; d) 2; e) $\sqrt{10}$; f) $2\sqrt{5}$.

Soluţie. $d = \frac{|3 \cdot 2 - 4 \cdot 3 - 4|}{\sqrt{3^2 + (-4)^2}} = \frac{|-10|}{5} = 2$.

13. Ecuaţia planului care trece prin origine şi prin punctele $(1,\,1,\,2)$ şi $(2,\,0,\,4)$ este:

a) $x + y + z - 4 = 0$; b) $x - 2z = 0$; c) $x - y = 0$; d) $2x - z = 0$; e) $2x + y + z - 8 = 0$; f) $x + y + 2z = 0$.

Soluţie. Folosind ecuaţia planului determinat de trei puncte (necolineare) date, obţinem

$$\begin{vmatrix} x & y & z & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ x_A & y_A & z_A & 1 \\ x_B & y_B & z_B & 1 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} x & y & z & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 4 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} x & y & z \\ 1 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 4 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow 2x - z = 0.$$

14. Dacă în triunghiul ABC avem $m\left(\hat{A}\right) = 30°$, $b = 4$, $c = 2$, atunci aria triunghiului este: **(6 pct.)**

a) 1; b) 2; c) $2\sqrt{3}$; d) $4\sqrt{2}$; e) $2\sqrt{2}$; f) 4.

Soluţie. $S_{ABC} = \frac{bc \sin A}{2} = \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 2 \cdot \sin 30° = 2$.

15. Dacă volumul şi aria totală a unui cub au aceeaşi valoare numerică, atunci latura cubului are valoarea: **(6 pct.)**

a) 6; b) 1; c) 4; d) 2; e) 8; f) 9.

Soluţie. Notând cu $l > 0$ latura cubului, avem $A_{tot} = V \Leftrightarrow 6l^2 = l^3 \Leftrightarrow l = 6$.

16. Raza cercului de ecuaţie $x^2 + y^2 - 4x - 2y - 7 = 0$ este: **(8 pct.)**

a) $\sqrt{5}$; b) $\sqrt{7}$; c) 5; d) 3; e) $\sqrt{10}$; f) $2\sqrt{3}$.

Soluţie. Restrângând pătratele în ecuaţia cercului, obţinem

$$(x-2)^2 + (y-1)^2 - 4 - 1 - 7 = 0 \Leftrightarrow (x-2)^2 + (y-1)^2 = 12 \Rightarrow r = \sqrt{12} = 2\sqrt{3}.$$

17. Argumentul redus al numărului complex $z = (1-i)^2$ este: **(8 pct.)**

a) 0; b) $\pi/2$; c) π; d) $\pi/6$; e) $3\pi/2$; f) $\pi/4$.

Soluţie. $z = (1-i)^2 = -2i = 2\cos\left(\frac{3\pi}{2} + i \sin\frac{3\pi}{2}\right)$, deci $\arg z = \frac{3\pi}{2}$.

18. Dacă $z = \cos\frac{\pi}{15} + i\sin\frac{\pi}{15}$, atunci z^{10} este: **(8 pct.)**

a) $\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$; b) -1; c) 1; d) $-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$; e) $\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$; f) $-\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Soluţie. Aplicând formula lui Moivre, obţinem

$$z^{10} = \cos\frac{10\pi}{15} + i\sin\frac{10\pi}{15} = \cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3} = -\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3} = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

1. Să se determine abscisele punctelor de inflexiune ale funcţiei $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\ln(x^2+1)$. (**4 pct.**)

   a) $\{-1\}$; b) $\{-1,1\}$; c) $\{0\}$; d) nu există; e) $\{0,1\}$; f) $\{1\}$.

   Soluţie. $f'(x)=\dfrac{2x}{x^2+1}$; $f''(x)=\dfrac{2(x^2+1)-2x\cdot 2x}{(x^2+1)^2}=\dfrac{2(1-x^2)}{(x^2+1)^2}$, deci $f''(x)=0 \Leftrightarrow x\in\{-1,1\}$.

2. Fie funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\arccos\dfrac{1-x^2}{1+x^2}+2\operatorname{arctg}x$. Dacă A este imaginea funcţiei f, iar F este primitiva lui f care se anulează în $x=0$, atunci: (**4 pct.**)

   a) $A=[-\pi,\pi)$, $F(1)=\pi+\ln 2$; b) $A=[-\pi,2\pi)$, $F(1)=\pi-\ln\sqrt{2}$; c) $A=[0,\pi]$, $F(1)=\pi+\ln 4$; d) $A=[0,\pi)$, $F(1)=\pi-\ln 2$; e) $A=(-\pi,\pi]$, $F(1)=\pi+\ln\sqrt{2}$; f) $A=[0,2\pi)$, $F(1)=\pi-2\ln 2$.

   Soluţie. Integrând prin părţi obţinem :

   $$F(x)=\int\arccos\frac{1-x^2}{1+x^2}dx+2\int\operatorname{arctg}x\,dx=x\arccos\frac{1-x^2}{1+x^2}-I+2x\operatorname{arctg}x-\int\frac{2x}{1+x^2}dx,$$

   unde $I=\int x\left(\arccos\dfrac{1-x^2}{1+x^2}\right)'dx$. Dar $\left(\arccos\dfrac{1-x^2}{1+x^2}\right)'=\dfrac{4x}{(1+x^2)\sqrt{4x^2}}=\dfrac{2x}{(1+x^2)|x|}$, şi (deoarece se cere în final $F(1)$) considerăm cazul $x>0$; rezultă $I=\int\dfrac{2x^2}{(1+x^2)|x|}dx=\int\dfrac{2x}{1+x^2}dx=\ln(1+x^2)$ şi deci $F(x)=x\arccos\dfrac{1-x^2}{1+x^2}-2\ln(x^2+1)+2x\operatorname{arctg}x+C$. Dar $F(0)=0$, deci $C=0$ şi obţinem $F(1)=\dfrac{\pi}{2}-2\ln 2+\dfrac{2\pi}{4}=\pi-2\ln 2$. Pentru a afla $\operatorname{Im} f$, observăm că

   $$f'(x)=\frac{2x}{(1+x^2)|x|}+\frac{2}{1+x^2}=\begin{cases}\dfrac{4}{1+x^2}, & x\geq 0\\ 0, & x<0\end{cases}.$$

   Deci pe intervalul $(-\infty,0)$ funcţia f este constantă, $f(x)=f(-1)=0$, $\forall x<0$, iar pe intervalul $(0,\infty)$, f este crescătoare. Cum însă $f(0)=0$ şi $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=\pi+\pi=2\pi$, rezultă $\operatorname{Im} f=[0,2\pi)$.

3. Fie $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\dfrac{2}{x^2+1}$. Să se determine primitiva funcţiei f care se anulează în $x=0$. (**4 pct.**)

   a) $\dfrac{x}{x^2+1}$; b) $\dfrac{1}{x^3+x}$; c) $2\operatorname{arctg}x$; d) $2\arcsin x$; e) x^2; f) $\ln(x^2+1)$.

   Soluţie. $F(x)=\displaystyle\int\frac{2}{x^2+1}dx=2\operatorname{arctg}x+C$; $F(0)=C=0$, deci $F(x)=2\operatorname{arctg}x$.

4. Fie legea de compoziţie definită pe $\mathbb{R}$ prin $x\star y=x(1-y)+y(1-x)$. Să se determine elemetul neutru. (**4 pct.**)

   a) 2; b) $-2e$; c) 0; d) 1; e) nu există; f) -1.

   Soluţie. Se verifică uşor că legea este comutativă. Atunci

   $$x*e=x\Leftrightarrow x(1-e)+e(1-x)=x\Leftrightarrow e(1-2x)=0,\forall x\in\mathbb{R}.$$

   Rezultă $e=0$.

5. Fie funcţia $f:\mathbb{C}\to\mathbb{C}$, $f(z)=1+z+z^2+z^3+z^4$. Să se calculeze $f(i)$. (**4 pct.**)

   a) $1+i$; b) 0; c) i; d) $1-i$; e) $-i$; f) 1.

   Soluţie. $f(i)=1+i-1-i+1$.

6. Fie $A=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 1 & 2\end{pmatrix}$. Să se determine matricea $B=\frac{1}{2}(3I_2-A)$, unde I_2 este matricea unitate de ordinul al doilea. (**4 pct.**)

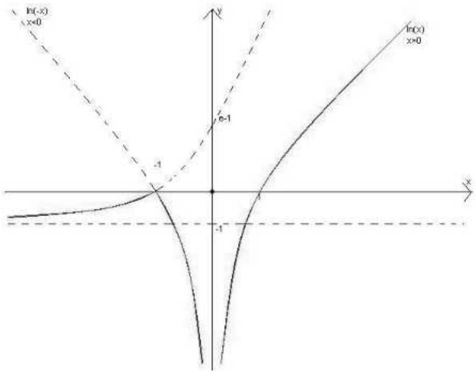
a) $\begin{pmatrix}3 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$; b) $\begin{pmatrix}1 & 2\\ 1 & 0\end{pmatrix}$; c) $\begin{pmatrix}3 & 3\\ 0 & -1/2\end{pmatrix}$; d) $\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}$; e) $\begin{pmatrix}1 & 1\\ 0 & 2\end{pmatrix}$; f) $\begin{pmatrix}1 & 0\\ -1/2 & 1/2\end{pmatrix}$.

Soluţie. Obţtinem succesiv $B=\begin{pmatrix}3/2 & 0\\ 0 & 3/2\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1/2 & 0\\ 1/2 & 1\end{pmatrix}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}2 & 0\\ -1 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ -1/2 & 1/2\end{pmatrix}$.

7. Fie funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\begin{cases}\min\left\{\ln|x|, e^{x+1}-1\right\}, & x\neq 0\\ 0, & x=0\end{cases}$. Dacă n este numărul punctelor de maxim local ale lui f şi k numărul asimptotelor graficului lui f, atunci: (**4 pct.**)

a) $n+k=2$; b) $k-n=2$; c) $n+k=4$; d) toate celelalte afirmaţii sunt false; e) $n+k=3$; f) $k-n=1$.

Soluţie. Studiind graficele funcţiilor $\ln|x|$ şi $e^{x+1}-1$, obţinem $f(x)=\begin{cases}e^{x+1}-1, & x\leq -1\\ \ln(-x), & -1<x<0\\ 0, & x=0\\ \ln x, & x>0.\end{cases}$



Funcţia f admite asimptota orizontală $y=-1$ la $-\infty$ asimptotă verticală bilaterală $x=0$, deci $k=2$. Pe de altă parte, punctele $(-1,0)$ şi $(0,0)$ sunt maxime locale, deci $n=2$; rezultă $n+k=2+2=4$.

8. Să se rezolve ecuaţia $3^{x^2}=9^x$. (**4 pct.**)

a) $\{2\}$; b) $\{1\}$; c) $\{0\}$; d) $\varnothing$; e) $\{0,1\}$; f) $\{0,2\}$.

Soluţie. $3^{x^2}=9^x\Leftrightarrow x^2=2x\Leftrightarrow x(x-2)=0\Leftrightarrow x\in\{0,2\}$.

9. Să se rezolve inecuaţia $\frac{x+1}{2}\leq\frac{2x}{3}$. (**4 pct.**)

a) $\varnothing$; b) $\mathbb{R}$; c) $(-\infty,3]$; d) $(-\infty,3)$; e) $[3,\infty)$; f) $(3,\infty)$.

Soluţie. Inecuaţia se rescrie $\frac{3x+3-4x}{6}\leq 0\Leftrightarrow -x\leq -3\Leftrightarrow x\geq 3$. Rezultą $x\in[3,\infty)$.

10. Să se determine mulţimea valorilor parametrului real λ pentru care sistemul $\begin{cases}x+y=1\\ x+\lambda y=2\end{cases}$ este compatibil determinat. (**4 pct.**)

a) $(-\infty,1)$; b) $(1,\infty)$; c) $\mathbb{R}\setminus\{1\}$; d) $\{1\}$; e) $\mathbb{R}$; f) $\varnothing$.

Soluţie. Condiţia $\begin{vmatrix}1 & 1\\ 1 & \lambda\end{vmatrix}\neq 0$ se rescrie $\lambda\neq 1$, deci $\lambda\in\mathbb{R}\setminus\{1\}$.

11. Fie şirul $a_n=\sum_{k=3}^{n}\frac{k}{2^{k-3}}$. Să se determine $\lim_{n\to\infty}a_n$. (**4 pct.**)

a) 9; b) 10; c) $8\sqrt{2}$; d) $\frac{15}{2}$; e) 7; f) 8.

Soluţie. Avem $a_n = \sum_{k=3}^{n} \frac{k}{2^{k-3}} = 4\sum_{k=3}^{n} k\left(\frac{1}{2}\right)^{k-1} = 4S'\left(\frac{1}{2}\right)$, unde $S(x) = \sum_{k=3}^{n} x^k = x^3\frac{x^{n-2}-1}{x-1} = \frac{x^{n+1}-x^3}{x-1}$. Obţinem

$$S'(x) = \frac{nx^{n+1}-(n+1)x^n-2x^3+3x^2}{(x-1)^2} \Rightarrow S'\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\frac{n}{2^{n+1}}-\frac{n+1}{2^n}-\frac{1}{4}+\frac{3}{4}}{\frac{1}{4}} = 4\left(\frac{n}{2^{n+1}}-\frac{n+1}{2^n}+\frac{1}{2}\right).$$

Prin urmare $S'\left(\frac{1}{2}\right) = 2-\frac{n+2}{2^{n-1}}$, deci $a_n = 4S'\left(\frac{1}{2}\right) = 8-\frac{n+2}{2^{n-3}}$ şi deci $\lim a_n = 8$.

12. Să se determine mulţimea soluţiilor ecuaţiei $\begin{vmatrix} 3 & 3 & x \\ 1 & x & 1 \\ 1 & 0 & x \end{vmatrix} = 2$. (**4 pct.**)

a) $\left\{1, \frac{1}{2}\right\}$; b) $\{1,-1\}$; c) $\{3\}$; d) $\{1,2\}$; e) $\varnothing$; f) $\{1,3\}$.

Soluţie. Calculăm determinantul, $\begin{vmatrix} 3 & 3 & x \\ 1 & x & 1 \\ 1 & 0 & x \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 3 & -2x \\ 0 & x & 1-x \\ 1 & 0 & x \end{vmatrix} = 2x^2-3x+3 = 2$.

Ecuaţia se rescrie $2x^2-3x+1=0$, deci $x \in \{1, \frac{1}{2}\}$.

13. Să se calculeze $\lim_{x\to 1} \frac{x^2-1}{x^4-1}$. (**6 pct.**)

a) ∞; b) $\frac{1}{4}$; c) 1; d) 0; e) 2; f) $\frac{1}{2}$.

Soluţie. Simplificând fracţia prin x^2-1, limita se rescrie $\lim_{x\to 1}\frac{1}{x^2+1} = \frac{1}{2}$.

14. Să se determine numărul real m pentru care polinomul $f = X^2-4X+m$ are rădăcină dublă. (**6 pct.**)

a) -4; b) 0; c) 2; d) 1; e) -2; f) 4.

Soluţie. Anularea discriminantului ecuaţtiei de gradul doi asociate $f=0$ conduce la $\Delta \equiv 16-4m = 0 \Leftrightarrow m=4$.

15. Să se determine $m \in \mathbb{R}$ astfel încât funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} x^3+x, & \text{dacă } x \le 1 \\ mxe^{x-1}, & \text{dacă } x > 1 \end{cases}$ să fie continuă pe $\mathbb{R}$. (**6 pct.**)

a) e^{-1}; b) 4; c) 2; d) 1; e) e; f) nu există.

Soluţie. $\lim_{\substack{x\to 1 \\ x<1}} x^3+x = f(1) = \lim_{\substack{x\to 1 \\ x>1}} mxe^{x-1} \Leftrightarrow m=2$.

16. Să se calculeze $\int_0^1 (x^3+x^2)dx$. (**6 pct.**)

a) $\frac{5}{6}$; b) 5; c) $\frac{7}{12}$; d) 2; e) 6; f) $\frac{1}{5}$.

Soluţie. $\int_0^1 (x^3+x^2)dx = \left(\frac{x^4}{4}+\frac{x^3}{3}\right)\Big|_0^1 = \frac{1}{4}+\frac{1}{3} = \frac{3+4}{12} = \frac{7}{12}$.

17. Fie $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x) = xe^x$. Să se calculeze $f'(0)$. (**8 pct.**)

a) nu există; b) 0; c) 2; d) 3; e) 1; f) e.

Soluţie. $f'(x) = xe^x+e^x$, deci $f'(0)=1$.

18. Să se rezolve ecuaţia $x^2-5x+4=0$. (**8 pct.**)

a) $\{1\}$; b) $\{-1,-4\}$; c) $\{4,5\}$; d) $\varnothing$; e) $\{0\}$; f) $\{1,4\}$.

Soluţie. $x^2-5x+4=0 \Leftrightarrow x \in \left\{\frac{5\pm\sqrt{25-16}}{2}\right\} = \{1,4\}$.

1. Fie vectorii $\bar{u} = \bar{i} + \bar{j}$ şi $\bar{v} = \bar{i} - \bar{j}$. Vectorul sumă $\bar{u} + \bar{v}$ este **(4 pct.)**

   a) $\frac{1}{2}\bar{i}$; b) $\bar{i}$; c) $\bar{j}$; d) $-2\bar{j}$; e) $2\bar{i}$; f) $\frac{3}{2}\bar{j}$.

   Soluţie. $\vec{u} + \vec{v} = (\vec{i} + \vec{i} + \vec{j} - \vec{j}) = 2\vec{i}$.

2. Dacă aria unui cerc este π, atunci lungimea cercului este **(4 pct.)**

   a) $\sqrt[3]{4}$; b) 100; c) 1000; d) 2π; e) $\sqrt{2}$; f) 10.

   Soluţie. $A = \pi R^2 = \pi$, deci $R = 1$, şi deci lungimea cercului este $= 2\pi$.

3. Determinaţi care dintre numerele complexe de mai jos verifică ecuaţia $z^2 = -1$ **(4 pct.)**

   a) i; b) $\sqrt[3]{7}\,\mathrm{i}$; c) 1; d) 0; e) $5\sqrt{3} + \sqrt{7}\,\mathrm{i}$; f) 10.

   Soluţie. Dintre numerele specificate doar $z = i$ satisface ecuaţia $z^2 = -1$.

4. Ordinea crescătoare a numerelor $a = \sin 0$, $b = \sin\frac{\pi}{4}$ şi $c = \sin\frac{\pi}{2}$ este **(4 pct.)**

   a) b, a, c; b) b, c, a; c) a, b, c; d) a, c, b; e) c, b, a; f) c, a, b.

   Soluţie. Funcţia sinus este strict crescătoare în intervalul $[0, \frac{\pi}{2}]$, deci $0 < \frac{\pi}{4} < \frac{\pi}{2} \Rightarrow \sin 0 < \sin\frac{\pi}{4} < \frac{\pi}{2}$, deci $a < b < c$. Pe altă cale, avem $a = 0, b = \frac{\sqrt{2}}{2}, c = 1$, deci $a < b < c$, iar ordinea este a, b, c.

5. Distanţa dintre punctele $A(12, 0)$ şi $B(0, 5)$ este **(4 pct.)**

   a) π; b) 13; c) 1; d) 5; e) 0; f) $\sqrt{3}$.

   Soluţie. $||AB|| = \sqrt{(0-12)^2 + (5-0)^2} = \sqrt{144 + 25} = \sqrt{169} = 13$.

6. Dacă perimetrul unui pătrat este 4, atunci aria lui este **(4 pct.)**

   a) -4; b) $\sqrt{2}$; c) π; d) 10; e) 7; f) 1.

   Soluţie. Notând cu l latura pătratului şi cu A aria sa, avem $4l = 4 \Rightarrow l = 1 \Rightarrow A = 1$.

7. Numărul de soluţii ale ecuaţiei $\cos x = 2$ este **(4 pct.)**

   a) 2; b) 4; c) 5; d) 3; e) 0; f) 1.

   Soluţie. Deoarece $\cos x \in [-1, 1], \forall x \in \mathbb{R}$, egalitatea $\cos x = 2$ nu poate avea loc, deci ecuaţia are 0 soluţii.

8. Aria triunghiului ale cărui vârfuri au coordonatele (1,1), (1,2) şi (2,1) este **(4 pct.)**

   a) 31; b) $\sqrt[3]{2}$; c) $\frac{4}{103}$; d) 100; e) 17; f) $\frac{1}{2}$.

   Soluţie. Folosind formula ariei cu determinant, obţinem $A = |\frac{1}{2}\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix}| = |-\frac{1}{2}| = \frac{1}{2}$.

9. Dacă aria unui romb este 6 iar lungimea unei diagonale este 3, atunci lungimea celeilalte diagonale este **(4 pct.)**

   a) 4; b) 17; c) $\sqrt[3]{2}$; d) 13; e) 7; f) 10.

   Soluţie. Aria rombului este semiprodusul diagonalelor, deci $d_2 = 2A/d_1 = 2 \cdot 6/3 = 4$.

10. Modulul numărului complex $1 + \mathrm{i}\sqrt{3}$ este **(4 pct.)**

    a) 5; b) 2; c) 0; d) 20; e) -1; f) $\sqrt{5}$.

    Soluţie. Avem $\left|1 + i\sqrt{3}\right| = \sqrt{1^2 + (\sqrt{3})^2} = \sqrt{1+3} = 2$.

11. Produsul numerelor complexe $1 + \mathrm{i}$ şi $1 - \mathrm{i}$ este **(4 pct.)**

    a) $-3\,\mathrm{i}$; b) $10\,\mathrm{i}$; c) $\sqrt{7}$; d) 2; e) $\sqrt[3]{5}$; f) 10.

    Soluţie. $(1 + i)(1 - i) = 1 - i^2 = 1 + 1 = 2$.

12. Produsul scalar al vectorilor $\bar{u} = 2\bar{i} + \bar{j}$ şi $\bar{v} = \bar{i} - 2\bar{j}$ este **(4 pct.)**

a) 5; b) $\sqrt{3}$; c) 3; d) 0; e) 100; f) -200.

Soluţie. $\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle = 2 \cdot 1 + 1 \cdot (-2) = 0.$

13. Valoarea expresiei $\sin \frac{\pi}{2} + \mathrm{tg} \frac{\pi}{4}$ este **(6 pct.)**

a) 100; b) $\sqrt{5}$; c) 11; d) 2; e) $\sqrt[4]{7}$; f) -3.

Soluţie. $\sin \dfrac{\pi}{2} + \mathrm{tg}\, \dfrac{\pi}{4} = 1 + 1 = 2.$

14. Ecuaţia dreptei care trece prin punctele $A(1,1)$ şi $B(2,2)$ este **(6 pct.)**

a) $y = 7x$; b) $y = -2x$; c) $x + 2y + 3 = 0$; d) $y = x$; e) $y = 2x + 1$; f) $y = 2x$.

Soluţie. Folosim ecuaţia dreptei prin două puncte: $\dfrac{x-1}{2-1} = \dfrac{y-1}{2-1} \Leftrightarrow y = x.$

15. Într-un triunghi dreptunghic lungimea unei catete este 3, iar lungimea ipotenuzei este 5. Lungimea celeilalte catete este **(6 pct.)**

a) -2; b) 2; c) $\sqrt[3]{4}$; d) 4; e) π; f) 5.

Soluţie. Folosind teorema lui Pitagora, notând cu $c_1 = 3, c_2$ lungimile celor două catete ale triunghiului , şi cu $a = 5$ lungimea ipotenuzei triunghiului, rezultă $c_2^2 = a^2 - c_1^2 = 25 - 9 = 16 \Rightarrow c_2 = 4$.

16. Dacă $\cos x = \frac{\sqrt{3}}{2}$, atunci $\sin^2 x$ are valoarea **(8 pct.)**

a) $\frac{1}{7}$; b) -1; c) 2; d) $\sqrt{5}$; e) 0; f) $\frac{1}{4}$.

Soluţie. $\sin^2 x = 1 - \cos^2 x = 1 - \frac{3}{4} = \frac{1}{4}.$

17. Punctul de intersecţie al dreptelor $y = x - 1$ şi $y = -x + 1$ are coordonatele **(8 pct.)**

a) (1,0); b) (3,5); c) (1,1); d) (4,7); e) (5,3); f) (0,0).

Soluţie. Rezolvând sistemul $\begin{cases} y = x - 1 \\ y = -x + 1 \end{cases}$, obţinem $x = 1, y = 0$, deci punctul de intersecţie este $(1,0)$.

18. Expresia $\dfrac{\sin 2x}{2 \sin x}$, unde $x \in \mathbb{R} \backslash \{k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$, este egală cu **(8 pct.)**

a) $\cos x$; b) $\mathrm{tg} \frac{x}{\sqrt{3}}$; c) 1; d) $1 + \mathrm{ctg}\, x$; e) $\sin x$; f) 0.

Soluţie. $\dfrac{\sin 2x}{2 \sin x} = \dfrac{2 \sin x \cos x}{2 \sin x} = \cos x.$

1. Valoarea determinantului $\begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}$ este: **(5 pct.)**

   a) 2; b) 4; c) 0; d) 5; e) -2; f) -6.

   Soluţie. Dezvoltând după linia a doua a determinantului, obţinem: $-2\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -2 \cdot (2+1) = -6$.

2. Soluţia ecuaţiei $2^{x+1} = 16$ este: **(5 pct.)**

   a) 1; b) 0; c) -1; d) 2; e) -2; f) 3.

   Soluţie. Ecuaţia se rescrie $2^{x+1} = 2^4$, deci $x+1 = 4 \Leftrightarrow x = 3$.

3. Să se rezolve inecuaţia $x + 2 < 4 - x$. **(5 pct.)**

   a) $x \in (-\infty, 1)$; b) $x \in (-1, 1)$; c) $x \in (1, \infty)$; d) $x \in (0, 1) \cup (1, \infty)$; e) $\varnothing$; f) $x \in (0, \infty)$.

   Soluţie. Regrupând termenii, avem $2x < 2 \Leftrightarrow x < 1 \Leftrightarrow x \in (-\infty, 1)$.

4. Să se determine valoarea parametrului real m pentru care $x = 2$ este soluţie a ecuaţiei $x^3 + mx^2 - 2 = 0$. **(5 pct.)**

   a) 3; b) $\frac{1}{2}$; c) $-\frac{3}{2}$; d) $\frac{5}{2}$; e) 1; f) $\frac{3}{4}$.

   Soluţie. Înlocuind soluţia $x = 2$ în ecuaţie, obţinem: $8 + 4m - 2 = 0 \Leftrightarrow 4m = -6 \Leftrightarrow m = -3/2$.

5. Să se calculeze $(1 + \mathrm{i})^2$. **(5 pct.)**

   a) 1; b) $2\mathrm{i}$; c) $4\mathrm{i}$; d) $-2 + \mathrm{i}$; e) 0; f) i.

   Soluţie. Ridicând la pătrat şi folosind proprietatea $i^2 = -1$, obţinem $(1+i)^2 = 1 + 2i + i^2 = 2i$.

6. Fie ecuaţia $x^2 - mx + 1 = 0$, $m \in \mathbb{R}$. Să se determine valorile lui m pentru care ecuaţia are două soluţii reale şi distincte. **(5 pct.)**

   a) $\mathbb{R}$; b) $(-\infty, -2) \cup (2, \infty)$; c) $(0, \infty)$; d) $(-\infty, 0)$; e) $(-\infty, -1) \cup (2, \infty)$; f) $\varnothing$.

   Soluţie. Condiţia $\Delta > 0$ se rescrie $(-m)^2 - 4 \cdot 1 > 0 \Leftrightarrow m^2 - 4 > 0 \Leftrightarrow m \in (-\infty, -2) \cup (2, \infty)$.

7. Soluţia ecuaţiei $\sqrt[3]{x - 1} = -1$ este: **(5 pct.)**

   a) -3; b) Ecuaţia nu are soluţii; c) 0; d) 1; e) -1; f) 3.

   Soluţie. Ridicând la puterea a treia, rezultă $(x - 1) = (-1)^3 \Leftrightarrow x - 1 = -1 \Leftrightarrow x = 0$.

8. Fie funcţia $f : \mathbb{R}\setminus\{0\} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{x-1}{x}$. Să se calculeze $f'(2)$. **(5 pct.)**

   a) $\frac{1}{4}$; b) $\frac{2}{3}$; c) $-\frac{1}{2}$; d) $\frac{1}{8}$; e) 0; f) 2.

   Soluţie. Derivând, avem $f'(x) = (\frac{x-1}{x})' = (1 - \frac{1}{x})' = -(-\frac{1}{x^2}) = \frac{1}{x^2}$, deci $f'(2) = \frac{1}{4}$.

9. Să se determine $m \in \mathbb{R}$ astfel încât funcţia $f(x) = \begin{cases} x + 2m, & x \le 0 \\ m^2x + 4, & x > 0 \end{cases}$ să fie continuă pe $\mathbb{R}$. **(5 pct.)**

   a) $m = -3$; b) $m = 2$; c) $m = 0$; d) $m = 1$; e) $m \in \mathbb{R}$; f) $m = -2$.

   Soluţie. Avem $f_s(0) = \lim\limits_{x\nearrow 0}(x+2m) = 2m$, $f(0) = x+2m|_{x=0} = 2m$, $f_d(0) = \lim\limits_{x\searrow 0}(m^2x+4) = 4$. Funcţia f este continuă în $x = 0$ dacă şi numai dacă $f_s(0) = f(0) = f_d(0)$, deci $2m = 4 \Leftrightarrow m = 2$. Cum f este continuă pe $\mathbb{R}\setminus\{0\}$, fiind compunere de funcţii polinomiale continue, rezultă că f este continuă pe $\mathbb{R}$ dacă şi numai dacă $m = 2$.

10. Mulţimea soluţiilor ecuaţiei $x^2 - 5x + 4 = 0$ este: **(5 pct.)**

    a) $\{-1, 4\}$; b) $\{-1, 1\}$; c) $\{0, 3\}$; d) $\{1, 4\}$; e) $\varnothing$; f) $\{0, -3\}$.

    Soluţie. Rădăcinile ecuaţiei de gradul doi sunt $x_{1,2} = \dfrac{5 \pm \sqrt{25 - 4 \cdot 4}}{2} = \dfrac{4 \pm 3}{2} \in \{1, 4\}$.

11. Valoarea integralei $\int\limits_0^1 (6x^2+2x)\,dx$ este: **(5 pct.)**

a) -2; b) 0; c) 3; d) $\frac{1}{3}$; e) 4; f) $\frac{1}{2}$.

Soluţie. Integrăm, $\int_0^1 (6x^2+2x)dx = \left(6\frac{x^3}{3}+2\frac{x^2}{2}\right)\Big|_0^1 = \left(2x^3+x^2\right)\Big|_0^1 = (2+1)-(0+0) = 3.$

12. Să se determine funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^2+ax+b$ astfel încât $f(0)=1$, $f(1)=0$. **(5 pct.)**

a) x^2-1; b) x^2+1; c) x^2-3x; d) x^2+4x+5; e) x^2-2x+1; f) x^2+x+1.

Soluţie. Impunând cele două condiţii, rezultă:

$$\begin{cases} f(0)=1 \\ f(1)=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0^2+a\cdot 0+b=1 \\ 1^2+a\cdot 1+b=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b=1 \\ a+b=-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=-2 \\ b=1 \end{cases} \Rightarrow f(x)=x^2-2x+1.$$

13. Să se calculeze $\sqrt{\pi}$ cu o zecimală exactă. **(5 pct.)**

a) $1,6$; b) $1,9$; c) $2,2$; d) $1,5$; e) $2,1$; f) $1,7$.

Soluţie. Pentru a avea o zecimală exactă în evaluarea lui $\sqrt{\pi}$ trebuie sa aproximăm π cu două zecimale exacte, deci $\pi \simeq 3.14$. Dar $\sqrt{3.14} = \frac{\sqrt{314}}{10}$, iar $\underbrace{289}_{17^2} < 314 < \underbrace{324}_{18^2}$ şi deci $\frac{\sqrt{17^2}}{10} < \sqrt{3.14} < \frac{\sqrt{18^2}}{10} \Leftrightarrow 1.7 < \sqrt{3.14} < 1.8$. Rezultă $\sqrt{\pi} \simeq 1.7$.

14. Fie şirul cu termenul general $a_n = \sum\limits_{k=1}^{n} kC_n^k$, $n\geq 1$. Să se calculeze a_{2009}. **(5 pct.)**

a) $2007\cdot 2^{2009}$; b) $2009!+1$; c) $2008!$; d) $2009\cdot 2^{2008}$; e) $2008\cdot 2^{2009}$; f) $\frac{1}{2009}$.

Soluţie. Se observă că avem $kC_n^k = k\frac{n!}{(n-k)!k!} = \frac{n(n-1)!}{(n-k)!(k-1)!} = nC_{n-1}^{k-1}$. Deci

$$a_n = \sum_{k=1}^{n} kC_n^k = \sum_{k=1}^{n} nC_{n-1}^{k-1} = n\sum_{k=0}^{n-1} C_{n-1}^k = n(C_{n-1}^0+\ldots+C_{n-1}^{n-1}) = n(1+1)^{n-1} = n2^{n-1}$$

şi prin urmare $a_{2009} = 2009\cdot 2^{2008}$.

15. Să se calculeze aria mulţimii plane mărginite de graficul funcţiei $f:(0,\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=x\ln x$, axa Ox şi dreptele verticale $x=1$, $x=\mathrm{e}$. **(5 pct.)**

a) 1; b) $\mathrm{e}+2$; c) e; d) $\frac{\mathrm{e}-1}{4}$; e) 0; f) $\frac{\mathrm{e}^2+1}{4}$.

Soluţie. Integrând prin părţi integrala definită care produce aria, obţinem

$$\begin{aligned} A &= \int_1^e x\ln x dx = \int_1^e \left(\frac{x^2}{2}\right)' \ln x dx = \frac{x^2}{2}\ln x\Big|_1^e - \int_1^e \frac{x^2}{2}\frac{1}{x}dx = \\ &= \frac{e^2}{2}\ln e - \frac{1^2}{2}\cdot\underbrace{\ln 1}_{=0} - \frac{1}{2}\int_1^e x dx = \frac{e^2}{2} - \frac{1}{2}\cdot\frac{x^2}{2}\Big|_1^e = \frac{e^2}{2} - \frac{e^2-1}{4} = \frac{e^2+1}{4}. \end{aligned}$$

16. Fie funcţia $f:\mathbb{R}\setminus\{1\}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\frac{\sqrt{x^2+1}}{x-1}$. Asimptotele funcţiei f sunt: **(5 pct.)**

a) $x=1$, $y=x$; b) $x=0$, $y=-1$; c) $y=x+1$; d) $x=-1$, $y=2x+3$; e) $x=1$, $y=1$, $y=-1$; f) $x=1$, $y=1$.

Soluţie. Deoarece $\lim\limits_{x\searrow 1}\frac{\sqrt{x^2+1}}{x-1} = 2\lim\limits_{x\searrow 1}\frac{1}{x-1} = \infty$ şi $\lim\limits_{x\nearrow 1}\frac{\sqrt{x^2+1}}{x-1} = 2\lim\limits_{x\nearrow 1}\frac{1}{x-1} = -\infty$, funcţia f admite asimptota verticală bilaterială $x=1$. De asemenea,

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{x^2+1}}{x-1} = \lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}{1-\frac{1}{x}} = 1, \quad \lim_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{x^2+1}}{x-1} = \lim_{x\to-\infty}\frac{|x|\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}{x(1-\frac{1}{x})} = -1,$$

deci funcţia f admite asimpotele orizontale $y=1$ pentru $x\to\infty$ şi $y=-1$ pentru $x\to\infty$ şi deci nu are asimpote oblice pentru $x\to\pm\infty$. În final, asimptotele funcţiei f sunt: $x=1$ (asimptotă verticală bilaterală), $y=1$ şi $y=-1$ (asimptote orizontale).

17. Ştiind că polinomul $aX^4 + bX^3 + cX^2 + (a-1)X - 1$ are rădăcina triplă 1, să se calculeze $a + b + c$. **(5 pct.)**

a) 0; b) -2; c) 1; d) -1; e) $\frac{1}{2}$; f) 2.

Soluţie. Avem $\begin{cases} P = ax^4 + bx^3 + cx^2 + (a-1)x - 1 \\ P' = 4ax^3 + 3bx^2 + 2cx + a - 1 \\ P'' = 12ax^2 + 6bx + 2c. \end{cases}$

Polinomul P are rădăcina triplă 1 d.n.d. $P(1) = P'(1) = P''(1) = 0$. Avem deci:

$$\begin{cases} a+b+c+(a-1)-1=0 \\ 4a+3b+2c+a-1=0 \\ 12a+6b+2c=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2a+b+c=2 \\ 5a+3b+2c=1 \\ 6a+3b+c=0. \end{cases}$$

Scăzând primele două ecuaţii înmulţite respectiv cu 2 şi 1 din ultima ecuaţie, obţinem:

$$\begin{cases} 2a+b+c=2 \\ a+b=-3 \\ 4a+2b=-2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a+b=-3 \\ 2a+b=-1 \\ 2a+b+c=2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=2 \\ b=-5 \\ c=3 \end{cases} \Rightarrow a+b+c=0.$$

18. Pe $\mathbb{Z}$ se defineşte legea de compoziţie $x \star y = xy - 2x - 2y + 6$. Să se determine elementul neutru. **(5 pct.)**

a) 7; b) -3; c) 1; d) 3; e) Nu există; f) -1.

Soluţie. Se observă că legea este comutativă, adică $x * y = y * x, \forall x, y \in \mathbb{Z}$. Deci $e \in \mathbb{Z}$ este element neutru bilateral d.n.d. $x * e = x, \forall x \in \mathbb{Z}$, ceea ce se revine la

$$xe - 2x - 2e + 6 = x, \forall x \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow x(e-3) - 2(e-3) = 0, \forall x \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow (x-2)(e-3) = 0, \forall x \in \mathbb{Z},$$

deci $e = 3 \in \mathbb{Z}$ este element neutru.

1. Să se calculeze $(1+\mathrm{i})^2$. **(5 pct.)**

   a) i; b) 1; c) 4i; d) 0; e) $-2+\mathrm{i}$; f) 2i.

   Soluţie. Ridicând la pătrat şi folosind proprietatea $i^2=-1$, obţinem $(1+i)^2=1+2i+i^2=2i$.

2. Să se determine valoarea parametrului real m pentru care $x=2$ este soluţie a ecuaţiei $x^3+mx^2-2=0$. **(5 pct.)**

   a) 1; b) $\frac{1}{2}$; c) 3; d) $\frac{3}{4}$; e) $\frac{5}{2}$; f) $-\frac{3}{2}$.

   Soluţie. Înlocuind soluţia $x=2$ în ecuaţie, obţinem: $8+4m-2=0 \Leftrightarrow 4m=-6 \Leftrightarrow m=-3/2$.

3. Să se determine $m\in\mathbb{R}$ astfel încât funcţia $f(x)=\begin{cases} x+2m, & x\le 0 \\ m^2x+4, & x>0 \end{cases}$ să fie continuă pe $\mathbb{R}$. **(5 pct.)**

   a) $m=2$; b) $m=0$; c) $m=-2$; d) $m=1$; e) $m\in\mathbb{R}$; f) $m=-3$.

   Soluţie. Avem $f_s(0)=\lim\limits_{x\nearrow 0}(x+2m)=2m$, $f(0)=x+2m|_{x=0}=2m$, $f_d(0)=\lim\limits_{x\searrow 0}(m^2x+4)=4$. Funcţia f este continuă în $x=0$ dacă şi numai dacă $f_s(0)=f(0)=f_d(0)$, deci $2m=4\Leftrightarrow m=2$. Cum f este continuă pe $\mathbb{R}\backslash\{0\}$, fiind compunere de funcţii polinomiale continue, rezultă că f este continuă pe $\mathbb{R}$ dacă şi numai dacă $m=2$.

4. Fie funcţia $f:\mathbb{R}\backslash\{0\}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\frac{x-1}{x}$. Să se calculeze $f'(2)$. **(5 pct.)**

   a) $\frac{1}{8}$; b) $-\frac{1}{2}$; c) $\frac{1}{4}$; d) $\frac{2}{3}$; e) 0; f) 2.

   Soluţie. Derivând, avem $f'(x)=(\frac{x-1}{x})'=(1-\frac{1}{x})'=-(-\frac{1}{x^2})=\frac{1}{x^2}$, deci $f'(2)=\frac{1}{4}$.

5. Soluţia ecuaţiei $\sqrt[3]{x-1}=-1$ este: **(5 pct.)**

   a) -3; b) 0; c) 3; d) -1; e) Ecuaţia nu are soluţii; f) 1.

   Soluţie. Ridicând la puterea a treia, rezultă $(x-1)=(-1)^3\Leftrightarrow x-1=-1\Leftrightarrow x=0$.

6. Fie ecuaţia $x^2-mx+1=0$, $m\in\mathbb{R}$. Să se determine valorile lui m pentru care ecuaţia are două soluţii reale şi distincte. **(5 pct.)**

   a) $\varnothing$; b) $(-\infty,-2)\cup(2,\infty)$; c) $(0,\infty)$; d) $\mathbb{R}$; e) $(-\infty,0)$; f) $(-\infty,-1)\cup(2,\infty)$.

   Soluţie. Condiţia $\Delta>0$ se rescrie $(-m)^2-4\cdot 1>0\Leftrightarrow m^2-4>0\Leftrightarrow m\in(-\infty,-2)\cup(2,\infty)$.

7. Mulţimea soluţiilor ecuaţiei $x^2-5x+4=0$ este: **(5 pct.)**

   a) $\varnothing$; b) $\{-1,1\}$; c) $\{1,4\}$; d) $\{0,-3\}$; e) $\{-1,4\}$; f) $\{0,3\}$.

   Soluţie. Rădăcinile ecuaţiei de gradul doi sunt $x_{1,2}=\dfrac{5\pm\sqrt{25-4\cdot 4}}{2}=\dfrac{5\pm 3}{2}\in\{1,4\}$.

8. Soluţia ecuaţiei $2^{x+1}=16$ este: **(5 pct.)**

   a) 3; b) 2; c) 0; d) -2; e) -1; f) 1.

   Soluţie. Ecuaţia se rescrie $2^{x+1}=2^4$, deci $x+1=4\Leftrightarrow x=3$.

9. Valoarea determinantului $\begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}$ este: **(5 pct.)**

   a) 4; b) -6; c) -2; d) 0; e) 2; f) 5.

   Soluţie. Dezvoltând după linia a doua a determinantului, obţinem: $-2\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}=-2\cdot(2+1)=-6$.

10. Să se determine funcţia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 + ax + b$ astfel încât $f(0) = 1$, $f(1) = 0$. **(5 pct.)**

a) $x^2 + 4x + 5$; b) $x^2 - 1$; c) $x^2 + 1$; d) $x^2 - 2x + 1$; e) $x^2 + x + 1$; f) $x^2 - 3x$.

Soluţie. Impunând cele două condiţii, rezultă:

$$\begin{cases} f(0) = 1 \\ f(1) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0^2 + a \cdot 0 + b = 1 \\ 1^2 + a \cdot 1 + b = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = 1 \\ a + b = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -2 \\ b = 1 \end{cases} \Rightarrow f(x) = x^2 - 2x + 1.$$

11. Să se rezolve inecuaţia $x + 2 < 4 - x$. **(5 pct.)**

a) $x \in (0, 1) \cup (1, \infty)$; b) $x \in (0, \infty)$; c) $x \in (-\infty, 1)$; d) $x \in (-1, 1)$; e) $x \in (1, \infty)$; f) $\varnothing$.

Soluţie. Regrupând termenii, avem $2x < 2 \Leftrightarrow x < 1 \Leftrightarrow x \in (-\infty, 1)$.

12. Valoarea integralei $\int\limits_0^1 (6x^2 + 2x)\, dx$ este: **(5 pct.)**

a) $\frac{1}{2}$; b) -2; c) 0; d) $\frac{1}{3}$; e) 3; f) 4.

Soluţie. Integrăm, $\int_0^1 (6x^2 + 2x) dx = \left(6\,\frac{x^3}{3} + 2\,\frac{x^2}{2}\right)\Big|_0^1 = \left(2x^3 + x^2\right)\big|_0^1 = (2 + 1) - (0 + 0) = 3.$

13. Câte puncte de extrem local are funcţia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^3 - 3x^2$? **(5 pct.)**

a) Şase; b) Patru; c) Unul; d) Trei; e) Niciunul; f) Două.

Soluţie. Derivata funcţiei f este $f'(x) = 3x^2 - 6x$. Anularea acesteia conduce la ecuaţia $3x(x - 2) = 0$, care are două rădăcini. Tabelul de variaţie al funcţiei f este următorul

x	$-\infty$		0		2		∞
$f'(x)$	$+$	$+$	0	$-$	0	$+$	$+$
$f(x)$	$\nearrow$	$\nearrow$	0	$\searrow$	-4	$\nearrow$	$\nearrow$

deci f admite *două* puncte de extrem local: punctul de maxim $(0, 0)$ şi punctul de minim $(2, -4)$.

14. Fie $l = \lim\limits_{x \to 1} \frac{x^2 + x - 2}{x - 1}$. Atunci: **(5 pct.)**

a) $l = 1$; b) $l = 5$; c) $l = 0$; d) $l = 3$; e) $l = 2$; f) $l = -1$.

Soluţie. Simplificând fracţia prin $x - 1$, limita se rescrie $l = \lim\limits_{x \to 1} (x + 2) = 3$.

15. Să se calculeze $x + \frac{2}{x}$ pentru $x = -\frac{1}{2}$. **(5 pct.)**

a) $\frac{5}{2}$; b) 3; c) $-\frac{7}{2}$; d) 4; e) $\frac{9}{2}$; f) $-\frac{9}{2}$.

Soluţie. Se obţine $-\frac{1}{2} + \frac{2}{-1/2} = -\frac{1}{2} - 4 = -\frac{9}{2}$.

16. Fie sistemul de ecuaţii $\begin{cases} mx + y = 1 \\ 4x - 2y = -1 \end{cases}$, $m \in \mathbb{R}$. Pentru ce valori ale lui m sistemul are soluţie unică? **(5 pct.)**

a) $m \in \mathbb{R}$; b) $m \in (-\infty, -2]$; c) $m \in (-3, 3)$; d) $m \in [-5, 5]$; e) $m \in \mathbb{R} \setminus \{-2\}$; f) $m \in (-3, 1)$.

Soluţie. Condiţia de neanulare a determinantului format din coeficienţii necunoscutelor, conduce la $\begin{vmatrix} m & 1 \\ 4 & -2 \end{vmatrix} \neq 0 \Leftrightarrow -2m - 4 = 0 \Leftrightarrow m \neq -2 \Leftrightarrow m \in \mathbb{R} \setminus \{-2\}$.

17. Să se scrie în ordine crescătoare numerele $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, $\frac{\pi}{2}$. **(5 pct.)**

a) $\sqrt{2}, \frac{\pi}{2}, \sqrt{3}$; b) $\sqrt{3}, \sqrt{2}, \frac{\pi}{2}$; c) $\frac{\pi}{2}, \sqrt{3}, \sqrt{2}$; d) $\sqrt{3}, \frac{\pi}{2}, \sqrt{2}$; e) $\frac{\pi}{2}, \sqrt{2}, \sqrt{3}$; f) $\sqrt{2}, \sqrt{3}, \frac{\pi}{2}$.

Soluţie. Aproximând, obţinem $\sqrt{2} \sim 1,41 < 1,5 < \pi \sim \frac{3,14}{2} = 1.57 < 1,7 < \sqrt{3} \sim 1,71$, deci $\sqrt{2} < \pi/2 < \sqrt{7}$.

18. Fie polinomul $P(X) = X^3 - 3X^2 + 2X$ cu rădăcinile x_1, x_2, x_3. Să se calculeze $E = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2$. **(5 pct.)**

a) $E = 1$; b) $E = -2$; c) $E = 3$; d) $E = 5$; e) $E = 0$; f) $E = -4$.

Soluţie. Avem $E = (x_1 + x_2 + x_3)^2 - 2(x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_1)$. Din relaţiile Viète, avem $x_1 + x_2 + x_3 = 3$ şi $x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_1 = 2$, deci $E = 3^2 - 2 \cdot 2 = 5$. *Altfel.* Deoarece suma coeficienţilor polinomului se anulează, o rădăcină a acestuia este $x_1 = 1$. Împărţind prin $x - 1$, se obţine câtul $x^2 - 2x$, ale cărui rădăcini sunt $x_2 = 0$, $x_3 = 2$, deci $E = 1^2 + 0^2 + 2^2 = 5$.

1. Pentru ce valoare $a \in \mathbb{R}$ vectorii $\vec{u} = 3\vec{i} + a\vec{j}$ şi $\vec{v} = (a+1)\,\vec{i} + a\vec{j}$ sunt perpendiculari? **(5 pct.)**

   a) $a = 0$; b) $a = \frac{1}{2}$; c) $a = -1$; d) $a = 5$; e) nu există o astfel de valoare; f) $a = -2,5$.

   Soluţie. Perpendicularitatea celor doi vectori revine la anularea produsului scalar:
$$\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle = 0 \Leftrightarrow 3(a+1) + a^2 = 0 \Leftrightarrow a^2 + 3a + 3 = 0.$$
   Dar această ecuaţie nu are soluţii reale ($\Delta = 9 - 12 < 0$), deci nu există o astfel de valoare.

2. Ecuaţia dreptei care trece prin punctele $A\,(1,2)$ şi $B\,(3,5)$ este **(5 pct.)**

   a) $3x + y + 2 = 0$; b) $2x - 3y + 1 = 0$; c) $2x - 3y + 2 = 0$; d) $3x - 2y + 1 = 0$; e) $x - 2y + 1 = 0$; f) $3x - 4y + 2 = 0$.

   Soluţie. Ecuaţia dreptei care trece prin punctele $A(x_A, y_A)$ şi $B(x_B, y_B)$ este:
$$\frac{x - x_A}{x_B - x_A} = \frac{y - y_A}{y_B - y_A} \Leftrightarrow \frac{x-1}{3-1} = \frac{y-2}{5-2} \Leftrightarrow \frac{x-1}{2} = \frac{y-2}{3} \Leftrightarrow 3x - 3 = 2y - 4 \Leftrightarrow 3x - 2y + 1 = 0.$$

3. Fie vectorii $\vec{a} = \vec{i} + \vec{j}$, $\vec{b} = \vec{i} - \vec{j}$ şi $\vec{u} = 6\vec{i} + 2\vec{j}$. Să se determine $p, q \in \mathbb{R}$ astfel încât $\vec{u} = p\vec{a} + q\vec{b}$. **(5 pct.)**

   a) $p = -3,\ \ q = -2$; b) $p = 0,\ \ q = 0$; c) $p = 4,\ \ q = 2$; d) $p = 7,\ \ q = 1$; e) $p = 3,\ \ q = 3$; f) $p = 1,\ \ q = -2$.

   Soluţie. Înlocuind $\vec{a}, \vec{b}$ şi $\vec{u}$ în ultima egalitate, obţinem:
$$6\vec{i} + 2\vec{j} = p(\vec{i} + \vec{j}) + q(\vec{i} - \vec{j}) \Leftrightarrow (p + q - 6)\vec{i} + (p - q - 2)\vec{j} = 0.$$
   Vectorii $\vec{i}, \vec{j}$ fiind liniar independenţi, coeficienţii se anulează, deci $\begin{cases} p + q - 6 = 0 \\ p - q - 2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} p = 4 \\ q = 2. \end{cases}$

   Altfel. Se observă că $\vec{i} = \frac{1}{2}(\vec{a} + \vec{b})$, $\vec{j} = \frac{1}{2}(\vec{a} - \vec{b})$, deci:
$$\vec{u} = 6\vec{i} + 2\vec{j} = 6 \cdot \frac{1}{2}(\vec{a} + \vec{b}) + 2 \cdot \frac{1}{2}(\vec{a} - \vec{b}) = 3(\vec{a} + \vec{b}) + \vec{a} - \vec{b} = 4\vec{a} + 2\vec{b} \ \Rightarrow \ p = 4, q = 2.$$

4. Între lungimile laturilor unui triunghi ABC există relaţia $a^2 = b^2 + c^2$. Atunci, măsura unghiului $\hat{A}$ este **(5 pct.)**

   a) $90°$; b) $60°$; c) $120°$; d) $45°$; e) $210°$; f) $30°$.

   Soluţie. Relaţia indică faptul că triunghiul satisface Teorema lui Pitagora, unde a este lungimea ipotenuzei, deci $\hat{A} = 90°$.

5. Dacă $A = \{x \in [0, 2\pi]\,|\cos x = -2\}$, atunci **(5 pct.)**

   a) $A = \{\pi\}$; b) $A = \left\{\frac{\pi}{4}, \frac{7\pi}{4}\right\}$; c) $A = \varnothing$; d) $A = \left\{\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right\}$; e) $A = \{0, 2\pi\}$; f) $A = \left\{\frac{\pi}{3}, \frac{5\pi}{3}\right\}$.

   Soluţie. Cum $\cos x \in [-1, 1] \not\ni -2, \forall x \in \mathbb{R}$, ecuaţia $\cos x = -2$ nu are soluţii în intervalul $[0, 2\pi]$, deci $A = \emptyset$.

6. Să se calculeze $\sin x + \cos x$ pentru $x = \frac{3\pi}{4}$. **(5 pct.)**

   a) -2; b) 1; c) 0; d) -1; e) 2; f) $-\sqrt{2}$.

   Soluţie. Folosind relaţiile $\sin(\pi - \alpha) = \sin\alpha$ şi $\cos(\pi - \alpha) = -\cos\alpha$ pentru $\alpha = \frac{\pi}{4}$, obţinem:
$$\sin\frac{3\pi}{4} + \cos\frac{3\pi}{4} = \sin\frac{\pi}{4} - \cos\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} = 0.$$

7. Să se determine $\lambda \in \mathbb{R}$ pentru care vectorii $\vec{u} = (\lambda - 1)\,\vec{i} - 3\vec{j}$ şi $\vec{v} = \lambda\vec{i} + \vec{j}$ sunt coliniari. **(5 pct.)**

   a) $\frac{1}{4}$; b) $-\frac{1}{2}$; c) 0; d) 2; e) 1; f) 3.

   Soluţie. Componentele celor doi vectori trebuie să fie proporţionale, deci: $\frac{\lambda - 1}{\lambda} = \frac{-3}{1} \Leftrightarrow \lambda - 1 = -3\lambda \Leftrightarrow \lambda = \frac{1}{4}$.

8. Forma trigonometrică a numărului complex $z = \mathrm{i}$ este **(5 pct.)**

a) $\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) + \mathrm{i}\ \sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)$; b) $\cos\left(-\frac{\pi}{2}\right) + \sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)$; c) $\cos\frac{\pi}{4} + \mathrm{i}\ \sin\frac{\pi}{4}$; d) $\cos\frac{\pi}{3} + \mathrm{i}\ \sin\frac{\pi}{3}$; e) $\cos\pi + \mathrm{i}\ \sin\pi$; f) $\cos\frac{\pi}{2} + \mathrm{i}\ \sin\frac{\pi}{2}$.

Soluţie. Modulul numărului complex $z = 1$ este $|z| = \sqrt{0^2 + 1^2} = 1$, iar argumentul său α este dat de

$$\begin{cases} \cos\alpha = \dfrac{Re(z)}{|z|} = \dfrac{0}{1} = 0, \\[2ex] \sin\alpha = \dfrac{Im(z)}{|z|} = \dfrac{1}{1} = 1, \end{cases} \quad ,\ \alpha \in [0, 2\pi] \quad \Rightarrow \quad \alpha = \frac{\pi}{2},$$

deci rezultă $z = \cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}$.

9. Fie, într-un reper cartezian, punctele $M(0,3)$, $N(1,1)$, $P(-1,2)$. Centrul de greutate al triunghiului MNP este **(5 pct.)**

a) $(-1,2)$; b) $(0,2)$; c) $(1,1)$; d) $(2,2)$; e) $(2,0)$; f) $(0,6)$.

Soluţie. Media aritmetică a coordonatelor vârfurilor produce baricentrul: $G\left(\frac{0+1+(-1)}{3}, \frac{3+1+2}{3}\right) = (0,2)$.

10. Produsul $\cos 30° \cdot \cos 60° \cdot \cos 90°$ este egal cu **(5 pct.)**

a) -1; b) $\frac{\sqrt{3}}{2}$; c) $\frac{1}{2}$; d) 1; e) $\sqrt{2}$; f) 0.

Soluţie. Avem: $\cos 30° \cos 60° \cos 90° = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot 0 = 0$. *Altfel.* Deoarece $\cos 90° = 0$, produsul este nul.

11. Ştiind că $\sin x = 1$, să se calculeze $\cos x$. **(5 pct.)**

a) $\frac{2}{3}$; b) -1; c) 1; d) $\frac{1}{\sqrt{2}}$; e) 0; f) $\frac{3}{2}$.

Soluţie. Egalitatea $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ conduce la: $1 + \cos^2 x = 1$, deci $\cos x = 0$.

12. Perimetrul unui triunghi ABC este 24, iar lungimile laturilor sunt proporţionale cu numerele 3,4,5. Să se determine lungimile laturilor acestui triunghi. **(5 pct.)**

a) $\left\{\frac{11}{2}, 11, \frac{15}{2}\right\}$; b) $\{7,8,9\}$; c) $\{3,4,5\}$; d) $\{9,12,15\}$; e) $\{6,7,11\}$; f) $\{6,8,10\}$.

Soluţie. Notând cu a, b, c cele trei laturi, avem:

$$\begin{cases} a + b + c = 24 \\ \dfrac{a}{3} = \dfrac{b}{4} = \dfrac{c}{5} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c = 5a/3 \\ b = 4a/3 \\ a + \dfrac{5a}{3} + \dfrac{4a}{3} = 24 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 6 \\ b = 8 \\ c = 10, \end{cases}$$

deci soluţia este formată din mulţimea $\{6, 8, 10\}$.

13. Fie ABC un triunghi echilateral de arie $\sqrt{3}$. Latura triunghiului este **(5 pct.)**

a) 3; b) 5; c) 2; d) 1; e) $-\sqrt{3}$; f) $\frac{3}{2}$.

Soluţie. Dacă l este latura triunghiului echilateral, atunci aria acestuia este: $A = \frac{l^2\sqrt{3}}{4}$. Având $A = \sqrt{3}$, rezultă $\sqrt{3} = \frac{l^2\sqrt{3}}{4} \Leftrightarrow l^2 = 4 \Leftrightarrow l \in [\pm 2]$. Dar $l > 0$, deci $l = 2$.

14. Să se calculeze modulul numărului complex $z = 1 + \mathrm{i}$. **(5 pct.)**

a) $|z| = \sqrt{2}$; b) $|z| = 1 + \sqrt{2}$; c) $|z| = -1$; d) $|z| = 0$; e) $|z| = 1$; f) $|z| = \mathrm{i}$.

Soluţie. Avem $|z| = \sqrt{(Re\ z)^2 + (Im\ z)^2} = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$.

15. Unul din unghiurile unui trapez isoscel de înălţime $\sqrt{2}$ are măsura de $45°$. Atunci, suma lungimilor laturilor neparalele este **(5 pct.)**

a) $2 + \sqrt{2}$; b) 4; c) 2; d) 1; e) $2\sqrt{2}$; f) $\sqrt{2}$.

Soluţie. Fiind ipotenuze în triunghiuri dreptunghice isoscele de catete $\sqrt{2}$, cele două laturi neparalele au fiecare lungimile $\sqrt{2} \cdot \sqrt{2} = 2$, deci suma lungimilor lor este 4.

16. Dreptele $y = x$, $y = -x$ şi $2x + 3y = 0$ se taie în punctele **(5 pct.)**

a) $(-1,-1), (-1,2), (1,-1)$; b) $(0,-1), (1,0), (1,1)$; c) $(0,1), (-1,0)$; d) $(0,1), (1,0), (1,1)1$; e) $(2,2)$; f) $(0,0)$.

Soluţie. Punctul de intersecţie (dacă aceasta există) este soluţia sistemului: $\begin{cases} y = x, \ \ y = -x \\ 2x + 2y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow$ $\begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases}$, deci dreptele se intersectează în punctul $(0,0)$.

17. În planul complex se dă un paralelogram $ABCD$. Ştiind că afixele punctelor A, B, C sunt, respectiv, $z_A = 1$, $z_B = -1$, $z_C = \mathrm{i}$ să se determine afixul punctului D. **(5 pct.)**

a) $z_D = 2 + \mathrm{i}$; b) $z_D = 1 + 3\mathrm{i}$; c) $z_D = 1 - \mathrm{i}$; d) $z_D = 1 + \mathrm{i}$; e) $z_D = 3 + 2\mathrm{i}$; f) $z_D = 0$.

Soluţie. Punctul de intersecţie al diagonalelor le înjumătăţeste pe acestea, deci afixul său este semisuma afixelor vârfurilor opuse. Rezultă:

$$\frac{z_A + z_C}{2} = \frac{z_B + z_D}{2} \Leftrightarrow \frac{1+i}{2} = \frac{-1+z_D}{2} \Leftrightarrow z_D = 2 + i.$$

18. Care este mulţimea valorilor pentru $\operatorname{tg} a$, dacă $\sin a = \frac{1}{2}$? **(5 pct.)**

a) $\{-1\}$; b) $\left\{\frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}}\right\}$; c) $\{1\}$; d) $\left\{\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right\}$; e) $\{0\}$; f) $\{2,3\}$.

Soluţie. Din formula $\sin^2 a + \cos^2 a = 1$, obţinem: $\frac{1}{4} + \cos^2 a = 1 \Leftrightarrow \cos a \in \{\pm\frac{\sqrt{3}}{2}\}$. Atunci:

$$\operatorname{tg} a = \left\{\frac{\sin a}{\cos a}\right\} \in \left\{\frac{1/2}{\pm\sqrt{3}/2}\right\} = \left\{\pm\frac{1}{\sqrt{3}}\right\}.$$

Admitere * Universitatea Politehnica din Bucureşti 2010
Disciplina: Algebră şi Elemente de Analiză Matematică
Varianta A

1. Să se rezolve inecuaţia $3^{4-x} \leq 3^x$. **(5 pct.)**

   a) $\emptyset$; b) $x \in [2, \infty)$; c) $x \in \{-1, 1\}$; d) $x \in [0, 2]$; e) $x \in [-1, 1]$; f) $x \in \mathbb{R}$.

   Soluţie. Baza este supraunitară, deci ecuaţia devine $4 - x \leq x \Leftrightarrow x \geq 2 \Leftrightarrow x \in [2, \infty)$.

2. Coordonatele punctului de extrem al funcţiei $f : (0, \infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = x \ln x$ sunt: **(5 pct.)**

   a) $(\mathrm{e}, -\mathrm{e})$; b) $(\frac{1}{\mathrm{e}}, -\frac{1}{\mathrm{e}})$; c) $(1, -1)$; d) $(1, 0)$; e) $(\frac{1}{\mathrm{e}}, \mathrm{e})$; f) $(1, 1)$.

   Soluţie. Avem $f'(x) = \ln x + 1$ şi $f'(x) = 0 \Leftrightarrow \ln x = -1 \Leftrightarrow x = \mathrm{e}^{-1} = \frac{1}{\mathrm{e}}$. Deci $f(\frac{1}{\mathrm{e}}) = -\frac{1}{\mathrm{e}}$, iar punctul de extrem este $(\frac{1}{\mathrm{e}}, -\frac{1}{\mathrm{e}})$.

3. Fie $a_1, ..., a_{10}$ o progresie aritmetică cu $a_1 = 10$ şi raţia $r = -3$. Câţi termeni pozitivi are progresia? **(5 pct.)**

   a) 10; b) 2; c) 5; d) 6; e) 4; f) 3.

   Soluţie. Se observă că $a_1 = 10 > a_2 = 7 > a_3 = 4 > a_4 = 1 > a_5 = -2 \geq a_k, k \geq 5$. Deci numărul de termeni pozitivi este 4.

4. Valoarea expresiei $E = \mathrm{i}^5 + \mathrm{i}^7$ este: **(5 pct.)**

   a) i; b) 2i; c) 1; d) $\mathrm{i} + 1$; e) $\mathrm{i} - 1$; f) 0.

   Soluţie. $i^{4k} = 1, \forall k \in \mathbb{N}$, deci $E = i + i^3 = i(1 + i^2) = i \cdot 0 = 0$.

5. Valoarea integralei $\int_0^1 (3x^2 - 2x)dx$ este: **(5 pct.)**

   a) 0; b) -1; c) 1; d) 2; e) -2; f) $\frac{1}{2}$.

   Soluţie. Integrala devine $\left(x^3 - x^2\right)\Big|_0^1 = (1 - 1) - (0 - 0) = 0$.

6. Derivata funcţiei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = (x + 1)\mathrm{e}^x$ este: **(5 pct.)**

   a) $x^2\mathrm{e}^x$; b) e^x; c) $(x + 2)\mathrm{e}^x$; d) $(x + 1)\mathrm{e}^x$; e) 0; f) $x\mathrm{e}^x$.

   Soluţie. $f'(x) = e^x + (x + 1)e^x = (x + 2)e^x$.

7. Funcţia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} mx + 1, & x < 1 \\ x - 1, & x \geq 1 \end{cases}$ este continuă pentru: **(5 pct.)**

   a) $m = 1$; b) $m = 2$; c) $m = -1$; d) $m = -2$; e) $m = \frac{1}{2}$; f) $m = 0$.

   Soluţie. $f_s(1) = m + 1, f_d(1) = f(1) = 0$, iar f este continuă pe $\mathbb{R}$ d.n.d. f este continuă şi în punctul $x = 0$, deci dacă $f_s(1) = f_d(1) = f(1)$. Rezultă că f este continuă pentru $m = -1$.

8. Să se determine $a \in \mathbb{R}$ astfel încât $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -1 & a \end{vmatrix} = 0$. **(5 pct.)**

   a) $a \in [-1, 1]$; b) $a = 3$; c) $a = -1$; d) $a = 2$; e) $a = -2$; f) $a = 0$.

   Soluţie. Avem $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -1 & a \end{vmatrix} = a + 2 = 0 \Leftrightarrow a = -2$.

9. Să se calculeze $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x^2 - 1}{x - 1}$. **(5 pct.)**

   a) 3; b) 2; c) -1; d) 1; e) ∞; f) 0.

   Soluţie. Simplificând fracţia prin $x - 1$, obţinem $\lim\limits_{x\to1} \dfrac{x^2 - 1}{x - 1} = \lim\limits_{x\to1}(x + 1) = 2$.

10. Fie $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$. Atunci matricea $B = A^2 - A$ este: **(5 pct.)**

a) $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$; b) $\begin{pmatrix} 6 & 8 \\ 12 & 18 \end{pmatrix}$; c) 0_2; d) $\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 6 & 8 \end{pmatrix}$; e) $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$; f) $\begin{pmatrix} 8 & 10 \\ 12 & 18 \end{pmatrix}$.

Soluţie. Prin calcul direct, se obţine

$$B = A^2 - A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & 10 \\ 15 & 22 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 8 \\ 12 & 18 \end{pmatrix}.$$

11. Să se determine $m \in \mathbb{R}$ astfel încât ecuaţia $x^2 - mx + 4 = 0$ să admită soluţie dublă. **(5 pct.)**

a) $m \in [-4, 4]$; b) $m = 0$; c) $m \in \mathbb{R}$; d) $m \in \{-4, 4\}$; e) $m \in \{-2, 2\}$; f) $m = 5$.

Soluţie. Condiţia $\Delta = 0$ se rescrie $(-m)^2 - 16 = 0 \Leftrightarrow m^2 - 16 = 0 \Leftrightarrow (m-4)(m+4) = 0 \Leftrightarrow m \in \{\pm 4\}$.

12. Câte perechi distincte $(x, y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ de numere întregi verifică inegalitatea $x^2 + y^2 \leq 5$? **(5 pct.)**

a) 19; b) 11; c) 8; d) 20; e) 21; f) 13.

Soluţie. Perechile trebuie sa satisfacă relaţiile $0 \leq x^2 \leq 5$, $0 \leq y^2 \leq 5 \Leftrightarrow x, y \in [-\sqrt{5}, \sqrt{5}]$. Dar x şi y sunt întregi, deci $x, y \in \{-2, -1, 0, 1, 2\}$. Prin verificare directă se constată că din cele 25 de variante posibile, cele care *nu* satisfac inegalitatea sunt cele în care $\{x, y\} \subset \{\pm 2\}$, adică perechile $(\pm 2, \pm 2), (\pm 2, \mp 2)$; prin urmare, rămân $25 - 4 = 21$ variante valide, mai exact

$$\{(0,0), (1,1), (1,-1), (-1,1), (-1,-1), (0,1), (0,-1), (1,0), (-1,0), (0,2), (0,-2), (2,0), (-2,0),$$
$$(1,2), (-1,2), (1,-2), (-1,-2), (2,1), (-2,1), (2,-1), (-2,-1)\}.$$

13. Să se calculeze $x - \frac{1}{x}$ pentru $x = \frac{1}{2}$. **(5 pct.)**

a) $-\frac{1}{2}$; b) 1; c) $\frac{1}{2}$; d) $-\frac{3}{2}$; e) -1; f) $\frac{3}{2}$.

Soluţie. Prin calcul direct, obţinem $\frac{1}{2} - \frac{1}{1/2} = \frac{1}{2} - 2 = -\frac{3}{2}$.

14. Să se scrie în ordine crescătoare numerele $2,\ \pi,\ \sqrt{3}$. **(5 pct.)**

a) $\pi,\ 2,\ \sqrt{3}$; b) $\sqrt{3},\ \pi,\ 2$; c) $2,\ \sqrt{3},\ \pi$; d) $\sqrt{3},\ 2,\ \pi$; e) $\pi,\ \sqrt{3},\ 2$; f) $2,\ \pi,\ \sqrt{3}$.

Soluţie. Deoarece, cu eroare de maxim $\varepsilon = 0.1$ avem $\sqrt{3} \simeq 1.7 < 1.8, \pi \simeq 3.14 > 3.1$, rezultă $\sqrt{3} < 1.8 < 2 < 3.1 < \pi$, deci răspunsul este $\sqrt{3}, 2, \pi$.

15. Să se determine domeniul maxim de definiţie D al funcţiei $f : D \to \mathbb{R}$, $f(x) = \sqrt{2x+6}$. **(5 pct.)**

a) $[3, \infty)$; b) $[0, \infty)$; c) $(-\infty, -4]$; d) $[-3, 3]$; e) $\mathbb{R}$; f) $[-3, \infty)$.

Soluţie. Condiţia de existenţă a radicalului este $2x + 6 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq -3 \Leftrightarrow x \,\epsilon\, [-3, \infty)$.

16. Să se calculeze $x_1^2 + x_2^2$, unde x_1, x_2 sunt soluţiile ecuaţiei $x^2 - 4x + 3 = 0$. **(5 pct.)**

a) 0; b) 10; c) 12; d) 8; e) 16; f) 9.

Soluţie. Rezolvând ecuaţia, obţinem $\{x_1, x_2\} \in \{(1,3), (3,1)\}$, deci $x_1^2 + x_2^2 = 1^2 + 3^3 = 10$.

Altfel. Folosind relaţiile Viète, avem $x_1 + x_2 = 4$, $x_1 x_2 = 3$, deci

$$x_1^2 + x_2^2 = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2 = 4^2 - 2 \cdot 3 = 16 - 6 = 10.$$

17. Valoarea limitei $l = \lim\limits_{n\to\infty}(\sqrt{n^2+n} - \sqrt{n^2-n})$ este: **(5 pct.)**

a) -1; b) limita nu există; c) 1; d) $-\infty$; e) ∞; f) 0.

Soluţie. Raţionalizând diferenţa şi împărţind apoi simultan numărătorul şi numitorul prin n, obţinem

$$l = \lim_{n\to\infty}(\sqrt{n^2+n} + \sqrt{n^2-n}) = \lim_{n\to\infty} \frac{2n}{\sqrt{n^2+n} + \sqrt{n^2-n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{2}{\sqrt{1+\frac{1}{n}} + \sqrt{1-\frac{1}{n}}} \quad \Rightarrow \quad l = \frac{2}{2} = 1.$$

18. Valoarea integralei $I = \int\limits_0^1 \mathrm{e}^{-x^2} dx$ satisface inegalitatea: **(5 pct.)**

a) $I < \frac{1}{\mathrm{e}}$; b) $I < 0,1$; c) $I < \frac{\pi}{10}$; d) $I < 0$; e) $I < \frac{1}{3}$; f) $I < \frac{\pi}{4}$.

Soluţie. Se ştie că $e^x = 1 + x + \dfrac{x^2}{2!} + \dfrac{x^3}{3!} + ...,$ deci pentru $x \geq 0$ avem $e^x \geq 1 + x$. Înlocuim x cu $x^2 \geq 0$ şi obţinem $e^{x^2} \geq 1 + x^2 \Rightarrow e^{-x^2} \leq \dfrac{1}{1+x^2}$. Deoarece funcţiile din inegalitate sunt continue şi nu coincid pe intervalul $[0,1]$, obţinem inegalitatea strictă

$$\int_0^1 e^{-x^2} dx < \int_0^1 \frac{1}{1+x^2} dx = \operatorname{arctg} x \Big|_0^1 = \operatorname{arctg} 1 - \operatorname{arctg} 0 = \frac{\pi}{4} - 0 = \frac{\pi}{4} \quad \Rightarrow \quad I < \frac{\pi}{4}.$$

Altfel. Pentru $x \in [0,1]$, avem $x^2 \leq x \Leftrightarrow -x^2 \geq -x \Rightarrow \mathrm{e}^{-x^2} \geq \mathrm{e}^{-x}$ şi

$$\int_0^1 \mathrm{e}^{-x} dx = -\mathrm{e}^{-x} \Big|_0^1 = -\frac{1}{\mathrm{e}} + 1 = \frac{\mathrm{e}-1}{\mathrm{e}},$$

deci integrând inegalitatea de mai sus şi folosind aproximări, rezultă

$$I = \int_0^1 \mathrm{e}^{-x^2} dx \geq \int_0^1 \mathrm{e}^{-x} dx = \frac{\mathrm{e}-1}{\mathrm{e}} \geq \frac{2.7-1}{2.8} = \frac{1.7}{2.8} = \frac{17}{28} \geq \frac{4}{7},$$

deci $I \geq \dfrac{4}{7}$. Se observă că au loc inegalităţile

$$\frac{1}{\mathrm{e}} < \frac{4}{7} \ (\Leftrightarrow 7 < 4 \cdot \mathrm{e}) \Rightarrow I > \frac{1}{\mathrm{e}}, \qquad 0.1 < \frac{4}{7} \ (\Leftrightarrow 7 < 40) \Rightarrow I > 0.1$$

$$\frac{\pi}{10} < \frac{4}{7} \ (\Leftrightarrow 7\pi < 40) \Rightarrow I > \frac{\pi}{10}, \quad \frac{1}{3} < \frac{4}{7} \ (\Leftrightarrow 7 < 12) \Rightarrow I > \frac{1}{3}, \quad 0 < \frac{4}{7} \Rightarrow I > 0,$$

deci (conform convenţiei că din şase variante una singură poate fi adevărată), singura variantă validă rămâne $I < \frac{\pi}{4}$.

1. Se dau vectorii $\vec{u} = (\lambda - 1)\vec{i} - 3\lambda\vec{i}$ şi $\vec{v} = 2\vec{i} + \vec{j}$. Să se determine $\lambda \in \mathbb{R}$, astfel încât $\vec{u}$ şi $\vec{v}$ să fie paraleli. **(5 pct.)**

   a) 2; b) $\frac{1}{7}$; c) 3; d) $\frac{1}{2}$; e) $\frac{1}{4}$; f) 1.

   Soluţie. Vectorii sunt paraleli doar dacă au componentele respectiv proporţionale, deci

$$\frac{\lambda - 1}{2} = \frac{-3\lambda}{1} \Leftrightarrow \lambda - 1 = -6\lambda \Leftrightarrow \lambda = \frac{1}{7}.$$

2. Determinaţi $a \in \mathbb{R}$ astfel încât punctul $A(0, 2)$ să se găsească pe dreapta de ecuaţie $x + ay + 4 = 0$. **(5 pct.)**

   a) 0; b) 2; c) 5; d) -3; e) -1; f) -2.

   Soluţie. Coordonatele punctului A trebuie să satisfacă ecuaţia dreptei. Înlocuind $x = 0$, $y = 2$ în ecuaţie, obţinem $0 + 2a + 4 = 0 \Leftrightarrow a = -2$.

3. Să se calculeze modulul numărului complex $z = 1 + i\sqrt{3}$. **(5 pct.)**

   a) $\sqrt{3}$; b) -2; c) 0; d) 2; e) 4; f) -1.

   Soluţie. Avem $|z| = \sqrt{(Re\ \ z)^2 + (Im\ \ z)^2} = \sqrt{1^2 + (\sqrt{3})^2} = 2$.

4. Daca punctele $A(1, 2), B(2, 4), C(4, \lambda)$ sunt coliniare, atunci: **(5 pct.)**

   a) $\lambda = 10$; b) $\lambda = 7$; c) $\lambda = 8$; d) $\lambda = 5$; e) $\lambda = 1$; f) $\lambda = 2$.

   Soluţie. Coliniaritatea revine la anularea determinantului $\Delta = \begin{vmatrix} x_A & y_A & 1 \\ x_B & y_B & 1 \\ x_C & y_C & 1 \end{vmatrix}$, deci

$$\Delta = 0 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 1 \\ 4 & \lambda & 1 \end{vmatrix} = 0 \overset{l_2 - 2l_1}{\Longleftrightarrow} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \\ 4 & \lambda & 1 \end{vmatrix} \Leftrightarrow (-1)(-1)\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 4 & \lambda \end{vmatrix} \Leftrightarrow \lambda - 8 = 0 \Leftrightarrow \lambda = 8.$$

5. Să se calculeze produsul $P = \sin 45^o \cdot \cos 60^o$. **(5 pct.)**

   a) $\frac{1}{4}\sqrt{\frac{2}{3}}$; b) $\frac{1}{3}\sqrt{\frac{2}{3}}$; c) $\frac{\sqrt{2}}{4}$; d) $\sqrt{\frac{2}{3}}$; e) 1; f) $\sqrt{6}$.

   Soluţie. $P = \frac{\sqrt{2}}{2}\frac{1}{2} = \frac{\sqrt{2}}{4}$.

6. În reperul ortonormat xOy se consideră vectorii perpendiculari $\vec{u} = \vec{i} + \vec{j}$ şi $\vec{v} = 2\vec{i} + m\vec{j}$. Atunci: **(5 pct.)**

   a) $m = 2$; b) $m = 3$; c) $m = 0$; d) $m = -1$; e) $m = -2$; f) $m = 1$.

   Soluţie. Produsul scalar al celor doi vectori trebuie să se anuleze, deci

$$\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle = 0 \Leftrightarrow 1 \cdot 2 + 1 \cdot m = 0 \Leftrightarrow m + 2 = 0 \Leftrightarrow m = -2.$$

7. Ştiind că $\sin x = \frac{1}{2}$, să se calculeze $\cos^2 x$. **(5 pct.)**

   a) $\frac{1}{2}$; b) $-\frac{1}{2}$ c) $\frac{3}{4}$; d) $-\frac{3}{4}$; e) 0; f) 2.

   Soluţie. Folosind identitatea trigonometrică $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$, obţinem $\frac{1}{4} + \cos^2 x = 1$, deci $\cos^2 x = \frac{3}{4}$.

8. Dacă $z = \cos\frac{\pi}{3} + i \sin\frac{\pi}{3}$, atunci z^3 este egal cu: **(5 pct.)**

   a) -1; b)$1 + i\frac{\sqrt{3}}{2}$; c) $\sqrt{\frac{2}{3}}$; d) i; e)$-i$; f) 1.

   Soluţie. Aplicăm formula lui Moivre $[\rho(\cos\alpha + i\sin\alpha)]^n = \rho^n(\cos n\alpha + i \sin n\alpha)$, pentru $\rho = 1$, $\alpha = \frac{\pi}{3}$, $n = 3$. Obţinem $z^3 = \cos\pi + i\sin\pi = -1 + i \cdot 0 = -1$.

9. Dreapta care trece prin punctele $A(1,2)$ şi $B(2,5)$ are ecuaţia: **(5 pct.)**

a) $2y-x+1=0$; b) $y-3x+1$; c) $2x-y=0$; d) $3y+2x-1=0$; e) $2x-y-1=0$; f) $x+3y-1=0$.

Soluţie. Ecuaţia dreptei care trece prin punctele $A=(x_A,y_A)$, $B=(x_B,y_B)$ este $\frac{x-x_A}{x_B-x_A}=\frac{y-y_A}{y_B-y_A}$. În cazul nostru, obţinem $\frac{x-1}{2-1}=\frac{y-2}{5-2}\Leftrightarrow 3\cdot(x-1)=y-2\Leftrightarrow y-3x+1=0$.

10. Fie vectorii $\vec{u}$, $\vec{v}$ astfel încât $\parallel \vec{u}\parallel=2$, $\parallel \vec{v}\parallel=3$, şi $\vec{u}\cdot\vec{v}=3\sqrt{3}$. Găsiţi măsura α a unghiului dintre vectorii $\vec{u}$ şi $\vec{v}$. **(5 pct.)**

a) $\alpha=\frac{\pi}{2}$; b) $\alpha=\frac{\pi}{3}$; c) $\alpha=\frac{2\pi}{3}$; d) $\alpha=0$; e) $\alpha=\frac{\pi}{6}$ f) $\alpha=\frac{\pi}{5}$.

Soluţie. Unghiul θ dintre vectorii $\vec{u}$ şi $\vec{v}$ este caracterizat de egalitatea $\cos\theta=\dfrac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{\|\vec{u}\|\cdot\|\vec{v}\|}, \theta\in[0,\pi]$. Obţinem $\cos\theta=\dfrac{3\sqrt{3}}{2\cdot 3}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}\Rightarrow\theta=\dfrac{\pi}{6}$.

11. Distanţa de la punctul $O(0,0)$ la dreapta $3x-4y-4=0$ este: **(5 pct.)**

a) $d=\frac{8}{5}$; b) $d=2$; c) $d=\frac{3}{4}$; d) $d=4$; e) $d=3$; f) $d=\frac{4}{5}$.

Soluţie. Distanţa de la un punct $A(x_A,y_A)$ la o dreaptă $\Delta: ax+by+c=0$ este $d=\dfrac{|ax_A+by_A+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$. La noi $A=O(0,0)$ şi $\Delta: 3x-4y-4=0$, deci $d=\dfrac{|-4|}{\sqrt{3^2+(-4)^2}}=\dfrac{4}{5}$.

12. Să se calculeze aria unui triunghi echilateral cu latura de lungime 6. **(5 pct.)**

a) $9\sqrt{3}$; b) $7\sqrt{3}$; c) $6\sqrt{2}$; d) 36; e) 18; f) 9.

Soluţie. Aria triunghiului echilateral de latură l este $A=\dfrac{l^2\sqrt{3}}{4}$, deci pentru $l=6$ obţinem $A=\dfrac{6^2\sqrt{3}}{4}=9\sqrt{3}$.

13. Fie $A(1,0)$, $B(0,1)$, $C(-2,0)$ şi S aria triunghiului ABC. Atunci: **(5 pct.)**

a) $S=\frac{1}{2}$; b) $S=2$; c) $S=\frac{3}{2}$; d) $S=3$; e) $S=1$; f) $S=\frac{5}{2}$.

Soluţie. Aria triunghiului ABC este:

$$S=\frac{1}{2}\cdot abs(\begin{vmatrix} x_A & y_A & 1\\ x_B & y_B & 1\\ x_C & y_C & 1\end{vmatrix})=\frac{1}{2}\cdot abs(\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 1\\ -2 & 0 & 1\end{vmatrix})=\frac{1}{2}\cdot|3|=\frac{3}{2}.$$

14. Fie $\hat{A},\hat{B},\hat{C}$ unghiurile unui triunghi ABC. Dacă $\sin\hat{A}=1$, calculaţi $\hat{B}+\hat{C}$. **(5 pct.)**

a) $\dfrac{3\pi}{4}$; b) $\dfrac{\pi}{4}$; c) $\dfrac{4\pi}{5}$; d) $\dfrac{\pi}{2}$; e) $\dfrac{2\pi}{3}$; f) $\dfrac{\pi}{3}$.

Soluţie. Se observă că $\sin\hat{A}=1\Rightarrow\hat{A}=\dfrac{\pi}{2}$. Dar $\hat{A}+\hat{B}+\hat{C}=\pi$, deci $\hat{B}+\hat{C}=\dfrac{\pi}{2}$.

15. Perimetrul triunghiului de vârfuri $O(0,0), A(1,0), B(0,1)$ este: **(5 pct.)**

a) $2+\sqrt{2}$; b) $2+\sqrt{3}$ c) 1; d) 3; e) 4; f) $2-\sqrt{2}$.

Soluţie. Lungimile celor trei laturi ale triunghiului OAB sunt:

$$\begin{cases} OA=\sqrt{(x_A-x_O)^2+(y_A-y_O)^2}=\sqrt{1^2+0^2}=1\\ AB=\sqrt{(-1)^2+1^2}=\sqrt{2},\ \ OB=\sqrt{0^2+1^2}=1,\end{cases}$$

deci perimetrul este $OA+AB+OB=1+\sqrt{2}+1=2+\sqrt{2}$.

16. Aria unui pătrat este 4. Calculati diagonala pătratului. **(5 pct.)**

a) $2\sqrt{3}$; b) $\sqrt{5}$; c) 2; d) 1; e) $\sqrt{2}$; f) $2\sqrt{2}$.

Soluţie. Aria unui pătrat de latură a este $A=a^2$, deci $a=\sqrt{A}$. Diagonala pătratului de latură a fiind $d=a\sqrt{2}$, rezultă $d=\sqrt{A}\sqrt{2}=\sqrt{2A}$. În cazul nostru, avem $d=\sqrt{2\cdot 4}=2\sqrt{2}$.

17. Se dă triunghiul dreptunghic de laturi 3, 4, 5. Să se calculeze înalţimea din vârful unghiului drept. **(5 pct.)**

a) 3; b) $2,4$; c) 4; d) $4,1$; e) 2; f) $2,5$.

Soluţie. Dacă a este ipotenuza triunghiului dreptunghic iar b, c sunt cele două catete, atunci $a > b, a > c$ şi deci $a = 5$, $\{b, c\} = \{3, 4\}$. Atunci înălţimea din vârful unghiului drept este

$$h = \frac{b \cdot c}{a} = \frac{3 \cdot 4}{5} = \frac{12}{5} = 2.4$$

18. Laturile paralele ale unui trapez au lungimile 4 şi 6. Să se determine lungimea liniei mijlocii a trapezului. **(5 pct.)**

a) 5; b) $\frac{7}{2}$; c) $\frac{9}{2}$; d) 1; e) 6; f) 4.

Soluţie. Linia mijlocie are lungimea egală cu semisuma bazelor trapezului, deci $\frac{4+6}{2} = 5$.

1. Să se calculeze $\int_0^1 (x^2+x)dx$. **(5 pct.)**

   a) $\frac{1}{6}$; b) 1; c) $\frac{2}{3}$; d) 2; e) 3; f) $\frac{5}{6}$.

   Soluţie. Prin calcul direct, aplicând formula Leibnitz-Newton, obţinem

$$\int_0^1 (x^2+x)dx = \left(\frac{x^3}{3}+\frac{x^2}{2}\right)\Big|_0^1 = \frac{1}{3}+\frac{1}{2}=\frac{5}{6}.$$

2. Suma soluţiilor ecuaţiei $\sqrt{x^2-9}=4$ este: **(5 pct.)**

   a) 9; b) -1; c) 5; d) 1; e) 0; f) 4.

   Soluţie. Radicalul există pentru $x^2-9\geq 0 \Leftrightarrow x\in(-\infty,-3]\cup[3,\infty)$. Ridicând la pătrat ambii membri ai ecuaţiei, obţinem $x^2-9=16 \Leftrightarrow x^2=25$, deci $x\in\{\pm 5\}\subset(-\infty,-3]\cup[3,\infty)$. Prin urmare rădăcinile ecuaţiei sunt -5 şi 5, iar suma lor este 0.

3. Fie $A=\left(\begin{smallmatrix}1 & 1\\ 0 & -1\end{smallmatrix}\right)$ Calculaţi A^3. **(5 pct.)**

   a) $\left(\begin{smallmatrix}1 & 1\\ 1 & 1\end{smallmatrix}\right)$; b) $\left(\begin{smallmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{smallmatrix}\right)$; c) $\left(\begin{smallmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{smallmatrix}\right)$; d) $\left(\begin{smallmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{smallmatrix}\right)$; e) $\left(\begin{smallmatrix}1 & 1\\ 0 & -1\end{smallmatrix}\right)$; f) $\left(\begin{smallmatrix}1 & 1\\ -1 & 0\end{smallmatrix}\right)$.

   Soluţie. Se observă că $A^2=\left(\begin{smallmatrix}1 & 1\\ 0 & -1\end{smallmatrix}\right)\left(\begin{smallmatrix}1 & 1\\ 0 & -1\end{smallmatrix}\right)=\left(\begin{smallmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{smallmatrix}\right)=I_2$, deci $A^3=A^2\cdot A=I_2\cdot A=A$, deci $A^3=\left(\begin{smallmatrix}1 & 1\\ 0 & -1\end{smallmatrix}\right)$.

4. Să se rezolve ecuaţia $\dfrac{2x+1}{x+2}=1$. **(5 pct.)**

   a) $x=1$; b) $x=-2$; c) $x=-\frac{1}{2}$; d) $x=2$; e) $x=\sqrt{2}$; f) $x=\sqrt[3]{2}$.

   Soluţie. Se impune condiţia $x+2\neq 0\Leftrightarrow x\neq -2$. Ecuaţia devine $2x+1=x+2$, de unde $x=1$.

5. Să se rezolve ecuaţia $3^{x+1}=3^{4x}$. **(5 pct.)**

   a) 2; b) $\frac{1}{3}$; c) $-\frac{1}{3}$; d) -1; e) $\frac{2}{3}$; f) 0.

   Soluţie. Din $3^{x+1}=3^{4x}$ rezultă $x+1=4x$, de unde $x=\frac{1}{3}$.

6. Câte numere naturale x verifică inegalitatea $x<\dfrac{9}{x}$? **(5 pct.)**

   a) şase; b) două; c) patru; d) niciunul; e) unul; f) cinci.

   Soluţie. Avem $x<\frac{9}{x}\Leftrightarrow\frac{x^2-9}{x}<0$. Dar $x\in\mathbb{N}^*\Rightarrow x>0$, deci inecuaţia este echivalentă cu $x^2-9<0$ şi deci $x\in(-3,3)$. Cum $x\in\mathbb{N}^*$, rezultă $x\in(-3,3)\cap\mathbb{N}^*=\{1,2\}$.

7. Dacă x şi y verifică sistemul $\begin{cases}2x+y=2-3m\\ x-y=1-3m\end{cases}$, atunci $x+2y$ este egal cu: **(5 pct.)**

   a) 1; b) 0; c) $2m+1$; d) $m-1$; e) m; f) 2.

   Soluţie. Scăzând membru cu membru ecuaţia a doua din prima ecuaţie, obţinem $x+2y=1$.

8. Să se calculeze $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2}{x^2+1}$. **(5 pct.)**

   a) nu există limita; b) 2; c) 1; d) 0; e) $\frac{1}{2}$; f) $+\infty$.

   Soluţie. Dând factor forţat x^2 la numitor, simplificând şi apoi trecând la limită, obţinem

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^2}{x^2+1}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2}{x^2(1+\frac{1}{x^2})}=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{1+\frac{1}{x^2}}=1.$$

9. Produsul soluţiilor ecuaţiei $2x^2-5x+2=0$ este: **(5 pct.)**

   a) $-\frac{5}{2}$; b) 0; c) 1; d) $\frac{5}{2}$; e) 4; f) -1.

   Soluţie. Notăm cu $x_{1,2}$ soluţiile ecuaţiei. Din relaţiile Viète, obţinem $x_1x_2=\frac{2}{2}=1$.

10. Fie $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^3+2x^2+3x-e^x$. Să se calculeze $f'(0)$. **(5 pct.)**

a) 3; b) 1; c) e^2; d) $\frac{1}{e}$; e) 0; f) 2.

Soluţie. Avem $f'(x)=3x^2+4x+3-e^x$, deci $f'(0)=3-1=2$.

11. Să se calculeze $(1+i)^2$. **(5 pct.)**

a) $-i$; b) $2i$; c) 3; d) 0; e) i; f) 1.

Soluţie. Prin calcul direct, obţinem $(1+i)^2=1+2i-1=2i$.

12. Să se rezolve inecuaţia $\frac{x}{2}-1<\frac{x}{3}+2$. **(5 pct.)**

a) $x\geq 20$; b) $x>20$; c) $x\leq 18$; d) $x>24$; e) $x=21$; f) $x<18$.

Soluţie. Inecuaţia se rescrie

$$\frac{x}{2}-1<\frac{x}{3}+2\Leftrightarrow\frac{x}{2}-\frac{x}{3}<1+2\Leftrightarrow\frac{x}{6}<3\Leftrightarrow x<18.$$

13. Suma rădăcinilor polinomului X^3-3X^2+2X este: **(5 pct.)**

a) $\frac{1}{3}$; b) $\frac{1}{2}$; c) 3; d) 2; e) 0; f) 1.

Soluţie. Dacă x_1,x_2,x_3 sunt rădăcinile polinomului, din relaţiile Viète rezultă $x_1+x_2+x_3=-\frac{-3}{1}=3$.

14. Numărul punctelor de extrem ale funcţiei $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\dfrac{x}{x^2+1}$ este: **(5 pct.)**

a) 4; b) 1; c) 2; d) 3; e) 5; f) 0.

Soluţie. Calculăm derivata, $f'(x)=\dfrac{1-x^2}{(x^2+1)^2}$, iar ecuaţia $f'(x)=0$ are soluţiile $x\in\{\pm1\}$. Tabloul de variaţie este:

x	$-\infty$		-1		1		∞
$1-x^2$	$-$	$-$	0	$+$	0	$-$	$-$
$f'(x)$	$-$	$-$	0	$+$	0	$-$	$-$
$f(x)$	$\searrow$	$\searrow$	$-\dfrac{1}{2}$ (minim)	$\nearrow$	$\dfrac{1}{2}$ (maxim)	$\searrow$	$\searrow$

Prin urmare funcţia are *două* puncte de extrem: punctul de minim local $(-1,-\frac{1}{2})$ şi punctul de maxim local $(1,\frac{1}{2})$.

15. Să se rezolve ecuaţia $\log_2 x=-1$. **(5 pct.)**

a) $x=-\frac{1}{2}$; b) $x=e$; c) $x=1$; d) $x=0$; e) $x=2$; f) $x=\frac{1}{2}$.

Soluţie. Condiţia de existenţa a logaritmului este $x>0$. Avem $\log_2 x=-1\Leftrightarrow x=2^{-1}=\frac{1}{2}$.

16. Să se calculeze limita şirului $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ definit prin $a_n=\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\frac{k+1}{3^k}$. **(5 pct.)**

a) $\frac{7}{2}$; b) $\frac{9}{4}$; c) 2; d) $\frac{5}{2}$; e) $\frac{7}{3}$; f) 3.

Soluţie. Calculăm în prealabil suma $S=1+2q+3q^2+\ldots+(n+1)q^n$. Avem

$$\begin{aligned}qS-S&=(n+1)q^{n+1}-(1+q+q^2+\ldots+q^n)\\&=(n+1)q^{n+1}-\frac{q^{n+1}-1}{q-1}\\&=\frac{(n+1)q^{n+2}-(n+2)q^{n+1}+1}{q-1},\end{aligned}$$

de unde rezultă $S=\dfrac{(n+1)q^{n+2}-(n+2)q^{n+1}+1}{(q-1)^2}$. Pentru $q=\dfrac{1}{3}$, obţinem

$$a_n=\sum_{k=0}^{n}\frac{k+1}{3^k}=\frac{(n+1)(\frac{1}{3})^{n+2}-(n+2)(\frac{1}{3})^{n+1}+1}{(\frac{1}{3}-1)^2},$$

de unde $a_n=\dfrac{9}{4}\left(\dfrac{n+1}{3^{n+2}}-\dfrac{n+2}{3^{n+1}}+1\right)$. Deci $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=\dfrac{9}{4}$.

17. Fie $f : (-\infty, 1) \cup (1, \infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = \dfrac{x^2 + mx + 1}{x - 1}$. Să se determine $m \in \mathbb{R}$ astfel încât dreapta $y = x + 2$ să fie asimptotă la graficul funcţiei f. **(5 pct.)**

a) $m = \sqrt{2}$; b) $m = -\sqrt{2}$; c) $m = -1$; d) $m = 1$; e) $m = 2$; f) $m = 0$.

Soluţie. Dacă dreapta $y = ax + b$ este asimptotă la graficul funcţiei f pentru $x \to \infty$, atunci $a = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{f(x)}{x}$ şi $b = \lim\limits_{x\to\infty} (f(x) - ax)$. Prin urmare $a = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x^2 + mx + 1}{x(x-1)} = 1$ şi

$$b = \lim_{x\to\infty} \left(\frac{x^2 + mx + 1}{x - 1} - x \right) = \lim_{x\to\infty} \frac{(m+1)x + 1}{x - 1} = \lim_{x\to\infty} \frac{x(m + 1 + \frac{1}{x})}{x(1 - \frac{1}{x})} = \lim_{x\to\infty} \frac{m + 1 + \frac{1}{x}}{1 - \frac{1}{x}} = m + 1.$$

Rezultă $m + 1 = 2$, de unde $m = 1$.

18. Să se calculeze raţia r a unei progresii aritmetice cu $a_1 = 1$ şi $a_4 = 7$. **(5 pct.)**

a) $r = 6$; b) $r = 7$; c) $r = \frac{1}{2}$; d) $r = \sqrt{2}$; e) $r = -2$; f) $r = 2$.

Soluţie. Deoarece $a_4 = a_1 + 3r$, avem $7 = 1 + 3r$, de unde $r = 2$.

1. Se consideră triunghiul ABC cu laturile $BC = 2$, $AB = \sqrt{2}$, $AC = 1 + \sqrt{3}$. Să se calculeze $\cos \hat{A}$. **(5 pct.)**

   a) $\frac{\sqrt{3}}{2}$; b) $\frac{1}{2}$; c) 0; d) $\sqrt{3}$; e) $\frac{\sqrt{2}}{2}$; f) 1.

   Soluţie. Din teorema cosinusului aplicată pentru unghiul $\hat{A}$, avem $BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2AB \cdot AC \cdot \cos \hat{A}$, deci $\cos \hat{A} = \frac{AB^2+AC^2-BC^2}{2AB \cdot AC}$. Prin urmare

$$\cos \hat{A} = \frac{2 + (1+\sqrt{3})^2 - 4}{2\sqrt{2}(1+\sqrt{3})} = \frac{2 + 2\sqrt{3}}{2\sqrt{2}(1+\sqrt{3})} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

2. Dacă $z = 2 + i$ atunci $z + \bar{z}$ este: **(5 pct.)**

   a) 3; b) 6; c) $1 + i$; d) 5; e) $7i$; f) 4.

   Soluţie. Obţinem $z + \bar{z} = (2 + i) + (2 - i) = 4$.

3. Se dau vectorii $\vec{u} = 3\vec{i} + (\lambda - 4)\vec{j}$ şi $\vec{v} = \lambda\vec{i} + \vec{j}$. Să se determine $\lambda \in \mathbb{R}$ astfel încât vectorii $\vec{u}$ şi $\vec{v}$ să fie perpendiculari. **(5 pct.)**

   a) $\lambda = -1$; b) $\lambda = 2$; c) $\lambda = 1$; d) $\lambda = \frac{1}{2}$; e) $\lambda = -\frac{3}{2}$; f) $\lambda = 0$.

   Soluţie. Avem $\bar{u} \perp \bar{v} \Leftrightarrow \bar{u} \cdot \bar{v} = 0 \Leftrightarrow 3\lambda + (\lambda - 4) \cdot 1 = 0 \Leftrightarrow \lambda = 1$.

4. Soluţia ecuaţiei $2 \sin x - 1 = 0$, $x \in \left[0.\frac{\pi}{2}\right]$ este: **(5 pct.)**

   a) $\frac{\pi}{10}$; b) $\frac{\pi}{6}$; c) $\frac{2\pi}{5}$; d) 0; e) $\frac{\pi}{7}$; f) $\frac{\pi}{4}$.

   Soluţie. Din $2 \sin x = 1$ rezultă $\sin x = \dfrac{1}{2}$. Deoarece $x \in [0, \frac{\pi}{2}]$, obţinem $x = \dfrac{\pi}{6}$.

5. Fie $\vec{w} = 2\vec{u} + 3\vec{v}$, unde $\vec{u} = 2\vec{i} + 3\vec{j}$ şi $\vec{v} = \vec{i} - 2\vec{j}$. Atunci $||\vec{w}||$ este: **(5 pct.)**

   a) 6; b) 2; c) 0; d) 7; e) $\sqrt{5}$; f) -2.

   Soluţie. Prin calcul direct, rezultă $\vec{w} = 2\vec{u} + 3\vec{v} = 2(2\vec{i} + 3\vec{j}) + 3(\vec{i} - 2\vec{j}) = 7\vec{i}$. Deci $||\vec{w}|| = ||7\vec{i}|| = |7|\ ||\vec{i}|| = 7 \cdot 1 = 7$.

6. Să se calculeze produsul $P = \sin 30^\circ \cdot \operatorname{tg} 45^\circ \cdot \cos 60^\circ$. **(5 pct.)**

   a) 2; b) 0; c) $\sqrt{3}$; d) $\frac{\sqrt{2}}{2}$; e) $\frac{1}{4}$; f) 1.

   Soluţie. Înlocuind în expresie valorile funcţiilor trigonometrice, rezultă $P = \sin 30^\circ \operatorname{tg} 45^\circ \cos 60^\circ = \dfrac{1}{2} \cdot 1 \cdot \dfrac{1}{2} = \dfrac{1}{4}$.

7. Dacă $\cos x = \frac{3}{5}$, atunci $\sin^2 x$ este: **(5 pct.)**

   a) 0; b) 1; c) $\frac{3}{2}$; d) $\frac{2}{5}$; e) $-\frac{16}{25}$; f) $\frac{16}{25}$.

   Soluţie. Deoarece $\sin^2 x = 1 - \cos^2 x$, obţinem $\sin^2 x = 1 - \dfrac{9}{25} = \dfrac{16}{25}$.

8. Să se scrie ecuaţia dreptei ce trece prin punctele $A(1, 2)$, $B(2, 1)$. **(5 pct.)**

   a) $x - y + 3 = 0$; b) $x + y - 3 = 0$; c) $2x + 3y - 5 = 0$; d) $x = y$; e) $3x + 5y = 2$; f) $x - 4y - 5 = 0$.

   Soluţie. Ecuaţia dreptei este dată de formula $\dfrac{x - x_A}{x_B - x_A} = \dfrac{y - y_A}{y_B - y_A}$, deci $\dfrac{x-1}{2-1} = \dfrac{y-2}{1-2}$. Rezultă $-(x - 1) = y - 2$, deci $x + y - 3 = 0$.

9. Să se calculeze $\operatorname{tg} x$ ştiind că $\sin x - \sqrt{3} \cos x = 0$. **(5 pct.)**

   a) $\frac{\sqrt{3}}{2}$; b) -1; c) $\sqrt{2}$; d) 1; e) 2; f) $\sqrt{3}$.

   Soluţie. Din $\sin x - \sqrt{3} \cos x = 0$, rezultă $\sin x = \sqrt{3} \cos x$. Dar $\cos x$ este nenul, deoarece anularea lui ar conduce la $\sin x \in \{\pm 1\}$ iar prin înlocuire în ecuaţie la $\sin x = 0$, contradicţie. Prin urmare putem împărţi ambii membri ai ecuaţiei la $\cos x \neq 0$. Obţinem $\dfrac{\sin x}{\cos x} = \sqrt{3}$, adică $\operatorname{tg} x = \sqrt{3}$.

10. Expresia $(\sin x+\cos x)^2-\sin 2x$ este egală cu: **(5 pct.)**

a) 1; b) 3; c) $\sin x$; d) 2; e) -1; f) $\cos x$.

Soluţie. Ridicând la pătrat binomul, folosind formula triginometrică fundamentală şi formula sinusului de arc dublu, rezultă

$$(\sin x+\cos x)^2-\sin 2x=\sin^2 x+\cos^2 x+2\sin x\cos x-\sin 2x=1+\sin 2x-\sin 2x=1.$$

11. Într-un triunghi ABC se dau $\hat{B}=60°$, $\hat{C}=30°$. Atunci $\sin\frac{\hat{A}}{2}$ are valoarea: **(5 pct.)**

a) 0; b) $\frac{\sqrt{3}}{2}$; c) $-\frac{\sqrt{2}}{2}$; d) $\frac{\sqrt{3}}{3}$; e) $\frac{\sqrt{2}}{2}$; f) 1.

Soluţie. Deoarece $\hat{B}=60°$ şi $\hat{C}=30°$, folosind egalitatea $\hat{A}+\hat{B}+\hat{C}=180°$, rezultă $\hat{A}=180°-(\hat{B}+\hat{C})=90°$. Deci $\sin\dfrac{\hat{A}}{2}=\sin 45°=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

12. Pentru $z=\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}$ calculaţi $|z|$. **(5 pct.)**

a) $\frac{1}{3}$; b) 2; c) $\frac{1}{4}$; d) -1; e) 0; f) 1.

Soluţie. Folosind regula de calcul a modulului unui număr complex scris în formă algebrică, obţinem

$$|z|=\left|\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right|=\sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}=\sqrt{\frac{1}{4}+\frac{3}{4}}=\sqrt{1}=1.$$

13. Să se determine $m\in\mathbb{R}$ astfel încât dreapta $mx+4y+2=0$ să fie paralelă cu dreapta $3x-6y+1=0$. **(5 pct.)**

a) $m=\frac{1}{2}$; b) $m=2$; c) $m=\frac{1}{3}$; d) $m=-2$; e) $m=\frac{2}{3}$; f) $m=1$.

Soluţie. Fie $d_1:\ mx+4y+2=0$ şi $d_2:\ 3x-6y+1=0$ dreptele date şi m_1, m_2 respectiv pantele acestora. Condiţia de paralelism se scrie:

$$d_1||d_2\Leftrightarrow m_{d_1}=m_{d_2}\Leftrightarrow\frac{-m}{4}=\frac{-3}{-6}\Leftrightarrow\frac{-m}{4}=\frac{1}{2}\Leftrightarrow m=-2.$$

14. Fie $A(-3,0)$, $B(3,0)$,$C(0,4)$ şi fie S aria triunghiului ABC. Atunci: **(5 pct.)**

a) $S=15$; b) $S=6$; c) $S=16$; d) $S=8$; e) $S=12$; f) $S=20$.

Soluţie. Folosim formula $S=\mathcal{A}_{\Delta ABC}=\dfrac{1}{2}|\Delta|$, unde $\Delta=\begin{vmatrix}x_A&y_A&1\\x_B&y_B&1\\x_C&y_C&1\end{vmatrix}$. Avem $\Delta=\begin{vmatrix}-3&0&1\\3&0&1\\0&4&1\end{vmatrix}=12+12=24$, deci $S=\frac{1}{2}\cdot|24|=12$.

15. Dacă punctele $A(2,3)$, $B(-1,4)$, $C(m,m+3)$ sunt coliniare, atunci: **(5 pct.)**

a) $m=\frac{1}{3}$; b) $m=\frac{2}{3}$; c) $m=-\frac{1}{3}$; d) $m=-\frac{1}{2}$; e) $m=\frac{1}{2}$; f) $m=4$.

Soluţie. Punctele A, B, C sunt coliniare dacă $\begin{vmatrix}x_A&y_A&1\\x_B&y_B&1\\x_C&y_C&1\end{vmatrix}=0$. Deci $\begin{vmatrix}2&3&1\\-1&4&1\\m&m+3&1\end{vmatrix}=0$ şi dezvoltând determinantul, obţinem $-4m+2=0$, de unde $m=\dfrac{1}{2}$.

16. Să se precizeze $m\in\mathbb{R}$ astfel încât dreapta de ecuaţie $2x-my+3=0$ să treacă prin punctul $M(1,2)$. **(5 pct.)**

a) $m=\frac{1}{3}$; b) $m=-\frac{3}{4}$; c) $m=\frac{1}{2}$; d) $m=\frac{2}{5}$; e) $m=0$; f) $m=\frac{5}{2}$.

Soluţie. Deoarece punctul $M(1,2)$ aparţine dreptei $d:\ 2x-my+3=0$, coordonatele acestuia trebuie să satisfacă ecuaţia dreptei. Înlocuind, obţinem $2\cdot1-m\cdot2+3=0$, de unde $m=\dfrac{5}{2}$.

17. Dacă $E = \cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}$, atunci valoarea $a = E^3$ este: **(5 pct.)**

a) $a = -1$; b) $a = 1 + i$; c) $a = 3i$; d) $a = 1$; e) $a = i$; f) $a = -1$.

Soluţie. Notăm $a = E^3 = \left(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}\right)^3$. Folosind formula lui Moivre, obţinem

$$a = \cos\frac{3\pi}{6} + i\sin\frac{3\pi}{6} = \cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2} = 0 + i\cdot 1 = i.$$

18. Să se determine vârful D al paralelogramului $ABCD$, cunoscându-se $A(0,0)$, $B(0,3)$, $C(2,5)$. **(5 pct.)**

a) $D(-1,1)$; b) $D(1,3)$; c) $D(2,2)$; d) $D(-2,2)$; e) $D(3,3)$; f) $D(2,1)$.

Soluţie. Deoarece $ABCD$ este paralelogram, rezultă $AB\,||\,DC$ şi $AB = DC$, adică $\overline{AB} = \overline{DC}$. Dar $\overline{AB} = (x_B - x_A)\bar{i} + (y_B - y_A)\bar{j}$ şi $\overline{DC} = (x_C - x_D)\bar{i} + (y_C - y_D)\bar{j}$, deci

$$\overline{AB} = \overline{DC} \Leftrightarrow \begin{cases} x_B - x_A = x_C - x_D \\ y_B - y_A = y_C - y_D \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 - 0 = 2 - x_D \\ 3 - 0 = 5 - y_D \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_D = 2 \\ y_D = 2 \end{cases} \Leftrightarrow D(2,2).$$

1. Să se calculeze determinantul $D = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix}$. **(5 pct.)**

   a) $D = 5$; b) $D = 4$; c) $D = 2$; d) $D = 1$; e) $D = 0$; f) $D = 3$.

   Soluţie. Aplicând regula lui Sarrus, obţinem $D = 1\cdot5\cdot9+2\cdot6\cdot7+4\cdot8\cdot3-7\cdot5\cdot3-4\cdot2\cdot9-6\cdot8\cdot1 = 0$.

   Altfel. Scăzând prima linie a determinantului din liniile a doua şi a treia, rezultă $D = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 3 & 3 \\ 6 & 6 & 6 \end{vmatrix}$.

   Ultimele două linii fiind proporţionale, rezultă $D = 0$.

2. Să se calculeze $I = \int_0^1 (x^2 - x)dx$. **(5 pct.)**

   a) $I = \frac{2}{3}$; b) $I = 0$; c) $I = \dfrac{1}{2}$; d) $I = -\dfrac{1}{6}$; e) $I = 2$; f) $I = 6$.

   Soluţie. Aplicând formula Leibnitz-Newton, integrala se rescrie $I = \left(\dfrac{x^3}{3} - \dfrac{x^2}{2}\right)\Big|_0^1 = \dfrac{1}{3} - \dfrac{1}{2} = -\dfrac{1}{6}$.

3. Fie numărul complex $z = 1 + 2i$. Atunci: **(5 pct.)**

   a) $|z| = 0$; b) $|z| = \sqrt{5}$; c) $|z| = \sqrt{7}$; d) $|z| = 6$; e) $|z| = 4$; f) $|z| = -1$.

   Soluţie. Obţinem $|z| = \sqrt{1^2 + 2^2} = \sqrt{5}$.

4. Suma soluţiilor ecuaţiei $x^2 - x - 2 = 0$ este: **(5 pct.)**

   a) 1; b) 2; c) $\sqrt{2}$; d) 3; e) 0; f) 5.

   Soluţie. Folosind relaţiile lui Viete, rezultă că suma celor două rădăcini este $x_1 + x_2 = -\frac{-1}{1} = 1$. *Altfel.* Rezolvăm ecuaţia de gradul doi:

   $$x^2 - x - 2 = 0 \Leftrightarrow x \in \left\{\frac{1 \pm \sqrt{1^2 - 4(-2)}}{2}\right\} \Leftrightarrow x \in \left\{\frac{1 \pm 3}{2}\right\},$$

   deci $x \in \{2, -1\}$ iar suma celor două rădăcini este $x_1 + x_2 = 2 + (-1) = 1$.

5. Calculaţi $E = C_5^2 + C_5^3$. **(5 pct.)**

   a) $E = 20$; b) $E = 10$; c) $E = 2$; d) $E = -5$; e) $E = 0$; f) $E = 15$.

   Soluţie. Aplicând formula combinărilor, $C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}$, rezultă

   $$E = C_5^3 + C_5^2 = \frac{5!}{3!2!} + \frac{5!}{2!3!} = \frac{120}{6\cdot2} + \frac{120}{2\cdot6} = 10 + 10 = 20.$$

   Altfel. Aplicăm formula combinărilor, $C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}$ şi egalitatea $C_n^k = C_n^{n-k}$. Obţinem

   $$E = C_5^3 + C_5^2 = C_5^3 + C_5^{5-2} = C_5^3 + C_5^3 = 2C_5^3 = 2\frac{5!}{3!2!} = 2\frac{120}{6\cdot2} = 2\cdot10 = 20.$$

6. Soluţia reală a ecuaţiei $\frac{2}{3}x - \frac{x-1}{2} = x$ este: **(5 pct.)**

   a) -1; b) 0; c) $-\frac{1}{11}$; d) 1; e) $\frac{2}{7}$; f) $\frac{3}{5}$.

   Soluţie. Obţinem succesiv $\frac{2}{3}x - \frac{x-1}{2} = x \Leftrightarrow 4x - 3 + 3 = 6x \Leftrightarrow 5x = 3 \Leftrightarrow x = \frac{3}{5}$.

7. Să se rezolve sistemul $\begin{cases} x - y = 1 \\ x + 2y = 4. \end{cases}$ **(5 pct.)**

   a) $x = 4, y = 0$; b) $x = 5, y = -4$; c) $x = 0, y = -1$;
   d) $x = -1, y = 3$; e) $x = -2, y = -2$; f) $x = 2, y = 1$.

   Soluţie. Din prima ecuaţie rezultă $y = x + 1$; înlocuind în a doua ecuaţie, obţinem $3y = 3$, deci $y = 1$ şi $x = 2$.

8. Fie matricele: $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ şi $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$. Să se determine matricea $C = AB - BA$. **(5 pct.)**

a) $C = \left(\begin{smallmatrix} -1 & 3 \\ 2 & 4 \end{smallmatrix}\right)$; b) $C = \left(\begin{smallmatrix} -5 & 1 \\ -9 & 5 \end{smallmatrix}\right)$; c) $C = \left(\begin{smallmatrix} -7 & -5 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$; d) $C = \left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ 4 & 5 \end{smallmatrix}\right)$; e) $C = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 6 \\ -4 & 3 \end{smallmatrix}\right)$; f) $C = \left(\begin{smallmatrix} 2 & 7 \\ 9 & -2 \end{smallmatrix}\right)$.

Soluţie. Prin calcul direct, obţinem $AB-BA = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{smallmatrix}\right)\left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 2 \end{smallmatrix}\right) - \left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 2 \end{smallmatrix}\right)\left(\begin{smallmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{smallmatrix}\right) = \left(\begin{smallmatrix} -2 & 5 \\ -4 & 11 \end{smallmatrix}\right) - \left(\begin{smallmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{smallmatrix}\right) = \left(\begin{smallmatrix} -5 & 1 \\ -9 & 5 \end{smallmatrix}\right)$.

9. Ecuaţia $\sqrt{x-1} + x = 7$ are soluţia: **(5 pct.)**

a) $x = 0$; b) $x = -1$; c) $x = 1$; d) $x = 5$; e) $x = 2$; f) $x = 6$.

Soluţie. Ecuaţia se rescrie $\sqrt{x-1} + x = 7 \Leftrightarrow \sqrt{x-1} = 7 - x$. Condiţia de existenţă a radicalului este $x \geq 1$. Se observă că în egalitate membrul drept trebuie să fie pozitiv, deci $7 - x \geq 0 \Leftrightarrow x \leq 7$. Prin urmare ecuaţia conduce la condiţia $x \in [1, 7]$. Ridicând la pătrat ambii membri obţinem ecuaţia $x^2 - 15x + 50 = 0$, de unde $x_1 = 5$ şi $x_2 = 10$. Se observă că $x_2 \notin [1, 7]$, deci nu este soluţie. De asemenea, se observă că această valoare nu satisface ecuaţia iniţială. Înlocuind $x_1 = 5$ în ecuaţia iniţială obţinem o identitate, deci singura soluţie a ecuaţiei este $x = 5$.

10. Să se rezolve ecuaţia $2^{x+1} = 8$. **(5 pct.)**

a) $x = 2$; b) $x = 5$; c) $x = 3$; d) $x = 4$; e) $x = -3$; f) $x = 0$.

Soluţie. Ecuaţia se rescrie $2^{x+1} = 8 \Leftrightarrow 2^{x+1} = 2^3$. Prin logaritmare în baza 2, obţinem $x+1 = 3 \Leftrightarrow x = 2$.

11. Fie polinomul $f = X^3 - 3X^2 + 2X$. Dacă x_1, x_2, x_3 sunt rădăcinile polinomului f, atunci $E = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2$ este egală cu: **(5 pct.)**

a) -2; b) 5; c) -4; d) 4; e) 2; f) 7.

Soluţie. Ţinând cont de relaţiile Viete, rezultă

$$E = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = (x_1 + x_2 + x_3)^2 - 2(x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_1) = 3^2 - 2 \cdot 2 = 9 - 4 = 5.$$

12. Fie $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $h(x) = x^3 - 3x$. Atunci $h'(1)$ este: **(5 pct.)**

a) $\frac{3}{4}$; b) 0; c) $\frac{1}{2}$; d) $\frac{2}{3}$; e) -4; f) $-\frac{2}{3}$.

Soluţie. Derivata funcţiei h este $h'(x) = 3x^2 - 3$ şi deci $h'(1) = 0$.

13. Mulţimea soluţiilor ecuaţiei $|x - 1| = 3$ este: **(5 pct.)**

a) $\{5\}$; b) $\{5, 7\}$; c) $\{3\}$; d) $\emptyset$; e) $\{0, 1\}$; f) $\{-2, 4\}$.

Soluţie. Ecuaţia se rescrie $|x - 1| = 3 \Leftrightarrow x - 1 = \pm 3$. Rezultă $x \in \{-2, 4\}$.

14. Fie funcţia $f(x) = \begin{cases} 2x^2 + x + 2, & x < 0 \\ x + m, & x \geq 0 \end{cases}$. Determinaţi $m \in \mathbb{R}$ pentru care funcţia f este continuă. **(5 pct.)**

a) $m = 5$; b) $m = 7$; c) $m = 4$; d) $m = 2$; e) $m = 11$; f) $m = 1$.

Soluţie. Limitele laterale ale funcţiei f în 0 sunt $\ell_s(0) = \lim\limits_{x \nearrow 0} f(x) = 2$, $\ell_d(0) = \lim\limits_{x \searrow 0} f(x) = m$, şi avem $f(0) = m$. Funcţia f este continuă în 0 dacă $\ell_s(0) = \ell_d(0) = f(0)$, de unde $m = 2$.

15. Fie $E = \sqrt{4} + \sqrt[3]{8} + \sqrt[4]{16}$. Atunci: **(5 pct.)**

a) $E = 1$; b) $E = 12$; c) $E = 7$; d) $E = 6$; e) $E = 3$; f) $E = 28$.

Soluţie. $E = 2 + 2 + 2 = 6$.

16. Mulţimea valorilor lui $m \in \mathbb{R}$ pentru care ecuaţia $2 \ln |x| = mx^2 + 1$ are două soluţii reale distincte este: **(5 pct.)**

a) $m \in (-\infty, 0] \cup \{\frac{1}{e^2}\}$; b) $m \in (-\infty, \frac{1}{e^2}]$; c) $m \in [\frac{1}{e^2}, +\infty)$;
d) $m \in \{\frac{1}{e^2}\} \cup (1, e]$; e) $m \in (-\infty, -\frac{1}{e^2}] \cup [\frac{1}{e^2}, 1]$; f) $m \in (-\infty, 1)$.

Soluţie. Existenţa logaritmului conduce la condiţia $|x| > 0 \Leftrightarrow x \neq 0$. Obţinem $2 \ln |x| = mx^2 + 1 \Leftrightarrow \frac{2 \ln |x| - 1}{x^2} = m$. Fie funcţia $f : \mathbb{R} \backslash \{0\} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{2 \ln |x| - 1}{x^2}$. Atunci, ecuaţia $2 \ln |x| = mx^2 + 1$ are două soluţii reale distincte $\Leftrightarrow$ ecuaţia $f(x) = m$ are două soluţii reale distincte. Avem $f'(x) = \frac{4(1 - \ln |x|)}{x^3}$. Tabelul de variaţie al funcţiei f este

x	$-\infty$		-2		0		e		∞
$f'(x)$	$+$	$+$	0	$-$	$-\vert+$	$+$	0	$-$	$-$
$f(x)$	0	$\nearrow$	$\frac{1}{e^2}$	$\searrow$	$-\infty\vert+\infty$	$\nearrow$	$\frac{1}{e^2}$	$\searrow$	0

Din tabelul de variaţie al funcţiei deducem că ecuaţia are două rădăcini reale distincte doar dacă $m \in (-\infty, 0] \cup \{\frac{1}{e^2}\}$.

17. Fie funcţia $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g(x) = \displaystyle\int_0^{x^2} e^{t^2} dt$. Atunci: **(5 pct.)**

a) g are două puncte de extrem; b) g este descrescătoare; c) g este crescătoare;

d) g este convexă; e) $g'(0) = 7$; f) g este concavă.

Soluţie. Avem $g'(x) = e^{(x^2)^2} \cdot 2x = 2x\, e^{x^4}$ şi $g''(x) = e^{x^4}(2 + 2x \cdot 4x^3) = 2e^{x^4}(4x^4 + 1) > 0$, deci g este funcţie convexă.

18. Pentru $m \in \mathbb{C}\backslash\{0\}$ se defineşte legea de compoziţie:

$$z_1 * z_2 = mz_1z_2 - im(z_1 + z_2) - m + i, \quad \forall z_1, z_2 \in \mathbb{C}.$$

Să se calculeze suma modulelor valorilor lui m pentru care simetricul elementului $1+i$ este $2+i$. **(5 pct.)**

a) $\sqrt{3}$; b) $\sqrt{2}$; c) $\sqrt{5}$; d) 2; e) 1; f) 4.

Soluţie. Condiţia care defineşte elementul neutru al legii de compoziţie este

$$\begin{aligned} z * e = z, \forall z \in \mathbb{C} \quad &\Leftrightarrow mez - im(e + z) - m + i = z, \forall z \in \mathbb{C} \\ &\Leftrightarrow z(me - mi - 1) + (i - m - ime) = 0, \forall z \in \mathbb{C} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} me - mi - 1 = 0 \\ i - m - ime = 0. \end{cases} \end{aligned}$$

Se observă că înmulţind prima ecuaţie cu $-i$, se obţine a doua ecuaţie. Prima ecuaţie conduce la elementul neutru, $e = \frac{im+1}{m}$. Simetricul elementului $1 + i$ este $2 + i$ doar dacă avem condiţiile echivalente

$$\begin{aligned} (1 + i) * (2 + i) = e \quad &\Leftrightarrow m(1 + i)(2 + i) - im(1 + i + 2 + i) - m - i = \tfrac{im+1}{m} \\ &\Leftrightarrow 2m + i \quad = \tfrac{im+1}{m} \Leftrightarrow 2m^2 = 1 \Leftrightarrow m^2 = \tfrac{1}{2}. \end{aligned}$$

Deci $m_{1,2} = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}$, de unde $|m_1| + |m_2| = \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}$.

1. Aflaţi $\cos^2 x$, ştiind că $\sin x = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$. **(5 pct.)**

   a) $\frac{3}{4}$; b) $\frac{1}{3}$; c) 0; d) 1; e) $\frac{1}{4}$; f) $\frac{1}{2}$.

   Soluţie. Din formula trigonometrică fundamentală $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$, rezultă $\cos^2 x = 1 - sin^2 x = 1 - \frac{3}{4} = \frac{1}{4}$.

2. Fie vectorii: $\bar{u} = 3\bar{i} - 4\bar{j}$, $\bar{v} = \bar{i} + \bar{j}$, $\bar{w} = 5\bar{i} - 2\bar{j}$. Determinaţi $a \in \mathbb{R}$ astfel încât $\bar{u} + a\bar{v} = \bar{w}$. **(5 pct.)**

   a) 0; b) 1; c) -2; d) 3; e) 2; f) -1.

   Soluţie. Condiţia $\bar{u} + a\bar{v} = \bar{w}$ se rescrie

$$(3\bar{i} - 4\bar{j}) + a(\bar{i} + \bar{j}) = 5\bar{i} - 2\bar{j} \Leftrightarrow (3+a)\bar{i} + (-4+a)\bar{j} = 5\bar{i} - 2\bar{j} \Leftrightarrow \begin{cases} 3 + a = 5 \\ -4 + a = -2 \end{cases} \Leftrightarrow a = 2.$$

3. Calculaţi aria unui triunghi dreptunghic isoscel de ipotenuză egală cu $\sqrt{2}$. **(5 pct.)**

   a) 2; b) 1; c) $\frac{1}{2}$; d) $\sqrt{5}$; e) $\sqrt{2}$; f) $\frac{1}{\sqrt{2}}$.

   Soluţie. Cateta triunghiului este $\ell = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = 1$, deci aria este $\mathcal{A} = \frac{\ell^2}{2} = \frac{1}{2}$.

4. Se dau vectorii: $\bar{u} = 2\bar{i} + 3\bar{j}$ şi $\bar{v} = 3\bar{i} + m\bar{j}$. Calculaţi valoarea parametrului real m pentru care $\bar{u}$ şi $\bar{v}$ sunt perpendiculari. **(5 pct.)**

   a) 2; b) 3; c) -2; d) 1; e) -3; f) 0.

   Soluţie. $\bar{u} \perp \bar{v} \Leftrightarrow \langle \bar{u}, \bar{v} \rangle = 0 \Leftrightarrow 2 \cdot 3 + 3 \cdot m = 0 \Leftrightarrow m = -2$.

5. Să se calculeze $E = \dfrac{\operatorname{tg} 45^\circ \cdot \cos 90^\circ}{\sin 30^\circ}$. **(5 pct.)**

   a) $-\frac{1}{2}$; b) 0; c) $\frac{1}{2}$; d) 1; e) -1; f) $\frac{\sqrt{3}}{2}$.

   Soluţie. Deoarece $\cos 90^\circ = 0$, rezultă anularea numărătorului fracţiei, deci $E = 0$.

6. Calculaţi a^4, unde $a = \dfrac{1+i}{\sqrt{2}}$. **(5 pct.)**

   a) 1; b) i; c) $1 - 4i$; d) $1 + 4i$; e) -1; f) $4 - i$.

   Soluţie. Obţinem $a^2 = (\frac{1+i}{\sqrt{2}})^2 = \frac{(1+i)^2}{2} = (\frac{2i}{2})^2 = i^2 = -1$. Deci $a^4 = (a^2)^2 = (-1)^2 = 1$.

7. Valoarea lui $\sin 120^\circ$ este: **(5 pct.)**

   a) $\frac{\sqrt{2}}{2}$; b) $\frac{\sqrt{3}}{2}$; c) $-\frac{\sqrt{3}}{2}$; d) $\frac{1}{2}$; e) $-\frac{1}{2}$; f) $-\frac{\sqrt{2}}{2}$.

   Soluţie. $\sin 120^\circ = \sin(180^\circ - 120^\circ) = \sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

8. Soluţiile ecuaţiei $\sin x + \cos^2 x = 1$ din intervalul $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ sunt: **(5 pct.)**

   a) $\left\{\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right\}$; b) $\left\{\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}\right\}$; c) $\left\{0, \frac{\pi}{4}\right\}$; d) $\left\{0, \frac{\pi}{2}\right\}$; e) $\left\{0, \frac{\pi}{6}\right\}$; f) $\left\{0, \frac{\pi}{3}\right\}$.

   Soluţie. Folosind formula trigonometrică fundamentală $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$, ecuaţia se rescrie

$$\sin x = \sin^2 x \Leftrightarrow \sin x(1 - \sin x) = 1 \Leftrightarrow \sin x \in \{0, 1\}.$$

   Deoarece $x \in [0, \frac{\pi}{2}]$, obţinem $\sin x = 0 \Rightarrow x = 0$ şi $\sin x = 1 \Rightarrow x = \frac{\pi}{2}$. În concluzie, $x \in \{0, \frac{\pi}{2}\}$.

9. Dacă $\bar{u} = \bar{i} + \bar{j}$ şi $\bar{v} = \bar{i} - \bar{j}$, atunci $\| \bar{u} + 3\bar{v} \|$ este: **(5 pct.)**

   a) $\sqrt{5} - 1$; b) $2 + \sqrt{5}$; c) $1 + \sqrt{5}$; d) $2\sqrt{5}$; e) 2; f) $\sqrt{5}$.

   Soluţie. $\bar{u} + 3\bar{v} = (\bar{i} + \bar{j}) + 3(\bar{i} - \bar{j}) = 4\bar{i} - 2\bar{j}$, deci $||\bar{u} + 3\bar{v}|| = \sqrt{4^2 + (-2)^2} = 2\sqrt{5}$.

10. Aflaţi $\operatorname{tg} x$ ştiind că $\sin x - 4\cos x = 0$. **(5 pct.)**

a) -2; b) -1; c) -4; d) 2; e) 1; f) 4.

Soluţie. Avem $\cos x \neq 0$, deci relaţia dată se rescrie $\sin x - 4\cos x = 0 \Leftrightarrow \dfrac{\sin x}{\cos x} - 4 = 0 \Leftrightarrow \operatorname{tg} x = 4$.

11. Să se calculeze partea reală a numărului complex $z = i + i^3 + i^5$. **(5 pct.)**

a) 3; b) 1; c) -1; d) 0; e) -2; f) 2.

Soluţie. Folosind egalitatea $i^2 = -1$, rezultă $z = i + i^3 + i^5 = i - i + i = i$ şi deci $\operatorname{Re}(z) = 0$.

12. Dacă $z = 1 + i$, atunci valoarea expresiei $E = z \cdot \bar{z}$ este: **(5 pct.)**

a) 1; b) $-i$; c) 0; d) -1; e) i; f) 2.

Soluţie. Avem $E = z\bar{z} = (1+i)(1-i) = 1 + 1 = 2$.

13. Dreapta care trece prin punctele $A(1,3)$, $B(2,4)$ are ecuaţia: **(5 pct.)**

a) $x - y - 1 = 0$; b) $x - y = 0$; c) $x - y + 2 = 0$;
d) $x + y = 0$; e) $x - y - 2 = 0$; f) $x - y + 1 = 0$.

Soluţie. Aplicăm formula ecuaţiei dreptei care trece prin două puncte; ecuaţia dreptei AB este

$$\frac{x - x_A}{x_B - x_A} = \frac{y - y_A}{y_B - y_A} \Leftrightarrow \frac{x-1}{2-1} = \frac{y-3}{4-3} \Leftrightarrow x - y + 2 = 0.$$

Altfel. Aplicăm formula ecuaţiei dreptei care trece prin două puncte sub formă de determinant şi dezvoltând determinantul după lina întâi, rezultă:

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x_A & y_A & 1 \\ x_B & y_B & 1 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} x & y & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 2 & 4 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow -x + y - 2 = 0 \Leftrightarrow x - y + 2 = 0.$$

Altfel. Ecuaţia dreptei este de forma $ax + by + c = 0$. Condiţia ca A şi B să aparţină acestei drepte conduce la sistemul $\begin{cases} a + 3b + c = 0 \\ 2a + 4b + c = 0 \end{cases}$. Notând $c = t$, obţinem $a = \frac{t}{2}, b = -\frac{t}{2}$. Fixând $t = 2$, rezultă $a = 1, b = -1$, deci ecuaţia dreptei AB este $x - y + 2 = 0$.

14. Se consideră triunghiul ABC cu laturile $AB = 3$, $BC = 4$, $CA = 5$. Aflaţi $\cos A$. **(5 pct.)**

a) $\frac{1}{5}$; b) $\frac{2}{5}$; c) $\frac{4}{5}$; d) $\frac{3}{5}$; e) 1; f) 0.

Soluţie. Avem $\cos A = \dfrac{AB^2 + AC^2 - BC^2}{2AB \cdot AC} = \dfrac{9 + 25 - 16}{2 \cdot 3 \cdot 5} = \dfrac{3}{5}$.

15. Calculaţi distanţa de la punctul $A(1,1)$ la dreapta de ecuaţie $x + y - 1 = 0$. **(5 pct.)**

a) 1; b) 2; c) $\sqrt{2}$; d) $\sqrt{3}$; e) $\frac{1}{\sqrt{2}}$; f) $\frac{1}{\sqrt{3}}$.

Soluţie. Distanţa este $\dfrac{|1+1-1|}{\sqrt{1^2+1^2}} = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$.

16. Aflaţi valoarea lui $m \in \mathbb{R}$ pentru care punctul $A(m,2)$ aparţine dreptei de ecuaţie $x - y - 1 = 0$. **(5 pct.)**

a) 2; b) -2; c) 1; d) -3; e) 3; f) -1.

Soluţie. Înlocuind coordonatele punctului în ecuaţia dreptei, obţinem $m - 2 - 1 = 0$, de unde $m = 3$.

17. Ecuaţiile tangentelor duse din punctul $A(\sqrt{2},0)$ la cercul de ecuaţie $x^2 + y^2 = 1$ sunt: **(5 pct.)**

a) $y - x + \sqrt{2} = 0,\ y = 0$; b) $y + x - \sqrt{2} = 0,\ y = 0$; c) $y + x - \sqrt{2} = 0,\ x = 0$;
d) $y - x + \sqrt{2} = 0,\ x = 0$; e) $x = 0,\ y = 0$; f) $y + x - \sqrt{2} = 0,\ y - x + \sqrt{2} = 0$.

Soluţie. Ecuaţia cercului se rescrie $(x-0)^2 + (y-0)^2 = 1^2$, deci cercul are centrul $C(0,0)$ şi raza $R = 1$. Ecuaţiile dreptelor care trec prin punctul $A(\sqrt{2},0)$ sunt de forma $d:\ y = m(x - \sqrt{2}) \Leftrightarrow mx - y - m\sqrt{2} = 0$, unde $m \in \mathbb{R}$. Dreapta d este tangentă la cerc dacă distanţa de la C la dreaptă este R. Această condiţie se rescrie

$$\frac{m \cdot 0 - 0 - m\sqrt{2}}{\sqrt{m^2+1}} = 1 \Leftrightarrow -m\sqrt{2} = \sqrt{m^2+1} \Leftrightarrow 2m^2 = m^2 + 1 \Leftrightarrow m \in \{\pm 1\}.$$

Rezultă că ecuaţiile celor două tangente sunt: $y + x - \sqrt{2} = 0$, $y + x + \sqrt{2} = 0$.

18. Determinaţi aria triunghiului de vârfuri $A(0,1)$, $B(1,0)$, $C(-1,0)$. **(5 pct.)**

a) 4; b) 1; c) $\frac{3}{2}$; d) 2; e) $\frac{1}{2}$; f) $\frac{1}{4}$.

Soluţie. Aria triunghiului ABC este dată de formula $\mathcal{A}_{\Delta ABC} = \frac{1}{2}|\Delta|$, unde $\Delta = \begin{vmatrix} x_A & y_A & z_A \\ x_B & y_B & z_B \\ x_C & y_C & z_C \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -2$, deci $\mathcal{A}_{\Delta ABC} = 1$. *Altfel.* Calculăm lungimile laturilor triunghiului,

$$\begin{cases} AB = \sqrt{(1-0)^2 + (0-1)^2} = \sqrt{2} \\ AC = \sqrt{(-1-0)^2 + (0-1)^2} = \sqrt{2} \\ BC = \sqrt{(-1-1)^2 + (0-0)^2} = 2, \end{cases}$$

deci $AB = AC$ şi triunghiul este isoscel. Dar $AB^2 + AC^2 = BC^2$, deci triunghiul este dreptunghic isoscel. Catetele triunghiului au aceeaşi lungime, $\ell = \sqrt{2}$, deci aria triunghiului este $\mathcal{A}_{\Delta ABC} = \frac{\ell^2}{2} = \frac{2}{2} = 1$.

1. Să se determine $x \in \mathbb{R}$ astfel încât $\sqrt{x^2+5} = x+1$. **(5 pct.)**

   a) $x=-2$; b) $x=4$; c) $x=0$; d) $x=2$; e) $x=3$; f) $x=-1$.

   Soluţie. Condiţia de existenţă a radicalului $x^2+5 \geq 0$ este totdeauna satisfăcută, deci nu conduce la limitarea domeniului necunoscutei x. În schimb, se observă că pozitivitatea membrului stâng al ecuaţiei conduce la condiţia $x+1 \geq 0$, deci $x \in [-1, \infty)$. Ridicând ecuaţia la pătrat, obţinem, după simplificări, $2x = 4$, deci $x = 2 \in [-1, \infty)$, şi deci $x = 2$, deci este unica soluţie a ecuaţiei. *Notă.* Se observă că subiectul fiind de tip grilă, răspunsul corect se putea evidenţia prin simpla înlocuire a variantelor de răspuns în ecuaţie ($x = 2$ fiind singura variantă care satisface ecuaţia).

2. Valoarea determinantului $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 1 \end{vmatrix}$ este: **(5 pct.)**

   a) 13; b) 18; c) 0; d) 11; e) 1; f) 14.

   Soluţie. Calculul se poate face în multe moduri: aplicând regula Sarrus, regula (echivalentă) a triunghiului, dezvoltând după o linie sau după o colană sau efectuând în prealabil operaţii cu determinanţi care duc la simplificarea formei acestuia ("fabricare de zerouri pe o linie sau pe o coloană). Spre exemplu, dezvoltând după regula Sarrus, obţinem:

   $$1 \cdot 1 \cdot 1 + 2 \cdot 2 \cdot 2 + 3 \cdot 3 \cdot 3 - (1 \cdot 2 \cdot 3 + 1 \cdot 2 \cdot 3 + 1 \cdot 2 \cdot 3) = 1 + 8 + 27 - 3 \cdot 6 = 18.$$

3. Fie funcţia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = xe^x$. Să se calculeze $f'(1)$. **(5 pct.)**

   a) 1; b) $3e$; c) e^2; d) $3+e$; e) $1+e$; f) $2e$.

   Soluţie. Aplicăm regula derivării produsului de funcţii $(g \cdot h)' = g' \cdot h + g \cdot h'$ pentru produsul $f(x) = x \cdot e^x$. Obţinem $f'(x) = 1 \cdot e^x + x \cdot e^x = (x+1)e^x$. Deci $f'(1) = 2e$.

4. Să se calculeze $C_5^0 + C_5^2 + C_5^4$. **(5 pct.)**

   a) 6; b) 8; c) 18; d) 16; e) 24; f) 20.

   Soluţie. Aplicăm regula de calcul a combinărilor $C_n^k = \frac{n!}{(n-k)!k!}$ şi convenţia $0! = 1$. Obţinem

   $$C_5^0 + C_5^2 + C_5^4 = \frac{5!}{5!0!} + \frac{5!}{3!2!} + \frac{5!}{4!1!} = 1 + 10 + 5 = 16.$$

   Notă. Subiectul se putea rezolva mult mai elegant dacă se cunoaşte binomul lui Newton $(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k a^{n-k} b^k$ (folosit pentru $a = b = 1, n = 5$) şi proprietatea $C_n^k = C_n^{n-k}$ (utilizată pentru valorile $n = 5$, $k \in \{0, 2, 4\}$). Se obţine

   $$2^5 = (1+1)^5 = C_5^0 + C_5^1 + C_5^2 + C_5^3 + C_5^4 + C_5^5 = (C_5^0 + C_5^2 + C_5^4) + (C_5^5 + C_5^3 + C_5^1) = 2(C_5^0 + C_5^2 + C_5^4),$$

   de unde rezultă $C_5^0 + C_5^2 + C_5^4 = 2^5/2 = 16$.

5. Să se rezolve ecuaţia $2^{x+3} = 16$. **(5 pct.)**

   a) $x=1$; b) $x=-3$; c) $x=5$; d) $x=-4$; e) $x=11$; f) $x=-1$.

   Soluţie. Ecuaţia se rescrie $2^{x+3} = 2^4$ de unde (prin logaritmare în baza 2) rezultă $x+3 = 4$, deci $x = 1$.

6. Să se calculeze modulul numărului complex $z = \dfrac{3+4i}{6-8i}$. **(5 pct.)**

   a) 3; b) 4; c) 6; d) $\frac{1}{2}$; e) 8; f) 11.

   Soluţie. Amplificăm fracţia cu conjugata numitorului, apoi folosim formula $|a+ib| = \sqrt{a^2+b^2}$. Obţinem

   $$z = \frac{(3+4i)(6+8i)}{6^2+8^2} = \frac{-14+48i}{100} = \frac{-7+24i}{50} = -\frac{7}{50} + i\frac{24}{50}.$$

Rezultă
$$|z| = \sqrt{\frac{49}{2500} + \frac{576}{2500}} = \sqrt{\frac{625}{2500}} = \sqrt{\frac{1}{4}} = \frac{1}{2}.$$

Notă. Subiectul se putea rezolva mult mai rapid folosind proprietatea modulului: $\left|\frac{z_1}{z_2}\right| = \frac{|z_1|}{|z_2|}$. Se obţine:
$$|z| = \left|\frac{3+4i}{6-8i}\right| = \frac{|3+4i|}{|6+8i|} = \frac{\sqrt{3^2+4^2}}{\sqrt{6^2+8^2}} = \frac{\sqrt{25}}{\sqrt{100}} = \frac{5}{10} = \frac{1}{2}.$$

7. Produsul soluţiilor reale ale ecuaţiei $|x+1| = 2$ este: **(5 pct.)**

   a) 12; b) 0; c) -3; d) 1; e) 4; f) -5.

   Soluţie. Folosind proprietatea "$|a| = b \Leftrightarrow (a = b$ sau $a = -b)$", obţinem $x + 1 \in \{\pm 2\}$, deci $x \in \{1, -3\}$. Produsul celor două soluţii este deci $1 \cdot (-3) = -3$.

8. Să se afle $m \in \mathbb{R}$ astfel încât $x = 1$ să fie soluţie a ecuaţiei $3x + m - 2 = 0$. **(5 pct.)**

   a) $m = 0$; b) $m = 7$; c) $m = -1$; d) $m = 4$; e) $m = 1$; f) $m = -5$.

   Soluţie. Înlocuind soluţia $x = 1$ în ecuaţie, obţinem $3 + m - 2 = 0$, deci $m = -1$.

9. Să se rezolve inecuaţia $x^2 - 3x + 2 \leq 0$. **(5 pct.)**

   a) $x \in [0,1]$; b) $x \in \varnothing$; c) $x \in [1,2]$; d) $x \geq 5$; e) $x \in [-4,1]$; f) $x \in [2,5]$.

   Soluţie. Folosind formula $x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ care produce soluţiile ecuaţiei de gradul doi $ax^2 + bx + c = 0$ $(a \neq 0)$, obţinem $x \in \{\frac{3 \pm \sqrt{3^2-8}}{2}\} = \{\frac{3 \pm 1}{2}\} = \{1, 2\}$. Deoarece $a = 1 > 0$, valoarea expresiei polinomiale de gradul doi din enunţ este negativă sau nulă (în cazul rădăcinilor reale distincte) d.n.d. $x \in [x_1, x_2]$, unde s-a presupus $x_1 < x_2$. Rezultă $x \in [1,2]$.

10. Dacă x_1 şi x_2 sunt soluţiile ecuaţiei $2x^2 - 3x + 1 = 0$, atunci $x_1 + x_2$ este: **(5 pct.)**

    a) $-\frac{1}{2}$; b) 1; c) $\frac{1}{2}$; d) $-\frac{2}{3}$; e) $\frac{3}{2}$; f) 0.

    Soluţie. Din prima relaţie Viéte rezultă direct $x_1 + x_2 = -\frac{-3}{2} = \frac{3}{2}$. *Notă.* Problema se poate rezolva şi determinând efectiv soluţiile ecuaţiei, $\{x_{1,2}\} = \{\frac{3 \pm \sqrt{9-8}}{4}\} = \{\frac{1}{2}, 1\}$; prin urmare suma acestora este $\frac{3}{2}$.

11. Fie $(a_n)_n$ o progresie aritmetică astfel încât $a_1 + a_3 = 6$ şi $a_3 - a_1 = 4$. Să se calculeze a_5. **(5 pct.)**

    a) 15; b) 7; c) 10; d) 11; e) -5; f) 9.

    Soluţie. Sumând cele două condiţii rezultă $2a_3 = 10 \Rightarrow a_3 = 5$; scăzându-le, rezultă $2a_1 = 2 \Rightarrow a_1 = 1$. Dar $a_3 = \frac{a_1+a_5}{2}$, deci $a_5 = 2a_3 - a_1 = 2 \cdot 5 - 1 = 9$. *Altă soluţie.* Aplicăm formula $a_k = a_1 + (k-1)r$. Notând $a = a_1$, cele două condiţii formează un sistem liniar în necunoscutele a, r, compatibil determinat, $\begin{cases} 2a + 2r = 6 \\ 2r = 4 \end{cases}$, deci $a = 1, r = 2$. Prin urmare, $a_5 = a + 4r = 1 + 4 \cdot 2 = 9$.

12. Să se rezolve inecuaţia $2x - 3 \leq 4x$. **(5 pct.)**

    a) $x \in (0, \infty)$; b) $x \in \varnothing$; c) $x \in (-1, 2)$; d) $x \in [-\frac{3}{2}, +\infty)$; e) $x \in (\frac{4}{3}, +\infty)$; f) $x \in (0,1)$.

    Soluţie. Inecuaţia se rescrie succesiv: $2x - 3 \leq 4x \Leftrightarrow 2x \geq -3 \Leftrightarrow x \geq -\frac{3}{2} \Leftrightarrow x \in [-\frac{3}{2}, \infty)$.

13. Fie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \arccos \dfrac{1-x^2}{1+x^2} + \arcsin \dfrac{2x}{1+x^2}$.
    Să se calculeze $S = f(-\sqrt{3}) + f(-\ln 2) + f(1) + f(\ln 3)$. **(5 pct.)**

    a) $\frac{9\pi}{4}$; b) $\frac{8\pi}{3}$; c) $\frac{13\pi}{6}$; d) $\frac{7\pi}{3}$; e) $\frac{11\pi}{4}$; f) $\frac{13\pi}{4}$.

    Soluţie. Se poate verifica folosind tabloul de variaţie al funcţiilor corespunzătoare, că expresiile $\frac{1-x^2}{1+x^2}$ şi $\frac{2x}{1+x^2}$ iau valori în intervalul $[-1,1]$, deci funcţia f este bine definită pe toată axa reală. Fiind compunere de funcţii continue, f este funcţie continuă. Mai mult, se observă că $f = f_1 + f_2$, unde $f_{1,2} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f_1(x) = \arccos \frac{1-x^2}{1+x^2}$ şi $f_2(x) = \arcsin \frac{2x}{1+x^2}$. Se constată că ambele funcţii sunt continue. Derivatele $f'_{1,2}$ ale acestora coincid în domeniul $D = (-\infty, -1) \cup (0, 1)$, deci pe fiecare din cele două intervale ale reuniunii, cele două funcţii diferă printr-o constantă. Mai exact, pe intervalul $(-\infty, -1)$ avem $f_1(-2) = \arccos \frac{-3}{5} = \pi - \arccos \frac{3}{5} = \pi - \arcsin \frac{4}{5} = \pi + \arcsin \frac{-4}{5} = \pi + f_2(-2)$, deci $f_1 = \pi + f_2$ şi $f(x) = 2f_1(x) - \pi$. Pe intervalul $(0,1)$ avem $f_1(\frac{1}{2}) = \arccos \frac{3}{5} = \arcsin \frac{4}{5} = f_2(x)$, deci $f_1(x) = f_2(x)$ şi $f(x) = 2f_1(x)$.

Pentru $x \in (-1,0) \cup (1,\infty)$ avem $f_1'(x) = -f_2'(x) \Rightarrow f'(x) = 0$, deci pe $\mathbb{R} \backslash D = [-1,0] \cup [1,\infty) = \overline{(-1,0) \cup (1,\infty)}$, funcţia continuă f este constantă pe fiecare interval al reuniunii. Mai exact, pe intervalul $[-1,0]$ funcţia f are valoarea $f(-1) = \arccos(1) + \arcsin(0) = 0$ iar pe intervalul $[1,\infty)$ f are valoarea $f(1) = \arccos(0) + \arcsin(1) = \pi$. Prin urmare,

$$f(x) = \begin{cases} 2 \arccos \dfrac{1-x^2}{1+x^2} - \pi, & \text{pentru } x \in (-\infty,-1) \\ 0, & \text{pentru } x \in [-1,0] \\ 2 \arccos \dfrac{1-x^2}{1+x^2}, & \text{pentru } x \in (0,1) \\ \pi, & \text{pentru } x \in [1,\infty). \end{cases}$$

Calculăm termenii sumei cerute:

$$\begin{cases} \sqrt{3} \in (1,2) \Rightarrow -\sqrt{3} \in (-2,-1) \subset (-\infty,-1) & \Rightarrow f(-\sqrt{3}) = 2\arccos\left(-\frac{1}{2}\right) - \pi \\ & \qquad = 2 \cdot \dfrac{2\pi}{3} - \pi = \dfrac{\pi}{3} \\ \ln 1 < \ln 2 < \ln e \Rightarrow -\ln 2 \in (-\ln e, -\ln 1) \subset [-1,0] & \Rightarrow f(-\ln 2) = 0 \\ 1 \in [1,\infty) & \Rightarrow f(1) = \pi \\ \ln e < \ln 3 < \ln e^2 \Rightarrow \ln 3 \in (1,2) \subset [1,\infty) & \Rightarrow f(\ln e) = \pi. \end{cases}$$

deci $S = \frac{\pi}{3} + 0 + \pi + \pi = \frac{7\pi}{3}$.

14. Fie polinomul $f = X^3 - 5X^2 + 4X$ şi fie T suma pătratelor rădăcinilor sale. Atunci: **(5 pct.)**

a) $T = 15$; b) $T = 17$; c) $T = 14$; d) $T = 0$; e) $T = -11$; f) $T = 11$.

Soluţie. Notăm cu $x_{1,2,3}$ cele trei rădăcini ale polinomului. Folosind egalitatea

$$(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2) = (x_1 + x_2 + x_3)^2 - 2(x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_1)$$

şi primele două relaţii Viéte

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = -\frac{-5}{1} \\ x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_1 = \frac{4}{1} \end{cases}$$

rezultă

$$T = (x_1 + x_2 + x_3)^2 - 2(x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_1) = 5^2 - 2 \cdot 4 = 17.$$

Notă. Subiectul se putea rezolva şi altfel, aflând efectiv rădăcinile polinomului f. Dând factor comun X şi aflând rădăcinile factorului de grad 2, obţinem succesiv $f = X(X^2 - 5X + 4) = (X-0)(X-1)(X-4)$. Deci cele trei rădăcini ale polinomului f sunt $0, 1, 4$, iar suma pătratelor lor este $T = 0^2 + 1^2 + 4^2 = 17$.

15. Să se calculeze $E = \lg^3 5 + \lg^3 20 + \lg 8 \cdot \lg 0,25$. **(5 pct.)**

a) $E = \frac{1}{4}$; b) $E = 7$; c) $E = 13$; d) $E = 2$; e) $E = \frac{1}{5}$; f) $E = 5$.

Soluţie. Notăm $a = \lg 5$, $b = \lg 2$. Observăm că $a + b = \lg 5 + \lg 2 = \lg 10 = 1$. Folosind proprietăţile logaritmilor şi relaţia $u^3 + v^3 = (u+v)(u^2 - uv + v^2)$ pentru $u = a$ şi $v = a + 2b$, obţinem succesiv

$$\begin{aligned} E &= a^3 + (a+2b)^3 + (3b) \cdot (-2b) = [a + (a+2b)] \cdot [a^2 - a(a+2b) + (a+2b)^2] - 6b^2 \\ &= [2(a+b)] \cdot [(a+b)^2 + 3b^2] - 6b^2 = 2(1 + 3b^2) - 6b^2 = 2. \end{aligned}$$

16. Să se calculeze $\ell = \lim\limits_{t \to \infty} \displaystyle\int_1^t \frac{1}{x(x^2+1)} dx$. **(5 pct.)**

a) $\ell = 1$; b) $\ell = 1 + \ln 2$; c) $\ell = \frac{1}{4}$; d) $\ell = 3 \ln 2$; e) $\ell = \frac{11}{4}$; f) $\ell = \ln \sqrt{2}$.

Soluţie. Se observă că ridicarea la pătrat $\varphi : [1,\infty) \to [1,\infty)$, $\varphi(x) = x^2$ este bijecţie şi că avem $\varphi(1) = 1$, $\lim\limits_{x \to \infty} \varphi(x) = \infty$. Putem folosi prin urmare schimbarea de variabilă $u = x^2$. Integrala se rescrie succesiv

$$\begin{aligned} \int_1^t \frac{1}{x(x^2+1)} dx &= \frac{1}{2} \int_1^t \frac{2x}{x^2(x^2+1)} dx = \frac{1}{2} \int_1^{t^2} \frac{1}{u(u+1)} du = \frac{1}{2} \ln \left| \frac{x}{x+1} \right| \Bigg|_1^{t^2} \\ &= \frac{1}{2} \left(\ln \frac{t^2}{t^2+1} - \ln \frac{1}{2} \right) = \frac{1}{2} \ln \frac{2t^2}{t^2+1}. \end{aligned}$$

Atunci

$$\ell = \lim_{t\to\infty} \int_1^t \frac{1}{x(x^2+1)}dx = \lim_{t\to\infty} \frac{1}{2}\ln\frac{2t^2}{t^2+1} = \frac{1}{2}\ln 2 = \ln\sqrt{2}.$$

17. Fie $A = \left(\begin{smallmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$; să se calculeze determinantul matricei A^2. **(5 pct.)**

a) 1; b) 0; c) 3; d) 2; e) 4; f) -1.

Soluţie. Obţinem $A^2 = \left(\begin{smallmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right) \cdot \left(\begin{smallmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right) = \left(\begin{smallmatrix} 1 & -4 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$. Atunci $\det A = 1\cdot 1 - 0\cdot(-4) = 1$. *Notă.* Rezolvarea se scurtează, evitând calculul produsului matriceal, dacă se foloseşte proprietatea $\det(A_1\cdot A_2) = \det A_1 \cdot \det A_2$ pentru $A_1 = A_2 = A$. Obţinem $\det(A^2) = (\det A)^2 = (1\cdot 1 - 0\cdot(-2))^2 = 1^2 = 1$.

18. Fie S mulţimea soluţiilor reale şi strict pozitive ale ecuaţiei $x + \dfrac{1}{x} = \displaystyle\int_0^x e^{t^2}dt$. Atunci: **(5 pct.)**

a) $S \subset \mathbb{N}$; b) $S = \varnothing$; c) $S \subset (2,3)$; d) $S \cap (0,1) \neq \varnothing$; e) $S \cap (1,2) \neq \varnothing$; f) $S \cap (2,\infty) \neq \varnothing$.

Soluţie. Soluţiile ecuaţiei date sunt punctele de anulare ale funcţiei $f : (0,\infty) \to \mathbb{R}$,

$$f(x) = \int_0^x e^{t^2}dt - \left(x + \frac{1}{x}\right), \quad \forall x \in (0,\infty).$$

Se verifică relativ uşor că derivata $f'(x) = e^{x^2} - 1 + \frac{1}{x^2}$ este strict pozitivă pentru $x \in (0,\infty)$ şi că $\lim\limits_{x\searrow 0} f(x) = -\infty$, $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = +\infty$. Rezultă că ecuaţia $f(x) = 0$ are o singură soluţie în intervalul $(0,\infty)$. Pentru a afla un subinterval care conţine soluţia, observăm că $t^2 \leq t$, $\forall t \in [0,1]$, deci

$$f(1) = \int_0^1 e^{t^2}dt - 2 \leq \int_0^1 e^t dt - 2 = (e^1 - e^0) - 2 = e - 3 < 0,$$

deci $f(1) < 0$. Pe de altă parte, folosind monotonia integralei definite în raport cu intervalul de integrare pentru integranzi pozitivi şi proprietatea $t^2 \geq t$, $\forall t \in [1,2]$, avem

$$f(2) = \int_0^2 e^{t^2}dt - 2 - \frac{1}{2} \geq \int_1^2 e^{t^2}dt - 2.5 \geq \int_1^2 e^t dt - 2.5 = e^2 - e - 2.5 > (2.5)^2 - 3 - 2.5 = 0.75 > 0,$$

deci $f(2) > 0$. Prin urmare, funcţia f fiind continuă, soluţia căutată se află în intervalul $(1,2)$. Rezultă $S \cap (1,2) \neq \varnothing$.

1. Aflaţi $m \in \mathbb{R}$ astfel încât vectorii $\bar{u} = m\bar{i} + 2\bar{j}$ şi $\bar{v} = 2\bar{i} + 4\bar{j}$ să fie coliniari. **(5 pct.)**

   a) $m = \frac{5}{4}$; b) $m = 0$; c) $m = \frac{3}{2}$; d) $m = 1$; e) $m = 3$; f) $m = -1$.

   Soluţie. Coeficienţii celor doi vectori trebuie să fie proporţionali, deci $\dfrac{m}{2} = \dfrac{2}{4} \Leftrightarrow m = 1$.

2. Un triunghi isoscel are unghiurile egale de mărime $\frac{\pi}{8}$ şi laturile egale de lungime 1. Atunci înălţimea corespunzătoare uneia dintre laturile egale este de lungime: **(5 pct.)**

   a) $\frac{\sqrt{2}}{2}$; b) 2; c) $\sqrt{2}$; d) $\frac{1}{2}$; e) 1; f) $\frac{\sqrt{3}}{2}$.

   Soluţie. Notăm cu $\ell = 1$ lungimea comună a laturilor egale; fie $\hat{A}$ şi $\hat{B}$ unghiurile egale ale triunghiului isoscel. Folosind formula de arie $S = \frac{ab\sin\hat{C}}{2}$ pentru $a = b = \ell$ şi unghiul $\hat{C} = \pi - (\hat{A} + \hat{B}) = \pi - 2\frac{\pi}{8} = \frac{3\pi}{4}$, rezultă aria triunghiului,

   $$S = \frac{\ell^2 \sin\dfrac{3\pi}{4}}{2} = \frac{1}{2}\sin\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{4},$$

   deci lungimea h a înălţimii corespunzătoare uneia dintre laturile egale satisface relaţia $\frac{hl}{2} = S$, deci $h = \frac{2S}{l} = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

3. Numărul soluţiilor ecuaţiei $\sin x = \frac{1}{2}$ din intervalul $[0, 2\pi]$, care verifică inegalitatea $\cos x < 0$ este: **(5 pct.)**

   a) 4; b) 1; c) 5; d) 2; e) 0; f) 3.

   Soluţie. Soluţiile ecuaţiei $\sin x = \frac{1}{2}$ din intervalul $[0, 2\pi]$ sunt $\frac{\pi}{6}$ şi $\frac{5\pi}{6}$. Dar $\cos\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2} > 0$ iar $\cos\frac{5\pi}{6} = -\frac{\sqrt{3}}{2} < 0$. Convine deci doar a doua soluţie $\frac{5\pi}{6}$, iar numărul soluţiilor care satisfac condiţia este 1.

4. Se dau vectorii $\bar{u}$ şi $\bar{v}$. Aflaţi produsul scalar al celor doi vectori ştiind că $\|\bar{u}\| = 2$, $\|\bar{v}\| = 3$ şi unghiul format de cei doi vectori este $\frac{\pi}{2}$. **(5 pct.)**

   a) 2; b) -2; c) -1; d) 0; e) 1; f) 4.

   Soluţie. Produsul scalar cerut are expresia

   $$\langle \bar{u}, \bar{v} \rangle = ||\bar{u}|| \cdot ||\bar{v}|| \cdot \cos\widehat{(\bar{u}, \bar{v})} = 2 \cdot 3 \cdot \cos\frac{\pi}{2} = 2 \cdot 3 \cdot 0 = 0.$$

5. Distanţa dintre punctele $A(2, 0)$ şi $B(1, 3)$ este: **(5 pct.)**

   a) $\sqrt{11}$; b) $\sqrt{5}$; c) 2; d) $\sqrt{10}$; e) 3; f) $\sqrt{7}$.

   Soluţie. Distanţa cerută este $\sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2} = \sqrt{(1-2)^2 + (3-0)^2} = \sqrt{1+9} = \sqrt{10}$.

6. Calculaţi expresia $E = \frac{\sin 30^\circ \cdot \cos 30^\circ}{\mathrm{tg} 45^\circ}$. **(5 pct.)**

   a) $E = 0$; b) $E = \frac{\sqrt{3}}{4}$; c) $E = \frac{\sqrt{2}}{2}$; d) $E = -1$; e) $E = \frac{1}{\sqrt{3}}$; f) $E = \frac{1}{2}$.

   Soluţie. Obţinem $E = \frac{\frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}}{1} = \frac{\sqrt{3}}{4}$.

7. Se dă triunghiul ABC în care $\widehat{A} = 60^\circ$, $\widehat{B} = 75^\circ$ şi $AB = 2$. Atunci raza R a cercului circumscris triunghiului este: **(5 pct.)**

   a) $R = 2\sqrt{2}$; b) $R = 3\sqrt{2}$; c) $R = 4$; d) $R = 2$; e) $R = 1$; f) $R = \sqrt{2}$.

   Soluţie. Calculăm al treilea unghi, $\hat{C} = 180^\circ - (60^\circ + 75^\circ) = 45^\circ$. Fie R raza cercului circumscris triunghiului. Atunci, aplicând teorema sinusului, obţinem:

   $$\frac{AB}{\sin\hat{C}} = 2R \Leftrightarrow R = \frac{1}{2}\frac{2}{\sqrt{2}/2} \Leftrightarrow R = \sqrt{2}.$$

8. Aflaţi $\sin x$ ştiind că $x \in (0, \frac{\pi}{2})$ şi $\cos x = \frac{\sqrt{2}}{2}$. **(5 pct.)**

a) -1; b) 2; c) 1; d) 0; e) $\frac{\sqrt{5}}{4}$; f) $\frac{\sqrt{2}}{2}$.

Soluţie. Folosind formula trigonometrică fundamentală $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$, rezultă $\sin^2 x = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$, deci $\sin x \in \{\pm\frac{\sqrt{2}}{2}\}$. Dar $x \in (0, \frac{\pi}{2})$ impune condiţia $\sin x > 0$ şi deci $\sin x = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

9. Se dau vectorii $\bar{u} = 3\bar{i} + 4\bar{j}$, $\bar{v} = \bar{i} + 2\bar{j}$, $\bar{w} = 2\bar{i} + 2\bar{j}$. Aflaţi parametrii reali a şi b astfel încât $a\bar{u} + b\bar{v} = \bar{w}$. **(5 pct.)**

a) $a = 2, b = 0$; b) $a = b = 1$; c) $a = b = -1$; d) $a = 0, b = 1$; e) $a = -2, b = -1$; f) $a = 1, b = -1$.

Soluţie. Egalitatea din enunţ se rescrie

$$a\bar{u} + b\bar{v} = \bar{w} \Leftrightarrow 2\bar{i} + 2\bar{j} = a(3\bar{i} + 4\bar{j}) + b(\bar{i} + 2\bar{j}) \Leftrightarrow (3a + b)\bar{i} + (4a + 2b)\bar{j} = 2\bar{i} + 2\bar{j}.$$

Din unicitatea descompunerii unui vector după baza $\{\bar{i}, \bar{j}\}$, identificând coeficienţii vectorilor $\bar{i}, \bar{j}$, obţinem sistemul liniar $\begin{cases} 3a + b = 2 \\ 4a + 2b = 2 \end{cases}$ în necunoscutele $a, b \in \mathbb{R}$, a cărui soluţie unică este $a = 1$, $b = -1$. *Altă soluţie.* Se observă cu ochiul liber că $\bar{u} - \bar{v} = \bar{w}$, deci $\bar{w} = 1 \cdot \bar{u} + (-1) \cdot \bar{v}$. Coeficienţii vectorilor $\bar{u}$ şi $\bar{v}$ nu sunt poporţionali ($\frac{3}{1} \neq \frac{4}{2}$), deci aceşti doi vectori sunt liniar independenţi. Prin urmare, descompunerea semnalată este unică, iar deci cei doi coeficienţi ai descompunerii ($1 = a$ şi $-1 = b$) sunt singurele valori care satisfac condiţia din enunţ.

10. Fie M mulţimea soluţiilor ecuaţiei $1 + \cos x - \sin^2 x = 0$, care aparţin intervalului $[0, \frac{\pi}{2}]$. Atunci: **(5 pct.)**

a) $M = \{0\}$; b) $M = \{\frac{\pi}{2}\}$; c) $M = \{\frac{3\pi}{4}\}$; d) $M = \{\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{6}\}$; e) $M = \{\frac{\pi}{6}\}$; f) $M = \{\frac{\pi}{3}\}$.

Soluţie. Folosind formula trigonometrică fundamentală $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$, ecuaţia se rescrie

$$\cos^2 x + \cos x = 0 \Leftrightarrow \cos x(\cos x + 1) = 0 \Leftrightarrow \cos x \in \{-1, 0\}.$$

Varianta $\cos x = -1$ nu are soluţii în intervalul $[0, \frac{\pi}{2}]$, pe când varianta $\cos x = 0$ admite soluţia care aparţine acestui interval $x = \frac{\pi}{2}$. Prin urmare $M = \{\frac{\pi}{2}\}$.

11. Dacă $m = \sin 105° + \sin 75°$, atunci: **(5 pct.)**

a) $m = 1$; b) $m = -2$; c) $m = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{2}$; d) $m = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{2}$; e) $m = \frac{\sqrt{6}}{2}$; f) $m = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

Soluţie. Folosim formula $\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cos\beta + \sin\beta\cos\alpha$, pentru cei doi termeni ai sumei m. Obţinem

$$\begin{aligned} m &= \sin(60° + 45°) + \sin(30° + 45°) = \sin 60° \cos 45° + \sin 45° \cos 60° + \sin 30° \cos 45° + \sin 45° \cos 30° \\ &= \frac{\sqrt{2}}{2}\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}(\sqrt{3} + \sqrt{2}) = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{2}. \end{aligned}$$

Altă soluţie. Folosim formula $\sin\alpha + \sin\beta = 2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$ pentru $\alpha = 105°$ şi $\beta = 75°$. Obţinem $m = 2\sin 90° \cdot \cos 15°$. Folosind formula $\cos^2\frac{\alpha}{2} = \frac{1+\cos\alpha}{2}$ pentru $\alpha = 30°$, rezultă $\cos^2 15° = \frac{1+\cos 30°}{2} = \frac{1+\frac{\sqrt{3}}{2}}{2} = \frac{2+\sqrt{3}}{4}$. Dar $\cos 15° > 0$, deci $\cos 15° = \sqrt{\frac{2+\sqrt{3}}{4}} = \frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2}$. Aplicăm formula $\sqrt{a \pm \sqrt{b}} = \sqrt{\frac{a+c}{2}} \pm \sqrt{\frac{a-c}{2}}$ ($c = \sqrt{a^2 - b}$), varianta cu plus, pentru $a = 2, b = 3$ şi obţinem $c = \sqrt{2^2 - 3} = 1$ şi $\sqrt{2 + \sqrt{3}} = \sqrt{\frac{2+1}{2}} \pm \sqrt{\frac{2-1}{2}} = \frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{2}}$. Deci $\cos 15° = \frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2} = \frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}}$, iar $m = 2\cos 15° = 2\frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{2}$.

12. Calculaţi cateta unui triunghi dreptunghic isoscel a cărui arie este 18. **(5 pct.)**

a) 4; b) 2; c) $4\sqrt{2}$; d) 6; e) $2\sqrt{2}$; f) 1.

Soluţie. Notând cu c lungimea celor două catete egale ale unui triunghiului dreptunghic isoscel şi cu S aria acestuia, are loc relaţia $S = \frac{c^2}{2}$. Înlocuind aria dată, obţinem $18 = \frac{c^2}{2} \Rightarrow c = 6$. *Altă rezolvare.* Două triunghiuri identice cu cel din enunţ, "lipite" de-a lungul ipotenuzei lor formează un pătrat de latură c şi arie $2 \cdot 18 = 36$. Deci cateta triunghiului privită ca latură a pătratului este de lungime $c = \sqrt{36} = 6$.

13. Fie $A(2, 1)$, $B(0, 3)$ şi $C(3, 4)$. Atunci aria triunghiului ABC este: **(5 pct.)**

a) $\sqrt{2}$; b) 8; c) $2\sqrt{2}$; d) 1; e) 4; f) 2.

Soluţie. Notând cu S aria triunghiului ABC, putem folosi formula cu determinant,

$$S = \frac{1}{2}\text{abs}\left(\begin{vmatrix} x_A & y_A & 1 \\ x_B & y_B & 1 \\ x_C & y_C & 1 \end{vmatrix}\right) = \frac{1}{2}\text{abs}\left(\begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 1 \\ 3 & 4 & 1 \end{vmatrix}\right) = \frac{1}{2}\text{abs}\,(-8) = 4.$$

14. Aflaţi valoarea lui $m \in \mathbb{R}$ pentru care punctul $A(1, m)$ aparţine dreptei de ecuaţie $2x + y = 1$. **(5 pct.)**

a) $m = -1$; b) $m = \frac{1}{2}$; c) $m = -2$; d) $m = 0$; e) $m = \frac{3}{2}$; f) $m = 1$.

Soluţie. Înlocuind coordonatele punctului A în ecuaţie, obţinem $2 \cdot 1 + m = 1 \Leftrightarrow m = -1$.

15. Distanţa de la punctul $A(1, 2)$ la dreapta de ecuaţie $x - y - 2 = 0$ este: **(5 pct.)**

a) 1; b) $\frac{1}{2}$; c) $\frac{3\sqrt{2}}{2}$; d) $\frac{\sqrt{2}}{2}$; e) $\sqrt{3}$; f) $\frac{7}{2}$.

Soluţie. Folosim formula distanţei d de la punctul $A(x_A, y_A)$ la dreapta de ecuaţie $ax + by + c = 0$,

$$d = \frac{|a \cdot x_A + b \cdot y_A + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \frac{|1 \cdot 1 + (-1) \cdot 2 + (-2)|}{\sqrt{1^2 + (-1)^2}} = \frac{|-3|}{\sqrt{2}} = \frac{3\sqrt{2}}{2}.$$

Altă soluţie. Distanţa cerută este cea dintre A şi proiecţia B a lui A pe dreapta dată. Aflăm B intersectând dreapta dată $y = x - 2$ a cărei pantă este $m = 1$ cu dreapta ce trece prin A de pantă $-\frac{1}{m} = -1$ şi care are deci ecuaţia $y - 2 = (-1) \cdot (x - 1)$. Sistemul celor două ecuaţii are drept soluţie coordonatele punctului B:

$$\begin{cases} y = x - 2 \\ y - 2 = -x + 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = x - 2 \\ y = -x + 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x = 5 \\ 2y = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{5}{2} \\ y = \frac{1}{2}, \end{cases}$$

deci distanţa cerută este $\sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2} = \sqrt{(\frac{5}{2} - 1)^2 + (\frac{1}{2} - 2)^2} = \sqrt{\frac{9}{2}} = \frac{3}{\sqrt{2}} = \frac{3\sqrt{2}}{2}$.

16. Să se determine valoarea lui $m \in \mathbb{R}$ astfel încât dreapta de ecuaţie $mx + 2y + 4 = 0$ să fie paralelă cu dreapta $9x + 6y - 1 = 0$. **(5 pct.)**

a) $m = 1$; b) $m = 3$; c) $m = -\frac{3}{2}$; d) $m = \frac{3}{4}$; e) $m = 4$; f) $m = -1$.

Soluţie. Dreptele sunt paralele d.n.d. rapoartele coeficienţilor corespunzători sunt egale, dar diferite de raportul termenilor liberi. Această condiţie se scrie în cazul nostru $\frac{m}{9} = \frac{2}{6} \neq \frac{4}{-1}$, în care ultima inegalitate este satisfăcută, iar egalitatea din stânga conduce la $m = \frac{2 \cdot 9}{6} = 3$, deci $m = 3$.

17. Aflaţi simetricul B al punctului $A(1, 2)$ faţă de dreapta de ecuaţie $x - y = 0$. **(5 pct.)**

a) $B(-1, -5)$; b) $B(3, 4)$; c) $B(2, 1)$; d) $B(1, 0)$; e) $B(2, 2)$; f) $B(0, 1)$.

Soluţie. Fie $B(a, b)$ simetricul căutat. Cerem ca mijlocul $M(\frac{a+1}{2}, \frac{b+2}{2})$ al segmentului AB să se afle pe dreapta dată şi panta $m = 1$ a dreptei date $y = x$ şi panta $m' = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{b-2}{a-1}$ a dreptei AB să verifice condiţia de ortogonalitate $m \cdot m' = -1$. Cele două condiţii au forma

$$\begin{cases} \frac{a+1}{2} - \frac{b+2}{2} = 0 \\ \frac{b-2}{a-1} = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a - b = 1 \\ a + b = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 2 \\ b = 1, \end{cases}$$

deci punctul căutat este $B(2, 1)$. *Altă soluţie.* Aflăm în prealabil proiecţia $C(u, v)$ a punctului A pe dreaptă, intersectând dreapta dată, cu dreapta care trece prin A de pantă $-\frac{1}{m}$, unde $m = 1$ este panta dreptei date şi care are deci ecuaţia $y - y_A = -\frac{1}{m}(x - x_A \Leftrightarrow y - 2 = (-1)(x - 1)$. Obţinem sistemul ale cărui soluţii sunt coordonatele punctului C, $\begin{cases} x - y = 0 \\ y = -x + 3 \end{cases} \Leftrightarrow x = y = \frac{3}{2}$, deci $C(\frac{3}{2}, \frac{3}{2})$. Dar C este mijlocul segmentului AB, deci satisface condiţiile $x_C = \frac{x_A + x_B}{2}$, $y_C = \frac{y_A + y_B}{2}$, care se rescriu $x_B = 2x_C - x_A = 3 - 1 = 2$, $y_B = 2y_C - y_A = 3 - 2 = 1$. Prin urmare avem $B(2, 1)$.

18. Se consideră triunghiul ABC cu laturile $AC = 5$, $BC = 10$ şi $\hat{C} = 60°$. Atunci mărimea laturii AB este: **(5 pct.)**

a) $5\sqrt{3}$; b) $3\sqrt{3}$; c) $\sqrt{3}$; d) 5; e) $2\sqrt{3}$; f) $4\sqrt{3}$.

Soluţie. Aplicăm teorema cosinusului, obţinem

$$AB^2 = AC^2 + BC^2 - 2 \cdot AC \cdot BC \cdot \cos\hat{C} = 5^2 + 10^2 - 2 \cdot 5 \cdot 10 \cdot \cos 60° = 125 - 100 \cdot \frac{1}{2} = 75,$$

deci $AB = \sqrt{75} = 5\sqrt{3}$. *Altă soluţie.* Notând cu M millocul laturii BC, se observă că $CM = CA$ (deci ACM triunghi isoscel), iar unghiul din care pleacă laturile egale este $\hat{C} = 60°$. Celelalte două unghiuri egale rezultă tot de $60°$, deci ACM triunghi echilateral. Atunci avem $AM = AC = AB$, deci în cercul de centru M şi rază AM, unghiul A subântinde un arc capabil de $180°$, deci este unghi drept. Prin urmare ABC este triunghi dreptunghic cu $\hat{A} = 90°$, şi din teorema lui Pitagora rezultă $AB = \sqrt{BC^2 - AC^2} = \sqrt{100 - 25} = \sqrt{75} = 5\sqrt{3}$.