GEOMETRIE ŞI ALGEBRĂ LINIARĂ

Curs 7
Matricea unui morfism. Vectori şi valori proprii

Matrice şi morfisme

Considerăm $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$ şi $X, Y \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}), X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ şi $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$.

Reamintesc că înmulţirea matricelor se face linie pe coloană, în cazul de faţă $L_i(A \cdot X) = L_i(A) \cdot X, 1 \leqslant i \leqslant m$.

(1) Se demonstrează uşor că $A \cdot (X + Y) = A \cdot X + A \cdot Y$

$$A \cdot (X+Y) = \begin{pmatrix} \sum_{j=1}^n a_{1j}(x_j + y_j) \\ \sum_{j=1}^n a_{2j}(x_j + y_j) \\ \vdots \\ \sum_{j=1}^n a_{mj}(x_j + y_j) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{j=1}^n a_{1j}x_j + \sum_{j=1}^n a_{1j}y_j \\ \sum_{j=1}^n a_{2j}x_j + \sum_{j=1}^n a_{2j}y_j \\ \vdots \\ \sum_{j=1}^n a_{mj}x_j + \sum_{j=1}^n a_{mj}y_j \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \sum_{j=1}^n a_{1j}x_j \\ \sum_{j=1}^n a_{2j}x_j \\ \vdots \\ \sum_{j=1}^n a_{mj}x_j \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \sum_{j=1}^n a_{1j}y_j \\ \sum_{j=1}^n a_{2j}y_j \\ \vdots \\ \sum_{j=1}^n a_{mj}y_j \end{pmatrix} = A \cdot X + A \cdot Y.$$

(2) Chiar mai simplu se arată că $A \cdot (\alpha X) = \alpha A \cdot X$ pentru A şi X ca mai sus şi $\alpha \in \mathbb{R}$.

Dată $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$, notăm cu $\cdot_A$ înmulţirea cu matricea A.

Avem deci $\cdot_A : \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathcal{M}_{m,1}(\mathbb{R})$ este morfism. Înmulţirea este aditivă (proprietatea (1)) şi respectiv omogenă (proprietatea (2)).

Considerăm acum V un spaţiu vectorial real cu $\dim(V) = n$. Fie $\mathcal{B} = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ o bază pentru V. În observaţia 8 din cursul 4 am arătat că $(\forall) v \in V$, v are o scriere unică ca o combinaţie liniară de vectorii bazei $\mathcal{B}$; $v = \alpha_1 v_1 + \ldots + \alpha_n v_n$ cu coeficienţi unici. Aceşti coeficienţi se numesc *coordonatele* vectorului v în baza $\mathcal{B}$. Aleasă o bază $\mathcal{B} \subset V$ orice vector din V se identifică cu vectorul format din coordonatele sale.

$v \leftrightarrow \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix}_{\mathcal{B}} \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}) = \mathbb{R}^n$. Am folosit indicele $\mathcal{B}$ pentru vectorul coordonatelor pentru a specifica baza în care se face scrierea.

Să demonstrăm că $f : V \longrightarrow \mathbb{R}^n$, $f(v) = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix}_{\mathcal{B}}$ este izomorfism de spaţii vectoriale. Este clar că f este morfism. Este injectiv din unicitatea scrierii unui vector în baza $\mathcal{B}$. Surjectiv: fie $\begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$, atunci $\exists\ v = \alpha_1 v_1 + \ldots + \alpha_n v_n \in V$ a.î. $f(v) = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix}$. Baza în care am scris v este $\mathcal{B} = \{v_1, \ldots, v_n\}$.

Deci orice spaţiu vectorial real V, cu $\dim(V) = n$ este izomorf cu $\mathbb{R}^n$.

Fie V şi W două $\mathbb{R}$ spaţii vectoriale cu $\dim(V) = n$ şi $\dim(W) = m$ şi bazele $\mathcal{B} = \{v_1, \ldots, v_n\} \subset V$ şi $\mathcal{C} = \{w_1, \ldots, w_m\} \subset W$. $V \simeq \mathbb{R}^n$ (izomorfe) şi $W \simeq \mathbb{R}^m$.

Considerăm $f : V \longrightarrow W$ un morfism între cele două spaţii vectoriale.

Pentru fiecare $1 \leqslant j \leqslant n$ avem $f(v_j) = \sum_{i=1}^m a_{i,j} w_i$, scrierea unică a vectorului $f(v_j)$ în baza $\mathcal{C}$.

Notăm $M_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(f) = (a_{i,j})_{\substack{i = \overline{1,m} \\ j = \overline{1,n}}} \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$ matricea asociată morfismului f în bazele $\mathcal{B}$ şi $\mathcal{C}$. $C_j(M_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(f))$, coloana j a acestei matrice este formată din coordonatele vectorului $f(v_j)$ în baza $\mathcal{C}$.

Fie $v \in V$. Atunci $v = \alpha_1 v_1 + \ldots + \alpha_n v_n$, scriere unică. cu $\alpha_j \in \mathbb{R}, 1 \leqslant j \leqslant n$.

$f(v) = f(\sum_{j=1}^n \alpha_j v_j) = \sum_{j=1}^n \alpha_j f(v_j) = \sum_{j=1}^n \alpha_j (\sum_{i=1}^m a_{i,j} w_i) = \sum_{i=1}^m (\sum_{j=1}^n \alpha_j a_{i,j}) w_i = \sum_{i=1}^m (\sum_{j=1}^n a_{i,j} \alpha_j) w_i$.

Observaţia 1. Ceea ce am obţinut este o echivalenţă între matrice şi morfisme de spaţii vectoriale.

Am văzut că dată o matrice $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$, $\cdot_A : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ este morfism de spaţii vectoriale.

Reciproc pentru $f : V \longrightarrow W$, morfism de spaţii vectoriale cu $\dim(V) = n$, $\dim(W) = m$ şi $\mathcal{B}$ şi $\mathcal{C}$ baze în V şi respectiv W, ca mai sus avem asociată matricea $M_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(f) \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$.

Vectorul de coordonate al lui $f(v)$ în baza $\mathcal{C}$ este $\begin{pmatrix} \sum_{j=1}^n a_{1,j}\alpha_j \\ \sum_{j=1}^n a_{2,j}\alpha_j \\ \vdots \\ \sum_{j=1}^n a_{m,j}\alpha_j \end{pmatrix} = M_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(f) \cdot \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix}$, unde $\begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix}$ este vectorul coordonatelor lui v în baza $\mathcal{B}$.

De fapt avem un izomorfism de spaţii vectoriale:

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Hom}_{\mathbb{R}}(V,W) & \simeq & \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R}) \\ f & \leftrightarrow & M_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(f) \end{array}$$

Exemplul 2. Fie $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}, f\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = x + y$. Folosind notaţiile anterioare, considerăm $\mathcal{B} = \{v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}\} \subset \mathbb{R}^2$ şi $\mathcal{C} = \{w_1 = 1\} \subset \mathbb{R}$ baze. Astfel $M_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(f) \in \mathcal{M}_{1,2}(\mathbb{R})$ este $\begin{pmatrix} 1 & 1 \end{pmatrix}$ şi $f(v) = f\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = f(xv_1 + yv_2) = f(x\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + y\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = x + y$.

Fie V, W şi U spaţii vectoriale finit dimensionale cu bazele $\mathcal{B}, \mathcal{C}, \mathcal{D}$. şi $f : V \longrightarrow W$ şi $g : W \longrightarrow U$ morfisme între aceste spaţii vectoriale.

Atunci $M_{\mathcal{B},\mathcal{D}}(g \circ f) = M_{\mathcal{C},\mathcal{D}}(g) \cdot M_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(f)$.

Dacă $\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2$ sunt baze în V atunci pentru 1_V, morfismul identitate al spaţiului vectorial V avem $A = M_{\mathcal{B}_1,\mathcal{B}_2}(1_V)$ matricea de trecere de la $\mathcal{B}_2$ la $\mathcal{B}_1$ (elementele lui $\mathcal{B}_1$ se scriu în funcţie de elementele lui $\mathcal{B}_2$ şi coordonatele se scriu pe coloanele matricii A).

Avem faptul că vectorul coordonatelor lui v în baza $\mathcal{B}_2$ este egal cu $M_{\mathcal{B}_1,\mathcal{B}_2}(1_V)$ înmulţit cu vectorul coordonatelor lui v în baza $\mathcal{B}_1$.

Să vedem cum se schimbă matricea morfismului la schimbarea bazelor.

Dacă considerăm bazele $\mathcal{B}$ şi $\mathcal{B}'$ în V şi $\mathcal{C}$ şi $\mathcal{C}'$ în W, şi morfismul $f : V \longrightarrow W$. Avem următoarele compuneri

$$V_{\mathcal{B}'} \xrightarrow{1_V} V_{\mathcal{B}} \xrightarrow{f} W_{\mathcal{C}} \xrightarrow{1_W} W_{\mathcal{C}'}$$

Folosind formula matricii asociate compunerii morfismelor rezultă următoarea formulă.

$$M_{\mathcal{B}',\mathcal{C}'}(f) = M_{\mathcal{C}',\mathcal{C}}(1_W)^{-1} M_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(f) M_{\mathcal{B}',\mathcal{B}}(1_V).$$

Exemplul 3. Să considerăm $V = \mathbb{R}[X]_2$ spaţiul vectorial al polinoamelor de grad cel mult 2 cu coeficienţi reali . Baza considerată este $\mathcal{B} = \{X^2, X, 1\}$. Fie derivarea $T : \mathbb{R}[X]_2 \longrightarrow \mathbb{R}[X]_2$. Ştim că derivarea este aditivă şi omogenă, deci un morfism. Pe elementele bazei avem $T(X^i) = iT^{i-1}$, pentru $i = 1, 2$, şi $T(1) = 0$. Astfel, $M_{\mathcal{B},\mathcal{B}}(T) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. Pe fiecare coloană avem coordonatele vectorului $T(X^i)$ în baza $\mathcal{B}$. De exemplu $T(X^2) = (X^2)' = 2X = 0 \cdot X^2 + 2 \cdot X + 0 \cdot 1$. Vectorul coordonatelor este $\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$, prima coloană a matricii.

Considerăm şi baza $\mathcal{B}' = \{(X-1)^2, X, 1\}$. Verificaţi că este bază!

$T((X-1)^2) = 2(X-1) = 2X - 2, T(X) = 1, T(1) = 0$, de unde $M_{\mathcal{B}',\mathcal{B}'}(T) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. În acest exemplu $W = V = \mathbb{R}[X]_2$, iar $\mathcal{C}' = \mathcal{B}'$ iar $\mathcal{C} = \mathcal{B}$.

Vreau să verificăm formula $M_{\mathcal{B}',\mathcal{B}'}(T) = M_{\mathcal{B}',\mathcal{B}}(1_V)^{-1} M_{\mathcal{B},\mathcal{B}}(T) M_{\mathcal{B}',\mathcal{B}}(1_V)$. Mai trebuie să determinăm $M_{\mathcal{B}',\mathcal{B}}(1_V)$, matricea de trecere din baza $\mathcal{B}$ în baza $\mathcal{B}'$. Avem $(X-1)^2 = X^2 - 2X + 1, X = X$ şi 1 =1, deci $M_{\mathcal{B}',\mathcal{B}}(1_V) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Inversa acesteia, $M_{\mathcal{B}',\mathcal{B}}(1_V)^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Se verifică faptul că

$$M_{\mathcal{B}',\mathcal{B}'}(T) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Considerăm $f : V \longrightarrow W$ morfism, unde în V avem baza $\mathcal{B}$ iar în W baza $\mathcal{C}$.

Cum aflăm dacă $v \in \mathrm{Ker}(f) \Leftrightarrow f(v) = 0 \Leftrightarrow M_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(f) \cdot \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix} = 0$, unde $\begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix}$ este vectorul coordonatelor lui v în baza $\mathcal{B}$. Acest vector este deci soluţia sistemului omogen scris mai sus.

Când $w \in \mathrm{Im}(f)$? $w \in \mathrm{Im}(f) \Leftrightarrow \exists v \in V$ a.î. $f(v) = w \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow M_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(f) \cdot \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix} = w = \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_n \end{pmatrix}$, unde $\begin{pmatrix} \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_n \end{pmatrix}$ este vectorul coordonatelor lui w în baza $\mathcal{C}$. Deci $w \in \mathrm{Im}(f)$ dacă şi numai dacă sistemul $M_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(f) \cdot \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_n \end{pmatrix}$ are soluţie. Notăm $A = M_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(f)$. Reamintesc că $A \cdot \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix} = \alpha_1 C_1(A) + \alpha_2 C_2(A) + \ldots + \alpha_n C_n(A)$. Deci $w \in \mathrm{Im}(f) \Leftrightarrow w$ este combinaţie liniară de coloanele matricei $A \Leftrightarrow w \in < C_1(A), \ldots, C_n(A) >$. Deci $\mathrm{Im}(f) = < C_1(A), \ldots, C_n(A) >$.

Vectori şi valori proprii

Definiţia 4. Fie $f : V \longrightarrow V$ o aplicaţie liniară.

• un element $\underline{\lambda \in \mathbb{R}}$ se numeşte valoare proprie a lui f dacă există $v \in V \backslash \{0\}$ cu $f(v) = \lambda v$ (un astfel de vector se numeşte vector propriu corespunzător valorii proprii λ).

• un element $v \in V \backslash \{0\}$ se numeşte vector propriu pentru f dacă există $\lambda \in \mathbb{R}$ cu $f(v) = \lambda v$.

Notăm cu $M_{\mathcal{B}}(f) = M_{\mathcal{B},\mathcal{B}}(f)$.

Propoziţia 5. *Fie $A = M_{\mathcal{B}}(f)$, unde $\mathcal{B}$ este bază a lui V. $\lambda \in \mathbb{R}$ e valoare proprie a lui $f \Leftrightarrow \det(\lambda I_n - A) = 0$.*

Definiţia 6. Dacă $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, atunci $P_A(X) = \det(XI_n - A)$ se numeşte *polinomul caracteristic* al lui A. (Observăm că $XI_n - A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}[X])$).

Observaţia 7. 0 este valoare proprie pentru f, dacă şi numai dacă matricea $A = M_{\mathcal{B}}(f)$ este singulară.

Propoziţia 8. *Dacă $f : V \longrightarrow V$ este aplicaţie liniară, iar $A = M_{\mathcal{B}}(f)$ într-o bază $\mathcal{B}$, atunci P_A nu depinde de baza $\mathcal{B}$.*

Demonstraţie: Dacă $\mathcal{B}'$ e altă bază, ştim că $A' = M_{\mathcal{B}'}(f) = Q^{-1}AQ$ unde Q este matricea inversabilă $Q = M_{\mathcal{B}',\mathcal{B}}(1_V)$. Atunci $P_{A'}(X) = \det(XI_n - Q^{-1}AQ) = \det(X \cdot Q^{-1}Q - Q^{-1}AQ) = \det(Q^{-1}(XI_n - A)Q) = \det((XI_n - A)QQ^{-1}) = \det(XI_n - A) = P_A(X)$.

□

Aşadar valorile proprii ale lui f sunt rădăcinile în $\mathbb{R}$ ale polinomului caracteristic al lui f. Definim valorile proprii ale unei matrice A ca fiind valorile proprii ale aplicaţiei liniare asociate lui A prin izomorfismul $\mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \simeq \mathrm{Hom}_{\mathbb{R}}(V, V)$ (pentru o bază fixată a lui V), sau echivalent rădăcinile polinomului $P_A(X)$ în $\mathbb{R}$.

Exemplul 9. Fie $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$. Dacă $M_{\mathcal{B}}(f) = A$ într-o bază $\mathcal{B}$, atunci $P_T(X) = X^2 - \mathrm{tr}(A)X + \det(A) = X^2 - 2X + 2 = (X-1)^2 + 1$ şi f nu are valori proprii, valorile proprii fiind prin definiţie elemente din $\mathbb{R}$, iar rădăcinile lui f sunt complexe.

Definiţia 10. $f : V \longrightarrow V$ morfism se numeşte *diagonalizabil* dacă V are o bază $\mathcal{B}$ formată din vectori proprii pentru f. În acest caz $M_{\mathcal{B}}(f)$ este diagonală formată din valori proprii.

Să vedem când este un morfism diagonalizabil.

Propoziţia 11. *Fie $\lambda_1, \dots, \lambda_p$ valori proprii distincte pentru $f : V \longrightarrow V$ şi $v_1, \dots, v_p$ vectori proprii corespunzători valorilor proprii $\lambda_1, \dots, \lambda_p$. Atunci $v_1, \dots, v_p$ sunt liniar independenţi.*

Corolarul 12. *Fie $f : V \longrightarrow V$ morfism. Dacă $P_f(X)$ are n valori proprii distincte, unde $n = \dim(V)$ atunci f este diagonalizabil.*

Am definit ce înseamnă un morfism diagonalizabil. Similar, o matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ se numeşte *diagonalizabilă* dacă există o bază în $\mathbb{R}^n$ de vectori proprii ai matricei A. Punând aceşti vectori proprii $v_1, \dots, v_n$ într-o matrice $Q = (v_1 \dots v_n)$, ca şi coloanele acestei matrice, obţinem relaţia $AQ = QD \Leftrightarrow A = QDQ^{-1}$, unde D este o matrice diagonală formată din valori proprii carora le sunt asociate vectorii proprii $v_1, \dots, v_n$.

De fapt relaţia $AQ = QD$ reprezintă toate egalităţile $Av_j = \lambda_j v_j, 1 \leqslant j \leqslant n$. Să vedem acest lucru. Vom identifica coloanele celor doi membri. Fie $1 \leqslant j \leqslant n$ arbitrar.

În membrul stâng avem $C_j(AQ) = AC_j(Q) = Av_j$ iar în membrul drept $C_j(QD) = QC_j(D) = 0C_1(Q) + 0C_2(Q) + \dots + \lambda_j C_j(Q) + \dots + 0C_n(Q) = 0v_1 + 0v_2 + \dots + \lambda_j v_j + \dots + 0v_n = \lambda_j v_j$.

Exemplul 13. Fie

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$P_A(X) = \det(XI_3 - A) = \begin{vmatrix} X & 0 & 0 \\ 0 & X & -1 \\ 0 & -1 & X \end{vmatrix} = X(X^2-1) = X(X-1)(X+1).$$ Deci valorile proprii sunt $\lambda_1 = 0, \lambda_2 = 1, \lambda_3 = -1$. Vectorii proprii asociaţi acestor valori proprii fiind liniar independenţi şi fiind în număr de trei, în $\mathbb{R}^3$, formează bază. Deci matricea este diagonalizabilă. Vectori proprii sunt:

$$A \cdot v_1 = 0 \cdot v_1 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow y = z = 0. \text{ Deci } v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

$(A - 1I_3) \cdot v_2 = 0 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow x = 0, y = z$, de unde $v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

$(A + 1I_3) \cdot v_3 = 0 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow x = 0, y = -z$, şi rezultă $v_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$.

Deci $A = QDQ^{-1}$, unde $Q = (v_1\ v_2\ v_3)$, este matricea ce are coloanele vectorii proprii asociaţi valorilor proprii $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$. Adică $Q = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ cu inversa $Q^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$ şi $D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$. Avem $D = Q^{-1}AQ$. Ce reprezintă acestă relaţie ?

Matricea $A = M_{\mathcal{B}}(f)$, este matricea unei transformări liniare (endomorfism) $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$, într-o anumită bază $\mathcal{B}$ a spaţiului $\mathbb{R}^3$. $D = M_{\mathcal{B}'}(f)$, matricea aceleeaşi transformări liniare f, dar în baza $\mathcal{B}' = \{v_1, v_2, v_3\}$, formată din vectorii proprii (vedeţi definiţia morfismului diagonalizabil).

Relaţia $D = Q^{-1}AQ$ este exact relaţia $M_{\mathcal{B}'}(f) = M_{\mathcal{B}',\mathcal{B}}(1_{\mathbb{R}^3})^{-1} M_{\mathcal{B}}(f) M_{\mathcal{B}',\mathcal{B}}(1_{\mathbb{R}^3})$, unde $M_{\mathcal{B}',\mathcal{B}}(1_{\mathbb{R}^3})$ este matricea de trecere din baza $\mathcal{B}$ în baza $\mathcal{B}'$.

Diagonalizarea unei matrice înseamnă, după cum am spus la începutul cursului, găsirea unei baze de vectori proprii. Nu toate matricele cu coeficienţi reali sunt diagonalizabile. Cele simetrice sunt.

Teorema 14. *Orice matrice simetrică* $A = {}^tA \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ *este diagonalizabilă.*