GEOMETRIE ŞI ALGEBRĂ LINIARĂ

Curs 6
Sisteme de ecuaţii liniare

Continuăm consideraţiile începute cursul trecut.

Înainte de a trece la exemple voi menţiona şi algoritmul de rezolvare a unui sistem compatibil de ecuaţii liniare. Considerăm din nou sistemul

$$(1)\qquad \begin{cases} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & \cdots & + & a_{1n}x_n & = & b_1 \\ a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + & \cdots & + & a_{2n}x_n & = & b_2 \\ \vdots & + & \vdots & + & \vdots & + & \vdots & = & \vdots \\ a_{m1}x_1 & + & a_{m2}x_2 & + & \cdots & + & a_{mn}x_n & = & b_m. \end{cases}$$

Vom prsupune că este compatibil.

Fie A matricea sistemului şi presupunem că $\text{rang}(A) = r$ şi considerăm $I = \{i_1 < \ldots < i_r\} \subset \{1, 2, \ldots m\}$ şi $J = \{j_1 < \ldots < j_r\} \subset \{1, 2, \ldots n\}$ a.î. $\det(A_{I,J}) \neq 0$. Vom rezolva sistemul în funţie de acest minor nenul de ordin r, pe care îl vom fixa..

Ştim că $\text{rang}(A) = \text{rang}(A^e)$ (sistemul este compatibil) $= \dim < L_1(A^e), \ldots, L_m(A^e) >$. Cum $L_{i_1}(A^e), \ldots, L_{i_r}(A^e)$ sunt liniar independente (altfel, ar rezulta că restricţiile acestor linii la J sunt liniar dependente, deci $\det(A_{I,J}) = 0$), avem că faptul că $< L_1(A^e), \ldots, L_m(A^e) >=< L_{i_1}(A^e), \ldots, L_{i_r}(A^e) >$, deci orice linie este combinaţie liniară de $L_{i_1}(A^e), \ldots, L_{i_r}(A^e)$, asta însemnând că orice ecuaţie a sistemului este combinaţie liniară a ecuaţiilor $i_1, \ldots, i_r$ deci sistemul (1) este echivalent cu sistemul format numai din ecuaţiile $i_1, \ldots, i_r$.

Reamintesc că două sisteme se numesc *echivalente* dacă au acelaşi soluţii.

Din observaţiile anterioare sistemul $AX = B$ este echivalent cu sitemul

$$A_{I,\{1,2,\ldots n\}}X = B_I$$

.

Notând cu $\overline{J} = [n]\backslash J$ avem $A_{I,\{1,2,\ldots n\}}X = A_{I,J}X_J + A_{I,\overline{J}}X_{\overline{J}}$, de unde

$$A_{I,\{1,2,\ldots n\}}X = B_I \Leftrightarrow A_{I,J}X_J + A_{I,\overline{J}}X_{\overline{J}} = B_I \Leftrightarrow A_{I,J}X_J = B_I - A_{I,\overline{J}}X_{\overline{J}} \Leftrightarrow$$

$$(A_{I,J} \text{ inversabilă}) \Leftrightarrow X_J = A_{I,J}^{-1}(B_I - A_{I,\overline{J}}X_{\overline{J}})$$

În termeni de ecuaţii şi necunoscute :

- păstrăm în membrul stâng necunoscutele $x_{j_1}, \ldots, x_{j_r}$, (*necunoscutele principale*). Acestea formează vectorul X_J.

- trecem în membrul drept celelalte necunoscute (*necunoscutele secundare*)
- dăm valori arbitrare necunoscutelor secundare ($X_{\overline{J}} \in \mathcal{M}_{n-r,1}(\mathbb{R})$ este arbitrar)
- calculăm necunoscutele principale în funcţie de necunoscutele secundare. Obţinem o unică soluţie pentru fiecare vector $X_{\overline{J}}$.

Vedem că mulţimea soluţiilor este parametrizată de numărul necunoscutelor secundare, care variază independent una de alta în $\mathbb{R}$. Deci avem $n - r$ (numărul necunoscutelor secundare) ”grade de libertate” sau parametri.

La sfârşitul cursului anterior am prezentat metoda eliminării Gauss-Jordan şi forma eşalon a unei matrice.

Am enunţat rezultatul că orice matrice poate fi transformată după un număr fimit de operaţii cu linii într-o matrice eşalon.

În loc de demonstaţie voi face exemple.

Exemplul 1. Fie matricea $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 2 \\ -1 & 3 & 2 & -2 \\ 4 & 3 & -2 & -4 \end{pmatrix}$. Vedem că primul element de pe prima linie este 1, deci din definiţia pivotului acesta este pivotul primei linii. Cum pivotul este singurul nenul pe coloana sa vom elimina elementele de pe prima coloană folosind acest pivot. Astfel $L_2' = L_2 + L_1$ şi $L_3' = L_3 - 4L_1$. Avem

$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 2 \\ -1 & 3 & 2 & -2 \\ 4 & 3 & -2 & -4 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 4 & 4 & 0 \\ 0 & -1 & -10 & -12 \end{pmatrix}$. Vedem că elementul de pe a doua linie şi a doua coloană este nenul. Acesta va fi pivotul celei de-a doua linii. Pentru a obţine 1 în acea poziţie trebuie să împărţim linia a doua cu 4, deci facem transformarea $L_2' = \frac{1}{4}L_2$. Astfel obţinem matricea $\sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -10 & -12 \end{pmatrix}$. Cu pivotul al doilea, cel de pe linia a doua, facem eliminări astfel încât acesta să rămână singurul nenul pe coloana sa. Eliminările sunt $L_1' = L_1 - L_2, L_3' = L_3 + L_1$. Obţinem matricea $\sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -9 & -12 \end{pmatrix}$. Elementul nenul de pe linia 3 este -9, pe coloana a treia. Aici obţinem al treilea pivot împărţind L_3 cu -9. După această operaţie matricea devine $\sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{4}{3} \end{pmatrix}$. În sfârşit vom face ultimele eliminări pe coloana a treia a.î. pivotul să rămână singurul nenul pe coloana sa.

Transformările sunt $L_1' = L_1 - L_3$ şi $L_2' = L_2 - L_3$. Forma eşalon a matricii este

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \frac{2}{3} \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{4}{3} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{4}{3} \end{pmatrix}.$$

Voi face mai multe observaţii.

În primul rând vedem că forma eşalon E are rangul maxim pe care îl poate atinge ($\text{rang}(E) \leqslant \min\{3, 4\} = 3$).

Întrebarea naturală care se pune este dacă $\text{rang}(A)$ **este egal cu rangul formei eşalon** E**.**

Răspunsul vine din faptul că toate operaţiile pe care le-am făcut se pot scrie ca înmulţiri la stânga cu matrice.

Astfel dacă dorim să adunăm L_1 la L_2, adică să facem transformarea $L_2' = L_2 + L_1$ matricei A, atunci înmulţim la stânga cu matricea $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Este o matricea I_3 la care am adăugat un 1 pe linia 2 şi coloana 1.

Deci $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 2 \\ -1 & 3 & 2 & -2 \\ 4 & 3 & -2 & -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 4 & 4 & 0 \\ 4 & 3 & -2 & -4 \end{pmatrix}$.

Dacă procedăm mai departe şi facem a doua eliminare pe coloana întâi, $L_3' = L_3 - 4L_1$, înmulţim la stânga cu matricea $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -4 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Avem $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -4 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -4 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 4 & 4 & 0 \\ 4 & 3 & -2 & -4 \end{pmatrix} =$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 4 & 4 & 0 \\ 0 & -1 & -10 & -12 \end{pmatrix}$$

Pentru a obţine al doilea pivot trebuie să împărţim linia a doua cu 4. Deci vom modifica numai linia a doua.

Acest lucru se obţine la sânga cu matricea $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Deci $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -4 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 4 & 4 & 0 \\ 0 & -1 & -10 & -12 \end{pmatrix} =$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -10 & -12 \end{pmatrix}.$$

Restul operaţiilor pe care le-am descris în algoritmul de obţinere a formei eşalon (se numeşte eşalonare) E, a matricei A, se fac similar. Le voi menţiona la sfârşitul exemplului.

Deocamdată să observăm că matricele cu care înmulţim la stânga sunt matrice inversabile. Determinanţii $\det \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -4 & 0 & 1 \end{pmatrix} = 1$ (sunt matrice inferior triunghiulare), iar $\det \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{4}$. Deci forma eşalon E a matricei A se obţine din A prin înmulţire la stânga cu matrice inversabile.

Acum putem răspunde la întrebarea pe care am pus-o.

În cursul trecut am menţionat că dacă $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R}), U \in \mathcal{M}_m(\mathbb{R})$ inversabilă, atunci $\operatorname{rang}(U \cdot A) = \operatorname{rang}(A)$. Cum $E = U \cdot A$, avem $\operatorname{rang}(E) = \operatorname{rang}(A)$.

Voi scrie acum produsul matricelor prin care obţinem matricea cu care înmulţim pe A la stânga pentru a obţine E, forma eşalon.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{9} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -4 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \frac{2}{3} \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{4}{3} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{4}{3} \end{pmatrix}$$

Putem spune că $\operatorname{rang}(A) = \operatorname{rang}(E) = 3$.

Algoritmul Gauss-Jordan este folositor pentru a obţine şi inversa unei matrice.

Exemplul 2. Voi considera pentru uşurinţă matricea $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ -1 & 3 & 2 \\ 4 & 3 & -2 \end{pmatrix}$ care este formată din primele coloane ale matricei A din exemplul anterior. Vom calcula folosind operaţii cu linii (înmulţiri la stânga cu matrice inversabile) inversa B^{-1}.

Vedem că dacă înmulţim la stânga matricea B cu matricele cu care am înmulţit A la stânga, în aceeaşi ordine, vom obţine primele trei coloane ale formei eşalon E

(înmulţirea se face linie pe coloană), adică I_3. Deci acest produs de matrice este B^{-1}.

Aplicăm acest algoritm matricei $(B|I_3)$. Înmulţim la stânga cu B^{-1} şi avem $B^{-1}\cdot(B|I_3) = (B^{-1}\cdot B|B^{-1}\cdot I_3) = (I_3|B^{-1})$. Făcând eliminare Gauss-Jordan pentru matricea $(B|I_3)$ vom obţine matricea $(I_3|B^{-1})$, deci în dreapta, inversa lui B.

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 3 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 4 & 3 & -2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{c} L_2' = L_2 + L_1 \\ L_3' = L_3 - 4L_1 \\ \sim \end{array} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 4 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -10 & -4 & 0 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{c} L_2' = \frac{1}{4}L_2 \\ \sim \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & -1 & -10 & -4 & 0 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{c} L_1' = L_1 - L_2 \\ L_3' = L_3 + L_2 \\ \sim \end{array} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & \frac{3}{4} & -\frac{1}{4} & 0 \\ 0 & 1 & 1 & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & 0 & -9 & -\frac{15}{4} & \frac{1}{4} & 1 \end{array}\right) \begin{array}{c} L_3' = -\frac{1}{9}L_3 \\ \sim \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & \frac{3}{4} & -\frac{1}{4} & 0 \\ 0 & 1 & 1 & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{5}{12} & -\frac{1}{36} & -\frac{1}{9} \end{array}\right) \begin{array}{c} L_1' = L_1 - L_3 \\ L_2' = L_2 - L_3 \\ \sim \end{array} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{4}{12} & -\frac{8}{36} & \frac{1}{9} \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{2}{12} & \frac{10}{36} & \frac{1}{9} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{5}{12} & -\frac{1}{36} & -\frac{1}{9} \end{array}\right).$$

Deci

$$B^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{12}{36} & -\frac{8}{36} & \frac{4}{36} \\ -\frac{6}{36} & \frac{10}{36} & \frac{4}{36} \\ \frac{15}{36} & -\frac{1}{36} & -\frac{4}{36} \end{pmatrix} = \frac{1}{-36}\begin{pmatrix} -12 & 8 & -4 \\ 6 & -10 & -4 \\ -15 & 1 & 4 \end{pmatrix}.$$

Numitorul -36 este bineînţeles $\det(B)$. Se verifică uşor că $B \cdot B^{-1} = I_3$.

Este un algoritm mult mai economic decât cel de aflare a adjunctei matricei (deci a cofactorilor). Inversa este adjuncta înmulţită cu inversul determinantului matricei.

O ultimă observaţie, anume că forma eşalon a unei matrice inversabile este matricea unitate I_n. În acest exemplu forma eşalon a matricii B este I_3.

Sisteme liniare omogene

Fie $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$. Considerăm sistemul liniar $AX = 0$, unde $0 \in \mathcal{M}_{m,1}(\mathbb{R})$, adică

$$(2) \qquad \begin{cases} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & \cdots & + & a_{1n}x_n & = & 0 \\ a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + & \cdots & + & a_{2n}x_n & = & 0 \\ \vdots & + & \vdots & + & \vdots & + & \vdots & = & \vdots \\ a_{m1}x_1 & + & a_{m2}x_2 & + & \cdots & + & a_{mn}x_n & = & 0 \end{cases}$$

Bineînţeles că un sistem omogen are întotdeauna soluţia nulă, deci orice sistem omogen este compatibil.

Aplicăm acelaşi algoritm de rezolvare ca şi în cazul sistemelor cu coloana termenilor liberi nenulă. Începem cu calculul rangului matricei. Cel mai economic este aplicarea algoritmul Gauss-Jordan, care ne dă nu numai rangul matricii, dar şi o formă simplă, echivalentă, a sistemului de unde aflăm cu uşurinţă soluţia.

Exemplul 3. Să rezolvăm sistemul omogen $\begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 + 2x_4 & = 0 \\ -x_1 + 3x_2 + 2x_3 - 2x_4 & = 0 \\ 4x_1 + 3x_2 - 2x_3 - 4x_4 & = 0 \end{cases}$

Matricea sistemului este $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 2 \\ -1 & 3 & 2 & -2 \\ 4 & 3 & -2 & -4 \end{pmatrix}$, matricea din **exemplul 1** .

Forma eşalon ştim că este $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \frac{2}{3} \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{4}{3} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{4}{3} \end{pmatrix}$.

Rangul este 3, primele trei necunoscute sunt principale şi depind de a patra necunoscută, cea secundară. Sistemul devine $\begin{cases} x_1 + \frac{2}{3}x_4 & = 0 \\ x_2 - \frac{4}{3}x_4 & = 0 \\ x_3 + \frac{4}{3}x_4 & = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 & = -\frac{2}{3}x_4 \\ x_2 & = \frac{4}{3}x_4 \\ x_3 & = -\frac{4}{3}x_4 \end{cases}$

Soluţia are un parametru, $x_4 \in \mathbb{R}$.

Mulţimea soluţiilor este $S = \{ \begin{pmatrix} -\frac{2}{3}\alpha \\ \frac{4}{3}\alpha \\ -\frac{4}{3}\alpha \\ \alpha \end{pmatrix} | \alpha \in \mathbb{R}\} \subset \mathcal{M}_{4,1}(\mathbb{R}) \simeq \mathbb{R}^4$.

Indicele coloanelor pe care se află pivoţii este indicele variabilelor principale. Acestea se află în funcţie de cele secundare.

Dacă forma eşalon a matricii extinse conţine pe ultima coloană un pivot atunci sitemul asociat este incompatibil.

Forma eşalon a unei matrice inversabile este matricea identitate.

Voi încheia consideraţiile despre sisteme liniare cu o teoremă pe care o cunoaşteţi din clasa a XI-a, anume regula Cramer.

Considerăm sistemul de n ecuaţii liniare cu n necunoscute

$$(3)\qquad \left\{\begin{array}{ccccccccc} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & \cdots & + & a_{1n}x_n & = & b_1 \\ a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + & \cdots & + & a_{2n}x_n & = & b_2 \\ \vdots & + & \vdots & + & \vdots & + & \vdots & = & \vdots \\ a_{n1}x_1 & + & a_{n2}x_2 & + & \cdots & + & a_{nn}x_n & = & b_n. \end{array}\right.$$

Forma matriceală a acestuia este $AX = B$, unde $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ şi $X, B \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$

Notăm cu $A_j \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), 1 \leqslant j \leqslant n$ matricele ce se obţin din A înlocuind $C_j(A)$, coloana j a matricei A, cu coloana B a termenilor liberi.

Teorema 4 (Regula Cramer)**.** *Considerăm sistemul $AX = B$ de n ecuaţii liniare cu n necunoscute. Presupunem că $\det(A) \neq 0$. Atunci soluţia sistemului este dată de $x_j = \frac{\det(A_j)}{\det(A)}, 1 \leqslant j \leqslant n$.*

Recapitulăm metoda de rezolvare a sistemelor liniare.

Pentru rezolvarea unui astfel de sistem scriem matricea extinsă asociată acestuia. O aducem la forma eşalon care este unică.

Dacă avem un pivot pe ultima coloană sistemul este incompatibil. La nivel de ecuaţii aceasta înseamnă o ecuaţie cu membrul stâng nul şi membrul drept egal cu 1 (pivotul). Deci nu avem soluţii.

Dacă nu avem pivot pe ultima coloană sistemul este compatibil.

Numărul de pivoţi este egal cu rangul matricii sistemului este egal cu rangul matricii extinse (sistem compatibil) este egal cu numărul necunoscutelor principale. Trecem necunoscutele secundare în membrul drept şi aflăm necunoscutele principale în funcţie de cele secundare.

Se scrie soluţia în funcţie de necunoscutele secundare, care sunt parametri.

Sistemele omogene întotdeauna sunt compatibile, având cel puţin soluţia nulă.

Dacă sistemul are n ecuaţii şi n necunoscute cu matricea sistemului inversabilă, atunci forma eşalon este matricea I_n şi soluţia este dată de regula lui Cramer.