

SCHEME CLASICE DE PROBABILITATE

Schemele clasice de probabilitate sunt modele matematice cu ajutorul cărora determinăm probabilitatea de realizare a unui eveniment, în anumite situații particulare.

În cele ce urmează vom considera un câmp finit de probabilitate $\{\Omega, K, P\}$.

SCHEMA LUI BERNOULLI (schema binomială)

Fie $A_1, A_2, ..., A_n$ un sistem complet de evenimente independente echiprobabile cu $P(A_i) = p_i = p$. Probabilitatea să se realizeze k din cele n evenimente (și să nu se realizeze n-k) este egală cu coeficientul lui x^k din polinomul $(px+q)^n$, adică este egală cu $C_n^k \cdot p^k \cdot q^{n-k}$ (unde q=1-p).

Model "urne-bile":

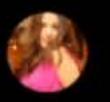
- O urnă U (bile albe şi negre);
- Se fac n extrageri, cu revenire (repunerea în urnă a bilei, după fiecare extragere);
- Probabilitatea de a extrage o bilă albă este p (și probabilitatea de a extrage una neagră este q = 1 p);

Probabilitatea de a extrage exact k bile albe din n extrageri este egală cu coeficientul lui x^k din polinomul: $(px+q)^n$, adică este egală cu $C_n^k \cdot p^k \cdot q^{n-k}$.







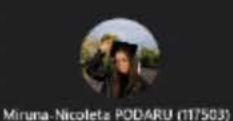
















2

SCHEMA LUI BERNOULLI CU MAI MULTE STĂRI (schema multinomială)

Fie $A_1, A_2,, A_m$ un sistem complet de evenimente, cu probabilitățile de realizare $P(A_i) = p_i$, (evenimentele A_i NU sunt echiprobabile). Probabilitatea ca din cele n efectuări ale unei experiențe să se realizeze de n_1 ori evenimentul A_1 , de n_2 ori evenimentul A_2 ,, de n_m ori evenimentul A_m (unde $n_1 + n_2 + ... + n_m = n$) este:

$$\frac{n!}{n_1! \cdot n_2! \cdot \ldots \cdot n_m!} \cdot p_1^{n_1} \cdot p_2^{n_2} \cdot \ldots \cdot p_m^{n_m}$$

La schemele Bernoulli, putem considera n urne identice U_1, U_2, \ldots, U_n din care se face câte o extragere (urnele conțin același număr de bile albe și respectiv același număr de bile negre) sau o aceeași experiență aleatoare (de exemplu aruncarea zarului) care se efectuează de "n" ori.

Model "urne-bile":

- O urnă U conține bile de m culori, $c_1, c_2, ..., c_m$;
- Se fac n extrageri, cu revenire (repunerea în urnă a bilei, după fiecare extragere);
- p_i este probabilitatea ca la o extragere să obținem o bilă de culoarea c_i .

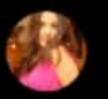
Probabilitatea ca în n extrageri să obținem n_1 bile de culoarea c_1 , n_2 bile de culoarea c_2 ,, n_m bile de

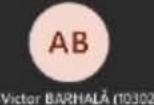
culoarea
$$c_m$$
 (unde $n_1 + n_2 + ... + n_m = n$) este: $\frac{n!}{n_1! \cdot n_2! \cdot ... \cdot n_m!} \cdot p_1^{n_1} \cdot p_2^{n_2} \cdot ... \cdot p_m^{n_m}$























SCHEMA LUI POISSON (schema binomială generalizată)

Fie $A_1, A_2, ..., A_n$ un sistem complet de evenimente independente cu $P(A_i) = p_i$ (şi respectiv $q_i = 1 - p_i$, cu $i = \overline{1,n}$ adică evenimentele A_i , NU sunt echiprobabile). Probabilitatea să se realizeze k din cele n evenimente (şi să nu se realizeze n-k) este egală cu coeficientul lui x^k din polinomul:

$$(p_1x+q_1)(p_2x+q_2)...(p_nx+q_n)$$

Model "urne-bile":

- Avem n urne $U_1, U_2, ..., U_n$ (bile albe şi negre în proporții date, cunoscute);
- Se fac n extrageri, din fiecare urnă câte o bilă;
- p_i este probabilitatea cu care este extrasă o bilă albă din urna U_i .

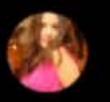
Probabilitatea de a extrage k bile albe din n extrageri este egală cu coeficientul lui x^k din polinomul:

$$(p_1x+q_1)(p_2x+q_2)...(p_nx+q_n).$$







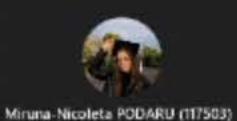
















4

SCHEMA LUI POISSON "CU TREI CULORI"

Considerăm $A_1, A_2, ..., A_n$ evenimente independente cu $P(A_i) = p_i$, $B_1, B_2, ..., B_n$ independente cu $P(B_i) = q_i$ și $C_1, C_2, ..., C_n$ independente cu $P(C_i) = r_i$, $i = \overline{1, n}$. Probabilitatea să se realizeze k din cele n evenimente A_i , j din cele n evenimente B_i și m din cele n evenimente C_i (k + j + m = n) este egală cu coeficientul lui $x^k y^j z^m$ din polinomul: $(p_1 x + q_1 y + r_1 z)(p_2 x + q_2 y + r_2 z)....(p_n x + q_n y + r_n z)$.

Model "urne-bile":

Avem n urne $U_1, U_2,, U_n$ (bile colorate în culorile c1, c2 și c3); Cunoaștem:

- probabilitățile p_i , $i=\overline{1,n}$, cu care este extrasă o bilă de culoarea c1 din urna U_i ,
- probabilitățile q_i , $i=\overline{1,n}$, cu care este extrasă o bilă de culoarea c2 din urna U_i ,
- probabilitățile r_i , $i=\overline{1,n}$, cu care este extrasă o bilă de culoarea c3 din urna U_i .

Probabilitatea de a extrage k bile culoarea c1, j bile culoarea c2 şi m bile culoarea c3, k+j+m=n, atunci când din fiecare urnă se extrage câte o bilă este egală cu coeficientul lui $x^k y^j z^m$ din polinomul:

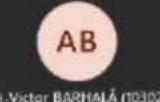
$$(p_1x+q_1y+r_1z)(p_2x+q_2y+r_2z)....(p_nx+q_ny+r_nz)$$







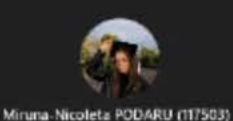
















SCHEMA HIERGEOMETRICĂ

Model "urne-bile":

- urnă U conține a bile albe și b bile negre;
- Se fac n extrageri ($n \le a+b$), fără a se pune bila extrasă înapoi în urnă.

Probabilitatea ca din cele n bile extrase, k să fie albe ($k \le a$) este: $P = \frac{C_a^k \cdot C_b^{n-k}}{C_{a+k}^n}$

SCHEMA HIERGEOMETRICĂ GENERALIZATĂ

Model "urne-bile":

- urnă U conține a_i bile de culoarea c_i , i = 1, m;
- Se fac n extrageri, fără a se pune bila extrasă înapoi în urnă;

Probabilitatea de a obține n_1 bile de culoarea c_1 , n_2 bile de culoarea c_2 ,, n_m bile de culoarea c_m din cele

n extrageri (cu
$$n_1 + n_2 + n_3 + \dots + n_m = n$$
) este:
$$P = \frac{C_{a_1}^{n_1} \cdot C_{a_2}^{n_2} \cdot \dots \cdot C_{a_m}^{n_m}}{C_{a_1 + a_2 + \dots + a_m}^{n_m}}$$



























Se aruncă 2 zaruri de 12 ori. Care este probabilitatea să apară de 4 ori suma 6?

- Numărul de efectuări ale experienței aruncării simultane a două zaruri este n=12, deci avem 12 evenimente independente $A_1, A_2, ..., A_{12}$, care constau fiecare în apariția sumei 6 la o aruncare.
- Se știe că numărul total de cazuri la aruncarea simultană a 2 zaruri este 36 (principiul multiplicării) iar suma 6 are 5 cazuri favorabile, provenite din:

Zar 1	5	1	4	2	3
Zar 2	1	5	2	4	3

$$p = P(A_i) = \frac{5}{36}$$

- Pentru a afla probabilitatea obținerii sumei 6 de 4 ori din 12 aruncări folosim schema lui Bernoulli pentru $n=12, k=4, p=\frac{5}{36}$ \$i $q=1-\frac{5}{36}=\frac{31}{36}$
- Probabilitatea cerută este egală cu coeficientul lui x^4 din dezvoltarea binomului: $\left(\frac{5}{36}x + \frac{31}{36}\right)^2$

Pentru aflarea coeficientului lui x^4 folosim binomul lui Newton: scriem termenul general $T_{k+1} = C_{12}^k \left(\frac{5}{36}x\right)^k \left(\frac{31}{36}\right)^{n-k}$ și pentru k=4 obținem coeficientul lui x^4 egal cu: $C_{12}^4 \left(\frac{5}{36}\right)^4 \left(\frac{31}{36}\right)^8$





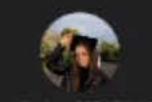


















Un aparat este compus din 5 elemente, fiecare putându-se defecta într-un timp dat cu probabilitatea 0.1. Aparatul funcționează normal dacă nu se defectează mai mult de 2 componente. Care este probabilitatea ca în timpul dat aparatul să funcționeze normal?

Considerăm evenimentele:

Evenimentul A este o reuniune de 3 evenimente incompatibile (A_1, A_2, A_3) , deci

A = "aparatul funcționează normal",

$$P(A) = P(A_1 \cup A_2 \cup A_3) = P(A_1) + P(A_2) + P(A_3)$$

 A_1 = "aparatul are 0 componente defecte",

A, = "aparatul are 1 componentă defectă",

 A_3 = "aparatul are 2 componente defecte".

Probabilitatea evenimentelor A_1, A_2, A_3 se calculează cu ajutorul schemei binomiale (Bernoulli) pentru

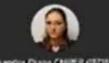
$$n=5$$
, $p=\frac{1}{10}$, $k=0$, $k=1$, $k=2$

$$P(A) = \underbrace{C_5^0 \left(\frac{1}{10}\right)^0 \left(\frac{9}{10}\right)^5}_{P(A_1)} + \underbrace{C_5^1 \left(\frac{1}{10}\right)^1 \left(\frac{9}{10}\right)^4}_{P(A_2)} + \underbrace{C_5^2 \left(\frac{1}{10}\right)^2 \left(\frac{9}{10}\right)^3}_{P(A_3)} = 0.9914$$























Se dau 3 urne: U_1 conține 2 bile albe și 3 negre, U_2 conține 4 bile albe și 1 bilă neagră și U_3 conține 3 bile albe și 2 bile negre. Din fiecare urnă se extrage câte o bilă. Care este probabilitatea ca 2 bile să fie albe și una neagră?

Extragerile din cele 3 urne sunt independente și nu se specifică ordinea de extragere a culorilor bilelor.

Considerăm evenimentul A = "se extrag 2 bile albe din 3 extrageri" și notăm:

 p_i = probabilitatea de a extrage bilă albă din urna U_i , cu i=1,3

 q_i = probabilitatea de a extrage bilă neagră din urna U_i , cu i=1,3

Folosind notațiile de la schema lui Poisson avem n=3 evenimente (extrageri) și k=2 (numărul de realizări cerute pentru A). Probabilitatea cerută este egală cu coeficientul lui x^2 din polinomul:

$$(p_1x+q_1)(p_2x+q_2)(p_3x+q_3) = \left(\frac{2}{5}x+\frac{3}{5}\right)\left(\frac{4}{5}x+\frac{1}{5}\right)\left(\frac{3}{5}x+\frac{2}{5}\right) = \left(\frac{8}{25}x^2+\frac{14}{25}x+\frac{3}{25}\right)\left(\frac{3}{5}x+\frac{2}{5}\right) = \left(\frac{8}{25}x^2+\frac{14}{25}x+\frac{3}{25}\right) = \left(\frac{8}{25}x^2+\frac{14}{25}x+\frac{3}$$

Coeficientul lui x^2 este: $\frac{16}{125} + \frac{42}{125} = \frac{58}{125} \implies P(A) = \frac{58}{125} = 0.464$























Variantă de rezolvare (fără schemă de probabilitate):

Considerăm cazurile favorabile pentru evenimentul B = "se extrag două bile albe și una neagră".

Extragerile din cele 3 urne sunt independente și nu se specifică ordinea de extragere a culorilor bilelor (dar vom presupune că extragerile au loc în ordinea $U_1-U_2-U_3$) și considerăm că evenimentul B este format din reuniunea evenimentelor:

- $B_1 = alb\Breve{a} alb\Breve{a} neagr\Breve{a}$
- $B_2 = albă neagră albă$
- B₃ = neagră albă– albă

Evenimentele B_1 , B_2 , B_3 sunt incompatibile, deci probabilitatea evenimentului B este:

$$P(B) = P(B_1 \cup B_2 \cup B_3) = P(B_1) + P(B_2) + P(B_3) =$$

$$= \frac{2 \cdot 4 \cdot 2}{5 \cdot 5} + \frac{2 \cdot 1 \cdot 3}{5 \cdot 5} + \frac{3 \cdot 4 \cdot 3}{5 \cdot 5} = \frac{58}{125} = 0.464$$

























La o tombolă sunt 400 de bilete din care 4 câștigătoare. O persoană cumpără 10 bilete. Care este probabilitatea să nu aibă nici un bilet câștigător?

Notăm cu "a" numărul biletelor câștigătoare ("bilele albe") și cu "b" numărul biletelor necâștigătoare ("bilele negre").

$$a = 4$$

$$b = 396$$

n=10 (numărul de bilete cumpărate de persoana respectivă, echivalentul "extragerilor din urnă").

Ni se cere probabilitatea ca toate cele 10 bilete să fie necâștigătoare (să fie "bile negre"), adică k=0, n-k=10și aplicând schema hipergeometrică obținem:

$$P = \frac{C_4^0 \cdot C_{396}^{10}}{C_{400}^{10}} = 0.903$$

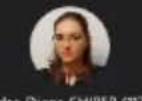
























În două urne se găsesc bile diferit colorate, astfel: în urna $U_{
m 1}$ avem 5 albe, 11 negre, 8 roșii iar în urna U_2 avem 10 albe, 8 negre, 6 roșii. Din fiecare urnă se extrage la întâmplare câte o bilă. Care este probabilitatea ca ambele bile să fie de aceeași culoare?

Extragerile din cele 2 urne sunt independente.

Considerăm evenimentul A = "se extrag 2 bile de aceeași culoare" , format din reuniunea evenimentelor:

- $A_1 = 2$ albe, 0 negre, 0 roșii (din U_1 și din U_2)
- $A_2 = 0$ albe, 2 negre, 0 roșii (din U_1 și din U_2)
- $A_3 = 0$ albe, 0 negre, 2 roșii (din U_1 și din U_2)

Pentru fiecare dintre evenimentele A_1 , A_2 , A_3 folosim schema lui Poisson "cu 3 culori": avem n = 2 urne (extrageri) și notăm:

 p_i = probabilitatea de a extrage bilă albă din urna U_i , cu i=1,2;

 q_i = probabilitatea de a extrage bilă neagră din urna U_i , cu i=1,2;

 r_i = probabilitatea de a extrage bilă roșie din urna U_i , cu i=1,2;

k = numărul de bile albe extrase;

j = numărul de bile negre extrase;

m = numărul de bile roșii extrase.

























Considerăm polinomul:

$$(p_1x + q_1y + r_1z)(p_2x + q_2y + r_2z) = \left(\frac{5}{24}x + \frac{11}{24}y + \frac{8}{24}z\right)\left(\frac{10}{24}x + \frac{8}{24}y + \frac{6}{24}z\right)$$

$$P(A_1)$$
 = coeficientul lui $x^2y^0z^0$ din polinomul de mai sus, deci $P(A_1) = \frac{50}{24^2}$;

$$P(A_2)$$
 = coeficientul lui $x^0y^2z^0$ din polinomul de mai sus, deci $P(A_2) = \frac{88}{24^2}$;

$$P(A_3)$$
 = coeficientul lui $x^0y^0z^2$ din polinomul de mai sus, deci $P(A_3) = \frac{48}{24^2}$;

Evenimentele A_1 , A_2 , A_3 sunt incompatibile, deci probabilitatea evenimentului A este:

$$P(A) = P(A_1 \cup A_2 \cup A_3) = P(A_1) + P(A_2) + P(A_3) = \frac{50 + 88 + 48}{576} = \frac{186}{576} = 0.323$$



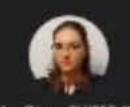
























Se aruncă un zar de 5 ori. Care este probabilitatea ca exact de două ori să apară fața cu un punct și exact de două ori să apară faţa cu două puncte?

Numărul de efectuări ale experienței aruncării zarului este n=5. Definim sistemul complet de evenimente:

$$A_1$$
 = "apare fața cu un punct", n_1 = 2;

$$A_2$$
 = "apare fața cu două puncte", n_2 = 2;

 A_3 = "apare orice față mai puțin cea cu un punct și cea cu două puncte", $n_3 = 1$.

La o singură efectuare a experienței avem: $P(A_1) = p_1 = \frac{1}{6}$ $P(A_2) = p_2 = \frac{1}{6}$

$$P(A_3) = 1 - (P(A_1) + P(A_2)) = p_3 = \frac{2}{3}$$

Suntem în condițiile schemei lui Bernoulli cu mai multe stări (schema multinomială) iar probabilitatea cerută este:

$$P = \frac{5!}{2! \cdot 2! \cdot 1!} \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^2 \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^2 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^1 = \frac{5}{324} = 0.015$$







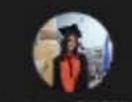




















O urnă conține 7 bile albe, 7 bile negre și 6 verzi. Se extrag 9 bile. Care este probabilitatea să obținem câte 3 bile din fiecare culoare?

Facem următoarele notații:

$$a_1$$
 =7 (numărul bilelor albe),
 a_2 =7 (numărul bilelor negre),

$$a_3$$
 =6 (numărul bilelor verzi).

- Numărul extragerilor este n = 9, cu $n_1 = 3$, $n_2 = 3$ și $n_3 = 3$.
- Aplicăm schema hipergeometrică generalizată și obținem:

$$P(3a,3n,3v) = \frac{C_7^3 \cdot C_7^3 \cdot C_6^3}{C_{20}^9} = 0.145$$

























Se dau 3 urne: U_1 conține 1 bilă albă, 2 bile negre și 3 bile roșii, U_2 conține 2 bile albe, 3 bile negre și 1 bilă roșie și U_3 conține 4 bile albe, 5 bile negre și 3 bile roșii.

- a) Extrag o bilă dintr-o urnă; Care este probabilitatea ca bila extrasă să fie albă?
- b) Extrag o bilă dintr-o urnă; Dacă bila extrasă este albă, care este probabilitatea ca ea să provină din urna U_3 ?
- c) Extrag 2 bile dintr-o urnă; Care este probabilitatea ca bilele să provină din urna $U_{\scriptscriptstyle 2}$, dacă una este albă și una este roșie?

Considerăm evenimentele:

 A_i = "extrag bilă din urna U_i ", $i = \overline{1,3}$. Aceste evenimente formează un sistem complet de evenimente și sunt echiprobabile (pentru că nu s-a specificat o probabilitate diferită de extragere în funcție de urnă), deci $P(A_i) = \frac{1}{3}$

B ="bila extrasă este albă";

C ="o bilă extrasă este albă și cealaltă roșie".

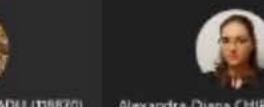
























Avem de calculat probabilitatea evenimentului B condiționat de A_i . Folosim formula probabilității totale:

$$P(B) = P(A_1) \cdot P_{A_1}(B) + P(A_2) \cdot P_{A_2}(B) + P(A_3) \cdot P_{A_3}(B) = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{6} + \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{6} + \frac{1}{3} \cdot \frac{4}{12} = \frac{1}{3} \cdot \frac{5}{6} = \frac{5}{18} = 0.277$$

Folosim formula lui Bayes (se cere "probabilitatea cauzei" sau "a locului"):

$$P_{B}(A_{3}) = \frac{P(B \cap A_{3})}{P(B)} = \frac{P(A_{3}) \cdot P_{A_{3}}(B)}{P(B)} = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{18}{5} = \frac{2}{5} = 0.4$$

c) Folosim formula lui Bayes:

$$P_{C}(A_{2}) = \frac{P(C \cap A_{2})}{P(C)} = \frac{P(A_{2}) \cdot P_{A_{2}}(C)}{P(C)} \tag{1}$$

- Calculăm pe rând probabilitățile care apar în formula lui Bayes:
 - ullet Pentru P(C) folosim formula probabilității totale pentru că extragerea celor două bile de culori specificate poate să fie făcută din oricare dintre urnele $U_{\scriptscriptstyle 1}$, $U_{\scriptscriptstyle 2}$ sau $U_{\scriptscriptstyle 3}$:

$$P(C) = P(A_1) \cdot P_{A_1}(C) + P(A_2) \cdot P_{A_2}(C) + P(A_3) \cdot P_{A_3}(C)$$
 (2)























Pentru a calcula probabilitățile de forma $P_{A_i}(C)$, $i=\overline{1,3}$ vom folosi schema hipergeometrică generalizată. Cu notațiile specifice acestei scheme, avem:

n=2 (numărul de extrageri), $n_1=1$ (bile de culoare albă), $n_2=0$ (bile de culoare neagră), $n_3=1$ (bile de culoare roșie).

Diferă, în funcție de urnă, structura culorilor bilelor (a_1 = număr bile albe, a_2 = număr bile negre și a_3 = număr bile roșii).

• Pentru probabilitatea extragerii celor două bile din urna U_1 , $P_{A_1}(C)$ avem $a_1 = 1$, $a_2 = 2$ și $a_3 = 3$ și din formula schemei hipergeometrice generalizate avem:

$$P_{A_1}(C) = \frac{C_1^1 \cdot C_2^0 \cdot C_3^1}{C_6^2} = \frac{3 \cdot 4! \cdot 2}{6!} = \frac{1}{5}$$

Pentru probabilitatea extragerii celor două bile din urna U_2 , $P_{A_2}(C)$ avem $a_1=2$, $a_2=3$ și $a_3=1$ și din formula schemei hipergeometrice generalizate avem:

$$P_{A_2}(C) = \frac{C_2^1 \cdot C_3^0 \cdot C_1^1}{C_6^2} = \frac{2 \cdot 4! \cdot 2}{6!} = \frac{2}{15}$$























Pentru probabilitatea extragerii celor două bile din urna U_3 , $P_{A_3}(C)$ avem $a_1=4$, $a_2=5$ și $a_3=3$ și din formula schemei hipergeometrice generalizate avem:

$$P_{A_2}(C) = \frac{C_4^1 \cdot C_5^0 \cdot C_3^1}{C_{12}^2} = \frac{4 \cdot 3 \cdot 10! \cdot 2}{12!} = \frac{2}{11}$$

Înlocuim în (2) și calculăm:

$$P(C) = \frac{1}{3} \left(\frac{1}{5} + \frac{2}{15} + \frac{2}{11} \right) = \frac{17}{99} = 0.17$$

Înlocuim în (1) şi obţinem:

$$P_{C}(A_{2}) = \frac{P(A_{2}) \cdot P_{A_{2}}(C)}{P(C)} = \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{15} \cdot \frac{99}{17} = \frac{22}{85} = 0.258$$





















