Mihai Andrei - Alexandru
grupa 121

Examen SAI

1) $a=5$ (Mihai)
$b=9$ (Alexandru)

2) Determinați numărul de permutări de ordin ~~a~~ a din grupul de permutări S_{a+b}
- numărul de permutări de ordin 5 din S_{14}

~~dacă $(a\cdot b+1)!$ $(a+b)!$ $\Rightarrow \exists$ permutări de~~

dacă $a \mid (a+b)! \Rightarrow \exists$ permutări de ordin 5 in S_{14}

$5 \mid 14!$; adevarat

Mihai Andrei-Alexandru
grupa 141

3) Se consideră permutarea $\sigma = (1, \dots 5)(6, \dots 14)(15, \dots \dots 28)$ un produs de 3 cicli disjuncți de lungime 5, 9, respectiv 14, din S_{28}. Determinați toate permutările $\tau \in S_{28}$ astfel încât $\tau^3 = \sigma$

Mihai Andrei-Alexandru
grupa 141

4) Calculați $5^{11^{9^{11}}}$ (mod 41)

~~$(5, 41) = 1 \Rightarrow 5^{10} \equiv 1 \pmod{29}$~~

~~$(5, 41) = 1 \Rightarrow 5^{\varphi(41)}$~~ $\Rightarrow 5^{10} \equiv 1 \pmod{41}$

~~$(75, 41) = 1 \Rightarrow$~~

$(5, 41) = 1 \overset{\text{T. Euler}}{\Rightarrow} 5^{10} \equiv 1 \pmod{41}$

Este suficient să calculez $11^{9^{11}} \pmod{10}$

- Îl scriu pe 10 ca produs de 2 numere prime între ele, astfel: $10 = 5 \cdot 8$

$11^{9^{11}}$

Mihai Andrei-Alexandru
grupa 151

5) Se consideră mulțimea de numere naturale $A = \{x, \dots 12\}$ unde x este numărul natural egal cu minimul dintre 5, 9 ($x=5$). Determinați o relație de echivalență ρ pe A a.î. mulțimea factor A/ρ să aibă exact 4 clase de echivalență diferite iar clasa de echivalență a lui a să conțină doar numerele ~~a și b~~. 5 și 9.

$A = \{5, 6, \dots, 12\}$

$\hat{a} = \{b \in A \mid a \rho b\}$

$A/\rho = \{\hat{a} \mid a \in A\}$ $\qquad |A/\rho| = 4$

6. Determinați numărul elementelor de ordin 9 din grupul produs direct $(\mathbb{Z}_{3^5},+)$ $(\mathbb{Z}_{3^9},+)$

Mihai Andrei-Alexandru grupa 121

Considerăm $(\hat{a},\bar{b}) \in (\mathbb{Z}_{243},+) \times (\mathbb{Z}_{19683},+)$

$$ord((\hat{a},\bar{b})) = \cancel{[ord(ord}\ [ord(\hat{a}), ord(\bar{b})] = 9$$

$\Rightarrow \begin{cases} ord(\hat{a}) \mid 9 \\ ord(\bar{b}) \mid 9 \end{cases}$

$\Rightarrow ord(\hat{a}) = \{1,3,9\}$; $ord(\bar{b}) = \{1,3,9\}$

$\hat{a} \in \mathbb{Z}_{243} \Rightarrow ord(\hat{a}) = \dfrac{243}{(243,a)}$

$ord(\hat{a}) = 1 \Rightarrow 243 = (243,a) \Rightarrow \hat{a} = 243 = \hat{0}$

$ord(\hat{a}) = 3 \Rightarrow 243 = 3\cdot(243,a) \Rightarrow \hat{a} = \hat{81} \in \mathbb{Z}_{243}$

$ord(\hat{a}) = 9 \Rightarrow 243 = 9\cdot(243,a) \Rightarrow \hat{a} = \hat{27} \in \mathbb{Z}_{243}$

$(ord(\hat{a}), ord(\bar{b})) \in \{(1,3), (1,9), (3,1) (3,9) (9,1), (9,3)\}$

$\hat{a} \in \{\hat{0}, \hat{81}, \hat{27}\}$

~~ord~~ $b \in \mathbb{Z}_{19683} \Rightarrow$ ~~ord~~ $ord(\bar{b}) = \dfrac{19683}{(19683,b)}$

$ord(\bar{b}) = 1 \Rightarrow 19683 = (19683,b) \Rightarrow \bar{b} = \overline{19683} = \bar{0}$

$ord(\bar{b}) = 3 \Rightarrow 19683 = 3(19683,b) \Rightarrow \bar{b} = \overline{6561} \in \mathbb{Z}_{19683}$

$ord(\bar{b}) = 9 \Rightarrow 19683 = 9(19683,b) \Rightarrow \bar{b} = \overline{2187} \in \mathbb{Z}_{19683}$

$\bar{b} \in \{\bar{0}, \cancel{\overline{19683}}, \overline{6561}, \overline{2187}\}$

Mihai Andrei-Alex.
grupa 141

$(\hat{a}, \bar{b}) \in \{(\hat{0}, \overline{6561}), \cancel{(\overline{2187}, \hat{27}, \overline{2187})}$
$, (\hat{27}, \overline{2187}), (\hat{81}, \overline{6561}), (\hat{27}, \bar{0}\}$

$\Rightarrow$ 15 elemente.

Mihai Andrei-Alexandru
grupa 141.

7) Dați câte un exemplu, dacă există, sau justificați de ce în caz contrar, de:

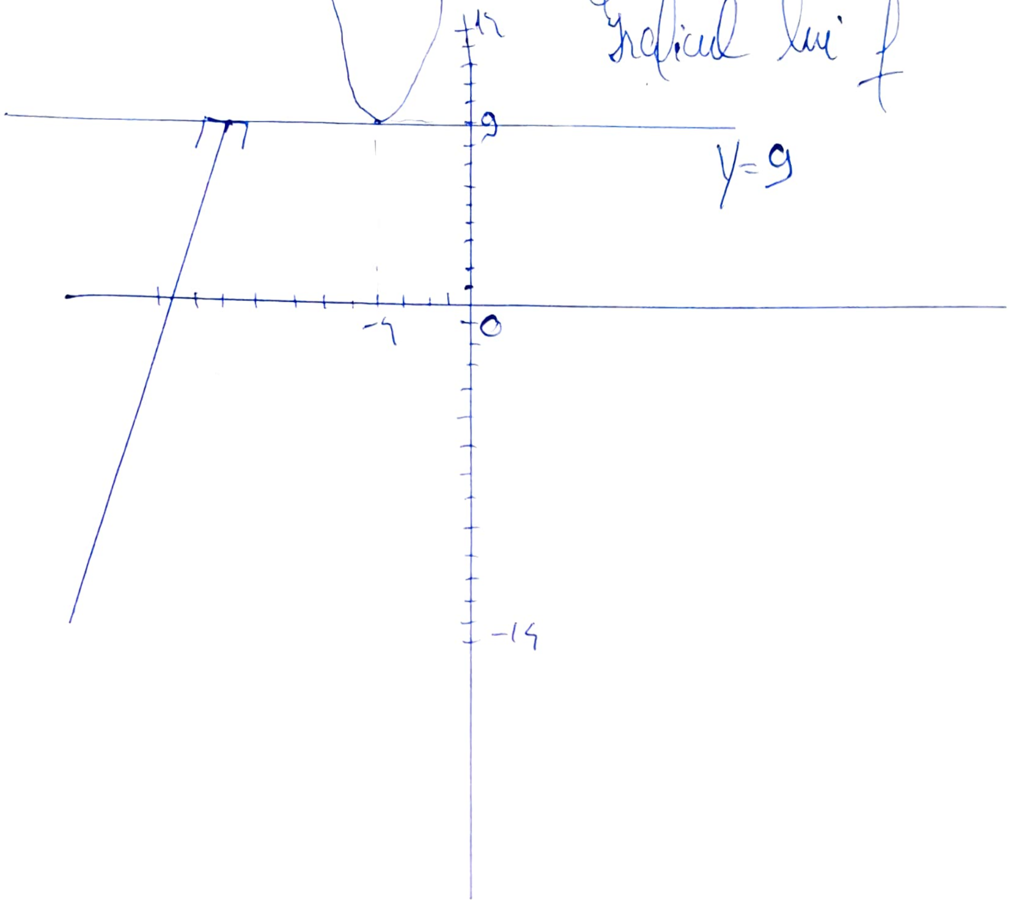
- Funcție injectivă, care nu este surjectivă; $f_{5,9} : (-\infty; \frac{5}{9}) \to (\frac{9}{5}, +\infty)$
- Funcție surjectivă, care nu este injectivă; $g_{5,9} : [\frac{5}{9}, +\infty) \to (-\infty; \frac{9}{5})$
- Funcție bijectivă; $h_{5,9} : (5, 14] \to \mathbb{N}$

Mihai Andrei-Alexandru
grupa 141

8) $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=\begin{cases}5x+54 & ; x<-9\\ 5x^2+40x+89 & ; x\geq -9\end{cases}$

Decideți dacă f este injectivă, surjectivă, bijectivă
Calculați : $f^{-1}[-14, 14]$

Graficul lui f



Conform graficului funcției f : • $\operatorname{Im}(f)=\mathbb{R}$, care coincide cu codomeniul funcției $\Rightarrow$ f surjectivă (1)
• Orice paralelă dusă la axa Ox intersectează Gf în maxim un punct $\Rightarrow$ f injectivă (2)

(1) + (2) $\Rightarrow$ f este bijectivă

~~$f^{-1}([-14, 14]) = f^{-1}([-14 \cup 9$~~ $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ ~~$f^{-1}([-14, +9) \cup [+9, 14])$~~

Mihai Andrei-Alex
grupa 1x

$f^{-1}([-15,15]) = f^{-1}([-15,9) \cup [9,15])$
$\Rightarrow f^{-1}([-15,9)) \cup f^{-1}([9,15])$
$\Rightarrow (-11,-9] \cup [-1,1] \Rightarrow (-11,1]$

9) Considerăm inele produs direct $R = \mathbb{Z}[x] \times \mathbb{Z}[x]$ și $S = \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$. Definim funcția $\phi : R \mapsto S$ astfel: $\phi(f(x), g(x)) = (f(a), g(b))$. Să se arate că ϕ este morfism de inele. Determinați $\ker(\phi)$, nucleul ~~fun~~ morfismului ϕ

10) Determinați toate numerele întregi x care au proprietatea că $x \equiv 5 \pmod{19}$; $x \equiv 6 \pmod{20}$; $x \equiv 7 \pmod{21}$

$x \equiv 5 \pmod{19} \Rightarrow a_1 = 5$; $n_1 = 19$
$x \equiv 6 \pmod{20} \Rightarrow a_2 = 6$; $n_2 = 20$
$x \equiv 7 \pmod{21} \Rightarrow a_3 = 7$; $n_3 = 21$
$(5,6) = (6,7) = (7,5) = 1$

$N = n_1 \cdot n_2 \cdot n_3 \Rightarrow 19 \cdot 20 \cdot 21 = 7980$

$N_1 = \frac{N}{n_1} \Rightarrow 20 \cdot 21$

$N_2 = \frac{N}{n_2} = 19 \cdot 21$

$N_3 = \frac{N}{n_3} = 19 \cdot 20$

Mihai Andrei Alexandru
grupa 151

$N_1 \cdot X_1 \equiv 1 \pmod{m_1} \Leftrightarrow 420 X_1 \equiv 1 \pmod{19}$

$\Rightarrow 2X_1 \equiv 1 \pmod{19}$

$\Rightarrow X_1 \equiv 1 \pmod{19}$

$N_2 \cdot X_2 \equiv 1 \pmod{m_2} \Leftrightarrow 399 X_2 \equiv 1 \pmod{20}$

$\Rightarrow 19 X_2 \equiv 1 \pmod{19}$

$\Rightarrow X_2 \equiv 0 \pmod{19}$

$N_3 \cdot X_3 \equiv \cancel{1(\text{mo}} \; 1 \pmod{m_3} \Leftrightarrow 380 X_3 \equiv 1 \pmod{21}$

$\Leftrightarrow 2X_3 \equiv 1 \pmod{21}$

$\Leftrightarrow X_3 \equiv 1 \pmod{21}$

~~soluția este unică modulo N=7980 este x mod~~

$X = a_1 \cdot N_1 \cdot X_1 + a_2 N_2 X_2 + a_3 N_3 X_3$

~~$\Rightarrow 1 \cdot 20 \cdot 21 \cdot$~~

$\Rightarrow 5 \cdot 20 \cdot 21 \cdot 1 + 6 \cdot 19 \cdot 21 \cdot 0 + 7 \cdot 19 \cdot 20 \cdot 1 = 4760$

$4760 \pmod{7980} = 4760$

~~$S = \{4760 + NK, K \in \mathbb{Z}\}$~~

$S = \{4760 + N \cdot K ; K \in \mathbb{N}\}$