TEORIE EXAMEN - SERIA AA
Lect. Dr. Costache Luminita

$$P(A/B) = P_B(A) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

$$P(A) = \sum_{i \in I} P(A/B_i)P(B_i) \text{(formula probabilităţii totale)}$$

$$P(B_i/A) = \frac{P(A/B_i)P(B_i)}{\sum_{j \in I} P(A/B_j)P(B_j)} \text{(formula lui Bayes)}$$

$$P_n(k) = C_n^k \cdot p^k \cdot q^{n-k}, k = \overline{0,n}, \text{ unde } q = 1 - p \text{(schema binomială)}$$

$$p = \frac{C_a^x \cdot C_b^{n-x}}{C_N^n} \text{(schema hipergeometrică)}$$

$$P_n(k_1, \ldots, k_r) = \frac{n!}{k_1! \ldots k_r!} \cdot p_1^{k_1} \cdot \ldots p_r^{k_r} \text{(schema polinomială)}$$

Repartiţia binomială $Bi(n,p)$: $P(X = k) = C_n^k p^k q^{n-k}, k = \overline{0,n}$
Repartiţia Poisson de parametru $\lambda > 0$: $P(X = k) = \frac{\lambda^k}{k!} \cdot e^{-\lambda}, k \in \mathbb{N}$
Repartiţia hipergeometrică : $P(X = k) = \frac{C_M^k C_{N-M}^{n-k}}{C_N^n}$
Funcţia de repartiţie: $F_X : \mathbb{R} \to [0,1], F_X(x) := P(X < x)$
Dacă $X : \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \ldots & x_n \\ p_1 & p_2 & \ldots & p_n \end{pmatrix}$, atunci $F_X(x) = \sum_{x_i < x} P(X = x_i)$
Proprietăţile funcţiei de repartiţie:

1. Fie X o v.a. şi $F_X(x)$ funcţia ei de repartiţie. Atunci

$$P(x_1 \leq X < x_2) = F_X(x_2) - F_X(x_1), \ \forall x_1, x_2 \in \mathbb{R}.$$

2. Dacă $x_1 < x_2$, atunci $F_X(x_1) \leq F_X(x_2), \forall x_1, x_2 \in R$.

3. Orice funcţie de repartiţie F_X este continuă la stânga :

$$F_X(x - 0) = F_X(x).$$

4. $\lim_{x \to \infty} F_X(x) = 1; \lim_{x \to -\infty} F_X(x) = 0$

Densitatea de probabilitate : $F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} f(u)du, \forall x \in \mathbb{R}$
Proprietăţile densităţii de probabilitate:

1. $f(x) \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}$

2. $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1$

Repartiţia uniformă : $X \sim U[a,b]$,

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a}, & a \le x \le b \\ 0, & \text{în rest} \end{cases}$$

Repartiţia exponenţială de parametru $\lambda > 0$: $X \sim \mathrm{Exp}(\lambda)$,

$$f(x) = \begin{cases} \lambda \mathrm{e}^{-\lambda x}, & x > 0 \\ 0, & x \le 0 \end{cases}$$

Repartiţia normală : $X \sim N(m,\sigma)$, $f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \cdot \mathrm{e}^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}}$.
Dacă $X \sim N(m,\sigma)$, atunci $P(a \le X \le b) = \Phi\left(\frac{b-m}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{a-m}{\sigma}\right)$
Funcţia de repartiţie a vectorului aleator (X,Y):
$F_{(X,Y)}(x,y) := P(X < x, Y < y)$
Funcţii de repartiţie marginale ale vectorului aleator (X,Y):
$F_X(x) = \lim\limits_{y\to\infty} F(x,y)$; $F_Y(y) = \lim\limits_{x\to\infty} F(x,y)$
Densitatea de probabilitate : $F_{(X,Y)}(x,y) = \int_{-\infty}^{x}\int_{-\infty}^{y} f(u,v)dudv$
$f(x,y) \ge 0$ şi $\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(u,v)dudv = 1$.
$f(x,y) = \frac{\partial^2 F_{(X,Y)}(x,y)}{\partial x \partial y}$
$P((X,Y) \in D) = \int\int_D f(x,y)dxdy$
Densităţi de probabilitate marginale: $f_X(x) = F'_X(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)dy$,
$f_Y(y) = F'_Y(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)dx$
Densităţi de probabilitate condiţionate:
$f(x/y) = \frac{f(x,y)}{f_Y(y)}$, $f(y/x) = \frac{f(x,y)}{f_X(x)}$
Dacă $x = \varphi_1(u,v), y = \psi_1(u,v)$, atunci $f_{(U,V)}(u,v) = \left|\frac{D(x,y)}{D(u,v)}\right| \cdot f_{(X,Y)}(\varphi_1(u,v), \psi_1(u,v))$

Media variabilei aleatoare discrete X: $E(X) = \sum\limits_{i=1}^{n} x_i p_i$

Dacă X este o v.a. continuă cu densitatea f, atunci $E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x)dx$

Dacă $X : \begin{pmatrix} x_i \\ p_i \end{pmatrix}$, $i \in I$, atunci $E(\varphi(X)) = \sum\limits_{i\in I} \varphi(x_i)p_i$.

Dacă f este densitatea de probabilitate a v.a. X, atunci

$$E(\varphi(X)) = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x)f(x)dx.$$

Dacă (X,Y) este un vector aleator şi $Z = \varphi(X,Y)$, atunci

$$E(\varphi(X,Y)) = \sum_i\sum_j \varphi(x_i,y_j)p_{ij}, \text{unde } p_{ij} = P(X = x_i, Y = y_j)$$

Dacă f este densitatea vectorului (X,Y),

$$E(\varphi(X,Y)) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x,y)f(x,y)dxdy,$$

Valori medii condiţionate : $E(X/Y=y)=\int_{-\infty}^{\infty} xf(x/y)dx$,
$E(Y/X=x)=\int_{-\infty}^{\infty} yf(y/x)dy$
Dispersia: $D^2(X)=E(X^2)-(E(X))^2$
Momentul iniţial de ordinul k: $m_k=E(X^k)$
Momentul absolut de ordinul k : $m'_k=E(|X|^k)$
Momentul centrat de ordinul k : $\mu_k=E((X-E(X))^k)$
Momentul centrat absolut de ordinul k : $E(|X-E(X)|^k)$.
Covarianţa : $\mathrm{cov}(X,Y)=E(XY)-E(X)E(Y)$
Coeficientul de corelaţie : $\rho(X,Y)=\frac{\mathrm{cov}(X,Y)}{\sqrt{D^2(X)D^2(Y)}}$

$$D^2(X+Y)=D^2(X)+D^2(Y)+2\mathrm{cov}(X,Y)$$

Inegalitatea lui Cebâşev: $P(|X-E(X)|\geq\varepsilon)\leq\frac{D^2(X)}{\varepsilon^2}$ sau
$P(|X-E(X)|<\varepsilon)\geq 1-\frac{D^2(X)}{\varepsilon^2}$

Teorema lui Bernoulli: Fie ν_n numărul de realizări ale unui eveniment A în n experimente independente şi p probabilitatea de realizare a lui A în fiecare experiment. Atunci pentru $\forall\varepsilon>0, P(|\frac{\nu_n}{n}-p|<\varepsilon)=1$

Corolarul 1. *Pentru* $\forall\varepsilon>0$ *avem* $\lim\limits_{n\to\infty} P(|f_n-p|<\varepsilon)\geq 1-\dfrac{pq}{n\varepsilon^2}$, *unde* $f_n=\frac{\nu_n}{n}$, ν_n*=de câte ori s-a realizat evenimentul* A *în* n *probe independente.*

Teorema limită centrală : Fie $(X_n)_n$ un şir de v.a. independente, identic repartizate. Presupunem că $E(X_i)=m, D^2(X_i)=\sigma^2, i=\overline{1,n}$ există şi notăm $Z_n=\frac{Y_n-E(Y_n)}{\sqrt{D^2(Y_n)}}$, unde $Y_n=\sum\limits_{i=1}^{n} X_i$. Atunci $\forall x\in\mathbb{R}, \lim\limits_{n\to\infty} F_n(x)=\lim\limits_{n\to\infty} P(Z_n<x)=\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\displaystyle\int_{-\infty}^{x} \mathrm{e}^{-\frac{u^2}{2}}du$, adică şirul $(Z_n)_n$ converge în repartiţie către o v.a. $Z\sim N(0,1)$.

Teorema integrală a lui Moivre-Laplace: Fie un şir de experimente independente astfel încât în fiecare experiment probabilitatea de realizare a unui eveniment A este p. Dacă ν_n este numărul de apariţii ale lui A în primele n experimente, atunci

$$\forall x\in\mathbb{R}, \lim_{n\to\infty} P\left(\frac{\nu_n-np}{\sqrt{npq}}<x\right)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{x}\mathrm{e}^{-\frac{u^2}{2}}du=\Phi(x)$$

sau

$$\forall x_1,x_2\in\mathbb{R}, \lim_{n\to\infty} P\left(x_1<\frac{\nu_n-np}{\sqrt{npq}}<x_2\right)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{x_1}^{x_2}\mathrm{e}^{-\frac{u^2}{2}}du$$

Lanţuri Markov:

Notând $p_{ij}(n)=P(X_n=j/X_0=i)$, probabilitatea de a trece după n paşi din starea i în starea j, se obţine **matricea de trecere după** n **paşi** $P(n)=(p_{ij}(n))_{i,j}$ care verifică relaţia $P(n)=P^n$.

Repartiţia v. a. $X_n \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots N \\ p_1(n) & p_2(n) & \dots p_N(n) \end{pmatrix}$ este definită de **vectorul de probabilitate** $p(n) = (p_1(n), p_2(n), \dots, p_N(n))$, unde
$p(n) = p(0)P^n$

Un lanţ Markov cu matricea de trecere P este **ergodic** dacă $\lim_{n\to\infty} P^n = \Pi$, unde Π este o matrice stochastică , având toate liniile egale cu un anumit vector de probabilitate $\sigma = (\sigma_1\sigma_2 \dots \sigma_n)$ numit **repartiţia staţionară** a procesului.

Criteriu de ergodicitate Dacă $\exists n > 0$ astfel încât matricea P^n să aibă toate elementele strict pozitive, atunci lanţul este ergodic.

Găsirea repartiţiei staţionare Fie P matricea de trecere a unui lanţ Markov ergodic. Atunci distribuţia limită este unicul vector de probabilitate σ satisfăcând ecuaţia vectorială $\sigma P = \sigma$.