SCHEME CLASICE DE PROBABILITATE

Schemele clasice de probabilitate sunt modele matematice cu ajutorul cărora determinăm probabilitatea de realizare a unui eveniment, în anumite situații particulare.

În cele ce urmează vom considera un câmp finit de probabilitate $\{\Omega, K, P\}$.

1 ***SCHEMA LUI BERNOULLI (schema binomială)***

Fie $A_1, A_2, ..., A_n$ *un sistem complet de evenimente independente echiprobabile cu* $P(A_i) = p_i = p$.

Probabilitatea să se realizeze k *din cele* n *evenimente (şi să nu se realizeze* $n-k$*) este egală cu coeficientul lui* x^k *din polinomul* $(px+q)^n$*, adică este egală cu* $C_n^k \cdot p^k \cdot q^{n-k}$ *(unde* $q = 1 - p$*).*

Model "urne-bile":

- *O urnă* U *(bile albe și negre);*
- *Se fac* n *extrageri, <u>cu revenire</u> (repunerea în urnă a bilei, după fiecare extragere);*
- *Probabilitatea de a extrage o bilă albă este* p *(și probabilitatea de a extrage una neagră este* $q = 1 - p$*);*

Probabilitatea de a extrage exact k *bile albe din* n *extrageri este egală cu coeficientul lui* x^k *din polinomul:*

$(px+q)^n$*, adică este egală cu* $C_n^k \cdot p^k \cdot q^{n-k}$.

2 *SCHEMA LUI BERNOULLI CU MAI MULTE STĂRI (schema multinomială)*

Fie $A_1, A_2, ..., A_m$ un sistem complet de evenimente, cu probabilitățile de realizare $P(A_i) = p_i$, (evenimentele A_i NU sunt echiprobabile). Probabilitatea ca din cele n efectuări ale unei experiențe să se realizeze de n_1 ori evenimentul A_1, de n_2 ori evenimentul A_2, ..., de n_m ori evenimentul A_m (unde $n_1 + n_2 + ... + n_m = n$) este:

$$\frac{n!}{n_1! \cdot n_2! \cdot ..... \cdot n_m!} \cdot p_1^{n_1} \cdot p_2^{n_2} \cdot ..... \cdot p_m^{n_m}$$

La schemele Bernoulli, putem considera n urne identice $U_1, U_2, ...U_n$ din care se face câte o extragere (urnele conțin acelaşi număr de bile albe şi respectiv acelaşi număr de bile negre) sau o aceeași experiență aleatoare (de exemplu aruncarea zarului) care se efectuează de "n" ori.

Model "urne-bile":

- *O urnă U conţine bile de m culori, $c_1, c_2, ..., c_m$;*
- *Se fac n extrageri, cu revenire (repunerea în urnă a bilei, după fiecare extragere);*
- *p_i este probabilitatea ca la o extragere să obţinem o bilă de culoarea c_i.*

Probabilitatea ca în n extrageri să obţinem n_1 bile de culoarea c_1, n_2 bile de culoarea c_2, ..., n_m bile de culoarea c_m (unde $n_1 + n_2 + ... + n_m = n$) este: $\frac{n!}{n_1! \cdot n_2! \cdot ..... \cdot n_m!} \cdot p_1^{n_1} \cdot p_2^{n_2} \cdot ..... \cdot p_m^{n_m}$

3 SCHEMA LUI POISSON (schema binomială generalizată)

Fie $A_1, A_2, ..., A_n$ *un sistem complet de evenimente independente cu* $P(A_i) = p_i$ *(şi respectiv* $q_i = 1 - p_i$*, cu* $i = \overline{1,n}$ *adică evenimentele* A_i *NU sunt echiprobabile). Probabilitatea să se realizeze* k *din cele* n *evenimente (şi să nu se realizeze* $n-k$ *) este egală cu coeficientul lui* x^k *din polinomul:*

$$(p_1 x + q_1)(p_2 x + q_2)...(p_n x + q_n)$$

Model "urne-bile":

- *Avem* n *urne* $U_1, U_2, ...U_n$ *(bile albe şi negre în proporţii date, cunoscute);*
- *Se fac* n *extrageri, din fiecare urnă câte o bilă;*
- p_i *este probabilitatea cu care este extrasă o bilă albă din urna* U_i.

Probabilitatea de a extrage k *bile albe din* n *extrageri este egală cu coeficientul lui* x^k *din polinomul:*

$$(p_1 x + q_1)(p_2 x + q_2)...(p_n x + q_n).$$

4 SCHEMA LUI POISSON ”CU TREI CULORI”

Considerăm $A_1, A_2, \ldots, A_n$ *evenimente independente cu* $P(A_i) = p_i$ *,* $B_1, B_2, \ldots, B_n$ *independente cu* $P(B_i) = q_i$ *și* $C_1, C_2, \ldots, C_n$ *independente cu* $P(C_i) = r_i$*,* $i = \overline{1,n}$*. Probabilitatea să se realizeze* k *din cele* n *evenimente* A_i *,* j *din cele* n *evenimente* B_i *și* m *din cele* n *evenimente* C_i *(*$k + j + m = n$*) este egală cu coeficientul lui* $x^k y^j z^m$ *din polinomul:* $(p_1x + q_1y + r_1z)(p_2x + q_2y + r_2z)\ldots(p_nx + q_ny + r_nz)$.

Model ”urne-bile”:

Avem n *urne* $U_1, U_2, \ldots U_n$ *(bile colorate în culorile* $c1$*,* $c2$ *şi* $c3$*);*

Cunoaștem:

- *probabilităţile* p_i*,* $i = \overline{1,n}$*, cu care este extrasă o bilă de culoarea* $c1$ *din urna* U_i*,*
- *probabilităţile* q_i*,* $i = \overline{1,n}$*, cu care este extrasă o bilă de culoarea* $c2$ *din urna* U_i*,*
- *probabilităţile* r_i*,* $i = \overline{1,n}$*, cu care este extrasă o bilă de culoarea* $c3$ *din urna* U_i*.*

Probabilitatea de a extrage k *bile culoarea* $c1$*,* j *bile culoarea* $c2$ *şi* m *bile culoarea* $c3$*,* $k + j + m = n$*, atunci când din fiecare urnă se extrage câte o bilă este egală cu coeficientul lui* $x^k y^j z^m$ *din polinomul:*

$$(p_1x + q_1y + r_1z)(p_2x + q_2y + r_2z)\ldots(p_nx + q_ny + r_nz)$$

5 SCHEMA HIERGEOMETRICĂ

Model ”urne-bile”:

- *urnă U conţine a bile albe şi b bile negre;*
- *Se fac n extrageri ($n \le a+b$), fără a se pune bila extrasă înapoi în urnă.*

Probabilitatea ca din cele n bile extrase, k să fie albe ($k \le a$) este: $P = \dfrac{C_a^k \cdot C_b^{n-k}}{C_{a+b}^n}$

6 SCHEMA HIERGEOMETRICĂ GENERALIZATĂ

Model ”urne-bile”:

- *urnă U conţine a_i bile de culoarea c_i, $i = \overline{1,m}$;*
- *Se fac n extrageri, fără a se pune bila extrasă înapoi în urnă;*

Probabilitatea de a obţine n_1 bile de culoarea c_1, n_2 bile de culoarea c_2, ..., n_m bile de culoarea c_m din cele

n extrageri (cu $n_1 + n_2 + n_3 + ... + n_m = n$) este: $P = \dfrac{C_{a_1}^{n_1} \cdot C_{a_2}^{n_2} \cdot .... \cdot C_{a_m}^{n_m}}{C_{a_1+a_2+....+a_m}^n}$

Se aruncă 2 zaruri de 12 ori. Care este probabilitatea să apară de 4 ori suma 6?

- *Numărul de efectuări ale experienței aruncării simultane a două zaruri este n=12, deci avem 12 evenimente independente* $A_1, A_2, \ldots, A_{12}$ *, care constau fiecare în apariția sumei 6 la o aruncare.*

- *Se știe că numărul total de cazuri la aruncarea simultană a 2 zaruri este 36 (principiul multiplicării) iar suma 6 are 5 cazuri favorabile, provenite din:*

Zar 1	5	1	4	2	3
Zar 2	1	5	2	4	3

$$p = P\left(A_i\right) = \frac{5}{36}$$

- *Pentru a afla probabilitatea obținerii sumei 6 de 4 ori din 12 aruncări folosim schema lui Bernoulli pentru* $n = 12,\ k = 4,\ p = \frac{5}{36}$ *și* $q = 1 - \frac{5}{36} = \frac{31}{36}$

- *Probabilitatea cerută este egală cu coeficientul lui* x^4 *din dezvoltarea binomului:* $\left(\frac{5}{36}x + \frac{31}{36}\right)^{12}$

Pentru aflarea coeficientului lui x^4 *folosim binomul lui Newton: scriem termenul general* $T_{k+1} = C_{12}^{k}\left(\frac{5}{36}x\right)^{k}\left(\frac{31}{36}\right)^{n-k}$

și pentru k=4 obținem coeficientul lui x^4 *egal cu:* $C_{12}^{4}\left(\frac{5}{36}\right)^{4}\left(\frac{31}{36}\right)^{8}$

Un aparat este compus din 5 elemente, fiecare putându-se defecta într-un timp dat cu probabilitatea 0.1. Aparatul funcționează normal dacă nu se defectează mai mult de 2 componente. Care este probabilitatea ca în timpul dat aparatul să funcționeze normal?

- *Considerăm evenimentele:*

A = *"aparatul funcționează normal",*

A_1 = *"aparatul are 0 componente defecte",*

A_2 = *"aparatul are 1 componentă defectă",*

A_3 = *"aparatul are 2 componente defecte".*

Evenimentul A *este o reuniune de 3 evenimente incompatibile (* A_1, A_2, A_3 *), deci*

$$P(A) = P(A_1 \cup A_2 \cup A_3) = P(A_1) + P(A_2) + P(A_3)$$

- *Probabilitatea evenimentelor* A_1, A_2, A_3 *se calculează cu ajutorul schemei binomiale (Bernoulli) pentru*

$n = 5,\ p = \dfrac{1}{10},\ k = 0,\ k = 1,\ k = 2$

$$P(A) = \underbrace{C_5^0 \left(\frac{1}{10}\right)^0 \left(\frac{9}{10}\right)^5}_{P(A_1)} + \underbrace{C_5^1 \left(\frac{1}{10}\right)^1 \left(\frac{9}{10}\right)^4}_{P(A_2)} + \underbrace{C_5^2 \left(\frac{1}{10}\right)^2 \left(\frac{9}{10}\right)^3}_{P(A_3)} = 0.9914$$

Se dau 3 urne: U_1 conţine 2 bile albe şi 3 negre, U_2 conţine 4 bile albe şi 1 bilă neagră şi U_3 conţine 3 bile albe şi 2 bile negre. Din fiecare urnă se extrage câte o bilă. Care este probabilitatea ca 2 bile să fie albe şi una neagră?

- *Extragerile din cele 3 urne sunt independente și nu se specifică ordinea de extragere a culorilor bilelor.*

Considerăm evenimentul A = "se extrag 2 bile albe din 3 extrageri" și notăm:

p_i = *probabilitatea de a extrage bilă albă din urna U_i, cu $i=\overline{1,3}$*

q_i = *probabilitatea de a extrage bilă neagră din urna U_i, cu $i=\overline{1,3}$*

- *Folosind notațiile de la schema lui Poisson avem n=3 evenimente (extrageri) și k=2 (numărul de realizări cerute pentru A).*

Probabilitatea cerută este egală cu coeficientul lui x^2 din polinomul:

$$(p_1x+q_1)(p_2x+q_2)(p_3x+q_3)=\left(\frac{2}{5}x+\frac{3}{5}\right)\left(\frac{4}{5}x+\frac{1}{5}\right)\left(\frac{3}{5}x+\frac{2}{5}\right)=\left(\frac{8}{25}x^2+\frac{14}{25}x+\frac{3}{25}\right)\left(\frac{3}{5}x+\frac{2}{5}\right)$$

Coeficientul lui x^2 este: $\frac{16}{125}+\frac{42}{125}=\frac{58}{125} \quad \Rightarrow \quad P(A)=\frac{58}{125}=0.464$

- *Variantă de rezolvare (fără schemă de probabilitate):*

Considerăm cazurile favorabile pentru evenimentul B = ”se extrag două bile albe și una neagră”.

Extragerile din cele 3 urne sunt independente și nu se specifică ordinea de extragere a culorilor bilelor (dar vom presupune că extragerile au loc în ordinea $U_1 - U_2 - U_3$) și considerăm că evenimentul B este format din reuniunea evenimentelor :

- B_1 = *albă – albă – neagră*
- B_2 = *albă –neagră – albă*
- B_3 = *neagră – albă– albă*

Evenimentele B_1, B_2, B_3 sunt incompatibile, deci probabilitatea evenimentului B este:

$$P(B) = P(B_1 \cup B_2 \cup B_3) = P(B_1) + P(B_2) + P(B_3) =$$
$$= \frac{2}{5}\cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{2}{5} + \frac{2}{5}\cdot\frac{1}{5}\cdot\frac{3}{5} + \frac{3}{5}\cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{3}{5} = \frac{58}{125} = 0.464$$

La o tombolă sunt 400 de bilete din care 4 câştigătoare. O persoană cumpără 10 bilete. Care este probabilitatea să nu aibă nici un bilet câştigător?

- *Notăm cu "a" numărul biletelor câștigătoare ("bilele albe") și cu "b" numărul biletelor necâștigătoare ("bilele negre").*

  $a = 4$

  $b = 396$

  $n = 10$ *(numărul de bilete cumpărate de persoana respectivă, echivalentul "extragerilor din urnă").*

- *Ni se cere probabilitatea ca toate cele 10 bilete să fie necâștigătoare (să fie "bile negre"), adică* $k = 0$, $n - k = 10$ *și aplicând schema hipergeometrică obținem:*

$$P = \frac{C_4^0 \cdot C_{396}^{10}}{C_{400}^{10}} = 0.903$$

În două urne se găsesc bile diferit colorate, astfel: în urna U_1 avem 5 albe, 11 negre, 8 roşii iar în urna U_2 avem 10 albe, 8 negre, 6 roşii. Din fiecare urnă se extrage la întâmplare câte o bilă. Care este probabilitatea ca ambele bile să fie de aceeaşi culoare?

- *Extragerile din cele 2 urne sunt independente.*

Considerăm evenimentul A = "se extrag 2 bile de aceeași culoare" , format din reuniunea evenimentelor :

- A_1 = *2 albe, 0 negre, 0 roșii (din U_1 și din U_2)*
- A_2 = *0 albe, 2 negre, 0 roșii (din U_1 și din U_2)*
- A_3 = *0 albe, 0 negre, 2 roșii (din U_1 și din U_2)*

Pentru fiecare dintre evenimentele A_1, A_2, A_3 folosim schema lui Poisson "cu 3 culori":

avem $n = 2$ urne (extrageri) și notăm:

p_i = *probabilitatea de a extrage bilă albă din urna U_i, cu $i = \overline{1,2}$;*

q_i = *probabilitatea de a extrage bilă neagră din urna U_i, cu $i = \overline{1,2}$;*

r_i = *probabilitatea de a extrage bilă roșie din urna U_i, cu $i = \overline{1,2}$;*

k = *numărul de bile albe extrase;*

j = *numărul de bile negre extrase;*

m = *numărul de bile roșii extrase.*

- *Considerăm polinomul :*

$$\left(p_1x+q_1y+r_1z\right)\left(p_2x+q_2y+r_2z\right)=\left(\frac{5}{24}x+\frac{11}{24}y+\frac{8}{24}z\right)\left(\frac{10}{24}x+\frac{8}{24}y+\frac{6}{24}z\right)$$

$P\left(A_1\right)$ = *coeficientul lui* $x^2y^0z^0$ *din polinomul de mai sus, deci* $P\left(A_1\right)=\dfrac{50}{24^2}$;

$P\left(A_2\right)$ = *coeficientul lui* $x^0y^2z^0$ *din polinomul de mai sus, deci* $P\left(A_2\right)=\dfrac{88}{24^2}$;

$P\left(A_3\right)$ = *coeficientul lui* $x^0y^0z^2$ *din polinomul de mai sus, deci* $P\left(A_3\right)=\dfrac{48}{24^2}$;

- *Evenimentele* A_1, A_2, A_3 *sunt incompatibile, deci probabilitatea evenimentului* A *este:*

$$P(A)=P\left(A_1\cup A_2\cup A_3\right)=P\left(A_1\right)+P\left(A_2\right)+P\left(A_3\right)=\frac{50+88+48}{576}=\frac{186}{576}=0.323$$

Se aruncă un zar de 5 ori. Care este probabilitatea ca exact de două ori să apară faţa cu un punct şi exact de două ori să apară faţa cu două puncte?

- *Numărul de efectuări ale experienței aruncării zarului este n=5. Definim sistemul complet de evenimente:*

  A_1 = *"apare fața cu un punct"*, $n_1 = 2$;

  A_2 = *"apare fața cu două puncte"*, $n_2 = 2$;

  A_3 = *"apare orice față mai puțin cea cu un punct și cea cu două puncte"*, $n_3 = 1$.

- *La o singură efectuare a experienței avem:* $P(A_1) = p_1 = \frac{1}{6}$ $\quad P(A_2) = p_2 = \frac{1}{6}$

$$P(A_3) = 1 - (P(A_1) + P(A_2)) = p_3 = \frac{2}{3}$$

- *Suntem în condițiile schemei lui Bernoulli cu mai multe stări (schema multinomială) iar probabilitatea cerută este:*

$$P = \frac{5!}{2!\cdot 2!\cdot 1!}\cdot\left(\frac{1}{6}\right)^2\cdot\left(\frac{1}{6}\right)^2\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^1 = \frac{5}{324} = 0.015$$

O urnă conţine 7 bile albe, 7 bile negre şi 6 verzi. Se extrag 9 bile. Care este probabilitatea să obţinem câte 3 bile din fiecare culoare?

- *Facem următoarele notații:*

  a_1 *=7 (numărul bilelor albe),*

  a_2 *=7 (numărul bilelor negre),*

  a_3 *=6 (numărul bilelor verzi).*

- *Numărul extragerilor este* $n=9$, *cu* $n_1=3$, $n_2=3$ *și* $n_3=3$.

- *Aplicăm schema hipergeometrică generalizată și obținem:*

$$P(3a,3n,3v)=\frac{C_7^3\cdot C_7^3\cdot C_6^3}{C_{20}^9}=0.145$$

Se dau 3 urne: U_1 conţine 1 bilă albă, 2 bile negre şi 3 bile roșii, U_2 conţine 2 bile albe, 3 bile negre și 1 bilă roșie şi U_3 conţine 4 bile albe, 5 bile negre și 3 bile roșii.

a) *Extrag o bilă dintr-o urnă; Care este probabilitatea ca bila extrasă să fie albă?*

b) *Extrag o bilă dintr-o urnă; Dacă bila extrasă este albă, care este probabilitatea ca ea să provină din urna U_3?*

c) *Extrag 2 bile dintr-o urnă; Care este probabilitatea ca bilele să provină din urna U_2, dacă una este albă și una este roșie?*

- *Considerăm evenimentele:*

A_i = *"extrag bilă din urna U_i", $i = \overline{1,3}$.* *Aceste evenimente formează un sistem complet de evenimente și sunt echiprobabile (pentru că nu s-a specificat o probabilitate diferită de extragere în funcție de urnă), deci* $P\left(A_i\right) = \dfrac{1}{3}$

B =*"bila extrasă este albă";*

C =*"o bilă extrasă este albă și cealaltă roșie".*

a) *Avem de calculat probabilitatea evenimentului* B *condiționat de* A_i *. Folosim formula probabilității totale:*

$$P(B)=P(A_1)\cdot P_{A_1}(B)+P(A_2)\cdot P_{A_2}(B)+P(A_3)\cdot P_{A_3}(B)=\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{6}+\frac{1}{3}\cdot\frac{2}{6}+\frac{1}{3}\cdot\frac{4}{12}=\frac{1}{3}\cdot\frac{5}{6}=\frac{5}{18}=0.277$$

b) *Folosim formula lui Bayes (se cere "probabilitatea cauzei" sau "a locului"):*

$$P_B(A_3)=\frac{P(B\cap A_3)}{P(B)}=\frac{P(A_3)\cdot P_{A_3}(B)}{P(B)}=\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{18}{5}=\frac{2}{5}=0.4$$

c) *Folosim formula lui Bayes:*

$$P_C(A_2)=\frac{P(C\cap A_2)}{P(C)}=\frac{P(A_2)\cdot P_{A_2}(C)}{P(C)} \qquad \boxed{(1)}$$

- *Calculăm pe rând probabilitățile care apar în formula lui Bayes:*

  - *Pentru* $P(C)$ *folosim formula probabilității totale pentru că extragerea celor două bile de culori specificate poate să fie făcută din oricare dintre urnele* U_1 *,* U_2 *sau* U_3 *:*

$$P(C)=P(A_1)\cdot P_{A_1}(C)+P(A_2)\cdot P_{A_2}(C)+P(A_3)\cdot P_{A_3}(C) \qquad \boxed{(2)}$$

- *Pentru a calcula probabilitățile de forma $P_{A_i}(C)$, $i=\overline{1,3}$ vom folosi schema hipergeometrică generalizată.*

Cu notațiile specifice acestei scheme, avem:

$n=2$ *(numărul de extrageri),*
$n_1=1$ *(bile de culoare albă),*
$n_2=0$ *(bile de culoare neagră),*
$n_3=1$ *(bile de culoare roșie).*

Diferă, în funcție de urnă, structura culorilor bilelor (a_1 = număr bile albe, a_2 = număr bile negre și a_3 = număr bile roșii).

- *Pentru probabilitatea extragerii celor două bile din urna U_1, $P_{A_1}(C)$ avem $a_1=1$, $a_2=2$ și $a_3=3$ și din formula schemei hipergeometrice generalizate avem:*

$$P_{A_1}(C)=\frac{C_1^1\cdot C_2^0\cdot C_3^1}{C_6^2}=\frac{3\cdot 4!\cdot 2}{6!}=\frac{1}{5}$$

- *Pentru probabilitatea extragerii celor două bile din urna U_2, $P_{A_2}(C)$ avem $a_1=2$, $a_2=3$ și $a_3=1$ și din formula schemei hipergeometrice generalizate avem:*

$$P_{A_2}(C)=\frac{C_2^1\cdot C_3^0\cdot C_1^1}{C_6^2}=\frac{2\cdot 4!\cdot 2}{6!}=\frac{2}{15}$$

- *Pentru probabilitatea extragerii celor două bile din urna* U_3, $P_{A_3}(C)$ *avem* $a_1 = 4$, $a_2 = 5$ *și* $a_3 = 3$ *și din formula schemei hipergeometrice generalizate avem:*

$$P_{A_2}(C) = \frac{C_4^1 \cdot C_5^0 \cdot C_3^1}{C_{12}^2} = \frac{4 \cdot 3 \cdot 10! \cdot 2}{12!} = \frac{2}{11}$$

- *Înlocuim în (2) și calculăm:*

$$P(C) = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{5} + \frac{2}{15} + \frac{2}{11}\right) = \frac{17}{99} = 0.17$$

- *Înlocuim în (1) și obținem:*

$$P_C(A_2) = \frac{P(A_2) \cdot P_{A_2}(C)}{P(C)} = \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{15} \cdot \frac{99}{17} = \frac{22}{85} = 0.258$$