Teorie

Elemente de Teoria Probabilităților

1. Spațiu de Probabilitate

Ω = mulțimea tuturor evenimentelor, mai exact mulțimea tuturor rezultatelor posibile ale experimentului considerat

ω = eveniment elementar, $\omega \in \Omega$

Considerăm A, B 2 evenimente $\subset \Omega$

Def Spunem că A și B sunt incompatibile dacă ele nu pot apărea simultan la nici o efectuare a experimentului

- $A \subset B \Rightarrow$ realizarea evenimentului A duce la realizarea evenimentului B
- $A \setminus B \Rightarrow$ realizarea lui A și nerealizarea lui B
- $A \Delta B \Rightarrow A$ sau B se realizează dar nu ambele

Corpul algebric al lui Ω ($\mathcal{F}$) este format din mulțimea submulțimilor posibile ale lui Ω, unde $\emptyset \in \mathcal{F}$ și $\Omega \in \mathcal{F}$

- folosit la calculul probabilităților când de ex vrem să calculăm probabilitatea ca 2 evenimente să se întâmple simultan

Probabilitatea asociată unui eveniment A determinând frecvența ($f_n A$) a aparițiilor în cele n repetări

$$\boxed{f_r A = \frac{f_n(A)}{n}} \Rightarrow \boxed{\mathbb{P}(A) = \lim_{n \to \infty} \frac{f_n(A)}{n}}$$

$$f_r(A \cup B) = f_n(A) + f_n(B)$$

$$\frac{f_n(A \cup B)}{n} = \frac{f_n(A)}{n} + \frac{f_n(B)}{n} \to \mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B)$$

$P(\Omega)$ = mulțimea părților lui Ω / a evenimentelor posibile
$P(\Omega) = \{A \mid A \subset \Omega\}$

Mulțimea $\mathcal{F} \subset P(\Omega)$ se numește algebră

Proprietățile cele mai importante ale măsurii de probabilitate

De Morgan
$(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$
$(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$

1) $\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B)$

2) $\mathbb{P}(\bigcup_n A_n) = \sum_{n \geq 1} \mathbb{P}(A_n)$

3) $A \subseteq B \Rightarrow \mathbb{P}(A) \leq \mathbb{P}(B)$
$$\mathbb{P}(B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B \setminus A)$$

4) Ineg lui Bode
$$\mathbb{P}(A \cup B) \leq \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B)$$
$$\mathbb{P}(A \cap B) \geq \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - 1$$

5) Proprietatea continuității
- permite calculul ~~unor eveni~~ prob. unui ev. prin aprox acestuia prin alte even. mai simple

- $A_1 \subseteq A_2 \subseteq \ldots \Rightarrow \lim_{n \to \infty} A_n = \bigcup_n A_n \Rightarrow \mathbb{P}(\lim_n A_n) = \lim_n \mathbb{P}(A_n)$
- $B_1 \supseteq B_2 \supseteq \ldots \Rightarrow \lim_{n \to \infty} B_n = \bigcap_n B_n \Rightarrow \mathbb{P}(\lim_n B_n) = \lim_n \mathbb{P}(B_n)$

2. Modelul Clasic de Probabilitate

a) formula sumei

$$|A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n| = \sum_{i=1}^{n} |A_i| - \sum_{i<j} |A_i \cap A_j| + \dots + (-1)^{n+1} |A_1 \cap \dots \cap A_n|$$

funcția ~~Bater~~ Borel: $f(n) = n \prod_{p|n} \left(1 - \frac{1}{p}\right)$

Probabilitatea ca un anumit ordin să se întâmple

$$\boxed{P(A) = \frac{(n-1)!}{n}} \qquad P(E_{i_1} \cap \dots \cap E_{i_k}) = \frac{(n-k)!}{n!}$$

	ordinea contează	ordinea NU contează
cu revenire	n^k	$\binom{n+k-1}{n-1} = \frac{n!}{k!(n-k)!} = C_n^k$
fără revenire	$\frac{n!}{(n-k)!}$	$\frac{n!}{(n-k)!}$

3. Partiția

= Coeficientul multinomial

$$\binom{n}{n_1, n_2, \dots, n_k} \text{ coeficientul multinomial} = \frac{n!}{n_1!\, n_2! \dots n_k!}$$

4. Probabilități Condiționate

- Probabilitatea condiționată: $\boxed{P(A \mid B) = \frac{P(A\cap B)}{P(B)}}$

Din perspectivă frecventistă, dacă avem un exp. repetat de N ori:

$$\frac{N(A\cap B)}{N(B)} = \frac{\frac{N(A\cap B)}{N}}{\frac{N(B)}{N}} \simeq \frac{P(A\cap B)}{P(B)}$$

$$P\Big(\bigcup_n A_n \mid A\Big) = \frac{P\big(\bigcup A_n \cap A\big)}{P(A)} = \frac{\sum P(A_n \cap A)}{P(A)} = \sum Q(A_n)$$

$$\boxed{\begin{array}{l} Q(B) = P(B \mid A) \\ \cancel{Q(\cdot \mid B)} = \end{array}}$$

b) formula produsului

$A \times B = \{(a,b) \mid a\in A, b\in B\}$

$|A\times B| = |A| \times |B|$; A, B finite

$$P(A_1\cap \ldots \cap A_n) = P(A_1) \times P(A_2 \mid A_1) \times \underbrace{P(A_3 \mid A_1\cap A_2)}_{\text{prob. lui } A_3 \text{ știind că } A_1 \text{ și } A_2 \text{ s-au realizat}} \times \ldots \times P(A_n \mid A_1 \cap \ldots \cap A_n)$$

c) formula probabilității totale

- pentru 2 evenimente: $A, B \in \mathcal{F}$; $(\Omega, \mathcal{F}, P)$; $P(B) \in (0,1)$

$$P(A) = P(A \mid B)P(B) + P(A \mid B^c)P(B^c)$$

- pentru n elemente

$$P(A) = \sum_{i=1}^{n} P(A \mid B_i)P(B_i) \; ; \; P(B_i) > 0.$$

d) formula lui Bayes

$$P(B|A) = \frac{P(A\cap B)}{P(A)} = \frac{P(A|B)\circ P(B)}{P(A)}$$

- înlocuind numitorul cu formula de la c)

$$\Rightarrow \boxed{P(B|A) = \frac{P(A|B)\circ P(B)}{P(A|B)P(B)+P(A|B^c)\circ P(B^c)}}$$

la n ev.

implicit, pentru B_i ev. $i=\overline{1,n}$

$$\Rightarrow P(B_i|A) = \frac{P(A|B_i)\circ P(B_i)}{\sum_{j=1}^{n} P(A|B_j)\circ P(B_j)}$$

• probabilitatea condiției imbricate: $Q(\cdot) = P(\cdot|C)$

5. Independența

A, B - independente $\Rightarrow A \perp\!\!\!\perp B \Leftrightarrow P(A\cap B)=P(A)\times P(B)$

$A \perp\!\!\!\perp B \Rightarrow A^c \perp\!\!\!\perp B,\ A \perp\!\!\!\perp B^c,\ A^c \perp\!\!\!\perp B^c$

$A_1, \dots, A_n \in \mathcal{F}$ sunt independente $\boxed{\text{(mutual)}}$

$$P\left(\bigcap_{i\in J} A_i\right) = \prod_{i\in J} P(A_i)\ (\forall)\ J \subseteq \{1,\dots,n\}$$

A, B sunt independente $\boxed{\text{condiționat}}$ la C

$$P(A\cap B|C) = P(A|C)\times P(B|C)$$

6. Variabile Aleatoare

$\{x \in A\}$
$\quad\|$
→ mulțimea $\{\omega \in \Omega \mid X(\omega) \le x\} \in \mathcal{F}\ (\forall)\ x \in \mathbb{R}$

variabile aleatoare → discrete
→ continue

Repartiția lui X (distribuția):

$$\boxed{\mathbb{P}_X(A) = \mathbb{P}(X \in A) = (\mathbb{P} \circ X^{-1})(A)\ (\forall)\ A \subseteq \mathbb{R}}$$

$$\mathbb{P}_X = \mathbb{P} \circ X^{-1}$$

Funcția de Repartiție

$(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ câmp de prob.
$X : \Omega \to \mathbb{R}$ variabilă aleatoare $\Big| \Rightarrow F : \mathbb{R} \to [0, 1]$ prin $F(x) = \mathbb{P}(X \le x)\ (\forall)\ x \in \mathbb{R}$

prop.

→ este ↗ și continuă la dreapta

→ $\lim\limits_{x \to -\infty} F(x) = 0 \ /\ \lim\limits_{x \to \infty} F(x) = 1$

$\mathbb{P}(X = x_0) = \mathbb{P}(X \le x_0) - \mathbb{P}(X < x_0) = F(x_0) - F(x_0 - \lim\limits_{x \nearrow x_0} F(x))$

→ $\mathbb{P}(X > x_0) = 1 - \mathbb{P}(X - x) = 1 - F(x)$

→ $\mathbb{P}(X < x_0) = \mathbb{P}(X \le x_0) - \mathbb{P}(X = x_0) = \lim\limits_{x \nearrow x_0} F(x) = F(x_0 -)$

→ $\mathbb{P}(X = x_0) = F(x) - F(x-)$

7. Valoare Aleatoare Discretă

$X: \Omega \to \mathbb{R}$ variabilă aleatoare
$X(\Omega)$ = mulțimea valorilor lui X

$X(\Omega)$ → cel mult numărabilă ⇒ X este va DISCRETĂ
→ infinit numărabilă ⇒ X este va CONTINUĂ

Funcția de masă asociată:

$f(x) = \mathbb{P}(X = x)\ (\forall)\ x \in X(\Omega)$; $f: X(\Omega) \to [0, 1)$

altă notație: $\mathbb{P}(X) = \mathbb{P}_X(x)$, $A_i = \{X = x_i\}$

prop. f. de masă

$\rightarrow f(x) = \mathbb{P}(X = x) \geq 0$

$\rightarrow \mathbb{P}(\Omega) = 1$ } incompl. card.

$\Omega = \bigcup_{x \in X(\Omega)} \{X = x\}$ } $\Rightarrow \mathbb{P}\left(\bigcup_{x \in X(\Omega)} \{X = x\}\right) = 1 \Rightarrow \sum_{x \in X(\Omega)} f(x) = 1$

⇒ masa totală = 1

Legătura dintre funcția de masă și f. de repartiție

~~$F(x) = \mathbb{P}(X \leq x) = \sum_{y \in X(\Omega)} f(y)$~~ $F(x) = \mathbb{P}(X \leq x) = \sum_{\substack{y \leq x \\ y \in X(\Omega)}} f(y)$

$f(x) = F(x) - F(x^-)$

Tipuri de v.a discrete

1. v.a constanta
2. v.a de tip Bernoulli
3. v.a uniforma
4. v.a binomial
5. v.a repartizată hipergeometric $X \sim HG(n, H, M)$
6. v.a reprezentata negativ binomial
   - nr. eșecuri pentru a obț un nr. succese
   - nr. succese într-un nr. specific de evenimente
   - + repartiția geometrică

$$\boxed{\mathbb{P}(X=k) = (1-p)^{k-1} \cdot p, \quad k \geq 1 \qquad X \sim G(p) \rightarrow \text{geom}(p)}$$

Z = Variabila aleatoare care ne dă nr. de aruncări necesare până obținem a r-a oară succes

$Z \sim NB(r, p)$

7. v.a de tip Poisson → la numărarea unui nr. de ex într-un interval de timp.

$$\boxed{\mathbb{P}(X=k) = e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!}}$$

$$\sum_{k>0} e^{-\lambda} \cdot \frac{\lambda^k}{k!} = 1$$

Aproximarea Poisson a binomialei

$$\boxed{\mathbb{P}(X=k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}}$$

la aprox. unui proces binomial cu un nr. mare de exp - și prob mică de succes

Independenta v.a. discrete

$\mathbb{P}(X \le x, Y \le y) = \mathbb{P}(X \le x) \cdot \mathbb{P}(Y \le y)\ (\forall)\ x, y \in \mathbb{R}$

$X \perp\!\!\!\perp \Leftrightarrow \mathbb{P}(X \in A, Y \in B) = \mathbb{P}(X \in A) \times \mathbb{P}(Y \in B)\ (\forall)\ A, B \subset \mathbb{R}$ intervale

$X \perp\!\!\!\perp Y$ v.a și $g(x) \perp\!\!\!\perp h(y)$; g, h - funcții

$X_1, \dots, X_n$ sunt $\perp\!\!\!\perp$ dacă
$\mathbb{P}(X_1 \le x_1, \dots, X_n \le x_n) = \mathbb{P}(X_1 \le x_1) \times \mathbb{P}(X_n \le x_n)$

Media unei variabile aleatoare: Momente de ordin superior

$$\boxed{E[X] = \sum_x x f(x) = \sum_x x \mathbb{P}(X = x) \text{ ori de câte ori } \sum_x |x| f(x) < \infty}$$

$\sum |x| f(x) = \infty$ spunem că X nu are medie

$X \sim \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \dots & x_n \\ p_1 & p_2 & \dots & p_n \end{pmatrix} \Rightarrow E[X] = x_1 \cdot p_1 + \dots + x_n \cdot p_n$

→ $X = c$ (const.) $\Rightarrow E[X] = 0$

→ $X \ge 0 \Rightarrow E[X] \ge 0$

→ $X \ge Y \Rightarrow E[X] \ge E[Y]$ (proprietatea de monotonie)

→ Liniaritate $\Rightarrow E[aX + bY] = aE[X] + bE[Y]$ unde X și Y variabile aleatoare

Legătura dintre medie și probabilitate

→ $E[\mathbb{1}_A] = \mathbb{P}(A)$; $\mathbb{1}_A$ este f. identitate $\mathbb{1}_A = \begin{cases} 1, w \in A \\ 0, w \notin A \end{cases}$

→ X v.a. discretă; $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$; $y = g(x)$

$$\boxed{E[g(X)] = \sum_x g(x) \cdot \mathbb{P}(X = x)}$$

dem: $g^{-1}(y) = \{x \mid g(x) = y\}$. $\Rightarrow \mathbb{P}(Y = y) = \mathbb{P}(g(x) = y) = \mathbb{P}(x \in g^{-1}(y)) = \sum_{x \in g^{-1}(y)} \mathbb{P}(X = x) =$

$= E[g(X)] = E[Y] = \sum_y y \sum_{x \in g^{-1}(y)} \mathbb{P}(X = x) = \sum g(x) \mathbb{P}(X = x)$.

$\hookrightarrow$ X, Y 2 v.a independente

$$\boxed{E[X \cdot Y] = E[X] \cdot E[Y]} \rightarrow \text{În general, } E[X \cdot Y] \neq E[X] \cdot E[Y]$$

$$g(x) \perp\!\!\!\perp h(y) \Rightarrow \boxed{E[g(x)h(y)] = E[g(x)] \cdot E[h(y)]}$$

moment de ordin k

$$\boxed{\text{Moment de ordine } k\ (k \geq 1) : E[X^k]}$$

Se numeste moment de ordin k central în $a \in \mathbb{R}$: $E[(X-a)^k] = \sum_x (x-a)^k f(x)$

Variația / și moment central de ordin k: $E[(X - E[X])^k]$ $\sum_x [x - E[x]]^k f(x)$

~~Variabila~~ sau dispersia variabilei aleatoare X este momentul central de ordin 2

$$\boxed{Var(X) = E[(X - E[X])^2]}$$

gradul de împrăștiere a valorilor față de medie

- $X = c \Rightarrow Var(X) = 0$
- $Var(X) \geq 0$ ~~dacă X este~~
- X v.a și $a \in \mathbb{R} \Rightarrow Var(a + X) = Var(X)$ (translatie)
- X v.a și $b \in \mathbb{R}^* \Rightarrow Var(b \cdot X) = b^2 \cdot Var(X)$ (scalare)
  - $\hookrightarrow Var(a + bX) = b^2 Var(X)$
- $Var(X) = E[X^2] - E[X]^2$
- $Var(X + Y) = Var(X) + Var(Y)$
- Covarianta lui X și Y 2 variabile aleatoare

utilitate creștere/descreștere simultană doar din persp. liniară $\leftarrow$ $$\boxed{Cov(X, Y) = E[(X - E[X])(Y - E[Y])]}$$

general: $$\boxed{Var(X + Y) = Var(X) + Var(Y) + 2Cov(X, Y)}$$

obs
$$\boxed{\begin{aligned} Cov(X, X) &= Var(X) \\ Cov(X, Y) &= E[XY] - E[X]E[Y] \end{aligned}}$$

Abatere Standard: $SD(X) = \sqrt{Var(X)}$

$\sigma^2 \to$ varianta

$\sigma \to$ abatere

8. Variabile Aleatoare Continue

Fie $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ c.p. și $X: \Omega \to \mathbb{R}$ unde

X v.a continuă dacă $(\exists)\ f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$ unde

$f \geq 0$ astfel încât $\mathbb{P}(X \in A) = \int_A f(x)\,dx\ (\forall)\ A \subseteq \mathbb{R}$ interval

$\mathbb{P}(a \leq X < b) = \mathbb{P}(a \leq X \leq b) = \mathbb{P}(a < X \leq b) =$

dacă $A = (a, b) \Rightarrow \mathbb{P}(a < X < b) = \int_a^b f(x)\,dx$

densitate de repartiție

proprietățile densității de repartiție

$$F(X) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\,dt$$

1) $f \geq 0$ ~~$\Leftrightarrow F$ este crescătoare~~

2) $\int_{\mathbb{R}} f(x)\,dx = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = 1$

obs: $\mathbb{P}(X = a) = \int_a^a f(x)\,dx = 0$

$A = \{a\}$

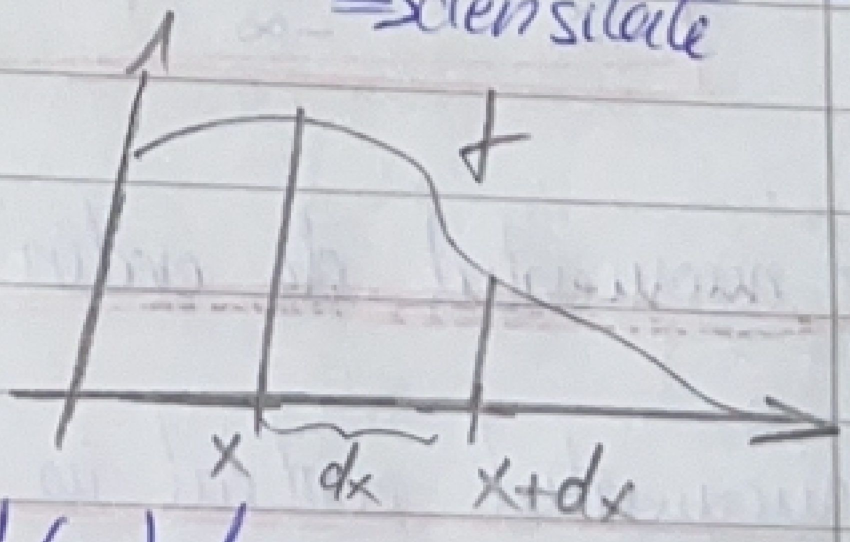
$\mathbb{P}(X \in \mathbb{R}) = \mathbb{P}(\Omega) = 1$

probabilitatea ca $X =$ const

interpretări: $f(x) \simeq \frac{\mathbb{P}(X \in (x, x + dx))}{dx} =$ probabilitatea unitatea de lungime $\Rightarrow$ densitate

$f(x) = \mathbb{P}(X = x) \longrightarrow 0$

$\frac{\mathbb{P}(X \in (x, dx + x))}{dx} \longrightarrow f(x)$



$\mathbb{P}(X \in A) = \sum_{x \in A} \mathbb{P}(X = x) \longrightarrow \int_A f(x)\,dx$

Legătura cu funcția de repartiție:

$F:\mathbb{R}\to[0,1]$, $F(x)=P(X\le x)=P(X\in\underbrace{(-\infty,x]}_{A})=\int_{(-\infty,x]} f(t)\,dt$

$=\int_{-\infty}^{x} f(t)\,dt$

$$\boxed{\Rightarrow F(x)=\int_{-\infty}^{x} f(t)\,dt}$$

Cazul discret: $F(x)=\sum_{y\le x} P(X=y)=\sum_{y\le x} f(y)$

obs Teorema Fundamentală a Analizei

Dacă f este continuă în x_0 atunci $F(x)=\int_{-\infty}^{x} f(t)\,dt$ este DERIVABILĂ în x_0 și $F'(x_0)=f(x_0)$

Dacă f densitatea de repartiție este continuă atunci F este derivabilă și $F'(x)=f(x)\ (\forall)x$

obs

$$\left.\begin{array}{l}\text{știu } F \Rightarrow f(x)=F'(x)\\ \text{știu } f \Rightarrow F(x)=\int_{-\infty}^{x} f(t)\,dt\end{array}\right\}$$

Df Fie X o variabilă aleatoare continuă cu densitatea de repartiție f, atunci

$$\boxed{E[X]=\int_{-\infty}^{\infty} x f(x)\,dx}$$

- momentul de ordin k: $E[X^k]=\int_{-\infty}^{\infty} x^k f(x)\,dx$

- momentul centrat în a de ordin k

$$E[(X-a)^k]=\int_{-\infty}^{\infty}(x-a)^k f(x)\,dx$$

- momentul centrat de ordin k: $E[(X-E[X])^k]=\int_{-\infty}^{\infty}(x-E[X])^k f(x)\,dx$

$Var(X) = E[(X - E[X])^2] = \int_{-\infty}^{\infty} (x - E[X])^2 f(x)\,dx$

$E[g(X)] = \int_{-\infty}^{\infty} g(x) f(x)\,dx$

Proprietățile mediei și ale varianței din cazul discret se păstrează și în cazul continuu (pag 10 → proprietăți)

① Variabile aleatoare repartizate uniform pe $[a,b]$

X este o variabilă aleatoare repartizată uniform pe $[a,b]$ dacă densitatea de repartiție f este CONSTANTĂ pe $[a,b]$

not: $X \sim U([a,b])$

Dacă f este densitate $\Rightarrow f \geq 0$ & $\int f(x)\,dx = 1$

Cum $f = c \Rightarrow c \geq 0$

$\int_a^b c\,dx = c \Rightarrow c = \frac{1}{b-a} \Rightarrow f(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a}, & x \in [a,b] \\ 0 & \text{altfel} \end{cases}$

$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\,dt$

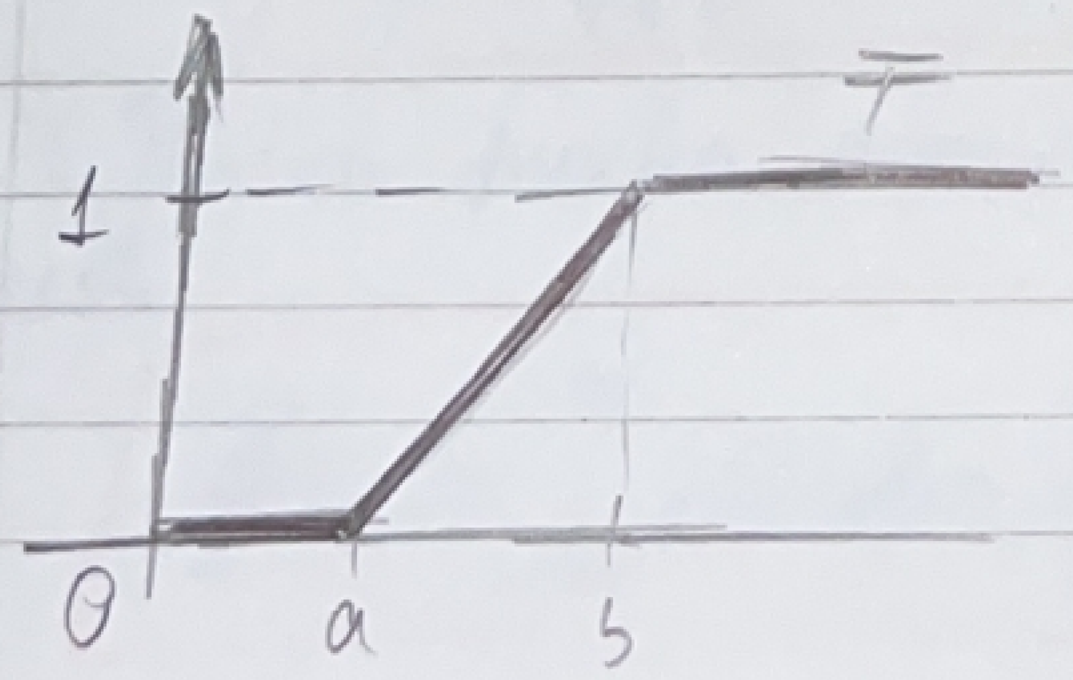
$f(x) = \frac{1}{b-a} \cdot \mathbb{1}_{[a,b]}(x) \Rightarrow F(x) = \begin{cases} 0, & x < a \\ \int_a^x \frac{1}{b-a}\,dt = \frac{x-a}{b-a}; & a \leq x \leq b \\ \int_a^b \frac{1}{b-a}\,dt = 1, & x > b \end{cases}$

$F(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{b-a} \cdot \mathbb{1}_{[a,b]}(t)\,dt = \int \frac{1}{b-a} \cdot \mathbb{1}_{[a,b]}(x) \cdot \mathbb{1}_{(-\infty, x]}(t)\,dt$

$= \int \frac{1}{b-a} \cdot \mathbb{1}_{[a,b] \cap [-\infty, x]}(t)\,dt$

$\mathbb{1}_A(x) = \begin{cases} 1, & x \in A \\ 0, & x \notin A \end{cases}$

↳ funcția indicator



Teorema de universalitate a repartiției uniforme
(Teorema Fundamentală a simulării)

Fie X o variabilă aleatoare cu funcția de repartiție F
Fie $U \sim U([0,1])$ atunci
a) Dacă $F^{-1}(u) = \inf\{x \mid F(x) \geq u\}$ (funcție cuantilă)
avem $F^{-1}(U)$ este rep. ca X
b) $F(X)$ este $U([0,1])$

~~Tratăm doar cazul F continuă și~~ (bij)

$$F(x) = \frac{x-a}{b-a}$$

$$F(x) = \frac{x-a}{b-a}$$

(2) Variabila Aleatoare Repartizată Exponențial

Def. Fie X o variabilă aleatoare. Spunem că X este repartizată exponențial de parametru λ, numim $X \sim Exp(\lambda)$ dacă densitatea de repartiție a lui X este

$$\boxed{f(x) = \lambda e^{-\lambda x}, x \geq 0 \text{ și } \lambda > 0}$$

$\mathbb{P}(X > a) = 1 - \mathbb{P}(X \leq a) = 1 - F(a) = e^{-\lambda a}$ funcție de supraviețuire

Proprietatea lipsei Memoriei

a) Dacă X este o variabilă aleatoare repartizată exponențial (λ) atunci:

$$\mathbb{P}(X \geq s+t \mid X \geq s) = \mathbb{P}(X \geq t)$$

! doar pentru exponențială

Reciproca:

b) Dacă λ este o variabilă aleatoare continuă ≥ 0 care verifică $\mathbb{P}(X \geq s+t \mid X \geq s) = \mathbb{P}(X \geq t)$ $(\forall)\ s,t \geq 0$, atunci $X \sim Exp(\lambda)$

$$\frac{\mathbb{P}(X \geq s+t \mid X \geq s)}{\mathbb{P}(X \geq s)} = \frac{\mathbb{P}(X \geq s+t)}{\mathbb{P}(X \geq s)} = \frac{1-(1-e^{-\lambda(s+t)})}{1-(1-e^{-\lambda s})}$$

$$= e^{-\lambda t} \cdot \mathbb{P}(X \geq s)$$

3 Variabile aleatoare cu repartiție Normală

Def Fie X o variabilă aleatoare. Spunem că X este rep. Normală de parametrii μ și σ^2, notăm $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ dacă admite ca densitate pe y

$$\boxed{f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \cdot e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}},\ x \in \mathbb{R}}$$

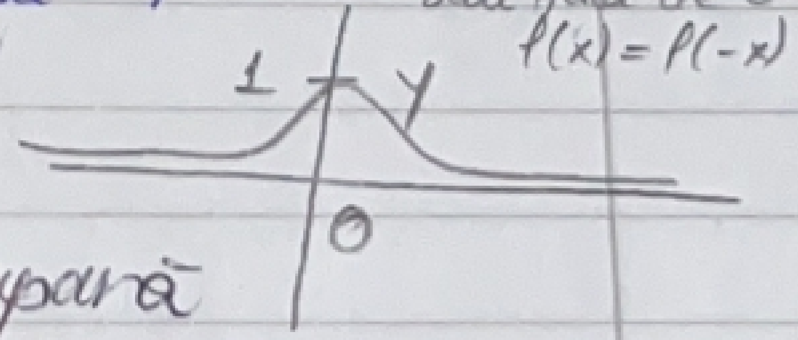
Obs 1) Repartiția Gaussiană

2) Dacă $\mu = 0$ și $\sigma^2 = 1$ atunci $N(0,1)$ se numește normală standard și în acest caz densitatea se numește f

$$\boxed{f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{x^2}{2}},\ x \in \mathbb{R}}$$

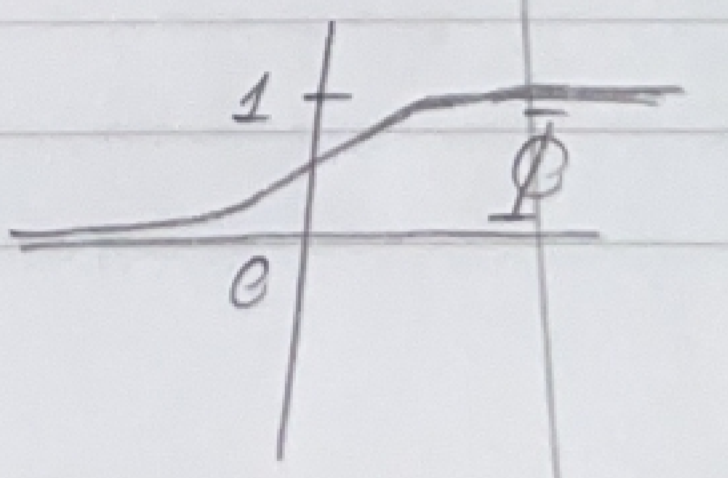
$\rightarrow$ fct impară

sim față de 0 $f(x) = f(-x)$



Pentru funcția normală standard, funcția de repartiție se numește

$$\boxed{\Phi(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\,dt = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t}{2}}\,dt}$$



CURS 10 & 11

f densitate $\Rightarrow$ $\left.\begin{array}{l} f(x) \geq 0 \\ \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = 1 \end{array}\right\}$ proprietățile densității (pag 13)

$X \sim N(0,1)$ normală standard

obs $\begin{cases} E[X] = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x)\,dx = 0 \text{ (funcție impară)} \\ Var(X) = E[X^2] - \underbrace{E[X]^2}_{=0} = 1 \end{cases}$

$$\boxed{\Phi(x) = 1 - \Phi(-x)}$$

Def Spunem că $X \sim N(\mu, \sigma^2)$, dacă admite densitatea de repartiție $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma} \cdot e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$, $x \in \mathbb{R}$

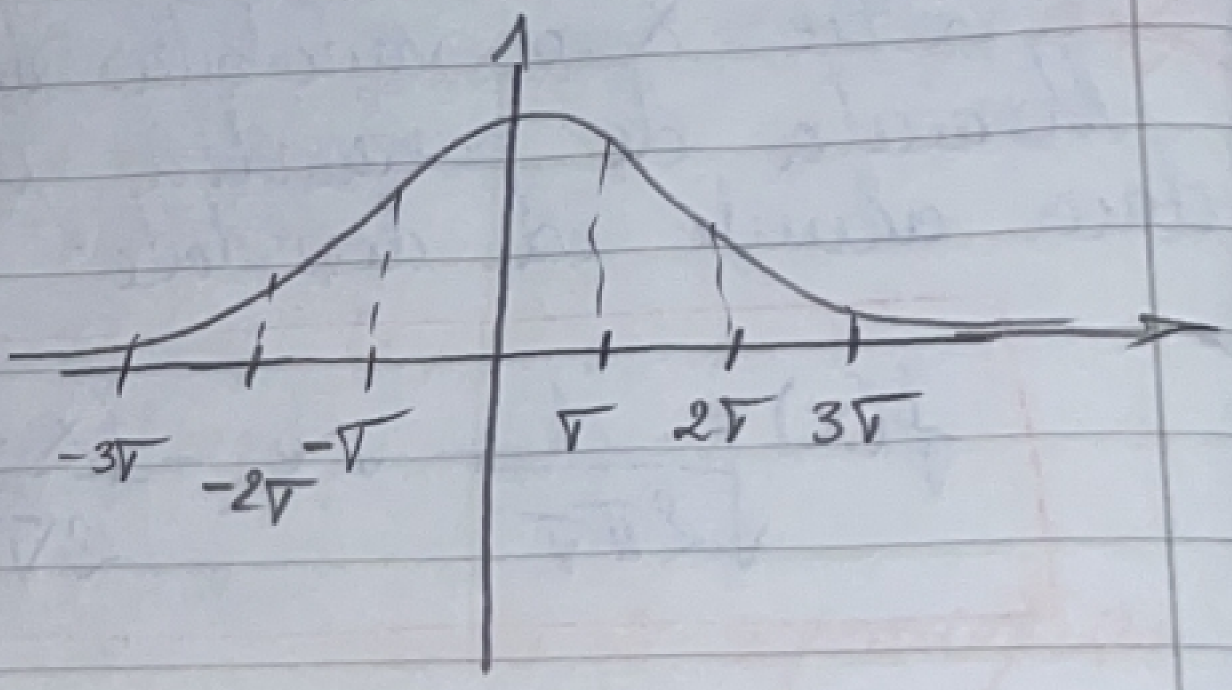
proprietate Dacă $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ atunci $(\exists)$ $Z \sim N(0,1)$ astfel încât $\mu + \sigma Z = X$

(P) Dacă $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ atunci

$\mathbb{P}(|X - \mu| \leq \sigma) \simeq 68\%$

$\mathbb{P}(|X - \mu| \leq 2\sigma) \simeq 95\%$

$\mathbb{P}(|X - \mu| \leq 3\sigma \simeq 99{,}7\%$



Repartiții Marginale, Comune și Condiționate

X, Y 2 variabile aleatoare; $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ câmp de probabilitate

$\longrightarrow (X, Y) \quad \Rightarrow \mathbb{P}((X,Y) \in A \times B)$ comună

$\mathbb{P}(X \in A)$ sau $\mathbb{P}(Y \in B)$ marginală

$\mathbb{P}(X \in A \mid Y \in B)$ condiționată

I. CAZUL DISCRET

Fie $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ un câmp de probabilitate și $X : \Omega \to \mathbb{R}$

$Y : \Omega \to \mathbb{R}$

$X(\Omega) = \{x_1, \dots, x_m\}$

$Y(\Omega) = \{y_1, \dots, y_n\}$

Repartiția comună $\Rightarrow$ Perechea $(X, Y) : \Omega \to \mathbb{R}^2$

$(X, Y)(\Omega) = \{(x_i, y_j) \mid i = \overline{1,m};\ j = \overline{1,n}\} \Rightarrow m \cdot n$ valori

FUNCȚIA DE MASĂ A (X, Y)

$$\mathbb{P}_{X,Y}(x,y) \stackrel{not}{=} f_{X,Y}(x,y) = \mathbb{P}(X = x, Y = y) \ (\forall)\ x \in \{x_1, \dots, x_m\}, \ y \in \{y_1, \dots, y_n\}$$

proprietăți:

1) $f_{X,Y}(x,y) \geq 0 \ (\forall)\ x, y$

2) $\sum_{x \in X(\Omega)} \sum_{y \in Y(\Omega)} f_{X,Y}(x,y) = 1$

Repartitia Marginala

$$\mathbb{P}(X\in A)=\mathbb{P}(\{X\in A\}\cap\Omega)$$
$$=\mathbb{P}(X\in A,\ Y\in\mathbb{R})$$
$$=\mathbb{P}(X\in A,\ \bigcup_y\{Y=y\})$$
$$=\mathbb{P}(\bigcup_y\{X\in A,\ Y=y\})=\sum_y\mathbb{P}(X\in A,\ Y=y)$$
$$=[\mathbb{P}(X=x)=\sum_y\mathbb{P}(X=x,\ Y=y)]$$

$$\boxed{\begin{cases} f_X(x)=\sum_y f_{X,Y}(x,y) \\ f_Y(y)=\sum_x f_{X,Y}(x,y)\end{cases}}$$

Repartitia Conditionata

Fie X o variabila aleatoare discreta si $A\in\mathcal{F}$, $\mathbb{P}(A)>0$

$$\mathbb{P}(X=x|A)=\frac{\mathbb{P}(\{X=x\}\cap A)}{\mathbb{P}(A)}\ \underline{\underline{not}}\ f_{X|A}(x)$$

daca $A=\{Y=y\}\Rightarrow\mathbb{P}(X=x\,|\,Y=y)=\frac{f_{X,Y}(x,y)}{f_Y(y)}$

$$\boxed{f_{X|Y}(x|y)^{\text{fixat}}=\frac{f_{X,Y}(x,y)}{f_Y(y)}}\quad x \text{ la } y$$

$$\boxed{f_{Y|X}(y|x)^{\text{fixat}}=\frac{f_{X,Y}(x,y)}{f_X(x)}}\quad y \text{ la } x$$

Formula Probabilității Totale

$B, A_1, \dots, A_n \in \mathcal{F}$ formează o partiție pe Ω

$$\boxed{\mathbb{P}(B) = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}(B|A_i) \cdot \mathbb{P}(A_i)}$$

dacă $B = \{X = x\} \Rightarrow \mathbb{P}(X=x) = \sum_{i=1}^{n} \underbrace{\mathbb{P}(X=x|A_i)}_{f_{X|A_i}(x)} \cdot \mathbb{P}(A_i)$

~~Dacă g este~~

Formula lui Bayes

$$\mathbb{P}(X=x | Y=y) = \frac{\mathbb{P}(X=x, Y=y)}{\mathbb{P}(Y=y)}$$

$$\Rightarrow f_{X|Y}(x|y) = \frac{f_X(x) \cdot f_{Y|X}(y|x)}{\sum_{x'} f_X(x') \cdot f_{Y|X}(y|x')}$$

⊗ legătura cu media unei valori aleatoare: (pag 9)
pentru $X, Y: \Omega \to \mathbb{R}$; $g: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

$$\boxed{E[g(X,Y)] = \sum_{x,y} g(x,y) \cdot \mathbb{P}(X=x | Y=y)}$$

obs: când 2 evenimente nu sunt $\perp\!\!\!\perp \Rightarrow E$ se calculează cu repartiția comună

$$E[X,Y] = \sum_{x,y} xy\, \mathbb{P}(X=x|Y=y)$$ este o prob

Media Condiționată $= X$ v.a. discretă; $A \in \mathcal{F}$ și $\mathbb{P}(A)>0 \Rightarrow f_{X|A}(x) = \mathbb{P}(X=x|A)$

$$E[X|Y=y] = \sum_{x} x\,\mathbb{P}(X=x|Y=y) \Leftrightarrow$$ media condiționată a lui $Y=y$

• Dacă g este o funcție $\Rightarrow g(X)$ este o v.a discretă

$$\boxed{E[g(X)|A] = \sum_{x} g(x) f_{X|A}(x)}$$

$$\boxed{E[X|A] = \sum_{x} x\,\mathbb{P}(X=x|A) = \sum_{x} x\, f_{X|A}}$$ → media condiționată a lui X la A

(P) Daca X si Y sunt variabile aleatoare discrete

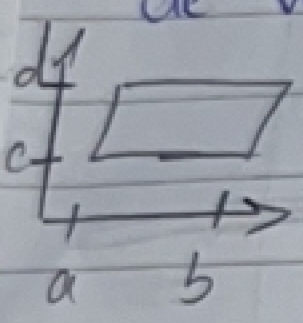
$$\boxed{E[X]=\sum_{y} E[X|Y=y]\,\mathbb{P}(Y=y)}$$

Def Fie X si Y doua variabile aleatoare discrete. Se numeste media conditionala a lui X si Y, si se noteaza $E[X|Y]$ variabila aleatoare de forma $\boxed{h(y)=E[X|Y=y]\ \forall y}$

(P) Media Mediei Conditionate

$$\boxed{E[E[X|Y]]=E[X]}$$

Def Fie $(\Omega,\mathcal{F},\mathbb{P})$ camp de probabilitati si X, Y 2 variabile aleatoare. Spunem ca vectorul (X,Y) formeaza o pereche de variabile aleatoare daca $(\exists)\ f_{(X,Y)}(x,y)\geq 0$ cu prop:



$$\mathbb{P}((X,Y)\in A)=\iint_A f_{(X,Y)}(x,y)\,dx\,dy \quad (\forall)\ A\subseteq\mathbb{R}^2$$

↳ densitate marginala a lui x $=\int_{\mathbb{R}} f_{(x,y)}(x,y)\,dy$

$f_{(x,y)}(x,y):\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ se numeste densitatea comuna a (X,Y)

- Daca: $A=[a,b]\times[c,d]$

$$\mathbb{P}((X,Y)\in[a,b]\times[c,d])=\mathbb{P}(a\leq x\leq b;\ c\leq y\leq d)$$
$$=\int_a^b\int_c^d f_{(x,y)}(x,y)\,dy\,dx$$

- $A=\mathbb{R}^2$: $\underbrace{\mathbb{P}((X,Y)\in\mathbb{R}^2)}_{=1}=\iint_{\mathbb{R}^2} f_{(x,y)}(x,y)\,dx\,dy$

obs. $\iint_{\mathbb{R}^2} f\,dx\,dy=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)\,dx\,dy$

Interpretare: $\mathbb{P}(X\in(x,x+dx),\ Y\in(y,y+dy)) = \int_x\int_y f_{(X,Y)}(u,v)\,dv\,du$
$\simeq f_{(X,Y)}(x,y)\,dx\,dy$

$f_{(X,Y)}(x,y) \simeq \frac{\mathbb{P}(X\in(x,x+dx),\ Y\in(y,y+dy))}{dx\,dy} \simeq \frac{\text{probabilitatea}}{\text{unitatea de arie}}$

$\int_A f_X(x)\,dx = \int_A \underbrace{\int_{\mathbb{R}} f_{(X,Y)}(x,y)\,dy}_{\text{densitatea marginala a lui } x}\,dx$

$\Rightarrow f_Y(y) = \int_{\mathbb{R}} f_{(X,Y)}(x,y)\,dx \Rightarrow$ densitatea marginala a lui y

Cazul Discret	Cazul Continuu
$f_{(X,Y)}(x,y) = \mathbb{P}(X=x, Y=y)$	$f_{(X,Y)}(x,y)$
$f_X(x) = \mathbb{P}(X=x) = \sum_y f_{(X,Y)}(x,y)$	$f_X(x) = \int_{\mathbb{R}} f_{(X,Y)}(x,y)\,dy$
$f_Y(y) = \mathbb{P}(Y=y) = \sum_x f_{(X,Y)}(x,y)$	$f_Y(y) = \int_{\mathbb{R}} f_{(X,Y)}(x,y)\,dx$

Repartiția uniformă pe $S\subseteq\mathbb{R}^2$