VARIABILE ALEATOARE

*Intuitiv, o **variabilă aleatoare** este o mărime care în urma realizării unei experienţe poate lua o valoare dintr-o mulţime bine definită (mulţimea valorilor posibile).*

- *Variabila aleatoare este o funcţie reală care depinde de rezultatul unui anumit experiment:*
  Fie $\{\Omega, K, P\}$ *spaţiu de probabilitate. Funcţia* $X:\Omega \to \mathbb{R}$ *se numeşte **variabilă aleatoare** dacă:*

  $$\text{pentru } (\forall)\, a \in \mathbb{R},\ \{\omega \in \Omega \mid X(\omega) < a\} \in K$$

  (în notaţie simplificată, scriem direct $\{X < a\}$*)*

<u>Observaţie</u>: *Mulţimea valorilor variabilei aleatoare,* $X(\Omega)$*, este o submulţime a mulţimii numerelor reale (* $X(\Omega) \subseteq \mathbb{R}$ *), adică variabila aleatoare <u>nu este obligatoriu o funcţie surjectivă</u>.*

CLASIFICAREA VARIABILELOR ALEATOARE

Se face după proprietăţile mulţimii $X(\Omega)$:

a) V.A. de tip discret – *dacă* $X(\Omega)$ *este mulţime cel mult numărabilă:*

- $X(\Omega)$ *finită – V.A. discretă simplă*
- $X(\Omega)$ *infinită dar numărabilă – V.A. discretă cu o infinitate de valori.*

b) V.A. de tip continuu – *dacă* $X(\Omega)$ *este o mulţime infinită de numere reale.*

<u>Observaţie</u>: *Mulțimea valorilor unei* ***variabile aleatoare continue*** X *este totalitatea numerelor dintr-un interval real (deci infinit) sau toate numerele dintr-o reuniune disjunctă de astfel de intervale, cu precizarea că pentru orice valoare posibilă* x, $P(X = x) = 0$. *Înțelegerea deplină a acestui fapt necesită cunoștințe de teoria măsurii, ceea ce depășește cadrul acestui curs.*

FUNCȚIA DE REPARTIȚIE A UNEI VARIABILE ALEATOARE

- *Prin variabilele aleatoare, unui fenomen supus unor circumstanţe aleatoare i se asociază un număr real, deci se stabileşte o corespondenţă între spaţiul de selecţie Ω, convenabil ales, şi $\mathbb{R}$.*

- *În practică este dificil să găsim valorile acestor corespondenţe, dar este posibil să determinăm „cât de des" sunt luate aceste valori (cu ce probabilitate). Astfel, putem defini **funcţia de repartiţie** a variabilei aleatoare X.*

- *Fie $\{\Omega, K, P\}$ spaţiu de probabilitate şi $X:\Omega\to\mathbb{R}$ o variabilă aleatoare. Funcţia $F_X:\mathbb{R}\to[0,1]$ definită prin:*

$$F_X(x)=P\left(\left\{\omega\in\Omega \,\middle|\, X(\omega)<x\right\}\right),\ \text{cu } x\in\mathbb{R}$$

*se numeşte **funcţia de repartiţie** (sau de **distribuţie** – en. cumulative distribution function) a variabilei aleatoare X (prescurtat, se scrie $F_X(x)=P(X<x)$).*

***Observaţie**: Determinarea, pentru $(\forall)x\in\mathbb{R}$, a probabilităţii cu care X ia valori mai mici decât x înseamnă a găsi (defini) funcţia de repartiţie pentru X.*

VARIABILE ALEATOARE (SIMPLE) DISCRETE

- ***Variabila aleatoare discretă simplă*** *este o funcţie reală ale cărei valori sunt luate cu probabilităţile corespunzătoare unui sistem complet de evenimente.*

- *Când se face referire la* ***repartiția*** *unei variabile aleatoare discrete simple, se înțelege modul în care probabilitatea totală 1 este distribuită între toate posibilele valori ale variabilei respective.*

- *Pentru a specifica riguros o variabilă aleatoare discretă simplă, considerăm o experienţă şi legat de aceasta un sistem complet de evenimente* $(A_i)_{1\le i\le n}$. *Definim funcţia* X *pe acest sistem complet de evenimente şi o reprezentăm prin tabelul de asociere (perechi ordonate) numit* ***tabloul de repartiţie*** *al variabilei aleatoare* X *:*

$$X=\begin{pmatrix} x_1 & x_2 & .... & x_n \\ p_1 & p_2 & .... & p_n \end{pmatrix} \text{ , cu } p_i \ge 0 \text{ şi } \sum_{i=1}^{n} p_i = 1$$

unde numerele x_i *se numesc valorile variabilei aleatoare iar* p_i *sunt probabilităţile cu care variabila aleatoare ia aceste valori:*

$$p_i = P(A_i) = P\{X = x_i\} = P\left(\left\{\omega \in \Omega \,\middle|\, X(\omega) = x_i\right\}\right)$$

- ***Convenţii:***
  - *În tabloul de repartiţie se trec valorile <u>distincte</u> ale variabilei aleatoare;*
  - *În tabloul de repartiţie NU se trec valorile luate cu probabilitatea 0.*

$$X=\begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \dots & x_n \\ p_1 & p_2 & \dots & p_n \end{pmatrix}$$

- ***Funcția de probabilitate*** *(en. probability mass function) a unei variabile aleatoare discrete simple este funcția care atașează fiecărei valori a variabilei probabilitatea cu care această valoare este luată:*

$$f(x_i)=p_i=P(X=x_i)\ ,\ i=\overline{1,n}$$

- ***Funcția de repartiție*** *a unei variabile aleatoare discrete simple este:*

$$F_X(x)=P(X<x)=\begin{cases} 0, & x<x_1 \\ p_1, & x_1\le x<x_2 \\ p_1+p_2, & x_2\le x<x_3 \\ \dots\dots\dots\dots & \\ \sum_{j=1}^{i-1} p_j\ , & x_{i-1}\le x<x_i \\ \dots\dots\dots\dots & \\ 1, & x\ge x_n \end{cases}$$

Proprietăţi:

1) *Funcţie mărginită (valoarea minimă este 0, cea maximă 1);*

2) F_X *este o funcţie „treaptă”, continuă la dreapta (şi discontinuă la stânga) în punctele* x_i*, cu salturi egale cu* p_i *în aceste puncte;*

3) *Este nedescrescătoare (* $F_X(x_1)\le F_X(x_2)$ *dacă* $x_1<x_2$*).*

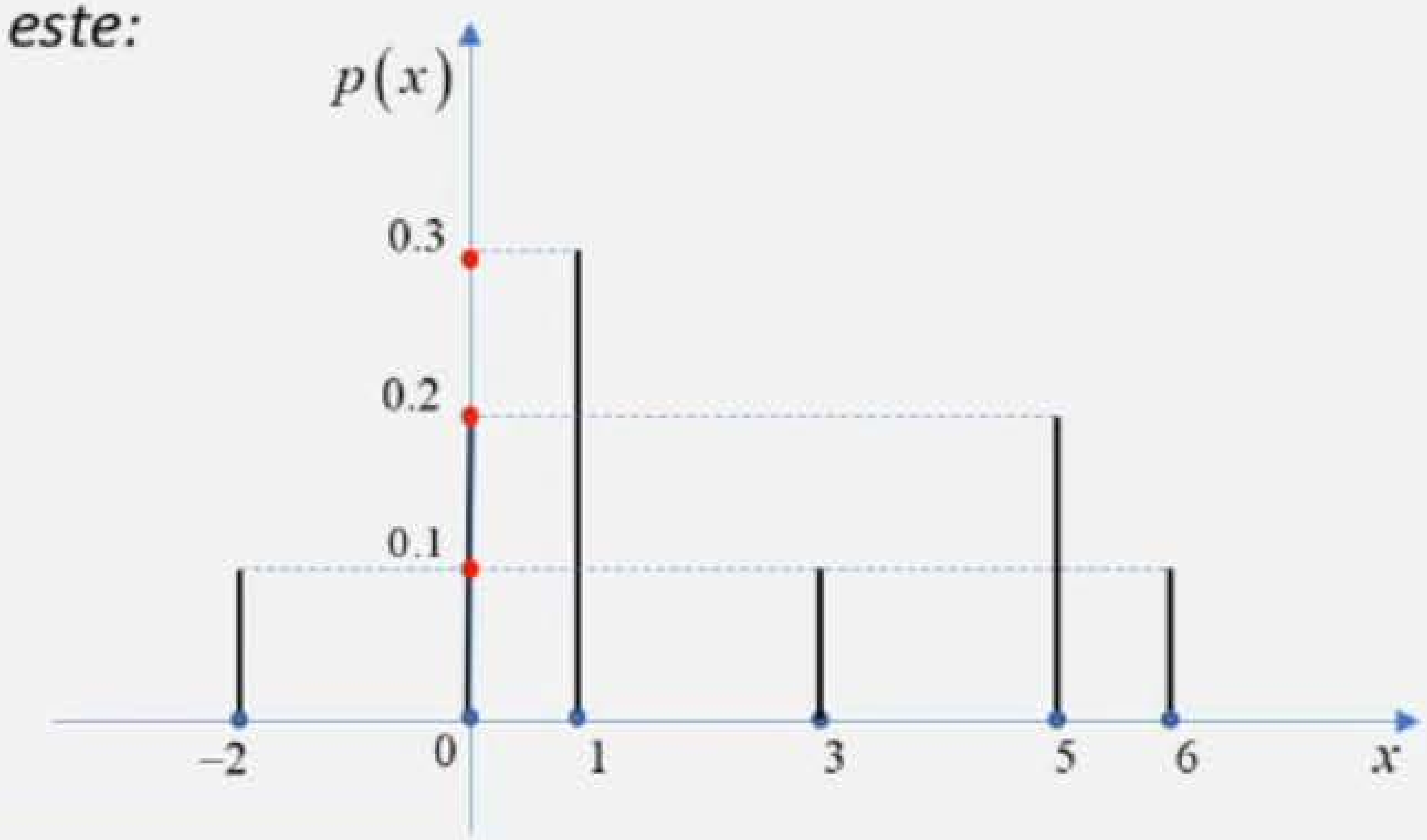
Se consideră variabila aleatoare discretă simplă X, cu tabloul de repartiţie:

$$X = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 1 & 3 & 5 & 6 \\ 0.1 & 0.2 & 0.3 & 0.1 & 0.2 & 0.1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ p(x) \end{pmatrix}$$

a) *Să se determine funcţia de repartiție a variabilei aleatoare X şi să se reprezinte grafic variabila şi funcţia ei de repartiție.*

b) *Să se determine* $P\left(0 \le X < \dfrac{7}{2}\right)$

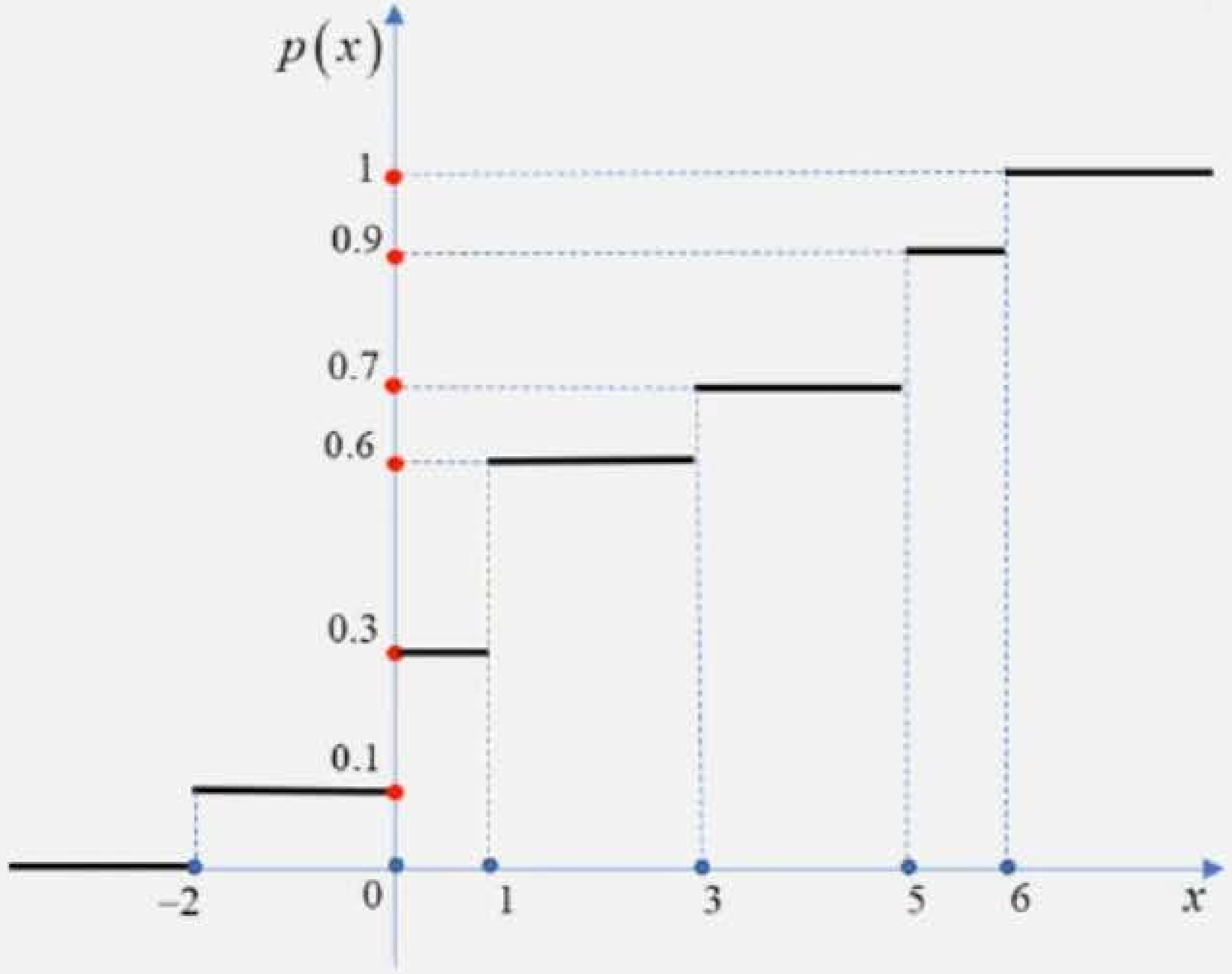
- *Graficul variabilei aleatoare discrete simple X este:*



- *Funcția de repartiție a variabilei aleatoare X și graficul ei:*

$$X = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 1 & 3 & 5 & 6 \\ 0.1 & 0.2 & 0.3 & 0.1 & 0.2 & 0.1 \end{pmatrix}$$

$$F_X(x) = \begin{cases} 0, & x < -2 \\ 0.1, & -2 \le x < 0 \\ 0.3, & 0 \le x < 1 \\ 0.6, & 1 \le x < 3 \\ 0.7, & 3 \le x < 5 \\ 0.9, & 5 \le x < 6 \\ 1, & x \ge 6 \end{cases}$$



b) $P\left(0 \le X < \frac{7}{2}\right)$

$$\frac{7}{2}$$

$$X = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 1 & 3 & 5 & 6 \\ 0.1 & 0.2 & 0.3 & 0.1 & 0.2 & 0.1 \end{pmatrix}$$

$$P\left(0 \le X < \frac{7}{2}\right) = 0.2 + 0.3 + 0.1 = 0.6$$

Fie variabilele aleatoare discrete simple X și Y cu tablourile de repartiție:

$$X=\begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \dots & x_n \\ p_1 & p_2 & \dots & p_n \end{pmatrix},\ Y=\begin{pmatrix} y_1 & y_2 & \dots & y_m \\ q_1 & q_2 & \dots & q_m \end{pmatrix} \text{cu } p_i, q_j \geq 0 \text{ şi } \sum_{i=1}^{n} p_i = \sum_{j=1}^{m} q_j = 1.$$

VARIABILE ALEATOARE DISCRETE (SIMPLE) INDEPENDENTE

*X și Y se numesc **independente** (în totalitatea lor) dacă evenimentele $(X=x_i)$ și $(Y=y_j)$ cu $i=\overline{1,n}$ și $j=\overline{1,m}$ sunt independente, adică:*

$$P\left[(X=x_i),(Y=y_j)\right]=\underline{P\left[(X=x_i)\cap(Y=y_j)\right]=p_i\cdot q_j}$$

OPERAȚII CU VARIABILE ALEATOARE DISCRETE SIMPLE

Se pot defini următoarele operații (care au ca rezultat tot variabile aleatoare simple):

$$a+X=\begin{pmatrix} a+x_i \\ p_i \end{pmatrix}_{i=\overline{1,n}} \qquad X+Y=\begin{pmatrix} x_i+y_j \\ p_{ij} \end{pmatrix}_{\substack{i=\overline{1,n}\\ j=\overline{1,m}}} \qquad X\cdot Y=\begin{pmatrix} x_i\cdot y_j \\ p_{ij} \end{pmatrix}_{\substack{i=\overline{1,n}\\ j=\overline{1,m}}} \qquad X^k=\begin{pmatrix} x_i^k \\ p_i \end{pmatrix}_{i=\overline{1,n}}$$

$$a\cdot X=\begin{pmatrix} a\cdot x_i \\ p_i \end{pmatrix}_{i=\overline{1,n}}$$

unde p_{ij} este probabilitatea realizării simultane a evenimentelor $(X=x_i)$ și $(Y=y_j)$.

Altfel spus, $p_{ij}=P\left[(X=x_i),(Y=y_j)\right]=P\left[(X=x_i)\cap(Y=y_j)\right].$

cu $a\in\mathbb{R}$ constantă;

Observații:

- *Dacă variabilele aleatoare X și Y sunt independente, atunci* $\boxed{p_{ij} = p_i \cdot q_j}$
- *Dacă variabilele aleatoare X și Y NU sunt independente, atunci p_{ij} se poate determina din tabloul de repartiție al unui vector aleator bidimensional, discret (Într-un curs viitor).*
- *Suma și produsul se pot extinde și pentru trei sau mai multe variabile aleatoare.*

Alte operații cu variabile aleatoare discrete simple:

- ***Inversa unei variabile aleatoare*** X *(care ia valori nenule) – este variabila* $\frac{1}{X}$ *care ia valoarea* $\frac{1}{x_i}$ *când* X *ia valoarea* x_i *(caz particular al ridicării la putere pentru* $k = -1$*);*

- ***Raportul a două variabile aleatoare*** X ***și*** Y *(unde* Y *nu ia valori nule) – este variabila* $\frac{X}{Y}$ *care ia valoarea* $\frac{x_i}{y_j}$ *dacă* X *ia valoarea* x_i *și* Y *ia valoarea* y_j *(caz particular al înmulțirii variabilei* X *cu variabila* $\frac{1}{Y}$*).*

Fie variabilele aleatoare discrete X şi Y, <u>independente</u>, cu repartiţiile:

$$X:\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0.3 & 0.5 & 0.2 \end{pmatrix} \qquad Y:\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0.5 & 0.5 \end{pmatrix}$$

Să se calculeze: $3X$, X^3, $X+Y$, $X\cdot Y$, $\dfrac{1}{X}$

- $$3X=\begin{pmatrix} 3\cdot 0 & 3\cdot 1 & 3\cdot 2 \\ 0.3 & 0.5 & 0.2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & 3 & 6 \\ 0.3 & 0.5 & 0.2 \end{pmatrix}$$

- $$X^3=\begin{pmatrix} 0^3 & 1^3 & 2^3 \\ 0.3 & 0.5 & 0.2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 8 \\ 0.3 & 0.5 & 0.2 \end{pmatrix}$$

- $$X+Y=\begin{pmatrix} 0+(-1) & 0+1 & 1+(-1) & 1+1 & 2+(-1) & 2+1 \\ 0.3\cdot 0.5 & 0.3\cdot 0.5 & 0.5\cdot 0.5 & 0.5\cdot 0.5 & 0.2\cdot 0.5 & 0.2\cdot 0.5 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 2 & 1 & 3 \\ 0.15 & 0.15 & 0.25 & 0.25 & 0.10 & 0.10 \end{pmatrix}=$$
  $$=\begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0.15 & 0.25 & 0.25 & 0.25 & 0.10 \end{pmatrix}$$

- $$X\cdot Y=\begin{pmatrix} 0\cdot(-1) & 0\cdot 1 & 1\cdot(-1) & 1\cdot 1 & 2\cdot(-1) & 2\cdot 1 \\ 0.3\cdot 0.5 & 0.3\cdot 0.5 & 0.5\cdot 0.5 & 0.5\cdot 0.5 & 0.2\cdot 0.5 & 0.2\cdot 0.5 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & 1 & -2 & 2 \\ 0.15 & 0.15 & 0.25 & 0.25 & 0.10 & 0.10 \end{pmatrix}$$
  $$=\begin{pmatrix} -2 & -1 & 0 & 1 & 2 \\ 0.10 & 0.25 & 0.3 & 0.25 & 0.10 \end{pmatrix}$$

- $$\frac{1}{X}=\begin{pmatrix} \dfrac{1}{x_i} \\ p_i \end{pmatrix},\ x_i\neq 0$$ *Pentru acest exemplu, NU se poate calcula* $\dfrac{1}{X}$

VARIABILE ALEATOARE CONTINUE

- *O variabilă aleatoare este considerată continuă dacă poate lua orice valoare într-un interval real (deci o infinitate de valori). Descrierea unei variabile aleatoare continue se face prin precizarea mulțimii în care ia valori și a unei funcții care să descrie repartizarea acestor valori. O astfel de funcție se numește **densitate de repartiție** (en. probability density function) și este analogul continuu al funcției de probabilitate.*

- *Fie* $\{\Omega, K, P\}$ *câmp de probabilitate. Considerăm o clasă de variabile aleatoare* X *pentru care există o funcţie* $f:\mathbb{R}\to[0,+\infty)$ *cu un număr finit de puncte de discontinuitate de prima speţă (deci integrabilă), ce satisface relaţia:*

$$P(X<x)\overset{def}{=}F(x)=\int_{-\infty}^{x}f(t)\,dt$$

unde $F(x)$ *este funcţia de repartiţie a variabilei* X. *Atunci funcţia* f *se numeşte **densitate de repartiție** a variabilei aleatoare* X.

<u>Observaţie</u>*: Dacă* f *este continuă în* $x\in\mathbb{R}$, *atunci* F *este derivabilă în* x *şi avem:* $\boxed{F'(x)=f(x)}$.

O variabilă aleatoare continuă se reprezintă cu ajutorul densității de repartiție sub forma: $X = \begin{pmatrix} x \\ f(x) \end{pmatrix}$

- ***Proprietăţi ale densității de repartiție:***

1) *Funcţie pozitivă:* $f(x) \geq 0$, *pentru* $\forall x \in \mathbb{R}$

2) $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = 1$

3) *Dacă* $a, b \in \mathbb{R}$ *şi* F *continuă, atunci* $P(a \leq X < b) = \int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)$.

Observație: *Fie o variabilă aleatoare continuă* X *cu funcția de repartiție* $F_X(x) = P(X < x)$, $x \in \mathbb{R}$. *Atunci pentru orice* $a, b \in \mathbb{R}$, *cu* $a < b$, *avem:*

- $P(X = a) = 0$;
- $P(a \leq X < b) = P(a < X < b) = P(a < X \leq b) = P(a \leq X \leq b) = \int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)$

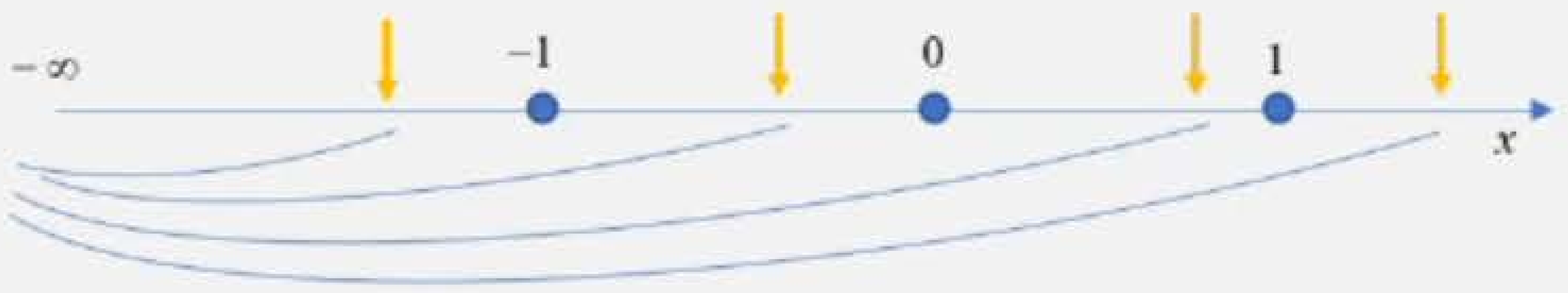
- *Pentru orice variabilă aleatoare continuă pot fi reprezentate grafic atât densitatea de repartiție cât și funcția de repartiție (conform proprietăților lor).*

- *Operațiile cu variabile aleatoare continue se studiază în cadrul capitolului "Vectori aleatori".*

Se consideră variabila aleatoare X cu densitatea de repartiție: $f(x)=\begin{cases} x+1, & -1\le x\le 0 \\ 1-x, & 0<x\le 1 \\ 0, & \text{în rest} \end{cases}$

Să se determine funcția de repartiție.

$$F_X(x)=P(X<x)=\int_{-\infty}^{x} f(t)\,dt$$



Pentru $x\le -1$ *avem* $F_X(x)=0$;

Pentru $x\in(-1,0]$ *avem* $F_X(x)=\int_{-\infty}^{-1}0\,dt+\int_{-1}^{x}(t+1)\,dt=\dfrac{(x+1)^2}{2}$;

Pentru $x\in(0,1]$ *avem* $F_X(x)=\int_{-\infty}^{-1}0\,dt+\int_{-1}^{0}(t+1)\,dt+\int_{0}^{x}(1-t)\,dt=\dfrac{2x-x^2}{2}$;

Pentru $x>1$ *avem* $F_X(x)=\int_{-\infty}^{-1}0\,dt+\int_{-1}^{0}(t+1)\,dt+\int_{0}^{1}(1-t)\,dt+\int_{1}^{x}0\,dt=1$

$$F_X(x)=\begin{cases} 0, & x\le -1 \\ \dfrac{(x+1)^2}{2}, & x\in(-1,0] \\ \dfrac{2x-x^2}{2}, & x\in(0,1] \\ 1, & x>1 \end{cases}$$

Fie funcția reală: $f(x)=\begin{cases} k\cdot x^2 - x, & x\in(-1,0] \\ k\cdot e^{-x}, & x>0 \\ 0, & \text{in rest} \end{cases}$

a) *Determinați* $k\in\mathbb{R}$ *astfel încât* f *să fie densitatea de repartiție a unei v.a.* X *;*

b) *Determinați funcția de repartiție corespunzătoare;*

c) *Calculați* $P\left(X\in\left[-\frac{1}{2},2\right]\middle| X\geq 0\right)$.

a) *Se pun condițiile* $f(x)\geq 0$ *și* $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx=1$ $\begin{cases} k\geq 0 \\ \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx=\int_{-1}^{0}\left(kx^2+x\right)dx+\int_{0}^{\infty} ke^{-x}dx=1 \Rightarrow k=\frac{3}{8} \end{cases}$

b) $F_X(x)=P(X<x)=\int_{-\infty}^{x} f(t)\,dt$

Pentru $x\leq -1$ *avem* $F_X(x)=0$;

Pentru $x\in(-1,0]$ *avem* $F_X(x)=\int_{-\infty}^{-1} f(t)\,dt+\int_{-1}^{x} f(t)\,dt=\frac{1}{8}\left(x^3-4x^2+5\right)$

Pentru $x>0$ *avem* $F_X(x)=\int_{-\infty}^{-1} f(t)\,dt+\int_{-1}^{0} f(t)\,dt+\int_{0}^{x} f(t)\,dt=1-\frac{3}{8}e^{-x}$

$$F_X(x)=\begin{cases} 0, & x\leq -1 \\ \frac{1}{8}\left(x^3-4x^2+5\right), & x\in(-1,0] \\ 1-\frac{3}{8}e^{-x}, & x>0 \end{cases}$$

c) $$P\Big(\underbrace{X\in\left[-\frac{1}{2},2\right]}_{A}\Big|\underbrace{X\geq 0}_{B}\Big)=\frac{P\left(X\in[0,2]\right)}{P(X\geq 0)}=\frac{P(0\leq X\leq 2)}{1-P(X<0)}=\frac{F(2)-F(0)}{1-F(0)}=\frac{1-\frac{3}{8}e^{-2}-\frac{5}{8}}{1-\frac{5}{8}}=1-\frac{1}{e^{2}}$$

$$P(A|B)=P_B(A)=\frac{P(A\cap B)}{P(B)}$$

$$F_X(x)=\begin{cases}0, & x\leq -1\\ \frac{1}{8}\left(x^3-4x^2+5\right), & x\in(-1,0]\\ 1-\frac{3}{8}e^{-x}, & x>0\end{cases}$$