CARACTERISTICI NUMERICE ALE VARIABILE ALEATOARE

În cele ce urmează, pentru cazul discret vom considera o variabilă aleatoare de forma:

$$X = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \dots & x_n \\ p_1 & p_2 & \dots & p_n \end{pmatrix}, \text{ cu } \; p_i \geq 0 \text{ și } \sum_{i=1}^{n} p_i = 1$$

iar pentru cazul continuu vom considera o variabilă aleatoare $X = \begin{pmatrix} x \\ f(x) \end{pmatrix}$, *cu* $x \in \mathbb{R}$.

MEDIA

Pentru o variabilă aleatoare, ***media*** *(en. mean, expected value) este o măsură a tendinței centrale a valorilor sale.*

Notații uzuale *pentru medie:* m, $E[X]$, μ.

V.a. discretă simplă

$$M[X] = x_1 \cdot p_1 + x_2 \cdot p_2 + \dots + x_n \cdot p_n = \sum_{i=1}^{n} x_i \cdot p_i$$

V.a. continuă

$$M[X] = \int_{-\infty}^{+\infty} x \cdot f(x)\,dx \qquad \text{(convergentă)}$$

V.a. discretă simplă cu o infinitate de valori

$$M[X] = \sum_{n \geq 0} x_n \cdot p_n \qquad \text{(convergentă)}$$

PROPRIETĂȚI ALE MEDIEI

1 *valoarea medie a unei constante este egală cu constanta:* $X:\begin{pmatrix} c \\ 1 \end{pmatrix},\ M[X]=c$

2 *dacă* X *este o variabilă aleatoare şi* $a \in \mathbb{R}$ *o constantă, atunci au loc relaţiile:*

$$M[a+X]=a+M[X]$$

$$M[a\cdot X]=a\cdot M[X]$$

3 *valoarea medie a unei variabile aleatoare este cuprinsă între cea mai mică şi cea mai mare dintre valorile posibile ale variabilei aleatoare:*

$$a<M[X]<A \qquad \text{(unde am notat } a=\min_i x_i \text{ şi } A=\max_i x_i\text{)}$$

4 *valoarea medie a unei sume finite de variabile aleatoare este egală cu suma valorilor medii ale variabilelor aleatoare respective:*

$$M[X+Y+Z+...]=M[X]+M[Y]+M[Z]+....$$

5 *valoarea medie a unui produs de variabile aleatoare* ***independente*** *este egală cu produsul mediilor variabilelor considerate:*

$$M[X \cdot Y \cdot Z \cdot ...] = M[X] \cdot M[Y] \cdot M[Z] \cdot ....$$

Dacă variabilele aleatoare NU sunt independente, se calculează variabila produs şi apoi media ei, cu definiţia.

6 *oricare ar fi variabila aleatoare X, are loc relaţia:*

$$(M[X])^2 \leq M\left[X^2\right]$$

7 ***Inegalitatea lui Schwarz****:*

Fie X şi Y două variabile aleatoare. Are loc inegalitatea: $(M[X \cdot Y])^2 \leq M\left[X^2\right] \cdot M\left[Y^2\right]$

Observație:

Dacă $g(x)$ este o funcție și X este o variabilă aleatoare, atunci media variabilei aleatoare $g(X)$ este:

$$M\left[g(X)\right] = \sum_{i=1}^{n} g(x_i) \cdot p_i$$ ***(v.a. discretă simplă)***

$$M\left[g(X)\right] = \int_{-\infty}^{+\infty} g(x) \cdot f(x) dx$$ ***(v.a. continuă)***

MOMENT INIȚIAL DE ORDIN "k"

Pentru o variabilă aleatoare X *, momentul inițial de ordin* k*, cu* $k \in \mathbb{N}$ *, este media variabilei* X^k *.*

Notații uzuale: m_k *sau* $M_k[X]$ *sau* $M\left[X^k\right]$.

V.a. discretă simplă

$$m_k = M\left[X^k\right] = \sum_{i \geq 1} x_i^k \cdot p_i$$

V.a. continuă

$$m_k = M\left[X^k\right] = \int_{-\infty}^{\infty} x^k \cdot f(x)\, dx$$

Observaţii:

- *Momentul iniţial de ordinul 0 al unei variabile aleatoare* X *este:*

$$m_0 = M\left[X^0\right] = M[1] = 1$$

- *Momentul iniţial de ordinul 1 al unei variabile aleatoare* X *este chiar media variabilei:*

$$m_1 = M\left[X^1\right] = M[X]$$

MOMENT CENTRAT DE ORDIN ”k”

În raport cu variabila aleatoare X*, se numeşte moment centrat de ordin* k *raportat la constanta ”a” media variabilei* $(X-a)^k$.

Pentru $a = M[X]$ *(constanta este media variabilei* X *), obţinem* ***momentul centrat de ordin*** k ***al variabilei*** X *:*

V.a. discretă simplă

$$\mu_k(X) = M\left(\left(X - M[X]\right)^k\right) = \sum_{i \geq 1}\left(x_i - M[X]\right)^k \cdot p_i$$

V.a. continuă

$$\mu_k(X) = M\left(\left(X - M[X]\right)^k\right) = \int_{-\infty}^{\infty}(x-m)^k f(x)\,dx$$

<u>Observaţie</u>:

Variabila aleatoare $X - M[X]$ *se numeşte* ***abaterea de la medie*** *a variabilei aleatoare* X .

Evident, media acestei variabile este nulă: $M\big[X - M[X]\big] = 0$

DISPERSIA

Pentru o variabilă aleatoare care are medie finită, ***dispersia*** *(sau* ***varianța****, en. variance) este un indicator numeric al gradului de împrăștiere (dispersare) a valorilor variabilei aleatoare în jurul mediei .*

Notații uzuale: $D^2[X]$, σ^2, $Var[X]$.

Dispersia variabilei aleatoare X *este momentul centrat de ordinul 2 al variabilei:*

$$D^2[X] = M\left[(X-m)^2\right] \quad \text{unde } m = M[X]$$

sau, echivalent:

$$\boxed{D^2[X] = M\left[X^2\right] - \left(M[X]\right)^2}$$

V.a. discretă simplă

$$D^2[X] = \sum_{i=1}^{n} (x_i - m)^2 \cdot p_i$$

V.a. continuă

$$D^2[X] = \int_{-\infty}^{+\infty} (x-m)^2 \cdot f(x)\, dx$$

PROPRIETĂȚI ALE DISPERSIEI

1 *dispersia unei constante este nulă:* $D^2[c] = 0$

2 *două variabile aleatoare care diferă printr-o constantă au dispersiile egale:* $D^2[a+X] = D^2[X]$

3 $\boxed{D^2[aX] = a^2 D^2[X]}$

4 *dispersia unei sume finite de variabile aleatoare independente (în totalitate sau două câte două) este egală cu suma dispersiilor:*

$$D^2[X+Y+Z+...] = D^2[X] + D^2[Y] + D^2[Z] + ...$$

ABATEREA STANDARD

*În practică nu se foloseşte dispersia (care, din punct de vedere dimensional reprezintă pătratul variabilei în cauză) ci **abaterea standard** (en. standard deviation):*

$$\sigma = \sqrt{D^2[X]}$$

care are avantajul exprimării prin aceleaşi unităţi de măsură ca şi valorile variabilei aleatoare X.

COVARIANȚA

Covarianța este un indicator numeric al legăturii dintre 2 variabile aleatoare și reprezintă momentul centrat mixt al celor două variabile.

Covarianța variabilelor aleatoare X *și* Y *se definește prin:* $Cov[X,Y] = M\big[(X - M[X])(Y - M[Y])\big]$

sau, echivalent:

$$\boxed{Cov[X,Y] = M[XY] - M[X]M[Y]}$$

PROPRIETĂȚI ALE COVARIANȚEI

1 $Cov[X,Y] = Cov[Y,X]$

2 $Cov[X,X] = D^2[X]$

3 *Pentru orice două constante* $a,b \in \mathbb{R}$ *avem:* $Cov[X+a, Y+b] = Cov[X,Y]$

4 *Cu ajutorul covarianței se poate exprima dispersia sumei a două variabile aleatoare* X *și* Y *:*

$$D^2[X \pm Y] = D^2[X] + D^2[Y] \pm 2Cov[X,Y]$$

5 *Dacă* X *și* Y *sunt variabile aleatoare independente, atunci* $Cov[X,Y] = 0$.

RECIPROC NU ESTE ADEVĂRAT:

variabilele aleatoare X *și* Y *pot avea covarianța nulă și să nu fie independente (exemplu la vectori aleatori)*

COEFICIENTUL DE CORELAȚIE

***Coeficientul de corelație** al variabilelor aleatoare X şi Y (cu abaterile standard $\sigma_X \neq 0$ şi $\sigma_Y \neq 0$) este o **măsură a dependenței liniare** dintre cele două variabile și este reprezentat de numărul:*

$$\rho[X,Y] = \frac{Cov[X,Y]}{\sigma_X \cdot \sigma_Y}$$

Valoarea pozitivă a coeficientului de corelație indică faptul că valorile celor două variabile aleatoare cresc sau descresc împreună, iar o valoare negativă a coeficientului de corelație indică faptul că valorile uneia dintre variabile cresc în timp ce valorile celeilalte descresc.

PROPRIETĂȚI ALE CORFICIENTULUI DE CORELAȚIE

1 *Dacă X şi Y sunt variabile aleatoare independente, atunci $\rho[X,Y] = 0$.*

RECIPROC NU ESTE ADEVĂRAT:

variabilele aleatoare pot fi necorelate – ceea ce este echivalent cu faptul că au covarianța nulă – fără a fi independente. Un exemplu în acest sens va fi prezentat la vectori aleatori

2 *Pentru orice variabile aleatoare X şi Y avem:* $-1 \leq \rho[X,Y] \leq 1$

3 *Dacă pentru două constante reale a şi b, variabila aleatoare Y se poate scrie: $Y = aX + b$, atunci:*

$$\rho[X,Y] = \begin{cases} 1, & a > 0 \\ -1, & a < 0 \end{cases}$$

***Observaţie*:**

Corelațiile ”puternice” între două variabile au coeficientul de corelație (în modul) cât mai apropiat de 1. Cu cât valoarea coeficientului de corelație este mai aproape de 0, cu atât ipoteza conform căreia cele două variabile sunt necorelate este mai ușor de acceptat. În statistică, valori ale coeficientului de corelație de 0.12 sau -0.15 indică faptul că cele două variabile nu prezintă o asociere de tip liniar.

Se consideră două variabile aleatoare discrete, independente, cu tablourile de repartiție:

$$X=\begin{pmatrix} x & x+1 & x+2 & x+3 \\ \frac{1}{10} & \frac{1}{5} & \frac{3}{10} & \frac{2}{5} \end{pmatrix} \quad \text{și respectiv} \quad Y=\begin{pmatrix} 4 & 8 & 12 \\ p & p^2 & p^2 \end{pmatrix}$$

a) *Determinați* p ;

b) *Determinați* x *știind că* $M[X]=2$;

c) *Calculați* $D^2[X]$; $D^2[Y]$;

d) *Calculați* $M[XY]$.

a) *Din condiția* $\sum_{i=1}^{3} p_i = 1$ *obținem:* $p+2p^2=1$, *de unde rezultă* $p=\frac{1}{2}$ *și*

$$Y=\begin{pmatrix} 4 & 8 & 12 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \end{pmatrix}$$

$$\left.\begin{array}{r} \textbf{b)}\ M[X]=\frac{1}{10}x+\frac{1}{5}(x+1)+\frac{3}{10}(x+2)+\frac{2}{5}(x+3)=x+2 \\ \textit{din enunț:}\quad M[X]=2 \end{array}\right\} x=0 \quad X=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ \frac{1}{10} & \frac{1}{5} & \frac{3}{10} & \frac{2}{5} \end{pmatrix}$$

$$\left.\begin{array}{r} \textbf{c)}\ M[X^2]=\sum_{i=1}^{4} x_i^2 \cdot p_i = 0\cdot\frac{1}{10}+1\cdot\frac{1}{5}+4\cdot\frac{3}{10}+9\cdot\frac{2}{5}=5 \\ M[X]=2 \end{array}\right\} D^2[X]=M[X^2]-(M[X])^2=1$$

$$M[Y]=4\cdot\frac{1}{2}+8\cdot\frac{1}{4}+12\cdot\frac{1}{4}=2+2+3=7$$

$$X=\begin{pmatrix}0 & 1 & 2 & 3\\ \frac{1}{10} & \frac{1}{5} & \frac{3}{10} & \frac{2}{5}\end{pmatrix}$$

$$M\left[Y^2\right]=\sum_{i=1}^{3} y_j^2\cdot p_j=4^2\cdot\frac{1}{2}+8^2\cdot\frac{1}{4}+12^2\cdot\frac{1}{4}=8+16+36=60$$

$$Y=\begin{pmatrix}4 & 8 & 12\\ \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4}\end{pmatrix}$$

$$D^2[Y]=M\left[Y^2\right]-\left(M[Y]\right)^2=60-49=11$$

d) $X\cdot Y=\begin{pmatrix}x_i\cdot y_j\\ p_{ij}\end{pmatrix}_{\substack{i=\overline{1,n}\\ j=\overline{1,m}}}$ *unde probabilitatea* p_{ij} *este probabilitatea realizării evenimentelor* $(X=x_i)$ *și* $(Y=y_j)$

adică $p_{ij}=P\left[(X=x_i)\cap(Y=y_j)\right]$

Deoarece variabilele sunt independente (din enunț), $p_{ij}=p_i\cdot p_j$

$$XY:\begin{pmatrix}\boxed{0\cdot4} & \boxed{0\cdot8} & \boxed{0\cdot12} & 1\cdot4 & \boxed{1\cdot8} & \boxed{1\cdot12} & \boxed{2\cdot4} & 2\cdot8 & \boxed{2\cdot12} & \boxed{3\cdot4} & \boxed{3\cdot8} & 3\cdot12\\ \frac{1}{20} & \frac{1}{40} & \frac{1}{40} & \frac{1}{10} & \frac{1}{20} & \frac{1}{20} & \frac{3}{20} & \frac{3}{40} & \frac{3}{40} & \frac{2}{10} & \frac{2}{20} & \frac{2}{20}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\boxed{0} & 4 & \boxed{8} & \boxed{12} & 16 & \boxed{24} & 36\\ \frac{1}{10} & \frac{1}{10} & \frac{1}{5} & \frac{1}{4} & \frac{3}{40} & \frac{7}{40} & \frac{2}{20}\end{pmatrix}$$

$$M[XY]=14$$

Se consideră variabilele aleatoare discrete simple: $X = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}$ *și* $Y = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ \frac{1}{6} & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$

a) *Calculați* $M[X]$, $M[Y]$, $D^2[X]$, $D^2[Y]$;

b) *Calculați* $M[X+2]$, $D^2[X+2]$, $M[3Y]$ *și* $D^2[3Y]$;

c) *Calculați* $Cov[X,Y]$ *și* $\rho[X,Y]$ *știind că* $M[XY] = \frac{2}{3}$. *Interpretați legătura dintre cele 2 variabile aleatoare folosind coeficientul de corelație determinat.*

a) $M[X] = \sum_{i=1}^{2} x_i \cdot p_i = 0 \cdot \frac{1}{3} + 1 \cdot \frac{2}{3} = \frac{2}{3}$ $\qquad$ $M[Y] = \sum_{i=1}^{3} y_i \cdot p_i = 0 \cdot \frac{1}{6} + 1 \cdot \frac{1}{2} + 2 \cdot \frac{1}{3} = \frac{7}{6}$

Pentru a calcula dispersia, folosim formula "de lucru": $D^2[X] = M[X^2] - (M[X])^2$

Pentru a calcula media lui X^2 *putem proceda în două moduri:*

- *Calculăm mai întâi variabila* X^2 *și apoi media ei:*

$$X^2 = X = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix} \quad , \; M[X^2] = \frac{2}{3}$$

- *Folosim definiția momentului inițial de ordin 2 pentru variabile aleatoare discrete:*

$$m_2 = M[X^2] = \sum_{i=1}^{2} x_i^2 \cdot p_i = 0 \cdot \frac{1}{3} + 1 \cdot \frac{2}{3} = \frac{2}{3}$$

$$D^2[X] = M[X^2] - (M[X])^2 = \frac{2}{9}$$

$$Y = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ \frac{1}{6} & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

$$M[Y] = 0 \cdot \frac{1}{6} + 1 \cdot \frac{1}{2} + 2 \cdot \frac{1}{3} = \frac{7}{6}$$

$$M\left[Y^2\right] = \sum_{i=1}^{3} y_j^2 \cdot p_j = 0^2 \cdot \frac{1}{6} + 1^2 \cdot \frac{1}{2} + 2^2 \cdot \frac{1}{3} = \frac{11}{6}$$

$$D^2[Y] = M\left[Y^2\right] - \left(M[Y]\right)^2 = \frac{11}{6} - \frac{49}{36} = \frac{17}{36}$$

b) *Se folosesc proprietățile mediei și dispersiei:*

$$M[X+2] = 2 + M[X] = 2 + \frac{2}{3} = \frac{8}{3} \qquad D^2[X+2] = D^2[X] = \frac{2}{9}$$

$$M[3Y] = 3M[Y] = 3 \cdot \frac{7}{6} = \frac{7}{2} \qquad D^2[3Y] = 3^2 \cdot D^2[Y] = 9 \cdot \frac{17}{36} = \frac{17}{4}$$

c)

$$Cov[X,Y] = M[XY] - M[X]M[Y] = \frac{2}{3} - \frac{2}{3} \cdot \frac{7}{6} = -\frac{1}{9}$$

$$\rho[X,Y] = \frac{Cov[X,Y]}{\sigma_X \cdot \sigma_Y} = \frac{-\frac{1}{9}}{\sqrt{D^2[X]}\sqrt{D^2[Y]}} = -\frac{2}{\sqrt{34}} \simeq -\frac{2}{5.83} = -0.34$$

Interpretarea legăturii dintre cele 2 v.a. folosind coeficientul de corelație:

Legătura liniară dintre cele 2 v.a. este slabă (spre moderată, dată de valoarea 0.34) și invers proporțională (dată de semnul negativ): când valorile unei variabile cresc, valorile celeilalte descresc.

Se consideră variabila aleatoare X *cu densitatea de repartiție:* $f(x)=\begin{cases} x+1, & -1\le x\le 0 \\ 1-x, & 0<x\le 1 \\ 0, & \text{în rest}\end{cases}$

Să se determine $M[X]$ *și* $D^2[X]$.

$$M[X]=\int_{-\infty}^{\infty} x\cdot f(x)\,dx$$

$$M[X]=\int_{-\infty}^{\infty} x\cdot f(x)\,dx=\int_{-\infty}^{-1}0\,dx+\int_{-1}^{0}x\cdot(x+1)\,dx+\int_{0}^{1}x\cdot(1-x)\,dx+\int_{1}^{\infty}0\,dx=0$$

Pentru a calcula dispersia, folosim formula "de lucru": $D^2[X]=M[X^2]-(M[X])^2$

Pentru a calcula media lui X^2 *folosim definiția momentului inițial de ordinul 2 pentru variabile continue:*

$$m_2=M[X^2]=\int_{-\infty}^{\infty} x^2\cdot f(x)\,dx=\int_{-\infty}^{-1}0\,dx+\int_{-1}^{0}x^2\cdot(x+1)\,dx+\int_{0}^{1}x^2\cdot(1-x)\,dx+\int_{1}^{\infty}0\,dx=\frac{1}{6}$$

$$D^2[X]=M[X^2]-(M[X])^2=\frac{1}{6}-0=\frac{1}{6}$$