

Notas de Agujeros Negros

Jose Manuel Torres Chavez

24 de noviembre de 2011

El siguiente material se puede consultar con más detalle en [9, 8].

1. Agujero Negro de Schwarzschild

La solución de Schwarzschild describe un espacio-tiempo vacío que es esféricamente simétrico y estático. De acuerdo al teorema de Birkoff esta métrica es la única solución a este caso. Los coeficientes métricos son irregulares en $r = 0, 2M$, pero para objetos astrofísicos como estrellas sus dimensiones son bastante mayores a este valor, por lo que estos problemas en la métrica de Schwarzschild no tienen relevancia.

El problema surge cuando planteamos un espacio totalmente vacío y tratamos de entenderlo en términos de la métrica de Schwarzschild. En la región $0 \leq r \leq 2M$ las coordenadas (t, r) intercambian papeles y si bien se puede mostrar que la singularidad en $r = 2M$ es solamente por efecto de las coordenadas (el tensor de curvatura es regular), en $r = 0$ la curvatura diverge y con ello las fuerzas de marea crecen ilimitadamente.

Por otro lado podemos utilizar la libertad del sistema coordenado para buscar una solución del tipo

$$ds^2 = -\alpha^2 dt^2 + \psi^4 (d\tilde{r}^2 + \tilde{r}^2 d\Omega^2) \quad (1)$$

la cual se puede encontrar a partir de las ecuaciones de Einstein. Los valores de α , ψ que resuelven las ecuaciones son

$$\alpha^2 = \frac{2\tilde{r} - M}{2\tilde{r} + M}, \quad (2)$$

$$\psi = 1 + \frac{M}{2\tilde{r}}. \quad (3)$$

Esta solución se conoce como la métrica de Schwarzschild en coordenadas isotrópicas. Esta métrica es regular salvo en $\tilde{r} = 0$ y de acuerdo al teorema de Birkoff corresponde al mismo espacio-tiempo que la solución de Schwarzschild; esto se puede verificar encontrando el cambio de coordenadas que lleva la métrica a esa forma

$$r_{Sch} = \tilde{r} \left(1 + \frac{M}{2\tilde{r}} \right)^2. \quad (4)$$

Hay que observar que la superficie $r_{Sch} = 2M$ corresponde a $r = M/2$ en estas coordenadas. Otra propiedad remarcable es que tanto $r \rightarrow 0$ como $r \rightarrow \infty$ corresponden a $r_{Sch} \rightarrow \infty$ y el espacio posee una isometría dada por $r \rightarrow M^2/4r$. En estas coordenadas no se cubre la región interior de la solución de Schwarzschild y se observa una estructura de agujero de gusano que conecta dos universos idénticos. La singularidad en $r = p$ en este caso es efecto coordinado por la compactificación de un universo de extensión infinita en una región coordinada finita.

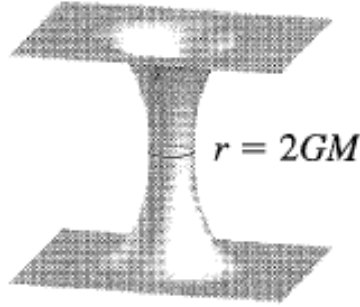


Figura 1: Estructura de agujero de gusano en una hipersuperficie de t constante en la métrica de Schwarzschild expresada en coordenadas isotrópicas.

1.1. Conos de luz

Para comprender mejor la naturaleza de la superficie $r_{Sch} = 2M$ conviene estudiar el comportamiento de los conos de luz. Para trayectorias nulas en coordenadas de Schwarzschild tenemos

$$\frac{dt}{dr} = \pm \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-1}. \quad (5)$$

De acuerdo a este resultado los conos de luz se cierran al acercarse a esta superficie, por lo que en este sistema coordenado se observa que los rayos de luz que se acercan a esta superficie nunca la alcanzan. Un resultado similar se obtiene en coordenadas isotrópicas.

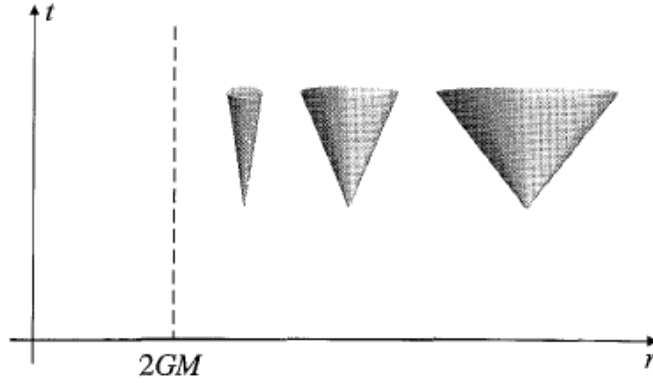


Figura 2: Diagrama de los conos de luz al acercarse a la superficie $r = 2M$ en coordenadas de Schwarzschild.

La ecuación (5) puede integrarse en términos del *radio tortuga*

$$r^* = r + 2M \ln \left(\frac{r}{2M} - 1 \right) \quad (6)$$

obteniendo

$$t = \pm r^* + \text{const} \quad (7)$$

Conviene usar esta función para hacer cambios de coordenadas que nos ayuden a estudiar mejor la región $r_{Sch} \leq 2M$. Definiendo coordenadas nulas

$$v = t + r^* \quad , \quad (8)$$

$$u = t - r^* \quad , \quad (9)$$

se observa que los rayos entrantes tienen un valor de v constante mientras que los salientes tienen u constante. Sustituyendo t por v da la métrica en coordenadas de *Eddington-Finkelstein* entrantes¹

$$ds^2 = -(1 - 2M/r)dv^2 + 2dvdr + r^2d\Omega^2 \quad , \quad (10)$$

y un cambio de coordenadas adicional $\tilde{t} = v - r$ lleva a la métrica a la forma de *Kerr-Schild*

$$ds^2 = -(1 - \frac{2M}{r})d\tilde{t}^2 + \frac{4M}{r}d\tilde{t}dr + r^2d\Omega^2 \quad . \quad (11)$$

En estas coordenadas la pendiente de los conos de luz es

$$\frac{d\tilde{t}}{dr} = -\frac{\pm 1 - 2M/r}{1 - 2M/r} \quad (12)$$

que para el caso entrante siempre es igual a -1 , los rayos pasan sin problema la superficie $r = 2M$. Más interesante es observar el comportamiento de los rayos salientes, ya que su pendiente se inclina conforme más cerca están de esta superficie, volviéndose infinita en ese lugar y cambiando de signo en el interior. Los rayos salientes que se originan en $r \leq 2M$ en realidad están dirigidos hacia el interior y el caso límite se alcanza en $r = 2M$ donde se mantienen estacionarios.

De este análisis se observa que la superficie $r = 2M$ tiene un carácter especial ya que divide el espacio-tiempo en dos regiones, la región exterior (I) en la que los rayos de luz salen libremente y una región interior (II) en la cual todas las trayectorias nulas y temporaloides están atrapadas y alcanzan eventualmente la singularidad en $r = 0$. Este tipo de superficies son llamadas *horizontes de eventos* y es común la presencia de ellas cuando hay campos gravitatorios intensos. El hecho de que la luz no pueda escapar de la región (II) justifica que a esta clase de espacio-tiempos se les llame agujeros negros.

El estudio en coordenadas isotrópicas mostró que existe otra región (III) isométrica a la región (I) que no es cubierta por estos sistemas coordenados. También en nuestro estudio hicimos énfasis en el análisis de los rayos entrantes, si hubiéramos considerado los rayos salientes se habría favorecido la

¹Esta es solo una de las versiones de estas coordenadas, también las hay entrantes y mixtas que se obtienen al sustituir t por u , o simultáneamente (t, r) por (u, v)

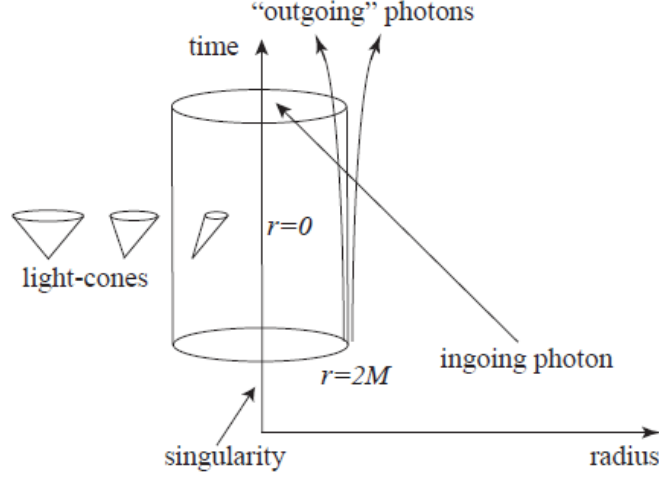


Figura 3: Diagrama de los conos de luz en coordenadas de Kerr-Schild. Los rayos de luz entrantes poseen siempre la misma pendiente y atraviesan la superficie $r = 2M$ sin problemas. En el interior el extremo saliente del cono está suficientemente inclinado como para que los rayos no puedan escapar.

elección de u como coordenada en lugar de v y en este caso se puede llegar a que la superficie $r = 2M$ divide al espacio-tiempo en dos regiones, los rayos salientes pasan del interior al exterior sin problema, mientras que los entrantes se desvían de modo que si se originan en la región externa nunca pueden pasar a la región interna (IV). Esto es equivalente a invertir el tiempo en la región (II) y por ello a esta estructura se le conoce como agujero blanco.

1.2. Coordenadas de Kruskal-Szekeres

Es posible encontrar coordenadas que cubren todas las regiones de la solución de Schwarzschild, para ello tomamos la forma de Eddington-Finkelstein considerando ambas coordenadas nulas (u, v)

$$ds^2 = -(1 - 2M/r)dudv + r^2 d\Omega^2 \quad , \quad (13)$$

donde r es una función implícita dada por $(v - u)/2 = r^*$. Estas coordenadas aún no son adecuadas porque el coeficiente g_{uv} se anula en $r = 2M$ y esta superficie queda en valores infinitos de estas coordenadas. Una transformación

que asigna valores finitos a estos puntos es

$$v' = e^{v/4M} \quad (14)$$

$$u' = -e^{-u/4M} \quad , \quad (15)$$

y en términos de estas coordenadas la métrica queda

$$ds^2 = -\frac{32M^3}{r} e^{-r/2M} dv' du' + r^2 d\Omega^2 \quad . \quad (16)$$

Podemos recombinar estas coordenadas en una espacialoide y una temporaloide

$$T = (v' + u')/2 \quad (17)$$

$$R = (v' - u')/2 \quad , \quad (18)$$

y la métrica toma la forma

$$ds^2 = -\frac{32M^3}{r} e^{-r/2M} (-dT^2 + dR^2) + r^2 d\Omega^2 \quad . \quad (19)$$

En estas coordenadas los conos de luz tienen pendiente ± 1 , las superficies de r constante son hipérbolas

$$T^2 - R^2 = (1 - r/2M) e^{r/2M} \quad (20)$$

mientras que las de t constante son rectas $T/R = \tanh(t/4M)$. Aquí claramente se ve que las coordenadas iniciales tenían una degeneración justo en el horizonte.

1.3. Diagramas conformes (Carter-Penrose)

Los diagramas conformes son una herramienta para el estudio del espacio-tiempo, cuya utilidad radica en que las transformaciones conformes dejan invariantes los conos de luz. La idea básica consiste en hacer una transformación de coordenadas que nos permita describir la totalidad del espacio en un rango coordinado finito, y mediante una transformación conforme obtener un espacio con métrica regular en los puntos correspondientes al infinito, de modo que es posible apreciar la estructura causal en estas regiones.

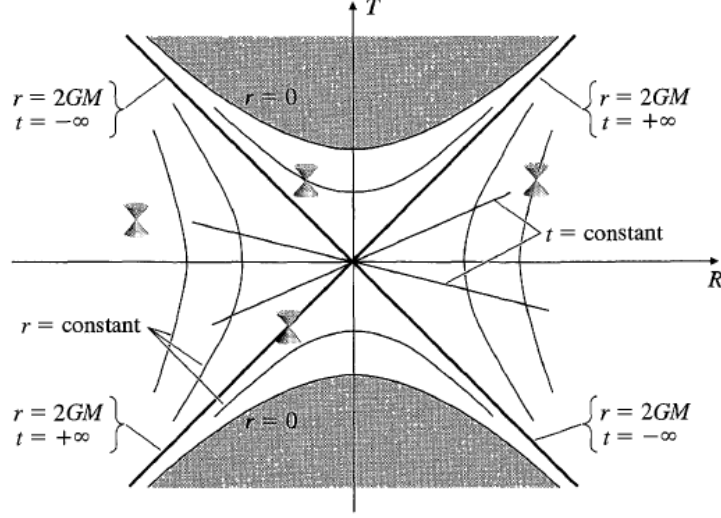


Figura 4: Diagrama de un agujero negro de Schwarzschild en coordenadas de Kruskal-Szekeres.

Como ejemplo observemos el caso del espacio-tiempo de Minkowski. La métrica tomando coordenadas esféricas nulas toma la forma

$$ds^2 = -dudv + \frac{1}{4}(v - u)^2 d\Omega^2 \quad . \quad (21)$$

Haciendo una transformación a coordenadas en un rango finito

$$U = \arctan(u) \quad (22)$$

$$V = \arctan(v) \quad (23)$$

la métrica queda

$$ds^2 = \frac{\sec^2(U) \sec^2(V)}{4} (-dUdV + \sin^2(V - U) d\Omega^2) \quad (24)$$

Si volvemos a introducir coordenadas temporaloides y espacialoides veremos que esta métrica corresponde a la métrica de $R \times S^3$ multiplicada por una función de las coordenadas. En este diagrama se puede apreciar la estructura de las regiones ubicadas originalmente en valores coordenados infinitos. Distinguiamos el infinito temporal pasado y futuro i^\mp como los puntos donde

se originan y terminan las trayectorias temporaloides, el infinito espacial i^0 que es donde terminan las trayectorias espacialoides. También distinguimos las trayectorias nulas que parten y llegan a estos puntos que son los infinitos nulos \mathcal{J}^\pm

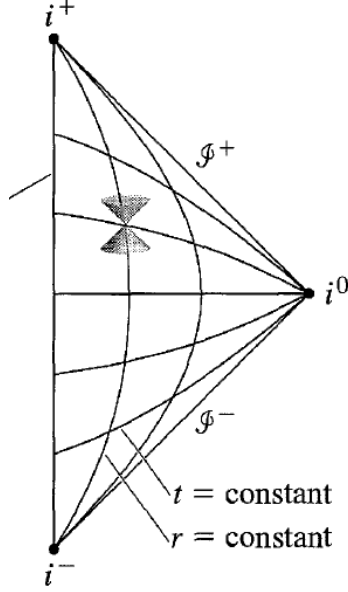


Figura 5: Diagrama de Penrose del espacio-tiempo de Minkowski compactificado.

Podemos aplicar estas ideas al agujero negro de Schwarzschild tomándolo la expresión en coordenadas (u', v') , en este caso hacemos el cambio

$$U = \arctan(u') \quad (25)$$

$$V = \arctan(v') \quad (26)$$

en este caso las trayectorias con r constante se obtienen de la relación

$$\tan(U) \tan(V) = (1 - r/2M)e^{r/2M} \quad (27)$$

entonces observamos que el horizonte de eventos está dado por la líneas $U = 0$, $V = 0$. La superficie $r = 0$ está dada por la relación $\tan(U) \tan(V) = 1$, que puede verificarse que está dada en el diagrama por

$$U = -V \pm \frac{\pi}{2}. \quad (28)$$

Decimos que el espacio es asintóticamente plano si su estructura en infinito coincide con la del espacio de Minkowski como ocurre en este caso.

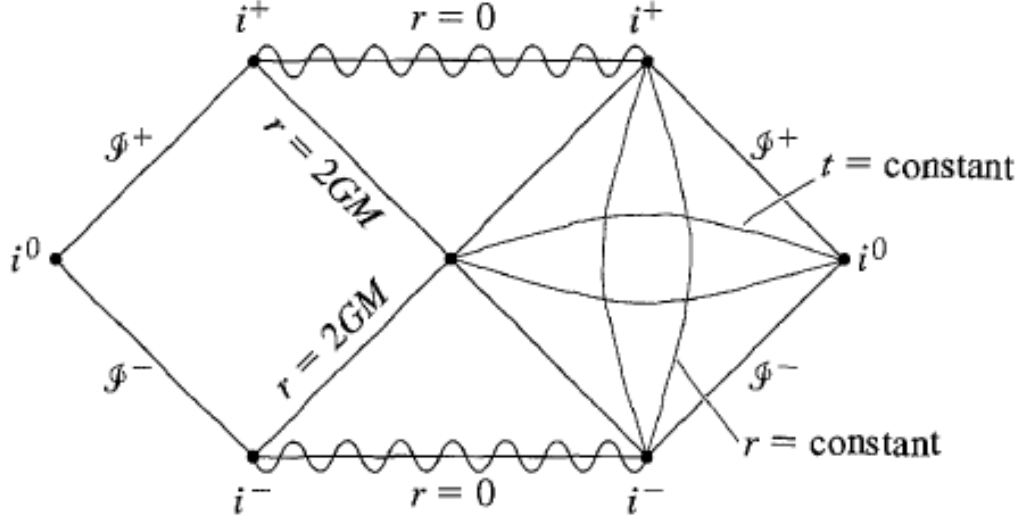


Figura 6: Diagrama de Penrose de un agujero negro de Schwarzschild.

2. Agujeros Negros en general

En la formación de agujeros negros más importante que la existencia de singularidades es la existencia de regiones separadas causalmente. Este tipo de estructuras aparecen en escenarios de colapso gravitacional realistas y de acuerdo a los teoremas enunciados por Hawking y Penrose están estrechamente relacionadas a la formación de singularidades.

2.1. Horizonte de eventos

Un horizonte de eventos (futuro) se define formalmente como la región que divide el espacio-tiempo en dos regiones caracterizadas por si los rayos de luz salientes alcanzan o no el infinito nulo \mathcal{I}^+ . Por definición un horizonte

de eventos es una hipersuperficie nula y es un concepto global que requiere del conocimiento de la totalidad del espacio-tiempo.

Para el caso de un espacio-tiempo estacionario asintóticamente plano es posible encontrar horizontes de eventos utilizando coordenadas adecuadas (como el caso de Schwarzschild). El sistema coordenado ha de ser tal que en infinito toma la forma usual de Minkowski en coordenadas esféricas y analizar la región en la que el vector normal a las superficies de r constante cambie de ser espacialoide a temporaloide. Esta condición es normalmente

$$g^{rr}(r_H) = 0 \quad . \quad (29)$$

Este criterio sólo es válido en casos muy restringidos y en general es conveniente contar con otras formas de discernir si un espaci-tiempo posee la estructura de agujero negro.

2.2. Horizontes aparentes

El concepto de horizontes aparentes es muy útil ya que su definición es local en el sentido de que están definidos sobre hipersuperficies espacialoides del espacio-tiempo. Un horizonte aparente está definido como la superficie marginalmente atrapada exterior en una región, esto es que la expansión de geodésicas nulas salientes ortogonales a la superficie es cero. Esta condición formalmente enunciada requiere que el horizonte aparente sea solución a una ecuación diferencial elíptica de segundo orden [1].

La presencia de superficies atrapadas está intimamente ligada a la formación de singularidades, lo cual se expresa en los teoremas de singularidades de Hawking y Penrose que informalmente pueden enunciarse como: *Para un espacio-tiempo genérico en el que se cumple la condición de energía fuerte, la presencia de una superficie atrapada implica la existencia de una curva temporaloide cerrada o una singularidad en el interior.*

Debido a la existencia inevitable de singularidades, una de las principales interrogantes de la Relatividad General es si a diferencia del caso de agujeros negros es posible la formación de *singularidades desnudas* que no posean un horizonte de eventos que las desconecte causalmente de una región del espacio-tiempo. La falta de evidencia de este tipo de singularidades ha llevado

a la formulación de la **conjetura de censura cósmica**[6] que brevemente dice: *Si el espacio-tiempo se encuentra inicialmente en un estado genérico, no singular, asintóticamente plano y además se cumple la condición de energía dominante, el colapso gravitacional no genera singularidades desnudas.* [10]

2.3. Horizontes de Killing

Otras superficies interesantes son los llamados *Horizontes de Killing*, que son hipersuperficies nulas asociadas a un vector de Killing en las que este cambia de carácter temporal a espacial. Una característica de los espacio-tiempos estacionarios es la existencia de un vector de Killing asociado a las traslaciones temporales en infinito \vec{k} , y para el caso de agujeros negros estacionarios también se tiene un vector de Killing rotacional \vec{m} . Para agujeros negros estacionarios se tiene que el horizonte de eventos es un horizonte de Killing de la combinación $\vec{k} + \omega_H \vec{m}$, para un valor constante ω_H que depende del momento angular del sistema.

Un concepto asociado a los Horizontes de Killing es el de *gravedad superficial*, que puede interpretarse como la aceleración de una partícula estática cercana al horizonte medida por un observador en infinito. Como un vector de Killing χ^μ es proporcional al tangente a las geodésicas sobre el horizonte, cumple con la ecuación

$$\chi^\mu \nabla_\mu \chi^\nu = \kappa \chi^\nu, \quad (30)$$

donde κ es la gravedad superficial. Dado que $\vec{\chi}$ es vector de Killing y de acuerdo con el teorema de Frobenius, podemos transformar esta expresión en

$$\kappa^2 = -\frac{1}{2}(\nabla_\mu \chi_\nu)(\nabla^\mu \chi^\nu). \quad (31)$$

Cabe observar que bajo un reescalamiento del vector de Killing por una constante $\vec{\chi} \rightarrow c\vec{\chi}$, la gravedad superficial se ve reescalada $\kappa \rightarrow c^2 \kappa$. Una normalización natural en un espacio asintóticamente plano es requerir que la norma del vector de traslaciones temporales k^μ cumpla $k^2 = -1$ para $r \rightarrow \infty$ y apunte hacia el futuro.

Podemos verificar la afirmación de que la gravedad superficial corresponde a la aceleración de una partícula en el horizonte vista desde infinito en el caso

estático. En el horizonte el vector \vec{k} es proporcional a la cuadvirvelocidad del observador estático en el horizonte

$$k^\mu = V(x)u^\mu, \quad V = \sqrt{-k_\mu k^\mu} \quad (32)$$

donde V es el factor de corrimiento al rojo. La aceleración del observador estático en el horizonte es entonces

$$a_\mu = u^\nu \nabla_\nu u_\mu = \nabla_\mu \ln V \quad (33)$$

y la magnitud de esta aceleración es

$$a = V^{-1} \sqrt{\nabla_\mu V \nabla^\mu V} \quad (34)$$

Un observador en infinito mediría un valor corrido al rojo

$$\kappa = Va = \sqrt{\nabla_\mu V \nabla^\mu V} \quad (35)$$

y se puede verificar que esta expresión es equivalente a (31).

Para el caso de un agujero negro de Schwarzschild tenemos

$$V = \sqrt{1 - \frac{2M}{r}} \quad (36)$$

$$a = \frac{M}{r^2} \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-1/2} \quad (37)$$

$$\kappa = \frac{M}{r^2} \Big|_{r_H} = \frac{1}{4M}. \quad (38)$$

Cabe observar que aunque la aceleración necesaria para mantener una posición sobre el horizonte es infinita, el corrimiento al rojo hace que medida en infinito esto de un valor finito.

Para el caso no estático el horizonte de eventos no está asociado al horizonte de Killing de \vec{k} , y este último define una región en la que los observadores no se pueden mantener estacionarios, aún cuando esta región está fuera del horizonte de eventos.

2.4. Propiedades de agujeros negros

Un resultado importante enunciado en los teoremas de Israel es que los agujeros negros estacionarios sólo se caracterizan por la masa, la carga y el momento angular [4] y en general se observa que tras un colapso gravitacional el agujero negro final rápidamente tiende hacia una configuración estacionaria.

2.4.1. Masa

La densidad de energía de la materia que compone un sistema está codificada en el tensor de energía momento, que cumple una ley de conservación $\nabla_\mu T^{\mu\nu} = 0$. Esto no es suficiente para dar una definición adecuada de la masa de un sistema en Relatividad General ya que este tensor no considera la contribución del campo gravitacional a la energía total del sistema. Una cantidad adecuada para estos fines puede construirse cuando el espacio-tiempo posee un vector de Killing temporal k^μ . En este caso podemos construir una corriente

$$J_K^\mu := k_\nu R^{\mu\nu} = \nabla^\mu \nabla^\nu k_\nu, \quad (39)$$

la cual también cumple una ecuación de conservación $\nabla_\mu J_K^\mu = \frac{1}{2} k^\mu \nabla_\mu R = 0$. De este modo se puede definir una cantidad conservada que podemos asociar a la masa del sistema

$$I_K = \frac{1}{4\pi} \int_\Sigma n_\mu J_K^\mu dV = \frac{1}{4\pi} \int_\Sigma n_\mu \nabla_\nu \nabla^\mu k^\nu dV, \quad (40)$$

conocida como la *Integral de Komar*. En este caso podemos usar el teorema de Stokes para reescribir

$$I_K = \frac{1}{4\pi} \oint_{\partial\Sigma} n_\mu \nabla^\mu k^\nu dA_\nu. \quad (41)$$

2.4.2. Momento angular

Para un espacio-tiempo con un vector de Killing angular m^μ y espacialoide, es totalmente análogo el cálculo de una constante asociada a la magnitud

del momento angular del sistema, en este caso

$$J = -\frac{1}{8\pi} \oint_{\partial\Sigma} n_\mu \nabla^\mu m^\nu dA_\nu. \quad (42)$$

2.4.3. ADM

Otro enfoque para definir los conceptos de masa y momento angular de un sistema esta basado en el formalismo hamiltoniano establecido por Aenwitt, Deser y Misner [2], tomando para ello el límite de campo débil donde se puede identificar la densidad de energía como

$$\rho_{ADM} = \frac{1}{16\pi} {}^3R = \frac{1}{16\pi} \partial_j (\partial_i h_{ij} - \partial_j h), \quad (43)$$

y la densidad de momento como

$$j_{ADM\,i} = \frac{1}{8\pi} \partial_j (K_{ij} - \delta_j^i K) \quad (44)$$

Integrando estas expresiones y utilizando el teorema de Stokes se reducen estas fórmulas a integrales de superficie

$$M_{ADM} = \frac{1}{16\pi} \oint (\delta^{ij} \partial_i h_{jk} - \partial_k h) dA^k \quad (45)$$

$$P_{ADM}^i = \frac{1}{8\pi} \oint (K_j^i - \delta_j^i K) dA^j \quad (46)$$

Podemos definir una densidad de momento angular $l^i = \epsilon^{ijk} x_j j_{ADM\,i}$ y entonces tenemos para el momento angular total

$$J_{ADM}^i = \frac{1}{8\pi} \oint \epsilon^{ijk} x_j K_{kl} dA^l \quad (47)$$

donde el segundo término de la densidad de momento se anula al ser el elemento de área paralelo al vector de posición en infinito.

Es importante notar que estas expresiones se derivan en el límite de campo débil y que para una situación donde la dinámica sea fuerte las integrales de

volúmen no están bien justificadas; el hecho de que se tomen estas integrales de superficie en infinito hace que estas cantidades estén bien definidas a pesar de lo complicada que pueda ser la dinámica interna.

Un aspecto importante de la masa ADM es que bajo ciertas condiciones es semipositiva, siendo el espacio de Minkowski el único caso donde el valor de esta cantidad es cero. Este resultado es conocido como el *teorema de energía positiva*, y dice que la masa ADM de cualquier espacio-tiempo no singular, asintóticamente plano en el que se satisface la condición de energía dominante, es no negativa.

2.4.4. Carga eléctrica

Dado que la corriente electromagnética cumple una ecuación de continuidad, es posible mostrar que la carga eléctrica total es una cantidad conservada. La densidad de carga en una superficie espacialoide es $\rho_e = -n_\mu j^\mu$, y la carga total es entonces

$$Q = - \int_{\Sigma} \rho_e dV = - \frac{1}{4\pi} \int_{\Sigma} n_\mu \nabla_\nu F^{\mu\nu} dV, \quad (48)$$

y utilizando el teorema de Stokes

$$Q = - \oint_{\partial\Sigma} n_\mu F^{\mu\nu} dA_\nu. \quad (49)$$

2.4.5. Agujeros negros dinámicos

Las cantidades presentadas en los apartados anteriores tienen carácter general, y para el caso de agujeros negros estacionarios describen adecuadamente sus propiedades. Para casos con contenido de materia no trivial no es posible deducir de estas cantidades cuál es la contribución aislada del agujero negro a las propiedades del sistema. Para lidiar con esto se ha introducido el formalismo de horizontes aislados y dinámicos [3] que generaliza estos resultados.

El concepto de carga del agujero negro se generaliza fácilmente tomando la integral de carga sobre el horizonte del agujero negro, que es por definición la carga encerrada por el horizonte.

El momento angular se generaliza de un modo similar, basta que exista un vector de Killing rotacional sobre el horizonte y entonces la expresión final es similar a la integral de Komar definida previamente, tomada en este caso sobre el horizonte.

La generalización de la masa es más complicada y se deduce a partir de la termodinámica de agujeros negros. Un resultado importante es que la entropía de un agujero negro es proporcional al área de su horizonte, por lo cual en todo proceso el área solo puede crecer o permanecer constante. Esto nos lleva a definir la masa irreducible de un agujero negro en términos del área

$$M_{irr} = \sqrt{\frac{A}{16\pi}} \quad (50)$$

que es la masa de un agujero negro sin momento angular ni carga eléctrica, con área A . La masa de un agujero negro en general está dada por

$$M^2 = \left(M_{irr} + \frac{Q^2}{4M_{irr}} \right) + \frac{J^2}{4M_{irr}^2}. \quad (51)$$

2.5. Soluciones con carga y momento angular

De acuerdo a los teoremas sobre agujeros negros estacionarios, todos ellos pertenecen a la *familia de Kerr-Newman* caracterizada unicamente por tres parámetros: masa M , carga Q y momento angular J . En el caso de agujeros cargados la solución no es de vacío, pues hay que tener en cuenta que el campo electromagnético tiene tensor de energía-momento no nulo, y aparte debe satisfacer las ecuaciones de Maxwell. En coordenadas de *Boyer-Lindquist* (que coinciden con las coordenadas de Schwarzschild cuando $Q, J = 0$) el elemento de línea es

$$\begin{aligned} ds^2 = & -\frac{(\Delta - a^2 \sin^2 \theta)}{\Sigma} dt^2 - 2a \sin^2 \theta \frac{(r^2 + a^2 - \Delta)}{\Sigma} dt d\phi \\ & + \frac{\Sigma}{\Delta} dr^2 + \Sigma d\theta^2 + \left(\frac{(r^2 + a^2)^2 - \Delta a^2 \sin^2 \theta}{\Sigma} \right) \sin^2 \theta d\phi^2, \quad (52) \end{aligned}$$

donde

$$\Sigma = r^2 + a^2 \cos^2 \theta, \quad (53)$$

$$\Delta = r^2 - 2Mr + a^2 + Q^2, \quad (54)$$

$$a = \frac{J}{M}, \quad (55)$$

y la 1-forma potencial electromagnética está dada por:

$$A = \frac{Qr (dt - a \sin^2 \theta d\phi)}{\Sigma}. \quad (56)$$

Históricamente se hallaron primero casos particulares de esta métrica, que son el agujero negro cargado de Reissner-Nordström (RN con $J = 0$) [7][5] y el agujero negro rotante de Kerr ($Q = 0$).

Esta solución posee varias características que es importante recalcar. Existen horizontes de eventos dados por

$$r_{\pm} = M \pm \sqrt{M^2 - Q^2 - a^2}, \quad (57)$$

con $a = J/M$ el momento angular por unidad de masa. La existencia de varios horizontes esta asociado con la estructura interna completa de la solución, que es mucho más compleja que el caso de Schwarzschild (figuras 7, 8). También hay un horizonte de Killing asociado al vector de desplazamientos temporales \vec{k} caracterizado por

$$r_{\pm} = M \pm \sqrt{M^2 - Q^2 - a^2 \cos^2 \theta}. \quad (58)$$

En la región entre el horizonte y esta superficie no pueden haber observadores estáticos y se dice que los sistemas inerciales son arrastrados por la rotación del agujero negro. Para esta geometría la estructura de la singularidad cambia es temporaloide. Cabe notar que la existencia de horizontes está condicionada a $M^2 > Q^2 + a^2$, que para los casos especiales se reduce a: RN $M > |Q|$, Kerr $M > |a|$.

Análogamente al caso de Schwarzschild podemos reexpresar esta métrica en sistemas coordenados donde se remueven la singularidades coordenadas en los horizontes. Las coordenadas *quasi-isotrópicas* se obtienen al usar una

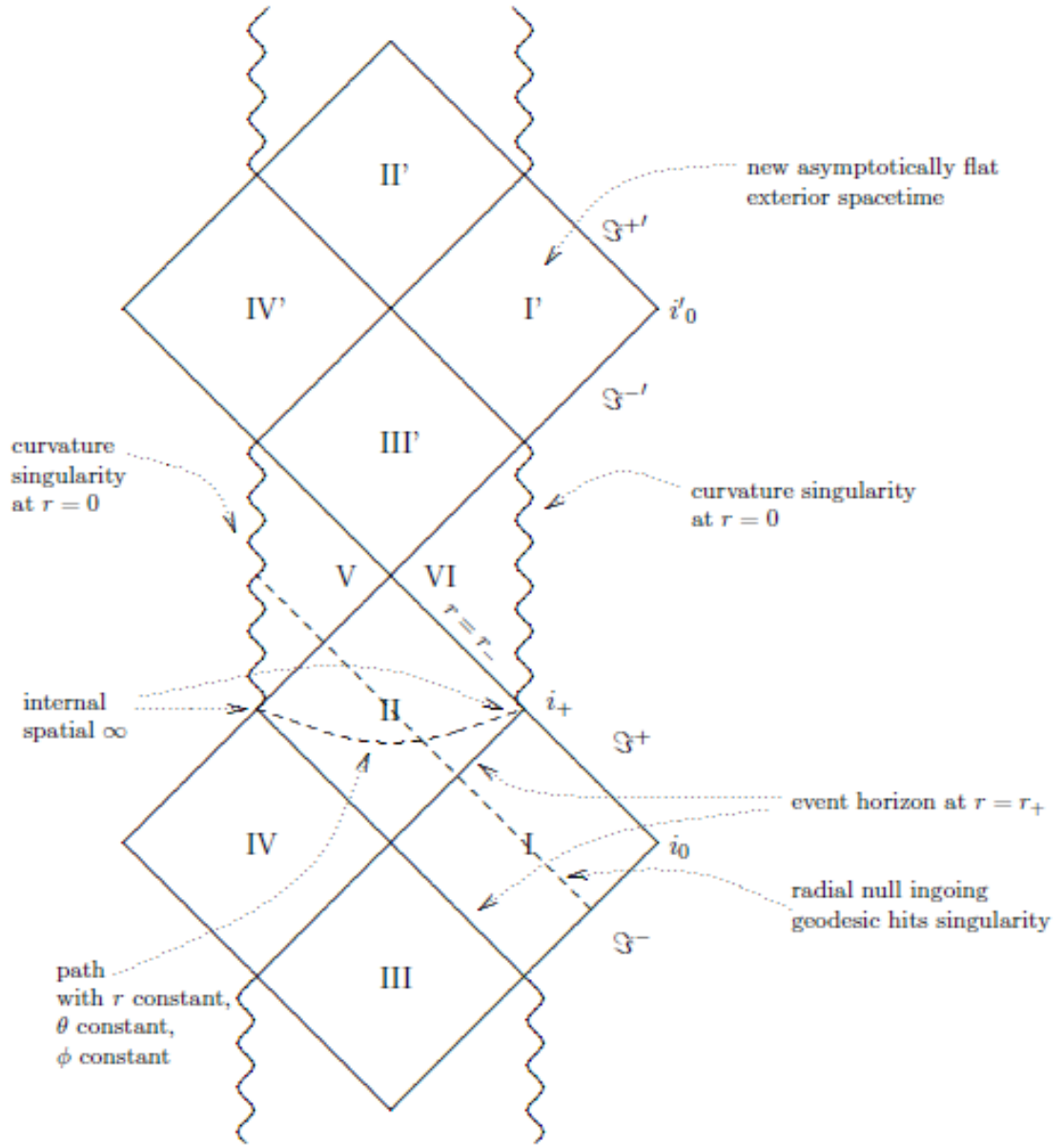


Figura 7: Diagrama de Penrose de un Agujero negro de Reissner-Nördstrom con $M > |Q|$. La misma estructura se repite indefinidamente en ambas direcciones temporales

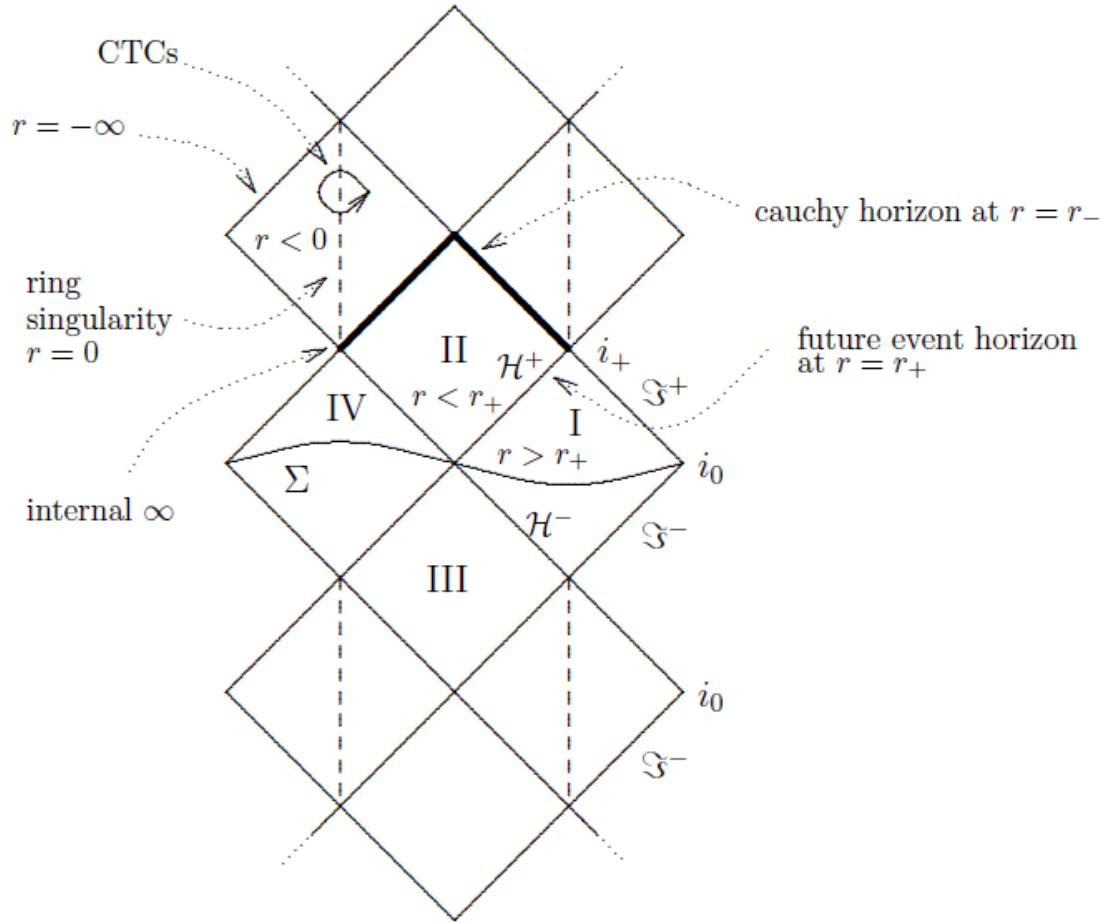


Figura 8: Diagrama de Penrose de un Agujero negro de Kerr con $M > |a|$. La misma estructura se repite indefinidamente en ambas direcciones temporales

coordenada radial que generaliza al radio isotrópico; la relación con el radio BL r es

$$r = \tilde{r} \left(1 + \frac{M + \sqrt{a^2 + Q^2}}{2\tilde{r}} \right) \left(1 + \frac{M - \sqrt{a^2 + Q^2}}{2\tilde{r}} \right), \quad (59)$$

este cambio altera la expresión de la métrica en su parte espacial, quedando entonces:

$$dl^2 = \psi^4 \left(d\tilde{r}^2 + \tilde{r}^2 (d\theta^2 + \chi \sin^2 \theta d\phi^2) \right), \quad (60)$$

con

$$\psi = \Sigma / \tilde{r}^2, \quad (61)$$

$$\chi = \frac{(r^2 + a^2)^2 - \Delta a^2 \sin^2 \theta}{\Sigma^2}. \quad (62)$$

Referencias

- [1] M. Alcubierre. *Introduction to 3+1 numerical relativity*. International series of monographs on physics. Oxford University Press, 2008.
- [2] R. L. Arnowitt, S. Deser, and C. W. Misner. *Gravitation: an introduction to current research*, pages 227–264. Wiley, New York , 1962.
- [3] A. Ashtekar and B. Krishnan. Isolated and dynamical horizons and their applications. *Living Reviews in Relativity*, 7(10), 2004.
- [4] M. Heusler. *Black hole uniqueness theorems*. Cambridge lecture notes in physics. Cambridge University Press, Cambridge UK, 1996.
- [5] G. Nordström. On the Energy of the Gravitational Field in Einstein's Theory. *Proc. Kon. Ned. Akad. Wet.*, 20:1238, 1918.
- [6] R. Penrose. The question of cosmic censorship. *J. Astrophys. Astron.*, 20:233–248, 1999.
- [7] H. Reissner. Über die Eigengravitation des elektrischen Feldes nach der Einsteinschen Theorie. *Ann. Phys*, 50:106, 1916.
- [8] P. K. Townsend. Black holes gr-qc/9707012. 1997.

- [9] R. Wald. *General relativity*. Physics/Astrophysics. University of Chicago Press, EUA, 1984.
- [10] R. M. Wald. Gravitational collapse and cosmic censorship. 1997. To appear in 'The Black Hole Trail', ed. by B. Iyer.