Algebra Linear e Geometria Analítica (M1002)

Departamento de Matemática
Faculdade de Ciências
Universidade do Porto

1 semestre 2018/2019

Programa

- Sistemas de equações lineares: Resolução de sistemas de equações lineares; matriz de um sistema; método de eliminação de Gauss.
- Matrizes: Adição e multiplicação de matrizes; matrizes invertíveis; cálculo da inversa de matrizes invertíveis. Discussão de sistemas.
- Determinantes: Expansão de laplace por co-factores; propriedades dos determinantes; determinantes e matrizes invertíveis; regra de Cramer. Áreas e volumes. Produto vectorial de dois vectores em R^3.
- Espaços vectoriais: Espaços vectoriais; subespaço; conjunto gerador e conjunto linearmente (in)dependente; bases e dimensão; mudanças de base.
- Aplicações lineares: Definição e exemplos; matriz de uma aplicação linear; núcleo e imagem de uma aplicação linear.
- Valores e vectores próprios: diagonalização de matrizes e endomorfismos. Potências de matizes diagonalizáveis.
- Cónicas

Avaliação

Exame. O exame da poca normal e da poca de recurso estará dividido em três grupos de questões.
Na época normal há possibilidade do primeiro e do segundo grupo de perguntas serem substituidos, se o estudante o quiser, pelo resultado de testes: o primeiro teste dia 24 de Outubro que vale 25% da nota final (5 valores) e pode, caso o estudante assim o escolha, substituir o primeiro grupo do exame; e o segundo teste dia 28 de Novembro que vale 30% da nota final (6 valores) e pode substituir o segundo grupo do exame. A substituição ou não do grupo será decidida apenas pelos alunos durante o exame (terão sempre acesso ao exame todo).
Na época de recurso, a classificação final de cada parte será sempre a melhor entre as classificações obtidas nas avaliações feitas.
Os alunos que estejam a fazer melhoria não podem substituir parte alguma do exame, terão de fazer o exame todo.

Bibliografia

- H. Anton; *Elementary linear algebra*.
- I. Cabral, C. Perdigão e C. Saiaga; it Álgebra Linear; Teoria, Exercícios resolvidos e exercícios propostos com soluções.
- C. H. Edwards jr.; *Elementary linear algebra*.
- A. Monteiro; *Álgebra linear e geometria analítica*.
- L. E. Mansfield; *Linear algebra with geometric applications*.

Resolução de sistemas de equações lineares pelo método de eliminação de Gauss.

Exemplos

1. $\begin{cases} x - y & = 2 \\ 2x + 3y & = 9 \end{cases}$

substituimos a segunda equação pela soma da segunda com a primeira multiplicada por -2 . $(L_2 \to -2L_1 + L_2)$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x - y & = 2 \\ 5y & = 5 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x & = 3 \\ y & = 1 \end{cases}$

2. $\left\{\begin{array}{ll} 2x+3y & =1 \\ 3x+4y & =2 \end{array}\right.$ $\quad (L_1 \to \frac{1}{2}L_1)$

$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{ll} x+\frac{3}{2}y & =\frac{1}{2} \\ 3x+4y & =2 \end{array}\right.$ $\quad (L_2 \to -3L_1+L_2)$

$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{ll} x+\frac{3}{2}y & =\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2}y & =\frac{1}{2} \end{array}\right.$

$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{ll} x & =2 \\ y & =-1 \end{array}\right.$

$$\textbf{3.}\quad \begin{cases} y + z &= 3 \\ x + 2y - z &= 1 \\ x + y + z &= 4 \end{cases} \qquad (L_1 \leftrightarrow L_2)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x + 2y - z &= 1 \\ y + z &= 3 \\ x + y + z &= 4 \end{cases} \qquad (L_3 \to -L_1 + L_3)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x + 2y - z &= 1 \\ y + z &= 3 \\ -y + 2z &= 3 \end{cases} \qquad (L_3 \to L_2 + L_3)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x &= 1 \\ y &= 1 \\ z &= 2 \end{cases}$$

$$\mathbf{4.}\ \begin{cases} 2x-2y &= 3 \\ x+3y &= 1 \\ 3x-y &= 0 \end{cases} \qquad (L_2 \leftrightarrow L_1)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x+3y &= 1 \\ 2x-2y &= 3 \\ 3x-y &= 0 \end{cases} \qquad \begin{matrix} (L_2 \to -2L_1 + L_2), \\ (L_3 \to L_3 - 3L_1) \end{matrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x+3y &= 1 \\ -8y &= 1 \\ -10y &= -3 \end{cases} \qquad \begin{matrix} (L_2 \to -\frac{1}{8}L_2) \\ (L_3 \to \frac{1}{10}L_3) \end{matrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x+3y &= 1 \\ y &= -\frac{1}{8} \\ y &= \frac{3}{10} \end{cases} \qquad (L_3 \to -L_2 + L_3)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x &= 1 \\ y &= -\frac{1}{8} \\ 0 &= \frac{17}{40} \end{cases}$$

O sistema **4**. não tem solução.

$$\textbf{5.}\ \left\{\begin{array}{rl} x+2y-z & =3 \\ 2x+3y+4z & =-1 \end{array}\right. \qquad {\color{blue}(L_2 \to L_2 - 2L_1)}$$

$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rl} x+2y-z & =3 \\ -y+6z & =-7 \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rl} x+2y-z & =3 \\ y & =7+6a \\ z & =a \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{ll} x & =-11-11a \\ y & =7+6a \\ z & =a \end{array}\right. \qquad , \ a \in \mathbb{R}$$

O sistema **5**. tem infinitas soluções.

Seja (S) o sistema de m equações e n incógnitas $x_1, \ldots, x_n$:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n & = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n & = b_2 \\ \ldots & \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n & = b_m \end{cases}$$

com $a_{i,j} \in \mathbb{R}$ para $1 \leq i \leq m$, $1 \leq j \leq n$ e $b_i \in \mathbb{R}$ para $1 \leq i \leq m$.

Diz-se que $\begin{cases} x_1 & = c_1 \\ x_2 & = c_2 \\ \ldots & \\ x_n & = c_n \end{cases}$ é uma solução do sistema (S) se e só se

$$\begin{cases} a_{11}c_1 + a_{12}c_2 + \ldots + a_{1n}c_n & = b_1 \\ a_{21}c_1 + a_{22}c_2 + \ldots + a_{2n}c_n & = b_2 \\ \ldots & \\ a_{m1}c_1 + a_{m2}c_2 + \ldots + a_{mn}c_n & = b_m \end{cases}$$

Diz-se que um sistema está na forma escalonada se for da forma

$$(S') = \left\{ \begin{array}{rl} a'_{1i_1}x_{i_1} + \ldots + \ldots + \ldots & = b'_1 \\ a'_{2i_2}x_{i_2} + \ldots + \ldots & = b'_2 \\ \ldots & \\ a'_{pi_p}x_{i_p} + \ldots & = b'_p \\ 0 & = b'_{p+1} \\ \ldots & \\ 0 & = b'_m \end{array} \right.$$

onde $a'_{1i_1}, a'_{2i_2}, \ldots, a'_{pi_p}$ são não nulos e $i_1 < i_2 < \ldots < i_p \leq n$.

O sistema (S') tem pelo menos uma solução se e só se $b'_{p+1} = 0, \ldots, b'_m = 0$ (isto é $b'_k = 0$ para $p+1 \leq k \leq m$). Se o sistema é possível, a solução é única se e só se $n = p$.

Dois sistemas são equivalentes se e só se têm as mesmas soluções.

Dado (S) um sistema de m equações e n incógnitas $x_1, \ldots, x_n$ consideramos as seguintes operações no sistema (S):

1. troca de linhas;
2. multiplicação de uma equação por um número real não nulo;
3. adição da i-ésima equação multiplicada por um número real qualquer à j-ésima equação, sendo $j \neq i$.

Estas operações conduzem a sistemas equivalentes.

O método de Gauss consiste na aplicação de operações do tipo $1, 2, 3$ de modo a obter um sistema (S') equivalente a (S) na forma escalonada.

Exemplos 1.

$$\begin{cases} 2x - 4y + t &= 1 \\ -x + 2y - z + t &= -2 \\ 3x - 6y + 2z &= 0 \end{cases}$$

$$\overset{(L_1 \leftrightarrow L_2)}{\iff} \begin{cases} -x + 2y - z + t &= -2 \\ 2x - 4y + t &= 1 \\ 3x - 6y + 2z &= 0 \end{cases}$$

$$\overset{\substack{(L_2 \to 2L_1 + L_2) \\ (L_3 \to 3L_1 + L_3)}}{\iff} \begin{cases} -x + 2y - z + t &= -2 \\ -2z + 3t &= -3 \\ -z + 3t &= -6 \end{cases}$$

$$\overset{(L_3 \to -2L_3 + L_2)}{\iff} \begin{cases} -x + 2y - z + t &= -2 \\ -2z + 3t &= -3 \\ -3t &= 9 \end{cases}$$

$$\overset{(L_3 \to L_2 - 2L_3)}{\iff} \begin{cases} x &= 2 + 2a \\ y &= a \\ z &= -3 \\ t &= -3 \end{cases}$$

2. $(S_2) = \left\{ \begin{array}{ll} ax - y + az & = 2 \\ a^2x + y - az & = 0 \end{array} \right. , a \in \mathbb{R}$

Se $a = 0$ o sistema não tem solução.

Suponhamos $a \neq 0$.

$$(S_2) \underset{\color{blue}{(L_2 \to L_2 - aL_1)}}{\Longleftrightarrow} \left\{ \begin{array}{rl} ax - y + az & = 2 \\ (1+a)y + (-a - a^2)z & = -2a \end{array} \right.$$

Se $a = -1$ o sistema não tem solução.
Suponhamos $a \neq 0$ e $a \neq -1$. O sistema dado tem as soluções:

$$\left\{ \begin{array}{ll} x & = \frac{2}{a(a+1)} \\ y & = -\frac{2a}{a+1} + ak \\ z & = k \end{array} \right. , k \in \mathbb{R}$$

A álgebra das matrizes

Definição

Dá-se o nome de matriz do tipo $p \times n$ *sobre* $\mathbb{R}$ *ou* $\mathbb{C}$ *a um quadro onde* pn *elementos de* $\mathbb{R}$ *ou de* $\mathbb{C}$ *se dispõem de modo a formarem* p *filas horizontais de* n *elementos cada uma (as linhas da matriz) e* n *filas verticais de* p *elementos cada (as colunas da matriz):*

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & & \vdots & \\ a_{p1} & a_{p2} & \dots & a_{pn} \end{bmatrix}.$$

Abreviadamente escrevemos $A = (a_{ij})_{\substack{i=1,2,\dots,p \\ j=1,2,\dots,n}}$.

Em cada elemento da matriz a_{ij} da matriz A o primeiro indice indica a linha em que o elemento figura e o segundo a coluna.

Na matriz $A = (a_{ij})_{\substack{i=1,2,\dots,p \\ j=1,2,\dots,n}}$ o elemento a_{45} encontra-se na linha 4 e na coluna 5.

Representamos por $M_{p\times n}(\mathbb{R})$ (resp.: $M_{p\times n}(\mathbb{R})$) o conjunto de todas as matrizes do tipo $p \times n$ sobre $\mathbb{R}$ (resp.: $\mathbb{C}$).

Definição

Para cada natural n, chama-se matriz quadrada de ordem n a uma matriz do tipo $n \times n$. Chama-se matriz-linha a uma matriz do tipo $1 \times n$ e matriz-coluna a uma matriz do tipo $p \times 1$.

Definição

Dada uma matriz quadrada $A = (a_{ij})_{\substack{i=1,2,\ldots,p \\ j=1,2,\ldots,n}}$ aos elementos a_{ii}, $(i = 1, \ldots, n)$ chama-se elementos principais da matriz. O conjunto dos elementos principais tem o nome de diagonal principal.

Chama-se matriz diagonal a uma matriz quadrada em que todos os elementos não principais são iguais a 0.

Chama-se matriz triangular superior (resp. triangular inferior) a uma matriz quadrada na qual se tenha $a_{ij} = 0$, sempre que $i > j$ (resp. $i < j$).

Chama-se matriz identidade de ordem n a uma matriz diagonal em que todos os elementos da diagonal principal são 1. A matriz identidade de ordem n denota-se por I_n.

Definição

Duas matrizes $A = (a_{ij})_{\substack{i=1,2,\ldots,n\\ j=1,2,\ldots,m}}$, $B = (b_{ij})_{\substack{i=1,2,\ldots,n\\ j=1,2,\ldots,m}} \in M_{n\times m}(K)$, *onde* $K = \mathbb{R}$ *ou* $K = \mathbb{C}$, *são iguais se e só se*

$$a_{ij} = b_{ij}, \forall i \in \{1, \ldots, n\}, \forall j \in \{1, \ldots, m\}.$$

Definição

Dadas $A = (a_{ij})_{\substack{i=1,2,\ldots,n \\ j=1,2,\ldots,m}}$, $B = (b_{ij})_{\substack{i=1,2,\ldots,n \\ j=1,2,\ldots,m}} \in M_{n\times m}(K)$, *onde* $K = \mathbb{R}$ *ou* $K = \mathbb{C}$, *a soma de A com B é uma matriz* $C = (c_{ij})_{\substack{i=1,2,\ldots,n \\ j=1,2,\ldots,m}} \in M_{n\times m}(\mathbb{R})$ *cujos elementos são iguais à soma dos elementos homólogos de A e de B,*

$$c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}, \forall i \in \{1, \ldots, n\}, \forall j \in \{1, \ldots, m\}.$$

Note-se que só somamos matrizes do mesmo tipo.

Exemplo: $\begin{bmatrix} 1 & 20 & 4 \\ 0 & 1 & -5 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 5 & 1 & 0 \\ 2 & 6 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & 21 & 4 \\ 2 & 7 & -6 \end{bmatrix}$

Definição

O produto de uma matriz $A = (a_{ij})_{\substack{i=1,2,\ldots,p \\ j=1,2,\ldots,n}} \in M_{p\times n}(\mathbb{R})$ *por um escalar* $\lambda \in \mathbb{R}$ *é uma matriz do tipo* $p \times n$ *cujas entradas são iguais ao produto do escalar por cada entrada da matriz* A,

$$\lambda A = (\lambda a_{ij})_{\substack{i=1,2,\ldots,p \\ j=1,2,\ldots,n}} \in M_{p\times n}(\mathbb{R}).$$

Exemplo: $6 \begin{bmatrix} 1 & 20 & 4 \\ 0 & 1 & -5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & 120 & 24 \\ 0 & 6 & -30 \end{bmatrix}$

Definição

Considerem-se duas matrizes $A = (a_{ij})_{\substack{i=1,2,\dots,m\\ j=1,2,\dots,n}}$, $B = (b_{ij})_{\substack{i=1,2,\dots,n\\ j=1,2,\dots,p}}$ *sobre* $\mathbb{R}$ *ou* $\mathbb{C}$ *onde o número de colunas da primeira é igual ao número de linhas da segunda. O produto da matriz* A *pela matriz* B *é uma matriz* $P = AB$ *do tipo* $m \times p$ *onde a* (i,j)*-ésima entrada é:*

$$p_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{kj}, (i = 1, \dots, m, j = 1, 2, \dots, p).$$

$$\begin{bmatrix} & & \vdots & & \\ a_{i1} & \dots & a_{ik} & \dots & a_{in} \\ & & \vdots & & \end{bmatrix} \begin{bmatrix} & b_{1j} & \\ & \vdots & \\ \dots & b_{kj} & \dots \\ & \vdots & \\ & b_{nj} & \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} & \vdots & \\ \dots & p_{ij} & \dots \\ & \vdots & \end{bmatrix}.$$

Exemplos

1. $\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x-y \\ 2x+3y \end{bmatrix}$

2. $\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x & z \\ y & t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x-y & z-t \\ 2x+3y & 2z+3t \end{bmatrix}$

3. $\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x & z & w \\ y & t & v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x-y & z-t & w-v \\ 2x+3y & 2z+3t & 2w+3v \end{bmatrix}$

O produto de matrizes é associativo e distributivo relativamente à soma.

O produto de matrizes não é comutativo, por exemplo

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 5 \end{bmatrix} \text{ mas}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$$

A matriz nula $(0)_{m,n}$ é a matriz em que todas as entradas são nulas. Se $A \in M_{m\times n}$, então:

- $A(0)_{n,p} = (0)_{m,p}$,
- $(0)_{k,m}A = (0)_{k,n}$.

O produto de uma matriz pela matriz nula é a matriz nula.

Se $A \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$, então $AI_n = A$ e $I_mA = A$.

Uma entrada pivô de uma linha de uma matriz é a primeira entrada não nula dessa linha.

Diz-se que uma matriz está na forma escalonada se:

1. as linhas nulas da matriz estão na parte inferior da matriz;
2. em duas linhas consecutivas não nulas a entrada pivô da linha inferior está mais à direita do que a entrada pivô da linha superior.

Diz-se que uma matriz está na forma simples se está na forma escalonada e todas as entradas pivô são iguais a 1.

Dada uma matriz A consideramos as seguintes operações linha:

1. troca de linhas;
2. multiplicação de todas as entradas de uma linha por um número real não nulo;
3. adição da i-ésima linha multiplicada por um número real qualquer à j-ésima linha, sendo $j \neq i$.

Qualquer matriz pode ser reduzida à forma simples por aplicação de um número finito de operações linha.

A característica de uma matriz A é o número de entradas pivô da matriz reduzida a uma forma simples, escrevemos $car(A)$.

Exemplos

$$\mathbf{1}.A_1 = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} \underset{L_2 \to L_2 - 2L_1}{\longrightarrow} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 5 \end{bmatrix} \underset{L_2 \to \frac{1}{5}L_2}{\longrightarrow} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$car(A_1) = 2$

$\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 5 \end{bmatrix}$ é uma forma escalonada de A_1.

$\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ é uma forma simples de A_1.

2. $A_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 4 \end{bmatrix} \xrightarrow[L_1 \leftrightarrow L_2]{} \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 4 \end{bmatrix}$

$\xrightarrow[L_3 \to L_3 - L_1]{} \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & 5 \end{bmatrix} \xrightarrow[L_3 \to L_3 + L_2]{} \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 8 \end{bmatrix}$

$\xrightarrow[L_8 \to \frac{1}{8} L_8]{} \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

$car(A_2) = 3$

$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 8 \end{bmatrix}$ é uma forma escalonada de A_2.

$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ é uma forma simples de A_2

A forma simples associada a uma matriz não é única.

Considere-se por exemplo a matriz A_2. Podemos

$$A_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 4 \end{bmatrix} \underset{L_1 \leftrightarrow L_3}{\longrightarrow} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 4 \\ 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

$$\underset{L_2 \to L_2 - L_1}{\longrightarrow} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & -5 \\ 0 & 1 & 3 \end{bmatrix} \underset{L_3 \to L_3 - L_2}{\longrightarrow} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & -5 \\ 0 & 0 & 8 \end{bmatrix}$$

$$\underset{L_3 \to \frac{1}{8} L_3}{\longrightarrow} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & -5 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

A característica é única.

Resolução de sistemas com matrizes

Dado (S) o sistema de m equações e n incógnitas $x_1, \ldots, x_n$:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n & = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n & = b_2 \\ \ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n & = b_m \end{cases}$$

(S) pode ser escrito na forma matricial

$$AX = B$$

onde $A = (a_{ij})_{\substack{i=1,2,\ldots,m \\ j=1,2,\ldots,n}}$, $X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \ldots \\ x_n \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \ldots \\ b_m \end{bmatrix}$.

Matriz de um sistema

Seja (S) o sistema de m equações e n incógnitas $x_1, \ldots, x_n$:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n & = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n & = b_2 \\ \ldots & \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n & = b_m \end{cases}$$

A matriz de (S) é

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & & & \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{bmatrix} = (a_{ij})_{1 \le i \le m, 1 \le j \le n}$$

tem m linhas e n colunas. a_{ij} pertence à linha i e à coluna j.

Seja (S) o sistema de m equações e n incógnitas $x_1, \ldots, x_n$:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n & = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n & = b_2 \\ \ldots & \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n & = b_m \end{cases}$$

A matriz completa (ou alargada) de (S) é

$$A = \left[\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} & b_2 \\ \ldots & & & & \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} & b_m \end{array}\right]$$

Consideremos o seguinte sistema

$$\left\{ \begin{array}{ll} x - y - z & = 1 \\ x + y + z & = 0 \\ \quad -x + 2z & = 1 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ccc} 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 2 \end{array} \right] \left[\begin{array}{c} x \\ y \\ z \end{array} \right] = \left[\begin{array}{c} 1 \\ 0 \\ 1 \end{array} \right]$$

A matriz alargada que lhe está associada é

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 2 & 1 \end{array} \right]$$

$$\begin{cases} x - y - z &= 1 \\ x + y + z &= 0 \\ -x + 2z &= 1 \end{cases} \qquad \begin{matrix} (L_1 \to \frac{1}{2}L_1 + \frac{1}{2}L_2) \\ (L_2 \leftrightarrow L_1) \end{matrix}$$

$$\begin{cases} x &= 1/2 \\ x - y - z &= 1 \\ -x + 2z &= 1 \end{cases} \qquad \begin{matrix} (L_2 \to L_2 - L_1) \\ (L_3 \to L_3 + L_1) \end{matrix}$$

$$\begin{cases} x &= 1/2 \\ -y - z &= 1/2 \\ 2z &= 3/2 \end{cases} \qquad (L_3 \leftrightarrow \tfrac{1}{2}L_3)$$

$$\begin{cases} x &= 1/2 \\ -y - z &= 1/2 \\ z &= 3/4 \end{cases} \qquad (L_2 \to -L_2 - L_3)$$

$$\begin{cases} x &= 1/2 \\ y &= -5/4 \\ z &= 3/4 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x - y - z &= 1 \\ x + y + z &= 0 \\ -x + 2z &= 1 \end{cases} \qquad \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} x &= 1/2 \\ x - y - z &= 1 \\ -x + 2z &= 1 \end{cases} \qquad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} x &= 1/2 \\ -y - z &= 1/2 \\ 2z &= 3/2 \end{cases} \qquad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/2 \\ 1/2 \\ 3/2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} x &= 1/2 \\ -y - z &= 1/2 \\ z &= 3/4 \end{cases} \qquad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/2 \\ 1/2 \\ 3/2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} x &= 1/2 \\ y &= -5/4 \\ z &= 3/4 \end{cases} \qquad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/2 \\ -5/4 \\ 3/4 \end{bmatrix}$$

$$\left\{\begin{array}{rl} x-y-z & =1 \\ x+y+z & =0 \\ -x+2z & =1 \end{array}\right. \qquad \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 2 & 1 \end{array}\right]$$

$$\left\{\begin{array}{rl} x & =1/2 \\ x-y-z & =1 \\ -x+2z & =1 \end{array}\right. \qquad \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1/2 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 2 & 1 \end{array}\right]$$

$$\left\{\begin{array}{rl} x & =1/2 \\ -y-z & =1/2 \\ 2z & =3/2 \end{array}\right. \qquad \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1/2 \\ 0 & -1 & -1 & 1/2 \\ 0 & 0 & 2 & 3/2 \end{array}\right]$$

$$\left\{\begin{array}{rl} x & =1/2 \\ -y-z & =1/2 \\ z & =3/4 \end{array}\right. \qquad \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1/2 \\ 0 & -1 & -1 & 1/2 \\ 0 & 0 & 1 & 3/4 \end{array}\right]$$

$$\left\{\begin{array}{ll} x & =1/2 \\ y & =-5/4 \\ z & =3/4 \end{array}\right. \qquad \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1/2 \\ 0 & 1 & 0 & -5/4 \\ 0 & 0 & 1 & 3/4 \end{array}\right]$$

$$\begin{cases} x - y - z &= 1 \\ x + y + z &= 0 \\ -x + 2z &= 1 \end{cases} \qquad \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 2 & 1 \end{array}\right] \qquad \begin{matrix} (L_1 \to \frac{1}{2}L_1 + \frac{1}{2}L_2) \\ (L_2 \leftrightarrow L_1) \end{matrix}$$

$$\begin{cases} x &= 1/2 \\ x - y - z &= 1 \\ -x + 2z &= 1 \end{cases} \qquad \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1/2 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 2 & 1 \end{array}\right] \qquad \begin{matrix} (L_2 \to L_2 - L_1) \\ (L_3 \to L_3 + L_1) \end{matrix}$$

$$\begin{cases} x &= 1/2 \\ -y - z &= 1/2 \\ 2z &= 3/2 \end{cases} \qquad \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1/2 \\ 0 & -1 & -1 & 1/2 \\ 0 & 0 & 2 & 3/2 \end{array}\right] \qquad (L_3 \to \tfrac{1}{2}L_3)$$

$$\begin{cases} x &= 1/2 \\ -y - z &= 1/2 \\ z &= 3/4 \end{cases} \qquad \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1/2 \\ 0 & -1 & -1 & 1/2 \\ 0 & 0 & 1 & 3/4 \end{array}\right] \qquad (L_2 \to -L_2 - L_3)$$

$$\begin{cases} x &= 1/2 \\ y &= -5/4 \\ z &= 3/4 \end{cases} \qquad \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1/2 \\ 0 & 1 & 0 & -5/4 \\ 0 & 0 & 1 & 3/4 \end{array}\right]$$

Às operações nos sistemas correspondem operações linha em matrizes:

- troca de linhas;
- multiplicação de uma linha por escalar não nulo,
- adição da i-ésima linha multiplicada por um escalar qualquer à j-ésima linha, sendo $i \neq j$.

Podemos resolver um sistema $AX = B$ de m equações a n incógnitas efectuando na matriz ampliada operações linha de forma a obter uma matriz da forma

$$\left[\begin{array}{ccccccccccc|c}
0 & \dots & a'_{1i_1} & \dots & a'_{1i_2} & \dots & & \dots & a'_{1n} & b'_1 \\
0 & \dots & 0 & \dots & a'_{2i_2} & \dots & & \dots & a'_{2n} & b'_2 \\
0 & \dots & 0 & \dots & 0 & \dots & & \dots & & \\
\vdots & \dots & \vdots & \dots & \vdots & & & & & \\
0 & \dots & 0 & \dots & 0 & \dots & a'_{pi_p} & \dots & a'_{pn} & b'_p \\
0 & \dots & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & b'_{p+1} \\
0 & \dots & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & b'_{p+2} \\
\vdots & \dots & \vdots & \dots & \dots & \dots & \vdots & \dots & \vdots & \\
0 & \dots & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & b'_m
\end{array}\right]$$

$a'_{1i_1}, a'_{2i_2}, \dots, a'_{pi_p}$ são não nulos e $i_1 < i_2 < \dots < i_p \leq n$.

Fazendo $A' = \begin{bmatrix} 0 & \dots & a'_{1i_1} & \dots & a'_{1i_2} & \dots & & \dots & a'_{1n} \\ 0 & \dots & 0 & \dots & a'_{2i_2} & \dots & & \dots & a'_{2n} \\ 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & \dots & & \dots & \\ \vdots & \dots & \vdots & \dots & \vdots & & & & \\ 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & \dots & a'_{pi_p} & \dots & a'_{pn} \\ 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \dots & \vdots & \dots & \dots & \dots & \vdots & \dots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}$ e

$B' = \begin{bmatrix} b'_1 \\ \\ \\ b'_m \end{bmatrix}$ tem-se $car(A) = car(A')$ e $car(A|B) = car(A'|B')$.

Resolver o sistema $AX = B$ de m equações a n incógnitas é equivalente a resolver o sistema $A'X = B'$. Tem-se que:

- o sistema é possível se e só se $car(A') = car(A'|B')$;
- o sistema é possível e determinado (isto é tem apenas uma e uma só solução) se e só se $car(A') = car(A'|B') = n$;
- o sistema é possível e indeterminado (isto é tem uma infinidade de soluções) se e só se $car(A') = car(A'|B') \neq n$;

Exercícios

Estude os sistemas

$$(S_1) = \begin{cases} x + 2y + z &= 1 \\ y + z &= 1 \\ 3x + 6y - 2z &= 0 \end{cases}$$

$$(S_2) = \begin{cases} x + y + z &= 0 \\ 2x + 2y - z &= 2 \end{cases}$$

$$(S_3) = \begin{cases} x + y - 2z &= 1 \\ y + z &= 4 \\ -2x - 2y + 4z &= 2 \end{cases}$$

Exercícios

Considere o sistema nas incógnitas x, y, z

$$\begin{cases} x + y + z &= 2b \\ (a+1)x + y + az &= 0 \\ -x - y + (b+1)z &= b^2 \end{cases}$$

- Escreva o sistema na forma $AX = B$.
- Discuta o sistema.
- Resolva o sistema para $a = 1$ e $b = 1$.

Matrizes Invertíveis

Definição

Seja A uma matriz quadrada do tipo $n \times n$ sobre $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Diz-se que A é invertível se existir $B \in M_n(K)$, ($K = \mathbb{R}$ ou $K = \mathbb{C}$) tal que

$$AB = I_n = BA.$$

À matriz B chama-se inversa de A.

Exemplo: A matriz $\begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}$ é inversa de $\begin{bmatrix} -1 & 1 & 3 \\ -1 & 1 & 2 \\ 3 & -2 & -6 \end{bmatrix}$

Proposição

Uma matriz invertível tem inversa única.

Definição

Dada uma matriz A invertível a sua inversa nota-se por A^{-1}.

Note-se que existem matrizes que não têm inversa. Por exemplo a matriz $\begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \end{bmatrix}$ não tem inversa.

Teorema

Dadas $A, B \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$ *ou* $M_{n\times n}(\mathbb{C})$*, se* $AB = I_n$ *então* $BA = I_n$.

Proposição

Sejam A *e* B *matrizes invertíveis de ordem* n *sobre* K *(*$K = \mathbb{R}$ *ou* $K = \mathbb{C}$*). Tem-se que:*

1. $(A^{-1})^{-1} = A$;
2. $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$;
3. $\forall k \in \mathbb{N}, (A^k)^{-1} = (A^{-1})^k$;
4. $(\lambda A)^{-1} = \lambda^{-1}A^{-1}, \forall \lambda \in K\backslash\{0\}$

Cálculo da matriz inversa

Considere-se $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 3 \\ 3 & 4 & 5 \end{bmatrix}$. Pretende-se determinar uma matriz $B = \begin{bmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{bmatrix}$ tal que $AB = I_n$ ou seja resolver os seguintes três sistemas de equações

$$A\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 3 \\ 3 & 4 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$A\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 3 \\ 3 & 4 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$A\begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 3 \\ 3 & 4 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Para resolver estes três sistemas, que têm a mesma matriz de coeficientes, aplica-se o método de Gauss à matriz ampliada

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 4 & 5 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] = \left[\begin{array}{c|c} A & I_3 \end{array}\right]$$

Aplicando o método de Gauss obtém-se

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 3 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -1 & 1 \end{array}\right] = \left[\begin{array}{c|c} I_3 & B \end{array}\right].$$

Tem-se então que:

$$A\begin{bmatrix} 3 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, A\begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, A\begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Logo $A^{-1} = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$.

Cálculo da matriz inversa - Caso geral

Dada $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}$ pretende-se ver se existe

$X = \begin{bmatrix} x_{11} & x_{12} & \dots & x_{1n} \\ x_{21} & x_{22} & \dots & x_{2n} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ x_{n1} & x_{n2} & \dots & x_{nn} \end{bmatrix}$ tal que $AX = I_n$ e caso exista determina-la.

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{11} & x_{12} & \dots & x_{1n} \\ x_{21} & x_{22} & \dots & x_{2n} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ x_{n1} & x_{n2} & \dots & x_{nn} \end{bmatrix} = I_n \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} a_{11}x_{11} + a_{12}x_{21} + \ldots + a_{1n}x_{n1} & = 1 \\ a_{21}x_{11} + a_{22}x_{21} + \ldots + a_{2n}x_{n1} & = 0 \\ \vdots & \vdots \\ a_{n1}x_{11} + a_{n2}x_{21} + \ldots + a_{nn}x_{n1} & = 0 \end{cases}$$

$\ldots$

$$\begin{cases} a_{11}x_{1n} + a_{12}x_{2n} + \ldots + a_{1n}x_{nn} & = 0 \\ a_{21}x_{1n} + a_{22}x_{2n} + \ldots + a_{2n}x_{nn} & = 0 \\ \vdots & \vdots \\ a_{n1}x_{1n} + a_{n2}x_{2n} + \ldots + a_{nn}x_{nn} & = 1 \end{cases}$$

Temos n sistemas em que a matriz do sistema é A.

Proposição

Seja $A \in M_{n\times n}(K)$ *onde* $K = \mathbb{R}$ *ou* $K = \mathbb{C}$. *A matriz* A *é invertível se e só se os sistemas*

$$A \begin{bmatrix} x_{11} \\ x_{21} \\ \vdots \\ x_{n1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \dots A \begin{bmatrix} x_{1n} \\ x_{2n} \\ \vdots \\ x_{nn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$$

são possíveis e determinados se e só se $car(A) = n$.

Dado A uma matriz quadrada com entradas em $\mathbb{R}$ ou em $\mathbb{C}$ para verificarmos se A é invertível e determinarmos a sua inversa (caso exista) fazemos:

1. Aplicamos a fase descendente do método de Gauss à matriz $\left[\begin{array}{c|c} A & I_n \end{array} \right]$. Seja $\left[\begin{array}{c|c} A' & I_n' \end{array} \right]$ a matriz em escada obtida (Note-se que I_n' não tem linhas nulas).
2. Se A' tem alguma linha nula A não é invertível. Caso contrário A é invertível e para determinar a sua inversa aplica-se a fase ascendente do método de Gauss à matriz $\left[\begin{array}{c|c} A' & I_n' \end{array} \right]$. A matriz reduzida que se obtém é do tipo $\left[\begin{array}{c|c} I_n & A'' \end{array} \right]$ e $A'' = A^{-1}$.

Definição

Dada $A = (a_{ij}) \in M_{n\times m}(K)$, *(*$K = \mathbb{R}$ *ou* $K = \mathbb{C}$*), define-se* A^T *uma matriz do tipo* $m \times n$ *tal que a* (i,j)*-ésima entrada de* A^T *é a* (j,i)*-ésima entrada de* A*.*

Exemplo: $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 6 & 0 \\ 3 & 5 & 7 & 8 \\ 1 & 5 & 9 & 1 \end{bmatrix}, A^T = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 2 & 5 & 5 \\ 6 & 7 & 9 \\ 0 & 8 & 1 \end{bmatrix}$

Proposição

Se $A \in M_{n\times m}(K)$, $B \in M_{m\times p}(K)$ $(K = \mathbb{R}$ *ou* $K = \mathbb{C})$, $(AB)^T = B^T A^T$.

Proposição

Se $A \in M_{n\times n}(K)$ $(K = \mathbb{R}$ *ou* $K = \mathbb{C})$ *é invertível, então* $(A^{-1})^T = (A^T)^{-1}$, *isto é* A^T *é invertível.*

Exercícios

1. Calcule, caso exista, a inversa de A e de B onde

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$

2. Mostre que a matriz

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

é invertível se e só se $ad - bc \neq 0$. No caso de A ser invertível determine a sua inversa.

Definição

Chama-se determinante de ordem n à função que associa a cada matriz $A \in M_{n\times n}(K)$ um escalar $det(A)$ e que tem as propriedades seguintes:

- *se duas linhas de A são iguais,* $det(A) = 0$;
- *se* $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & .. & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \alpha a'_{i1} + \beta a''_{i1} & \alpha a'_{i2} + \beta a''_{i2} & \dots & \alpha a'_{in} + \beta a''_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & .. & a_{nn} \end{bmatrix}$,

  $A' = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & .. & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a'_{i1} & a'_{i2} & .. & a'_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}$ e $A''= \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & .. & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a''_{i1} & a''_{i2} & .. & a''_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & .. & a_{nn} \end{bmatrix}$ *então*

  $det(A) = \alpha det(A') + \beta det(A'')$. *(Todas as linhas de A, A' e A'' são iguais à excepção da i-ésima linha que é igual à soma de α vezes a linha i de A' com β vezes a linha i de A''.*
- $det(I_n) = 1$

Proposição

Toda a matriz com uma linha de zeros tem determinante zero

Proposição

Seja A uma matriz do tipo $n \times n$. Se trocarmos um par de linhas em A, o determinante da matriz obtida é igual a $-\det(A)$ (isto é o valor do determinante muda de sinal).

Proposição

Multipicando os elementos de uma linha de uma matriz A do tipo $n \times n$ por um escalar $\lambda \in K$ ($K = \mathbb{R}$ ou $K = \mathbb{C}$), a matriz que se obtém tem determinante $\lambda \det(A)$.

Proposição

Quando numa matriz se soma a uma linha uma combinação linear das restantes, o valor do determinante não se altera.

Proposição

Dada A uma matriz triangular superior do tipo $n \times n$,

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

$det(A) = a_{11}a_{22}\dots a_{nn}.$

- Se $A = [a_{11}]$ então $det(A) = a_{11}$;
- Se $A = \left[\begin{array}{cc} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{array}\right]$, tem-se que:
  - se $a_{11} \neq 0$,
    $detA = a_{11} det \left[\begin{array}{cc} 1 & \frac{a_{12}}{a_{11}} \\ a_{21} & a_{22} \end{array}\right] = a_{11} det \left[\begin{array}{cc} 1 & \frac{a_{12}}{a_{11}} \\ 0 & a_{22} - \frac{a_{21}a_{12}}{a_{11}} - \end{array}\right] =$
    $a_{11}(a_{22} - \frac{a_{21}a_{12}}{a_{11}}) = a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}$.
  - se $a_{11} = 0 \wedge a_{21} \neq 0$,
    $det(A) = -det \left[\begin{array}{cc} a_{21} & a_{22} \\ a_{11} & a_{12} \end{array}\right] = -a_{21}a_{12} + a_{11}a_{22}$.
  - se $a_{11} = 0 = a_{21}$, $det(A) = 0$

O determinante de uma matriz quadrada A pode ser calculado reduzindo a matriz por operações de linha à forma triangular T tendo em conta a seguinte correspondência entre as operações linha e as alterações do determinante

Troca de linhas	$\longrightarrow$	determinante muda de sinal
multiplicação de uma linha por um escalar λ não nulo	$\longrightarrow$	o determinante é multiplicado por esse escalar
soma a uma linha de combinação linear das restantes	$\longrightarrow$	não altera o determinante

Notação

Dada uma matriz A do tipo $n \times n$, a notação

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

é frequentemente usada para $det(A)$.

Exercícios

Calcule:

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 5 \\ 4 & 2 & 10 \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix} \qquad \begin{vmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & 8 \\ 2 & 0 & 1 \end{vmatrix} \qquad \begin{vmatrix} 2 & 4 & 1 \\ -3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}$$

Proposição

Seja A uma matriz quadrada de ordem n. Se A tem característica menor que n o seu determinante é nulo.

Proposição

Se uma matriz quadrada de ordem de ordem n tem característica n, então $|A| \neq 0$

Cálculo do determinante de matriz 2×2

Usando as propriedades dos determinantes tem-se:

$$\begin{aligned}
\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} &= \begin{vmatrix} a_{11} \times 1 + a_{12} \times 0 & a_{11} \times 0 + a_{12} \times 1 \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \\
&= a_{11} \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} + a_{12} \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \\
&= a_{11} \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ a_{21} \times 1 + a_{22} \times 0 & a_{22} \times 0 + a_{22} \times 1 \end{vmatrix} \\
&\quad + a_{12} \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ a_{21} \times 1 + a_{22} \times 0 & a_{21} \times 0 + a_{22} \times 1 \end{vmatrix} \\
&= a_{11} a_{21} \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} + a_{11} a_{22} \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} + a_{12} a_{21} \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} + \\
&\quad + a_{12} a_{22} \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = a_{11} a_{22} - a_{12} a_{21}
\end{aligned}$$

Se na definição de determinate e nas propriedades substituirmos a palavra linha por coluna, todas as propriedades são verificadas.

Exercício: Considere a matriz

$$A = \begin{vmatrix} 2 & 4 & 1 \\ -3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}$$

Determine: $|A|$ e $|A^{-1}|$.

Definição

Seja $A = (a_{ij})_{1\leq i\leq n, 1\leq j\leq n}$ uma matriz quadrada sobre $\mathbb{R}$ ou sobre $\mathbb{C}$ o menor de a_{ij} é o determinante A_{ij} da matriz que se obtém de A retirando a linha i e a coluna j. O cofactor de a_{ij} é o escalar $(-1)^{i+j}A_{ij}$.

$$\begin{bmatrix} a_{11} & .. & a_{1j} & .. & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & .. & a_{ij} & .. & a_{in} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & .. & a_{nj} & .. & a_{nn} \end{bmatrix}, A_{ij} = \begin{vmatrix} a_{11} & .. & a_{1j-1} & a_{1j+1} & .. & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & \\ a_{i-11} & .. & a_{i-1j} & a_{i-1j+1} & .. & a_{i-1n} \\ a_{i+11} & .. & a_{i+1j} & a_{i+1j+1} & .. & a_{i+1n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & \\ a_{n1} & .. & a_{nj-1} & a_{nj+1} & .. & a_{nn} \end{vmatrix}$$

Exemplo

Considere-se a matrix $A = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 1 \\ -3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ tem-se que

$$A_{11} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} \quad A_{12} = \begin{vmatrix} -3 & 1 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} \quad A_{13} = \begin{vmatrix} -3 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}$$

$$A_{21} = \begin{vmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} \quad A_{22} = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} \quad A_{23} = \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}$$

$$A_{31} = \begin{vmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \quad A_{32} = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -3 & 1 \end{vmatrix} \quad A_{33} = \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ -3 & 1 \end{vmatrix}$$

Theorem (Fórmula de Laplace)

Seja $A = (a - ij)_{1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq n}$. *Então:*

1. *Qualquer que seja* $1 \leq i \leq n$,

$$det(A) = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{i+k} a_{ik} A_{ik}$$

(desenvolvimento do determinante segundo a linha i*)*

2. *Qualquer que seja* $1 \leq j \leq n$,

$$det(A) = \sum_{l=1}^{n} (-1)^{l+j} a_{lj} A_{lj}$$

(desenvolvimento do determinante segundo a coluna j*)*

Exemplos-Fórmula de Laplace

- Se $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$, fazendo o desenvolvimento ao longo da primeira linha tem-se

$$|A| = a_{11}a_{22} + (-1)^{1+2}a_{21}a_{12} = a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}.$$

- Se $A = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 1 \\ -3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$, fazendo o desenvolvimento ao longo da terceira linha tem-se

$$A = \begin{bmatrix} 2^{+} & 4^{-} & 1^{+} \\ -3^{-} & 1^{+} & 1^{-} \\ 1^{+} & 1^{-} & 0^{+} \end{bmatrix}$$

Exemplos-Regra de Sarrus

Se $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$, fazendo o desenvolvimento ao longo da primeira linha

$$\begin{aligned}
|A| &= a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} \\
&= a_{11}a_{22}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} \\
&\quad - a_{13}a_{22}a_{31} \\
&= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} \\
&\quad - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{13}a_{22}a_{31}
\end{aligned}$$

Theorem

Seja $A \in M_{n,n}(K)$. *Então* $det(A^t) = det(A)$.

Theorem

Seja $A, B \in M_{n,n}(K)$. *Então* $det(AB) = det(A)det(B)$.

Theorem

Seja $A \in M_{n,n}(K)$ *uma matriz invertível. Então* $det(A) \neq 0$ *e* $det(A^{-1}) = (det(A))^{-1}$.

Regra de Sarrus

A regra de Sarrus é para matrizes do tipo 3×3

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \begin{matrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{matrix}$$

Somamos os produtos dos elementos das diagonais a verde e subtraimos os produtos das diagonais a vermelho.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32}$$

$$-a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{13}a_{22}a_{31}$$

Observação:

Em geral $det(A+B)$ é diferente de $det(A)+det(B)$. Por exemplo, se

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

tem-se que

$$|A| = 1, |B| = 1$$

mas

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 4 - 1 = 3 \neq |A| + |B|.$$

Cálculo da matriz inversa

Seja $A = (a_{ij})_{1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq n}$ uma matriz quadrada sobre $\mathbb{R}$ ou sobre $\mathbb{C}$, define-se

$$adj(A) = [(-1)^{i+j} A_{ij}]^T \in M_{n \times n}(K), K = \mathbb{R} \text{ ou } K = \mathbb{C}$$

Teorema

Seja $A \in M_{n \times n}(K), K = \mathbb{R}$ ou $K = \mathbb{C}$. Então

$$adj(A).A = A.adj(A) = |A| I_n$$

Para se demonstrar que $A.adj(A) = |A|I_n$, considere-se a (i, j)-ésima entrada da matriz

$$\begin{aligned} [A.adj(A)]_{ij} &= \sum_{k=1}^{n} a_{ik}[adj(A)]_{kj} \\ &= \sum_{k=1}^{n} a_{ik}(-1)^{k+j}A_{jk} \end{aligned}$$

Se $i = j = t$, $[A.adj(A)]_{tt} = \sum_{k=1}^{n} a_{tk}(-1)^{k+t}A_{tk} = |A|$.

Se $i \neq j$ então $[A.adj(A)]_{ij}$ é o determinate da matriz que se obtém de A substituindo a j-ésima linha pela i-ésima, logo zero.

Assim $A.adj(A) = |A|I_n$.

Corollary

Seja $A \in M_{n\times n}(K), K = \mathbb{R}$ ou $K = \mathbb{C}$, então A é invertível se e só se $det(A) \neq 0$ e $A^{-1} = \frac{1}{det(A)} adj(A)$.

Exercício

Seja $A \in M_{n\times n}(K), K = \mathbb{R}$ ou $K = \mathbb{C}$ uma matriz invertível. Prove que

$$det(adj(A)) = (det(A))^{n-1}.$$

Exercícios

Determine a inversa das seguintes matrizes

$$A_1 = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 3 \\ 0 & 3 & 2 \\ -2 & 0 & -4 \end{bmatrix}$$

$$A_2 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Sistemas de Cramer

Um sistema de m equações lineares e n incógnitas é de Cramer se $m = n$ e o determinate da matriz do sistema é não nulo.

Seja $A \in M_{n\times n}(K)$ uma matriz com determinante não nulo e $B \in M_{n\times 1}(K)$. O sistema $AX = B$ tem uma única solução, $X = A^{-1}B$.

Suponhamos $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$, $det(A) \neq 0$ e $B = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix}$.

$$A \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = B \quad \Leftrightarrow \quad \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \frac{1}{det(A)} \begin{bmatrix} a_{22} & -a_{12} \\ -a_{21} & a_{11} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \frac{1}{det(A)} \begin{bmatrix} a_{22}b_1 - a_{12}b_2 \\ -a_{21}b_1 + a_{11}b_2 \end{bmatrix}$$

Suponhamos $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$, $det(A) \neq 0$ e $B = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix}$.

$$A \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = B \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = & |A|^{-1} \begin{vmatrix} {\color{red}b_1} & a_{12} \\ {\color{red}b_2} & a_{22} \end{vmatrix} \\ \\ x_2 = & |A|^{-1} \begin{vmatrix} a_{11} & {\color{red}b_1} \\ a_{21} & {\color{red}b_2} \end{vmatrix} \end{cases}$$

Exercício: Resolva em $\mathbb{C}$ o sistema

$$\begin{cases} (2+i)z_1 - (1+i)z_2 & = 5+i \\ (1-2i)z_1 + (2-i)z_2 & = 2 \end{cases}$$

Teorema

Seja $A = (a_{ij}) \in M_{n,n}(K)$ *tal que* $car(A) = n$. *Então o sistema*

$$\left\{\begin{array}{ccccccccc} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & \cdots & + & a_{1n}x_n & = & b_1 \\ a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + & \cdots & + & a_{2n}x_n & = & b_2 \\ \cdots & & & & & & & & \\ a_{n1}x_1 & + & a_{n2}x_2 & + & \cdots & + & a_{nn}x_n & = & b_n \end{array}\right.$$

tem uma única solução nas incógnitas $x_1, x_2, \ldots, x_n$ *qualquer que seja* $(b_1, b_2, \ldots, b_n) \in K^n$ *e a solução é*

$$x_1 = \frac{|A_1|}{|A|},\ x_2 = \frac{|A_2|}{|A|}, \cdots,\ x_n = \frac{|A_n|}{|A|}$$

onde A_i *é a matriz que se obtém de* A *substituindo a coluna* i *por* $\begin{array}{c} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{array}$.

Exemplo 1

O sistema

$$\begin{cases} a^2x & + & y & = & 4 \\ -3x & + & a^4y & = & -1 \end{cases}$$

nas incógnitas x, y tem uma única solução, qualquer que seja $a \in \mathbb{R}$, porque

$$\begin{vmatrix} a^2 & 1 \\ -3 & a^4 \end{vmatrix} = a^6 + 3 > 0, \ \ \forall a \in \mathbb{R}.$$

A solução é

$$\begin{cases} x & = & \dfrac{\begin{vmatrix} 4 & 1 \\ -1 & a^4 \end{vmatrix}}{a^6+3} = \frac{4a^4+1}{a^6+3} \\ y & = & \dfrac{\begin{vmatrix} a^2 & 4 \\ -3 & -1 \end{vmatrix}}{a^6+3} = \frac{-a^2+12}{a^6+3} \end{cases}$$

Exemplo 2

O sistema

$$\left\{\begin{array}{rcrcr} (1+3i)x & - & 2iy & = & 1-i \\ (2+i)x & + & 2y & = & 1-3i \end{array}\right.$$

nas incógnitas x, y tem uma única solução, porque

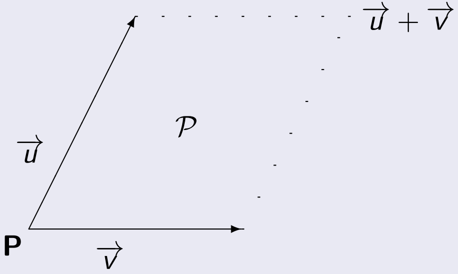
$$\begin{vmatrix} 1+3i & -2i \\ 2+i & 2 \end{vmatrix} = 2+6i-(-4i+2) = 10i$$

A solução é:

(exercício)

Teorema (Significado geométrico do determinante de ordem 2)

Seja $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \in M_{2,2}(\mathbb{R})$ *e sejam* $\overrightarrow{u} = (a_{11}, a_{12})$ *e* $\overrightarrow{v} = (a_{21}, a_{22})$ *vectores de* $\mathbb{R}^2$. *Se* $\overrightarrow{u}$ *e* $\overrightarrow{v}$ *são colineares,* $det(A) = 0$. *Suponhamos que* $\overrightarrow{u}$ *e* $\overrightarrow{v}$ *não são colineares. Aplicamos* $\overrightarrow{u}$ *e* $\overrightarrow{v}$ *num ponto* P *de* $\mathbb{R}^2$, *por exemplo em* $(0,0)$. *Consideramos o paralelograma de vértices* P, $P + \overrightarrow{u}$, $P + \overrightarrow{v}$, $P + (\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v})$.



A área de $\mathcal{P}$ *é igual a* $||\overrightarrow{u}||\,||\overrightarrow{v}||\operatorname{sen}(\theta)$ *onde* $\theta \in [0, \pi]$ *é o ângulo entre* $\overrightarrow{u}$ *e* $\overrightarrow{v}$.

Proposição

A área do paralelogramo $\mathcal{P}$ é $\mathcal{A} = |u_1 v_2 - v_1 u_2|$.

$$\begin{aligned}
\mathcal{A}^2 &= ||\overrightarrow{u}||^2 ||\overrightarrow{v}||^2 \mathrm{sen}^2(\theta) \\
&= ||\overrightarrow{u}||^2 ||\overrightarrow{v}||^2 (1 - \cos^2(\theta)) \\
&= ||\overrightarrow{u}||^2 ||\overrightarrow{v}||^2 - (\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v})^2 \\
&= (u_1^2 + u_2^2)(v_1^2 + v_2^2) - (u_1 v_1 + u_2 v_2)^2 \\
&= (u_1 v_2 - v_1 u_2)^2 = |u_1 v_2 - v_1 u_2|^2
\end{aligned}$$

Portanto se $\overrightarrow{u} = (a_{11}, a_{12}), \overrightarrow{v} = (a_{21}, a_{22})$ então

$$\mathrm{area}(\mathcal{P}) = |a_{11} a_{22} - a_{12} a_{21}| = |det(A)|.$$

Exercício

Calcule a área do paralelograma que tem os vértices $(1,-1),(2,3),(-1,-4)$.

O módulo de um determinante de ordem 3 é o volume do paralelipípedo gerado pelos vectores coluna da matriz (pode ser degenerado).

Definição (Produto vectorial em $\mathbb{R}^3$)

Sejam $\overrightarrow{u} = (u_1, u_2, u_3), \overrightarrow{v} = (v_1, v_2, v_3)$ *vectores em* $\mathbb{R}^3$. *O produto vectorial* $\overrightarrow{u} \times \overrightarrow{v}$ *é um vector em* $\mathbb{R}^3$ *cujas coordenadas* c_1, c_2, c_3 *são respectivamente os cofactores das entradas* a_{13}, a_{23} *e* a_{33} *da matriz*

$$\begin{pmatrix} u_1 & v_1 & a_{13} \\ u_2 & v_2 & a_{23} \\ u_3 & v_3 & a_{33} \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{u} \times \overrightarrow{v} = (u_2 v_3 - u_3 v_2, -(u_1 v_3 - u_3 v_1), u_1 v_2 - u_2 v_1).$$

Proposição (Propriedades do produto vectorial)

1. *Se* $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{0}$ *ou* $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{0}$ *então* $\overrightarrow{u} \times \overrightarrow{v} = \overrightarrow{0}$.
2. (i) $(\overrightarrow{u} \times \overrightarrow{v}) \cdot \overrightarrow{u} = 0$
   (ii) $(\overrightarrow{u} \times \overrightarrow{v}) \cdot \overrightarrow{v} = 0$
3. *Se* $\overrightarrow{u}$ *e* $\overrightarrow{v}$ *são vectores não nulos e* $\theta =$ *ângulo*$(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$ *então*
   $$||\overrightarrow{u} \times \overrightarrow{v}|| = ||\overrightarrow{u}||||\overrightarrow{v}||\mathrm{sen}(\theta).$$
4. $\overrightarrow{u} \times \overrightarrow{v} = \overrightarrow{0}$ *se e só se* $\overrightarrow{u}$ *e* $\overrightarrow{v}$ *são colineares.*
5. $\overrightarrow{u} \times \overrightarrow{v} = -\overrightarrow{v} \times \overrightarrow{u}$
6. (i) $(a\overrightarrow{u_1} + b\overrightarrow{u_2}) \times \overrightarrow{v} = a(\overrightarrow{u_1} \times \overrightarrow{v}) + b(\overrightarrow{u_2} \times \overrightarrow{v})$
   (ii) $\overrightarrow{u} \times (a\overrightarrow{v_1} + b\overrightarrow{v_2}) = a(\overrightarrow{u} \times \overrightarrow{v_1}) + b(\overrightarrow{u} \times \overrightarrow{v_2})$;
   $a, b \in \mathbb{R}$

Proposição (Propriedades do produto vectorial - continuação)

1. *Sejam* $e_1 = (1, 0, 0), e_2 = (0, 1, 0), e_3 = (0, 0, 1)$. *Então*

$$e_1 \times e_2 = e_3; e_3 \times e_1 = e_2; e_2 \times e_3 = e_1$$

2. *Sejam* $\overrightarrow{u} = u_1, \ldots, u_3$, $\overrightarrow{v} = v_1, \ldots, v_3$ *e* $\overrightarrow{w} = w_1, \ldots, w_3$. *Então*

$$(\overrightarrow{u} \times \overrightarrow{v}) \cdot \overrightarrow{w} = \begin{vmatrix} u_1 & v_1 & w_1 \\ u_2 & v_2 & w_2 \\ u_3 & v_3 & w_3 \end{vmatrix}$$

Nota

O produto vectorial <u>*não é associativo*</u>. *Por exemplo*

$$e_1 \times (e_1 \times e_2) = e_1 \times e_3 = -e_2$$

mas

$$(e_1 \times e_1) \times e_2 = 0.$$