Algebra Linear e Geometria Analitica (M1002)
Espaços vectoriais e aplicações lineares

Departamento de Matemática Pura
Faculdade de Ciências
Universidade do Porto

1 semestre 2018/2019

Definição

Seja E um conjunto não vazio e $K = \mathbb{R}$ ou $K = \mathbb{C}$. Suponhamos que estão definidas duas operações

- *adição:* $\begin{array}{ccc} E \times E & \longrightarrow & E \\ (u, v) & \mapsto & u + v \end{array}$
- *multiplicação por um escalar:* $\begin{array}{ccc} K \times E & \longrightarrow & E \\ (\lambda, u) & \mapsto & \lambda u \end{array}$

dizemos que $E = (E, +, .)$ é um espaço vectorial sobre K se:

- *adição é associativa:* $\forall u, v, w \in E, (u + v) + w = u + (v + w)$;
- *existe elemento neutro:* $\forall u \in E, u + 0_E = u = 0_E + u$;
- *a adição é comutativa:* $\forall u, v \in E, u + v = v + u$;
- *existência de simétrico:* $\forall u \in E, \exists u' \in E : u + u' = 0 = u' + u$;
- $\forall \alpha \in K, \forall u, v \in E, \alpha(u + v) = \alpha u + \alpha v$;
- $\forall \alpha, \beta \in K, \forall u \in E, (\alpha + \beta)u = \alpha u + \beta u$;
- $\forall \alpha, \beta \in K, \forall u \in E, (\alpha\beta)u = \alpha(\beta u)$;
- $\forall u \in E, 1u = u$.

Dado um espaço vectorial E sobre K, aos elementos de E chamamos vectores e aos elementos de K chamamos escalares

Proposição

Seja E um espaço vectorial sobre K.

- *O vector 0_E é o único vector x que satisfaz a equação: $x + v = v, \forall v \in E$;*
- *para todo o $v \in E$, o vector $-v$ é o único vector y que satisfaz $v + y = 0_E$;*
- *Se $u + v = u + w$ para quaisquer $u, v, w \in E$, então $v = w$;*
- $\forall v \in E, 0_K v = 0_E$;
- $\forall \lambda \in K, \lambda 0_E = 0_E$;
- $(-\lambda)v = \lambda(-v) = -\lambda v, \forall \lambda \in K, \forall v \in E$;

Note-se que dado $\lambda \in K, v \in E$, se tem

$$\lambda v = 0_E \Leftrightarrow \lambda = 0_K \vee v = 0_E.$$

Definição

Seja $E = (E, +, .)$ um espaço vectorial e U um subconjunto de E não vazio. Se $(U, +, .)$ for também um espaço vectorial para as operações definidas em E, dizemos que U é um subespaço de E.

Proposição

Seja E um espaço vectorial sobre K e seja U um subconjunto de E. Diz-se que U é um subespaço vectorial de E se

- $0_E \in U$.
- $\forall u, v \in U, u + v \in U$ *(U é estável para a adição).*
- $\forall \lambda \in K, \forall u \in U, \lambda u \in U$ *(U é estável para a multiplicação por um escalar).*

Exemplos

1. $\mathbb{R}^m = \{(r_1, \dots, r_m) | r_1, \dots, r_m \in \mathbb{R}\}$
é um espaço vectorial com a adição usual de vectores e a multiplicação por um escalar definidas por:

$$\begin{array}{cccc} + : & \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^m & \longrightarrow & \mathbb{R}^m \\ & ((r_1, \dots, r_m), (s_1, \dots, s_m)) & \mapsto & (r_1 + s_1, \dots, r_m + s_m) \end{array}$$

$$\begin{array}{cccc} \cdot : & \mathbb{R} \times \mathbb{R}^m & \longrightarrow & \mathbb{R}^m \\ & (\lambda, (s_1, \dots, s_m)) & \mapsto & (\lambda s_1, \dots, \lambda s_m) \end{array}$$

2. Seja X um conjunto não vazio. O conjunto

$$\mathcal{F}_X = \{f : X \to \mathbb{R}\}$$

é um espaço vectorial sobre $\mathbb{R}$ com a multiplicação e producto por escalar definidos por

$$(f + g)(x) = f(x) + g(x), \forall f, g \in \mathcal{F}_X$$

$$(\lambda f)(x) = \lambda(f(x)), \forall f \in \mathcal{F}_X, \forall \lambda \in \mathbb{R}$$

Exemplos

3. O conjunto $\mathcal{P}(x)$ de todos os polinómios em x é um espaço vectorial real onde:

$$\sum_{i=0}^{n} r_i x^i + \sum_{i=0}^{n} s_i x^i = \sum_{i=0}^{n} (r_i + s_i) x^i,$$

$$\lambda \sum_{i=0}^{n} r_i x^i = \sum_{i=0}^{n} (\lambda r_i) x^i, \forall \lambda \in \mathbb{R}$$

4. $\mathbb{C}^n = \{(c_1, \ldots, c_n) : c_i \in \mathbb{C}\}$ é um espaço vectorial complexo

$$(c_1, \ldots, c_n) + (c_1', \ldots, c_n') = (c_1 + c_1', \ldots, c_n + c_n')$$

$$\lambda(c_1, \ldots, c_n) = (\lambda c_1, \ldots, \lambda c_n), \forall \lambda \in \mathbb{C}.$$

5. $\mathbb{C}^n$ é um espaço vectorial real.

Examples:

6. Seja $U_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x - y = 0\}$.

U_1 é um subespaço de $\mathbb{R}^2$ como $\mathbb{R}$-espaço vectorial.

7. $U_2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 - y = 0\}$ não é subespaço de $\mathbb{R}^2$.

8. $U_3 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x - y = 7\}$ não é um subespaço de $\mathbb{R}^2$.

9. $U_4 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x - y \leq 0\}$ não é um subespaço de $\mathbb{R}^2$.

10. $U_5 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 0\}$ é um subespaço vectorial de $\mathbb{R}^2$.

Exemplos

11. Seja $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix} \in M_{2\times 3}(K)$. Tem-se que

$W_1 = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : A \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}$ é um subespaço de $\mathbb{R}^3$.

$W_2 = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : A \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} \right\}$ não é um subespaço de $\mathbb{R}^3$

Exemplos

Seja $U = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x = y\}$, $V = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x = 0\}$.
Tem-se que

- U e V são subespaços de $\mathbb{R}^2$.
- $U \cap V = \{(0, 0)\}$ é subespaço vectoial de $\mathbb{R}^2$.
- $U + V = \mathbb{R}^2$ é um subespaço vectorial de $\mathbb{R}^2$.

Teorema

Seja E um espaço vectorial e sejam U e V subespaços vectoriais de E. Então:

1. $U + V = \{u + v : u \in U, v \in V\}$ *é um subespaço vectorial de* E;
2. $U \cap V$ *é um subespaço vectorial de* E.

Soluções de sistemas homogeneos

Definição

Dado $A \in M_{m\times n}(K)$ *e* $B \in M_{m\times 1}$, *um sistema* $AX = B$ *diz-se* *homogeneo* *se* $B = [0]_{m\times 1}$.

Proposição

Todo o sistema homogeneo é possível.

Proposição

O conjunto de soluções de um sistema homogeneo é um espaço vectorial.

Dado $A \in M_{m\times n}$, $B \in M_{m\times 1}$, o sistema homogeneo associado ao sistema $AX = B$ é $AX = [0]$.

Suponhamos que o sistema $AX = B$ é possível. Seja Z uma solução de $AX = B$ e $\mathcal{D}$ o conjunto das solução do sistema homogeneo $AX = [0]$. O conjunto das soluções de $AX = B$ é

$$Z + \mathcal{D}$$

Considere-se o sistema

$$\left\{\begin{array}{rcl} 2x - 4y + t & = & 1 \\ -x + 2y + -z + t & = & -2 \\ 3x - 6y + 2z & = & 0 \end{array}\right.$$

o seu conjunto solução é

$$(2, 0, -3, -3) + \{(x, y, 0, 0) : -x + 2y = 0\}.$$

Definição

Seja E um espaço vectorial. Suponhamos que $u_1, \ldots, u_n$ são vectores de E. Diz-se que um vector $u \in E$ é combinação linear de $u_1, \ldots, u_n$ se existem escalares $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in K$ tais que

$$u = \lambda_1 u_1 + \ldots + \lambda_n u_n.$$

Definição

Seja E um espaço vectorial e S um subconjunto não vazio de E. Diz-se que um vector $u \in E$ é combinação linear de vectores de S se existe um número finito de vectores $u_1, \ldots, u_k \in S$ e de escalares $\lambda_1, \ldots, \lambda_k \in K$ tais que

$$u = \lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 + \ldots + \lambda_k u_k.$$

Ao conjunto de todas as combinações lineares de elementos de S chama-se subespaço gerado por S e denota-se por $\mathcal{L}(S)$ ou $< S >$. Se $S = \emptyset$ define-se $\mathcal{L}(S) = \{0\}$.

Exemplos:

1) Considere-se $E = \mathbb{R}^2$

- (a, b) é combinação linear de $(1, 0)$ e $(0, 1)$.

$$\mathcal{L}(\{(1,0),(0,1)\}) = \mathbb{R}^2.$$

- (a, b) é combinação linear de $(-1, 1)$ e $(1, 2)$.

$$\mathcal{L}(\{(-1,1),(1,2)\}) = \mathbb{R}^2.$$

2) Considere-se $E = \mathbb{R}^3$, tem-se que

- $<(1,2,-1),(2,1,0)>= \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x - 2y - 3z = 0\};$
- $<(1,2,-1),(2,1,0),(4,5,-2)>= \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 :$ $x - 2y - 3z = 0\}.$

Exemplos

3) Considere-se $E = \mathcal{P}(x)$. Seja $\mathcal{P}_n(x)$ os polinómios na variável x de garu menor ou igual a n.

- $< 1, x, x^2, \ldots, x^n >= \mathcal{P}_n(x)$.
- $< 1, 1 + x, 1 + x + x^2, \ldots, 1 + x + x^2 + \ldots + x^n >= \mathcal{P}_n(x)$.

Teorema

Seja S *um subconjunto de um espaço vectorial* E*. Então* $< S >$ *é um subespaço vectorial de* E*, é o menor subespaço vectorial que contém* S*, isto é se* U *é um subespaço vectorial de* E *e* $S \subseteq U$ *então* $< S > \subseteq U$*.*

Dependência Linear

Definição

Sejam $u_1, \ldots, u_n$ *vectores de um espaço vectorial* E*. Diz-se que* $u_1, \ldots, u_n$ *são linearmente dependentes se existem* $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ *não todos nulos tais que*

$$\lambda_1 u_1 + \ldots + \lambda_n u_n = 0_E.$$

Diz-se que $u_1, \ldots, u_n$ *são linearmente independentes se quaisquer que sejam os escalares* $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$

$$\lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 + \ldots + \lambda_n u_n = 0_E \Rightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = \ldots = \lambda_n = 0.$$

Exemplos

1) Em $\mathbb{R}^2$

- $(1,0),(0,1)$ são linearmente independentes;
- $(-1,1),(1,2)$ são linearmente independentes;
- $(-1,1),(0,0)$ são linearmente dependentes;
- $(1,2),(-10,-20)$ são linearmente dependentes.

2) Em $\mathbb{R}^3$

- $(1,2,-1),(2,1,0)$ são linearmente independentes;
- $(1,2,-1),(2,1,0),(4,5,-2)$ são linearmente dependentes;
- $(1,2,-1),(2,1,0),(0,1,0)$ são linearmente independentes e $<(1,2,-1),(2,1,0),(0,1,0)>=\mathbb{R}^3$

3) Em $\mathcal{P}(x)$

- $1, 1+x, 1+x+x^2, \ldots, 1+x+x^2+\ldots+x^n$ são linearmente independentes.

Definição

Seja S um subconjunto não vazio de um espaço vectorial E. Diz-se que S é linearmente dependente se existem vectores $v_1, \ldots, v_p \in S$ e escalares não todos nulos $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ tais que

$$\lambda_1 v_1 + \ldots + \lambda_n v_n = 0_E.$$

Se S não é linearmente dependente diz-se linearmente independente.

Proposição

S é linearmente independente se e só se quaisquer que sejam os vectores $v_1, \ldots, v_n \in S$

$$\lambda_1 v_1 + \ldots + \lambda_n v_n = 0_E \Rightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = \ldots = \lambda_n = 0.$$

Proposição

Seja E *um espaço vectorial e* S *um subconjunto não vazio de* E*. Então:*

- *se* S *é linearmente dependente qualquer subconjunto de* E *que contenha* S *é linearmente dependente;*
- *se* $< S >= E$, $S \cup \{v\}$ *é linearmente dependente qualquer que seja* $v \in E \backslash S$*;*
- *se* S *é linearmente independente,* $< S > \subsetneq E$ *e* $v \in E \backslash < S >$ *então* $S \cup \{v\}$ *é linearmente independente.*

Lema

Seja E um espaço vectorial sobre K, $v_1, \ldots, v_n$ vectores de E e $u \in E$ tal que

$$u = \lambda_1 v_1 + \ldots + \lambda_n v_n, v_i \in E.$$

Se $\lambda_i \neq 0$

$$< v_1, \ldots, v_i, \ldots, v_n >=< v_1, \ldots, v_{i-1}, u, v_{i+1}, \ldots, v_n > .$$

Lema

Seja E um espaço vectorial sobre um corpo K e sejam $v_1, \ldots, v_n \in E$. Então

$$< v_1, \ldots, v_i, \ldots, v_n > = < v_1, \ldots, \lambda v_i, \ldots, v_n >, \forall \lambda \in K \backslash \{0\}.$$

Teorema

Seja E um espaço vectorial sobre K e sejam $S_1 = \{u_1, \ldots, u_p\}$ e $S_2 = \{v_1, \ldots, v_n\}$ conjuntos de vectores de E tais que:

a) *S_1 é linearmente independente;*

b) *$S_1 \subseteq < S_2 >$; (isto é os vectores $u_1, \ldots, u_p$ são combinações linear dos vectores $v_1, \ldots, v_n$).*

Então:

i) *$p \leq n$;*

ii) *podemos acrescentar a S_1 $n - p$ vectores de S_2 de modo a que o conjunto obtido gere o subespaço $< S_2 >$.*

Exercício:

Seja E um espaço vectorial e seja $S \subseteq E$. Mostre que S é um subespaço vectorial de E se e só se $S =< S >$.

Bases e dimensão

Definição

Seja E um espaço vectorial. Uma base de E é um subconjunto $\mathcal{B}$ de E tal que $\mathcal{B}$ é linearmente independente e gera E.

Definição

Diz-se que E tem dimensão finita se $E = \{0_E\}$ ou E tem uma base finita. A dimensão de $\{0_E\}$ é 0.

Teorema

Seja E um espaço vectorial de dimensão finita. Então, todas as bases de E têm o mesmo número de elementos.

Definição

Diz-se que um espaço vectorial E tem dimensão $n > 0$ se E contém um base com n elementos.

Exemplos

- $\{(1,0),(0,1)\}$ e $\{(-1,1),(1,2)\}$ são bases de $\mathbb{R}^2$.
- $\{(1,3)\}$ é uma base de $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 3x - y = 0\}$.
- $\{(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)\}$ e $\{(1,2,-1),(2,1,0),(0,1,0)\}$ são bases de $\mathbb{R}^3$.
- $\{(1,2,-1),(2,1,0)\}$ e $\{(0,3,-2),(3,0,1)\}$ são bases de $\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x - 2y - 3z = 0\}$
- $\{(1,2,-1),(2,1,0)\}$ é uma base de $\{(a+2b+8c, 2a+b+7c, -a-2c) : a, b \in \mathbb{R}\}$

Teorema

Seja E um espaço vectorial de dimensão $n > 0$. Então:

1. *Se $v_1, \ldots, v_p$ são vectores linearmente independentes de E e $p < n$ existem vectores $v_{p+1}, \ldots, v_n$ de E tais que $\{v_1, \ldots, v_n\}$ é uma base de E.*
2. *Se $v_1, \ldots, v_n$ são vectores linearmente independentes de E, $v_1, \ldots, v_n$ é uma base de E.*
3. *Se $\{v_1, \ldots, v_n\}$ gera E, $\{v_1, \ldots, v_n\}$ é uma base de E.*

Exercício

Seja E um espaço vectorial. $\{u_1, \ldots, u_n\}$ é base de E se e só se qualquer que seja $u \in E$ existem escalares $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in K$, únicos tais que

$$u = \lambda_1 u_1 + \ldots + \lambda_n u_n.$$

Exemplos

I) Seja $V = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x + y - 3z = 0\}$ um subespaço vectorial de $\mathbb{R}^3$. Determine a dimensão de V e uma base de V que contenha $\{v_1\}$. Esta base é única?

II) Caso seja possível, determine uma base para o espaço vectorial real $\mathbb{R}^5$ que inclua os vectores $(1, 1, 1, 1, 2), (2, 1, 1, 1, 1)$, $(0, 1, 1, 1, 0)$.

Proposição

Seja $E = K^m$ *um espaço vectorial sobre um corpo* K*,* $v_1, \ldots, v_n \in E$ *e* A *a matriz cujas linhas são os vectores* $v_i, i \in \{1, \ldots, n\}$*. Tem-se que*

$$dim(< v_1, \ldots, v_n >) = car(A).$$

O que acontece se em vez de tomarmos $v_1, \ldots, v_n$ como as linhas de A os considerarmos como colunas ?

Nota

Dado K um corpo e $A \in M_{n\times p}$, sejam $C_1, \ldots, C_p$ as suas p colunas e $L_1, \ldots, L_n$ as suas n linhas. Tem-se que

$$dim(< L_1, \ldots, L_n >) = dim(< C_1, \ldots, C_p >).$$

Seja E um espaço vectorial de dimensão n e seja $\{u_1, \ldots, u_n\}$ uma base de E. Se considerarmos a base ordenada usa-se a notação $(u_1, \ldots, u_n)$.

$\mathcal{B}_1 = ((1,0),(0,1))$ e $\mathcal{B}_2 = ((0,1),(1,0))$ são bases ordenadas de $\mathbb{R}^2$ mas $\mathcal{B}_1 \neq \mathcal{B}_2$.

A base canónica de $\mathbb{R}^n$ é a base ordenada

$$\mathcal{B}_c = ((1,0,\ldots,0),(0,1,0,\ldots,0),\ldots,(0,0,\ldots,0,1)).$$

O vector $u = (a_1, \ldots, a_n) \in \mathbb{R}^n$ é combinação linear dos vectores da base $\mathcal{B}_c$;

$$(a_1, \ldots, a_n) = a_1(1,0,0,\ldots,0) + a_2(0,1,0,\ldots,0) + \ldots + a_n(0,0,\ldots,1)$$

$(a_1, \ldots, a_n)$ são as coordenadas de u na base canónica de $\mathbb{R}^n$

Definição

Seja $\mathcal{B} = (u_1, \ldots, u_n)$ *uma base de um espaço vectorial* E*. Dado* $v \in E$ *existem escalares* $a_1, \ldots, a_n$ *únicos tais que* $v = a_1 u_1 + \ldots + a_n u_n$*. As coordenadas de* v *na base* $\mathcal{B}$ *são* $(a_1, \ldots, a_n)$ *e escreve-se* $v = (a_1, \ldots, a_n)_{\mathcal{B}}$*.*

Exemplos

O vector $(2,3) \in \mathbb{R}^2$ tem coordenadas:

- $(2,3)$ na base $((1,0),(0,1))$;
- $(3,2)$ na base $((0,1),(1,0))$;
- $(2,1)$ na base $((1,1),(0,1))$;
- $(-1/3,5/3)$ na base $((-1,1),(1,2))$.

Dado um espaço vectorial E e $\mathcal{B}=(v_1,\ldots,v_n)$ uma base de E, se $v=\alpha_1 u_1+\ldots+\alpha_n u_n$ embora v determine o sistema de coordenadas $(\alpha_1,\ldots,\alpha_n)$, não confundir o vector v com o sistema das suas coordenadas.

Por exemplo considere-se em $\mathbb{R}_3[x]$ o polinómio x^3+2x+4 que tem por coordenadas relativamente à base canónica $(1,x,x^2,x^3)$, $(4,2,0,1)$. Mas

$$x^3+2x+4 \neq (4,2,0,1).$$

Matrizes Mudança de Base

Definição

Sejam $\mathcal{B}_1 = (u_1, \ldots, u_n)$ *e* $\mathcal{B}_2 = (v_1, \ldots, v_n)$ *duas bases de um espaço vectorial* E. *A matriz mudança de base* $M(Id; \mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2)$ *é a matriz* $n \times n$ *cujas colunas são as coordenadas dos vectores* u_j *na base* $\mathcal{B}_2$, *isto é , para* $1 \leq j \leq n$, $u_j = a_{1j}v_1 + a_{2j}v_2 + \ldots + a_{nj}v_n$,

$$M(Id; \mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2) = \begin{bmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1j} & \ldots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \ldots & a_{nj} & \ldots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

Se $v = (\lambda_1, \ldots, \lambda_n)_{\mathcal{B}_1}$, *as coordenadas de* v *na base* $\mathcal{B}_2$ *são obtidas efectuando o produto*

$$M(Id; \mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2) \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \end{bmatrix}$$

Exemplo

Considere-se $\mathcal{B}_1 = ((1,0),(0,1))$ e $\mathcal{B}_2 = ((-1,1),(1,2))$ bases de $\mathbb{R}^2$.

Dado $u = (a,b) \in \mathbb{R}^2$ existem $x, y \in \mathbb{R}$ tais que

$$(a,b) = x(-1,1) + y(1,2)$$

de facto, $x = \frac{-2a+b}{3}$ e $y = \frac{a+b}{3}$.

$(\dfrac{-2a+b}{3}, \dfrac{a+b}{3})$ são as coordenadas de (a,b) na base $\mathcal{B}$,

escreve-se $u = \left(\dfrac{-2a+b}{3}, \dfrac{a+b}{3}\right)_{\mathcal{B}_2}$

$$M(Id;\mathcal{B}_1,\mathcal{B}_2) = \begin{bmatrix} -2/3 & 1/3 \\ 1/3 & 1/3 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} a \\ \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} -2/3a + 1/3b \\ \end{bmatrix}$$

Tal como antes $\mathcal{B}_1 = ((1,0),(0,1))$ e $\mathcal{B}_2 = ((-1,1),(1,2))$.

$$M(Id;\mathcal{B}_2,\mathcal{B}_1) = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

Dado $v = (c,d)_{\mathcal{B}_2}$ as coordenadas de um vector v na base $\mathcal{B}_2$, então

$$M(Id;\mathcal{B}_2,\mathcal{B}_1)\begin{bmatrix} c \\ d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -c+d \\ c+2d \end{bmatrix}$$

Assim, $(-c+d, c+2d)$ são as coordenadas do vector v na base canónica.

Que relação existe entre $M(Id;\mathcal{B}_2,\mathcal{B}_1)$ e $M(Id;\mathcal{B}_1,\mathcal{B}_2)$?

$$\begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} -2/3 & 1/3 \\ 1/3 & 1/3 \end{bmatrix}$$

Teorema

Seja E um espaço vectorial de dimensão $n > 0$ e sejam $\mathcal{B}_1$, $\mathcal{B}_2$ bases de E. Então $M(Id; \mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2)$ é invertível e

$$(M(Id; \mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2))^{-1} = M(Id; \mathcal{B}_2, \mathcal{B}_1).$$

Toda a matriz mudança de base é invertível

O teorema anterior é consequência imediata da seguinte proposição:

Proposição

Seja E um espaço vectorial e $\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2, \mathcal{B}_3$ bases de E, tem-se que

$$M(Id; \mathcal{B}_2, \mathcal{B}_3)M(Id; \mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2) = M(Id; \mathcal{B}_1, \mathcal{B}_3).$$

Exercício

1. Sejam $\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2$ bases de $\mathbb{R}^3$ tais que

$$M(Id; \mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 3 & 2 & 0 \end{bmatrix}.$$

a) Dado $u = (1, -3, 2)_{\mathcal{B}_1}$ indique as coordenadas de u na base $\mathcal{B}_2$.

b) Dado $v = (1, -3, 2)_{\mathcal{B}_2}$ indique as coordenadas de v na base $\mathcal{B}_1$.

Soma directa de subespaços

Definição

Seja E um espaço vectorial e F, G subespaços de E. Dizemos que F e G estão em soma directa se $F \cap G = \{0\}$.

Dizemos que E é soma directa de F com G se:

- $E = F + G$
- $F \cap G = \{0\}$

e escrevemos $E = F \oplus G$.

Exemplo: Em $\mathbb{R}^5$ os subespaços

$$F = \{(x_1, x_2, 0, 0, 0) | x_1, x_2 \in \mathbb{R}\}$$

$$G = \{(0, 0, x_3, x_4, x_5) | x_3, x_4, x_5\}$$

são tais que $\mathbb{R}^5 = F \oplus G$.

Soma directa de subespaços

Proposição

Seja E um espaço vectorial, F, G subespaços de E e $(f_1, \ldots, f_r)$ e $(g_1, \ldots, g_s)$ bases de F e G respectivamente.
$F \oplus G$ se e só se $(f_1, \ldots, f_r, g_1, \ldots, g_s)$ é linearmente independente.

Proposição

Seja E um espaço vectorial de dimensão finita e F, G subespaços de E. Se $F \oplus G$ então

$$dim(F \oplus G) = dim(F) + dim(G).$$

Dimensão da soma de subespaços

Teorema

Seja E um espaço vectorial de dimensão finita e F, G subespaços de E. Tem-se que

$$dim(F+G) = dim(F) + dim(G) - dim(F \cap G)$$

Existência de complementares

Definição

Os subespaços F e G do espaço E dizem-se complementares um do outro se $F \oplus G = E$.

Proposição

Seja E um espaço vectorial de dimensão finita e F um subespaço de E. Existe G subespaço de E tal que $E = F \oplus G$.

Definição

Sejam E e F espaços vectoriais sobre um corpo K. Uma aplicação linear $f : E \longrightarrow F$ é uma função tal que:

1. $f(0_E) = 0_F$;
2. *quaisquer que sejam $u, v \in E$,*
$$f(u +_E v) = f(u) +_F f(v);$$
3. *qualquer que seja $u \in E$ e qualquer que seja $\lambda \in K$,*
$$f(\lambda u) = \lambda f(u).$$

Proposição

Sejam E e F espaços vectoriais sobre K e $f : E \longrightarrow F$ uma função. A função f é linear se e só se

$$\forall \alpha, \beta \in K \; \forall u, v \in E \; f(\alpha u + \beta v) = \alpha f(u) + \beta f(v)$$

Exemplos

- $\begin{array}{rccc} f: & \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R} \\ & (x,y) & \mapsto & 3x-17y \end{array}$ é uma aplicação linear;
- $\begin{array}{rccc} f: & \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}^3 \\ & (x,y) & \mapsto & (x-2y,0,2x) \end{array}$ é uma aplicação linear;
- $\begin{array}{rccc} f: & \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R} \\ & (x,y) & \mapsto & x-y+4 \end{array}$ não é uma aplicação linear;
- $\begin{array}{rccc} f: & \mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R}^2 \\ & (x,y,z) & \mapsto & (xy+z,y) \end{array}$ não é uma aplicação linear;
- $\begin{array}{rccc} f: & \mathbb{C}^2 & \to & \mathbb{C}^2 \\ & (z_1,z_2) & \mapsto & (z_1-8z_2,0) \end{array}$ é uma aplicação linear (consideramos $\mathbb{C}^2$ como espaço vectorial complexo);

Exemplos - Continuação

$$\begin{array}{rccc} f: & \mathbb{C} & \rightarrow & \mathbb{C} \\ & z & \mapsto & \overline{z} \end{array}$$

- se $\mathbb{C}$ for considerado como espaço vectorial real (sobre $\mathbb{R}$), f é linear;
- se $\mathbb{C}$ for considerado como espaço vectorial complexo (sobre $\mathbb{C}$), f não é linear.

Proposição

Sejam E e F espaços vectoriais sobre K, $\mathcal{B} = (u_1, \ldots, u_n)$ uma base de E e $v_1, \ldots, v_n$ vectores quaisquer de F. Então existe uma única aplicação linear

$$f : E \longrightarrow F$$

tal que $f(u_1) = v_1, f(u_2) = v_2, \ldots, f(u_n) = v_n$. Se $u \in E$ e $u = \lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 + \ldots + \lambda_n u_n$ para $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in K$ então $f(u) = \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \ldots + \lambda_n v_n$.

Qualquer aplicação linear fica determinada pelos valores que toma numa base.

Exemplo

Seja $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ uma aplicação linear tal que

$$f(1,1) = (1,-2,3)$$

$$f(-1,1) = (3,0,-1).$$

Note-se que $((1,1),(-1,1))$ é base de $\mathbb{R}^2$ e que

$$(x,y) = \frac{x+y}{2}(1,1) + \frac{-x+y}{2}(-1,1).$$

Assim,

$$\begin{aligned} f(x,y) &= \frac{x+y}{2} f(1,1) + \frac{-x+y}{2} f(-1,1) \\ &= \frac{x+y}{2}(1,-2,3) + \frac{-x+y}{2}(3,0,-1) \\ &= (-x+2y, -x-y, 2x+y) \end{aligned}$$

Definição

Sejam E e F espaços vectoriais sobre K e $f : E \longrightarrow F$ uma aplicação linear. Se $\mathcal{B} = (u_1, \ldots, u_n)$ é uma base de E e $\mathcal{B}' = (v_1, \ldots, v_n)$ uma base de F, chamamos matriz de f relativamente às bases $\mathcal{B}$ e $\mathcal{B}'$ a

$$M(f; \mathcal{B}, \mathcal{B}') = (a_{ij})$$

onde $(a_{1j}, a_{2j}, \ldots, a_{nj})$ são as coordenadas de $f(u_j)$ na base $\mathcal{B}'$, isto é $f(u_j) = a_{1j}v_1 + \ldots + a_{mj}v_m$.
Se $u = \lambda_1 u_1 + \ldots + \lambda_n u_n$,

$$M(f; \mathcal{B}, \mathcal{B}') \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{bmatrix}$$

dá-nos as coordenadas de $f(u)$ na base $\mathcal{B}'$.

Exemplo

Considere-se a aplicação linear do exemplo anterior, $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ tal que $f(x, y) = (-x + 2y, -x - y, 2x + y)$ qualquer que seja $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.

Considere-se as bases $\mathcal{B} = ((1, 1), (-1, 1))$ e $\mathcal{B}_c = ((1, 0), (0, 1))$ de $\mathbb{R}^2$ e $\mathcal{B}'_c = ((1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1))$ de $\mathbb{R}^3$. Assim,

$$M(f; \mathcal{B}, \mathcal{B}'_c) = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 0 \\ 3 & -1 \end{bmatrix}, \quad M(f; \mathcal{B}_c, \mathcal{B}'_c) = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ -1 & -1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$$

Note que $f(x, y)$ tem como coordenadas em $\mathcal{B}'_c$ as entradas da seguinte matriz

$$\begin{bmatrix} -1 & 2 \\ -1 & -1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -x + 2y \\ -x - y \\ 2x + y \end{bmatrix}.$$

Exemplo

Considere-se a aplicação linear do exemplo anterior, $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ tal que $f(x, y) = (-x + 2y, -x - y, 2x + y)$ qualquer que seja $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.

Considere-se as bases $\mathcal{B} = ((1, 1), (-1, 1))$ e $\mathcal{B}_c = ((1, 0), (0, 1))$ de $\mathbb{R}^2$ e $\mathcal{B}'_c = ((1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1))$ de $\mathbb{R}^3$. Assim,

$$M(f; \mathcal{B}, \mathcal{B}'_c) = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 0 \\ 3 & -1 \end{bmatrix}, \quad M(f; \mathcal{B}_c, \mathcal{B}'_c) = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ -1 & -1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$$

Note-se que

$$M(f; \mathcal{B}_c, \mathcal{B}'_c) = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ -1 & -1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 0 \\ 3 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1/2 & 1/2 \\ -1/2 & 1/2 \end{bmatrix}$$

Exemplo:

Seja

$$\begin{array}{cccc} f & \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ & (x,y) & \mapsto & (-x+2y,-x-y,2x+y) \end{array}$$

a apliacação linear anterior e

$$\begin{array}{cccc} g & \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ & (x,y,z) & \mapsto & (2x-5y+z,x-3z) \end{array}.$$

$$M(g\circ f;\mathcal{B}_c,\mathcal{B}_c)=\begin{bmatrix} 2 & -5 & 1 \\ 1 & 0 & -3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -1 & 2 \\ -1 & -1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 5 & 10 \\ -7 & -1 \end{bmatrix}$$

Note-se que

$$\begin{aligned} \text{g(f(x,y))} &= g(-x+2y,-x-y,2x+y) \\ &= (2(-x+2y)-5(-x-y)+2x+y,-x+2y-3(2x+y)) \\ &= (5x+10y,-7x-y) \end{aligned}$$

Teorema

Seja $f : E \longrightarrow F$ aplicação linear entre espaços de dimensão finita e $\mathcal{B}_F$ e $\mathcal{B}'_F$ bases de F e $\mathcal{B}_E$, $\mathcal{B}'_E$ bases de E, tem-se que

$$M(f; \mathcal{B}'_E, \mathcal{B}'_F) = M(Id; \mathcal{B}_F, \mathcal{B}'_F) M(f; \mathcal{B}_E, \mathcal{B}_F) M(Id; \mathcal{B}'_E, \mathcal{B}_E).$$

Teorema

Seja $f : E \longrightarrow F$ *e* $g : F \longrightarrow V$ *aplicações lineares e* $\mathcal{B}_E, \mathcal{B}_F$ *e* $\mathcal{B}_V$ *bases de* E, F *e* V *respectivamente, então*

$$M(g \circ f; \mathcal{B}_E, \mathcal{B}_V) = M(g; \mathcal{B}_F, \mathcal{B}_V) M(f; \mathcal{B}_E, \mathcal{B}_F).$$

Corollary

Seja $f : E \longrightarrow F$, $g : F \longrightarrow V$ *e* $h : V \longrightarrow W$ *aplicações lineares e* $\mathcal{B}_E, \mathcal{B}_F$, $\mathcal{B}_V$ *e* $\mathcal{B}_W$ *bases de* E, F *e* V *respectivamente, então*

$$M(h \circ g \circ f; \mathcal{B}_E, \mathcal{B}_W) = M(h; \mathcal{B}_V, \mathcal{B}_W) M(g; \mathcal{B}_F, \mathcal{B}_V) M(f; \mathcal{B}_E, \mathcal{B}_F).$$

Definição

Sejam E e F espços vectoriais sobre K. Diz-se que uma aplicação linear $f : E \longrightarrow F$ é um isomorfismo se f é bijectiva.

Proposição

Se f é um isomorfismo , a aplicação $f^{-1} : F \longrightarrow E$ (a inversa de f) é linear e dadas duas bases $\mathcal{B}_1$ e $\mathcal{B}_2$ de E e F, respectivamente,

$$M(f; \mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2) = (M(f^{-1}; \mathcal{B}_2, \mathcal{B}_1))^{-1}.$$

Exemplo:

Considere-se a aplicação linear

$$\begin{array}{rccc} f: & \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ & (x,y,z) & \mapsto & (x-y+z, y-z, 2z) \end{array}$$

$$M(f;\mathcal{B}_c,\mathcal{B}_c) = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

Assim,

$$\begin{array}{rccc} f^{-1}: & \mathbb{R}^3 & \rightarrow & \mathbb{R}^3 \\ & (a,b,c) & \mapsto & (a+b, b+\frac{c}{2}, \frac{c}{2}) \end{array}$$

e

$$M(f^{-1};\mathcal{B}_c,\mathcal{B}_c) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1/2 \\ 0 & 0 & 1/2 \end{bmatrix}.$$

Definição

Sejam E e F espaços vectorais sobre K e seja $f : E \longrightarrow F$ uma aplicação linear. O núcleo de f é o conjunto

$$N(f) = Ker(f) = \{x \in E : f(x) = 0_F\}.$$

A imagem de f é o conjunto $f(E) = \{f(u) \ : \ u \in E\}$.

Proposição

Sejam E e F espaços vectoriais e $f : E \longrightarrow F$ uma aplicação linear. Então o núcleo de f é um subespaço vectorial de E e a imagem de f é um subespaço vectorial de F.

Exemplo

Seja

$$\begin{array}{rccc} f: & \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ & (x,y,z) & \mapsto & (x-y+2z, 2x+y-z) \end{array}$$

$$\begin{array}{rcl} Ker(f) & = & \{x,y,z) \in \mathbb{R} : x-y+2z=0 \wedge 2x+y-z=0\} \\ & = & \{(\lambda, -5\lambda, -3\lambda) : \lambda \in \mathbb{R}\} \\ & = & <(1,-5,-3)> \end{array}$$

Uma base de $Ker(f)$ é $((1,-5,-3))$.

$$\begin{array}{rcl} f(\mathbb{R}^3) & = & \{(x-y+2z, 2x+y-z) : x,y,z \in \mathbb{R}\} \\ & = & \{x(1,2)+y(-1,1)+z(2,1) : x,y,z \in \mathbb{R}\} \\ & = & <(1,2),(-1,1),(2,1)> \end{array}$$

Teorema

Seja $f : E \longrightarrow E'$ uma aplicação linear entre espaços vectoriais quaisquer, e seja X uma parte de E. Então

$$f(< X >) =< f(X) > .$$

Corollary

Se $e_1, \ldots, e_n$ é uma base do espaço vectorial E, e se f é uma aplicação linear de domínio E então

$$Im(f) =< f(e_1), \ldots, f(e_n) > .$$

Teorema

Seja E e F espaços vectoriais sobre K e $f : E \longrightarrow F$ uma aplicação linear. Então:

i) *f é injectiva se e só se $Ker(f) = \{0\}$.*

ii) *Se E tem dimensão finita,*

$$dim(E) = dim(Ker(f)) + dim(f(E));$$

iii) *Se $dim(E) = dim(F) = n$, f é injectiva se e só se f é bijectiva se e só se f é sobrejectiva;*

iv) *Se f é injectiva e $u_1, \ldots, u_n$ são vectores linearmente independentes de E, $f(u_1), \ldots, f(u_n)$ são linearmente independentes.*

Corollary

Seja E um espaço vectorial. Se $f : E \longrightarrow \mathbb{R}$ é uma aplicação linear não nula então f é sobrejectiva. Se f é não nula e $dim(E) = n$, então $dim(Ker(f)) = n - 1$

Exemplo

A aplicação

$$\begin{array}{rccc} f: & \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ & (u, y, z) & \mapsto & (2x - y + z, x - 2z, y + z). \end{array}$$

i) f é linear;

ii) $Ker(f) = \{(0,0,0)\}$ (se e só se f é bijectiva).

iii) Como as dimensões do dominio e do espaço de chegada são iguais, f é injectiva se e só se f é bijectiva.

Proposição

Sejam V e U espaços vectoriais e $\phi : V \longrightarrow U$ uma aplicação linear. É condição necessária e suficiente para que ϕ seja bijectiva que ϕ transforme uma base de V numa base de U.

Proposição

Dado V um espaço vectorial de dimensão n sobre um corpo K, V é isomorfo a K^n.

Proposição

Espaços vectoriais sobre o mesmo corpo e com a mesma dimensão são isomorfos.

Definição

Dados U e V espaços vectoiais sobre o mesmo corpo K, o conjunto de todas as aplicações lineares de U em V nota-se por $\mathcal{L}(U, V)$.

Proposição

Dados U e V espaços vectoriais sobre o mesmo corpo K, $\mathcal{L}(U, V)$ é um espaço vectorial. Se U e V forem espaços vectoriais de dimensão finita, $dim(\mathcal{L}(U, V)) = dim(U)dim(V)$.

Seja $A = (a_{ij})_{1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq m}$ uma matriz com entradas em K. A aplicação linear associada a A é

$$\begin{array}{rcl} T_A : K^n & \longrightarrow & K^m \\ X & \mapsto & AX \end{array}$$

Se $X = [x_1 \ldots x_n]^T$,

$$AX = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & & & \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n \end{bmatrix}$$

A matriz de T_A relativamente às bases canónicas de K^n e de K^m é A.

A característica de A é a dimensão do subespaço gerado pelos vectores coluna de A. É igual à dimensão de $T_A(K^n)$.

Proposição

Sejam V e U espaços vectoriais sobre o corpo K e $\mathcal{B} = (v_1, \ldots, v_p)$ e $\mathcal{B}' = (u_1, \ldots, u_n)$ bases de U e de V respectivamente.
A aplicação linear $\phi : \mathcal{L}(U, V) \longrightarrow M_{n\times p}(K)$ definida por

$$\phi(g) = M(g; \mathcal{B}, \mathcal{B}')$$

é um isomorfismo.

Definição

Seja E um espaço vectorial. Um endomorfismo de E é uma aplicação linear $f : E \longrightarrow E$.

Suponhamos que $\dim(E) = n > 0$. O determinante de f é o escalar

$$det(f) = |M(f; \mathcal{B}, \mathcal{B})|$$

onde $\mathcal{B}$ é uma base de E.

Nota

- *O determinante de f não depende da base escolhida;*
- *Dada uma base $\mathcal{B}$ de E, o endomorfismo é determinado pela sua matriz $M(f; \mathcal{B}, \mathcal{B})$;*
- *A cada $A \in M_{n\times m}(K)$ está associado um endomorfismo $T_A : K^m \longrightarrow K^n$ que a cada X faz corresponder AX.*

Definição

Seja $f : E \longrightarrow E$ um endomorfismo de um espaço vectorial. Diz-se que o escalar $\lambda \in K$ é um valor próprio de f se existir um vector não nulo $u \in E$ tal que

$$f(u) = \lambda u.$$

Diz-se que u é vector próprio de f associado ao valor próprio λ.

Se $A \in M_{n\times n}(K)$, $\lambda \in K$ é um valor próprio de A se existir $U \in K^n \setminus \{0\}$ tal que

$$AU = \lambda U.$$

Diz-se que U é o vector próprio associado ao valor próprio λ.

Proposição

Dado $f : E \longrightarrow E$ um endomorfismo de E e λ um valor próprio de f, o conjunto

$$E_\lambda = \{u \in E : f(u) = \lambda u\}$$

é um subespaço vectorial de E.

Definição

A E_λ definido na proposição anterior dá-se o nome de espaço próprio associado a λ.

Nota

Se $\mathcal{B}$ é uma base do espaço vectorial E, os valores próprios do endomorfismo $f : E \longrightarrow E$ são os valores próprios de $M(f;\mathcal{B},\mathcal{B})$.

Os valores próprios e vectores próprios de A são os valores próprios e vectores próprios de endomorfismo

$$T_A : K^n \longrightarrow K^n.$$

Teorema

Seja $A \in M_{n\times n}(K)$. Então λ é valor próprio de A se e só se

$$det(A - \lambda I_n) = 0.$$

Nota

Se $f : E \longrightarrow E$ é um endomorfismo de um espaço vectorial E de dimensão finita, λ é valor próprio de f se e só se $det(f - \lambda Id) = 0$.

Exemplos:

a) $A_1 = \begin{bmatrix} 8 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}$
Tem valores próprios $8, -2$.

b) $A_2 = \begin{bmatrix} 8 & 2 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}$
Tem valores próprios $8, -2$.

c) $A_3 = \begin{bmatrix} 8 & 1 \\ 0 & 8 \end{bmatrix}$
O único valor próprio de A_3 é 8.

d) $A_4 = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ -3 & 0 \end{bmatrix}$
Não tem valores próprios reais.
Se $A_4 \in M_{2\times 2}(K)$, A_4 tem dois valores próprios $\sqrt{6}i, -\sqrt{6}i$.

Definição

Seja $A \in M_{n\times n}(K)$, o polinómio característico de A é o polinómio de grau n, $p(\lambda) = det(A - \lambda I_n)$.

Proposição

Seja $A \in M_{n\times n}(K)$. O escalar $\lambda \in K$ é um valor próprio de A se e só se é raiz do polinómio característico de A.

Lemma

Seja $A \in M_{n\times n}(K)$. Suponhamos que $\lambda_1, \lambda_2 \in K$ são valores próprios de A e que u_1 e u_2 são vectores próprios de A associados a λ_1, λ_2, respectivamente. Se $\lambda_1 \neq \lambda_2$ então u_1, u_2 são linearmente independentes.

Teorema

Seja $A \in M_{n\times n}(K)$*. Suponhamos que* $u_1, \ldots, u_n$ *são vectores próprios de* A *associados aos valores próprios* $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$*, respectivamente. Se os valores próprios são distinto dois a dois (isto é* $\lambda_i \neq \lambda_j$ *se* $i \neq j$*) então* $(u_1, \ldots, u_n)$ *é uma base de* K^n*.*

Proposição

Seja E um espaço vectorial sobre K e f um automorfismo de E, isto é um endomorfismo bijectivo. Se λ é um valor próprio não nulo de f, então λ^{-1} é um valor próprio de f^{-1}.

Nota

Se $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ são valores próprios (não necessáriamente distintos) de $A \in M_{n\times n}(K)$ e $\mathcal{B} = (u_1, \ldots, u_n)$ é uma base de K^n constituida por vectores próprios de A tal que cada u_i é o vector próprio associado ao valor próprio λ_i, qualquer que seja $i \in \{1, \ldots, n\}$, então

$$M(T_A; \mathcal{B}, \mathcal{B}) = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 & \ldots & 0 \\ \vdots & & & & \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & \lambda_n \end{bmatrix}$$

Exemplo:

1. $A_1 = \begin{bmatrix} 8 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}$. $T_{A_1}(1,0) = (8,0)$, $T_{A_1}(0,1) = (0,-2)$.

2. $A_2 = \begin{bmatrix} 8 & 2 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}$. Tem dois valores próprios 8 e -2.

   Cálculo dos vectores próprios associados a 8.
   $$\begin{bmatrix} 8 & 2 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = 8 \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} 8a + 2b = 8a \\ -2b = 8b \end{cases}$$
   Os vectores próprios associados a 8 são os vectores da forma $(a, 0)$ com $a \in \mathbb{R} \backslash \{0\}$.

   Cálculo dos vectores próprios associados a -2.
   $$\begin{bmatrix} 8 & 2 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = -2 \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} 8a + 2b = -2a \\ -2b = -2b \end{cases}$$
   Os vectores próprios associados a -2 são os vectores da forma

Considere-se $(1,0)$ e $(1,-5)$ vectores próprios de $A_2 = \begin{bmatrix} 8 & 2 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}$.
Como são vectores próprios associados a valores próprios distintos são linearmente independentes. Dois vectores linearmente independentes num espaço de dimensão 2 formam uma base. Seja $\mathcal{B} = ((1,0),(1,-5))$ base de $\mathbb{R}^2$,

$$M(T_{A_2};\mathcal{B},\mathcal{B}) = \begin{bmatrix} 8 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}.$$

Note-se que existe relação entre A_2 e $M(T_{A_2};\mathcal{B},\mathcal{B})$.

$$\begin{aligned} A_2 &= M(T_{A_2};\mathcal{B}_c,\mathcal{B}_c) \\ &= M(Id;\mathcal{B},\mathcal{B}_c)M(T_{A_2};\mathcal{B},\mathcal{B})M(Id;\mathcal{B}_c;\mathcal{B}) \\ &= M(Id;\mathcal{B},\mathcal{B}_c)M(T_{A_2};\mathcal{B},\mathcal{B})(M(Id;\mathcal{B};\mathcal{B}_c))^{-1} \end{aligned}$$

Dado $n \in \mathbb{N}$,

- Se $A_1 = \begin{bmatrix} 8 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}$ então $A_1^n = \begin{bmatrix} 8^n & 0 \\ 0 & (-2)^n \end{bmatrix}$.
- Se $A_2 = \begin{bmatrix} 8 & 2 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}$,

$$A_2^n = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 8^n & 0 \\ 0 & (-2)^n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -5 \end{bmatrix}^{-1}$$

Exercício Calcule $\begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 6 & 4 \end{bmatrix}^{1999}$.

Definição

Duas matrizes $A, B \in M_{n\times n}(K)$ *dizem-se semelhantes se existe* $P \in M_{n\times n}(K)$ *matriz invertível tal que*

$$B = P^{-1}AP.$$

Nota

Duas matrizes semelhantes representam o mesmo endomorfismo.

Teorema

Duas matrizes semelhantes têm o mesmo polinómio característico logo os mesmos valores próprios.

Definição

Seja $A \in M_{n\times n}(K)$. Diz-se que A é ***diagonalizável*** *se existir uma matriz $P \in M_{n\times n}(K)$ invertível tal que $P^{-1}AP$ é uma matriz diagonal (isto é, se $i \neq j$ a entrada ij de $P^{-1}AP$ é nula).*

Teorema

Seja $A \in M_{n\times n}$. A matriz A é diagonalizável se e só se existe uma base $\mathcal{B}$ de K^n constituida por vectores próprios de A.

Observação:

Suponhamos que $\mathcal{B} = (u_1, \dots, u_n)$ é uma base de K^n tal que $Au_i = \lambda_i u_i$, para todo o $i \in \{1, \dots, n\}$. Então

$$M(T_A; \mathcal{B}, \mathcal{B}) = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \vdots & & & \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{bmatrix}$$

onde $T_A : K^n \longrightarrow K^n$ tal que $T_A(X) = AX$.
A matriz de T_A relativamente à base canónica é $A = M(T_A; bc, bc)$ e

$$M(T_A; bc, bc) = M(Id; \mathcal{B}, bc) M(T_A; \mathcal{B}, \mathcal{B}) M(Id; bc; \mathcal{B})$$

Se $P = M(Id; \mathcal{B}, bc)$ então

$$A = PDP^{-1}$$

onde $D = M(T_A; \mathcal{B}, \mathcal{B})$ é uma matriz diagonal

Potências de matrizes diagonalizáveis

Seja $A \in M_{n\times n}(K)$ uma matriz diagonalizável.
Então existe uma matriz invertível $P \in M_{n\times n}(K)$ tal que

$$P^{-1}AP = D$$

sendo D uma matriz diagonal.
Note-se que

$$P^{-1}AP = D \Leftrightarrow A = PDP^{-1}.$$

Qualquer que seja $m \in \mathbb{N}$,

$$A^m = PD^mP^{-1}$$

se $D = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \vdots & & & \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}$, $D^m = \begin{bmatrix} \lambda_1^m & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2^m & \dots & 0 \\ \vdots & & & \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n^m \end{bmatrix}$.

Proposição

Seja $f : E \longrightarrow E$ um endomorfismo, λ_0 um valor próprio de f, $E_{\lambda_0} = \{u \in E : f(u) = \lambda_0 u\}$ o subespaço próprio associado a λ_0. Então

$$dim(E_{\lambda_0}) = n - car(A - \lambda_0 I_n).$$

À dimensão de E_{λ_0} dá-se o nome de dimensão geométrica de λ_0 e escreve-se $m_g(\lambda_0)$. A dimensão algébrica de λ, $m_a(\lambda_0)$, é o maior inteiro n tal que $(\lambda - \lambda_0)^n$ divide o polinómio característico de f.

Teorema

Seja $f : E \longrightarrow E$ um endomorfismo, λ_0 um valor próprio de f de dimensão geométrica k, $p_A(\lambda)$ é divisível por $(\lambda - \lambda_0)^k$. Assim a dimensão geométrica de λ_0 é menor ou igual à dimensão algébrica de λ_0.

Teorema

Seja E um espaço vectorial de dimensão finita, $f : E \longrightarrow E$ um endomorfismo com valores próprios $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$. f é diagonalizável se e só se

- *para todo o valor próprio λ de f, $m_g(\lambda) = m_a(\lambda)$;*
- *$E = E_{\lambda_1} + E_{\lambda_2} + \ldots + E_{\lambda_m}$ onde $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$.*
- *$E_{\lambda_i} \cap \left(E_{\lambda_1} + \ldots + E_{\lambda_{i-1}} + E_{\lambda_{i+1}} + \ldots + E_{\lambda_m}\right) = \{0\}$, para todo $i \in \{1, \ldots, m\}$.*

Teorema

Seja E *um espaço vectorial de dimensão finita* n, $f : E \longrightarrow E$ *um endomorfismo com valores próprios distintos* $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$. f *é diagonalizável se e só se*

$$m_g(\lambda_1) + \ldots + m_g(\lambda_k) = n$$

Cónicas e quádricas (adaptado dos slides da Professora Ana Paula Dias

Estudamos:

• curvas de nível do gráfico de uma função escalar a duas variáveis da forma

$$f(x,y) = ax^2 + by^2 + cxy + dx + ey\,.$$

Tais curvas de nível designam-se de cónicas.

• superfícies de nível do gráfico de uma função escalar a três variáveis do tipo

$$f(x,y,z) = ax^2 + by^2 + cz^2 + dxy + exz + fyz + gx + hy + kz\,.$$

Superfícies do segundo grau (quádricas).

Cónicas

Considerar (x, y) as coordenadas de P em relação ao referencial canónico ortonormado de $\mathbb{R}^2$ (considerando o produto escalar usual): $(\mathcal{O}; e_1, e_2)$ em que

$$\mathcal{O} = (0,0);\ \ e_1 = (1,0),\ \ e_2 = (0,1)\,.$$

Estudamos equações do tipo

$$ax^2 + 2bxy + cy^2 + dx + ey + f = 0 \tag{1}$$

em que $a, b, c, d, e, f \in \mathbb{R}$ e pelo menos um dos números a, b, c é não nulo.

Neste caso (1) diz-se uma **equação quadrática** em x, y e

$$ax^2 + 2bxy + cy^2$$

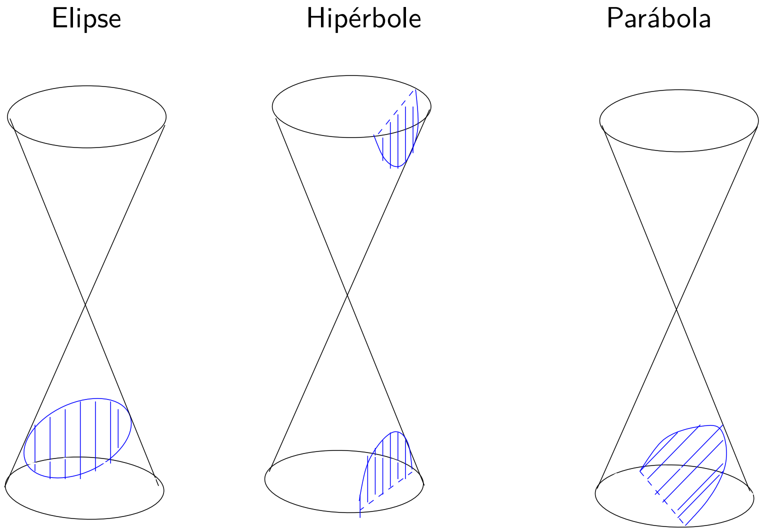
diz-se a **forma quadrática associada** a (1).

Chama-se **cónicas** ao conjunto dos pontos de $\mathbb{R}^2$ que satisfazem uma equação polinomial de grau 2 com duas variáveis.

As **cónicas não degeneradas** são: elipses, hipérboles e parábolas. Estas podem ser definidas como as figuras que se obtêm quando se intersecta um cone com um plano que não passa pelo vértice do cone. Conforme a posição do plano, assim obtemos uma elipse (que pode ser uma circunferência), uma hipérbole e uma parábola.

As **cónicas degeneradas** incluem pontos e rectas (concorrentes ou paralelas).

Cónicas

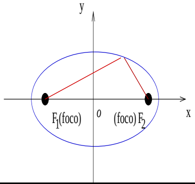


Elipse

Lugar geométrico dos pontos cuja soma das distâncias a dois pontos fixos $F_1,\ F_2$ (**os focos da elipse**) é igual a um comprimento dado $2a$ *maior* que a distância de F_1 a F_2. O quociente entre a distância de F_1 a F_2 e $2a$ diz-se a **excentricidade** da elipse.

Escolhendo um referencial tal que:
$\mathcal{O}$ é o ponto médio do segmento $[F_1F_2]$;
Eixo das abcissas: recta contendo F_1 e F_2;
Eixo das ordenadas: recta perpendicular ao eixo das abcissas e contendo $\mathcal{O}$.

Sendo $F_1 = (c, 0)$ e $F_2 = (-c, 0)$
neste referencial e tomando $b^2 = a^2 - c^2$,
a equação da elipse é: $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1.$



Parábola

Lugar geométrico dos pontos equidistantes de um ponto F (**foco da parábola**) e de uma recta d não contendo F (**directriz da parábola**).

Escolhendo um referencial tal que:

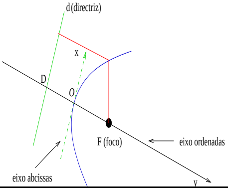
$\mathcal{O}$ é o ponto médio do segmento $[DF]$ sendo D o ponto de d mais próximo de F;

Eixo das abcissas: recta paralela a d e que contem $\mathcal{O}$;

Eixo das ordenadas: recta perpendicular a d e que contem $\mathcal{O}$.

Sendo $p = \mathrm{dist}(D, F)$, então neste referencial $F = (0, \pm p/2)$ e d tem equação $y = \mp p/2$.

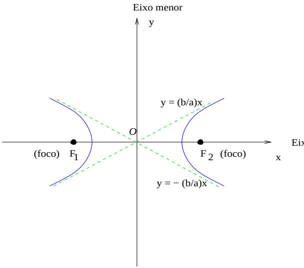
A equação da parábola é: $x^2 = \pm 2py$.



Hipérbole

Lugar geométrico dos pontos do plano cujo módulo da diferença das distâncias a dois pontos fixos $F_1,\ F_2$ (**os focos da hipérbole**) é sempre igual a um dado comprimento $2a$ (positivo). O quociente entre a distância de F_1 a F_2 e $2a$ diz-se a **excentricidade** da hipérbole.

Escolhendo o referencial tal como para a elipse, sendo $F_1 = (c, 0)$ e $F_2 = (-c, 0)$ e tomando $b^2 = a^2 - c^2$, a equação da hipérbole é: $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1$. As rectas de equações: $y = \pm\frac{b}{a}x$ dizem-se as **assímptotas da hipérbole**.



Cónicas - mudança de base

A equação de uma cónica em relação a um dado referencial pode não ser suficientemente simples para permitir a identificação da cónica, mas pode ser mais simples, em relação a um outro referencial.

Podemos escrever

$$ax^2 + 2bxy + cy^2 + dx + ey + f = 0 \tag{2}$$

como

$$[x \quad y]\begin{bmatrix} a & b \\ b & c \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + [d \quad e]\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + f = 0\,.$$

Cónicas - mudança de base

Denotando

$$X = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}, \quad A = \begin{bmatrix} a & b \\ b & c \end{bmatrix}, \quad K = \begin{bmatrix} d \\ e \end{bmatrix},$$

podemos reescrever (2) como

$$X^t A X + K^t X + f = 0\,. \tag{3}$$

Note-se que A é uma matriz simétrica.

Cónicas - Mudança de base

Consideremos duas bases, $\mathcal{B} = (b_1, b_2)$ e $\mathcal{C} = (c_1, c_2)$, de $\mathbb{R}^2$.

Considere-se a equação

$$X^t AX + K^t X + f = 0$$

em coordenadas relativamente ao referencial o.n. $(\mathcal{O}; b_1, b_2)$.

Consideremos um outro referencial ortonormado $(\mathcal{O}; c_1, c_2)$. Seja $P = M(id; \mathcal{C}, \mathcal{B})$, $X = PY$ se Y^t denota o vector das coordenadas relativamente ao referencial $(\mathcal{O}; c_1, c_2)$ de um ponto com coordenadas X^t relativamente ao primeiro referencial.
Substituindo, obtém-se

$$(PY)^t A(PY) + K^t (PY) + f = 0 \Leftrightarrow Y^t \left(P^t AP\right) Y + \left(K^t P\right) Y + f = 0\,.$$

Se $P^t AP = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix}$, $Y^t = (y_1, y_2)$ e $K^t P = (d_2, e_2)$ obtemos

Alguns resultadaos de ALGA - revisões

• Toda a matriz real simétrica A é diagonalizável ortogonalmente, isto é existe uma base ortogonal de vectores próprios de A. [(*) demonstração omitida, pode ser vista em A. Monteiro, 7.41]

• para construirmos uma base de vectores próprios ortonormada (para o produto interno usual):

- determinamos os valores próprios
- determinamos uma base para cada subespaço próprio
- usamos Gram-Schmidt para obtermos base on de vectores próprios

• Dadas duas bases ortonormadas $\mathcal{B}$ e $\mathcal{C}$, a matriz mudança de base de uma das bases para a outra, $P = M(id; \mathcal{C}, \mathcal{B})$ é ortogonal, isto é $P^{-1} = P^t$ (verifique). Assim $|P| = \pm 1$.

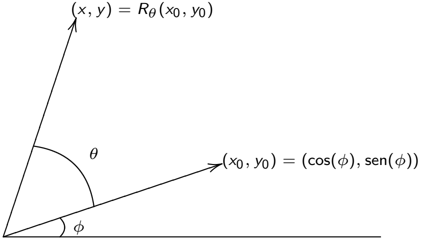
Alguns resultados de ALGA - revisões

- Dada $P \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$ uma matriz ortogonal e $T_P : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ a aplicação linear que lhe corresponde, T_P é uma isometria linear (um isomorfismo que preserva a norma de vectores, isto é, $||T_P(u)|| = ||u||, \forall u \in \mathbb{R}^n$. Note que $T_P(u) \cdot T_P(u)$ é o escalar que corresponde a $(Pu)^t(Pu)$.)

- Uma isometria linear $T_P : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ no plano é:
  - uma rotação de ângulo θ **se** $|\mathbf{P}| = \mathbf{1}$
  - uma reflexão **se** $|\mathbf{P}| = -\mathbf{1}$

Alguns resultados de ALGA - rotações em $\mathbb{R}^2$

Seja R_θ a rotação de centro $(0,0)$ e ângulo θ



Note-se que $R_\theta(x_0, y_0) = (\cos(\theta+\phi), \operatorname{sen}(\theta+\phi)) =$
$(\cos(\theta)\cos(\phi) - \operatorname{sen}(\theta)\operatorname{sen}(\phi), \operatorname{sen}(\theta)\cos(\phi) + \cos(\theta)\operatorname{sen}(\phi))$.

A matriz associada a R_θ é $\begin{bmatrix} \cos(\theta) & -\operatorname{sen}(\theta) \\ \operatorname{sen}(\theta) & \cos(\theta) \end{bmatrix}$.

Processo de ortogonalização de Gram-Schmidt

Dado V um espaço vectoral com um produto interno $(x, y) \mapsto x|y$ e $(v_1, \ldots, v_n)$ um sistema de vectores linearmente independente, existe um sistema de vectores $(u_1, \ldots, u_n)$ equivalente ao sistema dado e ortogonal onde:

$$\begin{aligned}
u_1 &= v_1, \\
u_2 &= v_2 - \frac{v_2|u_1}{u_1|u_1} u_1, \\
u_3 &= v_3 - \frac{v_3|u_2}{u_2|u_2} u_2 - \frac{v_3|u_1}{u_1|u_1} u_1, \\
&\vdots \\
u_n &= v_n - \frac{v_n|u_{n-1}}{u_{n-1}|u_{n-1}} u_{n-1} \ldots - \frac{v_n|u_1}{u_1|u_1} u_1
\end{aligned}$$

Cónicas

Dada uma cónica

$$ax^2 + 2bxy + cy^2 + de + ey + f = 0$$

podemos escrever

$$X^t AX + K^t X + f = 0$$

em coordenadas relativamente ao referencial o.n. $(\mathcal{O}; b_1, b_2)$.
Como A é simétrica existe uma base ortonormada $\mathcal{C} = (c_1, c_2)$ de $\mathbb{R}^2$ constituída por vectores próprios da matriz A.
Os vectores de $\mathcal{C}$ dizem-se as **direções principais da cónica**.
A equação

$$\lambda_1 y_1^2 + \lambda_2 y_2^2 + d_2 y_1 + e_2 y_2 + f = 0$$

é a **equação reduzida às direcções principais da cónica**.

Cónicas

Se $\lambda_1 > 0$ e $\lambda_2 > 0$ da equação

$$\lambda_1 y_1^2 + \lambda_2 y_2^2 + d_2 y_1 + e_2 y_2 + f = 0$$

obtemos

$$\lambda_1 \left(y_1 + \frac{d_2}{2\lambda_1} \right)^2 + \lambda_2 \left(y_2 + \frac{e_2}{2\lambda_2} \right)^2 + \left(f - \frac{d_2^2}{4\lambda_1} - \frac{e_2^2}{4\lambda_2} \right) = 0$$

Assim, no referencial $\left(\mathcal{O} + \left(-\frac{d_2}{2\lambda_1}, -\frac{e_2}{2\lambda_2}\right); c_1, c_2 \right)$ obtido por translação de $(\mathcal{O}; c_1, c_2)$ obtém-se a equação:

$$\lambda_1 z_1^2 + \lambda_2 z_2^2 = -f + \frac{d_2^2}{4\lambda_1} + \frac{e_2^2}{4\lambda_2}.$$

Translacção

Fixado $p \in \mathbb{R}^2$, a função

$$\begin{array}{rccc} T: & \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}^2 \\ & v & \mapsto & v+p \end{array}$$

diz-se uma *translacção*.

Dado um referencial $(\mathcal{O};\ c_1, c_2)$, o novo referencial $(\mathcal{O}+p;\ c_1, c_2)$ diz-se obtido por translacção do primeiro por mudança da origem. As novas coordenadas Z no novo referencial de um ponto com coordenadas Y no primeiro referencial são

$$Z = Y - p\,.$$

Exercício

O que acontece para outros valores próprios não necessariamente positivos?

Exemplo

Descreva o lugar geométrico dos pontos de coordenadas (x, y) no referencial $((0,0);(1,0),(0,1))$ tais que

$$5x^2 - 4xy + 8y^2 - 36 = 0$$

Escrevemos a equação acima como

$$X^t AX - 36 = 0$$

em que

$$A = \begin{bmatrix} 5 & -2 \\ -2 & 8 \end{bmatrix}$$

cujos valores próprios são: 4, 9 e:

$E_4 =< (2\sqrt{5}/5, \sqrt{5}/5) >$ (subespaço próprio associado a 4);

$E_9 =< (-\sqrt{5}/5, 2\sqrt{5}/5) >$ (subespaço próprio associado a 9);

Como vectores próprios associados a valores próprios distintos são ortogonais, $\mathcal{B} = \left((2\sqrt{5}/5, \sqrt{5}/5), (-\sqrt{5}/5, 2\sqrt{5}/5)\right)$ é uma base

Exemplo

Considerando
$P = M\left(id; \left((2\sqrt{5}/5, \sqrt{5}/5), (-\sqrt{5}/5, 2\sqrt{5}/5)\right), ((1,0),(0,1))\right)$,

$$P = \begin{bmatrix} 2\sqrt{5}/5 & -\sqrt{5}/5 \\ \sqrt{5}/5 & 2\sqrt{5}/5 \end{bmatrix}$$

Se Y^t corresponde ao vector de coordenadas em $((0,0);\mathcal{B})$ de um vector com coordenadas X^t relativamente ao referencial $((0,0);(1,0),(0,1)), X = PY$ e no referencial $\left((0,0);\left((2\sqrt{5}/5, \sqrt{5}/5), (-\sqrt{5}/5, 2\sqrt{5}/5)\right)\right)$ a equação inicial corresponde a

$$[y_1 \quad y_2] \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 9 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} - 36 = 0$$

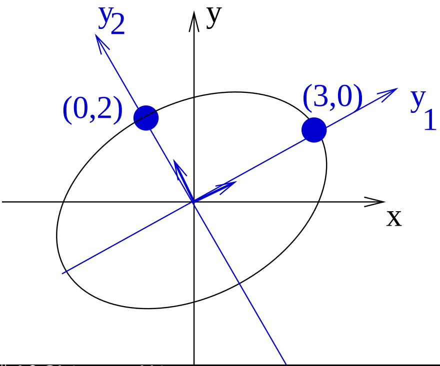
$$\iff 4y_1^2 + 9y_2^2 - 36 = 0 \iff \frac{y_1^2}{3^2} + \frac{y_2^2}{2^2} = 1\,.$$

Exemplo

O lugar geométrico dos pontos de coordenadas (x, y) no referencial $((0, 0); (1, 0), (0, 1))$ tais que

$$5x^2 - 4xy + 8y^2 - 36 = 0$$

é uma elipse



Exemplo

Identificar a cónica de equação

$$2x^2 + y^2 - 12x - 4y + 18 = 0.$$

Temos que

$$2(x^2 - 6x) + (y^2 - 4y) + 18 = 0 \Longleftrightarrow 2(x-3)^2 + (y-2)^2 = 4\,.$$

Considerando a mudança de referencial

$$\begin{aligned} y_1 &= x - 3 \\ y_2 &= y - 2 \end{aligned}$$

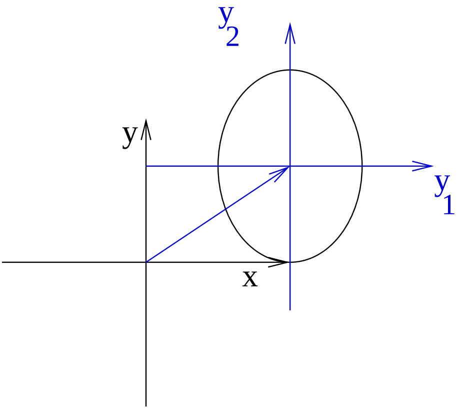
obtemos

$$\frac{y_1^2}{2} + \frac{y_2^2}{4} = 1.$$

no referencial $((3,2);(1,0),(0,1))$.

Exemplo

A cónica de equação $2x^2 + y^2 - 12x - 4y + 18 = 0$ é uma elipse.



Proposição

Considere-se uma equação cartesiana da forma

$$ax^2 + 2bxy + cy^2 + dx + ey + f = 0$$

e sejam λ_1, λ_2 os valores próprios da matriz simétrica

$$\begin{bmatrix} a & b \\ b & c \end{bmatrix}$$

1. Se $\lambda_1\lambda_2 > 0$ então a equação representa uma elipse (circunferência se $\lambda_1 = \lambda_2$) ou uma das suas degenerações(um ponto ou o conjunto vazio).
2. Se $\lambda_1\lambda_2 < 0$ então a equação representa uma hipérbole ou a sua degeneração (duas rectas concorrentes).
3. Se $\lambda_1\lambda_2 = 0$ então a equação representa uma parábola ou uma das suas degenerações (duas rectas paralelas, uma recta ou o conjunto vazio).

Cónicas

Forma canónica	Gráfico
$\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1$	Hipérbole
$\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 0$	Rectas concorrentes
$\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$	Elipse
$\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = -1$	$\emptyset$
$\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 0$	Ponto

Cónicas

Forma canónica	Gráfico
$x^2 = ay$	Parábola
$x^2 = a^2$	Rectas paralelas
$x^2 = -a^2$	$\emptyset$
$x^2 = 0$	Rectas coincidentes

Superfícies quádricas

Seja (x, y, z) as coordenadas de P em relação ao referencial canónico ortonormado de $\mathbb{R}^3$ (considerando o produto escalar usual): $(\mathcal{O}; e_1, e_2, e_3)$ em que

$$\mathcal{O} = (0, 0, 0); \;\; e_1 = (1, 0, 0), \;\; e_2 = (0, 1, 0), \;\; e_3 = (0, 0, 1).$$

Estudamos equações do tipo

$$ax^2 + by^2 + cz^2 + 2dxy + 2exz + 2fyz + gx + hy + iz + j = 0 \quad (4)$$

em que algum a, b, c, d, e, f é não nulo.
Neste caso (4) diz-se uma **equação quadrática** em x, y, z e

$$ax^2 + by^2 + cz^2 + 2dxy + 2exz + 2fyz$$

diz-se a **forma quadrática associada** a (4).

Os gráficos de equações quadráticas em x, y, z são designados de **quádricas** ou **superfícies quádricas**.

Superfícies quádricas

Podemos escrever (4) como:

$$[x\; y\; z]\begin{bmatrix} a & d & e \\ d & b & f \\ e & f & c \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} + [g\; h\; i]\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} + j = 0$$

$$\Longleftrightarrow X^t A X + K^t X + j = 0$$

se

$$X = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}, \quad A = \begin{bmatrix} a & d & e \\ d & b & f \\ e & f & c \end{bmatrix}, \quad K = \begin{bmatrix} g \\ h \\ i \end{bmatrix}$$

Superfícies quádricas

Como A é uma matriz simétrica, é diagonalizável.

Uma base de vectores próprios determina a mudança de coordenadas $X = PY$ em que nas novas coordenadas a equação da quádrica não tem termos em xy, xz ou yz.

Finalmente, uma translacção do referencial reduz a equação da quádrica a uma das seguintes formas canónicas da tabela abaixo.

Exemplo

Consideremos a equação quadrática seguinte:

$$4x^2 + 36y^2 - 9z^2 - 16x - 216y + 304 = 0$$

$$\iff$$

$$\frac{(x-2)^2}{9} + (y-3)^2 - \frac{z^2}{4} = 1.$$

Mudando de coordenadas (por translacção do referencial),

$$(x', y', z') = (-2, -3, 0) + (x, y, z),$$

obtemos

$$\left(\frac{x'}{3}\right)^2 + (y')^2 - \left(\frac{z'}{2}\right)^2 = 1$$

Trata-se de um hiperbolóide de uma folha.

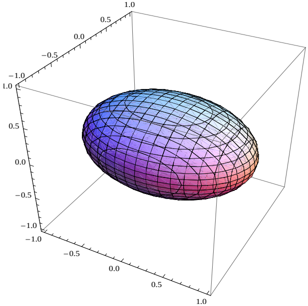
Forma canónica	Gráfico
$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=1$	Elipsóide
$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=-1$	$\emptyset$
$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}-\dfrac{z^2}{c^2}=-1$	Hiperbolóide de duas folhas
$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}-\dfrac{z^2}{c^2}=1$	Hiperbolóide de uma folha
$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=z$	Parabolóide elíptico
$\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=z$	Parabolóide hiperbólico
$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=0$	Ponto

Forma canónica	Gráfico
$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=0$	Superfície cónica
$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$	Cilindro elíptico
$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=-1$	$\emptyset$
$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$	Cilindro hipérbolico
$y^2=ax \quad (a>0)$	Cilindro parabólico
$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=0$	Recta
$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=0$	Planos concorrentes

Forma canónica	Gráfico
$x^2 = a^2$	Planos paralelos
$x^2 = -a^2 \quad (a \neq 0)$	$\emptyset$
$x^2 = 0$	Planos coincidentes

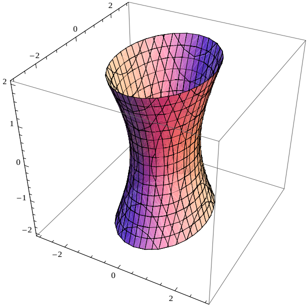
Elipsóide

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$



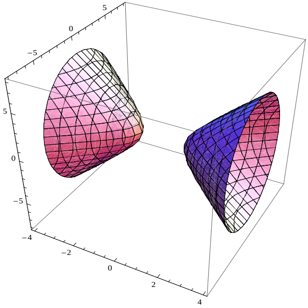
Hiperbolóide de uma folha

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$$



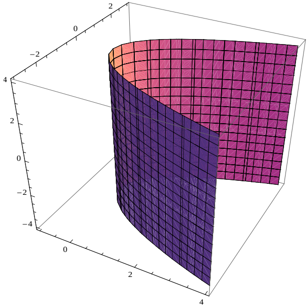
Hiperbolóide de duas folhas

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=-1$$



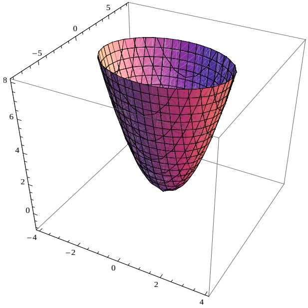
Cilindro parabólico

$$y^2 = ax \quad (a>0)$$



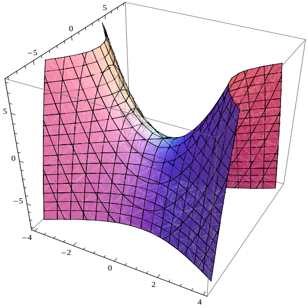
Parabolóide elíptico

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = z$$



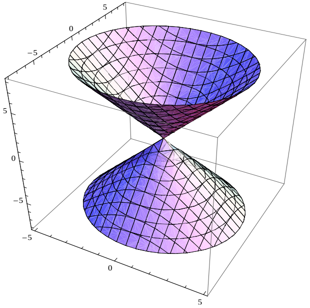
Parabolóide hiperbólico

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = z$$



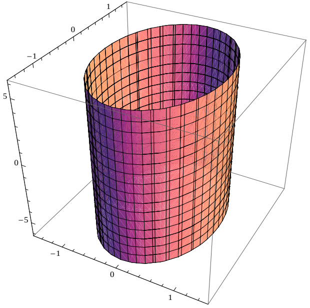
Superfície cónica

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0$$



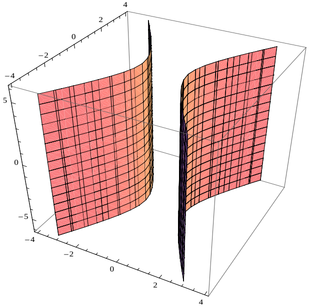
Cilindro elíptico

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$



Cilindro hiperbólico

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$



Cónicas e quádricas

Exemplo

Identifique o lugar geométrico dos pontos de coordenadas (x, y) tais que

$$4x^2 + 4y^2 + 4z^2 + 4xy + 4xz + 4yz - 3 = 0.$$

Exemplo

Considere-se a equação

$$4x^2+4y^2+4z^2+4xy+4xz+4yz-3=0 \iff X^tAX-3=0$$

em que

$$A=\begin{pmatrix} 4 & 2 & 2 \\ 2 & 4 & 2 \\ 2 & 2 & 4 \end{pmatrix}.$$

Sendo

$$P = \begin{pmatrix} -\frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{6}}{6} & \frac{\sqrt{3}}{3} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{6}}{6} & \frac{\sqrt{3}}{3} \\ 0 & \frac{\sqrt{6}}{3} & \frac{\sqrt{3}}{3} \end{pmatrix}$$

então

$$P^t A P = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 8 \end{pmatrix} ..$$

Considerando $X = PX^{'}$ obtemos nas novas coordenadas $X^{'}$

$$\frac{(x^{'})^2}{3/2} + \frac{(y^{'})^2}{3/2} + \frac{(z^{'})^2}{3/8} = 1\,.$$

Trata-se de um elipsóide.