1 Sistemas de equações lineares

1. Resolva os seguintes sistemas em $\mathbb{R}$:

a) $\left\{\begin{array}{rcl} 2x+7y &=& 3 \\ 3x+4y &=& 2 \end{array}\right.$ b) $\left\{\begin{array}{rcl} 2x-4y &=& 6 \\ -3x+6y &=& -9 \end{array}\right.$ c) $\left\{\begin{array}{rcl} 3x-9y &=& 7 \\ 2x-6y &=& 15 \end{array}\right.$

d) $\left\{\begin{array}{rcl} 2x+y &=& 5 \\ x-2y &=& 5 \\ 3x+7y &=& 2 \end{array}\right.$ e) $\left\{\begin{array}{rcl} 2x-y-3z &=& -1 \\ 3x+2y+2z &=& 1 \\ 5x-y-z &=& 6 \end{array}\right.$ f) $\left\{\begin{array}{rcl} 5x+3y-4z &=& 5 \\ x-2y+3z &=& 2 \\ 7x-y+2z &=& 1 \end{array}\right.$

g) $\left\{\begin{array}{rcl} x+2y+3z &=& 3 \\ 2x+3y+5z &=& 4 \\ 5x+4y+9z &=& 3 \end{array}\right.$ h) $\left\{\begin{array}{rcl} x+y+4z-3t &=& 3 \\ 2x-y+z+4t &=& -1 \\ 3x+5z+t &=& 10 \end{array}\right.$ i) $\left\{\begin{array}{rcl} x+2y-z+3t &=& 3 \\ 2x+4y+4z+3t &=& 0 \\ y-z+2t &=& 10 \end{array}\right.$

j) $\left\{\begin{array}{rcl} x+2y+2z &=& 2 \\ 3x-y-z &=& 6 \\ 2x-5y-5z &=& 4 \\ 4x-y-z &=& 8 \end{array}\right.$

2. Considere o sistema (em $\mathbb{R}$)

$$\left\{\begin{array}{rcl} ax+9y &=& 3a \\ x+ay &=& a \end{array}\right.$$

Indique todos os valores reais a tais que:

(a) o sistema tem uma única solução;

(b) o sistema tem uma infinidade de soluções.

3. Seja $a \in \mathbb{R}$. Considere o sistema (em $\mathbb{R}$) nas incógnitas x, y, z

$$\left\{\begin{array}{l} x+y-z=1 \\ 2x+3y+az=3 \\ x+ay+3z=2 \end{array}\right.$$

(a) Discuta o sistema indicando os valores de a para os quais o sistema é possível determinado, possível indeterminado ou impossível.

(b) Suponha $a=2$ e resolva o sistema.

2 Matrizes

4. Dadas as matrizes: $A = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 4 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} -1 & 3 & -1 \\ -2 & 0 & -1 \end{bmatrix}$, $C = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$.

   a) Indique o tipo da matriz A e os elementos a_{11} e a_{23}.

   b) Determine $A + B$ e $2A + 5(B + C)$.

5. Calcule os produtos das seguintes matrizes:

   a) $\begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$ b) $\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 \\ 5 \end{bmatrix}$

   c) $\begin{bmatrix} -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$ d) $\begin{bmatrix} -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$

   e) $\begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ -1 & 0 & 4 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix}$ f) $\begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ -1 & 0 & 4 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -2 \\ -1 & 4 \end{bmatrix}$

   g) $\begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ -1 & 0 & 4 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & -2 & 1 \\ -1 & 4 & 0 \end{bmatrix}$ h) $\begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ -1 & 0 & 4 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 \\ 2 & -2 & 1 & -1 \\ -1 & 4 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

6. Considere as seguintes matrizes: $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 2 \\ 3 & 3 \end{bmatrix}$ e $C = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$.

   Calcule AB, $(2A)(3B)$ e C^3.

7. Indique uma matriz quadrada A não nula, de duas linhas e duas colunas, tal que A^2 seja a matriz nula.

8. Indique, caso exista, uma matriz A do tipo 3×3 não nula tal que $A^2 \neq 0$ mas $A^3 = 0$.

9. Suponha que A e B são matrizes quadradas $n \times n$, $n \in N$. Indique que condição deve impôr a A e B para que se verifique a igualdade $(A + B)^2 = A^2 + 2AB + B^2$.

10. Dada uma matriz $A = (a_{ij}) \in M_{n\times p}(K)$ ($K = \mathbb{R}$ ou $K = \mathbb{C}$), chamamos **transposta** de A à matriz $A^T = (b_{ij}) \in M_{p\times n}$ definida por $b_{ji} = a_{ij}, \forall I \in \{1, \ldots, p\}, j \in \{1, \ldots, n\}$.

    Dadas $A, B \in M_{n\times m}$ e $C \in M_{p\times m}$, mostre que:

    (a) $(A^T)^T = A$;

    (b) $(A + B)^T = A^T + B^T$;

    (c) $(AC)^T = C^T A^T$.

11. Dadas as matrizes: $A = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$, $C = \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \end{bmatrix}$ $D = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$.

    Calcule $B^T A$, $(C^T A + D^T A)^T$, $A^T B$ e $B^T(C + D)$.

12. Dê exemplo de duas matrizes $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ e $X = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ não nulas tais que

$$AX = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

13. Calcule A^{50} para:

    a) $A = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$ *b)* $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ *c)* $A = \begin{bmatrix} \cos(a) & -\sin(a) \\ \sin(a) & \cos(a) \end{bmatrix}$.

14. Seja K o corpo $\mathbb{R}$ ou o corpo $\mathbb{C}$, $A, A' \in M_{n\times p}(K), B, B' \in M_{p\times q}(K)$ e $C \in M_{q\times m}(K)$. Mostre que:
    (a) $(AB)C = A(BC)$;
    (b) $(A + A')B = AB + A'B$;
    (c) $A(B + B') = AB + AB'$.

15. Determine a caracteristica de cada uma das seguintes matrizes:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad D = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

$$E = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \ F = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}, \ G = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

16. Seja $a \in \mathbb{R}$. Estude a característica de $A = \begin{bmatrix} a & 1 & 1 & -1 \\ 1 & a & 1 & -a \\ 1 & 1 & a & -a \end{bmatrix}$ em função de a.

17. Verifique se os seguintes sistemas são possíveis ou não e no caso de o serem resolva-os

$$a) \begin{cases} x - y = 0 \\ x + y + w = 0 \\ z - w = 0 \end{cases} \quad b) \begin{cases} x - y = 0 \\ x + y + w = 3 \\ z - w = 0 \end{cases} \quad c) \begin{cases} x + y + z = 1 \\ 2x + y + z = 1 \\ 3x + 2y + 2z = 1 \end{cases} \quad d) \begin{cases} x + y = 0 \\ x + z = 0 \\ x + y + z = 0 \end{cases}$$

$$e) \begin{cases} x + y + z = 1 \\ x + y = 1 \\ 3x + 2y = 4 \\ 3x + 2y + z = 4 \end{cases} \quad f) \begin{cases} x + y + z = 1 \\ x + z = 1 \\ 2x + 3z = 4 \\ 2x + y + 3z = 4 \end{cases} \quad g) \begin{cases} x + y + z = 1 \\ y + z = 1 \\ 3y + 2z = 4 \\ x + 3y + 2z = 4 \end{cases}$$

18. Considere o sistema de equações lineares nas incógnitas x, y, z

$$\begin{cases} ax + y - z = 1 \\ y + z = b \\ x + 2y = 0 \\ cx + 2y + 2z = b - 1 \end{cases}$$

    a) Discuta-o em função dos parametros.
    b) Resolva-o para $a = 1$, $b = -1$, $c = 0$.

19. Considere o sistema de equações lineares, nas incógnitas x, y, z, t:

$$\begin{cases} x + y + z + t = 0 \\ x - y - z + t = 0 \\ 2x + at = 1 \\ bx + 2z = -1 \end{cases}$$

    Discuta o sistema em função dos parametros a e b.

20. Indique justificando, sem calcular a inversa, quais das matrizes de 15 são invertíveis. Calcule a inversa dessas matrizes pelo método de condensação.

21. Seja A uma matriz quadrada de ordem n.
    a) Complete, justificando, $((A^T)^{-1})^T =$
    b) Resolva em ordem a X a equação matricial:

$$[(A^T)^{-1}X]^T + (AB)^{-1} = A$$

    supondo que A e B são matrizes quadradas do mesmo tipo.
    b) Determine X sabendo que:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

3 Determinantes

22. Calcule $a)\begin{vmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 1 & 1 & 5 \\ -2 & 0 & 1 \end{vmatrix}$, $b)\begin{vmatrix} sen(x) & cos(x) \\ -cos(x) & sen(x) \end{vmatrix}$, $c)\begin{vmatrix} a & 0 & 0 \\ c & b & 0 \\ c & b & a \end{vmatrix}$

R.: a) -31; b) 1; c) a^2b

23. Sabendo que $\begin{vmatrix} a & b & c \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 1$, calcule os seguintes determinante

$$a)\begin{vmatrix} a & b & c \\ 6 & 3 & 0 \\ -1/2 & -1 & -1/2 \end{vmatrix},\ b)\begin{vmatrix} a & b & c \\ 2a+2 & 2b+1 & 2c \\ a+1 & b+2 & c+1 \end{vmatrix},\ c)\begin{vmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3a+1 & 3b+2 & 3c+1 \end{vmatrix}$$

R.: a) $-3/2$; b) 1; c) 3

24. Sabendo que $\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = \alpha$, calcule os seguintes determinante

$$a)\begin{vmatrix} 3a & 3b & 3c \\ -d & -e & -f \\ 4g & 4h & 4i \end{vmatrix},\ b)\begin{vmatrix} a+g & b+h & c+i \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix},\ c)\begin{vmatrix} b & e & h \\ a & d & g \\ c & f & i \end{vmatrix}$$

25. Utilizando apenas as propriedades dos determinantes, mostre que

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ a & b & c & d \\ a^2 & b^2 & c^2 & d^2 \\ a^3 & b^3 & c^3 & d^3 \end{vmatrix} = (d-a)(d-c)(d-b)(c-b)(c-a)(b-a).$$

26. Sabendo que $\begin{vmatrix} b & b \\ b & c \end{vmatrix} = 1$, prove que

$$\begin{vmatrix} a & b & b & c \\ -c & 0 & b & b \\ c & d & d & d \\ 0 & b & b & c \end{vmatrix} = -ad.$$

27. Utilizando apenas as propriedades do determinante, mostre que:

(a) $\begin{vmatrix} a+b & b+c & c+a \\ c & a & b \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0;$

(b) $\begin{vmatrix} a_1+b_1x & a_1x+b_1 & c_1 \\ a_2+b_2x & a_2x+b_2 & c_2 \\ a_3+b_3x & a_3x+b_3 & c_3 \end{vmatrix} = (1-x^2)\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$

(c) $\begin{vmatrix} 1+a_1 & a_2 & a_3 \\ a_1 & 1+a_2 & a_3 \\ a_1 & a_2 & 1+a_3 \end{vmatrix} = 1+a_1+a_2+a_3$

28. Considere a seguinte matriz:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ -1 & -2 & 2 & -1 \end{bmatrix}.$$

a) Determine $|A|$ utizando o desenvolvimento laplaceano ao longo da terceira linha.

b) Sabendo que $B = 2A$, determine $|B^{-1}|$, utilizando apenas as propriedades dos determinantes.

R.: a) -1; b) $-(1/2)^4$.

29. Considere a matriz

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & a & 1 \\ 1 & b & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

a) Determine $|A|$. Em que condições a matriz A é invertível?

b) Considere $a = 3$ e $b = 2$. Sendo B e C duas matrizes reais de ordem 4 e sabendo que $(A^T)^{-1} = C^{-1}BC$, determine $|B|$.

R.: a) $a \neq 1 \wedge b \neq 1$; b) $-1/2$

30. Determine o conjunto dos reais x para os quais as matrizes A_x, B_x, C_x são invertíveis

a) $A_x = \begin{bmatrix} 2-x & 0 \\ 5 & 3+x \end{bmatrix}$.

b) $B_x = \begin{bmatrix} 1 & 1+x \\ x-1 & x^2-1 \end{bmatrix}$.

c) $C_x = \begin{bmatrix} 1 & x & -1 \\ 2 & 4 & -2 \\ -3 & -7 & x+3 \end{bmatrix}$.

31. Considere as seguintes matrizes

a) $A = \begin{bmatrix} -1 & -2 & 5 \\ -1 & 0 & 3 \\ 4 & 2 & 0 \end{bmatrix}$ *b)* $B = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 4 & 1 \\ 0 & -3 & -2 & 5 \\ -4 & -1 & 0 & 3 \\ 6 & 4 & 2 & 0 \end{bmatrix}$ *c)* $C = \begin{bmatrix} -3 & 0 & 7 & -2 \\ 0 & 1 & -3 & 0 \\ 4 & 5 & 2 & -3 \\ 1 & -2 & 0 & 7 \end{bmatrix}$

d) $D = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 2 & -1 \\ 2 & 4 & 0 & -2 \\ 1 & -3 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 3 & 4 \end{bmatrix}$.

(a) Calcule os determinantes das matrizes A, B, C e D

a) Utilizando o método de condensação.

b) Utilizando o teorema de Laplace.

(b) Indique, justificando, quais das matrizes A, B, C e D são inveríveis.

R.: a) $|A| = -28, |B| = -444, |C| = -438, |D| = 0$

32. Determine para que valores de a a matriz

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & a-1 & 2 \\ 0 & -1 & a+1 \end{bmatrix}$$

é invertível. Para esses valores de a determine as respectivas inversas.

33. Sabendo que a inversa da matriz $7A$ é:

$$\begin{bmatrix} -3 & 7 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}$$

determine A.

34. Considere a seguinte matriz:
$$A = \begin{bmatrix} 4 & y & 2 & 0 \\ 1 & 3 & 1 & 3 \\ 2 & x & 1 & 0 \\ 5 & 4 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$
Diga justificando, para que valores de x e y se garante que $|A| = 0$.

35. Averigue se as matrizes são invertíveis e, no caso afirmativo, calcule a sua inversa:
$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & -2 & 0 \end{bmatrix}$, $C = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & -1 \end{bmatrix}$, $D = \begin{bmatrix} i & 1 \\ -2+i & 2\imath \end{bmatrix}$,
$E = \begin{bmatrix} 1+i & 1-i \\ i & 1 \end{bmatrix}$.

36. Dado um sistema de n equações a n incógnitas em que todos os coeficientes e termos independentes são inteiros e a matriz do sistema tem determinante igual 1, mostre que a 'unica solução do sistema tem todos os elementos inteiros.

37. Calcule o produto vectorial $u \times v$ para:
    (a) $u = (5, 4, 3)$ e $v = (1, 0, 1)$;
    (b) $u = (3, 1, 2)$ e $v = (-2, 2, 5)$;
    (c) $u = (1, -1, 1)$ e $v = (2, -3, 4)$.

38. Considere os vectores $u = (1, -1, 4)$ e $v = (3, 2, -2)$.
    (a) Determine um vector que seja ortogonal aos vectores u e v.
    (b) Determine a equação do plano paralelo aos vectores u e v que contém o ponto $(1, 2, 3)$.

39. Determine o valor de a para que a área do paralelogramo determinado por $u = (2, 1, -1)$ e $v = (1, -1, a)$ seja $\sqrt{62}$

40. Dados pontos $A = (2, 1, 1)$, $B = (3, -1, 0)$ e $C = (4, 2, -2)$, determine a área do triangulo ABC.

41. Determine z sabendo que $A = (2, 0, 0)$, $B = (0, 2, 0)$ e $C = (0, 0, z)$ são vertices de um triângulo de área 6.

42. Determine o valor de m para que os vectores $(2, m, 0), v = (1, -1, 2)$ e $w = (-1, 3, -1)$ sejam co-planares.

43. Determine o volume do paralelepípedo determinado peos vectores $u = (3, -1, 4), v = (2, 0, 1)$ e $w = (-2, 1, 5)$.

44. Calcule m para que o volume do paralelepípedo determinado pelos vectores $v_1 = (0, -1, 2), v_2 = (-4, 2, -1)$ e $v_3 = (1, m, -2)$ seja 11.

45. Verifique se os vectores $u = (2, -1, 1), v = (1, 0, -1)$ e $w = (2, -1, 4)$ são co-planares.

46. Determine um vector ortogonal ao plano determinado pelos pontos P, Q e R se:
    (a) $P = (3, 0, 0), Q = (0, 3, 0)$ e $R = (0, 0, 2)$;
    (b) $P = (2, 3, 0), Q = (0, 2, 1)$ e $R = (2, 0, 2)$.

    Indique uma equação dos planos determinados pelos pontos P, Q e R.

47. (Revisões) Considere no plano os pontos $A(-2, 0)$, $B(-1, 2)$ e $C(3, 4)$. Determine:
    (a) a equação cartesiana da recta r que passa pelos pontos A e B;
    (b) a equação cartesiana da recta que passa por C e é paralela a r.
    (c) a equação cartesiana da recta que passa por A e tem declive 3.

48. (Revisões) Considere no plano a recta r de equação $x + 3y = 2$.
    (a) Indique as coordenadas de dois pontos distintos de r.
    (b) Determine um vector director de r.

49. (Revisões) Para $a \in \mathbb{R}$, considere no plano as rectas r_a definida por $x + ay = 0$ e para cada $a \in \mathbb{R}$ a recta s_a definida por $(a-2)x+y = -1$. Determine todos os números reais a para os quais r_a e s_a são paralelas.

50. (Revisões) Considere no plano os pontos $A(-2,0)$, $B(-1,2)$ e $C(3,4)$. Determine:

    (a) a equação cartesiana da recta r que passa pelos pontos A e B;

    (b) a equação cartesiana da recta que passa por C e é paralela a r.

    (c) a equação cartesiana da recta que passa por A e tem declive 3.

51. (Revisões) Considere no plano a recta r de equação $x + 3y = 2$.

    (a) Indique as coordenadas de dois pontos distintos de r.

    (b) Determine um vector director de r.

52. (Revisões) Considere no espaço $\mathbb{R}^3$ os pontos $A(1,2,-1)$, $B(0,3,-4)$ e $C(1,0,1)$.

    (a) Determine as equações paramétricas e as equações cartesianas da recta r que passa por A e B.

    (b) Determine as equações cartesianas da recta s que passa por A e tem a direção do vector $u = (1,1,1)$;

    (c) Mostre que os pontos A, B e C não são colineares.

    (d) Determine as equações paramétricas e a equação cartesiana do plano α que é determinado pelos pontos A, B e C.

    (e) Mostre que o ponto $D(0,1,-2)$ pertence ao plano α e determine as coordenadas de D no referencial $\bar{R} = (A; \vec{AB}, \vec{AC})$ do plano α.

53. (Revisões) Considere no espaço $\mathbb{R}^3$ o plano α definido por $x - 3y + 4z = 1$ e a recta r definida por $\begin{cases} x + y = -1 \\ 2x + y + z = 3 \end{cases}$.

    (a) Determine um vector u tal que u é vector director da recta r.

    (b) Mostre que $u \in \alpha$.

    (c) Mostre que $P(4,1,0)$ é um ponto de α.

    (d) Indique dois vectores não colineares, pertencentes a α.

    (e) Averigue se existe $a \in R$ tal que o plano α é paralelo ao plano β_a definido por $ax - y + z = a$.

4 Espaços Vectoriais

54. Mostre que os seguintes conjuntos algebrizados com as operações indicadas têm a estrutura de espaço vectorial.

   (a) $\mathcal{F}_{\mathbb{R}} := \{f : f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ é uma função$\}$ onde a soma de duas funções $f, g \in \mathcal{F}_{\mathbb{R}}$ é uma função $f + g \in \mathcal{F}_{\mathbb{R}}$ definida por
   $$(f+g)(x) = f(x) + g(x), \forall x \in \mathbb{R}$$
   o produto escalar de $\lambda \in \mathbb{R}$ por uma função $f \in \mathcal{F}_{\mathbb{R}}$ é uma função $\lambda \cdot f \in \mathcal{F}_{\mathbb{R}}$ definida por
   $$(\lambda \cdot f)(x) = \lambda(f(x)), \forall x \in \mathbb{R}.$$

   (b) $M_{n\times m}(\mathbb{R})$ para a soma e produto escalar usual, para $m, n \in \mathbb{N}$.

   (c) $\mathcal{S} = \{(a_n)_{n\in\mathbb{N}} : a_n \in \mathbb{R}\}$ onde a soma de duas sucessões com valores em $\mathbb{R}$ é a sucessão
   $$(a_n)_{n\in\mathbb{N}} + (b_n)_{n\in\mathbb{N}} = (a_n + b_n)_{n\in\mathbb{N}}$$
   e o produto de $\lambda \in \mathbb{R}$ por $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é a sucessão definida por
   $$\lambda \cdot (a_n)_{n\in\mathbb{N}} = (\lambda a_n)_{n\in\mathbb{N}}.$$

   (d) Dado $n \in \mathbb{N}$, $\mathbb{R}_n[x] = \{a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n : a_i \in \mathbb{R}\}$ o conjunto dos polinómios de grau inferior ou igual a n, munido da adição de polinómios
   $$(a_0 + a_1x + \ldots + a_nx^n) + (b_0 + b_1x + \ldots + b_nx^n) = (a_0 + b_0) + (a_1 + b_1)x + \ldots + (a_n + b_n)x^n$$
   e do produlto por escalar usual
   $$\lambda(a_0 + a_1x + \ldots + a_nx^n) = \lambda a_0 + \lambda a_1 x + \ldots + \lambda a_n x^n.$$

   (e) $\mathbb{R}^+ := \{x \in \mathbb{R} : x > 0\}$ munido da operação de adição $\oplus$ definida por
   $$x \oplus y = xy, \forall x, y \in \mathbb{R}^+$$
   e produto de um escalar $\lambda \in \mathbb{R}$ por $x \in \mathbb{R}^+$
   $$\lambda \cdot x = x^\lambda.$$

55. Averigue se os conjuntos dados são subespaços vectoriais de $\mathbb{R}^2$:

   a) $U = \{(a, b) \in \mathbb{R}^2 : \ a - b = 1 \ \}$;
   b) $V = \{(a, b) \in \mathbb{R}^2 : \ a^2 - b^2 = 0 \ \}$;
   c) $W = \{(a, b) \in \mathbb{R}^2 : \ a^2 + b^2 = 0 \ \}$.

56. Averigue se os conjuntos dados são subespaços vectoriais de $\mathbb{R}^3$:

   i) $V = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \ x + 2y - 3z = 0\}$;
   ii) $W = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \ |x + y| \leq z\}$.

57. Mostre que as soluções de um sistema homogéneo de m equações a n incógnitas é um subespaço vectorial de $\mathbb{R}^n$.

58. Averigue se os conjuntos dados são subespaços vectoriais de $\mathcal{F}_R$:

   i) $A = \{f \in \mathcal{F}_R : \ f(2) = 0\}$;
   ii) $B = \{f \in \mathcal{F}_R : \ f$ é crescente$\}$;
   iii) $C = \{f \in \mathcal{F}_R : \ f$ é limitada$\}$;
   iv) $D = \{f \in \mathcal{F}_R : \ f$ é sobrejectiva$\}$;
   v) $E = \{f \in \mathcal{F}_R : \ f(x + 2\pi) = f(x), \ \forall x \in R\}$.

59. Averigue se os seguintes conjuntos geram $\mathbb{R}^3$ e se são linearmente independentes:

    i) $A = \{(1,0,0),\ (0,1,0),\ (0,0,1)\}$;
    ii) $B = \{(1,0,1),\ (0,-1,2),\ (1,-2,5)\}$;
    iii) $C = \{(1,0,0),\ (0,1,0)\}$;
    iv) $D = \{(1,0,0),\ (0,1,0),\ (0,0,1),\ (1,1,1),\ (0,0,0)\}$;

60. Em $\mathbb{R}^3$, descreva:

    (a) $< (1,2,3),(2,1,1) >$;
    (b) $< (1,2,3),(2,4,6) >$;
    (c) $< (1,2,3),(2,1,1),(2,1,2) >$.

61. Em $\mathbb{R}_2[x]$ descreva

    (a) $< 1+2x+3x^2, 2+x+x^2 >$;
    (b) $< 1+2x+3x^2, 2+x+x^2, +x+2x^2 >$.

62. Em $M_{2\times 2}(\mathbb{R})$ descreva
$$< \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 0 \end{bmatrix} > .$$

63. Determine um conjunto finito de geradores dos espaços vectoriais $E = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x+2y-3z = 0\}$ e $F = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 :\ x+y-3t = 0 \text{ e } x+2y+z = 0\}$.

64. Em $\mathbb{R}^3$ considere o subconjunto:
$$A = \{(x,y,k) : x,y \in \mathbb{R}\}$$
onde $k \in \mathbb{R}$ é fixo.

    a) Para que valores de k, A é um subespaço vectorial de $\mathbb{R}^3$?
    b) Encontre um sistema de geradores de A.

65. Indique um conjunto de geradores para cada um dos seguintes espaços vectoriais:

    i) $A = \{(a+b-c, 2a-2b, 2a-c) :\ a,b,c \in \mathbb{R}\ \}$;
    ii) $B = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 :\ x-2y+z = 0\ \}$;
    iii) $C = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 :\ x-2y+z = 0 \text{ e y + z = 0 } \}$;
    iv) $D = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 :\ 3x-2y+4z+t = 0 \text{ e } x+y-3z-2t = 0\ \}$.

    Para cada um dos espaços vectoriais acima A, B, C ou D encontre uma base do espaço que o contem ($\mathbb{R}^3$ ou $\mathbb{R}^4$) que contenha uma base do espaço dado.

66. Descreva os seguintes subespaços como soluções de sistemas homogéneos:

    (a) $< (1,2) >$ em $\mathbb{R}^2$;
    (b) $< (2,1,0 >$ em $\mathbb{R}^3$;
    (c) $< (2,1,0),(0,1,1) >$ em $\mathbb{R}^3$.
    (d) $< 2+x >$ em $\mathbb{R}_2[x]$
    (e) $< \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} >$ em $M_{2\times 2}(\mathbb{R})$.

67. Mostre que dado E um espaço vectorial de dimensão finita todo o seu subespaço é o conjunto solução de um sistema homogéneo.

68. Para cada um dos seguintes subconjuntos S do espaço vectorial V indique $< S >$ se:

    (a) $S = \{(x,y) : y \geq x^2\}$ e $V = \mathbb{R}^2$;
    (b) $S = \{(x,y,0) : y \geq x^2\}$ e $V = \mathbb{R}^3$;
    (c) $S = \{(x,y) : y = 2x+1\}$ e $V = \mathbb{R}^2$.

69. Seja E um espaço vectorial e $F; G$ subespaços vectoriais de E. Mostre que $F \cup G$ é um subespaço vectorial de E se e só se $F \subseteq G$ ou $G \subseteq F$.

70. Sejam A e B subconjuntos de um espaço vectorial E. Mostre que:

    (a) se $A \subseteq B$, então $< A > \subseteq < B >$;

    (b) $< A \cap B > \subseteq < A > \cap < B >$;

    (c) $< A \cup B > = < A > + < B >$.

71. Descreva os subespaços vectoriais de $\mathbb{R}^2$ e de $\mathbb{R}^3$.

72. Dados os vectores $u_1 = (-4, 3, 0)$, $u_2 = (1, 2, 1)$, $u_3 = (2, -1, 1)$ e $u_4 = (-3, 1, -1)$, mostre que u_2, u_3 e u_4 são linearmente independentes e escreva u_1 como combinação linear dos restantes vectores.

73. Mostre que em $\mathbb{R}^3$ o vector $(6, 2, -7)$ é combinação linear dos vectores $a = (2, 1, -3)$, $b = (3, 2, -5)$, $c = (1, -1, 1)$. (a, b, c) formam um sistema linearmente independente?

74. Mostre que dois vectores $(a, b), (c, d)$ de $\mathbb{R}^2$ formam um sistema linearmente independente se e só se $ad - bc \neq 0$.

75. Em $\mathbb{R}[x]$ considere o sistema de vectores $S = (1, x^2 - 1, 3x^3 + 5x + 1, x^7)$. Diga quais dos seguintes vectores são combinação linear dos vectores de S:

$$i) \quad 3x^3 + 5x^2 \qquad ii) \quad x^2 \qquad iii) \quad x^7 + 8x^2 + 105$$

76. Considere o subespaço vectorial A=$\{(a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4 : \ a + b - c + d = 0 \ \}$. Determine:

    a) uma base B_1 de A que contenha $(1, 0, 1, 0)$;

    b) uma base B_2 de $\mathbb{R}^4$ que contenha B_1;

    c) as coordenadas de $(1, 1, -1, -3)$ nas bases B_1 e B_2.

77. Considere em $\mathbb{C}^2$ a estrutura usual de espaço vectorial complexo.

    a) Determine uma base de $\mathbb{C}^2$.

    b) Mostre que $(2 + 2i, -1 + i)$ é combinação linear de $(2 + i, i)$ e $(-2i, 1 - i)$.

    c) Mostre que $(2 + i, i)$ e $(-2i, 1 - i)$ são linearmente independentes.

    d) Determine uma base do subespaço vectorial $\{(z, w) \in \mathbb{C}^2 : \ w = 2iz \ \}$.

78. Considere em $\mathbb{C}^2$ a estrutura usual de espaço vectorial real.

    a) Mostre que $(2 + 2i, -1 + i)$ não é combinação linear de $(2 + i, i)$ e $(-2i, 1 - i)$.

    b) Determine uma base do subespaço vectorial $\{(z, w) \in \mathbb{C}^2 : \ w = 2iz \ \}$.

79. Descreva os subespaços vectoriais de $\mathbb{R}^2$ e de $\mathbb{R}^3$.

80. Sejam u, v e w vectores de um espaço vectorial E. Diga, justificando, se as seguintes afirmações são verdadeiras ou falsas:

    a) se u e v são linearmente independentes, então $u + v$ e $u - v$ são linearmente independentes;

    b) se u e v são linearmente independentes, então $u + v$, $u - v$ e $2u + 3v$ são linearmente independentes;

    c) se (u, v, w) é uma base de E, então $(u, u + v, u + v + w)$ é uma base de E.

81. Diga, justificando se as seguintes afirmações são verdadeiras ou falsas:

    a) Todo o espaço vectorial é não vazio.

    b) Num espaço vectorial um sistema de vectores formado por um só vector é sempre linearmente independente.

    c) Todo o espaço vectorial tem mais do que um elemento.

    d) Num espaço vectorial se um sistema de dois vectores (u, v) é linearmente depenedente então u é multiplo de v.

82. Considere o espaço vectorial $M_{2\times 3}(\mathbb{R})$.

a) Mostre que os vectores $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ e $C = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ são linearmente independentes e que o vector $D = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$, não é combinação linear de A, B, C.

b) Determine uma base de $M_{2\times 3}(\mathbb{R})$ que inclua os vectores A, B e C.

c) Verifique se o conjunto $A = \left\{ \begin{bmatrix} x & y & x \\ y & 0 & 0 \end{bmatrix} : x, y \in \mathbb{R} \right\}$ é um subespaço vectorial de $M_{2\times 3}(\mathbb{R})$ e determine uma sua base.

83. Considere os seguintes subespaços de $\mathbb{R}^3$:

$$F =< (2,0,1), (-1,0,0) > \qquad \text{e} \qquad G =< (1,1,0), (0,-1,1) > .$$

Determine uma base de $F \cap G$ e uma base de $< F \cup G >$.

84. a) Mostre que o sistema de vectores (e_1, e_2, e_3), em que $e_1 = (1,1,1), e_2 = (1,0,1), e_3 = (1,0,0)$ é uma base de $\mathbb{R}^3$.

b) Determine um sistema de vectores em escada relativamente à base (e_1, e_2, e_3) que seja equivalente ao sistema (v_1, v_2, v_3, v_4) em que $v_1 = (1,2,3)$, $v_2 = (3,2,0)$, $v_3 = (2,0,-3)$ e $v_4 = (0,-4,9)$.

c) Determine uma base para $F =< v_1, v_2, v_3, v_4 >$ e descreva F como o conjunto solução de um sistema homogéneo.

d) Sendo $G = \{xe_1 + ye_2 + ze_3 : x - y = 0\}$ determine $F \cap G$ e determine uma base para $F + G$.

85. Sendo F e G os subespaços de $\mathbb{C}^4$ tais que $G = \{(x,y,z,w) : x - w = 0 \wedge y + 2z = 0\}$ e $F =< (1,-2,3,0), (1,1,1,0), (0,3,-2,0) >$, indique justificando se F e G estão em soma directa.

86. No espaço vectorial $\mathbb{R}^4$ considere os vectores $v_1 = (2,0,2,1), v_2 = (1,b,0,1/2), v_3 = (a,1,a,1)$.

a) Discuta a dimensão de $F =< v_1, v_2, v_3 >$.

b) Determine a, b de forma a que $(3,1,3,b) \in F$.

87. Considere o subespaço vectorial F de $\mathbb{R}^4$ representado, em relação a certa base, pelo sistema de equações

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 0 \\ x_1 - x_3 = 0 \end{cases}$$

e determine:

a) Um sistema de equações que represente um complementar F', de F, isto é, $\mathbb{R}^4 = F \oplus F'$.

b) Um sistema de equações que represente $F + G$, onde G é representado por

$$\begin{cases} x_2 + x_4 = 0 \\ 2x_1 - x_3 = 0 \end{cases},$$

em relação à mesma base.

c) Um sistema de equações que represente $(F + G) \cap F'$.

88. Sejam (e_1, e_2, e_3) a base canónica de $\mathbb{R}^3$ e $v = ae_1 + be_2 + ce_3$ um vector arbitrário de $\mathbb{R}^3$. Considere os vectores $f_1 = (1,1,0), f_2 = (1,0,1)$ e $f_3 = (1,-1,1)$ de $\mathbb{R}^3$.

i) Verifique que (f_1, f_2, f_3) é uma base de $\mathbb{R}^3$.

ii) Determine a matriz de mudança da base canónica para a base referida em i).

iii) Exprima o vector v como combinação linear da base referida na alinea i), usando matrizes de mudança de base.

89. Considere as seguintes bases de R^3:

$B_1 = ((2,1,0),\ (1,1,0),\ (0,1,2))$ e $B_2 = ((1,0,1),\ (0,1,1),\ (1,1,1))$.

Determine:

(a) a matriz de mudança de base B_1 para B_2;

(b) as coordenadas do vector $u = (1, 2, 0)_{B_1}$ na base B_2;

(c) as coordenadas do vector $u = (1, 2, 0)_{B_2}$ na base B_1.

90. Dada uma base $(e_1, \ldots, e_n)$ de um espaço vectorial E, $(u_1, ..., u_m)$, para $m \leq n$, elementos de E e M a matriz cuja i-ésima coluna são as coordenadas de u_i na base $(e_1, \ldots, e_n)$. Mostre que se M for uma matriz em escada, então $(u_1, \ldots, u_n)$ são linearmente independentes.

91. Suponha que B_1 e B_2 são duas bases de um espaço vectorial E. Calcule as coordenadas do vector $(1, 1)_{B_2}$ na base B_1, supondo que $M(Id; B_1\, B_2) = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$.

92. Seja considere as bases $\mathcal{B}'$ e $\mathcal{B} = ((1, 2), (3, 4))$ de $\mathbb{R}^2$. Sabendo que

$$M(Id; \mathcal{B}, \mathcal{B}') = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$$

indique os vectores de $\mathcal{B}'$.

5 Aplicações lineares

93. (a) Para cada uma das seguintes aplicações, diga se é linear e, caso o seja, determine o seu núcleo e a sua imagem:
    i. $f_1 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R},\ f_1(x, y) = 2x - y;$
    ii. $f_2 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R},\ f_2(x, y) = 2x - y + 30;$
    iii. $f_3 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R},\ f_3(x, y) = x^2 - y;$
    iv. $f_4 : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3,\ f_4(x, y, z) = (x - 2y + 3z, x + y + z, -3y + 2z);$
    v. $f_5 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2,\ f_5(x, y) = (x - y, x);$
    vi. $f_6 : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2,\ f_6(x, y, z) = (x - y + 2z, x + z);$
    vii. $f_7 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2,\ f_7(x, y) = (2x - y, |y|);$
    viii. $f_8 : \mathbb{R}_2[X] \to \mathbb{R}_2[X],\ f_8(a + bX + cX^2) = (c - b)X + (a - c)X^2;$
    ix. $f_9 : \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C},\ f_9(z_1, z_2) = z_1 - \bar{z}_2$ (sendo $\mathbb{C}^2$ e $\mathbb{C}$ espaços vectoriais complexos);
    x. $f_{10} : \mathbb{C}^2_{\mathbb{R}} \to \mathbb{C}_{\mathbb{R}},\ f_{10}(z_1, z_2) = z_1 - \bar{z}_2$ (sendo $\mathbb{C}^2_{\mathbb{R}}$ e $\mathbb{C}_{\mathbb{R}}$ espaços vectoriais reais);

    (b) Determine: $f_1^{-1}(\{1\})$; $f_2^{-1}(\{1\})$; $f_4^{-1}(\{(1, 0, 1)\})$; $f_5^{-1}(\{(1, 2)\})$; $f_6^{-1}(\{(1, 0)\})$; $f_8^{-1}(\{1 + X + X^2\})$.

    (c) Determine uma base do subespaço $f_4^{-1}(\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 :\ x = 0\ \})$

94. Seja $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ uma aplicação. Mostre que f é uma aplicação linear se e só se $f(x) = ax$, para algum $a \in \mathbb{R}$.

95. Seja $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^2$ uma aplicação. Mostre que f é uma aplicação linear se e só se $f(x) = (ax, bx)$, para alguns $a, b \in \mathbb{R}$.

96. Mostre que a composição de duas aplicações lineares ainda é uma aplicação linear.

97. Sejam $\mathbb{R}^3$ e $\mathbb{R}^2$ espaços vectoriais reais com as operações usuais e f uma aplicação de $\mathbb{R}^3$ em $\mathbb{R}^2$ definida por
$$f(x, y, z) = (x + c - 2d, 2x + y)$$
para quaisquer $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, em que c, d são duas constantes reais arbitrárias.

    Diga, justificando, qual a relação entre c e d para que f seja uma aplicação linear.

98. Seja $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ a aplicação linear tal que $f(1, 1) = (1, 0)$ e $f(-1, 1) = (1, 2)$. Determine:
    (a) $f(0, 2)$;
    (b) $f(x, y) \quad \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$;
    (c) $Kerf(f)$ e $Im(f)$;
    (d) a matriz de f relativamente às bases $B_c = ((1, 0), (0, 1))$ e $B = ((1, 1), (-1, 1))$.

99. Seja v_1, v_2 e v_3 vectores no espaço vectorial V e $f : V \longrightarrow \mathbb{R}^3$ uma aplicação linear tal que $f(v_1) = (1, -1, 2)$, $f(v_2) = (0, 3, 2)$ e $f(v_3) = (-3, 1, 2)$. Determine $f(2v_1 - 3v_2 + 4v_3)$.

100. Considere a aplicação linear $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ definida por
$$f(x, y, z) = (x + y, 0, y - z)$$
qualquer seja $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$.
    i) Determine $Ker(f)$, $Im(f)$ e uma base para cada um destes subespaços vectoriais.
    ii) Considere o conjunto $A = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x = y\}$. Mostre que A é um subespaço vectorial de $\mathbb{R}^3$ e determine $f^{-1}(A)$.

101. Considere os espaços vectoriais $\mathbb{R}^3$ e $\mathbb{R}_3[x]$ e a base $((1, 0, 0), (0, 1, 1), (0, 0, 1))$ de $\mathbb{R}^3$. Seja $g : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}_3[x]$ uma aplicação linear tal que
$$g(1, 0, 0) = x^3 + 2x,$$
$$g(0, 1, 1) = x^2 - 2x,$$
$$g(0, 0, 1) = x^3 + x^2.$$
Determine:

i) $g(a, b, c)$ para todo o $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$;

ii) $Ker(g)$ e uma sua base;

iii) uma base de $\mathbb{R}^3$ que inclua a base encontrada em b);

iv) $Im(g)$ e uma sua base.

Diga, justificando, se g é um isomorfismo.

102. Sejam E um espaço vectorial real e (e_1, e_2, e_3) uma base de E. Considere a aplicação $f : E \longrightarrow E$ definida por
$$f(xe_1 + ye_2 + ze_3) = (x + y + z)e_1 + (x + y + 3z)e_2 + (x + y)e_3,$$
para quaiquer $x, y, z \in \mathbb{R}$.

i) Classifique o endomorfismo quanto à sobrejectividade e injectividade.

ii) Determine $f^{-1}(e_1 + e_2 + e_3)$.

103. Considere os subespaços de $\mathbb{R}^3$: $W = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \ x + y + z = 0\}$ e $V = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \ x = y = z\}$. Mostre que existe uma aplicação linear $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ tal que $Ker(f) = V$ e $Im(f) = W$.

104. Supondo fixadas em $\mathbb{R}^2$ e $\mathbb{R}^3$ as respectivas bases canónicas, determine a matriz que representa as seguintes aplicações lineares:

i) $g \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^3)$ definida por $g(x, y) = (x + y, 0, 0)$;

ii) $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^2)$ definida por $f(x, y, z) = (-y, x)$;

iii) $h \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^3)$ definida por $h(x, y) = (x, y, 0)$.

105. Sejam B_c e B respectivamente a base canónica e a base $((1, 0, 2), (0, 1, -1), (1, 0, 1))$ de R^3. Seja $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ a aplicação linear tal que
$$M(f; B, B) = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

(a) Determine uma base de $Ker(f)$ e uma base de $Im(f)$.

(b) Determine $M(F; B_c, B_c)$.

(c) Seja $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ a aplicação linear definida por: $g(2, 1) = (4, -1, 0)$ e $g(1, 1) = (1, 1, 1)$. Determine a matriz da aplicação linear $f \circ g$ relativamente às bases canónicas de $\mathbb{R}^2$ e de $\mathbb{R}^3$.

(d) Averigue se $f \circ g$ é injectiva ou sobrejectiva.

106. Sejan E, F, G espaços vectoriais tais que $dim(E) = m$, $dim(F) = dim(G) = n$ e sejam
$$f : E \longrightarrow F,$$
$$g : F \longrightarrow G,$$
$$h : F \longrightarrow F$$
aplicações lineares. Diga, justificando se são verdadeiras ou falsas as seguintes afirmações:

a) Se f é sobrejectiva então $m \leq n$;

b) Se $(f_1, \ldots, f_n)$ é uma base de F então $(g(f_1), \ldots, g(f_2))$ é uma base de G;

c) $dim(Ker(h)) + dim(Im(h)) = dim(F)$;

d) $F = Ker(h) \oplus Im(h)$;

e) Se f é um isomorfismo então $E \simeq G$;

f) Se $(e_1, \ldots, e_n)$ é uma base de E, f é injectiva se e só se $(f(e_1, \ldots, f(e_n))$ é um sistema linearmente independente de F;

g) Se f é injectiva então $m \leq n$;

h) Se $(e_1, e_2, \ldots, e_m)$ é uma base de E e $< f(e_1), \ldots, f(e_m) >= F$;

i) Se g é injectiva então g é sobrejectiva;

j) Se g é sobrejectiva então g é injectiva;

l) Se gf é sobrejectiva, então f é sobrejectiva;

m) Se $(f_1, \ldots, f_n)$ é uma base de F e $(h(f_1), \ldots, h(f_n))$ é um sistema de geradores de F, então h é um isomorfismo.

107. Considere o espaço vectorial $\mathbb{R}^3$. Seja f um endomorfismo de $\mathbb{R}^3$ tal que

$$f(1,0,0) = (1,0,\alpha),$$

$$f(0,1,0) = (1,-1,0),$$

$$f(0,0,1) = (1,1,\alpha^2).$$

Determine os valores de α para os quais f é um automorfismo.

108. Determine $(ab,c) \in \mathbb{R}^3$, de modo que a aplicação linear $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$, definida por $f(e_1) = (1,0,1)$, $f(e_2) = (1,2,3)$, $f(e_3) = (a,b,c)$, sendo (e_1,e_2,e_3) uma base de $\mathbb{R}^3$, tenha característica igual a 2.

109. Seja $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^3)$. Sabendo que

$$f(0,0,1) = (0,0,1)$$

e

$$Ker(f) =< (1,1,1),(0,1,1) >$$

determine $f(x,y,z)$ para qualquer $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$.

110. Seja, para cada $a \in \mathbb{R}$, a aplicação linear

$$\begin{array}{rccl} f_a : & \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & (x,y,z) & \mapsto & (a\,x + 2y, x + y + 2z, y + a\,z). \end{array}$$

i) Determine os valores de a para os quais f_a é um isomorfismo;

ii) determine f_1^{-1};

iii) determine para cada $b \in \mathbb{R}$ o conjunto $A_b = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid f_4(x,y,z) = (b,1,1)\}$.

iv) determine o núcleo de f_4.

111. Seja (u_1,u_2,u_3) uma base de $\mathbb{R}^3$, $\mathcal{B}$ a base canonica de $\mathbb{R}^3$ e $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ uma aplicação linear tal que

$$M(f;(u_1,u_2,u_3),\mathcal{B}) = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 4 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

.

(a) Indique $f(u_1), f(u_2), f(u_3)$ e $f(u_1 + u_3)$;

(b) Sabendo que $(1,0,0) = 2u_1 + u_3; (0,1,0) = u_1 + u_2; (0,0,1) = u_1 + u_3$ determine $M(f;\mathcal{B},\mathcal{B})$.

(c) Indique justificando se f é um isomorfismo. Se for um isomorfismo indique a expressão que define f^{-1}.

112. Considere a aplicação linear $\begin{array}{ccc} f : \mathbb{R}^3 : & \to & \mathbb{R}^3 \\ (x,y,z) & \to & (x-y, y-z, x-z) \end{array}$

(a) Se $\mathcal{B} = ((1,2,-1),(1,-1,0),(3,0,1))$ é uma base de $\mathbb{R}^3$ e $\mathcal{B}_c$ a base canónica de $\mathbb{R}^3$, determine $M(f;\mathcal{B},\mathcal{B}_c)$.

(b) Indique, justificando, se existe uma base $\mathcal{H}$ de $\mathbb{R}^3$ tal que $M(f;\mathcal{H},\mathcal{H}) = \begin{bmatrix} 2 & -2 & -2 \\ -2 & 2 & 2 \\ 2 & -2 & -2 \end{bmatrix}$.

(c) Indique, caso exista, uma aplicação linear sobrejectiva $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ tal que $Ker(g \circ f) = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x = z\}$

113. Considere a aplicação linear definida por

$$\begin{array}{rccc} f: & \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ & (x,y,z) & \to & (-y+z,-x+y+z,x+z) \end{array}$$

(a) Seja bc a base canónica de $\mathbb{R}^3$. Indique, $M(f;bc,bc)$.

(b) f é bijectiva? Em caso afirmativo caracterize f^{-1}.

(c) Seja $g:\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ tal que

$$M(g;((1,1,1),(1,1,0),(1,0,0)),bc) = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 5 & 2 \end{bmatrix}.$$

Indique

i. $M(g \circ f;bc,bc)$.

ii. $dim(Im(g \circ f))$.

6 Valores e vectores próprios

114. Sejam f e g endomorfismos de $\mathbb{R}^n$. Mostre que:

   (a) se λ é valor próprio de f, então $a\lambda$ é valor próprio de af, qualquer que seja $a \in \mathbb{R}$;

   (b) Se u é um vector próprio de f e de g, então u é vector próprio de $af + bg$, quaisquer que sejam $a, b \in \mathbb{R}$.

115. Seja $T : V \to V$ um endomorfismo e seja u um vector próprio de T, associado ao valor próprio λ. Mostre que u é um vector próprio de $T^2 = T \circ T$, associado ao valor próprio λ^2.

116. Determine os valores próprios, vectores próprios e uma base dos subespaços próprios de cada uma das matrizes seguintes:

   (a) $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -4 \end{bmatrix}$;

   (b) $\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$;

   (c) $\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$;

   (d) $\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$;

   (e) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -3 & 1 & 0 \\ 4 & -7 & 1 \end{bmatrix}$;

   (f) $\begin{bmatrix} 2 & 0 & 4 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -3 \end{bmatrix}$.

   Indique justificando, quais das matrices acima são semelhantes a uma matriz diagonal.

117. Em cada uma das alí neas que se seguem, mostre que existe uma matriz invertÃŋvel $C \in \mathcal{M}_{3,3}(R)$ tal que a matriz $C^{-1}\ A\ C$ é diagonal e calcule A^{500}:

   (a) $A = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ -1 & -2 \end{bmatrix}$

   (b) $A = \begin{bmatrix} 5 & -5 \\ -5 & 5 \end{bmatrix}$.

   (c) $A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$;

   (d) $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & 3 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$.

   (e) (verifique que em (c) pode arranjar uma matriz ortogonal C)

118. Determine todos os números reais a tais que o vector $(1, 1, 1)$ é vector próprio da matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & a \\ a & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$.