1 סיכום מקיף - אלגברה לינארית

1.1 Summary Complete Algebra Linear

סיכום כולל של משפטים, זהויות, נוסחאות וכללי חשבון

תוכן המסמך מבוסס על 26 קבצי PDF של הקורס

1.2 תוכן עניינים

---

2 שדות ומטריצות

2.1 הגדרות בסיסיות

2.1.1 שדה (Field)

שדה F הוא קבוצה עם שתי פעולות (חיבור וכפל) המקיימות:

אקסיומות החיבור: - $(A1)$ סגירות: $\forall a,b \in F : a+b \in F$ - $(A2)$ קומוטטיביות: $\forall a,b \in F : a+b = b+a$ - $(A3)$ אסוציאטיביות: $\forall a,b,c \in F : (a+b)+c = a+(b+c)$ - $(A4)$ **איבר ניטרלי:** $\exists 0 \in F : \forall a \in F : a+0 = a$ - $(A5)$ איבר הופכי: $\forall a \in F : \exists (-a) \in F : a+(-a) = 0$

אקסיומות הכפל: - $(M1)$ סגירות: $\forall a,b \in F : ab \in F$ - $(M2)$ קומוטטיביות: $\forall a,b \in F : ab = ba$ - $(M3)$ אסוציאטיביות: $\forall a,b,c \in F : (ab)c = a(bc)$ - $(M4)$ **איבר ניטרלי:** $\exists 1 \in F : \forall a \in F : a \cdot 1 = a$ - $(M5)$ איבר הופכי: $\forall a \neq 0 \in F : \exists a^{-1} \in F : a \cdot a^{-1} = 1$

דיסטריבוטיביות: - $(M6)$ $\forall a,b,c \in F : (a+b)c = ac+bc$ וגם $a(b+c) = ab+ac$

2.1.2 מטריצה

מטריצה $A_{m \times n}$ היא מערך מלבני של מספרים:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

כאשר $a_{ij} \in F$ עבור כל $1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n$

- i - אינדקס השורה
- j - אינדקס העמודה

סימון: קבוצת כל המטריצות מגודל $m \times n$ מעל שדה F:

$$\mathbb{M}_{m\times n}(F) \quad \text{or} \quad \mathbb{R}^{m\times n}$$

2.1.3 שוויון מטריצות

שתי מטריצות A, B שוות אם ורק אם:

$$A = B \iff \begin{cases} \text{dimensions same} \\ a_{ij} = b_{ij} \text{ all for } i, j \end{cases}$$

---

3 פעולות על מטריצות

3.1 חיבור מטריצות

עבור $A, B \in \mathbb{R}^{m\times n}$:

$$(A+B)_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$$

תכונות: - סגירות: $A+B \in \mathbb{R}^{m\times n}$ - קומוטטיביות: $A+B = B+A$ - אסוציאטיביות: $(A+B)+C = A+(B+C)$ - איבר אפס: $A+O = A$ - איבר הופכי: $A+(-A) = O$

3.2 כפל בסקלר

עבור $\alpha \in \mathbb{R}$ ו-$A \in \mathbb{R}^{m\times n}$:

$$(\alpha A)_{ij} = \alpha \cdot a_{ij}$$

תכונות: - $(\alpha+\beta)A = \alpha A + \beta A$ - $\alpha(A+B) = \alpha A + \alpha B$ - $(\alpha\beta)A = \alpha(\beta A)$ - $1 \cdot A = A$

3.3 כפל מטריצות

3.3.1 מכפלת שורה בעמודה

אם $A_{1\times k} = (a_1, a_2, \ldots, a_k)$ ו-$B_{k\times 1} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_k \end{pmatrix}$:

$$A \cdot B = \sum_{t=1}^{k} a_t b_t$$

3.3.2 כפל כללי

אם $A \in \mathbb{R}^{m\times k}$ ו-$B \in \mathbb{R}^{k\times n}$, אז $AB \in \mathbb{R}^{m\times n}$:

$$(AB)_{ij} = \sum_{t=1}^{k} a_{it} b_{tj} = A_i \cdot B_j$$

כאשר: - A_i - השורה ה-i של A - B_j - העמודה ה-j של B

3.3.3 תכונות כפל מטריצות

□ **תכונות שמתקיימות:** 1. **אסוציאטיביות:** $(AB)C = A(BC)$ 2. **דיסטריבוטיביות:** $A(B+C) = AB + AC$ וגם $(A+B)C = AC + BC$ 3. **כפל בסקלר:** $(\alpha A)B = \alpha(AB) = A(\alpha B)$ 4. **מטריצת יחידה:** $AI_n = A$ וגם $I_m A = A$ 5. **מטריצת אפס:** $AO = O$ וגם $OA = O$

□ **לא מתקיים:** - **אין קומוטטיביות:** בדרך כלל $AB \neq BA$ - $AB = O$ **לא מבטיח** $A = O$ או $B = O$

3.4 טרנספוזה (Transpose)

3.4.1 הגדרה

$$(A^T)_{ij} = A_{ji}$$

אם $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ אז $A^T \in \mathbb{R}^{n\times m}$

3.4.2 תכונות טרנספוזה

1. $(A^T)^T = A$
2. $(A+B)^T = A^T + B^T$
3. $(\alpha A)^T = \alpha A^T$
4. $(AB)^T = B^T A^T$ □ **סדר הופכי!**

3.4.3 מטריצה סימטרית

מטריצה A היא **סימטרית** אם:

$$A = A^T \iff a_{ij} = a_{ji}$$

3.5 מטריצות מיוחדות

3.5.1 מטריצת היחידה

$$I_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

תכונה: $AI_n = I_nA = A$ (כאשר הגדלים תואמים)

3.5.2 מטריצה אלכסונית (Diagonal)

$$D = \begin{pmatrix} d_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & d_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & d_n \end{pmatrix}$$

תכונה: $a_{ij} = 0$ כאשר $i \neq j$

3.5.3 מטריצה עליונה משולשת (Upper Triangular)

$$U = \begin{pmatrix} u_{11} & u_{12} & \cdots & u_{1n} \\ 0 & u_{22} & \cdots & u_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & u_{nn} \end{pmatrix}$$

תכונה: $a_{ij} = 0$ כאשר $i > j$

3.5.4 מטריצה תחתונה משולשת (Lower Triangular)

$$L = \begin{pmatrix} l_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ l_{21} & l_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ l_{n1} & l_{n2} & \cdots & l_{nn} \end{pmatrix}$$

תכונה: $a_{ij} = 0$ כאשר $i < j$

---

4 מערכות משוואות ליניאריות

4.1 הגדרות

4.1.1 משוואה ליניארית

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n = b$$

כאשר $a_1, a_2, \ldots, a_n, b \in \mathbb{R}$

4.1.2 מערכת משוואות ליניאריות (מל"ל)

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

4.1.3 צורה מטריצית

$$A\vec{x} = \vec{b}$$

כאשר: - $A = (a_{ij}) \in \mathbb{R}^{m \times n}$ - **מטריצת המקדמים** - $\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ - **וקטור הנעלמים** - $\vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$ - **וקטור המקדמים החופשיים**

4.1.4 מטריצה מורחבת

$$(A|b) = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} & | & b_1 \\ \vdots & \ddots & \vdots & | & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} & | & b_m \end{pmatrix}$$

4.2 פעולות שורה יסודיות

1. **החלפת שורות:** $R_i \leftrightarrow R_j$
2. **הכפלת שורה בסקלר לא-אפס:** $R_i \to \alpha R_i$ (כאשר $\alpha \neq 0$)
3. **הוספת כפולה של שורה אחרת:** $R_j \to R_j + \alpha R_i$

4.2.1 שקילות שורות

מטריצות A ו-B **שקולות בשורות** ($A \sim B$) אם ניתן להעביר את A ל-B באמצעות מספר סופי של פעולות שורה יסודיות.

תכונה חשובה: אם $A \sim B$, אז למערכות $A\vec{x} = \vec{b}$ ו-$B\vec{x} = \vec{b}$ יש אותם פתרונות.

4.3 צורה קנונית (Row Echelon Form - REF)

מטריצה בצורה קנונית מקיימת: 1. כל שורה לא-אפס מתחילה ב-1 (**פיבוט**) 2. הפיבוט של שורה $i+1$ נמצא ימינה מהפיבוט של שורה i 3. כל שורות האפס נמצאות בתחתית

4.4 צורה קנונית מצומצמת (Reduced Row Echelon Form - RREF)

בנוסף לתנאי REF: 4. כל פיבוט הוא האיבר היחיד שאינו אפס בעמודתו

4.5 סוגי מערכות

4.5.1 מערכת עקבית (הטרוגנית)

$$A\vec{x} = \vec{b} \text{ where } \vec{b} \neq \vec{0}$$

4.5.2 מערכת הומוגנית

$$A\vec{x} = \vec{0}$$

תכונות מערכת הומוגנית: 1. $\vec{x} = \vec{0}$ תמיד פתרון (**הפתרון הטריוויאלי**) 2. אם $\vec{v}_1, \vec{v}_2$ פתרונות, אז $\vec{v}_1 + \vec{v}_2$ גם פתרון 3. אם $\vec{v}$ פתרון ו-$k \in \mathbb{R}$, אז $k\vec{v}$ גם פתרון

4.5.3 פתרון כללי

הפתרון הכללי של $A\vec{x} = \vec{b}$ הוא:

$$\vec{x} = \vec{x}_p + \vec{x}_h$$

כאשר: - $\vec{x}_p$ - פתרון פרטי של $A\vec{x} = \vec{b}$ - $\vec{x}_h$ - הפתרון הכללי של $A\vec{x} = \vec{0}$ (ההומוגנית)

---

5 דרגה

5.1 הגדרה

דרגה של מטריצה A (מסומנת $\text{rank}(A)$):

$$\text{rank}(A) = \text{ number of non-zero rows in REF of } A$$

5.2 תכונות דרגה

1. $\text{rank}(A) \leq \min(m, n)$ עבור $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$
2. $\text{rank}(A) = \text{rank}(A^T)$
3. $\text{rank}(AB) \leq \min(\text{rank}(A), \text{rank}(B))$
4. אם $A \sim B$ (שקולות שורות) אז $\text{rank}(A) = \text{rank}(B)$

5.3 קריטריונים לקיום פתרון

עבור מערכת $A\vec{x} = \vec{b}$ כאשר $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$:

5.3.1 פתרון יחיד

$$\text{rank}(A) = \text{rank}(A|b) = n$$

5.3.2 אינסוף פתרונות

$$\text{rank}(A) = \text{rank}(A|b) < n$$

5.3.3 אין פתרון

$$\text{rank}(A) < \text{rank}(A|b)$$

5.4 טבלת קיום פתרונות

מצב	תנאי
פתרון יחיד	$\text{rank}(A) = \text{rank}(A\|\|b) = n$
אינסוף פתרונות	$\text{rank}(A) = \text{rank}(A\|\|b) < n$
אין פתרון	$\text{rank}(A) < \text{rank}(A\|\|b)$

5.4.1 למערכת הומוגנית

- **פתרון טריוויאלי בלבד:** $\text{rank}(A) = n$
- **אינסוף פתרונות:** $\text{rank}(A) < n$

---

6 מרחבים וקטוריים

6.1 הגדרה

קבוצה V מעל שדה $\mathbb{R}$ עם פעולות חיבור וכפל בסקלר היא **מרחב וקטורי** אם מקיימת:

6.1.1 אקסיומות החיבור

- **A0** - סגירות: $\forall u, v \in V : u + v \in V$
- **A1** - אסוציאטיביות: $\forall u, v, w \in V : (u + v) + w = u + (v + w)$
- **A2** - קיום איבר אפס: $\exists 0 \in V : \forall v \in V : v + 0 = v$
- **A3** - קיום הופכי: $\forall v \in V : \exists(-v) \in V : v + (-v) = 0$
- **A4** - קומוטטיביות: $\forall v, u \in V : v + u = u + v$

6.1.2 אקסיומות הכפל בסקלר

- **M0** - סגירות: $\forall k \in \mathbb{R}, \forall v \in V : kv \in V$
- **M1** - דיסטריבוטיביות: $\forall k \in \mathbb{R}, \forall u, v \in V : k(u + v) = ku + kv$
- **M2** - דיסטריבוטיביות: $\forall k, m \in \mathbb{R}, \forall v \in V : (k + m)v = kv + mv$
- **M3** - אסוציאטיביות: $\forall k, m \in \mathbb{R}, \forall v \in V : (km)v = k(mv)$
- **M4** - קיום יחידה: $\forall v \in V : 1 \cdot v = v$

6.2 דוגמאות למרחבים וקטוריים

1. $\mathbb{R}^n$ - וקטורים ב-n ממדים
2. $\mathbb{M}_{m\times n}(\mathbb{R})$ - מטריצות מגודל $m \times n$
3. $\mathbb{R}[x]$ - פולינומים עם מקדמים ממשיים
4. $\mathbb{R}_n[x]$ - פולינומים עד דרגה n
5. $C[a, b]$ - פונקציות רציפות על $[a, b]$

6.3 תת-מרחב (Subspace)

קבוצה $W \subseteq V$ היא **תת-מרחב** של V אם:

$$W \text{ of subspace } V \iff \begin{cases} \vec{0} \in W \\ \forall w_1, w_2 \in W : w_1 + w_2 \in W \\ \forall \alpha \in \mathbb{R}, \forall w \in W : \alpha w \in W \end{cases}$$

6.3.1 משפט - מבחן תת-מרחב

W הוא תת-מרחב של V אם ורק אם:

$$\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}, \forall w_1, w_2 \in W : \alpha w_1 + \beta w_2 \in W$$

6.4 פעולות על תת-מרחבים

6.4.1 חיתוך

$$U \cap W = \{v \mid v \in U \text{ and } v \in W\}$$

תכונה: $U \cap W$ הוא תת-מרחב של V

6.4.2 איחוד

$$U \cup W = \{v \mid v \in U \text{ or } v \in W\}$$

□ לא בהכרח תת-מרחב!

6.4.3 סכום

$$U + W = \{u + w \mid u \in U, w \in W\}$$

תכונה: $U + W$ הוא תת-מרחב של V

6.4.4 סכום ישר

$$V = U \oplus W \iff \begin{cases} V = U + W \\ U \cap W = \{\vec{0}\} \end{cases}$$

---

7 בסיסים ומימדים

7.1 מרחב פורש (Span)

עבור קבוצה $S = \{v_1, \dots, v_n\} \subseteq V$:

$$\text{Span}(S) = \{\alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_n v_n \mid \alpha_i \in \mathbb{R}\}$$

תכונות: 1. $S \subseteq \text{Span}(S)$ 2. $\text{Span}(\text{Span}(S)) = \text{Span}(S)$ 3. אם $S \subseteq T$, אז $\text{Span}(S) \subseteq \text{Span}(T)$ 4. $\text{Span}(S)$ הוא תת-מרחב של V

7.2 תלות ליניארית

וקטורים $v_1, \dots, v_n \in V$ הם:

7.2.1 בלתי תלויים ליניארית (Linearly Independent)

$$\alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_n v_n = \vec{0} \implies \alpha_1 = \dots = \alpha_n = 0$$

7.2.2 תלויים ליניארית (Linearly Dependent)

$$\exists\alpha_1,\dots,\alpha_n\in\mathbb{R}\text{zero) all (not }:\alpha_1v_1+\dots+\alpha_nv_n=\vec{0}$$

משפט: $v_1,\dots,v_n$ תלויים ליניארית אם ורק אם קיים v_i שניתן להביע כצירוף ליניארי של האחרים.

7.3 בסיס (Basis)

קבוצה $V \supseteq B=\{v_1,\dots,v_n\}$ היא **בסיס** של V אם:

$$B\text{ of basis a is }V \iff \begin{cases} B\text{independent linearly} \\ V=\text{Span}(B) \end{cases}$$

7.3.1 משפט - ייחודיות הצגה

אם B בסיס של V, אז כל וקטור $v\in V$ ניתן להציג **באופן יחיד** כצירוף ליניארי של איברי B:

$$v=\alpha_1v_1+\dots+\alpha_nv_n$$

7.4 מימד (Dimension)

אם V בעל בסיס בעל n איברים:

$$\dim(V)=n$$

7.4.1 משפט - גודל בסיס

כל בסיס של אותו מרחב וקטורי V בעל אותו מספר איברים.

7.5 בסיסים סטנדרטיים

- $\mathbb{R}^n$: $\{e_1,e_2,\dots,e_n\}$ כאשר $e_i=(0,\dots,0,1,0,\dots,0)$ (1 במקום ה-i)
- $\dim(\mathbb{R}^n)=n$
- $\mathbb{M}_{m\times n}(\mathbb{R})$: מטריצות עם 1 בכל מקום
- $\dim(\mathbb{M}_{m\times n})=mn$
- $\mathbb{R}_n[x]$: $\{1,x,x^2,\dots,x^n\}$
- $\dim(\mathbb{R}_n[x])=n+1$

7.6 משפטים חשובים

7.6.1 משפט - הרחבת בסיס

כל קבוצה בלתי תלויה ליניארית ב-V ניתן להרחיב לבסיס של V.

7.6.2 משפט - צמצום מערכת פורשת

מכל קבוצה הפורשת את V ניתן לבחור בסיס של V.

7.6.3 משפט הממדים

אם U,W תת-מרחבים של V:

$$\dim(U+W)=\dim(U)+\dim(W)-\dim(U\cap W)$$

7.6.4 משפט

אם $U\subseteq V$ ו-$\dim(U)=\dim(V)$, אז $U=V$.

8 מרחבי עמודות ושורות

8.1 הגדרות

עבור מטריצה $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$:

8.1.1 מרחב השורות (Row Space)

$$\text{Row}(A) = \text{Span}\{R_1, R_2, \dots, R_m\}$$

כאשר R_i היא השורה ה-i של A (כוקטור)

8.1.2 מרחב העמודות (Column Space)

$$\text{Col}(A) = \text{Span}\{C_1, C_2, \dots, C_n\}$$

כאשר C_j היא העמודה ה-j של A (כוקטור)

8.1.3 מרחב האפס (Null Space / Kernel)

$$N(A) = \{\vec{x} \in \mathbb{R}^n \mid A\vec{x} = \vec{0}\}$$

8.2 משפטים חשובים

8.2.1 משפט 1 - שקילות שורות

$$A \sim B \implies \text{Row}(A) = \text{Row}(B)$$

8.2.2 משפט 2 - דרגה

$$\text{rank}(A) = \dim(\text{Row}(A)) = \dim(\text{Col}(A))$$

8.2.3 משפט 3 - טרנספוזה

$$\text{rank}(A) = \text{rank}(A^T)$$

8.2.4 משפט 4 - משפט הדרגה (Rank-Nullity Theorem)

עבור $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$:

$$\text{rank}(A) + \dim(N(A)) = n$$

או בסימונים אחרים:

$$\text{rank}(A) + \text{nullity}(A) = n$$

8.2.5 משפט 5

$$\text{rank}(AB) \leq \min(\text{rank}(A), \text{rank}(B))$$

8.3 קשר לפתרון מערכות

למערכת $A\vec{x}=\vec{b}$ יש פתרון אם ורק אם:

$$\vec{b}\in \texttt{Col}(A)$$

---

9 מטריצות הפיכות

9.1 הגדרה

מטריצה ריבועית $A\in\mathbb{R}^{n\times n}$ היא **הפיכה** אם קיימת מטריצה B כך ש:

$$AB=BA=I_n$$

המטריצה B מסומנת A^{-1} ונקראת **ההופכית של** A.

9.2 תכונות הופכיות

1. $(AB)^{-1}=B^{-1}A^{-1}$ □ **סדר הופכי!**
2. $(A^T)^{-1}=(A^{-1})^T$
3. $(A^{-1})^{-1}=A$
4. $(\alpha A)^{-1}=\frac{1}{\alpha}A^{-1}$ עבור $\alpha\neq 0$

9.3 תנאים שקולים להפיכות

עבור $A\in\mathbb{R}^{n\times n}$, התנאים הבאים **שקולים**:

1. A הפיכה
2. $\det(A)\neq 0$
3. $\text{rank}(A)=n$
4. $\texttt{Row}(A)=\mathbb{R}^n$
5. $\texttt{Col}(A)=\mathbb{R}^n$
6. $N(A)=\{\vec{0}\}$
7. שורות A בלתי תלויות ליניארית
8. עמודות A בלתי תלויות ליניארית
9. למערכת $A\vec{x}=\vec{0}$ יש רק הפתרון הטריוויאלי
10. למערכת $A\vec{x}=\vec{b}$ יש פתרון יחיד לכל $\vec{b}$

9.4 חישוב הופכית

9.4.1 שיטת המטריצה המורחבת

ליצור $(A|I_n)$ ולבצע פעולות שורה עד קבלת $(I_n|A^{-1})$

9.4.2 נוסחה עבור מטריצה 2×2

$$A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \implies A^{-1}=\frac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

תנאי: $\det(A)=ad-bc\neq 0$

---

10 דטרמיננטות

10.1 הגדרה

עבור $A\in\mathbb{R}^{n\times n}$, הדטרמיננטה היא סקלר $\det(A)$ או $|A|$.

10.1.1 חישוב לפי גודל

$n=1$:

$$|a|=a$$

$n=2$:

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad-bc$$

$n=3$:

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = a\begin{vmatrix} e & f \\ h & i \end{vmatrix} - b\begin{vmatrix} d & f \\ g & i \end{vmatrix} + c\begin{vmatrix} d & e \\ g & h \end{vmatrix}$$

10.2 פיתוח לפי שורה/עמודה

10.2.1 מינור (Minor)

M_{ij} = דטרמיננטה של המטריצה שמתקבלת ממחיקת שורה i ועמודה j

10.2.2 קופקטור (Cofactor)

$$C_{ij}=(-1)^{i+j}M_{ij}$$

10.2.3 פיתוח לפי שורה i

$$|A|=\sum_{j=1}^{n} a_{ij}C_{ij}=\sum_{j=1}^{n}(-1)^{i+j}a_{ij}M_{ij}$$

10.2.4 פיתוח לפי עמודה j

$$|A|=\sum_{i=1}^{n} a_{ij}C_{ij}=\sum_{i=1}^{n}(-1)^{i+j}a_{ij}M_{ij}$$

10.3 תכונות דטרמיננטה

10.3.1 כללי חישוב בסיסיים

1. **מטריצת יחידה:** $|I_n|=1$
2. **מטריצה משולשת:** $|A|=a_{11}\cdot a_{22}\cdots a_{nn}$ (מכפלת האלכסון)
3. **מטריצה אלכסונית:** $|D|=d_1\cdot d_2\cdots d_n$

10.3.2 השפעת פעולות שורה

1. **החלפת שורות:** $|B|=-|A|$
2. **כפל שורה ב-**α: $|B|=\alpha|A|$
3. **הוספת כפולת שורה לשורה אחרת:** $|B|=|A|$ (ללא שינוי)

10.3.3 תכונות כלליות

1. $|A^T|=|A|$
2. $|AB|=|A|\cdot|B|$
3. $|A^{-1}|=\frac{1}{|A|}$ (אם A הפיכה)
4. $|\alpha A|=\alpha^n|A|$ עבור $A\in\mathbb{R}^{n\times n}$
5. A הפיכה $\iff |A|\neq 0$

6. A הפיכה $\iff |A| \neq 0$

---

11 העתקות ליניאריות

11.1 הגדרה

טרנספורמציה $T : V \to W$ היא **העתקה ליניארית** (ה"ל) אם:

$$T\text{linear} \iff \begin{cases} \forall v_1, v_2 \in V : T(v_1 + v_2) = T(v_1) + T(v_2) \\ \forall v \in V, \forall \alpha \in \mathbb{R} : T(\alpha v) = \alpha T(v) \end{cases}$$

או בצורה מאוחדת:

$$\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}, \forall v_1, v_2 \in V : T(\alpha v_1 + \beta v_2) = \alpha T(v_1) + \beta T(v_2)$$

11.2 תכונות בסיסיות

1. $T(\vec{0}_V) = \vec{0}_W$
2. $T(-v) = -T(v)$
3. $T(\alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_n v_n) = \alpha_1 T(v_1) + \cdots + \alpha_n T(v_n)$

11.3 ייצוג מטריצי

כל ה"ל $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ ניתן לייצג כ:

$$T(\vec{x}) = A\vec{x}$$

כאשר $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ היא **המטריצה המייצגת** של T.

11.4 דוגמאות להעתקות ליניאריות

11.4.1 הטלה (Projection)

על ציר ה-x: $P(x, y) = (x, 0)$

11.4.2 שיקוף (Reflection)

ביחס לציר ה-x: $R(x, y) = (x, -y)$

ביחס לציר ה-y: $R(x, y) = (-x, y)$

11.4.3 סיבוב (Rotation)

סיבוב בזווית θ נגד כיוון השעון:

$$R_\theta = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

11.4.4 הרחבה/כיווץ (Scaling)

$$S(x, y) = (kx, ky)$$

---

12 גרעין ותמונה

12.1 הגדרות

עבור $T : V \to W$ העתקה ליניארית:

12.1.1 גרעין (Kernel)

$$\text{Ker}(T) = \{v \in V \mid T(v) = \vec{0}_W\} \subseteq V$$

תכונה: $\text{Ker}(T)$ הוא תת-מרחב של V

12.1.2 תמונה Range) / (Image

$$\text{Im}(T) = \{T(v) \mid v \in V\} = \{w \in W \mid \exists v \in V : T(v) = w\} \subseteq W$$

תכונה: $\text{Im}(T)$ הוא תת-מרחב של W

12.2 משפט הדרגה Theorem) (Rank-Nullity

$$\dim(\text{Ker}(T)) + \dim(\text{Im}(T)) = \dim(V)$$

או:

$$\text{nullity}(T) + \text{rank}(T) = \dim(V)$$

12.3 קשר למטריצות

עבור $T_A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ המוגדרת ע"י $T_A(\vec{x}) = A\vec{x}$:

$$\text{Ker}(T_A) = N(A) = \{\vec{x} \in \mathbb{R}^n \mid A\vec{x} = \vec{0}\}$$

$$\text{Im}(T_A) = \text{Col}(A) = \text{Span}\{\text{ of columns} A\}$$

12.4 תכונות

12.4.1 T חד-חד ערכית (Injective)

$$T \text{injective} \iff \text{Ker}(T) = \{\vec{0}\}$$

12.4.2 T על (Surjective)

$$T \text{surjective} \iff \text{Im}(T) = W$$

---

13 איזומורפיזם

13.1 הגדרות

13.1.1 טרנספורמציה הפיכה

$T : V \to W$ היא **הפיכה** אם קיימת $T^{-1} : W \to V$ כך ש:

$$T^{-1} \circ T = I_V \quad \text{and} \quad T \circ T^{-1} = I_W$$

13.1.2 איזומורפיזם

טרנספורמציה ליניארית הפיכה נקראת **איזומורפיזם**.

אם קיים איזומורפיזם בין V ל-W, אומרים ש-V ו-W **איזומורפיים** ומסמנים:

$$V \cong W$$

13.2 תנאים שקולים לאיזומורפיזם

עבור $T : V \to W$ העתקה ליניארית, התנאים הבאים **שקולים**:

1. T איזומורפיזם
2. T חד-חד ערכית **וגם** T על
3. $\mathrm{Ker}(T) = \{\vec{0}\}$ **וגם** $\mathrm{Im}(T) = W$
4. $\dim(V) = \dim(W)$ **וגם** $\mathrm{Ker}(T) = \{\vec{0}\}$
5. $\dim(V) = \dim(W)$ **וגם** $\mathrm{Im}(T) = W$

13.3 משפט

אם $\dim(V) = \dim(W) = n < \infty$, אז:

$$V \cong W$$

כלומר, כל מרחבים וקטוריים בעלי אותו מימד (סופי) הם איזומורפיים.

13.4 תכונות

1. אם $T : V \to W$ איזומורפיזם, אז $T^{-1} : W \to V$ גם איזומורפיזם
2. אם T איזומורפיזם ו-$\{v_1, \dots, v_n\}$ בסיס של V, אז $\{T(v_1), \dots, T(v_n)\}$ בסיס של W
3. איזומורפיזם שומר על מבנה ליניארי

---

14 מטריצות מייצגות

14.1 הגדרה

עבור $T : V \to W$ העתקה ליניארית, ובהינתן בסיסים: - $B = \{v_1, \dots, v_n\}$ של V - $C = \{w_1, \dots, w_m\}$ של W

המטריצה המייצגת של T ביחס לבסיסים B ו-C היא:

$$[T]_C^B = \begin{pmatrix} [T(v_1)]_C & [T(v_2)]_C & \cdots & [T(v_n)]_C \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{m \times n}$$

כאשר $[T(v_i)]_C$ הוא **וקטור הקואורדינטות** של $T(v_i)$ ביחס לבסיס C.

14.2 וקטור קואורדינטות

אם $v = a_1 v_1 + \dots + a_n v_n$ (ביחס לבסיס B), אז:

$$[v]_B = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$$

14.3 משפט - יחס בין T למטריצה

$$[T(v)]_C = [T]_C^B [v]_B$$

זהו הקשר המרכזי המחבר בין ההעתקה הליניארית לבין המטריצה המייצגת שלה.

14.4 תכונות

14.4.1 לינאריות

$$[S + T]_C^B = [S]_C^B + [T]_C^B$$
$$[\lambda T]_C^B = \lambda [T]_C^B$$

14.4.2 הרכבת העתקות

עבור $S : V \to W$ ו-$T : W \to U$ עם בסיסים B, C, D:

$$[T \circ S]_D^B = [T]_D^C [S]_C^B$$

14.4.3 דרגה

$$\operatorname{rank}([T]_C^B) = \dim(\operatorname{Im}(T))$$

---

15 מטריצות מעבר

15.1 הגדרה

עבור שני בסיסים $B = \{v_1, \dots, v_n\}$ ו-$C = \{u_1, \dots, u_n\}$ של אותו מרחב V:

מטריצת המעבר מ-B ל-C היא:

$$P_{B \to C} = [I_V]_C^B = \begin{pmatrix} [v_1]_C & [v_2]_C & \cdots & [v_n]_C \end{pmatrix}$$

כאשר $I_V : V \to V$ היא פונקציית הזהות.

15.2 משפט - שינוי קואורדינטות

$$[v]_C = P_{B \to C} [v]_B$$

15.3 תכונות מטריצת מעבר

1. **הפיכות:** מטריצת מעבר תמיד הפיכה
2. **הופכית:** $(P_{B \to C})^{-1} = P_{C \to B}$
3. **הרכבה:** $P_{C \to B} \cdot P_{B \to C} = I_n$

15.4 שינוי בסיס של מטריצה מייצגת

אם $A = [T]_B^B$ (מטריצה ביחס לבסיס B), אז:

$$[T]_C^C = P_{C \to B} \cdot [T]_B^B \cdot P_{B \to C}$$

או בסימון קצר:

$$[T]_C^C = P^{-1} [T]_B^B P$$

כאשר $P = P_{B \to C}$

---

16 דמיון מטריצות

16.1 הגדרה

מטריצות $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ הן **דומות** אם קיימת מטריצה הפיכה P כך ש:

$$B = P^{-1} A P$$

סימון: $A \sim B$

16.2 משמעות

A ו-B דומות אם הן מייצגות את אותה העתקה ליניארית T ביחס לבסיסים שונים.

16.3 תכונות משומרות בדמיון

אם $A \sim B$, אז:

1. **דטרמיננטה:** $\det(A) = \det(B)$
2. **עקבה (Trace):** $\operatorname{tr}(A) = \operatorname{tr}(B)$
3. **דרגה:** $\operatorname{rank}(A) = \operatorname{rank}(B)$
4. **פולינום אופייני:** $P_A(\lambda) = P_B(\lambda)$
5. **ערכים עצמיים:** אותם ערכים עצמיים (כולל כפליות)
6. **הפיכות:** A הפיכה $\iff$ B הפיכה

16.4 עקבה (Trace)

$$\operatorname{tr}(A) = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}$$

תכונות: .1 $\operatorname{tr}(A+B) = \operatorname{tr}(A) + \operatorname{tr}(B)$ .2 $\operatorname{tr}(\alpha A) = \alpha \operatorname{tr}(A)$ .3 $\operatorname{tr}(AB) = \operatorname{tr}(BA)$ .4 $\operatorname{tr}(A^T) = \operatorname{tr}(A)$

---

17 ערכים עצמיים ווקטורים עצמיים

17.1 הגדרות

עבור $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$:

17.1.1 ערך עצמי (Eigenvalue)

$\lambda \in \mathbb{R}$ הוא **ערך עצמי** של A אם קיים וקטור $\vec{v} \neq \vec{0}$ כך ש:

$$A\vec{v} = \lambda\vec{v}$$

17.1.2 וקטור עצמי (Eigenvector)

$\vec{v} \neq \vec{0}$ הוא **וקטור עצמי** המתאים לערך העצמי λ אם:

$$A\vec{v} = \lambda\vec{v}$$

17.1.3 מרחב עצמי (Eigenspace)

$$V_\lambda = \{\vec{v} \in \mathbb{R}^n \mid A\vec{v} = \lambda\vec{v}\} = \text{Ker}(A - \lambda I)$$

תכונה: V_λ הוא תת-מרחב של $\mathbb{R}^n$

17.2 מציאת ערכים עצמיים

17.2.1 פולינום אופייני (Characteristic Polynomial)

$$P_A(\lambda) = \det(A - \lambda I)$$

17.2.2 משפט

λ הוא ערך עצמי של A אם ורק אם:

$$\det(A - \lambda I) = 0$$

כלומר, הערכים העצמיים הם שורשי הפולינום האופייני.

17.3 כפליות

17.3.1 כפליות אלגברית (Algebraic Multiplicity)

מספר הפעמים ש-λ מופיע כשורש של $P_A(\lambda)$
סימון: $\text{alg-mult}(\lambda)$

17.3.2 כפליות גיאומטרית (Geometric Multiplicity)

$$\text{geo-mult}(\lambda) = \dim(V_\lambda) = \dim(\text{Ker}(A - \lambda I))$$

17.3.3 משפט - קשר בין כפליות

$$1 \leq \text{geo-mult}(\lambda) \leq \text{alg-mult}(\lambda)$$

17.4 תכונות ערכים עצמיים

17.4.1 משפט 1

אם $v_1, \ldots, v_k$ הם וקטורים עצמיים עם ערכים עצמיים **שונים** $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$, אז $v_1, \ldots, v_k$ **בלתי תלויים ליניארית**.

17.4.2 משפט 2 - קשר לדטרמיננטה ועקבה

עבור מטריצה $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ עם ערכים עצמיים $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$:

$$\det(A) = \lambda_1 \cdot \lambda_2 \cdots \lambda_n$$

$$\text{tr}(A) = \lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_n$$

17.4.3 משפט 3 - ערכים עצמיים של מטריצות דומות

אם $A \sim B$, אז ל-A ו-B אותם ערכים עצמיים (כולל כפליות).

---

18 לכסון

18.1 הגדרה

מטריצה $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ היא **לכסינה** (Diagonalizable) אם קיימת מטריצה הפיכה P ומטריצה אלכסונית D כך ש:

$$A = PDP^{-1}$$

או באופן שקול:

$$P^{-1}AP = D$$

18.2 משפט - תנאי ללכסון

A לכסינה אם ורק אם קיים בסיס של $\mathbb{R}^n$ המורכב מוקטורים עצמיים של A.

18.3 קריטריונים ללכסון

18.3.1 קריטריון 1 - ערכים עצמיים שונים

אם ל-$A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ יש n ערכים עצמיים **שונים**, אז A לכסינה.

18.3.2 קריטריון 2 - סכום כפליות גיאומטריות

A לכסינה אם ורק אם:

$$\sum_{\lambda} \text{geo-mult}(\lambda) = n$$

18.3.3 קריטריון 3 - שוויון כפליות

A לכסינה אם ורק אם לכל ערך עצמי λ:

$$\text{geo-mult}(\lambda) = \text{alg-mult}(\lambda)$$

18.4 אלגוריתם לכסון

1. **מצא את הפולינום האופייני:** $P_A(\lambda) = \det(A - \lambda I)$
2. **מצא את שורשי הפולינום:** אלו הערכים העצמיים $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$
3. **עבור כל ערך עצמי** λ_i:
   - פתור $(A - \lambda_i I)\vec{x} = \vec{0}$
   - מצא בסיס של V_{λ_i} (מרחב עצמי)
4. **בדוק לכסינות:** אם סכום ממדי המרחבים העצמיים = n, אז A לכסינה
5. **בנה מטריצות:**
   - P = מטריצה שעמודותיה הן הוקטורים העצמיים
   - D = מטריצה אלכסונית עם הערכים העצמיים המתאימים

18.5 דוגמה

אם A עם ערכים עצמיים $\lambda_1 = 2$ (כפל 2) ו-$\lambda_2 = 5$ (כפל 1):

$$D = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$$

18.6 משפט Cayley-Hamilton

כל מטריצה A מקיימת את הפולינום האופייני שלה:

$$P_A(A) = 0$$

---

19 מכפלה פנימית

19.1 הגדרה

מכפלה פנימית על מרחב וקטורי V היא פונקציה $\langle \cdot, \cdot \rangle : V \times V \to \mathbb{R}$ המקיימת:

1. **סימטריה:** $\langle u, v \rangle = \langle v, u \rangle$
2. **חיוביות מוגדרת:**
   - $\langle v, v \rangle \geq 0$
   - $\langle v, v \rangle = 0 \iff v = \vec{0}$
3. **ליניאריות בארגומנט הראשון:**

$$\langle \alpha u + \beta v, w \rangle = \alpha \langle u, w \rangle + \beta \langle v, w \rangle$$

19.2 דוגמאות למכפלות פנימיות

19.2.1 מכפלה סטנדרטית ב-$\mathbb{R}^n$

$$\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle = u_1 v_1 + u_2 v_2 + \cdots + u_n v_n = \vec{u}^T \vec{v}$$

19.2.2 מכפלה משוקללת

$$\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle_M = \vec{u}^T M \vec{v}$$

כאשר M מטריצה סימטרית חיובית מוגדרת

19.2.3 מכפלה פנימית בפולינומים

$$\langle p, q \rangle = \int_a^b p(x)q(x)dx$$

19.2.4 מכפלה פנימית במטריצות

$$\langle A, B \rangle = \mathrm{tr}(A^T B)$$

19.3 נוסחאות מרכזיות

19.3.1 נורמה (Norm)

$$\|v\| = \sqrt{\langle v, v \rangle}$$

תכונות: .1 $\|v\| \geq 0$ וגם $v = \vec{0} \iff \|v\| = 0$ .2 $\|\alpha v\| = |\alpha| \|v\|$ .3 **אי-שוויון משולש:** $\|u + v\| \leq \|u\| + \|v\|$

19.3.2 מרחק (Distance)

$$d(u, v) = \|u - v\|$$

19.3.3 זווית בין וקטורים

$$\cos\theta = \frac{\langle u, v \rangle}{\|u\| \cdot \|v\|}$$

19.4 אי-שוויונים חשובים

19.4.1 אי-שוויון Cauchy-Schwarz

$$|\langle u, v \rangle| \leq \|u\| \cdot \|v\|$$

שוויון מתקיים אם ורק אם u ו-v תלויים ליניארית.

19.4.2 אי-שוויון המשולש

$$\|u + v\| \leq \|u\| + \|v\|$$

---

20 אורתוגונליות והיטלים

20.1 אורתוגונליות

20.1.1 וקטורים אורתוגונליים

$$u \perp v \iff \langle u, v\rangle = 0$$

20.1.2 קבוצה אורתוגונלית

$\{v_1, \dots, v_k\}$ היא **אורתוגונלית** אם:

$$\langle v_i, v_j\rangle = 0 \text{ all for } i \neq j$$

20.1.3 קבוצה אורתונורמלית

$\{v_1, \dots, v_k\}$ היא **אורתונורמלית** (ONB) אם:

$$\langle v_i, v_j\rangle = \begin{cases} 1, & i = j \\ 0, & i \neq j \end{cases} = \delta_{ij}$$

20.2 משפטים

20.2.1 משפט 1

כל קבוצה אורתוגונלית של וקטורים לא-אפס היא **בלתי תלויה ליניארית**.

20.2.2 משפט 2 - משפט פיתגורס

אם $u \perp v$, אז:

$$\|u+v\|^2 = \|u\|^2 + \|v\|^2$$

20.3 היטל (Projection)

20.3.1 היטל על וקטור

ההיטל של v על u הוא:

$$\text{proj}_u(v) = \frac{\langle u, v\rangle}{\langle u, u\rangle} u = \frac{\langle u, v\rangle}{\|u\|^2} u$$

תכונה: $v - \text{proj}_u(v) \perp u$

20.3.2 היטל על תת-מרחב

עבור $U = \text{Span}\{u_1, \dots, u_k\}$ כאשר $\{u_1, \dots, u_k\}$ אורתוגונלית:

$$\text{proj}_U(v) = \sum_{i=1}^{k} \frac{\langle u_i, v\rangle}{\langle u_i, u_i\rangle} u_i$$

אם הקבוצה אורתונורמלית:

$$\text{proj}_U(v) = \sum_{i=1}^{k} \langle u_i, v\rangle u_i$$

20.3.3 פירוק אורתוגונלי

כל וקטור v ניתן לפרק כ:
$$v = \text{proj}_U(v) + (v - \text{proj}_U(v))$$

כאשר $\text{proj}_U(v) \in U$ ו-$(v - \text{proj}_U(v)) \perp U$

---

21 גרהם-שמידט

21.1 תהליך Gram-Schmidt

בהינתן קבוצה בלתי תלויה ליניארית $\{v_1, \dots, v_k\}$, ניתן לבנות קבוצה אורתוגונלית $\{u_1, \dots, u_k\}$:

$$u_1 = v_1$$

$$u_2 = v_2 - \frac{\langle u_1, v_2 \rangle}{\langle u_1, u_1 \rangle} u_1$$

$$u_3 = v_3 - \frac{\langle u_1, v_3 \rangle}{\langle u_1, u_1 \rangle} u_1 - \frac{\langle u_2, v_3 \rangle}{\langle u_2, u_2 \rangle} u_2$$

$$\vdots$$

$$u_k = v_k - \sum_{i=1}^{k-1} \frac{\langle u_i, v_k \rangle}{\langle u_i, u_i \rangle} u_i$$

או באופן כללי:
$$u_j = v_j - \text{proj}_{\text{Span}\{u_1, \dots, u_{j-1}\}}(v_j)$$

21.2 נרמול

לאחר קבלת הקבוצה האורתוגונלית $\{u_1, \dots, u_k\}$, ניתן לקבל קבוצה אורתונורמלית:
$$e_i = \frac{u_i}{\|u_i\|}$$

21.3 תכונות

1. $\text{Span}\{u_1, \dots, u_k\} = \text{Span}\{v_1, \dots, v_k\}$
2. $\{u_1, \dots, u_k\}$ אורתוגונלית
3. $\{e_1, \dots, e_k\}$ אורתונורמלית

---

22 משלימים אורתוגונליים

22.1 הגדרה

עבור תת-מרחב $W \subseteq V$:

$$W^\perp = \{v \in V \mid \langle v, w \rangle = 0 \text{ all for } w \in W\}$$

$W^\perp$ נקרא **המשלים האורתוגונלי** של W.

22.2 משפטים

22.2.1 משפט 1

$W^\perp$ הוא תת-מרחב של V.

22.2.2 משפט 2 - סכום ישר אורתוגונלי

$$V = W \oplus W^\perp$$

כלומר, כל $v \in V$ ניתן לכתוב באופן יחיד כ:

$$v = w + w^\perp$$

כאשר $w \in W$ ו-$w^\perp \in W^\perp$

22.2.3 משפט 3 - מימדים

$$\dim(W) + \dim(W^\perp) = \dim(V)$$

22.2.4 משפט 4

$$(W^\perp)^\perp = W$$

22.3 קשר למטריצות

עבור מטריצה $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$:

$$(\text{Row}(A))^\perp = N(A)$$

$$(\text{Col}(A))^\perp = N(A^T)$$

22.3.1 משפט - ארבעת המרחבים

עבור $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$:

1. $\text{Row}(A) \subseteq \mathbb{R}^n$ עם $\dim(\text{Row}(A)) = r$
2. $N(A) \subseteq \mathbb{R}^n$ עם $\dim(N(A)) = n - r$
3. $\text{Col}(A) \subseteq \mathbb{R}^m$ עם $\dim(\text{Col}(A)) = r$
4. $N(A^T) \subseteq \mathbb{R}^m$ עם $\dim(N(A^T)) = m - r$

כאשר $r = \text{rank}(A)$

קשרי אורתוגונליות: - $\text{Row}(A) \perp N(A)$ - $\text{Col}(A) \perp N(A^T)$

---

23 נוסחאות וזהויות חשובות - רשימת מראה מהיר

23.1 מטריצות

- $(A^T)^T = A$
- $(A+B)^T = A^T + B^T$
- $(AB)^T = B^T A^T$
- $(A^{-1})^T = (A^T)^{-1}$
- $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$

23.2 דטרמיננטות

- $|AB| = |A| \cdot |B|$
- $|A^T| = |A|$
- $|A^{-1}| = \frac{1}{|A|}$
- $|\alpha A| = \alpha^n |A|$ עבור $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$

23.3 דרגה

- $\text{rank}(A) = \text{rank}(A^T)$
- $\text{rank}(A) + \dim(N(A)) = n$ (עבור $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$)
- $\text{rank}(AB) \leq \min(\text{rank}(A), \text{rank}(B))$

23.4 העתקות ליניאריות

- $\dim(\text{Ker}(T)) + \dim(\text{Im}(T)) = \dim(V)$
- $\text{Ker}(T_A) = N(A)$
- $\text{Im}(T_A) = \text{Col}(A)$

23.5 מטריצות מייצגות

- $[T(v)]_C = [T]_C^B [v]_B$
- $[T \circ S]_D^B = [T]_D^C [S]_C^B$
- $[T]_C^C = P^{-1} [T]_B^B P$ כאשר $P = P_{B\to C}$

23.6 ערכים עצמיים

- $\det(A) = \prod \lambda_i$
- $\text{tr}(A) = \sum \lambda_i$
- $P_A(\lambda) = \det(A - \lambda I)$

23.7 מכפלה פנימית

- $\|v\| = \sqrt{\langle v, v\rangle}$
- $\cos\theta = \frac{\langle u,v\rangle}{\|u\|\cdot\|v\|}$
- $|\langle u, v\rangle| \leq \|u\| \cdot \|v\|$ (Cauchy-Schwarz)

23.8 היטלים

- $\text{proj}_u(v) = \frac{\langle u,v\rangle}{\|u\|^2} u$
- $\text{proj}_U(v) = \sum_{i=1}^k \langle v, e_i\rangle e_i$ (ONB)

23.9 משלימים אורתוגונליים

- $V = W \oplus W^\perp$
- $\dim(W) + \dim(W^\perp) = \dim(V)$
- $(\text{Row}(A))^\perp = N(A)$

23.10 סיום

מסמך זה מכיל סיכום מקיף של כל הקורס באלגברה לינארית, כולל כל המשפטים, הזהויות, הנוסחאות וכללי החשבון החשובים.

תאריך עריכה: יוצר אוטומטית מ-26 קבצי PDF של הקורס