**Fazer os exercícios que seguem manualmente. Organizar cada procedimento numérico e destacar o resultado.**

**1ª QUESTÃO:** Considere o sistema de duas equações lineares a seguir:

$$0{,}0003x_1 + 1{,}566x_2 = 1{,}569$$
$$0{,}3454x_1 - 2{,}436x_2 = 1{,}018$$

(a) Resolva o sistema usando o método de eliminação de Gauss arredondando em quatro algarismos significativos.
(b) Troque a ordem das equações e resolva o sistema com o método de eliminação de Gauss arredondando em quatro algarismos significativos.

Verifique as respostas substituindo a solução de volta nas equações. Teça comentários em relação aos resultados obtidos.

**2ª QUESTÃO:** Determine a inversa da matriz A abaixo usando o método de Gauss Jordan.

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} -4/5 & -3/5 & -2/5 \\ -3/5 & -6/5 & -4/5 \\ -2/5 & -4/5 & -6/5 \end{bmatrix}$$

**3ª QUESTÃO:** Considere o sistema no qual [A]{x}={b} e onde:

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 & 5 \\ 1 & 3.5 & 1 & 7.5 \\ 1.4 & 2.7 & 5.5 & 12 \\ -2 & 1 & 3 & 28 \end{bmatrix} \qquad \boldsymbol{b} = \{11\ 13\ 21.6\ 30\}^T$$

a) Resolva o sistema linear utilizando o Método de Gauss;
b) Resolva o sistema linear utilizando decomposição LU utilizando as Matrizes L e U oriundas do Método de Gauss.

**Fazer os exercícios que seguem utilizando Linguagens de programação Matlab® ou Octave®. Anexar todas as rotinas programadas para obter os resultados.**

**5ª QUESTÃO** Resolva o sistema linear da Questão 3 utilizando fatoração LU pelo Método de Crout.

**6ª QUESTÃO** Considere o sistema abaixo.

$$2x_1 - 6x_2 - x_3 = -38$$
$$-3x_1 - x_2 + 7x_3 = -34$$
$$-8x_1 + x_2 - 2x_3 = -20$$

a) Utilize o método de Gauss Siedel para encontrar a solução do sistema;
b) Utilize o método de Jacobi para encontrar a solução do sistema;
c) Compare os resultados obtidos.

**Aluno:** Roberto Gabriel Mangabeira Santana
**Matrícula:** 190019620

Lista 03 - Roberto G. M. Santana

1° Questão

$$0{,}0003x_1 + 1{,}566x_2 = 1{,}569$$
$$0{,}3454x_1 + (-)2{,}436x_2 = 1{,}018$$

a) Método de Gauss

$$-\frac{0{,}3454}{0{,}0003} \cdot \left(0{,}0003x_1 + 1{,}566x_2\right) = 1{,}569 \left(-\frac{0{,}3454}{0{,}0003}\right)$$

$$-0{,}3454x_1 - 1802{,}988x_2 = -1806{,}442$$
$$0{,}3454x_1 - 2{,}436x_2 = 1{,}018$$
$$0x_1 - 1805{,}424 = -1805{,}424$$

$$\boxed{\begin{array}{l} 0{,}0003x_1 + 1{,}566x_2 = 1{,}569 \\ 0x_1 + x_2 = 1 \end{array}}$$

$$\boxed{\begin{array}{l} x_2 = 1 \\ x_1 = 10 \end{array}}$$

b)

$$0{,}3454x_1 - 2{,}436x_2 = 1{,}018$$
$$0{,}0003x_1 + 1{,}566x_2 = 1{,}569$$

$$-\frac{0{,}0003}{0{,}3454}\left(0{,}3454x_1 - 2{,}436x_2\right) = 1{,}018\left(-\frac{0{,}0003}{0{,}3454}\right)$$

$$-0{,}0003x_1 + 0{,}0021x_2 = -0{,}0008$$
$$0{,}0003x_1 + 1{,}566x_2 = 1{,}569$$
$$0x_1 + 1{,}5681x_2 = 1{,}5682$$

$$0{,}3454x_1 - 2{,}436x_2 = 1{,}018$$
$$0x_1 + 1{,}5681x_2 = 1{,}5682$$

$$\boxed{\begin{array}{l} x_2 = 1{,}0000 \\ x_1 = 10 \end{array}}$$

Substituindo 1 e 10 em:

$$0,0003x_1 + 1,566x_2 = 1,569 \qquad x_1 = 10$$
$$1,569 = 1,569 \qquad x_2 = 1$$

Agora, em:

$$0,3454x_1 - 2,436x_2 = 1,018 \qquad x_1 = 10$$
$$1,018 = 1,018 \qquad x_2 = 1$$

• É perceptível que 10 ($x_1$) e 1 ($x_2$) são as soluções desse sistema.

$\boxed{2^a \text{ Questão}}$

$$A = \begin{bmatrix} -4/5 & -3/5 & -2/5 \\ -3/5 & -6/5 & -4/5 \\ -2/5 & -4/5 & -6/5 \end{bmatrix}$$

Método de Gauss Jordan para encontrar a inversa

$$\begin{pmatrix} -4/5 & -3/5 & -2/5 \\ -3/5 & -6/5 & -4/5 \\ -2/5 & -4/5 & -6/5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \times -5/4$$

$$\frac{3}{10} - \frac{8}{10} \qquad \frac{1}{5} - \frac{6}{5} \qquad \frac{9}{20} - \frac{24}{20} \qquad \frac{6}{20} - \frac{16}{20}$$

Pivotear

$$\begin{pmatrix} 1 & 3/4 & 1/2 \\ -3/5 & -6/5 & -4/5 \\ -2/5 & -4/5 & -6/5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -5/4 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Normalizar →

$$\begin{pmatrix} 1 & 3/4 & 1/2 \\ 0 & -3/4 & -1/2 \\ 0 & -1/2 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -5/4 & 0 & 0 \\ -3/4 & 1 & 0 \\ -1/2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Pivotear $\times -3/4$, $\times 1/2$

$$\begin{pmatrix} 1 & 3/4 & 1/2 \\ 0 & 1 & 2/3 \\ 0 & -1/2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -5/4 & 0 & 0 \\ 1 & -4/3 & 0 \\ -1/2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} \times -3/4 \\ \\ \times 1/2 \end{matrix}$$

tilibra

Normal →

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2/3 \\ 0 & 0 & -2/3 \end{pmatrix} ; \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 1 & -4/3 & 0 \\ 0 & -2/3 & 1 \end{pmatrix}$$

Pivotar →
$L_3 \cdot \left(-\frac{3}{2}\right)$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2/3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 1 & -4/3 & 0 \\ 0 & 1 & -3/2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -3/2 \end{pmatrix}$$

$$\boxed{\begin{bmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -3/2 \end{bmatrix}}$$

## 3ª Questão

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 & 5 \\ 1 & 3,5 & 1 & 7,5 \\ 1,4 & 2,7 & 5,5 & 12 \\ -2 & 1 & 3 & 26 \end{bmatrix} \quad x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} \quad b = \begin{bmatrix} 11 \\ 13 \\ 21,6 \\ 32 \end{bmatrix}$$

a) Método de Gauss

$$\begin{array}{llllll} -1/2 \times & (2 & 3 & 1 & 5 & 11) \\ \hookrightarrow & -1 & -1,5 & -0,5 & -2,5 & -5,5 \\ & 1 & 3,5 & 1 & 7,5 & 13 \\ \hline & 0 & 2 & 0,5 & 5 & 7,5 \end{array} \quad \rightarrow \quad \begin{array}{ccccc} 2 & 3 & 1 & 5 & 11 \\ 0 & 2 & 0,5 & 5 & 7,5 \\ 1,4 & 2,7 & 5,5 & 12 & 21,6 \\ -2 & 1 & 3 & 26 & 32 \end{array}$$

$-\frac{1,4}{2}(2 \quad 3 \quad 1 \quad 5 \quad 11)$

$\hookrightarrow -1,4 \quad -2,1 \quad -0,7 \quad -3,5 \quad -7,7$

$$\begin{array}{ccccc} -1,4 & -2,1 & -0,7 & -3,5 & -7,7 \\ 1,4 & 2,7 & 5,5 & 12 & 21,6 \\ \hline 0 & 0,6 & 4,8 & 8,5 & 13,9 \end{array}$$

~''~

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 3 & 1 & 5 & 11 \\ 0 & 2 & 0,5 & 5 & 7,5 \\ 0 & 0,6 & 4,8 & 8,5 & 13,9 \\ 0 & 4 & 4 & 33 & 41 \end{array}\right)$$

$$\begin{array}{ccccc} 2 & 3 & 1 & 5 & 11 \\ -2 & 1 & 3 & 28 & 30 \\ \hline 0 & 4 & 4 & 33 & 41 \end{array}$$

~''~

$-\frac{0,6}{2}(0 \quad 2 \quad 0,5 \quad 5 \mid 7,5)$

$$\begin{array}{ccccc} 0 & -0,6 & -0,15 & -1,5 & -2,25 \\ 0 & 0,6 & 4,8 & 8,5 & 13,9 \\ \hline 0 & 0 & 4,65 & 7 & 11,65 \end{array}$$

~''~

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 3 & 1 & 5 & 11 \\ 0 & 2 & 0,5 & 5 & 7,5 \\ 0 & 0 & 4,65 & 7 & 11,65 \\ 0 & 0 & 3 & 23 & 26 \end{array}\right)$$

$-2\times(0 \quad 2 \quad 0,5 \quad 5 \quad 7,5)$

$$\begin{array}{ccccc} 0 & -4 & -1 & -10 & -15 \\ 0 & 4 & 4 & 33 & 41 \\ \hline 0 & 0 & 3 & 23 & 26 \end{array}$$

~''~

$-\frac{3}{4,65}(0 \quad 0 \quad 4,65 \quad 7 \quad 11,65)$

$$\begin{array}{ccccc} 0 & 0 & -3 & -4,51 & -7,51 \\ 0 & 0 & 3 & 23 & 26 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 18,49 & 18,49 \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{ccccc} 2 & 3 & 1 & 5 & 11 \\ 0 & 2 & 0,5 & 5 & 7,5 \\ 0 & 0 & 4,65 & 7 & 11,65 \\ 0 & 0 & 0 & 18,49 & 18,49 \end{array}\right)$$

$\Downarrow$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 3 & 1 & 5 & 11 \\ 0 & 2 & 0,5 & 5 & 7,5 \\ 0 & 0 & 4,65 & 7 & 11,65 \\ 0 & 0 & 0 & 18,49 & 18,49 \end{array}\right)$$

$18,49x_4 = 18,49$

$\boxed{x_4 = 1}$

$\boxed{x_3 = 1}$

$\boxed{x_2 = 1}$

$\boxed{x_1 = 1}$

$4,65x_3 = 4,65 \qquad 2x_2 = 2$

$2x_1 = 2$

b) Decomposição LU

[U] -> método de Gauss

$[A] \cdot [X] = [b]$

$[A] = [L] \cdot [U]$

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 & 5 \\ 1 & 3,5 & 1 & 7,5 \\ 1,4 & 2,7 & 5,5 & 12 \\ -2 & 1 & 3 & 28 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ L_{21} & 1 & 0 & 0 \\ L_{31} & L_{32} & 1 & 0 \\ L_{41} & L_{42} & L_{43} & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 & 5 \\ 0 & 2 & 0,5 & 5 \\ 0 & 0 & 4,65 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 16,48 \end{bmatrix}$$

$$[A] = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 & 5 \\ 2L_{21} & 3L_{21}+2 & L_{21}+0,5 & 5L_{21}+5 \\ 2L_{31} & 3L_{31}+2L_{32} & (L_{31}+0,5L_{32}+4,65) & 5L_{31}+5L_{32}+7 \\ 2L_{41} & 3L_{41}+2L_{42} & (L_{41}+0,5L_{42}+4,65L_{43}) & 5L_{41}+5L_{42}+7L_{43}+16,48 \end{bmatrix}$$

Igualando:

$2L_{21} = 1 \therefore \boxed{L_{21} = 0,5}$

$3L_{31} + 2L_{32} = 2,7$

$3L_{41} + 2L_{42} = 1$

$2L_{31} = 1,4 \therefore \boxed{L_{31} = 0,7}$

$\boxed{L_{32} = 0,3}$

$\boxed{L_{42} = 2}$

$\boxed{L_{32} = 0,3}$

$2L_{41} = -2 \therefore \boxed{L_{41} = -1}$

$L_{41} + 0,5L_{42} + 4,65L_{43} = 3$

$\boxed{L_{42} = 2}$

$\boxed{L_{43} = 0,64}$

$\boxed{L_{43} = 0,64}$

~//~

Continuando

Se $[A] = [U] \cdot [L]$, então $[A] \cdot [X] = [b]$ pode ser escrito da forma:

$[L] \cdot [U] \cdot [X] = [b]$

Se chamarmos $[U] \cdot [X] =$ de $[y]$.

$\boxed{1}\ [L] \cdot [y] = [b]$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0,5 & 1 & 0 & 0 \\ 0,7 & 0,3 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 0,64 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 11 \\ 13 \\ 21,6 \\ 30 \end{bmatrix}$$

$\boxed{y_1 = 11}$

$0,5y_1 + y_2 = 13 \rightarrow \boxed{y_2 = 7,5}$

$0,7y_1 + 0,3y_2 + y_3 = 21,6 \rightarrow \boxed{y_3 = 11,65}$

$-y_1 + 2y_2 + 0,64y_3 + y_4 = 30 \rightarrow \boxed{y_4 = 16,48}$

Se descobrimos [Y], podemos encontrar a solução:

$[U] \cdot [X] = [Y]$

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 & 5 \\ 0 & 2 & 0,5 & 5 \\ 0 & 0 & 4,65 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 16,48 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 11 \\ 7,5 \\ 11,65 \\ 16,48 \end{bmatrix}$$

$$\boxed{\begin{array}{l} x_4 = 1 \\ x_3 = 1 \\ x_2 = 1 \\ x_1 = 1 \end{array}}$$

$$\boxed{\text{Solução} \begin{cases} x_1 = 1 & x_4 = 1 \\ x_2 = 1 \\ x_3 = 1 \end{cases}}$$

**5ª Questão**

$[A] \times [x] = [b]$

Usando decomposição por LU, temos:

$[A] = [L] \times [U]$, onde L é uma matriz triangular inferior e U é uma matriz triangular superior. Usando o método de resolução de Crout, é possível descobrir $[L]$ e $[U]$, e assim descobrir $[x]$.

- Lógica programada, no Octave, de Crout para a resolução desse sistema linear:

<unnamed>   Lista3Exer5_Crout.m   Questao5Lista2.m

```
%Metodo de Crout para resolucao de sistema linear
clear all; close all; clc;

A = [2, 3, 1, 5; 1, 3.5, 1, 7.5; 1.4, 2.7, 5.5, 12; -2, 1, 3, 28];
b = [11, 13, 21.6, 30]';

function [somatorio] = somatorio(final, L, U, i, j)
somatorio = 0;
  for inicio = 1 : final
    somatorio += L(i, inicio)*U(inicio, j);
  endfor
endfunction
%Primeira coluna de L e diagonal de U
for i = 1 : 4
  L(i, 1) = A(i, 1);
  U(i, i) = 1;
endfor

%Primeira Linha de U
for j = 1 : 4
  U(1, j) = A(1, j)/L(1, 1);
endfor

%Demais linhas de L e U;
for i = 2 : 4
  for j = 2 : 4
    if i >= j
      L(i, j) = A(i, j) - somatorio(j - 1, L, U, i, j);
    else
      U(i, j) = (A(i, j) - somatorio(i - 1, L, U, i, j))/L(i, i);
    endif
  endfor
endfor
fprintf("Solucao do Sistema: ")
y = L\b;
x = U\y
fprintf("Prova real (A * x = B)")
A*x
```

eol: CRLF line: 37 col: 32

- Resultado na tela de comando:

Command Window

```
Solucao do Sistema: x =

   1.00000
   1.00000
   1.00000
   1.00000

Prova real (A * x = B)ans =

   11.000
   13.000
   21.600
   30.000

>>
```

## 6ª Questão

Antes de isolar cada X do sistema, é necessário observar se cada termo $a^{ii}$ é maior que a soma do que o módulo dos outros elementos da sua linha. Por meio dessa observação, e organizando as linhas para que isso ocorra, tem-se o novo sistema:

$$\begin{aligned} -8x_1 + x_2 - 2x_3 &= -20 \\ 2x_1 - 6x_2 - x_3 &= -38 \\ -3x_1 - x_2 + 7x_3 &= -34 \end{aligned}$$

Agora, é possível calcular pelo Método de Gauss Siedel e Jacobi:

### *a*) Gauss Siedel:

- Código no Octave

ed> | Lista3Exer6_Siedel.m | Questao5Lista2.m

```
%Metodo de Gauss Siedel para sistema linear
clear all; close all; clc;
k =1; x1(1) = 0; x2(1) = 0; x3(1) = 0;

%Erro estabelecido
err = 1e-5;

%Iteracoes
for k = 2: 100
  x1(k) = (20   +x2(k-1)  -2*x3(k-1))/8; %estabelece o 1°x1
  x2(k) =(38   +2*x1(k)    -x3(k-1))/6; %Usa esse x1 no calculo de x2
  x3(k) = (-34   +3*x1(k)    +x2(k))/7; %Usa x1 e x2 no calculo de x3

  %Calculo do Erro
  e1 = abs((x1(k) - x1(k-1))/x1(k));
  e2 = abs((x2(k) - x2(k-1))/x2(k));
  e3 = abs((x3(k) - x3(k-1))/x3(k));

  if (e1 + e2 + e3) <= err
    break
  endif
endfor

%Resultado
fprintf("Solucao encontrada em %01d interacoes por Gauss Siedel:\nx1 = %f\nx2 = %f\nx3 = %f\n\n\n", k, x1(k), x2(k), x3(k))
```

- Resposta na tela de comando

Command Window

```
Solucao encontrada em 8 interacoes por Gauss Siedel:
x1 = 3.999999
x2 = 8.000000
x3 = -2.000000
```

### *b*) Jacobi

- Código no Octave

ed> | Lista3Exer6_Siedel.m | Questao5Lista2.m

```
%Metodo de Jacobi para sistema linear
clear all; close all; clc;
k =1; x1(1) = 0; x2(1) = 0; x3(1) = 0;

%Erro estabelecido
err = 1e-5;

%Iteracoes
for k = 2: 100
  x1(k) = (20   +x2(k-1)   -2*x3(k-1))/8; %estabelece o 1°x1, usando valor da iteracao anterior dos x
  x2(k) =(38   +2*x1(k-1)    -x3(k-1))/6; %estabelece o 1°x2, usando valor da iteracao anterior dos x
  x3(k) = (-34   +3*x1(k-1)    +x2(k-1))/7; %estabelece o 1°x3, usando valor da iteracao anterior dos x

  %Calculo do Erro
  e1 = abs((x1(k) - x1(k-1))/x1(k));
  e2 = abs((x2(k) - x2(k-1))/x2(k));
  e3 = abs((x3(k) - x3(k-1))/x3(k));

  if (e1 + e2 + e3) <= err
    break
  endif
endfor

%Resultado
fprintf("Solucao encontrada em %01d interacoes por Jacobi:\nx1 = %f\nx2 = %f\nx3 = %f\n\n\n", k, x1(k), x2(k), x3(k))
```

- Resposta na tela de comando

```
Command Window
Solucao encontrada em 15 interacoes por Jacobi:
x1 = 3.999999
x2 = 8.000000
x3 = -1.999998
```

**$c$) Comparando os dois resultados**

Os dois métodos convergiram para as raízes 4, 8 e -2. Como o método de Gauss Siedel atualiza constantemente os valores para usá-los no cálculo dos outros “x’s” e o método de Jacobi só atualiza após uma iteração completa, era de se esperar que este último tivesse mais iterações – o que ocorreu na realidade, 15 contra 8 iterações. Como conclusão, o método de Gauss Siedel se torna uma boa escolha pois precisa de um menor custo computacional