PROVA 1 - MÉTODOS NUMÉRICOS PARA ENGENHARIA TC

Profª Polliana Cândida Oliveira Martins

28/10/2020

ALUNO: **Roberto Gabriel Mangabeira Santana** **MATRÍCULA** **190019620**

Orientações:

- **Questões 1 e 2 devem ser resolvidas manualmente (resoluções devem ser escaneadas, fotografadas) ou então digitadas em texto corrido;**
- **Organizar as resoluções por passos bem definidos e destacar as respostas finais;**
- **A legibilidade do arquivo escaneado/fotografado é de responsabilidade do aluno;**
- **Questão 3 deve ser resolvida com auxílio do Matlab/Octave. Anexar todas as rotinas (copiar o script ao final do exercício) utilizadas para solução do problema.**
- **Organizar todas as resoluções em um arquivo único de resposta, no formato pdf e enviá-lo até as 16hrs do dia 29/10/2020.**

1ª QUESTÃO: A companhia de produtos eletrônicos ELETROGAMA produz transistores, resistores e chips de computador. Cada transistor usa quatro unidades de cobre, uma unidade de zinco e duas unidades de vidro para ser fabricado. Cada resistor usa três unidades de cobre, três unidades de zinco e uma unidade de vidro. Para o chip de computador, duas unidades de cobre, uma de zinco e três unidades de vidro são utilizados na fabricação desse item.

Componente	Cobre	Zinco	Vidro
Transistor	4	1	2
Resistor	3	3	1
Chip de computador	2	1	3

O fornecimento desses materiais varia de semana para semana. Assim, a companhia precisa determinar uma meta de produção diferente para cada semana. Por exemplo, em uma semana a quantidade total de materiais disponíveis era 960 unidades de cobre, 510 unidades de zinco e 610 unidades de vidro.

a) Determine o sistema de equações que modela essa meta de produção;
b) Utilize o Método de Gauss para calcular a quantidade de transistores, resistores e chips que podem ser fabricados na semana citada.

2ª QUESTÃO: Resolver novamente a Questão 1 (calcular a quantidade de transistores, resistores e chips que podem ser fabricados na semana citada) utilizando Fatoração LU.

3ª QUESTÃO: Considere a função polinomial abaixo indicada, a qual possui todas suas raízes reais no intervalo [-1, 1].

$$f(x) = x^5 + \frac{10}{9}x^3 + \frac{5}{21}x$$

Utilizando seus conhecimentos em software de programação Octave/Matlab e as **rotinas numéricas já trabalhadas e programadas durante as aulas**.

a) Faça uma análise gráfica dessa função e indique um intervalo que contém cada uma das cinco raízes do polinômio supracitado. Mostre aqui a função plotada no software escolhido e indique os intervalos que contem cada uma das raízes.

b) Calcule o valor da primeira raiz utilizando **o Método de Newton**;

c) Calcule a segunda raiz utilizando o **Método da Bisseção**

d) Calcule a terceira raiz utilizando **o Método da posição falsa**

e) Calcule a quinta raiz utilizando o **Método da secante.**

Utilize como critério de parada para todos os métodos o erro relativo menor que uma tolerância de 10^{-5}.

f) É possível estabelecer critérios para comparar os resultados obtidos nos itens de b) até e) acima? Em caso afirmativo, estabeleça a comparação.

Resolução:

Prova Métodos Numéricos

Roberto Gabriel Mangabeira Santana

1ª Questão

a) Transistor = x_1

Resistor = x_2

Chip = x_3

$$\boxed{\begin{bmatrix} 4 & 3 & 2 \\ 1 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 960 \\ 510 \\ 610 \end{bmatrix}}$$

b)

$$4x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 960$$
$$x_1 + 3x_2 + x_3 = 510$$
$$2x_1 + x_2 + 3x_3 = 610$$

Pivoteando:

→ segunda linha com a primeira

$$-1/4\,(4x_1 + 3x_2 + 2x_3) = 960$$

$$-x_1 - 3/4\,x_2 - 1/2\,x_3 = -240$$

2ª linha → $x_1 + 3x_2 + x_3 = 510$

$$0 + 9/4\,x_2 + x_3/2 = 270$$

↳ terceira linha com a primeira

$$-\frac{1}{2}\cdot(4x_1 + 3x_2 + 2x_3) = -1/2 \cdot 960$$

$$-2x_1 - 3/2\,x_2 - x_3 = -480$$

3ª linha → $2x_1 + x_2 + 3x_3 = 610$

$$0 - 1/2\,x_2 + 2x_3 = 130$$

↓

$$4X_1 + 3X_2 + 2X_3 = 960$$
$$0 + 9/4X_2 + 1/2X_3 = 270$$
$$0 + 1/2X_2 + 2X_3 = 130$$

Pivoteamento:

↳ 3ª Linha com segunda Linha

$$\frac{2}{9}\left(0 + \frac{9}{4}X_2 + \frac{1}{2}X_3\right) = \frac{2}{9}\,270$$

2ª linha → $0 + 1/2X_2 + 1/9\,X_3 = 60$

3ª linha → $0 - 1/2X_2 + 2X_3 = 130$

$0 \quad 0 \quad 19/9\,X_3 = 190$

$$\boxed{\begin{array}{l} 4X_1 + 3X_2 + 2X_3 = 960 \\ 0 + 9/4X_2 + 1/2X_3 = 270 \\ 0 + 0 + 19/9X_3 = 190 \end{array}}$$

$X_3 = 90$

$X_2 = 100$

$X_1 = 120$

$\frac{9}{4}X_2 + 45 = 270$

$4X_1 + 300 + 180 = 960$

Solução $\{X_1 = 120;\ X_2 = 100;\ X_3 = 90\}$

Portanto

$$\boxed{\begin{array}{ll} 120 & \text{Transistores} \\ 100 & \text{Resistores} \\ 90 & \text{Chips} \end{array}}$$

2ª Questão

O formato do sistema da questão anterior é:

$[a] \cdot [x] = [b]$

Chamemos $[a]$ por Fatoração $[L] \cdot [U]$:

$[a] = [U] \cdot [L]$, onde $[L]$ é matriz triangular inferior e $[U]$ é matriz triangular superior. Já sabemos $[U]$ – pelo método de Gauss da questão anterior – então precisamos descobrir $[L]$.

$[a] = [L] \cdot [U]$

$$\begin{bmatrix} 4 & 3 & 2 \\ 1 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ L_{21} & 1 & 0 \\ L_{31} & L_{32} & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 4 & 3 & 2 \\ 0 & 9/4 & 1/2 \\ 0 & 0 & 19/9 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 4 & 3 & 2 \\ 1 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 3 & 2 \\ 4L_{21} & 3L_{21}+9/4 & 2L_{21}+1/2 \\ 4L_{31} & 3L_{31}+9/4L_{32} & 2L_{31}+1/2L_{32}+19/9 \end{bmatrix}$$

$4L_{21} = 1 \quad \therefore \quad \boxed{L_{21} = 1/4}$

$4L_{31} = 2 \quad \therefore \quad \boxed{L_{31} = 1/2}$

$3L_{31} + 9/4 L_{32} = 1$

$\frac{9}{4} L_{32} = -\frac{1}{2} \quad \therefore \quad \boxed{L_{32} = -2/9}$

$$[L] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1/4 & 1 & 0 \\ 1/2 & -2/9 & 1 \end{bmatrix}$$

Sabendo $[L]$ e $[U]$, partimos para:

$[L] \cdot [U] \cdot [x] = [b]$

Chamamos $[U]\cdot[x]$ de $[y]$:

$[U]\cdot[X] = [y]$

Logo:

$[L]\cdot[y] = [b]$

Agora calculamos $[y]$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1/4 & 1 & 0 \\ 1/2 & -2/9 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 960 \\ 510 \\ 610 \end{bmatrix} \qquad \boxed{y_1 = 960} \quad \boxed{y_2 = 270} \quad \boxed{y_3 = 190}$$

$$\frac{1}{4}y_1 + y_2 = 510$$

$$[y] = \begin{bmatrix} 960 \\ 270 \\ 190 \end{bmatrix}$$

$$\frac{1}{2}y_1 - \frac{2}{9}y_2 + y_3 = 610$$

Sabendo $[y]$, encontramos a solução:

$[U]\cdot[X] = [y]$

$$\begin{bmatrix} 4 & 3 & 2 \\ 0 & 9/4 & 1/2 \\ 0 & 0 & 19/9 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 960 \\ 270 \\ 190 \end{bmatrix} \qquad \begin{aligned} x_3 &= 90 \\ x_2 &= 100 \\ x_1 &= 120 \end{aligned}$$

$$\frac{9x_2}{4} + 45 = 270$$

$$4x_1 + 3.100 + 2.90 = 960$$

Por L.U, a solução é

$$\boxed{x_1 = 120;\ x_2 = 100;\ x_3 = 90}$$

3ªQuestão

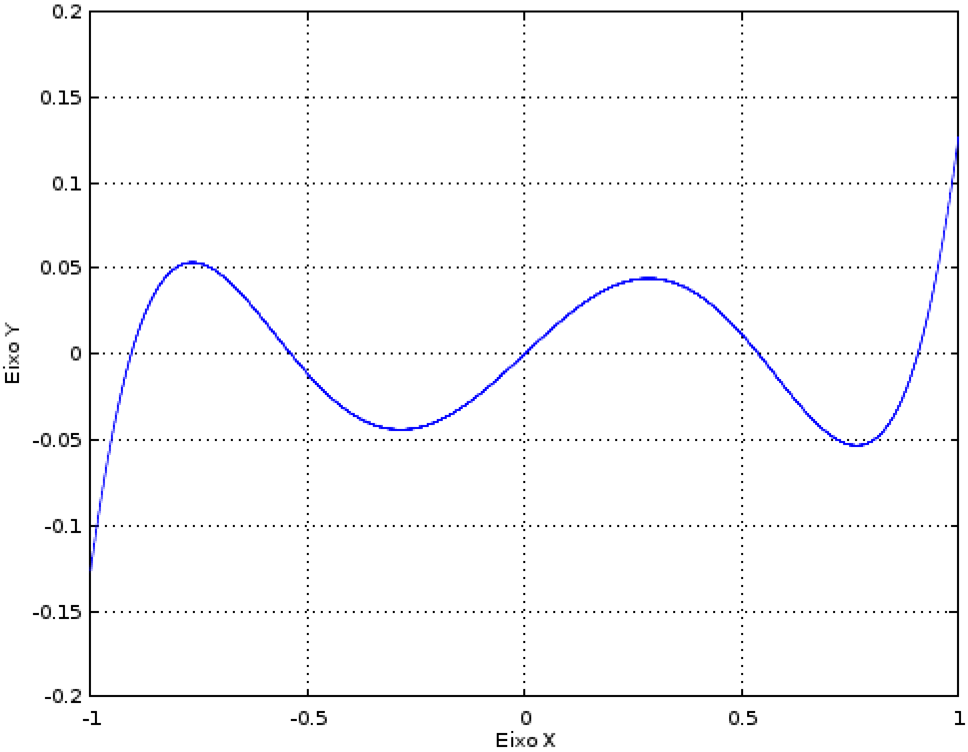
a) *Código no Octave*

```
%P1 Métodos
%Roberto Gabriel
clc; clear all; close all;

x = linspace(-1, 1, 1e5);
f = inline('x.^5 - (10/9) * x.^3 + (5/21) * x');

figure(1)
plot (x, f(x))
hold on; grid on;
xlabel("Eixo X");
ylabe("Eixo Y");
```

- Gráfico da função plotado no software Octave:



Com a observação desse gráfico é possível entender que existem 5 raízes reais para essa função.

- A primeira raiz (a menor) está entre -1 e -0.75;
- A segunda raiz está, também, entre -1 e -0.5, mas mais precisamente, entre -0.75 e -0.5;
- A terceira raiz está entre -0.5 e 0.5;
- A quarta raiz está entre 0.5 e 1;
- A quinta raiz está, também, entre 0.5 e 1, mas mais precisamente, entre 0.75 e 1;

b) Calculando o valor da primeira Raiz usando método de Newton:

Código no Octave:

```
%P1 Métodos
%Roberto Gabriel
clc; clear all; close all;

f = inline('x.^5 - (10/9) * x.^3 + (5/21) * x');
d_f = inline('5*x.^4 - (10/3)*x.^2 + (5/21)');

%TOLERANCIA MAXIMA
err = 1e-5;

%VALOR INICIAL
a = -1;

anterior = 200;

% METODO DE NEWTON
for i = 1 : 100
  xi = a - f(a)/d_f(a);
  if abs((xi - a)/xi) < err
    break
  endif
  a = xi;
endfor

fprintf("Quantidade de iteracoes pelo metodo de Newton: %d\nValor da PRIMEIRA RAIZ: %.3f\n\n\n", i, xi)
```

Resultado na console:

```
Command Window
Quantidade de iteracoes pelo metodo de Newton: 5
Valor da PRIMEIRA RAIZ: -0.906
```

c) Calculo da segunda raiz usando Método da Bisseção:

Código no Octave:

```
%P1 Métodos
%Roberto Gabriel
clc; clear all; close all;

f = inline('x.^5 - (10/9) * x.^3 + (5/21) * x');

%TOLERANCIA MAXIMA
err = 1e-5;

%Intervalos
a = -0.75;
b = -0.5;

anterior = 200;

% METODO DA BISSECAO
for (i = 1 : 100)
  xi = (a + b)/2;
  if (f(a)*f(xi) < 0)
    b = xi;
  elseif (f(b)*f(xi) < 0)
    a = xi;
  endif
  if abs((xi - anterior)/xi) < err
     break;
  endif;
  anterior = xi;
endfor

fprintf("Quantidade de iteracoes pelo metodo da bissecao: %d\nValor da SEGUNDA RAIZ: %.3f\n\n\n", i, xi)
```

Resultado na Console:

```
Command Window
Quantidade de iteracoes pelo metodo da bissecao: 16
Valor da SEGUNDA RAIZ: -0.538
```

d) Calculo da terceira raiz usando Método da Posição Falsa:

Código no Octave:

```
%P1 Métodos
%Roberto Gabriel
clc; clear all; close all;

f = inline('x.^5 - (10/9) * x.^3 + (5/21) * x');

%TOLERANCIA MAXIMA
err = 1e-5;

%Intervalos
a = -0.5;
b = 0.5;

anterior = 200;

% METODO DA POSICAO FALSA
for (t = 1 : 100)
  xi = (a*f(b) - b*(f(a)))/(f(b) - f(a));
  if (f(a)*f(xi) < 0)
   b = xi;
  endif
  if (f(b)*f(xi) < 0)
   a = xi;
  endif
  % PARA NAO OCORRER DIVISAO POR ZERO
  if xi == 0
    if abs(xi - anterior) < err
      break;
    endif
  % CALCULO DO ERRO RELATIVO
  else
    if abs((xi - anterior)/xi) < err
      break
    endif;
  endif
  anterior = xi;
endfor
fprintf("Quantidade de iteracoes pelo metodo da posicao falsa: %d\nValor da TERCEIRA RAIZ: %.3f\n\n\n", t, xi)
```

Resultado na Console:

```
Command Window
Quantidade de iteracoes pelo metodo da posicao falsa: 2
Valor da TERCEIRA RAIZ: 0.000
```

e) Calculo da quinta raiz usando Método da Secante:

Código no Octave

```
%P1 Métodos
%Roberto Gabriel
clc; clear all; close all;

f = inline('x.^5 - (10/9) * x.^3 + (5/21) * x');

%TOLERANCIA MAXIMA
err = 1e-5;

%INTERVALOS
a = 0.75;
b = 1;


% METODO DA SECANTE
for i = 1 : 100
  xi = b - (f(b)*(a-b))/(f(a) - f(b));
  % CALCULO DO ERRO RELATIVO
  if abs((xi - b)/b) < err
    break;
  endif
  a = b;
  b = xi;
endfor

fprintf("Quantidade de iteracoes pelo metodo da Secante: %d\nValor da QUINTA RAIZ RAIZ: %.3f\n\n\n", i, xi)
```

Resultado na Console

```
Command Window
Quantidade de iteracoes pelo metodo da Secante: 8
Valor da QUINTA RAIZ RAIZ: 0.906
```

f) Sim. É possível comparar as soluções encontradas, mesmo que por métodos diferentes, usando a quantidade de iterações de cada uma. Pode-se construir a seguinte tabela:

Raiz	Método	Iterações
-0,906	Newton	5
-0,528	Bisseção	16
0,000	Posição Falsa	2
0,906	Secante	8

Observando pelas iterações, conclui-se que a o método da Posição Falsa foi o que convergiu mais rápido. O método da Bisseção foi o que convergiu mais lentamente, o que é de se esperar desse método. Os métodos de Newton e Secante tiveram uma conversão mediana/lenta, estando nesse meio termo.

Script do Plot do gráfico:

```
%P1 Métodos
%Roberto Gabriel
clc; clear all; close all;

x = linspace(-1, 1, 1e5);
f = inline('x.^5 - (10/9) * x.^3 + (5/21) * x');

figure(1)
plot (x, f(x))
hold on; grid on;
xlabel("Eixo X");
ylabe("Eixo Y");
```

Script do Método de Newton:

```
%P1 Métodos Roberto Gabriel
clc; clear all; close all;

f = inline('x.^5 - (10/9) * x.^3 + (5/21) * x');
d_f = inline('5*x.^4 - (10/3)*x.^2 + (5/21)');

%TOLERANCIA MAXIMA
err = 1e-5;

%VALOR INICIAL
a = -1;

anterior = 200;

% METODO DE NEWTON
for i = 1 : 100
  xi = a - f(a)/d_f(a);
  if abs((xi - a)/xi) < err
    break
  endif
  a = xi;
endfor
fprintf("Quantidade de iteracoes pelo metodo de Newton: %d\nValor da PRIMEIRA RAIZ: %.3f\n\n\n", i, xi)
```

Script Método da Bisseção

```
%P1 Métodos
%Roberto Gabriel
clc; clear all; close all;

f = inline('x.^5 - (10/9) * x.^3 + (5/21) * x');

%TOLERANCIA MAXIMA
err = 1e-5;

%INTERVALOS
a = -0.75;
b = -0.5;

anterior = 200;

% METODO DA BISSECAO
for (i = 1 : 100)
  xi = (a + b)/2;
  if (f(a)*f(xi) < 0)
    b = xi;
  elseif (f(b)*f(xi) < 0)
    a = xi;
  endif
  if abs((xi - anterior)/xi) < err
    break;
  endif;
  anterior = xi;
endfor

fprintf("Quantidade de iteracoes pelo metodo da bissecao: %d\nValor da SEGUNDA RAIZ: %.3f\n\n\n", i, xi)
```

Script Método da Posição Falsa

```
%P1 Métodos Roberto Gabriel
clc; clear all; close all;

f = inline('x.^5 - (10/9) * x.^3 + (5/21) * x');

%TOLERANCIA MAXIMA
err = 1e-5;

%INTERVALOS
a = -0.5;
b = 0.5;

anterior = 200;

% METODO DA POSICAO FALSA
for (t = 1 : 100)
  xi = (a*f(b) - b*(f(a)))/(f(b) - f(a));
  if (f(a)*f(xi) < 0)
   b = xi;
  endif
  if (f(b)*f(xi) < 0)
   a = xi;
  endif
  % PARA NAO OCORRER DIVISAO POR ZERO
  if xi == 0
    if abs(xi - anterior) < err
      break
```

```
  endif
 else
 % CALCULO ERRO RELATIVO
  if abs((xi - anterior)/xi) < err
   break
  endif
 endif
 anterior = xi;
endfor

fprintf("Quantidade de iteracoes pelo metodo da posicao falsa: %d\nValor da TERCEIRA RAIZ: %.3f\n\n\n", t, xi)
```

Script Método da Secante

```
%P1 Métodos Roberto Gabriel
clc; clear all; close all;

f = inline('x.^5 - (10/9) * x.^3 + (5/21) * x');

%TOLERANCIA MAXIMA
err = 1e-5;

%INTERVALOS
a = 0.75;
b = 1;

% METODO DA SECANTE
for i = 1 : 100
 xi = b - (f(b)*(a-b))/(f(a) - f(b));
 % CALCULO DO ERRO RELATIVO
 if abs((xi - b)/b) < err
  break;
 endif
 a = b;
 b = xi;
endfor

fprintf("Quantidade de iteracoes pelo metodo da Secante: %d\nValor da QUINTA RAIZ RAIZ: %.3f\n\n\n", i, xi)
```