Matemática Discreta 1

Operações Lógicas sobre Proposições

AULA 2

Professor: Luiz Augusto Laranjeira
luiz.laranjeira@gmail.com

Operações sobre Proposições

- Negação
- Conjunção (E)
- Disjunção (OU)
- Disjunção Exclusiva (XOR)
- Condicional
- Bicondicional

Negação

- Símbolo $\sim p$, p', $\overline{p}$ ou $\neg p$
- A negação de uma proposição p é representada por "não p", cujo valor lógico é a verdade (V) quando p é falsa e a falsidade (F) quando p é verdadeira.
- Não Não = Sim
- Ex.: João não é gordo = João é magro.

Negação

- Tabela verdade

p	**~p**
V	F
F	V

$\sim V = F, \sim F = V$

e $\quad \mathbb{V}(\sim p) = \sim \mathbb{V}(p)$

Negação

- Vide exemplos página 18 do livro texto (Iniciação à Lógica Matemática – Edgard A. Filho).

Conjunção

- A conjunção de duas proposições p e q representada por “p e q”, cujo valor lógico é a verdade (V) quando as proposições p e q são ambas verdadeiras e a falsidade (F) nos demais casos
- Símbolo:

$p \bullet q$ ou $p \wedge q$ (onde lê-se p e q)

Conjunção

- Tabela verdade

p	q	p . q
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	F

Ou seja:

V • V = V, V • F = F, F • V = F, F • F = F

e $\mathbb{v}(p \bullet q) = \mathbb{v}(p) \bullet \mathbb{v}(q)$

Conjunção

- Olhar exemplos do LT página 19.

Disjunção

- Chama-se disjunção de duas proposições p e q a proposição representada por “p ou q”, cujo valor lógico é a verdade (V) quando ao menos uma das proposições p e q é verdadeira e a falsidade (F) quando as proposições p e q são ambas falsas.

Disjunção

- Símbolo: $p + q$ ou $p \vee q$
- Tabela verdade

p	q	p + q
V	V	V
V	F	V
F	V	V
F	F	F

Onde: V + V = V, V + F = V,
F + V = V, F + F = F

e $\mathbb{V}(p + q) = \mathbb{V}(p) + \mathbb{V}(q)$

Disjunção

- Vide exemplos do LT pág. 20.

Disjunção Exclusiva

- “p ou q, mas não ambos”, cujo valor lógico é a verdade (V) somente quando p é verdadeira ou q é verdadeira, mas não quando p e q são ambas verdadeiras, e a falsidade (F) quando p e q são ambas verdadeiras ou ambas falsas.

Disjunção exclusiva

- Símbolo: $p \oplus q$
- Tabela verdade

p	q	$p \oplus q$
V	V	F
V	F	V
F	V	V
F	F	F

Onde: $V \oplus V = F$, $V \oplus F = V$, $F \oplus V = V$, $F \oplus F = F$

e $\mathbb{v}(p \oplus q) = \mathbb{v}(p) \oplus \mathbb{v}(q)$ (ou, informalmente, $\mathbb{v}(p) \mathrel{!}= \mathbb{v}(q)$)

$$\boxed{p \oplus q \equiv (p \bullet q') + (p' \bullet q)}$$

Disjunção X Disjunção Exclusiva

P: Maria é médica ou[1] escritora

- Maria pode ser médica e escritora ao mesmo tempo

Q: Jorge é mineiro ou[2] carioca

- Jorge não pode ser mineiro e carioca ao mesmo tempo

- (1) ou inclusivo
- (2) ou exclusivo

Disjunção X Disjunção Exclusiva

Não confundir

Disjunção	Disjunção Exclusiva
$p + q$	$p \oplus q$
$V + V = V$	$V \oplus V = F$

Condicional

- Chama-se proposição condicional uma proposição representada por “se p então q”, cujo valor lógico é a falsidade (F) no caso em que p é verdadeira e q é falsa e a verdade(V) nos demais casos.

- Símbolo: $p \rightarrow q$
- Lê-se “p condicional q”, *e não “p implica q”*

Condicional

- Pode-se dizer também:
  - p é condição suficiente para q
  - q é condição necessária para p

- Diz-se que p é o antecedente e q o consequente.

- **Cuidado!**

  "p implica q" tem outro significado e é expresso pelo símbolo $\Rightarrow$.

  (será visto em uma das próximas aulas)

Condicional

- Tabela verdade

p	q	$p \to q$
V	V	V
V	F	F
F	V	V
F	F	V

Onde: $V \to V = V$, $V \to F = F$,

$F \to V = V$, $F \to F = V$

e $\mathbb{V}(p \to q) = \mathbb{V}(p) \to \mathbb{V}(q)$

Condicional

- **Cuidado**
- Uma condicional $p \rightarrow q$ não afirma tão somente que o consequente q se deduz ou é consequência do antecedente p.
- De forma mais geral, o condicional é uma relação entre os valores lógicos do antecedente e do consequente de acordo com sua Tabela Verdade.

Condicional

- Vide exemplos da página 23 do LT.

Exercício 1

Mostrar que $A \rightarrow B$ é equivalente a $\sim A + B$

Exercício 1

Mostrar que $A \rightarrow B$ é equivalente a $\sim A + B$

A	~A	B	~A + B
V		V	
V		F	
F		V	
F		F	

Exercício 1

Mostrar que $A \rightarrow B$ é equivalente a $\sim A + B$

A	~A	B	~A + B
V	F	V	
V	F	F	
F	V	V	
F	V	F	

Exercício 1

Mostrar que $A \rightarrow B$ é equivalente a $\sim A + B$

A	~A	B	~A + B
V	F	V	V
V	F	F	F
F	V	V	V
F	V	F	V

Exercício 1

Mostrar que $A \rightarrow B$ é equivalente a $\sim A + B$

A	~A	B	~A + B	$A \rightarrow B$
V	F	V	V	
V	F	F	F	
F	V	V	V	
F	V	F	V	

Exercício 1

Mostrar que $A \rightarrow B$ é equivalente a $\sim A + B$

A	**~A**	**B**	**~A + B**	**$A \rightarrow B$**
V	F	V	V	V
V	F	F	F	F
F	V	V	V	V
F	V	F	V	V

$$A \rightarrow B \equiv \sim A + B$$

Bicondicional

- Chama-se proposição bicondicional uma proposição representada por “p se e somente se q”, cujo valor lógico é a verdade (V) quando p e q são ambas verdadeiras ou ambas falsas, e a falsidade (F) nos demais casos.
- Símbolo: $p \leftrightarrow q$

Bicondicional

- Onde lê-se:
  - p é condição necessária e suficiente para q
  - q é condição necessária e suficiente para p

Bicondicional

- Tabela verdade

p	q	p ↔ q
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	V

$p \leftrightarrow q$ é o mesmo que $p \equiv q$

Onde: $V \leftrightarrow V = V$, $V \leftrightarrow F = F$,

$F \leftrightarrow V = F$, $F \leftrightarrow F = V$

e $\mathbb{v}(p \leftrightarrow q) = \mathbb{v}(p) \leftrightarrow \mathbb{v}(q)$

Bicondicional

- A bicondicional $p \leftrightarrow q$ é verdadeira quando também o são as condicionais:

$$p \longrightarrow q \qquad \text{e} \qquad q \longrightarrow p$$

$$(p \leftrightarrow q) \equiv p \longrightarrow q \bullet q \longrightarrow p$$

$$(p \leftrightarrow q) \equiv (p' + q) \bullet (p + q')$$

$$(p \leftrightarrow q)' \equiv (p \bullet q') + (p' \bullet q) \quad \text{ou} \quad (p \leftrightarrow q)' \equiv p \oplus q$$

Tabelas-Verdade de Proposições Compostas

- É possivel construir a tabela-verdade de toda proposição composta a partir dos valores lógicos das proposições simples componentes.
- Dada uma proposição composta com n proposições simples sua tabela verdade terá 2^n linhas:

$$N_L = A_{n,2} = 2^n$$

Exercício 2

Construir a tabela verdade da proposição:

$$P(p, q) = \sim(p \bullet \sim q)$$

Exercício 2

Construir a tabela verdade da proposição:

$$P(p, q) = \sim(p \bullet \sim q) = \sim p + q = p \rightarrow q$$

p	q	~q	p ● ~q	~(p ● ~q)
V	V	F	F	V
V	F	V	V	F
F	V	F	F	V
F	F	V	F	V

Exercício 3

Construir a tabela verdade da proposição:

$$P(p, q) = \sim(p + q) \bullet (q \rightarrow p)$$

Exercício 3

Construir a tabela verdade da proposição:

$$P(p, q) = \sim(p + q) \bullet (q \rightarrow p)$$

p	q	$p + q$	$\sim(p + q)$	$q \rightarrow p$	$\sim(p + q) \bullet (q \rightarrow p)$
V	V	V	F	V	F
V	F	V	F	V	F
F	V	V	F	F	F
F	F	F	V	V	V

Exercício 4

Sejam as proposições

p: Cláudio fala inglês e q: Cláudio fala alemão.

Traduzir as seguintes proposições em linguagem simbólica para a linguagem corrente:

$p + q$

$p \,.\, q$

$p \,.\, q'$

$p' .\, q'$

$(p')'$

$(p'.q')'$

Exercício 4 (solução)

Sejam as proposições

p: Cláudio fala inglês e q: Cláudio fala alemão.

Traduzir as seguintes proposições em linguagem simbólica para a linguagem corrente:

$p + q$: Cláudio fala inglês ou alemão

$p \, . \, q$:

$p \, . \, q'$:

$p' . \, q'$:

$(p')'$:

$(p'.q')'$:

Exercício 4 (solução)

Sejam as proposições

p: Cláudio fala inglês e q: Cláudio fala alemão.

Traduzir as seguintes proposições em linguagem simbólica para a linguagem corrente:

$p + q$: Cláudio fala inglês ou alemão

$p \,.\, q$: Cláudio fala inglês e alemão

$p \,.\, q'$:

$p' . \, q'$:

$(p')'$:

$(p'.q')'$:

Exercício 4 (solução)

Sejam as proposições

p: Cláudio fala inglês e q: Cláudio fala alemão.

Traduzir as seguintes proposições em linguagem simbólica para a linguagem corrente:

$p + q$: Cláudio fala inglês ou alemão

$p \,.\, q$: Cláudio fala inglês e alemão

$p \,.\, q'$: Cláudio fala inglês mas não fala alemão

$p'.\, q'$:

$(p')'$:

$(p'.q')'$:

Exercício 4 (solução)

Sejam as proposições

p: Cláudio fala inglês e q: Cláudio fala alemão.

Traduzir as seguintes proposições em linguagem simbólica para a linguagem corrente:

$p + q$: Cláudio fala inglês ou alemão

$p \, . \, q$: Cláudio fala inglês e alemão

$p \, . \, q'$: Cláudio fala inglês mas não fala alemão

$p' . \, q'$: Cláudio não fala nem inglês nem alemão

$(p')'$:

$(p'.q')'$:

Exercício 4 (solução)

Sejam as proposições

p: Cláudio fala inglês e q: Cláudio fala alemão.

Traduzir as seguintes proposições em linguagem simbólica para a linguagem corrente:

$p + q$: Cláudio fala inglês ou alemão

$p \,.\, q$: Cláudio fala inglês e alemão

$p \,.\, q'$: Cláudio fala inglês mas não fala alemão

$p' .\, q'$: Cláudio não fala nem inglês nem alemão

$(p')'$: Não é verdade que Cláudio não fala inglês

$(p'.q')'$:

Exercício 4 (solução)

Sejam as proposições

p: Cláudio fala inglês e q: Cláudio fala alemão.

Traduzir as seguintes proposições em linguagem simbólica para a linguagem corrente:

$p + q$: Cláudio fala inglês ou alemão

$p \,.\, q$: Cláudio fala inglês e alemão

$p \,.\, q'$: Cláudio fala inglês mas não fala alemão

$p' . \, q'$: Cláudio não fala nem inglês nem alemão

$(p')'$: Não é verdade que Cláudio não fala inglês

$(p'.q')'$: Não é verdade que Cláudio não fala nem inglês nem alemão

Exercício 5

Sejam as proposições

p: Marcos é alto   e   q: Marcos é elegante.

Traduzir as seguintes proposições em linguagem corrente para a linguagem simbólica:

Marcos é alto e elegante

Marcos é alto, mas não é elegante

Não é verdade que Marcos é baixo ou elegante

Marcos não é nem alto nem elegante

Marcos é alto ou é baixo e elegante

É falso que Marcos é baixo ou que não é elegante

Exercício 5 (solução)

Sejam as proposições

p: Marcos é alto e q: Marcos é elegante.

Traduzir as seguintes proposições em linguagem corrente para a linguagem simbólica:

Marcos é alto e elegante: p . q

Marcos é alto, mas não é elegante:

Não é verdade que Marcos é baixo ou elegante:

Marcos não é nem alto nem elegante:

Marcos é alto ou é baixo e elegante:

É falso que Marcos é baixo ou que não é elegante:

Exercício 5 (solução)

Sejam as proposições

p: Marcos é alto e q: Marcos é elegante.

Traduzir as seguintes proposições em linguagem corrente para a linguagem simbólica:

Marcos é alto e elegante: $p . q$

Marcos é alto, mas não é elegante: $p . q'$

Não é verdade que Marcos é baixo ou elegante:

Marcos não é nem alto nem elegante:

Marcos é alto ou é baixo e elegante:

É falso que Marcos é baixo ou que não é elegante:

Exercício 5 (solução)

Sejam as proposições

p: Marcos é alto e q: Marcos é elegante.

Traduzir as seguintes proposições em linguagem corrente para a linguagem simbólica:

Marcos é alto e elegante: $p \,.\, q$

Marcos é alto, mas não é elegante: $p \,.\, q'$

Não é verdade que Marcos é baixo ou elegante: $(p' + q)'$

Marcos não é nem alto nem elegante:

Marcos é alto ou é baixo e elegante:

É falso que Marcos é baixo ou que não é elegante:

Exercício 5 (solução)

Sejam as proposições

p: Marcos é alto e q: Marcos é elegante.

Traduzir as seguintes proposições em linguagem corrente para a linguagem simbólica:

Marcos é alto e elegante: $p \,.\, q$

Marcos é alto, mas não é elegante: $p \,.\, q'$

Não é verdade que Marcos é baixo ou elegante: $(p' + q)'$

Marcos não é nem alto nem elegante: $p' \,.\, q'$

Marcos é alto ou é baixo e elegante:

É falso que Marcos é baixo ou que não é elegante:

Exercício 5 (solução)

Sejam as proposições

p: Marcos é alto e q: Marcos é elegante.

Traduzir as seguintes proposições em linguagem corrente para a linguagem simbólica:

Marcos é alto e elegante: $p . q$

Marcos é alto, mas não é elegante: $p . q'$

Não é verdade que Marcos é baixo ou elegante: $(p' + q)'$

Marcos não é nem alto nem elegante: $p' . q'$

Marcos é alto ou é baixo e elegante: $p + (p'. q)$

É falso que Marcos é baixo ou que não é elegante:

Exercício 5 (solução)

Sejam as proposições

p: Marcos é alto e q: Marcos é elegante.

Traduzir as seguintes proposições em linguagem corrente para a linguagem simbólica:

Marcos é alto e elegante: $p \,.\, q$

Marcos é alto, mas não é elegante: $p \,.\, q'$

Não é verdade que Marcos é baixo ou elegante: $(p' + q)'$

Marcos não é nem alto nem elegante: $p' \,.\, q'$

Marcos é alto ou é baixo e elegante: $p + (p' \,.\, q)$

É falso que Marcos é baixo ou que não é elegante: $(p' + q')'$

Tautologia

- É toda proposição composta cujo valor lógico é sempre V.
- Exemplos: $p + \sim p = V$

  $\sim (p \bullet \sim p) = V$
- Somente simplificar um expressão não é tautologia. Deve-se chegar ao valor lógico V.

Exercício 6

Mostrar que a proposição seguinte é uma tautologia:

$$A \oplus B \leftrightarrow (A \leftrightarrow B)'$$

Exercício 6 (solução 1)

Mostrar usando a tabela-verdade que a proposição seguinte é uma tautologia:

$$A \oplus B \leftrightarrow (A \leftrightarrow B)'$$

Exercício 6 (solução 1)

Mostrar usando a tabela-verdade que a proposição seguinte é uma tautologia:

$$A \oplus B \leftrightarrow (A \leftrightarrow B)'$$

A	B	$A \oplus B$	$A \leftrightarrow B$	$(A \leftrightarrow B)'$	$A \oplus B \leftrightarrow (A \leftrightarrow B)'$
V	V	F	V	F	V
V	F	V	F	V	V
F	V	V	F	V	V
F	F	F	V	F	V

Exercício 6 (solução 2)

Demonstre analiticamente que a proposição seguinte é uma tautologia: $A \oplus B \leftrightarrow (A \leftrightarrow B)'$

Exercício 6 (solução 2)

Demonstre analiticamente que a proposição seguinte é uma tautologia: $A \oplus B \leftrightarrow (A \leftrightarrow B)'$

De sua tabela verdade havíamos inferido que:

$$A \oplus B \equiv (A \bullet B') + (A' \bullet B) \equiv C$$

Exercício 6 (solução 2)

Demonstre analiticamente que a proposição seguinte é uma tautologia: $A \oplus B \leftrightarrow (A \leftrightarrow B)'$

De sua tabela verdade havíamos inferido que:

$$A \oplus B \equiv (A \bullet B') + (A' \bullet B) \equiv C$$

Vamos mostrar também que:

$$(A \leftrightarrow B)' \equiv (A \bullet B') + (A' \bullet B) \equiv C$$

Exercício 6 (solução 2)

Demonstre analiticamente que a proposição seguinte é uma tautologia: $A \oplus B \leftrightarrow (A \leftrightarrow B)'$

De sua tabela verdade havíamos inferido que:

$$A \oplus B \equiv (A \bullet B') + (A' \bullet B) \equiv C$$

Vamos mostrar também que:

$$(A \leftrightarrow B)' \equiv (A \bullet B') + (A' \bullet B) \equiv C$$

Começamos lembrando que:

$$A \leftrightarrow B \equiv (A \rightarrow B) \bullet (B \rightarrow A) \equiv (A' + B) \bullet (B' + A)$$

Exercício 6 (solução 2)

Demonstre analiticamente que a proposição seguinte é uma tautologia: $A \oplus B \leftrightarrow (A \leftrightarrow B)'$

De sua tabela verdade havíamos inferido que:

$$A \oplus B \equiv (A \bullet B') + (A' \bullet B) \equiv C$$

Vamos mostrar também que:

$$(A \leftrightarrow B)' \equiv (A \bullet B') + (A' \bullet B) \equiv C$$

Começamos lembrando que:

$$A \leftrightarrow B \equiv (A \rightarrow B) \bullet (B \rightarrow A) \equiv (A' + B) \bullet (B' + A)$$

Daí vem que : $(A \leftrightarrow B)' \equiv (A \bullet B') + (A' \bullet B) \equiv C$

Exercício 6 (solução 2)

Demonstre analiticamente que a proposição seguinte é uma tautologia: $A \oplus B \leftrightarrow (A \leftrightarrow B)'$

De sua tabela verdade havíamos inferido que:

$$A \oplus B \;\equiv\; (A \bullet B') \;+\; (A' \bullet B) \;\equiv C$$

Vamos mostrar também que:

$$(A \leftrightarrow B)' \equiv (A \bullet B') \;+\; (A' \bullet B) \equiv C$$

Começamos lembrando que:

$$A \leftrightarrow B \equiv (A \rightarrow B) \bullet (B \rightarrow A) \equiv (A' + B) \bullet (B' + A)$$

Daí vem que : $(A \leftrightarrow B)' \equiv (A \bullet B') + (A' \bullet B) \equiv C$

E a expressão inicial se reduz a:

$C \leftrightarrow C \equiv (C \rightarrow C) \bullet (C \rightarrow C) \equiv (C \rightarrow C) \equiv (C' + C) \equiv V$ **CQD**

Regra da Simplificação

Mostrar que: $p + p' \bullet q \equiv p + q$

$p' + p \bullet q \equiv p' + q$

p	q	$p + q$	p'	$p' \bullet q$	$p + p' \bullet q$
V	V	V	F	F	V
V	F	V	F	F	V
F	V	V	V	V	V
F	F	F	V	F	F

Exercício 7

Mostrar que a proposição seguinte é uma tautologia:

$$(p \rightarrow q) \rightarrow (p \bullet r \rightarrow q \bullet r)$$

Exercício 7

Mostrar que a proposição seguinte é uma tautologia:

$$(p \rightarrow q) \rightarrow (p \bullet r \rightarrow q \bullet r)$$

$(p' + q) \rightarrow (p' + r') + q \bullet r$

$(p' + q)' + (p' + r') + q \bullet r$

$p.q' + p' + r' + q \bullet r$ (utilizando a regra da simplificação)

$p' + q' + r' + q$

$p' + r' + q' + q$

$p' + r' +$ **V**

V

Exercício 8

- Mostrar que $A + B$ é equivalente a $(A' \bullet B')'$
- Mostrar que $A \rightarrow B$ é equivalente a $(A \bullet B')'$

Este exercício demonstra que para toda proposição composta existe uma proposição equivalente formada apenas pelos conectivos de conjunção e negação.

Exercício 9

- O conetivo binário ⊥ é definido por:

p	q	p ⊥ q
V	V	F
V	F	F
F	V	F
F	F	V

$p \perp q \equiv \sim(p + q)$

- Mostrar que qualquer proposição pode ser expressa em termos deste conectivo (usar o resultado do exercício anterior).

Exercício 9 (solução)

- O conetivo binário $\downarrow$ é definido por:
- Mostrar que qualquer proposição pode ser expressa em termos deste conectivo (usar o resultado do exercício anterior).

p	q	p $\downarrow$ q
V	V	F
V	F	F
F	V	F
F	F	V

A prova consiste em se mostrar que os conetivos de negação e de conjunção (~ e ∧) podem ser expressos em função do conetivo $\downarrow$

a) $p \downarrow p \equiv \sim p$

b) $p \downarrow q \equiv \sim(p + q)$

$\sim p \downarrow \sim q \equiv \sim(\sim p + \sim q) \equiv p \wedge q \equiv (p \downarrow p) \downarrow (q \downarrow q)$

Exercício 10

Provar que existem proposições que não podem ser expressas somente em termos dos conectivos $\rightarrow$ e $+$.

Exercício 10 (solução)

- Provar que existem proposições que não podem ser expressas somente em termos dos conectivos $\rightarrow$ e $+$.

A prova consiste em se mostrar que não há meios de se expressar a operação de negação com estes dois conectivos:

$p \rightarrow p = \sim p + p = V$

$p + p = p$

$\sim p$ não pode ser expresso em termos de p e $\rightarrow$

$\sim p$ não pode ser expresso em termos de p e $+$