Matemática Discreta 1

Regras de Inferência e Argumentos

AULA 5

Professor: Luiz Augusto Laranjeira

luiz.laranjeira@gmail.com

Implicação

Regras de Inferência

Argumentos

Implicação Lógica

- $P(p,q,r,\ldots) \Rightarrow Q(p,q,r,\ldots)$
- Na tabela verdade de P e Q não acontece uma linha (em função de p, q e r) em que P tenha valor V e Q tenha valor F.

Recordando ...

Nota 2

Os símbolos $\rightarrow$ e => são distintos:

1) O símbolo $\rightarrow$ é de ***operação lógica***

2) O símbolo => é de ***relação***, pois estabelece que a condicional

$$P(p,q,r,...) \rightarrow Q(p,q,r,...)$$

é tautológica.

Teorema 2

A proposição P(p,q,r,...) implica a proposição Q(p,q,r,...), isto é

$$P(p,q,r,...) \Rightarrow Q(p,q,r,...)$$

Se e somente se a condicional

$$P(p,q,r,...) \rightarrow Q(p,q,r,...)$$

é tautológica.

<u>Definição</u>:

Regras de Inferência são *implicações lógicas* utilizadas para executar os passos de uma dedução ou demonstração.

Exemplo 1

p	q	p + q	p → p+q	q → p+q
V	V	V	V	V
V	F	V	V	V
F	V	V	V	V
F	F	F	V	V

Regras de Inferência

Adição: $p \Rightarrow p+q$ e $q \Rightarrow p+q$

Exemplo 1 (cont.)

Implicação

Regras de Inferência

Argumentos

p	q	p • q	p • q → p		p • q → q
V	V	V	V		V
V	F	F	V		V
F	V	F	V		V
F	F	F	V		V

Regras de Inferência

Simplificação: $p \bullet q \Rightarrow p$ e $p \bullet q \Rightarrow q$

Exemplo 1 (cont.)

p	q	p • q	p + q	p ↔ q	p • q → p+q	p • q → p↔q
V	V	V	V	V	V	V
V	F	F	V	F	V	V
F	V	F	V	F	V	V
F	F	F	V	F	V	V

Regras de Inferência

$$p \bullet q \Rightarrow p + q$$
$$p \bullet q \Rightarrow p \leftrightarrow q$$

Exemplo 2

p	q	((p + q)	•	~p)	→	q
V	V	V	F	F	V	V
V	F	V	F	F	V	F
F	V	V	V	V	V	V
F	F	F	F	V	V	F

Regra do Silogismo Disjuntivo (1)

$$(p + q) \bullet \sim p \Rightarrow q$$

$$p \bullet \sim p \;+\; q \bullet \sim p = q \bullet \sim p$$

Implicação

Regras de Inferência

Argumentos

Exemplo 2 (cont.)

p	q	((p + q)	•	~q)	→	p
V	V	V	F	F	V	V
V	F	V	V	V	V	V
F	V	V	F	F	V	F
F	F	F	F	V	V	F

Regra do Silogismo Disjuntivo (2)

$$(p + q) \bullet {\sim}q \Rightarrow p$$

Exemplo 3

p	q	((p + q)	•	~p)	→	p + q
V	V	V	F	F	V	V
V	F	V	F	F	V	V
F	V	V	V	V	V	V
F	F	F	F	V	V	F

Regra de Simplificação (aplicação)

$$(p + q) \bullet \sim p \Rightarrow (p + q)$$

Exemplo 3 (cont.)

p	q	((p + q)	•	~p)	→	~p
V	V	V	F	F	V	F
V	F	V	F	F	V	F
F	V	V	V	V	V	V
F	F	F	F	V	V	V

Regra de Simplificação (aplicação)

$$(p + q) \bullet \sim p \Rightarrow \sim p$$

Implicação

Regras de Inferência

Argumentos

Exemplo 4

p	q	((p → q)	•	p)	→	q
V	V	V	V	V	V	V
V	F	F	F	V	V	F
F	V	V	F	F	V	V
F	F	V	F	F	V	F

Regra Modus Ponens (Modo que afirma)

$$(p \rightarrow q) \bullet p \Rightarrow q$$

Exemplo 5

p	q	$((p \rightarrow q)$	$\bullet$	$\sim q)$	$\rightarrow$	$\sim p$
V	V	V	F	F	V	F
V	F	F	F	V	V	F
F	V	V	F	F	V	V
F	F	V	V	V	V	V

Regra Modus Tollens (Modo que nega)

$$(p \rightarrow q) \bullet \sim q \Rightarrow \sim p$$

$$(\sim q \rightarrow \sim p) \bullet \sim q \Rightarrow \sim p$$

Implicação

Regras de Inferência

Argumentos

Exemplo 5 (cont.)

p	q	(~p	→	(p → q))
V	V	F	V	V
V	F	F	V	F
F	V	V	V	V
F	F	V	V	V

$$\sim p \Rightarrow (p \rightarrow q)$$

$$\sim p + q$$

Exemplo 6

Implicação

Regras de Inferência

Argumentos

p	q	r	((p → q)	•	(q → r))	→	(p → r)
V	V	V	V	V	V	V	V
V	V	F	V	F	F	V	F
V	F	V	F	F	V	V	V
V	F	F	F	F	V	V	F
F	V	V	V	V	V	V	V
F	V	F	V	F	F	V	V
F	F	V	V	V	V	V	V
F	F	F	V	V	V	V	V

Regra do Silogismo Hipotético

$(p \rightarrow q) \bullet (q \rightarrow r) \Rightarrow (p \rightarrow r)$

Exemplo 7

Implicação

Regras de Inferência

Argumentos

As condicionais $p \rightarrow (p \bullet q)$ e $p \rightarrow q$ tem tabelas verdade idênticas:

p	q	p • q	p → q	p → (p • q)	(p → q) → (p → (p • q))	(p → (p • q)) → (p → q)
V	V	V	V	V	V	V
V	F	F	F	F	V	V
F	V	F	V	V	V	V
F	F	F	V	V	V	V

Por conseguinte elas são equivalentes:

$$p \rightarrow (p \bullet q) \Leftrightarrow p \rightarrow q$$

Daí: $p \rightarrow q \Rightarrow p \rightarrow (p \bullet q)$ e

$$p \rightarrow (p \bullet q) \Rightarrow p \rightarrow q$$

(Regra de Absorção)

Exemplo 8

A bicondicional $p \leftrightarrow q$ e a conjunção $(p\rightarrow q) \bullet (q\rightarrow p)$ têm tabelas verdade idênticas

p	q	$p \leftrightarrow q$	$p \rightarrow q$	$q \rightarrow p$	$(p\rightarrow q) \bullet (q\rightarrow p)$
V	V	V	V	V	V
V	F	F	F	V	F
F	V	F	V	F	F
F	F	V	V	V	V

Por conseguinte elas são equivalentes:

$$p \leftrightarrow q \iff (p \rightarrow q) \bullet (q \rightarrow p)$$

Daí: $p \leftrightarrow q \Rightarrow (p \rightarrow q)$ e $p \leftrightarrow q \Rightarrow (q \rightarrow p)$

Exercício 1

Demonstre analiticamente que a bicondicional $p \leftrightarrow q$ e a disjunção $(p \bullet q) + (\sim p \bullet \sim q)$ são equivalentes.

Implicação

Regras de Inferência

Argumentos

Exercício 1

1) $(p \bullet q) + (\sim p \bullet \sim q)$

Implicação

Regras de Inferência

Argumentos

Exercício 1

1) $(p \bullet q) + (\sim p \bullet \sim q)$
2) $((p \bullet q) + \sim p) \bullet ((p \bullet q) + \sim q)$

Implicação

Regras de Inferência

Argumentos

Exercício 1

1) $(p \bullet q) + (\sim p \bullet \sim q)$
2) $((p \bullet q) + \sim p) \bullet ((p \bullet q) + \sim q)$
3) $((p + \sim p) \bullet (q + \sim p)) \bullet$
$((p + \sim q) \bullet (q + \sim q))$

Exercício 1

1) $(p \bullet q) + (\sim p \bullet \sim q)$

2) $((p \bullet q) + \sim p) \bullet ((p \bullet q) + \sim q)$

3) $((p + \sim p) \bullet (q + \sim p)) \bullet$
$((p + \sim q) \bullet (q + \sim q))$

4) $(V \bullet \ (q + \sim p)) \bullet ((p + \sim q) \bullet \ V)$

Implicação

Regras de Inferência

Argumentos

Exercício 1

1) $(p \bullet q) + (\sim p \bullet \sim q)$
2) $((p \bullet q) + \sim p) \bullet ((p \bullet q) + \sim q)$
3) $((p + \sim p) \bullet (q + \sim p)) \bullet$
   $((p + \sim q) \bullet (q + \sim q))$
4) $(V \bullet \ (q + \sim p)) \bullet ((p + \sim q) \bullet \ V)$
5) $(q + \sim p) \bullet (p + \sim q)$

Implicação

Regras de Inferência

Argumentos

Exercício 1

1) $(p \bullet q) + (\sim p \bullet \sim q)$
2) $((p \bullet q) + \sim p) \bullet ((p \bullet q) + \sim q)$
3) $((p + \sim p) \bullet (q + \sim p)) \bullet$
$((p + \sim q) \bullet (q + \sim q))$
4) $(V \bullet (q + \sim p)) \bullet ((p + \sim q) \bullet V)$
5) $(q + \sim p) \bullet (p + \sim q)$
6) $(\sim p + q) \bullet (\sim q + p)$

Implicação

Regras de Inferência

Argumentos

Exercício 1

1) $(p \bullet q) + (\sim p \bullet \sim q)$
2) $((p \bullet q) + \sim p) \bullet ((p \bullet q) + \sim q)$
3) $((p + \sim p) \bullet (q + \sim p)) \bullet$
   $((p + \sim q) \bullet (q + \sim q))$
4) $(V \bullet (q + \sim p)) \bullet ((p + \sim q) \bullet V)$
5) $(q + \sim p) \bullet (p + \sim q)$
6) $(\sim p + q) \bullet (\sim q + p)$
7) $(p \rightarrow q) \bullet (q \rightarrow p)$

Implicação

Regras de Inferência

Argumentos

Exercício 1

1) $(p \bullet q) + (\sim p \bullet \sim q)$
2) $((p \bullet q) + \sim p) \bullet ((p \bullet q) + \sim q)$
3) $((p + \sim p) \bullet (q + \sim p)) \bullet$
$((p + \sim q) \bullet (q + \sim q))$
4) $(V \bullet (q + \sim p)) \bullet ((p + \sim q) \bullet V)$
5) $(q + \sim p) \bullet (p + \sim q)$
6) $(\sim p + q) \bullet (\sim q + p)$
7) $(p \rightarrow q) \bullet (q \rightarrow p)$
8) $p \leftrightarrow q$

Implicação

Regras de Inferência

Argumentos

Exercício 2

Mostre que a negação da bicondicional $\sim(p \leftrightarrow q)$ e a disjunção exclusiva $p \oplus q$, também expressa como $(p \bullet \sim q) + (\sim p \bullet q)$, são equivalentes.

Implicação

Regras de Inferência

Argumentos

Exercício 2

1) $\sim(p \leftrightarrow q) <=> \sim((p \rightarrow q) \bullet (q \rightarrow p))$

Exercício 2

1) $\sim(p \leftrightarrow q) <=> \sim((p \rightarrow q) \bullet (q \rightarrow p))$

2) $\sim((\sim p + q) \bullet (\sim q + p))$

Implicação

Regras de Inferência

Argumentos

Exercício 2

1) $\sim(p \leftrightarrow q) \Leftrightarrow \sim((p \rightarrow q) \bullet (q \rightarrow p))$
2) $\sim((\sim p + q) \bullet (\sim q + p))$
3) $\sim(\sim p + q) + \sim(p + \sim q)$

UnB GAMA

Implicação

Regras de Inferência

Argumentos

Exercício 2

1) $\sim(p \leftrightarrow q) \Leftrightarrow \sim((p \rightarrow q) \bullet (q \rightarrow p))$
2) $\sim((\sim p + q) \bullet (\sim q + p))$
3) $\sim(\sim p + q) + \sim(p + \sim q)$
4) $(p \bullet \sim q) + (\sim p \bullet q)$

Exercício 2

1) $\sim(p \leftrightarrow q) <=> \sim((p \rightarrow q) \bullet (q \rightarrow p))$
2) $\sim((\sim p + q) \bullet (\sim q + p))$
3) $\sim(\sim p + q) + \sim(p + \sim q)$
4) $(p \bullet \sim q) + (\sim p \bullet q)$
5) $(p \bullet \sim q) + (\sim p \bullet q) <=> p \oplus q$

Implicação

Regras de Inferência

Argumentos

Exercício 2

1) $\sim(p \leftrightarrow q) \Leftrightarrow \sim((p \rightarrow q) \bullet (q \rightarrow p))$
2) $\sim((\sim p + q) \bullet (\sim q + p))$
3) $\sim(\sim p + q) + \sim(p + \sim q)$
4) $(p \bullet \sim q) + (\sim p \bullet q)$
5) $(p \bullet \sim q) + (\sim p \bullet q) \Leftrightarrow p \oplus q$
6) $\sim(p \leftrightarrow q) \Leftrightarrow p \oplus q$

Implicação

Regras de Inferência

Argumentos

Exercício 3

Mostre que a expressão seguinte é uma tautologia:

$$(p \rightarrow q) \bullet (r \rightarrow s) \bullet (p + r) \rightarrow (q + s)$$

Regra do Dilema Construtivo

$$(p \rightarrow q) \bullet (r \rightarrow s) \bullet (p + r) \Rightarrow (q + s)$$

Implicação

Regras de Inferência

Argumentos

Exercício 4

Mostre que a expressão seguinte é uma tautologia:

$$(p \rightarrow q) \bullet (r \rightarrow s) \bullet (\sim q + \sim s) \rightarrow (\sim p + \sim r)$$

$$(\sim q \rightarrow \sim p) \bullet (\sim s \rightarrow \sim r) \bullet (\sim q + \sim s) \rightarrow (\sim p + \sim r)$$

Regra do Dilema Destrutivo

$$(p \rightarrow q) \bullet (r \rightarrow s) \bullet (\sim q + \sim s) \Rightarrow (\sim p + \sim r)$$

Regras de Inferência (resumo)

I. Regra da Adição: $p \Rightarrow p + q$ e $q \Rightarrow p + q$

II. Regra da Simplifição: $p \bullet q \Rightarrow p$ e $p \bullet q \Rightarrow q$

III. Regra da Conjunção: $p \bullet q \Rightarrow p \bullet q$ e $p \bullet q \Rightarrow q \bullet p$

IV. Regra da Absorção (a): $p \to q \Rightarrow p \to (p + q)$ e

V. Regra da Absorção (b): $p \to q \Rightarrow p \to (p \bullet q)$

VI. Modus Ponens: $(p \to q) \bullet p \Rightarrow q$

VII. Modus Tollens: $(p \to q) \bullet \sim q \Rightarrow \sim p$ e $\sim p \Rightarrow (p \to q)$

VIII. Silogismo Disjuntivo: $(p + q) \bullet \sim p \Rightarrow q$ e $(p + q) \bullet \sim q \Rightarrow p$

IX. Silogismo Hipotético: $(p \to q) \bullet (q \to r) \Rightarrow (p \to r)$

X. Dilema Construtivo: $(p \to q) \bullet (r \to s) \bullet (p + r) \Rightarrow (q + s)$

XI. Dilema Destrutivo: $(p \to q) \bullet (r \to s) \bullet (\sim q + \sim s) \Rightarrow (\sim p + \sim r)$

<u>Definição</u> (recordação):

Sejam $P_1, P_2, ..., P_n$ ($n \geq 1$) e Q proposições quaisquer, simples ou compostas.

Chama-se <u>argumento</u> à afirmação que a sequência finita de proposições $P_1, P_2, ..., P_n$ (chamadas premissas), têm como consequência ou acarretam a proposição final Q (chamada conclusão).

Um argumento de premissas $P_1, P_2, ..., P_n$ e conclusão Q é indicado por:

$$P_1, P_2, ..., P_n \vdash Q$$

Diz-se que $P_1, P_2, ..., P_n$ ***acarretam*** Q, ou que Q ***decorre de*** $P_1, P_2, ..., P_n$.

Validade de um Argumento

Implicação

Regras de Inferência

Argumentos

<u>Definição</u>:

Um argumento $P_1, P_2, ..., P_n \vdash Q$ diz-se **válido** se e somente se a conclusão Q é verdadeira todas as vezes em que as premissas $P_1, P_2, ..., P_n$ forem verdadeiras.

Um argumento que não é válido é chamado **sofisma**.

Critério de Validade

Teorema:

Um argumento $P_1, P_2, ..., P_n \vdash Q$ é **válido** se e somente se a condicional

$$(P_1 \bullet P_2 \bullet ... \bullet P_n) \rightarrow Q$$

é tautológica.

Diz-se que ao argumento $P_1, P_2, ..., P_n \vdash Q$ ***corresponde*** a condicional $(P_1 \bullet P_2 \bullet ... \bullet P_n) \rightarrow Q$, ou que esta é a condicional ***associada ao*** argumento.

Como consequência do teorema pode-se também expressar um argumento válido como:

$$(P_1 \bullet P_2 \bullet ... \bullet P_n) \Rightarrow Q$$

Argumentos Válidos
e
Regras de Inferência

As regras de inferência vistas até aqui são todas argumentos válidos.

Método Dedutivo

Regra Modus Tollens

(1) $q \bullet r \rightarrow s$ **P**

(2) $\sim s$ **P**

(3) $\sim(q \bullet r)$ **Q**

Regra do Dilema Construtivo

(1) $(p \bullet q) \rightarrow \sim r$ **P**

(2) $s \rightarrow t$ **P**

(3) $(p \bullet q) + s$ **P**

(4) $\sim r + t$ **Q**

Regra do Silogismo Hipotético

(1) $|x| = 0 \rightarrow x = 0$ **P**

(2) $x = 0 \rightarrow x+1 = 1$ **P**

(3) $|x| = 0 \rightarrow x+1 = 1$ **Q**

Regra Modus Ponens

(1) $x \in (A \cap B) \rightarrow x \in A$ **P**

(2) $x \in (A \cap B)$ **P**

(3) $x \in A$ **Q**

Método Dedutivo: Exemplo 1

Verificar a validade do argumento:

$$p \bullet q,\ \ p+r \rightarrow s \ \longmapsto\ p \bullet s$$

(1)	$p \bullet q$	**P**
(2)	$p+r \rightarrow s$	**P**

Método Dedutivo: Exemplo 1

Verificar a validade do argumento:

$$p \bullet q,\ \ p+r \rightarrow s \vdash \ \ p \bullet s$$

(1)	$p \bullet q$	**P**
(2)	$p+r \rightarrow s$	**P**
(3)	p	**1 - SIMP**

Método Dedutivo: Exemplo 1

Verificar a validade do argumento:

$$p \bullet q,\ \ p+r \rightarrow s \vdash p \bullet s$$

(1)	$p \bullet q$	**P**
(2)	$p+r \rightarrow s$	**P**
(3)	p	**1 - SIMP**
(4)	$p+r$	**3 - AD**

Método Dedutivo: Exemplo 1

Verificar a validade do argumento:

$$p \bullet q,\ \ p+r \rightarrow s \vdash \ \ p \bullet s$$

(1)	$p \bullet q$	**P**
(2)	$p+r \rightarrow s$	**P**
(3)	p	**1 - SIMP**
(4)	$p+r$	**3 - AD**
(5)	s	**2,4 - MP**

Método Dedutivo: Exemplo 1

Verificar a validade do argumento:

$$p \bullet q,\ \ p+r \rightarrow s \vdash \quad p \bullet s$$

(1)	$p \bullet q$	**P**
(2)	$p+r \rightarrow s$	**P**
(3)	p	**1 - SIMP**
(4)	$p+r$	**3 - AD**
(5)	s	**2,4 - MP**
(6)	$p \bullet s$	**3,5 - CONJ**

Método Dedutivo: Exemplo 2

Verificar a validade do argumento:

$$x=y \rightarrow x=z,\ x \neq y \rightarrow x<z,\ x<z \rightarrow y>z,\ y \neq z \bullet x \neq z \vdash y>z$$

(1) $x = y \rightarrow x = z$ **P**

(2) $x \neq y \rightarrow x < z$ **P**

(3) $x < z \rightarrow y > z$ **P**

(4) $y \neq z \bullet x \neq z$ **P**

Método Dedutivo: Exemplo 2

Verificar a validade do argumento:

$$x=y \rightarrow x=z,\ x \neq y \rightarrow x<z,\ x<z \rightarrow y>z,\ y \neq z \bullet x \neq z \vdash y>z$$

(1)	$x = y \rightarrow x = z$	**P**
(2)	$x \neq y \rightarrow x < z$	**P**
(3)	$x < z \rightarrow y > z$	**P**
(4)	$y \neq z \bullet x \neq z$	**P**
(5)	$x \neq z$	**4 - SIMP**

Método Dedutivo: Exemplo 2

Verificar a validade do argumento:

$$x=y \rightarrow x=z,\ x \neq y \rightarrow x<z,\ x<z \rightarrow y>z,\ y \neq z \bullet x \neq z \vdash y>z$$

(1)	$x = y \rightarrow x = z$	**P**
(2)	$x \neq y \rightarrow x < z$	**P**
(3)	$x < z \rightarrow y > z$	**P**
(4)	$y \neq z \bullet x \neq z$	**P**
(5)	$x \neq z$	**4 - SIMP**
(6)	$x \neq y$	**1,5 - MT**

Método Dedutivo: Exemplo 2

Verificar a validade do argumento:

$$x=y \rightarrow x=z,\ x \neq y \rightarrow x<z,\ x<z \rightarrow y>z,\ y \neq z \bullet x \neq z \vdash y>z$$

(1)	$x = y \rightarrow x = z$	**P**
(2)	$x \neq y \rightarrow x < z$	**P**
(3)	$x < z \rightarrow y > z$	**P**
(4)	$y \neq z \bullet x \neq z$	**P**
(5)	$x \neq z$	**4 - SIMP**
(6)	$x \neq y$	**1,5 - MT**
(7)	$x < z$	**2,6 - MP**

Método Dedutivo: Exemplo 2

Verificar a validade do argumento:

$$x{=}y \rightarrow x{=}z,\ x \neq y \rightarrow x{<}z,\ x{<}z \rightarrow y{>}z,\ y \neq z \bullet x \neq z \vdash y{>}z$$

(1)	$x = y \rightarrow x = z$	**P**
(2)	$x \neq y \rightarrow x < z$	**P**
(3)	$x < z \rightarrow y > z$	**P**
(4)	$y \neq z \bullet x \neq z$	**P**
(5)	$x \neq z$	**4 - SIMP**
(6)	$x \neq y$	**1,5 - MT**
(7)	$x < z$	**2,6 - MP**
(8)	$y > z$	**3,7 - MP**

Uso das Regras de Inferência

Demonstração Condicional

O argumento: $P_1, P_2, \ldots, P_n \vdash A \rightarrow B$ (1)

cuja conclusão é a condicional $A \rightarrow B$

Será válido se a condicional seguinte for tautológica:

$$(P_1 \bullet P_2 \bullet P_3 \bullet \ldots \bullet P_n) \rightarrow (A \rightarrow B) \qquad (2)$$

Pela regra da importação a condicional (2) será equivalente a:

$$(P_1 \bullet P_2 \bullet P_3 \bullet \ldots \bullet P_n \bullet A) \rightarrow B \qquad (3)$$

Assim (1) será válido se e somente se for válido o argumento:

$$P_1, P_2, \ldots, P_n, A \vdash B \qquad (4)$$

Demonstração Indireta ou Redução ao Absurdo

Dado o argumento: $P_1, P_2, \ldots, P_n \vdash Q$ (1)

Vamos introduzir o argumento ~Q e provar a contradição C:

$$P_1, P_2, P_3, \ldots, P_n, \sim Q \vdash C \qquad (2)$$

Então, pela Demonstração Condicional (DC), o argumento seguinte também é válido:

$\boxed{\textbf{Contradição = F}}$

$$P_1, P_2, P_3, \ldots, P_n \vdash \sim Q \rightarrow C \qquad (3)$$

Daí: $\sim Q \rightarrow C \Leftrightarrow \sim\sim Q + C \Leftrightarrow Q + F \Rightarrow Q$

O que prova o argumento (1) !!!