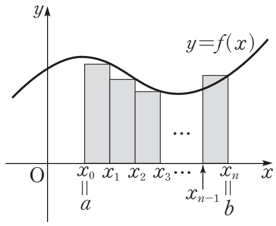
1. 정적분과 급수의 합 사이의 관계

함수 $f(x)$가 닫힌구간 $[a, b]$에서 연속일 때

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} f(x_k)\Delta x=\int_a^b f(x)dx\ \left(단,\ \Delta x=\frac{b-a}{n},\ x_k=a+k\Delta x\right)$$

▶ 일반적으로 함수 $f(x)$가 닫힌구간 $[a, b]$에서 연속이면 극한값 $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n} f(x_k)\Delta x$가 항상 존재한다.

설명 함수 $f(x)$가 닫힌구간 $[a, b]$에서 연속이고 $f(x)\geq 0$일 때, 곡선 $y=f(x)$와 x축 및 두 직선 $x=a$, $x=b$로 둘러싸인 도형의 넓이를 S라 하자.



닫힌구간 $[a, b]$를 n등분 하여 양 끝 점과 각 분점의 x좌표를 차례로

$a=x_0,\ x_1,\ x_2,\ \cdots,\ x_{n-1},\ x_n=b$

라 하고, 각 소구간의 길이를 Δx라 하면

$$\Delta x=\frac{b-a}{n},\ x_k=a+k\Delta x\ (k=0,\ 1,\ 2,\ \cdots,\ n)$$

이때 색칠한 직사각형의 넓이의 합 S_n은

$$\begin{aligned}S_n&=f(x_1)\Delta x+f(x_2)\Delta x+f(x_3)\Delta x+\cdots+f(x_n)\Delta x\\&=\sum_{k=1}^{n} f(x_k)\Delta x\end{aligned}$$

여기서 n이 한없이 커지면 S_n은 구하는 도형의 넓이 S에 한없이 가까워지므로

$$S=\lim_{n\to\infty}S_n=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} f(x_k)\Delta x$$

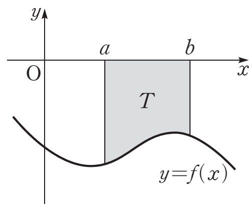
← $S_n=\sum\limits_{k=0}^{n-1} f(x_k)\Delta x$로 정의해도 극한값은 같다.

가 성립한다.

그런데 곡선 $y=f(x)$와 x축 및 두 직선 $x=a$, $x=b$로 둘러싸인 도형의 넓이 S는 $\int_a^b f(x)dx$이므로 다음이 성립한다.

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} f(x_k)\Delta x=\int_a^b f(x)dx\ \left(단,\ \Delta x=\frac{b-a}{n},\ x_k=a+k\Delta x\right)\quad\cdots\cdots ㉠$$

한편, 함수 $f(x)$가 닫힌구간 $[a, b]$에서 연속이고 $f(x)\leq 0$일 때, 곡선 $y=f(x)$와 x축 및 두 직선 $x=a$, $x=b$로 둘러싸인 도형의 넓이를 T라 하면



$$T=\int_a^b \{-f(x)\}dx=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\{-f(x_k)\}\Delta x$$

← 닫힌구간 $[a, b]$에서 $f(x)\leq 0$이면 $\int_a^b f(x)dx\leq 0$

이므로 이때에도 ㉠이 성립함을 알 수 있다.

일반적으로 함수 $f(x)$가 닫힌구간 $[a, b]$에서 연속이면 극한값 $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n} f(x_k)\Delta x$는 항상 존재하고, 이 극한값은 함수 $f(x)$의 a에서 b까지의 정적분 $\int_a^b f(x)dx$의 값과 같다.