Javier Viseras, Francisco López-Alvarado, Enrique Rodríguez, Bernardo Ordás, Miguel Angel Vallejo

La transformada discreta de Fourier y el procesado de señales

IMAT-ICAI

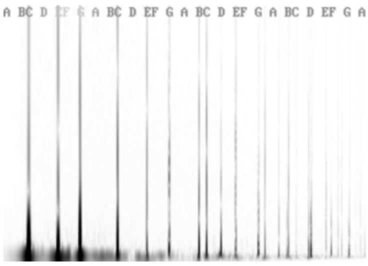
2024

Índice:

1. **Historia detallada de la Transformada Discreta de Fourier.**

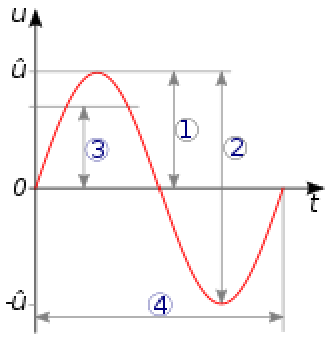
La Transformada de Fourier, desarrollada inicialmente por Jean-Baptiste Joseph Fourier en el siglo XIX, es una herramienta matemática esencial para la transformación de señales entre el dominio del tiempo y el dominio de la frecuencia. Fourier introdujo este concepto para solucionar problemas de conducción de calor en cuerpos sólidos, formulando que cualquier función periódica podría expresarse como una suma infinita de senos y cosenos, conocidos hoy día como series de Fourier.

Sin embargo, la versión discreta de la Transformada de Fourier no se desarrolló hasta la llegada de la era digital. La necesidad de aplicar el análisis de Fourier a señales digitales, que son por naturaleza discretas, llevó al desarrollo de la Transformada Discreta de Fourier en la mitad del siglo XX. Este desarrollo fue crucial para adaptar los conceptos continuos de Fourier al nuevo mundo de procesamiento digital.



La capacidad de las computadoras para manejar grandes volúmenes de datos numéricos permitió la aplicación de la DFT en una variedad de campos, desde el análisis de señales hasta la mejora de imágenes y sonido. El desarrollo del algoritmo de Transformada Rápida de Fourier (FFT) por James W. Cooley y John W. Tukey en 1965 marcó un punto de inflexión, ya que hizo el cálculo de la DFT mucho más rápido y eficiente, facilitando su uso práctico en aplicaciones de tiempo real.

La evolución de la DFT y la FFT ha tenido un impacto duradero y profundo en el desarrollo tecnológico. Hoy en día, estas herramientas son esenciales en la ciencia de datos, comunicaciones, análisis médico y muchas otras áreas que dependen del procesamiento y análisis de señales digitales. La historia de la DFT es un ejemplo fascinante de cómo un concepto matemático, originado en la física teórica, puede evolucionar y adaptarse a las necesidades del mundo moderno.

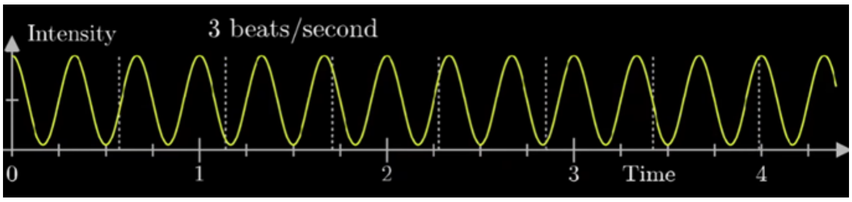


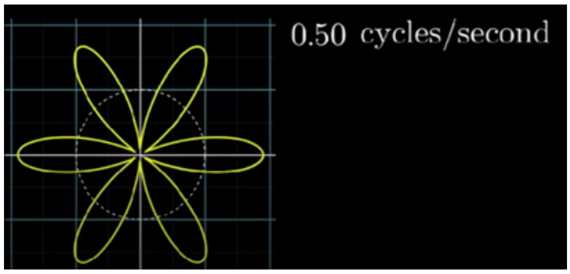
2. **Enfoque matemático**
Transformada de Fourier:

¿Matemáticamente, qué es?

La transformada de Fourier es una herramienta matemática que permite descomponer señales complejas, como por ejemplo una grabación de sonido. La idea principal es detectar las frecuencias que componen una señal complicada, para filtrarlas, analizarlas y muchas otras aplicaciones.

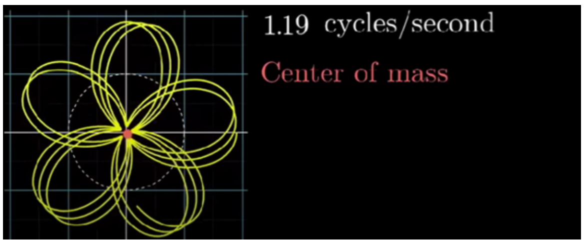
El fundamento matemático se basa en tomar una onda y enrollarla alrededor de un punto.

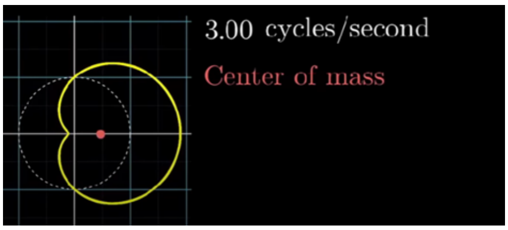




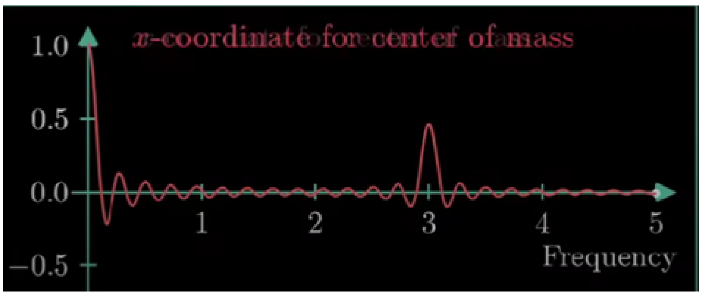
Al hacerlo aparecen 2 frecuencias, la frecuencia de la onda original (oscilaciones/segundo) y la frecuencia de la onda enrollada (ciclos/segundo) (angular).

Si se define un centro de masas en la figura de la onda enrollada, se observa que este permanece cercano al origen mientras la frecuencia de oscilación y la frecuencia angular no coinciden. Sin embargo, cuando coinciden el centro de masas se aleja del origen considerablemente. He aquí la clave de esta herramienta matemática.

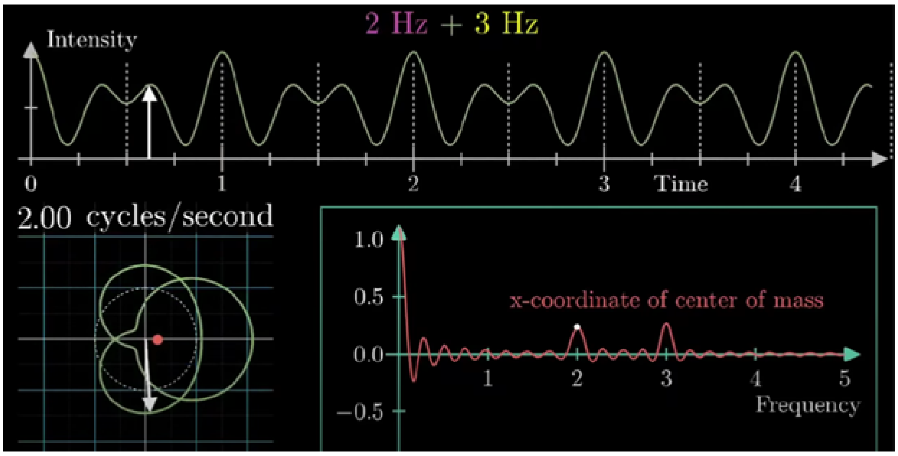




De este modo, si conseguimos definir el centro de masas en función de la frecuencia, podemos detectar la frecuencia de oscilación de la onda simplemente variando la frecuencia de giro de la onda enrollada

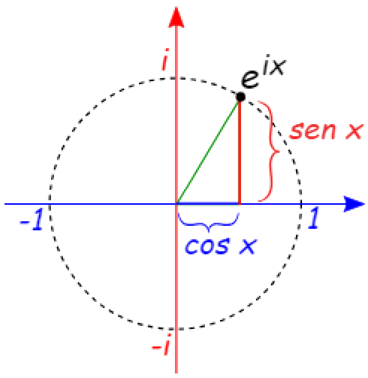


Si en lugar de tomar una onda sencilla como en la primera imagen, tomamos una onda más compleja, formada por otras ondas, y hacemos lo mismo, observaremos varios picos en el valor del centro de masas en función de la frecuencia. Esto permite conocer las frecuencias de las señales que forman una señal compleja.



¿Cómo se define el centro de masas?

Al enrollar la onda, esta se enrolla en el plano complejo. Mediante la fórmula de Euler, se pueden definir rotaciones en el plano complejo de la siguiente manera



Si x = -2π*f*t, se define una rotación en el sentido horario y con una frecuencia angular 2π*f. Si multiplicamos e^x*i por la función de la onda sin enrollar g(t) obtendremos de forma sencilla y elegante el enrollamiento.

Una vez definida esta función podemos tomar varios puntos de la misma y hacer la media. Este procedimiento es en el que está basado la transformada discreta de Fourier.

También podemos integrar la función en un intervalo contínuo, obteniendo así la transformada contínua.

$$\frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N} g(t_k)e^{-2\pi i f t_k}$$

$$\frac{1}{\boxed{t_2 - t_1}}\int_{t_1}^{t_2} g(t)e^{-2\pi i f t}\,dt$$

Sin embargo, formalmente, en la transformada de Fourier esta operación no se normaliza, es decir que el centro de masas depende del intervalo de tiempo o del número de puntos que se tomen. Esto no es un problema, ya que no afecta a los picos de frecuencia.

$$\hat{g}(f) = \int_{t_1}^{t_2} g(t) e^{-2\pi i f t} dt$$

En resumen

Es una herramienta matemática que nos permite detectar las frecuencias por las que está compuesta una señal. A partir de aquí se pueden dar infinidad de enfoques.

Nota: También existe la transformada inversa de Fourier, que permite pasar del centro de masas en función de la frecuencia a la señal original. Esto es muy útil para el filtrado de señales, pero no es el objeto de este trabajo.

<u>Serie de Fourier:</u>

Fourier Series

- The general formula for the fourier series:

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left[a_n \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) + b_n \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)\right]$$

- Where the coefficients are given by,

$$a_n = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)\cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right)dx$$

$$b_n = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)\sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)dx$$

La serie de Fourier es una herramienta matemática que permite descomponer una función periódica y continua.

Llevemos una vez más las cosas al plano complejo.

Esa nota musical se puede expresar en el plano complejo de la siguiente manera:

f(t) = a(t) + b(t)*i con t C [0,1] (por ejemplo)

Fourier nos dice que esa f(t) se puede descomponer en una suma de círculos en el plano complejo. Esos círculos tienen esta pinta:

r*e^w*i*t

Los coeficientes se sacan con productos escalares, si multiplicamos uno de esos círculos, por f(t) escalarmente, obtendremos una medida de ”cuánto” de dicho círculo tiene f(t).

Esto y la fórmula de la serie vista al principio se relacionan entre sí mediante la fórmula de euler.

Euler’s Formula

$$e^{ix} = \cos x + i \sin x$$

Esto da un resultado muy visual, se puede pintar cualquier cosa en el plano complejo, siempre que sean curvas cerradas y contínuas.

3. **Aplicaciones**

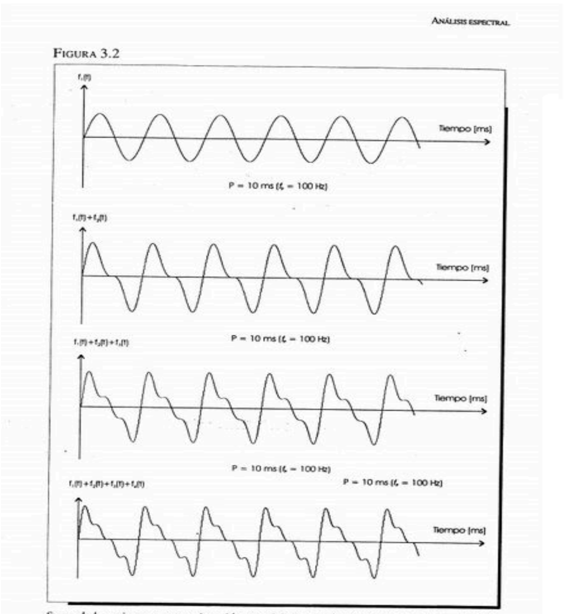
El teorema nos dice que cualquier curva se puede reproducir mediante la superposición de armónicos simples escogidos adecuadamente. En consecuencia, cualquier sonido, por complejo que sea -desde la voz de un cantante hasta un autobús cambiando de marcha-, se puede analizar descomponiéndose en sus tonos puros y se puede reproducir exactamente con una fuente de sonidos puros (por ejemplo, un diapasón).

La curva de un sonido musical es periódica, es decir, se repite a intervalos perfectamente regulares. El teorema de Fourier nos dice que tal curva puede recomponerse con la superposición de curvas análogas simples tales como 1, 2, 3 u otro número entero de ondas que suceden en cada período de la curva original. Si por ejemplo la onda tiene una frecuencia de 100 se puede representar por la superposición de curvas armónicas simples de frecuencias 100, 200, 300, etc.

Cada una de esas curvas representa un sonido puro, de lo que deducimos que cualquier sonido musical de frecuencia 100 está formado por sonidos puros que tienen respectivamente 1,2,3, etc veces la frecuencia del sonido original. Estos tonos se denominan "armónicos naturales" de la nota en cuestión.

A continuación se expondrá los valores de los armónicos que conforman una suma de sinusoides en relación armónica cuyo valor inicial, es decir *fundamental*, sea 100 Hz:

- 100Hz - Armónico I (frecuencia *fundamental*)
- 200Hz - Armónico II
- 300Hz - Armónico III
- 400Hz - Armónico IV



Suma de las primeras cuatro sinusoides armónicas cuya frecuencia base es de $f_1 = 100$ Hz

Como se puede percibir, la imagen consta de cuatro gráficos. En el primero se puede ver una onda sinusoidal con frecuencia en 100 Hz (la cual va a cumplir el rol de fundamental). En el segundo gráfico aparece una onda un poco más compleja resultante de la suma de la frecuencia anterior más una sinusoide de 200Hz (Segundo armónico). En el tercer gráfico se percibe otra onda un poco más compleja que la anterior resultante de la suma de las frecuencias precedentes más 300Hz (Tercer armónico). Por último en el cuarto gráfico lo que aparece es una señal mucho más compleja que la inicial compuesta por las frecuencias mencionadas anteriormente más 400Hz (Cuarto armónico).

Cuando se graba una canción en un estudio, todas las frecuencias de la pista se conservan intactas en el disco. Sin embargo, una canción así pesa demasiado como para transmitirse a través de la Red, y eso haría que el 'streaming' fuera tan aparatoso que en cuanto la conexión fallara mínimamente el sonido se cortaría.

La compresión del formato MP3 está basada en una variante de la transformación de Fourier, que es la Transformada de Fourier discreta. Aplicándola a una canción, se divide la canción en su espectro de frecuencias utilizando Fourier.

Luego se divide el rango de frecuencias del sonido original en 32 bandas que el oído humano logra oír por separado. A estas se les aplica una Transformada de Fourier para conseguir otras 18 bandas de frecuencias por cada una, dando un total de 576 bandas de frecuencia individuales. Luego de cada una de estas se remueven los componentes que son indetectables por el oído humano. Esto permite que el archivo final sea mucho más pequeño ya que se requieren de menor cantidad de bits para almacenar las representaciones matemáticas creadas mediante el análisis de Fourier de la señal original.

El resultado es que la calidad del sonido apenas se ve malograda y de esta forma los archivos se pueden transmitir sin usar tanto ancho de banda. El formato que usa Spotify, se crea a partir de una versión computacional de la transformada de Fourier.

4. Implementación en Matlab

ALGORITMO: FFT

Empezamos con la DFT $\Rightarrow$ $X[K] = \sum_{n=0}^{N-1} x[n]\, e^{-j\frac{2\pi K}{N} n}$; $K = 0, \dots, N-1$

Complejidad $\underline{O(N^2)}$ no ALG DFT

FFT no $O(N \log_2 N)$

Se Basa en 2 prop: $W_n = e^{-j\frac{2\pi}{2}}$ $\Rightarrow$ 1 $W^{K(N-n)} = W^{-Kn} = (W_N^{Kn})^*$

2 $W_N^{Kn} = W_N^{K(N+n)} = W_N^{(K+N)n}$

$W_N^{KN} = 1$

Dividimos en pares e impares nuestra DFT $\Rightarrow$

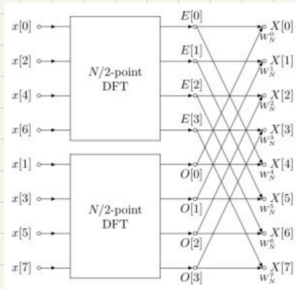
no no depende

$$X[K] = \sum_{r=0}^{N/2-1} x[2r]\, W_N^{K2r} + \sum_{r=0}^{N/2-1} x[2r+1]\, W_n^{(2r+1)K}$$

$$X[K] = \sum_{r=0}^{N/2-1} x[2r]\,(W_N^{2})^{Kr} + W_N^{K} \sum_{r=0}^{N/2-1} x[2r+1]\,(W_N^{2})^{Kr}$$

$$W_N^{2} = e^{-j\frac{2\pi}{N}2} = e^{-j\frac{2\pi}{N/2}} = W_{N/2}$$

$$X[K] = \underbrace{\sum_{r=0}^{N/2-1} x[2r]\, W_{N/2}^{Kr}}_{\text{DFT PARES}} + \underbrace{W_N^{K} \sum_{r=0}^{N/2-1} x[2r+1]\, W_{N/2}^{Kr}}_{\text{DFT Impares}} \;//$$




```
function  X = Fast_Fourier_Transform(data)
    N = length(data);
    if sqrt(N) ~= floor(sqrt(N))
        disp('Los datos no son potencia de 2, llenando 0s hasta completar')
        data = fill_0s(data);
        N = length(data);
    end

    X = zeros(size(data));
    X = fft_recursive(data, N);

end
```

```
function X =  fft_recursive(x, N)
    if length(x) == 1
        X = x;
    else
        x_par =fft_recursive(x(1:2:N), N/2);
        x_impar = fft_recursive(x(2:2:N), N/2);
        W = exp(-1i * 2 * pi / N);
        for k = 1:N/2
            X(k) = x_par(k) + W^(k-1) * x_impar(k);
            X(k+N/2) = x_par(k) - W^(k-1) * x_impar(k);

        end
    end
end
```

```
function X = fill_0s(x)
    N = length(x);
    M = 2^(ceil(log2(N)));
    k = M-N;
    array0s = zeros(1, k);
    X = [x, array0s];
```