Ejercicios I

Miguel A. Gomez B.

4 de diciembre de 2019

1. Verificar que las funciones sean solución de cada una de las ecuaciones diferenciales.

a. $\frac{dy}{dt} + 20y = 24$, con $y = \frac{6}{5} - \frac{6}{5}e^{-20t}$.

Solución.

$$y' = 24e^{-20t},$$

reemplazamos en la ecuacion diferencial para verificar:

$$\begin{aligned}\frac{dy}{dt} + 20y &= 24e^{-20t} + 20\left(\frac{6}{5} - \frac{6}{5}e^{-20t}\right) \\ &= 24e^{-20t} + 24 - 24e^{-20t} \\ &= 24\end{aligned}$$

por lo tanto y es solución.

b. $y'' - 6y' + 13y = 0$, con $y = e^{3x}\cos(2x)$.

$$y' = 3e^{2x}\cos(2x) - 2e^{2x}\sin(2x)$$

y

$$\begin{aligned}y'' &= 9e^{3x}\cos(2x) - 6e^{3x}\sin(2x) - 6e^{3x}\sin(2x) - 4e^{3x}\cos(2x) \\ &= 5e^{3x}\cos(2x) - 12e^{3x}\sin(2x)\end{aligned}$$

reemplazamos en la ecuación diferencial para verificar en la ecuación original:

$$y'' - 6y' + 13y = 0$$

operando obtenemos los términos que posteriormente sumamos:

$$\begin{array}{ll} 5e^{3x}\cos(2x) & -12e^{3x}\sin(2x) \\ -18e^{3x}\cos(2x) & +12e^{3x}\sin(2x) \\ +38e^{3x}\cos(2x) & \\ \hline \multicolumn{2}{c}{0} \end{array}$$

Vemos por lo tanto que y es solución de la ecuación diferencial.

c. $y'' + y = \tan(x$, con $y = -(\cos(x))\ln(\sec(x) + \tan(x))$.

$$\begin{aligned}y' &= \sin(x)\ln(\sec(x) + \tan(x)) - \cos(x)\sec(x) \\ &= \sin(x)\ln(\sec(x) + \tan(x)) - 1\end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned}y'' &= \cos(x)\ln(\sec(x) + \tan(x)) + \sin(x)\sec(x) \\ &= \cos(x)\ln(\sec(x) + \tan(x)) + \tan(x)\end{aligned}$$

Verificamos:

$$\begin{array}{lr} \cos(x)\ln(\sec(x) + \tan(x)) & +\tan(x) \\ -\cos(x)\ln(\sec(x) + \tan(x)) & \\ \hline & \tan(x) \end{array}$$

Vemos por tanto que y es una solución.

2. Solucione las ecuaciones diferenciales de manera analítica.

a. $\frac{dQ}{dt} = k(Q-70)$.

Solución. Utilizamos el método de variable separable.

$$\frac{dQ}{dt} = k(Q-70) \Rightarrow \frac{1}{k(Q-70)}dQ = dt$$

Integrando, tenemos por separado que:

$$\int \frac{1}{k(Q-70)}dQ = \ln\left(k(Q-70)\right) + C_1$$

$$\int dt = t + C_2$$

de modo que ahora tenemos

$$\ln\left(k(Q-70)\right) + C_1 = t + C_2 \Rightarrow \ln\left(k(Q-70)\right) = t + C_3$$

con $C_3 = C_2 - C_1$, utilizamos la función exponencial para hallar la inversa del logaritmo y despejar Q:

$$\begin{aligned} k(Q-70) &= e^{t+C_3} = e^t e^{C_3} = e^t C_4 \\ Q &= \frac{e^t C_4 + 70}{k} \end{aligned}$$

con $C_4 = e^{C_3}$.

A partir de éste punto se asumirá C como la suma de las constantes de integración.

b. $\frac{dy}{dx} = e^{3x+2y}$.

Solución. Utilizamos el método de variable separable. Nótese que $e^{3x+2y} = e^{3x}e^{2y}$. Luego tenemos:

$$\frac{dy}{dx} = e^{3x+2y} = e^{3x}e^{2y},$$

Realizando la separación de variables obtenemos:

$$\frac{1}{e^{2y}}dy = e^{3x}dx,$$

de modo que ahora integramos por separado,

$$\int \frac{1}{e^{2y}}dy = -\frac{1}{2e^{2y}} + Q$$

y

$$\int e^{3x}dx = \frac{1}{3}e^{3x} + P,$$

agrupando los dos resultados tenemos la igualdad

$$-\frac{1}{2e^{2y}} = \frac{1}{3}e^{3x} + C$$

Reorganizamos para despejar y,

$$\begin{aligned} -\frac{1}{2e^{2y}} &= \frac{1}{3}e^{3x} + C \\ e^{2y} &= -\frac{3}{2e^{3x}} + C_1 \\ 2y &= e^{-\frac{3}{2e^{3x}}}C_2 \\ y &= \frac{1}{2}e^{-\frac{3}{2e^{3x}}}C_2 \end{aligned}$$

con $C_1 = \frac{1}{2C}$ y $C_2 = e^{C_1}$.

c. $\sin{(x)}dx + 2y\cos^3{(3x)}dy = 0.$

Solución. Reorganizamos la expresión para poder aplicar el método de variable separable,

$$\begin{aligned}
\sin{(x)}dx + 2y\cos^3{(3x)}dy &= 0\\
\frac{\sin{(3x)}}{\cos^3 3x}dx &= -2ydy\\
\frac{\tan{(3x)}}{\cos^2 3x}dx &=\\
\tan{(3x)}\sec^2{(3x)} &= -2ydy,
\end{aligned}$$

Ahora integramos y reorganizamos la expresión para despejar en terminos de x,

$$\begin{aligned}
\int \tan{(3x)}\sec^2{(3x)} &= \int -2ydy\\
\frac{1}{6}\tan^2 3x &= -y^2 + C\\
\tan^2{(3x)} &= 6(-y^2 + C)\\
\tan{(3x)} &= \sqrt{6(-y^2 + C)}\\
3x &= \arctan{(\sqrt{6(-y^2 + C)})}\\
x &= \frac{1}{3}\arctan{(\sqrt{6(-y^2 + C)})}.
\end{aligned}$$

d. $\frac{dy}{dx} = \left(\frac{2y+3}{4x+5}\right)^2.$

Solución. Reorganizamos la expresión,

$$\begin{aligned}
\frac{dy}{dx} &= \left(\frac{2y+3}{4x+5}\right)^2\\
\frac{1}{(2y+3)^2}dy &= \frac{1}{(4x+5)^2}dx,
\end{aligned}$$

Integramos. Para ello utilizamos el método de sustitución, para el extremo izquierdo sustituimos $u = 2y + 3$ y en el derecho $v = 4x + 5$ y tenemos

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}\int \frac{1}{u^2}dy &= \frac{1}{4}\int \frac{1}{v^2}dv\\
\frac{1}{2}\int u^{-2}du &= \frac{1}{4}\int v^{-2}dv\\
-u^{-1} &= -\frac{1}{2}v^{-1} + C\\
u^{-1} &= \frac{1}{2}v^{-1} + C\\
u &= 2v + C^{-1}\\
2y + 3 &= 2(4x + 5) + C^{-1}\\
y &= \frac{1}{2}(8x + 10 - 3 + C^{-1})\\
y &= \frac{1}{2}(8x + 7 + C^{-1}).
\end{aligned}$$

e. $\frac{dP}{dt} = P - P^2.$

Solución. Reorganizamos la expresión,

$$\begin{aligned}
\frac{dP}{dt} &= P - P^2 \\
\frac{1}{P - P^2} dP &= dt \\
\frac{1}{P(1-P)} dP &= dt
\end{aligned}$$

ahora integramos la expresión,

$$\int \frac{1}{P(1-P)} dP = \int dt$$

para ello utilizaremos el método de fracciones parciales, en el extremo izquierdo.

$$\begin{aligned}
-\frac{1}{P(P-1)} &= -\frac{A}{P} - \frac{B}{P-1} \\
1 &= A(P-1) + BP,
\end{aligned}$$

si $P = 0$, entonces $A = -1$. Si $P = 1$, entonces $B = 1$ luego nuestra integral final toma la forma

$$\begin{aligned}
\int \left(\frac{1}{P} - \frac{1}{P-1} \right) dP &= \int dt \\
\ln(P) - \ln(P-1) &= t + C \\
\ln\left(\frac{P}{P-1} \right) &= t + C \\
\frac{P}{P-1} &= e^{t+C} \\
P &= e^{t+C}(P-1) \\
P &= e^{t+C} P - e^{t+C} \\
P - e^{t+C} P &= -e^{t+C} \\
P(1 - e^{t+C}) &= -e^{t+C} \\
P &= -\frac{e^{t+C}}{1 - e^{t+C}}
\end{aligned}$$