Taller 6. Flujo Continuidad y Bernoulli

Miguel A. Gomez B.

24 de abril de 2019

1. Flujo

Ejercicio fluyen 0.075 $\frac{\mathrm{m}^3}{\mathrm{s}}$ de agua a 10 °C. ¿Cuál es el flujo másico?.

Solución La ecuación del flujo másico es:

$$\dot{m} = \dot{q}\rho$$

Donde:

- $\dot{q}$ es el flujo volumétrico. Y que conocemos es de 0.075 $\frac{\mathrm{m}^3}{\mathrm{s}}$.
- ρ es la densidad del fluído. En este caso Agua a 10 °C. Es decir 1000 $\frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{m}^3}$.

Por ende, al reemplazar en el sistema obtenemos:

$$\begin{aligned}\dot{m} &= \left(0.075\,\frac{\mathrm{m}^3}{\mathrm{s}}\right)\left(1000\,\frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{m}^3}\right)\\ &= 75\,\frac{\mathrm{k}}{\mathrm{s}}\end{aligned}$$

Por lo tanto el flujo másico será 75 $\frac{\mathrm{k}}{\mathrm{s}}$.

Ejercicio Un líquido refrigerante $S = 1,08$ fluye dentro de una tubería de $\frac{1}{2}$ in de diámetro de cobre tipo K. Si la velocidad de flujo es de 0.5 $\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$ ¿Cuál es el flujo volumétrico y el flujo másico?

Solución Mediante la ecuación del flujo másico podemos obtener el flujo volumétrico

$$\dot{m} = \dot{q}\rho$$

$$\dot{q} = \frac{\dot{m}}{\rho}$$

Existe una segunda ecuación para hallar el flujo másico

$$\dot{m} = \rho A\bar{V}$$

Donde:

- ρ es la densidad del fluído. En este caso la obtendremos mediante la ecuación de la gravedad específica

$$S = \frac{\rho_x}{\rho_{H_2O}}$$

Sabemos que la densidad del agua es de 998 $\frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{m}^3}$, por ende:

$$\begin{aligned}\rho_x &= S\rho_{H_2O}\\ &= (1,08)\left(998\,\frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{m}^3}\right)\\ &= 1077\,\frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{m}^3}\end{aligned}$$

- A es el flujo de área para la tubería y que es

$$A = 1.515 \times 10^{-3}\,\mathrm{ft}^2 = 1.407 \times 10^{-4}\,\mathrm{m}^2$$

- $\bar{V}$ es un valor conocido de $0.5\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$.

Luego únicamente debemos reemplazar los valores encontrados en cada una de las ecuaciones.

Flujo másico

$$\begin{aligned}
\dot{m} &= \rho A \bar{V} \\
&= \left(1077\,\frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{m}^3}\right)(1.407 \times 10^{-4}\,\mathrm{m}^2)\left(0.5\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}\right) \\
&\approx 0.075\,\frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{s}}
\end{aligned}$$

Por lo tanto, el flujo másico será $0.075\,\frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{s}}$.

Flujo volumétrico

$$\begin{aligned}
\dot{q} &= \frac{\dot{m}}{\rho} \\
&= \frac{0.075\,\frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{s}}}{1077\,\frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{m}^3}} \\
&\approx 6.97 \times 10^{-5}\,\frac{\mathrm{m}^3}{\mathrm{s}}
\end{aligned}$$

Por lo tanto, el flujo volumpetrico será $6.97 \times 10^{-5}\,\frac{\mathrm{m}^3}{\mathrm{s}}$.

Ejercicio Un horno necesita $1200\,\frac{\mathrm{lb_m}}{\mathrm{h}}$ de aire para obtener combustión eficiente. Si el aire tiene un peso específico de $0.062\,\frac{\mathrm{lb_f}}{\mathrm{ft}^3}$ ¿Cuál es el flujo volumétrico?

Solución Sabemos que:

$$\dot{q} = \frac{\dot{m}}{\rho}$$

Tenemos que $\dot{m} = 1200\,\frac{\mathrm{lb_m}}{\mathrm{h}}$ y que es equivalente a:

$$\begin{aligned}
\dot{m} &= \left(1200\,\frac{\mathrm{lb_m}}{\mathrm{h}}\right)\left(0.453\,\frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{lb_m}}\right) \\
&= 543.6\,\frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{h}}\left(\frac{1}{3600}\,\frac{\mathrm{h}}{\mathrm{s}}\right) \\
&= 0.151\,\frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{s}}
\end{aligned}$$

También tenemos que γ representa el peso específico y equivale a $0.062\,\frac{\mathrm{lb_f}}{\mathrm{ft}^3}$, se realiza la conversión:

$$\gamma = \left(0.062\,\frac{\mathrm{lb_f}}{\mathrm{ft}^3}\right)\left(157.1\,\frac{\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{m}^3}}{\frac{\mathrm{lb_f}}{\mathrm{ft}^3}}\right) \approx 9.74\,\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{m}^3}$$

Sabemos que

$$\gamma = \rho g \rightarrow \rho = \frac{\gamma}{g}$$

- ρ representa la densidad del fluido.
- g es la gravedad y equivale a $9.81\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}$.

Hallamos ρ:

$$\begin{aligned}\rho &= \frac{\gamma}{g} \\ &= \frac{9.74\,\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{m}^3}}{9.81\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}} \\ &\approx 0.992\,\frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{m}^3}\end{aligned}$$

Ahora es posible hallar $\dot{q}$:

$$\begin{aligned}\dot{q} &= \frac{\dot{m}}{\rho} \\ &= \frac{0.151\,\frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{s}}}{0.992\,\frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{m}^3}} \\ &\approx 0.152\,\frac{\mathrm{m}^3}{\mathrm{s}}\end{aligned}$$

Por lo tanto el flujo volumétrico $\dot{q}$ es $\approx 0.152\,\frac{\mathrm{m}^3}{\mathrm{s}}$

2. Continuidad

Ejercicio Si la velocidad de un líquido es de $1.65\,\frac{\text{ft}}{\text{s}}$ en una tubería de 12 in de diámetro interno ¿Cuál es la velocidad de un chorro que sale de una tubería de 3 in de diámetro interno?

Solución Definimos:

- $\bar{V}_i$ como la velocidad inicial del fluido igual a $1.65\,\frac{\text{ft}}{\text{s}}$.
- $\oslash_i$ como el diámetro inicial de la tubería e igual a 12 in que equivale a 1 ft.
- $\oslash_f$ como el diámetro final de la tubería e igual a 3 in y que en pies equivale a 0.25 ft.
- $\bar{V}_f$ cómo la velocidad final y es el valor que quermos hallar.

Derivado de la ley de continuidad tenemos que

$$A_1\bar{V}_1 = A_2\bar{V}_2$$

donde los A_n representan las áreas de la tubería con flujo continuo y los $\bar{V}_n$ representan las velocidades de los flujos para las secciones n de la tubería. Utilizando esto en nuestro problema tenemos

$$A_i\bar{V}_i = A_f\bar{V}_f$$

Luego,

$$\frac{A_i\bar{V}_i}{A_f} = \bar{V}_f$$

Dado que las tuberías son cilindricas, los A_n se convierten en hallar el área de dos círculos:

$$A_i = \frac{\pi(\oslash_i)^2}{4} = \frac{\pi(1\,\text{ft})^2}{4} = \frac{\pi}{8}\text{ft}^2$$
$$A_f = \frac{\pi(\oslash_f)^2}{4} = \frac{\pi(0.25\,\text{ft})^2}{4} = \frac{\pi}{64}\text{ft}^2$$

Ahora hallamos $\bar{V}_f$:

$$\begin{aligned}\bar{V}_f &= \frac{A_i\bar{V}_i}{A_f}\\ &= \frac{\frac{\pi}{8}\text{ft}^2(1.65\,\frac{\text{ft}}{\text{s}})}{\frac{\pi}{64}\text{ft}^2} = \frac{1}{8}\left(1.65\,\frac{\text{ft}}{\text{s}}\right)\\ &\approx 206.05\times10^{-3}\,\frac{\text{ft}}{\text{s}}\end{aligned}$$

Por lo tanto la velocidad en esa sección de la tubería será de $\approx 206.05\times10^{-3}\,\frac{\text{ft}}{\text{s}}$.

Ejercicio Una tubería de 150 mm de diámetro interno conduce $0.072\,\frac{\text{m}^3}{\text{s}}$ de agua. La tubería se divide en dos ramales. Si la velocidad de la tubería de 50 mm es de $12\,\frac{\text{m}}{\text{s}}$ ¿Cuál es la velocidad de la tubería de 100 mm?
Definimos:

- $\oslash_1$ como la tubería que tiene 150 mm de diámetro.
- $\dot{q}$ como el flujo volumétrico inicial y que lleva $0.072\,\frac{\text{m}^3}{\text{s}}$ de agua.
- $\oslash_{50}$ como la tubería que tiene 50 mm de diámetro.
- $\bar{V}_{50}$ la velocidad del fluído en la tubería de 50 mm y equivale a $12\,\frac{\text{m}^3}{\text{s}}$.
- $\oslash_{100}$ como la tubería que tiene 100 mm de diámetro.

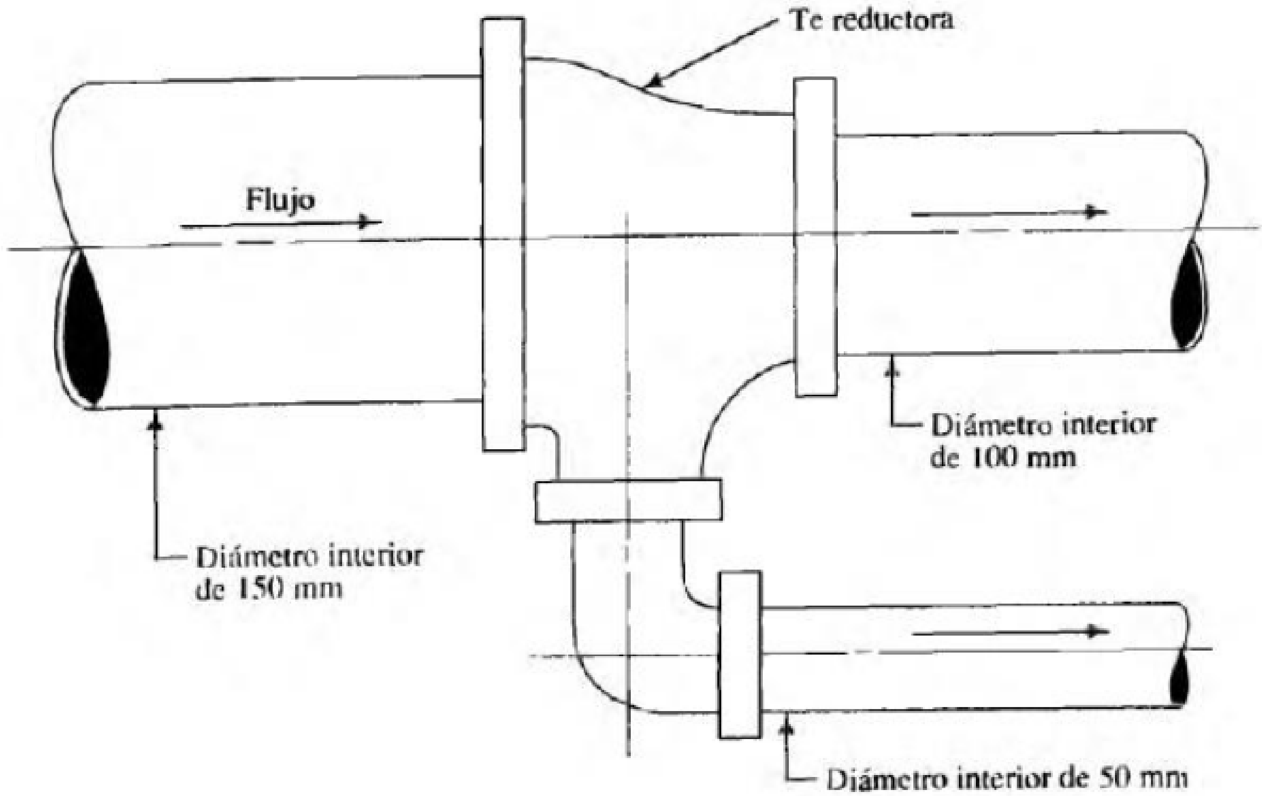

Figura 1: Imagen ejemplo del ejericicio.

Siendo $\dot{q}_{50}$ y $\dot{q}_{100}$ los flujos que van por cada una de las tuberías de 50 y 100 milímetros, por la ley de continuidad sabemos que:

$$\dot{q} = \dot{q}_{50} + \dot{q}_{100}$$

Adicionalmente

$$\dot{q}_n = A_n \bar{V}_n$$

por ello:

$$\dot{q}_{50} = A_{50} \bar{V}_{50}$$

Luego,

$$\begin{aligned} A_{50} &= \frac{\pi(\oslash_{50})^2}{4} \\ &= \frac{\pi(50 \times 10^{-3}\,\mathrm{m})^2}{4} \\ &\approx 1.963 \times 10^{-3}\,\mathrm{m}^2 \end{aligned}$$

Hallamos $\dot{q}_{50}$:

$$\begin{aligned} \dot{q}_{50} &= A_{50} \bar{V}_{50} \\ &= \left(1.963 \times 10^{-3}\,\mathrm{m}^2\right)\left(12\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}\right) \\ &\approx 0.024\,\frac{\mathrm{m}^3}{\mathrm{s}} \end{aligned}$$

Al reemplazar el la ecuación de flujos tenemos:

$$
\begin{aligned}
\dot{q}_{100} &= \dot{q} - \dot{q}_{50} \\
&= 0.072\,\frac{\mathrm{m}^3}{\mathrm{s}} - 0.024\,\frac{\mathrm{m}^3}{\mathrm{s}} \\
&= 0.048\,\frac{\mathrm{m}^3}{\mathrm{s}}
\end{aligned}
$$

$\dot{q}_{100}$ también se puede expresar como

$$\dot{q}_{100} = A_{100}\bar{V}_{100} \to \bar{V}_{100} = \frac{\dot{q}_{100}}{A_{100}}$$

Hallamos A_{100}:

$$
\begin{aligned}
A_{100} &= \frac{\pi(\oslash_{100})^2}{4} \\
&= \frac{\pi(100 \times 10^{-3}\,\mathrm{m})^2}{4} \\
&\approx 7.853 \times 10^{-3}\,\mathrm{m}^2
\end{aligned}
$$

finalmente podemos hallar $\bar{V}_{100}$:

$$
\begin{aligned}
\bar{V}_{100} &= \frac{\dot{q}_{100}}{A_{100}} \\
&= \frac{0.048\,\frac{\mathrm{m}^3}{\mathrm{s}}}{7.853 \times 10^{-3}\,\mathrm{m}^2} \\
&\approx 6.112\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}
\end{aligned}
$$

De modo que la velocidad en la túbería de 100 milímetros será de $6.112\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$.

Ejercicio Si $2000\,\frac{\mathrm{L}}{\mathrm{min}}$ de agua fluyen a través de una tubería de 300 mm de diámetro que después se reduce a 150 mm, calcule la velocidad promedio del flujo en cada tubería.

Solución Tenemos:

- El flujo volumétrico $\dot{q}$ que equivale a $2000\,\frac{\mathrm{L}}{\mathrm{min}}$ y que equivale a $2\,\frac{\mathrm{m}^3}{\mathrm{min}}$.
- El diámetro inicial de la tubería $\oslash_i$ y que equivale a $300 \times 10^{-3}\,\mathrm{m}$.
- El diámetro final de la tubería $\oslash_f$ y que equivale a $150 \times 10^{-3}\,\mathrm{m}$.

Por la ecuación del flujo volumétrico sabemos que

$$\dot{q} = A\bar{V} \to \bar{V} = \frac{\dot{q}}{A}$$

Definimos A_i y A_f como los valores de las áreas de las tubería inicial y final

$$A_n = \frac{\pi\oslash_n}{4}$$

Las hallamos con la formula anterior

$$
\begin{aligned}
A_i &= \frac{\pi(\oslash_i)^2}{4} \\
&= \frac{\pi(300 \times 10^{-3}\,\mathrm{m})^2}{4} \\
&\approx 0.07\,\mathrm{m}^2
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
A_f &= \frac{\pi(\oslash_f)^2}{4} \\
&= \frac{\pi(150 \times 10^{-3}\,\mathrm{m})^2}{4} \\
&\approx 0.017\,\mathrm{m}^2
\end{aligned}
$$

Luego ahora es posible hallar las velocidades:

$$
\begin{aligned}
\bar{V}_i &= \frac{\dot{q}}{A_i} \\
&= \frac{2\,\frac{\mathrm{m}^3}{\mathrm{min}}}{0.07\,\mathrm{m}^2} \\
&\approx 28.571\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{min}}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\bar{V}_f &= \frac{\dot{q}}{A_f} \\
&= \frac{2\,\frac{\mathrm{m}^3}{\mathrm{min}}}{0.017\,\mathrm{m}^2} \\
&\approx 117.647\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{min}}
\end{aligned}
$$

Por lo tanto para las condiciones del problema las velocidades del fluido en cada una de las tuberías será de $28.571\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{min}}$ y $117.647\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{min}}$.

3. Bernoulli

Ejercicio Por la tubería de la figura fluyen 0.11 $\frac{\mathrm{m}^3}{\mathrm{s}}$ de gasolina ($S = 0{,}67$) si la presión antes de la reducción es de 415 kPa, calcule la presión de la tubería de 75 mm de diámetro.

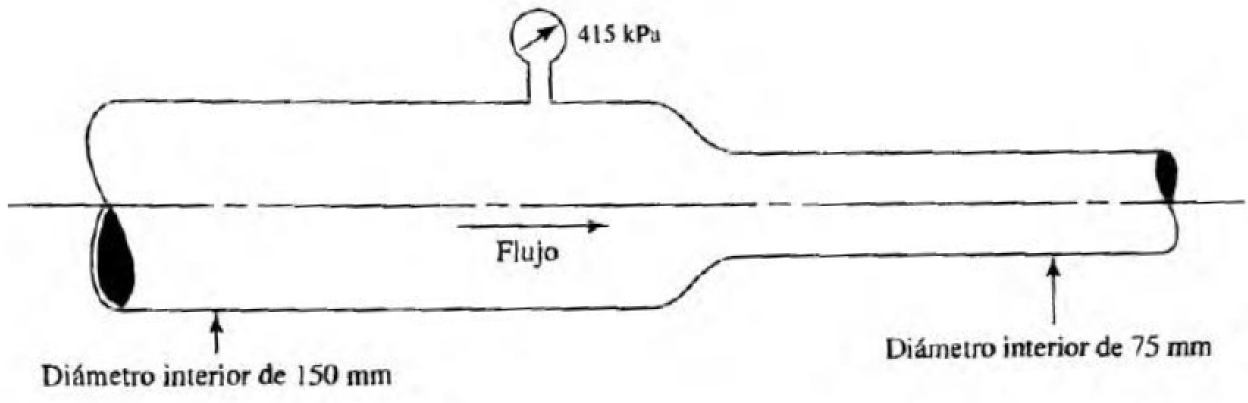

Figura 2: Imagen ejemplo del ejericicio.

Solución Utilizamos la ecuación de bernoulli

$$\frac{\rho(\bar{V}_i)^2}{2} + \rho g h_1 + P_1 = \frac{\rho(\bar{V}_f)^2}{2} + \rho g h_2 + P_2$$

Para éste problema no existen cambios de altura por lo que h_1 y h_2 pueden asumirse como 0 y tendríamos ahora

$$\frac{\rho(\bar{V}_1)^2}{2} + P_1 = \frac{\rho(\bar{V}_2)^2}{2} + P_2$$

Dónde:

- P_1 es la presión inicial y equivale a 415 kPa.
- $\dot{q}$ es el flujo volumétrico y equivale a 0.11 $\frac{\mathrm{m}^3}{\mathrm{s}}$.
- $\bar{V}_1$ y $\bar{V}_2$ son las velocidades en la tubería antes y después de la reducción. es posible obtenerlas con las ecuaciones de continuidad.

$$\begin{aligned}\bar{V}_1 &= \frac{\dot{q}}{A_1} \\ &= \frac{0.11\,\frac{\mathrm{m}^3}{\mathrm{s}}}{\frac{\pi(150\times10^{-3}\,\mathrm{m})^2}{4}} \\ &\approx 6.224\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\bar{V}_2 &= \frac{\dot{q}}{A_2} \\ &= \frac{0.11\,\frac{\mathrm{m}^3}{\mathrm{s}}}{\frac{\pi(75\times10^{-3}\,\mathrm{m})^2}{4}} \\ &\approx 24.899\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}\end{aligned}$$

- ρ es la densidad del fluido que se puede obtener mediante la fórmula de la gravedad específica:

$$S = \frac{\rho_x}{\rho_{H_2O}} \rightarrow \rho_x = S\rho_{H_2O}$$

ρ_{H_2O} es un valor conocido en condiciones ideales y equivale a 998 $\frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$.

$$\begin{aligned}\rho_x &= S\rho_{H_2O}\\ &= (0,67)\left(998\,\frac{\text{kg}}{\text{m}^3}\right)\\ &= 668.66\,\frac{\text{kg}}{\text{m}^3}\end{aligned}$$

Ahora reorganizamos los términos de la ecuación inicial para obtener el valor de P_2, así:

$$\frac{\rho(\bar{V}_1)^2}{2} + P_1 = \frac{\rho(\bar{V}_2)^2}{2} + P_2$$

$$\frac{\rho(\bar{V}_1)^2}{2} + P_1 - \frac{\rho(\bar{V}_2)^2}{2} = P_2$$

Reorganizando el sistema y evaluando con los valores conocidos obtenemos:

$$\begin{aligned}P_2 &= \frac{\rho}{2}\left[(\bar{V}_1)^2 - (\bar{V}_2)^2\right] + P_1\\ &= \left(\frac{668.66\,\frac{\text{kg}}{\text{m}^3}}{2}\right)\left[\left(6.224\,\frac{\text{m}}{\text{s}}\right)^2 - \left(24.899\,\frac{\text{m}}{\text{s}}\right)^2\right] + 415\times10^3\,\text{Pa}\\ &\approx 220.68\,\text{kPa}\end{aligned}$$

Por lo tanto la presión en la segunda sección de la tubería en donde se reduce el diámetro a 75 mm será cercana a 220.68 kPa.

Ejercicio Calcule el flujo volumétrico de agua a 5 °C que pasa por el sistema ilustrado en la figura.

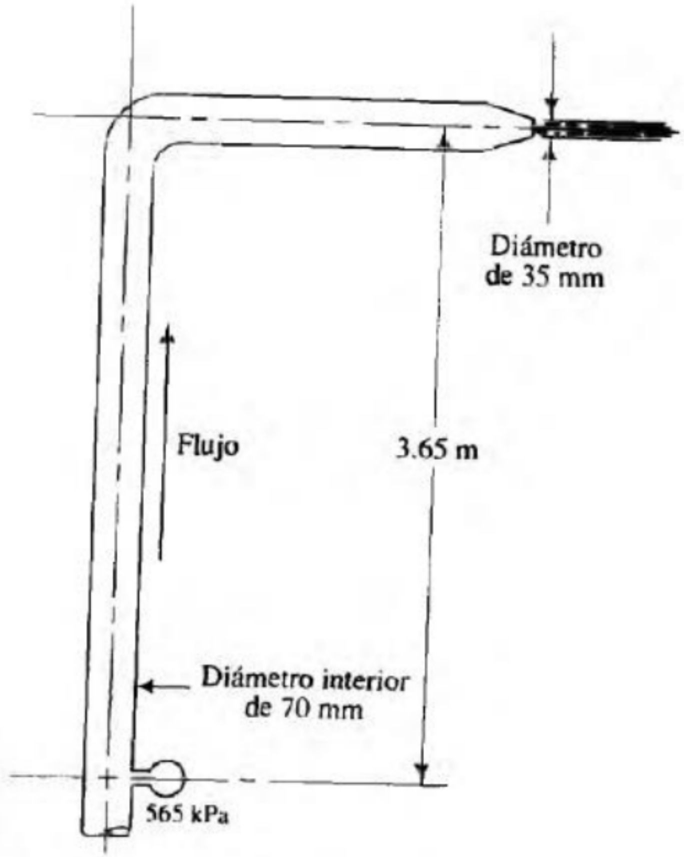

Figura 3: Imagen ejemplo del ejericicio.

Ejercicio Desde una tubería estándar de acero de 1 in cedula 40, fluye keroseno con peso específico de 50 $\frac{\text{lb}}{\text{ft}^3}$ a razón de 10 $\frac{\text{gal}}{\text{mín}}$ hacia otra tubería estándar también de acero de 2 in cedula 40. Calcule la diferencia en la presión de los dos tubos.

Ejercicio Para el sistema mostrado en la figura calcule la presión a la salida si la velocidad de agua a 25 °C es de 15 $\frac{\text{m}}{\text{s}}$.

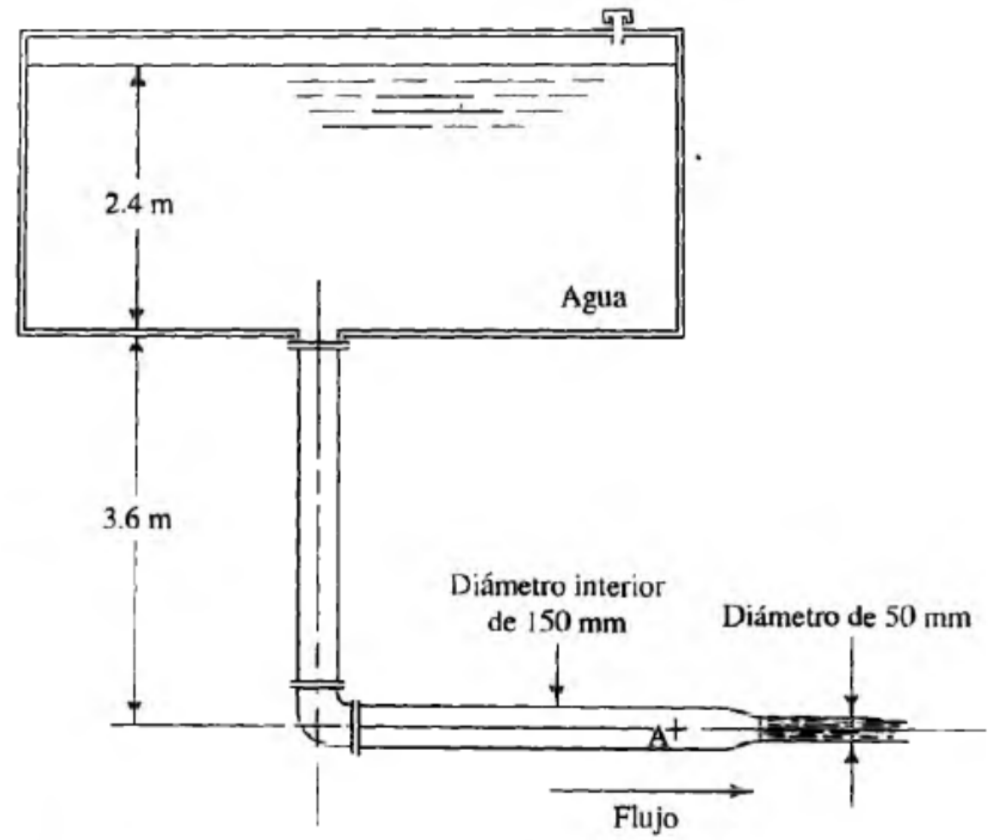

Figura 4: Imagen ejemplo del ejericicio.