La Función Beta

Miguel Angel Gomez Barrera

Fundación Universitaria Konrad Lorenz

2020

Preliminares

La función Beta y la función Gamma son conocidas como las integrales de Euler y se encuentran clasificadas en dos tipos:

- Del primer tipo: la función Beta.
- Del segundo tipo:la función Gamma.

$$\Gamma(x) = \int_0^\infty t^{x-1} e^{-t} dt,$$

con $x \in \mathbb{C} - \mathbb{Z}^-$, ya hemos visto que esta función contiene la función factorial, de modo que:

$$\Gamma(x+1) = (x-1)! = \int_0^\infty t^{x-1} e^{-t} dt$$

La Función Beta.

Conocida también como la integral de primer tipo de Euler, es de gran importancia debido a su conexión con la función gamma y a que muchas integrales complejas pueden ser reducidas a expresiones que involucran a ésta función.

Definición

La función beta, se denota como $B(x, y)$, definida como

$$B(x, y) = \int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1} dt$$

La Función Beta.

Propiedad de simetría.

$$B(x, y) = B(y, x).$$

Demostración.

Por la propiedad de convergencia de las integrales definidas tenemos

$$\int_0^a f(t)dt = \int_0^a f(a-t)dt,$$

De modo que rescribiendo la integral de la definición, tenemos

$$B(x, y) = \int_0^1 t^{y-1}(1-t)^{x-1}dt,$$

vemos por lo tanto que $B(x, y) = B(y, x)$. $\square$

La Función Beta.

Relación con la función Gamma.

Tenemos que

$$B(x, y) = \frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)},$$

para todos los enteros positivos x y y, definimos la función beta como

$$B(x, y) = \frac{(x-1)!(y-1)!}{(x+y-1)!}$$

La Función Beta.

Relación con la función Gamma.

Demostración.

Por la definición de la función gamma

$$\Gamma(s) = \int_0^\infty x^{s-1} e^{-x} dx,$$

podemos escribir

$$\Gamma(m)\Gamma(n) = \int_0^\infty x^{m-1} e^{-x} dx \int_0^\infty y^{n-1} e^{-y} dy,$$

y que podemos rescribir como la integral doble

$$\Gamma(m)\Gamma(n) = \int_0^\infty \int_0^\infty x^{m-1} y^{n-1} e^{-x-y} dxdy,$$

$\square$

La Función Beta.

Relación con la función Gamma.

Demostración.

$$\Gamma(m)\Gamma(n) = \int_0^\infty \int_0^\infty x^{m-1} y^{n-1} e^{-x-y} dy,$$

Aplicamos la sustitución $x = vt$ y $y = v(1-t)$, tenemos

$$\Gamma(m)\Gamma(n) = \int_0^1 t^{m-1}(1-t)^{n-1} dt \int_0^\infty v^{m+n-1} e^{-v} dv,$$

que es exactamente la definición de la función gamma y la función Beta, luego

$$\Gamma(m)\Gamma(n) = B(m,n)\Gamma(m+n)$$

y por tanto

$$B(m,n) = \frac{\Gamma(m)\Gamma(n)}{\Gamma(m+n)}$$