Identidad de Parseval

Miguel Angel Gomez Barrera

Fundación Universitaria Konrad Lorenz

2020

Resultados preliminares

Sea número complejo $z = a + ib$, su conjugado se le de denota por z^* o $\bar{z}$ tal que $\bar{z} = a - ib$.

Resultados preliminares

Sea número complejo $z = a + ib$, su conjugado se le de denota por z^* o $\bar{z}$ tal que $\bar{z} = a - ib$.

Propiedad producto

$$z \cdot \bar{z} = a^2 + b^2$$

Resultados preliminares

Serie compleja de Fourier.

En este momento tenemos que una serie de Fourier tiene la forma:

$$f(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(nx) + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin(nx),$$

En este momento tenemos que una serie de Fourier tiene la forma:

$$f(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(nx) + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin(nx),$$

también tenemos que las funciones trigonométricas las podemos expresar como:

$$\cos(x) = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}, \text{ y que } \sin(x) = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i} = \frac{-ie^{ix} + ie^{-ix}}{2},$$

Resultados preliminares

Serie compleja de Fourier.

En este momento tenemos que una serie de Fourier tiene la forma:

$$f(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(nx) + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin(nx),$$

también tenemos que las funciones trigonométricas las podemos expresar como:

$$\cos(x) = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}, \text{ y que } \sin(x) = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i} = \frac{-ie^{ix} + ie^{-ix}}{2},$$

Reemplazando esto en la serie original, tenemos

$$a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \left(\frac{e^{inx} + e^{-inx}}{2} \right) + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \left(\frac{-ie^{inx} + ie^{-inx}}{2} \right),$$

Resultados preliminares

Serie compleja de Fourier.

Agrupando términos de la serie obtenemos:

$$a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n - ib_n}{2} e^{inx} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n + ib_n}{2} e^{-inx},$$

Podemos cambiar los índices de las las sumas de n a $-n$, al efectuar este cambio podemos rescribir la expresión anterior en:

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{inx},$$

donde $c_n = \frac{a_n - ib_n}{2}$, ahora debemos hallar una fórmula para hallar c_n, para ello diremos que:

$$f(x)e^{-imx} = \sum_{-\infty}^{\infty} c_n e^{inx} e^{-imx},$$

Resultados preliminares

Serie compleja de Fourier.

Agrupando términos de la serie obtenemos:

$$a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n - ib_n}{2} e^{inx} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n + ib_n}{2} e^{-inx},$$

Podemos cambiar los índices de las las sumas de n a $-n$, al efectuar este cambio podemos rescribir la expresión anterior en:

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{inx},$$

donde $c_n = \frac{a_n - ib_n}{2}$, ahora debemos hallar una fórmula para hallar c_n, para ello diremos que:

$$f(x)e^{-imx} = \sum_{-\infty}^{\infty} c_n e^{inx} e^{-imx},$$

E integrando entre $-\pi$ y π:

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)e^{-imx}dx = \sum_{-\infty}^{\infty} c_n \int_{-\pi}^{\pi} e^{inx}e^{-imx}dx = 2\pi c_n,$$

luego,

$$c_n = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)e^{-inx}dx$$

Identidad de Parseval

Si $X(t)$ es la serie compleja de Fourier, con período T_0, la función cuadrado integrable $P(x)$ satisface:

$$P(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |c_n|^2$$

Prueba.

$$X(t) = \sum_{-\infty}^{\infty} c_n e^{inw_0 t},$$

por lo tanto su conjugada será,

$$\bar{X}(t) = \sum_{-\infty}^{\infty} c_n e^{-inw_0 t},$$

si multiplicamos ambos obtendremos por la propiedad de complejos que:

$$X(t) \cdot \bar{X}(t) = |X(t)|^2,$$

Identidad de Parseval

$$\begin{aligned} P(x) &= \frac{1}{T_0}\int_0^{T_0} |X(t)|^2 dt \\ &= \frac{1}{T_0}\int_0^{T_0} X(t)\cdot \bar{X}(t) \\ &= \frac{1}{T_0}\int_0^{T_0} X(t)\cdot \sum_{n=-\infty}^{\infty} \bar{c}_n e^{-inw_0 t} dt \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \bar{c}_n \frac{1}{T_0}\int_0^{T_0} X(t)\cdot e^{-inw_0 t} dt \end{aligned}$$

nótese que el término $\frac{1}{T_0}\int_0^{T_0} X(t)\cdot e^{-inw_0 t} dt$ es equivalente a c_n, por ende

$$= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \bar{c}_n \cdot c_n = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |c_n|^2$$