Assignment VI: Partial Differential Equations.

Leidy Catherine Sánchez, Miguel Angel Gómez

4 de noviembre de 2020

1. Reproduce in full detail the problem solved in the video 'Ultra-mega differential Equations Review Problem!!!' (https://www.youtu

Solución. Resolver

$$(1-x^2)y'' - 8xy' - 12y = 0, \tag{1}$$

en $(-1,1)$.

Series de potencias. Identificamos $P(x), Q(x)$ al reescribir la ecuación inicial:

$$y'' - \frac{8x}{(1-x^2)} - \frac{12y}{(1-x^2)} = 0, \tag{2}$$

Encontramos singularidades en $x_0 = -1, x_0 = 1$, ahora probamos si los puntos son singulares y regulares, como sigue

$$(x-x_0)P(x) = -\frac{x(x-x_0)}{(1-x^2)}, \quad (x-x_0)^2 Q(x) = -\frac{12(x-x_0)^2}{(1-x^2)},$$

$$\begin{aligned}\frac{x(x-x_0)}{(1-x^2)} &= \frac{x(x-x_0)}{x^2-1}, \\ &= \frac{x(x-x_0)}{(x-1)(x+1)}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}-\frac{12(x-x_0)^2}{(1-x^2)} &= \frac{12(x-x_0)^2}{(x^2-1)}, \\ &= \frac{12(x-x_0)^2}{(x-1)(x+1)}\end{aligned}$$

Ahora verificamos en $x_0 = -1$, $x_0 = 1$ En ambas funciones. En $x_0 = -1$, obtenemos

$$\frac{x(x+1)}{(x+1)(x-1)} = \frac{x}{x-1},$$

$$\frac{12(x+1)^2}{(x-1)(x+1)} = \frac{12(x+1)}{(x-1)},$$

Ambas analíticas por ende $x_0 = -1$ es singular regular. Ahora en $x_0 = 1$,

$$\frac{x(x-1)}{(x+1)(x-1)} = \frac{x}{x+1},$$

$$\frac{12(x-1)^2}{(x-1)(x+1)} = \frac{12(x-1)}{(x+1)},$$

$x_0 = 1$ es singular regular.

ahora supones que la solución de (1) tiene la forma de una serie de potencias,

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n, \tag{3}$$

y sus correspondientes derivadas,

$$y' = \sum_{n=0}^{\infty} n a_n x^{n-1}, \tag{4}$$

$$y'' = \sum_{n=0}^{\infty} n(n-1) a_n x^{n-2}, \tag{5}$$

Sustituímos (3), (4), (5) en (1) y desarrollamos cada producto, obtenemos

$$\begin{aligned}
0 &= (1-x^2)y'' - 8x - 12y, \\
&= (1-x^2)\sum_{n=0}^{\infty} n(n-1)a_n x^{n-2} - 8x\sum_{n=0}^{\infty} n a_n x^{n-1} - 12\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n, \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} n(n-1)a_n x^{n-2} - \sum_{n=0}^{\infty} n(n-1)a_n x^n - 8\sum_{n=0}^{\infty} n a_n x^n - 12\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n, \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} n(n-1)a_n x^{n-2} - \sum_{n=0}^{\infty} n(n-1)a_n x^n - \sum_{n=0}^{\infty}(8n+12)a_n x^n, \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} n(n-1)a_n x^{n-2} - \sum_{n=0}^{\infty}(n(n-1)+8n+12)a_n x^n,
\end{aligned}$$

al final, queremos unir todos los terminos dentre de una gran serie. Tenemos que reescribir los indices de algunas sumatorias, en particular la primera sumatoria, necesitamos factorizar el factor x pero en la primera sumatoria, la potencia es $n-2$, entonces movemos la sumatoria a $n=2$, pero nótese que los dos primeros términos son cero

$$0(0-1)a_0x^{-2} + 1(1-1)a_1x^{-1} + \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)a_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty}(n+2)(n+1)a_{n+2}x^n,$$

Hemos reindexado los coeficientes a_n, mediante la sustitución $n = n+2$, ahora retomando la serie anterior y sustituyendo este resultado

$$\begin{aligned}
0 &= \sum_{n=0}^{\infty} n(n-1)a_n x^{n-2} - \sum_{n=0}^{\infty}(n(n-1)+8n+12)a_n x^n, \\
&= \sum_{n=0}^{\infty}(n+2)(n+1)a_{n+2}x^n - \sum_{n=0}^{\infty}(n^2+7n+12)a_n x^n, \\
&= \sum_{n=0}^{\infty}(n+2)(n+1)a_{n+2}x^n - \sum_{n=0}^{\infty}(n+3)(n+4)a_n x^n, \\
&= \sum_{n=0}^{\infty}\left((n+2)(n+1)a_{n+2} - (n+3)(n+4)a_n\right)x^n.
\end{aligned}$$

Que sabemos es igual a cero, por ende

$$(n+2)(n+1)a_{n+2} - (n+3)(n+4)a_n = 0,$$

lo que nos lleva a la fórmula recursiva,

$$a_{n+2} = \frac{(n+3)(n+4)}{(n+2)(n+1)}a_n, \tag{6}$$

Ésta fórmula implica que a_0 y a_1 son constantes libres. Ahora nos concentraremos en los términos pares, por ello asignaremos a estas constantes los valores $a_0 = 1, a_1 = 0$, sin embargo a consecuencia de ello, todos los a_{2k+1} serán iguales a cero,

$$a_3 = \frac{(1+3)(1+4)}{(1+2)(1+1)}a_1 = \frac{(1+3)(1+4)}{(1+2)(1+1)}0 = 0,$$

$$a_5 = \frac{(2+3)(2+4)}{(2+2)(2+1)}a_3 = \frac{(2+3)(2+4)}{(2+2)(2+1)}0 = 0,$$

es por ello que únicamente serán de interés los términos de la forma a_{2k}, es decir $a_0, a_2, a_4, a_6, \ldots$, luego la relación de recurrencia toma la forma

$$\begin{aligned} a_{2n+2} &= \frac{(2n+3)(2n+4)}{(2n+2)(2n+1)}a_{2n}, \\ &= \frac{(2n+3)(2n+4)}{(2n+2)(2n+1)} \cdot \frac{(2n+1)(2n+2)}{(2n)(2n-1)}a_{2n-2}, \\ &= \frac{(2n+3)(2n+4)}{2n(2n-1)}a_{2n-2} \end{aligned}$$

Nótese que en términos de la recurrencia anterior

$$\begin{aligned} a_{(2n+2)-2} = a_{2n} &= \frac{(2n+3-2)(2n+4-2)}{(2n+2-2)(2n+1-2)}a_{2n-2}, \\ &= \frac{(2n+1)(2n+2)}{2n(2n-1)}a_{2n-2}. \end{aligned}$$

Continuando con el mismo procedimiento tenemos que

$$\begin{aligned} \frac{(2n+3)(2n+4)}{2n(2n-1)}a_{2n-2} &= \frac{(2n+3)(2n+4)}{2n(2n-1)} \cdot \frac{(2n-1)(2n)}{(2n-2)(2n-3)}a_{2n-4}, \\ &= \frac{(2n+3)(2n+4)}{(2n-2)(2n-3)}a_{2n-4}, \\ &\ldots \end{aligned}$$

cada vez que incrementamos de aquí en adelante un paso en la relación de recurrencia seguimos agregando y removiendo terminos de los pasos anteriores, sin embargo esto terminará en el término $a_2 = \frac{3\cdot 4}{2\cdot 1}a_0$, dada esta información, podemos reindexar la relación de recurrencia así

$$a_{2n} = \frac{(2n+1)(2n+2)}{2}$$

Nótese que en el último paso utilizamos el hecho de que a medida que avanzamos en la serie se simplifican terminos de la iteración anterior, en el numerador es por ello que únicamente conservamos el $\frac{a_0}{2} = \frac{1}{2}$. Ahora demostraremos por inducción ésta relación de recurrencia, primero el caso base

$$a_2 = \frac{3\cdot 4}{2\cdot 1} = a_{0+2} = \frac{(0+3)(0+4)}{(0+2)(0+1)}.$$

Ahora suponemos que esto se cumple para cualquier $k > 1$, luego nuestra hipótesis de inducción es

$$a_{2k} = \frac{(2k+1)(2k+2)}{2},$$

Nótese que

$$a_{2k+2} = \frac{(2k+3)(2k+4)}{(2k+2)(2k+1)}a_{2k},$$

Haciendo uso de la hipótesis de inducción en la anterior expresión nos lleva a

$$\begin{aligned}
\frac{(2k+3)(2k+4)}{(2k+2)(2k+1)}a_{2k} &= \frac{(2k+3)(2k+4)}{(2k+2)(2k+1)} \cdot \frac{(2k+1)(2k+2)}{2},\\
&= \frac{(2k+3)(2k+4)}{2},\\
&= \frac{(2(k+1)+1)(2(k+1)+2)}{2}
\end{aligned}$$

que es la forma original. Por ende la proposición anterior es verdadera. Ahora utilizaremos este resultado para acercarnos a nuestra solución mediante series de potencias, por ello, tenemos que

$$y_1 = \sum_{n=0}^{\infty} a_{2n}x^{2n} = \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty} \underbrace{(2n+2)(2n+1)x^{2n}}_{\frac{d^2}{dx^2}x^{(2n+2)}}, \quad a_0 = 1.$$

Uno de los términos tiene la forma de la segunda derivada de x^{2n}, por ende rescribiremos la anterior expresión

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty} a_{2n}x^{2n} &= \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{d^2}{dx^2}x^{(2n+2)},\\
&= \frac{1}{2}\frac{d^2}{dx^2}\sum_{n=0}^{\infty} x^{2n+2},\\
&= \frac{1}{2}\frac{d^2}{dx^2}\left(x^2\sum_{n=0}^{\infty} x^{2n}\right),
\end{aligned}$$

Sin embargo, nótese que $\sum_{n=0}^{\infty} u^n = \frac{1}{1-u}$, de modo que,

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}\frac{d^2}{dx^2}\left(x^2\sum_{n=0}^{\infty} x^{2n}\right) &= \frac{1}{2}\frac{d^2}{dx^2}\left(\frac{x^2}{1-x^2}\right),\\
&= \frac{1}{2}\frac{d^2}{dx^2}\left(\frac{x^2-1+1}{1-x^2}\right),\\
&= \frac{1}{2}\frac{d^2}{dx^2}\left(\frac{x^2-1}{1-x^2}+\frac{1}{1-x^2}\right),\\
&= \frac{1}{2}\frac{d^2}{dx^2}\left(-1+\frac{1}{1-x^2}\right),\\
&= \frac{1}{2}\frac{d}{dx}\left(\frac{2x}{(1-x^2)^2}\right),\\
&= \frac{1}{2}\left(\frac{2x(-2)(-2x)}{(1-x^2)^3}+\frac{2}{(1-x^2)^2}\right),\\
&= \frac{1}{2}\left(\frac{8x^2+2(1-x^2)}{(1-x^2)^3}\right),\\
&= \frac{1}{2}\left(\frac{8x^2+2-2x^2)}{(1-x^2)^3}\right),\\
&= \frac{1}{2}\left(\frac{6x^2+2}{(1-x^2)^3}\right),\\
&= \frac{3x^2+1}{(1-x^2)^3} = y_1.
\end{aligned}$$

Ahora hallamos su derivada, es decir y_1'

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}\left(\frac{3x^2+1}{(1-x^2)^3}\right) &= \frac{(3x^2+1)(-3)(-2x)}{(1-x^2)^4} + \frac{6x}{(1-x)^3},\\ &= \frac{6x(3x^2+1)+6x(1-x^2)}{(1-x^2)^4},\\ &= \frac{18x^3+6x+6x-6x^3}{(1-x^2)^4},\\ &= \frac{12x^3+12x}{(1-x^2)^4}.\end{aligned}$$

$$y_1' = \frac{12x^3+12x}{(1-x^2)^4}.$$

Identidad de Abel. La identida de Abel dice que si tenemos una ecuación diferencial de la forma

$$y'' + P(x)y' + Q(x)y = 0,$$

entonces el Wronskiano se puede escribir de dos maneras:

$$e^{-\int P(x)dx} = W = y_1y_2' - y_1'y_2, \tag{7}$$

Vamos a hallar el wronskiano, desde (2) conocemos que $P(x) = -\frac{8x}{1-x^2}$,

$$\begin{aligned}\int \frac{8x}{1-x^2}dx, u = 1-x^2, du = -2xdx,\ \text{entonces}\ 8x = -4du,&\\ \int \frac{8x}{1-x^2}dx = \int \frac{-4}{u}du = -4\ln u = \ln u^{-4},\ \text{entonces},&\\ e^{\ln u^{-4}} = u^{-4} = \frac{1}{(1-x^2)^4},&\\ W = \frac{1}{(1-x^2)^4} = y_1y' - y_1'y.&\end{aligned}$$

Sustituimos el valor conocido para y_1 en la ecuación del wronkskiano,

$$\begin{aligned}W = \frac{1}{(1-x^+2)^4} &= y_1y' - y_1'y,\\ &= \frac{3x^2+1}{(1-x^2)^3}y' - \frac{12x^3+12x}{(1-x^2)^4}y.\end{aligned}$$

Tenemos ahora la siguiente ecuación diferencial

$$\frac{3x^2+1}{(1-x^2)^3}y' - \frac{12x^3+12x}{(1-x^2)^4}y = \frac{1}{(1-x^+2)^4}, \tag{8}$$

La cual resolveremos mediante el método del factor integrante. Pero primero debemos llevar la ecuación a la forma

$$y' + A(x)y = B(X),$$

Vamos a operar la ecuación (8) para llevarla a la forma deseada

$$\begin{aligned}
\frac{3x^2+1}{(1-x^2)^3}y' - \frac{12x^3+12x}{(1-x^2)^4}y &= \frac{1}{(1-x^2)^4},\\
(3x^2+1)y' - \frac{12x^3+12x}{1-x^2}y &= \frac{1}{1-x^2},\\
y' - \frac{12x^3+12x}{(3x^2+1)(1-x^2)}y &= \frac{1}{(3x^2+1)(1-x^2)},\\
y' + \frac{12x^3+12x}{(3x^2+1)(x^2-1)}y &= \frac{1}{(3x^2+1)(1-x^2)},\\
y' + \frac{12x^3+12x}{(3x^2+1)(x^2-1)}y &= \frac{1}{(3x^2+1)(1-x^2)},
\end{aligned}$$

Luego,

$$\begin{aligned}
A(x) &= \frac{12x^3+12x}{(3x^2+1)(x^2-1)},\\
B(x) &= \frac{1}{(3x^2+1)(1-x^2)},
\end{aligned}$$

y por el método del factor integrante, debemos hallar

$$\alpha(x) = e^{\int A(x)dx},$$

Calculamos ahora la integral mediante fracciones parciales,

$$\begin{aligned}
\frac{12x^3+12x}{(3x^2+1)(x^2-1)} &= \frac{12x^3+12x}{(3x^2+1)(x-1)(x+1)},\\
&= \frac{A}{x+1} + \frac{B}{x-1} + \frac{Cx+D}{3x^2+1},\\
12x^3+12x &= A(x-1)(3x^2+1) + B(x+1)(3x^2+1) + (Cx+D)(x^2-1),\\
&= 3Ax^3 - 3Ax^2 + Ax - A + 3Bx^3 + 3Bx^2 + Bx + B + Cx^3 + Dx^2 - Cx - D,\\
&= x^3(3A+3B+C) + x^2(-3A+3B+D) + x(A+B-C) + (-A+B+D)
\end{aligned}$$

Agrupando términos semejantes, tenemos el siguiente sistema de equaciones

$$12 = 3A+3B+C, \tag{9}$$

$$0 = -3A+3B+D, \tag{10}$$

$$12 = A+B-C, \tag{11}$$

$$0 = -A+B+D. \tag{12}$$

De las ecuaciones (10) y (12) se sigue que $D = 0$ y que $A = B$: multiplicando (12) por (-3) y sumamos con la ecuación (10), reemplazando el resultado $D = 0$ en (12) vemos que $A = B$. Ahora hallamos el valor de A y B. Sumando las ecuaciones (9) y (11) $24 = 4A + 4B$, pero $A = B$ luego $24 = 8B$ entonces $A = B = 3$, así las cosas hallamos C, reemplazando en la ecuación (11) tenemos que $12 = 6 - C$, luego $C = -12 + 6 = -6$ y reemplazando de nuevo $A(x)$,

$$A(x) = \frac{3}{x+1} + \frac{3}{x-1} - \frac{6x}{3x^2+1}.$$

Ahora hallamos la integral $A(x)$,

$$\int A(x)dx = \int \left(\frac{3}{x+1} + \frac{3}{x-1} - \frac{6x}{3x^2+1}\right)dx,$$

$$\begin{aligned}
\int \left(\frac{3}{x+1} + \frac{3}{x-1} - \frac{6x}{3x^2+1}\right)dx &= 3\ln(x+1) + 3\ln(x-1) - \ln(3x^2+1),\\
&= \ln\frac{(x^2-1)^3}{3x^2+1}.
\end{aligned}$$

Resolviendo la ecuación diferencial de primer orden. Ahora sutituyendo, hallamos el factor integrante

$$\alpha(x) = e^{\ln \frac{(x^2-1)^3}{3x^2+1}} = \frac{(x^2-1)^3}{3x^2+1}$$

Por el método del factor integrante, la solución tiene la forma

$$y = \frac{1}{\alpha(x)}\left(C + \int \alpha(x)B(x)dx\right),$$

Sustituyendo con los valores ya conocidos, rescribimos la expresión anterior como

$$y = -\frac{3x^2+1}{(x^2-1)^3}\int \frac{(x^2-1)^2}{(3x^2+1)^2}dx,$$

Ahora debemos resolver la integral

$$\int \frac{(x^2-1)^2}{(3x^2+1)^2}dx,$$

la resolveremos mediante fracciones parciales. Primero realizaremos el cociente

$$\begin{aligned}
\frac{(x^2-1)^2}{(3x^2+1)^2} &= \frac{x^3-2x^2+1}{9x^4+6x^2+1}, \\
&= \frac{1}{9} + \frac{8}{9(3x^2+1)^2} - \frac{8x^2}{3(3x^2+1)^2}
\end{aligned}$$

para los últimos dos términos utilizaremos fracciones parciales, pero primero debemos rescribirlos,

$$\begin{aligned}
\frac{8}{9(3x^2+1)^2} - \frac{8x^2}{3(3x^2+1)^2} &= \frac{\frac{8}{9}-\frac{8x}{3}}{(3x^2+1)^2}, \\
&= \frac{\frac{8}{9}-\frac{24x}{9}}{(3x^2+1)^2}, \\
&= \frac{\frac{8}{9}(1-3x^2)}{(3x^2+1)^2}, \\
&= \frac{-\frac{8}{9}(3x^2-1)}{(3x^2+1)^2}, \\
&= \frac{-8(3x^2-1)}{9(3x^2+1)^2}
\end{aligned}$$

Dada la forma de los términos del denominador, supondremos la siguiente expansión en fracciones parciales

$$\begin{aligned}
\frac{-8(3x^2-1)}{9(3x^2+1)^2} &= \frac{Ax+B}{3x^2+1} + \frac{Cx+D}{(3x^2+1)^2}, \\
&= \frac{(Ax+B)(3x^2+1)+Cx+D}{(3x^2+1)^2}, \\
\frac{-8}{9}(3x^2-1) &= (Ax+B)(3x^2+1)+Cx+D, \\
\frac{-8}{3}x^2+\frac{8}{9} &= 3Ax^3+Ax+3Bx^2+B+Cx+D, \\
&= 3Ax^3+3Bx^2+x(A+C)+B+D,
\end{aligned}$$

Asociando términos semejantes, tenemos el siguiente sistema de ecuaciones a resolver,

$$x^3 : 0 = 3A \to A = 0, \tag{13}$$

$$x^2 : -\frac{8}{3} = 3B \to B = -\frac{8}{9}, \tag{14}$$

$$x : 0 = A+C = 0+C = 0 \to C = 0, \tag{15}$$

$$\frac{8}{9} : \frac{8}{9} = B+D = -\frac{8}{9}+D \to D = \frac{16}{9}, \tag{16}$$

dados los resultados de las ecuaciones (13), (14), (15) y (12) al ser sustituídos el la expansión propuesta, nos deja

$$\begin{aligned}\frac{-8(3x^2-1)}{9(3x^2+1)^2} &= \frac{0-\frac{8}{9}}{3x^2+1} + \frac{0+\frac{16}{9}}{(3x^2+1)^2}, \\ &= -\frac{8}{9(3x^2+1)} + \frac{16}{9(3x^2+1)^2}.\end{aligned}$$

Devolviendonos a la integral original, ahora podemos rescribirla como

$$\begin{aligned}\int \frac{(x^2-1)^2}{(3x^2+1)^2}dx &= \int \left(\frac{1}{9} - \frac{8}{9(3x^2+1)} + \frac{16}{9(3x^2+1)^2}\right)dx, \\ &= \frac{1}{9}x + \int \frac{16}{9(3x^2+1)^2}dx - \int \frac{8}{9(3x^2+1)}dx,\end{aligned}$$

Resolveremos ahora la primera integral, para ello realizaremos sutituciones trigonométricas,

$$x = \frac{\tan(s)}{\sqrt{3}}, \;\; dx = \frac{\sec^2(s)}{\sqrt{3}}ds,$$

con $s = \arctan(\sqrt{3}x)$, y por ende también

$$(3x^2+1)^2 = (\tan^2(s)+1)^2 = \sec^4(s),$$

luego, reescribimos la integral como

$$\begin{aligned}\int \frac{16}{9(3x^2+1)^2}dx &= \frac{16}{9\sqrt{3}}\int \frac{\sec^2(s)}{\sec^4(s)}ds, \\ &= \frac{16}{9\sqrt{3}}\int \frac{1}{\sec^2(s)}ds, \\ &= \frac{16}{9\sqrt{3}}\int \cos^2(s)ds, \\ &= \frac{16}{9\sqrt{3}}\int \left(\frac{1}{2}\cos(2s) + \frac{1}{2}\right)ds, \\ &= \frac{16}{9\sqrt{3}}\left(\frac{1}{4}\sin(2s) + \frac{1}{2}s\right), \\ &= \frac{4}{9\sqrt{3}}\sin(2s) + \frac{8}{9\sqrt{3}}s.\end{aligned}$$

ahora volvemos en términos de x,

$$\frac{4}{9\sqrt{3}}\sin(2\arctan(\sqrt{3}x)) + \frac{8}{9\sqrt{3}}\arctan(\sqrt{3}x),$$

Rescribimos el primer término utilizando la identidad

$$2\arctan(x) = \arcsin\left(\frac{2x}{1+x^2}\right),$$

De modo que

$$\begin{aligned}\frac{4}{9\sqrt{3}}\sin(2s) &= \frac{4}{9\sqrt{3}}\sin\left(\arcsin\left(\frac{2\sqrt{3}x}{1+3x^2}\right)\right), \\ &= \frac{4}{9\sqrt{3}}\left(\frac{2\sqrt{3}x}{1+3x^2}\right), \\ &= \frac{8x}{9(1-3x^2)}, \\ &= \frac{8x}{9(3x^2+1)}.\end{aligned}$$

Luego,

$$\int \frac{16}{9(3x^2+1)^2}dx = \frac{8x}{9(3x^2+1)} + \frac{8}{9\sqrt{3}}\arctan\left(\sqrt{3}x\right)$$

Ahora resolveremos la segunda integral también por sustitución. Sea

$$-\int \frac{8}{9(3x^2+1)}, u = \sqrt{3}x, \quad du = \sqrt{3}dx,$$

de modo que al rescribir tenemos la integral

$$-\int \frac{8}{9(3x^2+1)}dx = -\frac{8}{9\sqrt{3}}\int \frac{1}{u^2+1}du = -\frac{8}{9\sqrt{3}}\arctan\left(\sqrt{3}x\right).$$

Juntando el resultado anterior, tenemos que

$$\int \frac{(x^2-1)^2}{(3x^2+1)^2}dx = \int \left(\frac{1}{9} - \frac{8}{9(3x^2+1)} + \frac{16}{9(3x^2+1)^2}\right)dx,$$

$$\begin{aligned}
\int \left(\frac{1}{9} - \frac{8}{9(3x^2+1)} + \frac{16}{9(3x^2+1)^2}\right)dx &= \frac{1}{9}x - \frac{8}{9\sqrt{3}}\arctan\left(\sqrt{3}x\right) + \frac{8x}{9(3x^2+1)} + \frac{8}{9\sqrt{3}}\arctan\left(\sqrt{3}x\right), \\
&= \frac{1}{9}x + \frac{8x}{9(3x^2+1)}, \\
&= \frac{x(3x^2+1)+8x}{9(3x^2+1)}, \\
&= \frac{3x^3+x+8x}{9(3x^2+1)}, \\
&= \frac{3x^3+9x}{9(3x^2+1)}, \\
&= \frac{3x(x^2+3)}{9(3x^2+1)}, \\
&= \frac{x(x^2+3)}{3(3x^2+1)}, \\
&= \frac{x(x^2+3)}{9x^2+3}.
\end{aligned}$$

Volviendo nuevamente a nuestra solución particular, ésta toma la forma

$$\begin{aligned}
y &= \frac{3x^2+1}{(x^2-1)^3}\left(\frac{x(x^2+3)}{9x^2+3}\right), \\
&= \frac{3x^2+1}{(x^2-1)^3}\left(\frac{x(x^2+3)}{3(3x^2+1)}\right), \\
&= \frac{1}{(x^2-1)^3}\left(\frac{x(x^2+3)}{3}\right), \\
&= \frac{x(x^2+3)}{3(x^2-1)^3}.
\end{aligned}$$

Y finalmente, por el principio de superposición la suma de nuestras soluciones serán la solución general,

$$\begin{aligned}
y &= C_1\left(\frac{3x^2+1}{(1-x^2)^3}\right) + C_2\left(\frac{x(x^2+3)}{3(x^2-1)^3}\right), \\
&= C_1\left(\frac{3x^2+1}{(1-x^2)^3}\right) + C_2\left(\frac{x(x^2+3)}{3(1-x^2)^3}\right), \\
&= \frac{3C_1(3x^2+1)+C_2x(x^2+3)}{3(1-x^2)^3}.
\end{aligned}$$

Nótese que las constantes de integración fueron únicamente añadidas al final y como nota final, en el video debido a un error en 58:28:27 se olvida incluir 3 en el denominador de la fracción y por ello los resultados difieren del video.

2. Establish the following properties of the Bessel series

Las series de Bessel tienen la forma:

$$J_p(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(\frac{x}{2})^{2n+p}}{n!(n-p)!}. \tag{17}$$

(a) $J_0(0) = 1, J_p(0) = 0$ si $p > 0$. Sustituyendo en (17), tenemos que:

$$J_0(0) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{0}{n! \cdot n!} = \sum_{n=0}^{\infty} 0 = 0.$$

$$J_p(0) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{0}{n!(n-p)!} = \sum_{n=0}^{\infty} 0 = 0.$$

(b) $J_n(x)$ is an even function if n is even, and odd if n is odd.

Si es par. $n = 2k$ y por ende su serie de Bessel es de la forma

$$J_{2k}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(\frac{x}{2})^{2(n+k)}}{n!(n+2k)!}, \tag{18}$$

se evidencia que $f(x) = f(-x)$, porque el numerador $(\frac{x}{2})$ siempre estará elevado a un número par, por lo que:

$$\left(\frac{-x}{2}\right)^{2(n+k)} = \left(\frac{x}{2}\right)^{2(n+k)}.$$

Si es impar. $n = 2k+1$, la serie de Bessel es de la forma

$$J_{2k+1}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(\frac{x}{2})^{2(n+k)+1}}{n!(n+2k+1)!}, \tag{19}$$

de modoque se evidencia que $f(x) \neq f(-x)$, pues el numerador $(\frac{x}{2})^{2(n+k)+1}$ siempre estará elevado a un número impar y no se cumplirá que

$$\left(\frac{-x}{2}\right)^{2(n+k)+1} = \left(\frac{x}{2}\right)^{2(n+k)+1}.$$

(c) $\lim_{x \to 0^+} \frac{J_p(x)}{x^p} = \frac{1}{2\Gamma(p+1)}$.

Plateamos y desarrollamos el siguiente límite

$$\begin{aligned}
\lim_{n \to 0^+} \frac{J_p(x)}{x^p} &= \lim_{n \to 0^+} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(\frac{x}{2})^{2n+p}}{n!(n+p)!x^p} \\
&= \lim_{n \to 0^+} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{2^p \cdot n!(n+p)!} \\
&= 1 \cdot \frac{x^0}{2^p 1!(1+p)!} \\
&= \frac{1}{2^p 1!(1+p)!} \\
&= \frac{1}{2^p \Gamma(1+p)}.
\end{aligned}$$

3 Proof the identities.

(a) $J_{\frac{3}{2}}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \left[\frac{\sin x}{x} - \cos x \right].$

Primero demostraremos la siguiente propiedad:

$$\frac{2n}{x} J_n(x) = J_{n-1}(x) + J_{n+1}(x), \tag{20}$$

Consideremos la siguiente derivada:

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dx} \left(x^{-n} J_n(x) \right) &= \frac{d}{dx} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^k x^{2k}}{2^{n+2k} k! \Gamma(n+k+1)}, \\
&= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k 2k x^{2k-1}}{2^{n+2k} k! \Gamma(n+k+1)}, \\
&= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k 2k x^{2k-1}}{2^{n+2k} k(k-1)! \Gamma(n+k+1)}, \\
&= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k x^{2k-1}}{2^{n+2k-1} (k-1)! \Gamma(n+k+1)}, \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1} x^{2k+1}}{2^{n+2k+1} (k)! \Gamma(n+k+2)}, \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1} x^{2k+1}}{2^{n+2k+1} (k)! \Gamma(n+k+2)}, \\
&= -x^{-n} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k x^{(n+1)+2k}}{2^{n+1+2k} k! \Gamma(n+1+k+1)}, \\
&= -x^{-n} J_{n+1}(x),
\end{aligned}$$

de esta forma

$$\frac{d}{dx} \left(x^{-n} J_n(x) \right) = -x^{-n} J_{n+1}(x). \tag{21}$$

Ahora consideremos la derivada:

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dx} \left(x^{n} J_n(x) \right) &= \frac{d}{dx} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k x^{2(n+k)}}{2^{n+2k} k! \Gamma(n+k+1)}, \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k 2(n+k) x^{2(n+k)-1}}{2^{n+2k} k! \Gamma(n+k+1)}, \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k 2(n+k) x^{2(n+k)-1}}{2^{n+2k} k! (n+k) \Gamma(n+k)}, \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k x^{2(n+k)-1}}{2^{n+2k-1} k! \Gamma(n+k)}, \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k x^{(n-1)+2k}}{2^{(n-1)+2k} k! \Gamma((n-1)+k+1)}, \\
&= x^n \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k x^{(n-1)+2k}}{2^{(n-1)+2k} k! \Gamma((n-1)+k+1)}, \\
&= x^n J_{n-1}(x),
\end{aligned}$$

de esta forma

$$\frac{d}{dx} \left(x^{n} J_n(x) \right) = x^n J_{n-1}(x). \tag{22}$$

Ahora, de las expresiones (21) y (22) despejemos $J_{n+1}(x)$ y $J_{n-1}(x)$ respectivamente

$$J_{n+1} = -x^n \frac{d}{dx}(x^{-n}J_n(x)) = -x^n(x^{-n}J_n'(x) - nx^{n-1}J_n(x)), \tag{23}$$
$$= -J_n'(x) + \frac{n}{x}J_n(x). \tag{24}$$

$$J_{n-1}(x) = x^{-n}\frac{d}{dx}\ (x^nJ_n(x)) = -x^{-n}(x^nJ_n'(x) + nx^{n-1}J_n(x)), \tag{25}$$
$$= J_n'(x) + \frac{n}{x}J_n(x). \tag{26}$$

sumando las expresiones (24) y (26) se tiene que:

$$J_{n+1}(x) + J_{n-1}(x) = -J_n'(x) + \frac{n}{x}J_n(x) + J_n'(x) + \frac{n}{x}J_n(x), \tag{27}$$
$$= \frac{n}{x}J_n(x) + \frac{n}{x}J_n(x), \tag{28}$$
$$= \frac{2n}{x}J_n(x). \tag{29}$$

donde,

$$\left(n+\frac{1}{2}\right)\left(n-\frac{1}{2}\right)\cdots\left(\frac{3}{2}\right)\left(\frac{1}{2}\right) = \left(\frac{2n+1}{2}\right)\left(\frac{2n-1}{2}\right)\cdots\left(\frac{3}{2}\right)\left(\frac{1}{2}\right)$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{2^{n+1}}(2n+1)(2n-1)\dots(3)(1),\\
&= \frac{1}{2^{n+1}}\frac{(2n+2)(2n+1)(2n)(2n-1)\dots(4)(3)(2)(1)}{(2n+2)(2n)\dots(4)(2)},\\
&= \frac{1}{2^{n+1}}\frac{(2n+2)!}{2^{n+1}(n+1)(n)\dots(2)(1)},\\
&= \frac{1}{4^{n+1}}\frac{(2n+2)!}{(n+1)!}
\end{aligned}$$

y $\int_0^\infty t^{-\frac{1}{2}}e^{-t}$, por sustitución, $y = t^{\frac{1}{2}}, dy = \frac{1}{2}y^{-\frac{1}{2}}dt$, luego rescribiendo la integral, tenemos que

$$Q = 2\int_0^\infty e^{-y^2}dy,$$

ahora diremos que

$$\begin{aligned}
Q^2 &= 2\left(\int_0^\infty e^{-x^2}dx\right)\left(\int_0^\infty e^{-y^2}dy\right) = 2\int_0^\infty\left(\int_0^\infty e^{-x^2}dx\right)e^{-y^2}dy,\\
&= 2\int_0^\infty\left(\int_0^\infty e^{i-x^2+y^2}dx\right)dy = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\int_0^\infty e^{-r^2}rdr\right)d\theta,\\
&= 2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(-\frac{1}{2}e^{-r^2}\Big|_0^\infty\right)d\theta = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{2}d\theta = \pi,
\end{aligned}$$

Si $Q^2 = \pi$, $Q = \sqrt{\pi}$. De manera que $\Gamma(k+\frac{3}{2}) = \frac{1}{4^{n+1}}\frac{(2n+2)!}{(n+1)!} = \sqrt{\pi}$ y

$$\begin{aligned}
J_{\frac{1}{2}}(x) &= \sqrt{\frac{2}{x}}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k2^{(2k+1)}k!x^{2k+1}}{2^{2k+1}k!(2k+1)!\sqrt{\pi}},\\
&= \sqrt{\frac{2}{\pi x}}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^j}{(2k+1)!}x^{2k+1},\ \text{y por series de Taylor que}\\
&= \sqrt{\frac{2}{\pi x}}\sin x.
\end{aligned}$$

De manera análoga se tiene que

$$J_{-\frac{1}{2}}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \cos x,$$

y reemplazando los dos resultados anteriores en la equación (20), se tiene que

$$\begin{aligned} J_{\frac{3}{2}}(x) &= -\sqrt{\frac{2}{\pi x}} \cos x + \frac{1}{x}\sqrt{\frac{2}{\pi x}} \sin x, \\ &= \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \left(\frac{\sin x}{x} - \cos x\right) \qquad \blacksquare. \end{aligned}$$

(b) $J_{-\frac{3}{2}}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}}\left[-\frac{\cos x}{x} - \sin x\right]$. Aplicando las propiedades desarrolladas en el inciso (a), tenemos que

$$\begin{aligned} \frac{2n}{x} J_n(x) &= -J_{n-1}(x) + J_{n+1}(x), \\ J_{n-1}(x) &= \left(J_{n+1}(x) - \frac{2n}{x} J_n(x)\right). \end{aligned}$$

Si $J_{n-1}(x) = J_{-\frac{3}{2}}(x)$, ello implica que $n = -\frac{1}{2}$ y que

$$\begin{aligned} J_{-\frac{3}{2}}(x) &= \left(J_{-\frac{1}{2}}(x) - \frac{1}{x} J_{-\frac{1}{2}}(x)\right), \\ &= -\sqrt{\frac{2}{\pi x}} \sin x - \frac{1}{x}\sqrt{\frac{2}{\pi x}} \cos x, \\ &= \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \left(-\sin x - \frac{\cos x}{x}\right). \end{aligned}$$

4 Prove that

(a) $\cos(x) = J_0(x) + 2\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k J_{2k}(x)$.

Una de las funciones generadoras de $J_n(x)$ es

$$g(x,t) = e^{\left(\frac{x}{2}\right)(z-z^{-1})}, \tag{30}$$

y

$$\begin{aligned} e^{\left(\frac{x}{2}\right)(z-z^{-1})} &= \sum_{i=0}^{\infty} \frac{\left(\frac{x}{2}\right)^i}{i!} z^i \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(-1)^j \left(\frac{x}{2}\right)^i}{j!} z^{-j}, && \text{(series de Taylor)}, \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left(\sum_{i-j=n, i,j\geq 0} \frac{(-1)^j \left(\frac{x}{2}\right)^{i+j}}{i!j!} \right) z^n, && \text{(propiedades de sumatoria)}, \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left(\sum_{j=0}^{\infty} \frac{(-1)^j}{(n+j)!j!} \left(\frac{x}{2}\right)^{2j} \left(\frac{x}{2}\right)^n \right) z^n, \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(x) z^n. \end{aligned}$$

Ahora, por la fórmula de Euler, podemos establecer que $z = e^{i\theta}$ y $i\sin\theta = \frac{1}{2}(z - z^-1)$, obteniendo que

$$\cos(x\sin\theta) + i\sin(x\sin\theta) = e^{ix\sin\theta} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(x) e^{in\theta},$$

$$= \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(x)(\cos(n\theta) + i\sin(n\theta)),$$

Por lo que

$$\cos{(x\sin\theta)} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(x)\cos{(n\theta)} \quad \text{y} \quad \sin{(x\sin\theta)} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(x)\sin{(n\theta)}. \tag{31}$$

Si $\theta = \frac{\pi}{2}, \cos x = \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(x)\cos\left(\frac{n\pi}{2}\right)$.

Supongamos que $n = 0$, así $\cos\left(\frac{n\pi}{2}\right) = \cos\left(\frac{-n\pi}{2}\right) = 1$.

Por el ejercicio (3) del taller se puede concluir que $J_{-n}(x) = (-1)^n J_n(x)$, de hecho como la función gamma está definida para $\mathbb{N}$,

$$\begin{aligned}
J_{-n}(x) &= \sum_{k=n}^{\infty} \frac{(-1)^k\left(\frac{x}{2}\right)^{2k-n}}{\Gamma(k+1)\Gamma(-n+k+1)}, \\
&= \left(\frac{x}{2}\right)^{-n} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^{k+n}}{\Gamma(n+k+1)\Gamma(-n+n+k-1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2(n+k)} \\
&= \left(\frac{x}{2}\right)^{-n} \left(\frac{x}{2}\right)^{2n} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k(-1)^n}{\Gamma(n+k-1)\Gamma(k+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k}, \\
&= (-1)^n J_n(x).
\end{aligned}$$

entonces,

$$\begin{aligned}
J_n(x)\cos\left(\frac{n\pi}{2}\right) + J_{-n}(x)\cos\left(\frac{-n\pi}{2}\right) &= J_n(x) + J_n(x), \\
&= 2J_n(x).
\end{aligned}$$

Si $n = 1$ ó $n = 3$, $\cos\left(\frac{n\pi}{2}\right) = \cos\left(\frac{-n\pi}{2}\right) = 0$.

Si $n = 2$, $\cos\left(\frac{n\pi}{2}\right) = \cos\left(\frac{-n\pi}{2}\right) = -1$.

Si $n = 4$, pues tenemos el mismo caso de $n = 0$ y así sucesivamente.

De esta forma, tomando en cuenta todos los posibles valores que puede tomar n, se reescribe $\cos x$ así

$$\cos x = \underbrace{2\sum_{n=1}^{\infty} J_{2n}(-1)^n}_{\text{Para } n=0,2,4,\ldots}.$$

(b) $\sin{(x)} = 2\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k J_{2k+1}(x)$. De la ecuación (31)

Si $\theta = \frac{\pi}{2}$, $\sin{(x)} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(x)\sin\left(\frac{-n\pi}{2}\right)$.

Supongamos que

$$\begin{aligned}
n = 1, &\quad \sin\left(\frac{n\pi}{2}\right) = 1, \sin\left(\frac{-n\pi}{2}\right) = -1, \\
n = 2, &\quad \sin\left(\frac{n\pi}{2}\right) = \sin\left(\frac{-n\pi}{2}\right) = 0, \\
n = 3, &\quad \sin\left(\frac{n\pi}{2}\right) = -1, \sin\left(\frac{-n\pi}{2}\right) = 1,
\end{aligned}$$

aplicando la propiedad $J_{-n}(x) = (-1)^n J_n(x)$ en $n = 1$ y $n = 3$,

$$\begin{aligned}
J_n(x)\sin\left(\frac{n\pi}{2}\right) + J_{-n}(x)\sin\left(\frac{-n\pi}{2}\right) &= J_n(x) + (-1)J_{-n}(x) = 2J_n(x), (\text{ con } n = 1). \\
J_n(x)\sin\left(\frac{n\pi}{2}\right) + J_{-n}(x)\sin\left(\frac{-n\pi}{2}\right) &= J_n(x)(-1) + J_{-n}(x) = -2J_n(x), (\text{ con } n = 3).
\end{aligned}$$

Reescribimos la suma así

$$\sin x = 2\sum_{n=0}^{\infty} \underbrace{J_{2n+1}}_{n=1,3,\ldots} (-1)^n.$$

5 For $x, y > 0$

$$\frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)} = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2x-1}\theta \sin^{2y-1}\theta d\theta.$$

Derive this useful formula as follows.

(a) Make the change of variables $u^2 = t$ in definition of Gamma function and obtain

$$\Gamma(x) = 2\int_0^{\infty} e^{-u^2} u^{2x-1} du, x > 0.$$

(b) Use (a) to show that for $x, y > 0$,

$$\Gamma(x)\Gamma(y) = 4\int_0^{\infty}\int_0^{\infty} e^{-(u^2+v^2)} u^{2x-1} v^{2y-1} du dv.$$

(c) Change to polar coordinates in (b) ($u = r\cos\theta, v = r\sin\theta, dudv = rdrd\theta$) and obtain that for $x, y > 0$,

$$\Gamma(x)\Gamma(y) = 2\Gamma(x+y)\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2x-1}\theta \sin^{2y-1}\theta d\theta.$$

Solución.

$$\frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)} = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2x-1}\theta \sin^{2y-1}\theta d\theta.$$

$$\Gamma(x)\Gamma(y) = \left(\int_0^{\infty} t^{x-1} e^{-t} dt\right)\left(\int_0^{\infty} t_2^{y-1} e^{-t_2} dt_2\right),$$

Por sustitución $u^2 = t, 2udu = dt$,

$$= 4\left(\int_0^{\infty} u^{2x-1} e^{-u^2} du\right)\left(\int_0^{\infty} v^{2y-1} e^{-v^2}\right),$$
$$= 4\int_0^{\infty}\left(\int_0^{\infty} u^{2x-1} v^{2y-1} e^{-(u^2+v^2)} du\right) dv,$$

Cambiando a coordenadas polares

$$u = r\cos\theta, v = r\sin\theta,$$

$$= 4\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\int_0^{\infty} r^{2x-1}\cos^{2x-1}\theta r^{2y-1}\sin^{2y-1}\theta e^{-r^2} r dr\right) d\theta,$$
$$= 4\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2x-1}\theta \sin^{2y-1}\theta \left(\int_0^{\infty} e^{-r^2} r^{2x+2y-1} dr\right) d\theta,$$
$$= 4\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2x-1}\theta \sin^{2y-1}\theta \left(-\frac{1}{2}e^{-r^2}\Big|_0^{\infty} \cdot \int_0^{\infty} e^{-r} r^{x+y-1} dr\right) d\theta,$$
$$= 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2x-1}\theta \sin^{2y-1}\theta \cdot \Gamma(x+y) d\theta,$$
$$= 2\Gamma(x+y)\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2x-1}\theta \sin^{2y-1}\theta d\theta,$$

y que puede reescribirse como,

$$\frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)} = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2x-1}\theta \sin^{2y-1}\theta d\theta.$$

Referencias

[1] Capitulo 11: Propiedades de las funciones de bessel. `https://ifisc.uib-csic.es/users/raul/CURSOS/ED1/c11.pdf`. Accedio por última vez: 2012-10-25.