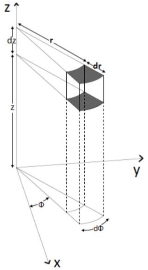
Contenido

1 Deduciendola

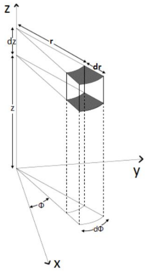
Contenido

1 Deduciendola

Consideremos el siguiente elemento diferencial cilíndrico:



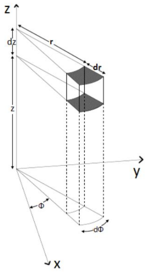
suponemos que tenemos una barra cilíndrica la cual tiene cierta distribución de calor que queremos conocer su cambio en un instante dado, por lo que análogo al análisis en coordenadas cartesianas, realizamos el balance de energía



$$E_{st} = E_{in} - E_{out} + E_{gen},$$

en donde:

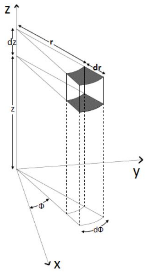
- E_{st} := Tasa a la que se almacena la energía térmica dentro de un volumen.
- E_{in} := Tasa a la que la energía entra.
- E_{out} := Tasa a la que la energía sale.
- E_{gen} := Tasa en la que se genera la energía dentro de la barra.



$$E_{in} = q_r + q_z + q_\phi$$

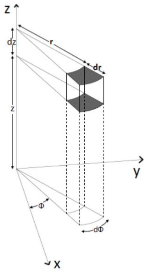
$$E_{out} = q_{r+dr} + q_{z+dz} + q_{\phi+d\phi}$$

Dimensionalmente en coordenadas cilíndricas q_r, q_z y q_ϕ, representan la energía que entra desde cada una de los lugares correspondientes de la sección del cilindro, si la energía entra desde el lugar r, en algún lugar dr 'sale' la energía del sistema. Y de manera análoga ocurre con los otros dos componentes.



$$E_{gen} = \dot{q} \times \text{Volúmen} = \dot{q}(dr \cdot dz \cdot r \cdot d\phi),$$

en donde $\dot{q}$ representa un coeficiente de generación de energía y el volúmen, que como vemos es el producto entre los componentes diferenciales que utilizamos para definir nuestra sección.



$$E_{st} = \rho(dr \cdot r \cdot d\phi \cdot dz) C_p \frac{dT}{dt},$$

en donde $\dot{q}$ representa un coeficiente de generación de energía y el volúmen, que como vemos es el producto entre los componentes diferenciales que utilizamos para definir nuestra sección.

Reemplazando los resultados anteriores tenemos:

$$\rho(dr \cdot r \cdot d\phi \cdot dz) C_p \frac{dT}{dt} = (q_r + q_z + q_\phi) - (q_{r+dr} + q_{z+dz} + q_{\phi+d\phi}) + \dot{q}(dr \cdot dz \cdot r \cdot d\phi)) \quad (1)$$

ahora debemos analizar como 'sale' el calor respecto a como entra, para ello realizaremos la expansión series de Taylor, para q_{r+dr} tendríamos:

$$q_{r+dr} = q_r + \frac{\partial q_r}{\partial r} dr,$$

y de la misma manera para los otros dos componentes:

$$q_{\phi+d\phi} = q_\phi + \frac{\partial q_\phi}{\partial \phi} d\phi, \; q_{z+dz} = q_z + \frac{\partial q_z}{\partial z} dz,$$

Ahora reemplazando estos resultados en (1)

Realizando la sustitución, tenemos

$$\begin{aligned}\rho(dr\cdot r\cdot d\phi\cdot dz)C_p\frac{dT}{dt} =&(q_r+q_z+q_\phi)-q_r-\frac{\partial q_r}{\partial r}dr\\ &-q_z-\frac{\partial q_z}{\partial z}dz-q_\phi-\frac{\partial q_\phi}{\partial \phi}d\phi\\ &+\dot{q}(dr\cdot dz\cdot r\cdot d\phi)),\end{aligned}$$

y simplificando,

$$\begin{aligned}\rho(dr\cdot r\cdot d\phi\cdot dz)C_p\frac{dT}{dt} = -\frac{\partial q_r}{\partial r}dr-\frac{\partial q_z}{\partial z}dz-\frac{\partial q_\phi}{\partial \phi}d\phi\\ +\dot{q}(dr\cdot dz\cdot r\cdot d\phi)),\end{aligned} \tag{2}$$

Haciendo uso de la ley de calor de Fourier, tenemos que para q_r

$$q_r = -k\frac{\partial T}{\partial r} r \cdot dz \cdot d\phi,$$

en dónde $-k\frac{\partial T}{\partial r}$ representan el flujo térmico y $r \cdot dz \cdot d\phi$, el área de interés y nuevamente de manera análoga para los otros dos componentes, tenemos:

$$q_z = -k\frac{\partial T}{\partial z} r \cdot dr \cdot d\phi, \;\; q_\phi = -\frac{k}{r}\frac{\partial T}{\partial \phi} \cdot dr \cdot d\phi$$

Sustituyendo los resultados anteriores en la ecuación (2),

$$\begin{aligned}
\rho(dr \cdot r \cdot d\phi \cdot dz) C_p \frac{dT}{dt} &= \frac{\partial}{\partial r}\left(kr\frac{\partial T}{\partial r}\right) d\phi \cdot dr \cdot dz \\
&+ \frac{\partial}{\partial \phi}\left(\frac{k}{r}\frac{\partial T}{\partial \phi}\right) d\phi \cdot dr \cdot dz \\
&+ \frac{\partial}{\partial z}\left(k\frac{\partial T}{\partial z}\right) r \cdot d\phi \cdot dr \cdot dz \\
&+ \dot{q}(dr \cdot dz \cdot r \cdot d\phi)
\end{aligned}$$

Simplificando,

$$\rho C_p \frac{dT}{dt} = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(kr\frac{\partial T}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial \phi}\left(\frac{k}{r}\frac{\partial T}{\partial \phi}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(k\frac{\partial T}{\partial z}\right) + \dot{q} \tag{3}$$

Que finalmente es la ecuación de calor en coordenadas cilíndricas.