2. Suponiendo que R es un conjunto, demuestre que los conjuntos definidos en el ejemplo 3.29 existen.

Ejemplo 3.29. Recuerde que a una circunferencia en R^2 con centro en el punto $x \in R^2$ y radio $r > 0$, la podemos considerar como el conjunto $C(x, r) = \{y \in R^2 : ||x - y|| = r\}$. Sea E_x la familia de todas las circunferencias en R^2 con centro $x \in R^2$, es decir, $E_x = \{C(x, r) : r > 0\}$ y sea $\varepsilon = \{E_x : x \in R^2\}$. Entonces ε es un sistema de conjuntos cuyos elementos son familias de conjuntos. Note que ni los puntos de R^2, ni las circunferencias son elementos de ε.

Siguiendo la definición dada veremos cada uno de los conjuntos definidos: $C(x, r), E_x$ y ε.

Sobre la existencia de $C(x, r)$ y E_x. Supondremos la existencia de $x \in R^2$ y de r, por lo que dicho conjunto $R \neq \emptyset$, ahora utilizamos las definiciones dadas

$$C(x, r) = \{y \in R^2 : ||x - y|| = r\},$$

vemos por tanto que x e y pertenecen al mismo conjunto(R^2) y por tanto por lo menos existirá un $y = x$, sin embargo si ello es así tendremos que siempre $r = 0$, lo cual no se permite por las definiciones dadas, como sabemos que r existe y satisface la condición $(G(r) : r > 0)$, debe existir un $y \in R^2$ tal que para todo x, $||x - y|| = r \wedge G(r)$, si dichos elementos existen, $C(x, r)$ existe y como la condición $G(r)$ se satisface para algunos de sus elementos E_x también existe.

Sobre la existencia de ε. Su construcción requiere de la existencia de E_x y de que exista algúnn $x \in R^2$, sobre lo segundo, se garantiza mediante las primeras definiciones del problema y como vimos anteriormente la existencia de $x \in R^2$ es una condición necesaria también para la existencia de E_x, sinembargo,en el párrafo anterior vimos que E_x existe, por lo tanto ε existe.

Ejemplos

$$C((1, 1)) = \{(0, 0), (0.5, 0.5), \dots\},$$
$$E_{(1,1)} = \{\{(0, 0), (0.5, 0.5), \dots\}\},$$
$$\varepsilon = \{E_{(1,1)}, E_{(0,0)}, \dots\}.$$

Nota. *Nótese que estaríamos asumiendo que dichos elementos existen en R, lo cual necesariamente puede no ser así, lo hacemos de esta manera para ejemplificar.*

4. Muestre que para cualquier conjunto X, $\bigcap \mathcal{P}(X) = \emptyset$.

La demostración es de manera directa, primero demostraremos que

4.a Para todo conjunto A, $A \cap \emptyset = \emptyset$.

Dem. 4.a Consideremos $x \in A \cap \emptyset$, por definición no pertenece al vacío y en general para todo $x \in A$ esto se cumple, luego $A \cap \emptyset = \emptyset$, aún si consideramos que $A = \emptyset$ por definición del conjunto vacío la intersección tampoco tendrá elementos.

Dem 4. Para todo conjunto X, $\emptyset \in \mathcal{P}(X)$, por *Dem. 4.a.* vemos que $\bigcap \mathcal{P}(X) = \emptyset$.