

山东财经大学 2018-2019 学年第二学期期末试题

概率论与数理统计 试卷 (B) 参考答案与评分标准

一、填空题 (本题共 6 小题, 每小题 3 分, 满分 18 分)

1. $\frac{2}{3}$ 2. $\frac{9}{2}$ 3. e^{-2} 4. 364 5. 1 6. $\chi^2 = \frac{\sum_{i=1}^n (X_i - \mu_0)^2}{\sigma_0^2}$

二、单项选择题 (本题共 6 小题, 每小题 3 分, 满分 18 分)

1. (A) 2. (C) 3. (D) 4. (B) 5. (D) 6. (B)

三、计算题 (本题共 4 小题, 每小题 10 分, 满分 40 分)

1. 解 (1) 由题设

$$P\{X \leq 50\} = \int_0^{50} \frac{1}{1250} x e^{-\frac{x^2}{2500}} dx = 1 - e^{-1} \quad \text{.....4 分}$$

(2) 设应发射 n 枚炮弹,

设 Y 表示发射 n 枚炮弹中弹着点距离目标不超过 50 米的次数, 则 $Y \sim B(n, 1 - e^{-1})$.

发射 n 枚炮弹, 使摧毁目标的概率大于 0.95, 即 $P\{Y \geq 1\} \geq 0.95$

$$P\{Y \geq 1\} = 1 - P\{Y = 0\} = 1 - [1 - (1 - e^{-1})]^n = 1 - e^{-n}.$$

要使 $P\{Y \geq 1\} \geq 0.95$, 即 $1 - e^{-n} \geq 0.95$, 解得 $n \geq 3$ 6 分

2. 解 由 $1 = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) dx dy = \int_0^1 dx \int_{x^2}^x C dy = \frac{C}{6}$, 得 $C = 6$4 分

(2) 由 $f_X(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) dy$, 可得

$$\text{当 } 0 < x < 1 \text{ 时, } f_X(x) = \int_{x^2}^x C dy = 6(x - x^2).$$

$$\text{所以 } f_X(x) = \begin{cases} 6(x - x^2), & 0 < x < 1 \\ 0, & \text{其它} \end{cases}.$$

由 $f_Y(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) dx$, 可得

$$\text{当 } 0 < y < 1 \text{ 时, } f_Y(y) = \int_y^{\sqrt{y}} 6 dx = 6(\sqrt{y} - y).$$

$$\text{所以 } f_Y(y) = \begin{cases} 6(\sqrt{y} - y), & 0 < y < 1 \\ 0, & \text{其它} \end{cases}.$$

由于 $f(x, y) \neq f_X(x)f_Y(y)$, 所以 X 与 Y 不独立.4 分

$$(3) P(2Y < X) = \int_0^{\frac{1}{2}} dx \int_{x^2}^x 6dy = \frac{1}{8} \quad \text{.....2 分}$$

3. 解: (1) $0.4+0.2+0.1+a=1$, $a=0.3$ -----2 分

(2) X 、 Y 的边缘分布分别为

X	1	2
P	0.6	0.4

Y	0	1
P	0.5	0.5

$$EX = 1.4, EX^2 = 1^2 \cdot 0.6 + 2^2 \cdot 0.4 = 2.2, DX = EX^2 - (EX)^2 = 0.24,$$

$$EY = 0.5, DY = 0.25, \quad \text{-----4 分}$$

$$(3) EXY = 0.8,$$

$$\text{Cov}(X, Y) = EXY - EXEY = 0.8 - 1.4 \times 0.5 = 0.1 \quad \text{-----2 分}$$

$$(4) \rho_{XY} = \frac{\text{Cov}(X, Y)}{\sqrt{DX} \cdot \sqrt{DY}} = \frac{0.1}{\sqrt{0.24} \cdot \sqrt{0.25}} = \frac{1}{\sqrt{6}} \approx 0.408 \quad \text{-----2 分}$$

$$4. \text{解: 似然函数为 } L(\theta) = \prod_{i=1}^n ((\theta+1)(x_i-5)^\theta) = (\theta+1)^n \left(\prod_{i=1}^n (x_i-5) \right)^\theta, 5 < x_i < 6$$

当 $5 < x_i < 6, (i=1, 2, \dots, n)$ 时, 恒有 $L(\theta) > 0$, 故

$$\text{取对数 } \ln L(\theta) = n \ln(\theta+1) + \theta \sum_{i=1}^n \ln(x_i-5) \quad \text{-----6 分}$$

$$\text{求导数 } \frac{d \ln L(\theta)}{d\theta} = \frac{n}{\theta+1} + \sum_{i=1}^n \ln(x_i-5)$$

$$\text{令 } \frac{d \ln L(\theta)}{d\theta} = \frac{n}{\theta+1} + \sum_{i=1}^n \ln(x_i-5) = 0$$

$$\text{解得 } \hat{\theta} = -1 - \frac{n}{\sum_{i=1}^n \ln(x_i-5)} \quad (\text{而 } \frac{d^2 \ln L(\theta)}{d\theta^2} = -\frac{n}{(\theta+1)^2} < 0)$$

$$\text{因此 } \theta \text{ 的最大似然估计为 } \hat{\theta} = -1 - \frac{n}{\sum_{i=1}^n \ln(X_i-5)} \quad \text{-----4 分}$$

四、应用题 (本题共 2 小题, 每小题 10 分, 满分 20 分)

1. 解: 设 A_1, A_2, A_3 分别表示甲厂、乙厂、丙厂生产的冰柜, B 表示冰柜合格, 则 (1) 由全概率公式可得

$$\begin{aligned} P(B) &= \sum_{i=1}^3 P(A_i)P(B|A_i) \\ &= 0.6 \times 0.9 + 0.25 \times 0.6 + 0.15 \times 0.8 = 0.81 \end{aligned}$$

.....6 分

(2) 由贝叶斯公式可得

$$P(A_1 | \bar{B}) = \frac{P(A_1)P(\bar{B} | A_1)}{P(\bar{B})} = \frac{0.6 \times 0.1}{1 - 0.81} \approx 0.32 \quad \text{.....4 分}$$

2. 解：设 $X=100$ 人中买报的人数. 则 $X \sim B(100, 0.2)$, $EX = 20, DX = 16$,

由中心极限定理近似有： $X \sim N(20, 16)$ -----5 分

于是 $P\{X \leq 21\} \approx \Phi(21) = \Phi_0\left(\frac{21-20}{\sqrt{16}}\right) = \Phi_0(0.25) = 0.599$ -----5 分

五、证明题（本题共 1 小题，满分 4 分）

$$\text{证： } Y = a \frac{(X_1 + X_2 + \cdots + X_m)^2}{(X_{m+1}^2 + X_{m+2}^2 + \cdots + X_n^2)} \sim F(1, n-m), \quad \text{-----1 分}$$

由已知，总体 $X \sim N(0, 1)$ ，样本 X_1, X_2, \cdots, X_n 独立同分布于 $N(0, 1)$ ，所以

$$X_1 + X_2 + \cdots + X_m \sim N(0, m), \quad \frac{X_1 + X_2 + \cdots + X_m}{\sqrt{m}} \sim N(0, 1), \text{ 得:}$$

$$\left(\frac{X_1 + X_2 + \cdots + X_m}{\sqrt{m}} \right)^2 \sim \chi^2(1),$$

$$\text{而 } X_{m+1}^2 + X_{m+2}^2 + \cdots + X_n^2 \sim \chi^2(n-m),$$

且二者独立，

根据 F 分布的定理知：

$$Y = \frac{\left(\frac{X_1 + X_2 + \cdots + X_m}{\sqrt{m}} \right)^2 / 1}{[X_{m+1}^2 + X_{m+2}^2 + \cdots + X_n^2] / (n-m)} = \frac{(n-m)}{m} \cdot \frac{(X_1 + X_2 + \cdots + X_m)^2}{(X_{m+1}^2 + X_{m+2}^2 + \cdots + X_n^2)} \sim F(1, n-m)$$

$$\text{可见 } a = \frac{(n-m)}{m}. \quad \text{-----3 分}$$

注：本试题中其它解法可根据情况酌情给分。