TRƯỜNG ĐẠI HỌC THUỶ LỢI
BỘ MÔN TOÁN HỌC

GIẢI TÍCH MỘT BIẾN SỐ

(Tái bản lần thứ nhất có bổ sung và sửa chữa)
(Lưu hành nội bộ)

NHÀ XUẤT BẢN KHOA HỌC TỰ NHIÊN VÀ CÔNG NGHỆ
HÀ NỘI - 2010

BAN BIÊN DỊCH VÀ HIỆU ĐÍNH, CHỈNH SỬA:

PGS.TS. NGUYỄN XUÂN THẢO
PGS.TS. PHÓ ĐỨC ANH
TS. NGUYỄN HỮU THỌ
ThS. TRỊNH TUÂN
ThS. NGUYỄN ĐỨC HẬU
ThS. NGUYỄN VĂN NHAI
ThS. PHAN THANH LƯƠNG
ThS. NGUYỄN QUÝ LĂNG
ThS. NGUYỄN THỊ VÂN
ThS. ĐÀO TẤN QUY
ThS. PHAN THỊ THANH HUYỀN
ThS. NGUYỄN THỊ LÝ
CN. ĐỖ HỮU THANH
ThS. NGUYỄN THỊ MINH HẢI
CN. NGUYỄN NAM GIANG

LỜI TỰA CỦA BỘ MÔN TOÁN

Thực hiện chủ trương đổi mới chương trình và giáo trình đào tạo môn Toán học của Nhà trường, Bộ môn Giải tích đã hoàn thành bản dịch lần đầu cuốn ***"Giải tích một biến số"*** *của tác giả George F. Simmons. Bản dịch này đã phục vụ kịp thời cho việc giảng dạy cho khoá 49 và 50 là hai khoá đầu tiên đào tạo theo chương trình mới và theo học chế tín chỉ.*

Do thời gian biên dịch quá ngắn, bản dịch lần đầu không khỏi mắc một vài sai sót, nhiều câu văn dịch còn chưa thoát ý và còn một số lỗi về soạn thảo và in ấn.

Kể từ ngày tái lập lại Bộ môn Toán học, nhiệm vụ hàng đầu của Bộ môn là hoàn thiện lại toàn bộ chương trình và giáo trình giảng dạy và cuốn ***"Giải tích một biến số"*** *được tập trung hiệu đính, chỉnh sửa để kịp tái bản lần 1.*

Bộ môn xin cảm ơn Thư viện trường, Nhà xuất bản và các thầy cô đã tham gia hiệu đính, chỉnh sửa, đã làm việc rất tích cực trong thời gian qua để kịp tái bản lần này. Tuy nhiên, chắc chắc là bản dịch tái b

ản lần này có thể vẫn còn những sai sót và vẫn còn phải tiếp tục hoàn thiện trong thời gian tới. Bộ môn rất mong nhận được ý kiến góp ý của các độc giả trong quá trình sử dụng bản dịch lần này.

Trưởng Bộ môn Toán học
PGS.TS. NGUYỄN HỮU BẢO

LỜI NÓI ĐẦU

Thật lạ kỳ là người ta đã viết ra hàng ngàn trang sách mà vẫn thấy cần viết lời nói đầu để giải thích mục đích của mình. Có thể ai đó cho rằng, đủ lắm rồi, nói thêm mà làm gì. Tuy nhiên, mọi cuốn sách - không loại trừ cuốn này - đều cần phải vừa bày tỏ sự chưa thoả mãn với những quyển sách đã xuất bản trước, vừa như một tuyên bố về suy nghĩ của tác giả cho nội dung mà sách cần có. Lời nói đầu sẽ là cơ hội sau cùng để bạn đọc có thể lắng nghe và thấu hiểu ý tưởng của tác giả. Hơn nữa, bất kỳ ai muốn viết thêm một cuốn sách nhập môn giải tích, vốn đã rất nhiều, cũng cần được phép thanh minh (thậm chí xin lỗi) cho hành động này với các đồng nghiệp trong cộng đồng các nhà toán học.

Cuốn sách này là một tài liệu chủ đạo về giải tích, phù hợp với mọi chương trình và mọi trình độ. Nó được thiết kế đặc biệt với khóa học chuẩn có 3 kỳ dành cho sinh viên ngành khoa học, kỹ thuật hay toán học. Các sinh viên cần có những kiến thức nền tảng về đại số và hình học ở phổ thông.

Mặt khác, cuốn sách không đề cập đến các kiến thức chuyên sâu nên những sinh viên triết học, lịch sử hoặc kinh tế có thể đọc và hiểu các ứng dụng dễ dàng như mọi người khác. Không có luật nhân bản nào quy định rằng những người có mối quan tâm đặc biệt đến các ngành khoa học nhân văn hay xã hội thì không được hiểu biết và say mê toán học. Dĩ nhiên, toán là môn học chứa nhiều thành tựu sáng tạo lớn nhất của nhân loại và nó có sức hút không thể cưỡng lại được đối với những nhà nghiên cứu nhân văn như cánh đồng đầy hoa quyến rũ đàn ong. Người ta đã nói rất đúng là toán học có thể soi sáng thế giới hay làm thư giãn đầu óc, hoặc làm được cả hai điều này. Vì vậy, rõ ràng một sinh viên triết (chẳng hạn) một khi không có những kiến thức cụ thể của môn học lớn này, dường như còn chưa hoàn thiện y như một sinh viên lịch sử không hiểu biết bao quát về kinh tế và tôn giáo. Làm sao các sinh viên lịch sử có thể bỏ qua sự kiện nổi bật trong thế kỷ 17 là toán học và khoa học nở rộ và có ảnh hưởng quyết định đến sự phát triển của thế giới hiện đại, một sự kiện mang ý nghĩa lịch sử sâu sắc hơn các cuộc cách mạng Mỹ, Pháp và Nga gộp lại? Các giáo viên toán chúng ta có bổn phận giúp các sinh viên này một phần kiến thức và Giải tích là một điểm khởi đầu hoàn hảo.

Bản thân cuốn sách này - với 21 chương, không kể các phụ lục - có bố cục và cơ cấu truyền thống. Tôi muốn nhấn mạnh nhiều đến *động cơ thúc đẩy* và *cách hiểu trực quan*, đồng thời trình bày những điều tinh tế trong lý thuyết. Hầu hết các sinh viên thiếu kiên nhẫn với lý thuyết môn học, đấy cũng là một điều chính đáng, vì bản chất của Giải tích không nằm trong các định lý hay cách chứng minh chúng mà hơn thế, nó là những công cụ và cách sử dụng chúng thế nào. Mục tiêu trên hết của tôi là giới thiệu Giải tích như một nghệ thuật giải quyết các bài toán với khả năng không hạn chế và nó không thể thiếu được trong tất cả các ngành khoa học định lượng. Bằng cách tự nhiên, tôi muốn thuyết phục sinh viên rằng các công cụ chuẩn của giải tích là hợp lý và hợp pháp, nhưng không thể biến môn học này thành một thứ khuôn mẫu logic chán ngắt do các định nghĩa chi tiết , những câu chữ cứng nhắc trong định lý với các chứng minh tỉ mỉ chi phối. Tôi hy vọng rằng những phần giải thích toán học trong những chương sách sẽ làm cho sinh viên hiểu kỹ một cách tự nhiên, không thể khác được như là nước chảy theo sườn núi, xuôi xuống phía dưới. Chủ đề chính trong cuốn sách này là những điều hay của Giải tích - những điều mà ta có thể hiểu được và làm được - chứ không phải bản chất logic được nhìn nhận theo quan điểm chuyên môn (và hạn chế) của các nhà toán học thuần tuý hiện đại.

Có một vài nét đặc trưng riêng của cuốn sách này mà theo tôi, cần phải chú thích thêm.

Yêu cầu kiến thức trước khi học Giải tích: Do nội dung cần học của môn này quá lớn, cần nhanh chóng bắt đầu và đưa đạo hàm vào sớm, đồng thời phải dành ít thời gian đủ để ôn lại những kiến thức có trước khi học giải tích. Tuy vậy, sinh viên năm thứ nhất rất khác nhau về trình độ và kiến thức toán học. Vì thế, trong chương đầu, tôi đã đề cập đến các kiến thức cần có trước khi học và đề nghị các giáo viên nên loại bỏ toàn bộ hoặc dạy lướt qua phần họ nghĩ là có ích cho sinh viên trong từng trường hợp cụ thể. Chương mở đầu được viết khá chi tiết cho các sinh viên, những người cần dành nhiều thời gian hơn vào kiến thức cơ bản, để tự họ với một chút nỗ lực có thể tiếp thu nhiều nhất.[1]

Lượng giác: Trong các giáo trình Giải tích, vấn đề liên quan đến Lượng giác chưa được giải quyết thoả đáng. Nhiều tác giả giới thiệu môn này sớm, một phần để có thể sử dụng các hàm lượng giác trong việc dạy quy tắc dây chuyền. Cách tiếp cận này có một nhược điểm là đưa vào các chương đầu tiên của Giải tích nhiều vấn đề mang tính kỹ thuật, không thực sự cần thiết cho mục tiêu cơ bản của sinh viên ở phần này, đó là cần nắm được ý nghĩa và ứng dụng của đạo hàm và tích phân. Nhược điểm khác của việc đưa Lượng giác vào phần mở đầu là nhiều sinh viên chỉ học toán trong một học kỳ và đối với họ, Lượng giác là một phần rắc rối, không cần thiết và có thể lược bỏ. Thực tế là lượng giác thực sự không thể thiếu được chỉ khi ta cần xét đến các phương pháp chính để tính tích phân.

Vì vậy, tôi đưa Giải tích hàm lượng giác vào Chương 9 để khi chuyển sang Chương 10 về các phương pháp tích phân, sinh viên vẫn còn nhớ tất cả các ý tưởng trong chương trước. Mục 9.1 sẽ tóm tắt toàn bộ môn lượng giác. Với hầu hết các sinh viên, đây là dịp ôn lại kiến thức cần thiết đã được học (nhưng quên gần hết) ở phổ thông. Còn với những người hoàn toàn chưa được học lượng giác, những điều giải thích trong phần này đủ cho họ có thể hiểu những gì cần thiết.

Với các giáo viên, những người thích dạy lượng giác sớm hơn - và điều này cũng hợp lý - tôi đề nghị có thể dễ dàng giới thiệu ngay hai mục 9.1 và 9.2 sau mục 4.5, còn các mục 9.3 và 9.4 để sau Chương 6. Cần nói thêm là phải thông báo với sinh viên bỏ qua các phần (b), (c) và (d) của ví dụ 2 mục 9.2, và không cho các bài tập ở nhà: 15 - 18 mục 9.2; 12, 16, 17, 29 mục 9.3; và 11, 12 và 24 ở mục 9.4.

Phần bài tập: Đối với sinh viên, phần quan trọng nhất trong Giáo trình Giải tích có lẽ là hệ thống bài tập, vì họ sẽ phải dành hầu hết thời gian và sức lực để luyện tập. Có hơn 5800 bài tập trong quyển sách này, bao gồm nhiều bài tập dự phòng cũ quen thuộc với tất cả các giáo viên Giải tích có ngay từ thời Euler và thậm chí sớm hơn. Tôi đã cố gắng trả nợ quá khứ bằng cách tạo ra những bài tập mới bất cứ khi nào có thể. Hệ thống bài tập được sắp xếp theo trình tự, bắt đầu với các bài tập thực hành đơn giản và tăng dần lên với các bài tập phức tạp đòi hỏi trình độ tư duy và kỹ năng cao hơn. Các bài tập khó được đánh dấu hoa thị (*). Nói chung, mỗi dạng bao gồm gần gấp đôi số bài tập mà phần lớn giáo viên muốn cho về nhà, giúp sinh viên có nhiều bài tập để ôn luyện.

Phần lớn các chương đều có nhiều bài tập bổ sung. Nhiều bài trong đó chỉ dành để cung cấp kiến thức sâu sắc và đa dạng hơn ở cuối mỗi phần. Tuy nhiên, thày cũng như trò nên hết sức cẩn thận khi giải những bài tập bổ sung này, vì một số bài rất khó và tinh tế, mà chỉ những sinh viên kiên trì, cố gắng mới giải quyết được.

Cũng cần lưu ý là có một số phần được rải ra khắp cuốn sách mà hoàn toàn không có bài tập tương ứng. Đôi khi những phần này được tìm thấy trong các nhóm nhỏ và chúng chỉ là cách phân chia tiện lợi của một chủ đề mà tôi có ý xử lý riêng, như các mục 6.1, 6.2, 6.3 và 6.4, 6.5. Trong các trường hợp khác (mục 9.7, 14. 12, 15.5, 19.4 và 20.9) việc thiếu các bài tập ngụ ý là chỉ nên tiếp cận nhẹ nhàng và lướt qua các phần đó.

Rải rác trong toàn cuốn sách, có nhiều bài tập dạng "bài tập kể chuyện". Các giáo viên đều biết rằng sinh viên rất sợ các bài tập kiểu này, vì chúng thường đòi hỏi suy nghĩ khác với lệ thường. Tuy nhiên, lợi ích của toán học đối với các khoa học khác nhau đòi hỏi chúng ta cố gắng dạy sinh viên cách làm để thấu hiểu được ý nghĩa của bài tập kể chuyện, phán đoán được cái gì liên quan tới nó, rồi diễn giải nó từ các câu chữ thành những bản vẽ và phương trình. Không có những kỹ năng này - những kỹ năng cần thiết cho cả những sinh viên sẽ trở thành bác sĩ, luật sư, nhà phân tích tài chính

[1] Có thể tìm trong cuốn sách nhỏ của tôi, Tóm tắt Toán học sơ cấp, 119 trang, trình bày đầy đủ nhưng gọn và súc tích hơn về Toán phổ thông (Đồng tác giả William Kauffman, Los-Altos, Calif.1981).

hoặc những nhà tư tưởng khác nhau - sẽ không còn việc giảng dạy toán tương xứng với tên gọi của từ này.[2]

Chuỗi vô hạn: Nhà toán học nào xem qua Chương 14 đều thấy ngay: đây là một trong những chủ đề ưa thích của tôi. Tôi đã hăng hái phát triển chủ đề này sâu sắc và chi tiết hơn so với một giáo trình Giải tích thông thường. Tuy nhiên, để thuận tiện cho những giáo viên không muốn mất nhiều thời gian quan tâm đến chủ đề này, trong Chương 13, tôi trình bày ngắn hơn, nhưng vẫn đủ đáp ứng cho đại đa số các sinh viên không có ý định nghiên cứu sâu hơn toán học cao cấp. Những giáo viên nào thấy chủ đề này là quan trọng giống như tôi thì có thể sử dụng cả hai chương, chương 13 để cung cấp tổng quan cho sinh viên, chương 14 để xây dựng nền tảng vững hơn cho những khái niệm cơ bản. Tinh thần của hai chương này khá khác nhau nhưng cũng có đôi điều lặp lại.

Phương trình vi phân và Giải tích véctơ: Đây là hai nhánh riêng biệt quan trọng của toán học. Sau môn Giải tích, có thể dạy chúng thành những giáo trình riêng, với nhiều thời gian để khai thác hết những phương pháp và ứng dụng đặc biệt của chúng. Một trong những trách nhiệm chính của giáo trình Giải tích là chuẩn bị đường đi tới các môn nâng cao này và nêu ra vài bước đầu tiên theo hướng đó, tuy nhiên chuẩn bị đến đâu là một vấn đề còn gây tranh cãi. Một vài tác giả về Giải tích đã cố gắng đưa hai môn trên như những giáo trình - con vào trong các chương lớn ở cuối sách. Tôi không đồng ý với cách làm này và tin rằng vẫn có một số giáo viên sử dụng các chương này. Thực ra, tôi thích giới thiệu chủ đề Phương trình vi phân càng sớm càng tốt (Mục 5.4) và sau đó nhắc lại theo nhiều cách bất cứ khi nào có thể (Mục 5.5, 7.8, 8.5, 8.6, 9.6, 17.7, 19.9). Về phần Giải tích véc tơ, tôi cho là nên kết thúc ở định lý Green, còn định lý Stokes nên dành cho một giáo trình khác - Đây là một trong các định lý sâu sắc và có ảnh hưởng rộng rãi nhất trong tất cả các ngành của toán học. Với các giáo viên muốn đưa Giải tích véc tơ nhiều hơn vào chương trình, tôi đã đưa vào định lý phân kỳ và định lý Stokes - cùng các bài tập - trong các Phụ lục A.22 và A. 23 (nằm trong quyển sách: Giải tích nhiều biến số).

Có thể coi việc xét các phụ lục là một trong các phương thức chính duy nhất của giáo trình này khác hẳn với các cuốn sách tương tự khác. Bây giờ, tôi sẽ bình luận ngắn gọn vấn đề này. Trước hết, xin nhấn mạnh rằng phần phụ lục hoàn toàn tách biệt với giáo trình chính và có thể phải nghiên cứu cẩn thận, đôi khi rất sâu sắc, hoặc có thể bỏ qua hoàn toàn, tùy theo ý định của mỗi sinh viên hay giảng viên.

Phụ lục A. Sau nhiều năm dạy Giải tích, tôi đã thu thập được một số những chủ đề đáng chú ý từ các lý thuyết, hình học, khoa học,... Tôi đã dùng chúng để nhập đề và để liên kết với các chủ đề khác... đồng thời cũng để phá bỏ lệ thường, gợi hứng thú cho người học. Nhiều sinh viên của tôi đã thích thú khai thác những “thỏi vàng” này. Tôi đã thu thập được phần lớn các chủ đề này trong phụ lục A với hy vọng sẽ làm thay đổi quan niệm về toán học là môn cực kỳ thú vị chứ không nhàm chán và buồn tẻ.

Phụ lục B. Phần này đưa ra tiểu sử ngắn gọn của các nhà Toán học, từ thuở sơ khai đến giữa thế kỷ XIX. Phụ lục này có hai mục đích chính:

Thứ nhất, tôi hy vọng có thể “nhân văn hoá” môn học, tạo nên bởi cố gắng thiên tài của những con người vĩ đại, nhờ đó gây hứng thú cho các sinh viên về các vấn đề đang học. Tâm trí con người thường tránh né các bài toán đặt ra, không muốn tiếp cận, tránh tiếp xúc, muốn thay đổi chủ đề, hoặc nghĩ về một điều khác đáng giá hơn. Những người này - chiếm đa số nhân loại - luôn tìm kiếm sự an ủi và hài lòng với những cái đã biết hay quen thuộc; tránh né những điều chưa biết hoặc chưa quen với mình, như thể tránh sa mạc và rừng rậm. Họ khó có thể kiên trì suy nghĩ về một bài toán phức tạp, như ta khó có thể ghép các cực bắc của hai nam châm mạnh với nhau. Ngược lại, có một số

[2] Tôi không thể bỏ qua một bài tập kể chuyện cổ điển xuất hiện nhiều năm trước trên Tạp chí New York. “Bạn có biết những bài toán số học dễ sợ về…” và đây là một bài toán như vậy: “Cha tôi 44 tuổi, con chó của tôi 8 tuổi. Nếu con chó cũng sống như người đến 56 tuổi. Hỏi tới khi đó, tuổi cha tôi cộng tuổi chó là bao nhiêu?”

người, nam có, nữ có bị các bài toán cuốn hút mà không cưỡng lại được. Đầu óc họ bị lôi cuốn vào các bài toán một cách đáng yêu, họ suy tư, trăn trở không biết mệt cho tới khi nắm được được các bí mật của chúng. Chính những con người đó đã dạy chúng ta phần lớn những kiến thức và công việc có thể làm, từ bánh xe và đòn bẩy đến ngành luyện kim và thuyết tương đối. Trong phụ lục này, tôi đã viết về một số nhà Toán học tiền bối như vậy với hy vọng động viên những người trong thế hệ tiếp theo.

Mục đích thứ hai của tôi liên quan đến một thực tế là nhiều sinh viên trong ngành xã hội và nhân văn bị buộc phải học Giải tích theo chương trình đào tạo. Những liên kết sâu sắc giữa toán học với lịch sử và triết học, với các tri thức rộng hơn và lịch sử xã hội của nền văn minh phương Tây có khả năng tác động đến các sinh viên thờ ơ này, làm cho họ thêm say mê và hứng thú.

Phụ lục C. Trong giáo trình, tuỳ theo bản chất của nội dung được đề cập đến mà mức độ khó được tăng lên hay giảm xuống. Trong các chương về hình học, tôi đã đưa tri giác vào cùng với mô tả trực giác nên có thể tiếp thu dễ hơn. Trong chương nói về chuỗi vô hạn lại không phải như vậy. Nếu không nghiên cứu kỹ lưỡng, ta sẽ không thể hiểu được bản chất của nó. Tôi luôn cho là hầu hết các sinh viên, do lợi ích bản thân, thường không quan tâm lắm đến những lập luận thuần tuý toán học, vì thế tôi đã cố gắng hết mức để làm giảm nhẹ các vấn đề này và chỉ đưa vào những điều thật cần thiết. Tuy nhiên, một số sinh viên ham thích lý thuyết và một số giảng viên cũng thấy là về nguyên tắc cần cho các sinh viên có được một số kiến thức nào đó về lý thuyết, giúp họ hoàn thiện hơn. Phụ lục C bao gồm hầu hết các nội dung lý thuyết thích hợp để nghiên cứu Giải tích theo một cách hình dung tổng quát nhất. Với quan điểm toán học thuần túy, các giáo viên có thể dạy giáo trình này theo các mức độ tinh tế khác nhau, bằng cách dùng - hoặc không dùng - những nội dung đã chọn trong phụ lục này.

Tóm lại, có thể thấy, phần chính của cuốn sách này được viết theo cách truyền thống và liền mạch, trong khi các phụ lục giúp cho giáo viên với những quan tâm và ý kiến khác nhau soạn ra chương trình phù hợp theo yêu cầu của riêng từng lớp. Tôi đã hướng vào mục đích để sách này được sử dụng thật linh hoạt.

Hiển nhiên, mỗi dự án như cuốn sách này phụ thuộc vào sự nỗ lực hợp tác của nhiều người. Với Ban biên tập, tôi rất cám ơn Peter Devine, đã biên tập tốt với nhiều chỉ dẫn hay và luôn để cho tôi đi theo con đường riêng của mình; Cảm ơn Jo Satloff, Trưởng ban biên tập, làm cho tôi thấy rõ sự thông cảm, tế nhị và tính chuyên nghiệp cao trong công việc; Cảm ơn nhà thiết kế Joan O'Connor, với thiện ý lắng nghe những đề xuất nghiệp dư, làm cho tôi thực là cảm kích.

Tôi cũng trân trọng cảm ơn các phản biện: Joe Browne, Trường công nghệ cộng đồng Onondaga; Carol Crawford, Học Viện Hải quân Mỹ, Bruces Edwards, Đại học Florida; Susan L. Fridman, Trung cấp Baruch, Melvin Hausner, Trường Đại học New York; Louis Hoelzle, Trường Country Community; Stanley M. Lukawecki, Đại học Clemsom; Peter Maserick, Trường Đại học bang Pennsylvania; và David Zitarelli, Đại học Temple. Những người này đã chia sẻ kiến thức và nhận xét với tôi trong nhiều vấn đề quan trọng.

Chắc chắn sẽ còn những thiếu sót và sai lầm, mà ngoài tôi ra, không ai phải chịu trách nhiệm. Tôi sẽ rất hoan nghênh nếu các bạn đồng nghiệp, cũng như bạn đọc và sinh viên vui lòng thông báo cho tôi bất kỳ sai sót nào tìm được, để có thể sửa giáo trình trong những lần xuất bản sau.

George F.Simmons

VỚI SINH VIÊN

Có thể nói, không tác giả nào cố ý viết một cuốn sách không người đọc. Vì vậy, chúng tôi đã gắng làm tất cả những gì có thể và hy vọng là tốt nhất. Dĩ nhiên, tôi cũng hy vọng rằng văn phong của mình dễ hiểu và giúp được sinh viên, nhưng cuối cùng chỉ có các bạn mới có thể đánh giá điều này. Tuy thế, một điều rất cần cho chúng ta - giáo viên hay sinh viên cũng vậy - là gợi ý thêm cho các sinh viên cách đọc sách toán, cách đọc này khác xa với cách đọc tiểu thuyết hay báo chí.

Trong chương trình toán cao cấp, phần lớn sinh viên có thói quen làm bài tập về nhà ngay, họ không kiên nhẫn trước số bài tập nặng nề và muốn làm chúng cho xong, càng nhanh càng tốt. Chỉ khi nào không thể làm được bài tập, những sinh viên này mới chịu đọc phần giải thích trong giáo trình lý thuyết. Điều này là cách làm kỳ cục, vô lý, giống như việc xỏ giầy trước khi đi tất. Tôi đề nghị các sinh viên, đầu tiên nên đọc phần lý thuyết, *sau khi và chỉ sau khi* hiểu thấu đáo lý thuyết mới làm bài tập. Suy cho cùng, mục đích của những bài tập này chỉ nhằm khắc sâu những ý tưởng và những phương pháp đã được phát biểu và giải thích trong phần lý thuyết.

Với một quyển sách kiểu này, sinh viên nên đọc phần lý thuyết thế nào? Nên đọc chậm và đọc kỹ, cần nhận thức sâu sắc rằng có rất nhiều chi tiết quan trọng đã bị bỏ qua một cách cố ý. Nếu cuốn sách này bao gồm mọi chi tiết cần thảo luận thì nó sẽ dài gấp năm lần, ai cho như vậy! Có một câu ngạn ngữ cổ của Pháp: "Ai muốn giải thích mọi điều ngay lập tức sẽ thấy như mình đang trò chuyện trong một căn phòng rỗng". Mọi tác giả của loại sách này thường cố gắng để không nói quá nhiều và cũng không quá ít.

Những từ "rõ ràng là" hay "dễ thấy" và vài thành ngữ khác tương đương được sử dụng không phải có ý văn hoa, lại càng không có ý hạ thấp khả năng của bất kỳ sinh viên nào. Đây là những cách viết mẫu được sử dụng trong văn bản toán học hàng trăm năm nay. Mục đích của chúng nhằm cảnh báo cho người đọc những phần quan trọng cần nghiên cứu kỹ hoặc có thể là một vài chi tiết trong tính toán đã được bỏ qua. Những cách viết như vậy gợi ý cho sính viên thấy đây hẳn là một ý tưởng hay, nên đọc và hơn nữa nên đọc cẩn thận để hiểu được cả những chi tiết bị bỏ qua, hoặc có thể ghi ra giấy để kiểm tra lại những phép tính chưa liệt kê đầy đủ. Tiện hơn nữa, bạn đọc có thể dùng luôn lề trong mỗi trang, để ghi vào đó những trọng tâm, các câu hỏi phát sinh, thực hiện những phép tính ngắn và sửa những lỗi in ấn.

MỤC LỤC

Chương 1
SỐ THỰC, HÀM SỐ VÀ ĐỒ THỊ

1.1. GIỚI THIỆU

Chúng ta đều biết thế giới mà chúng ta đang sống luôn bị chi phối bởi sự vận động và thay đổi. Trái đất di chuyển quanh mặt trời; sự gia tăng của các lớp vi khuẩn, một hòn đá được ném lên, chuyển động chậm dần rồi dừng lại, sau đó rơi trở lại trái đất với tốc độ tăng dần; các nguyên tố phóng xạ bị phân rã. Đây chỉ là vài ví dụ trong hàng loạt các hiện tượng mà toán học chính là trung gian tự nhiên nhất giữa thông tin và tri thức. Cách đây 300 năm, Galile đã nói rằng: “Cuốn sách vĩ đại của tự nhiên được viết bằng các ký hiệu toán học”.

Giải tích là một phần của toán học với mục đích đầu tiên là nghiên cứu sự vận động và thay đổi. Đó là một công cụ không thể thiếu của quá trình suy nghĩ trong hầu hết mọi lĩnh vực khoa học thuần túy và ứng dụng - trong vật lý, hóa học, sinh học, thiên văn học, địa chất, thiết kế và thậm chí trong cả một số ngành khoa học xã hội. Nó cũng được sử dụng nhiều trong những ngành toán học khác, đặc biệt là trong hình học. Theo tiêu chuẩn nào cũng vậy, phương pháp và những ứng dụng của Giải tích luôn được coi là một trong những thành tựu trí tuệ bậc nhất trong nền văn minh.

Đối tượng nghiên cứu chủ yếu trong giải tích là hàm số. Nhưng hàm số là gì? Nói một cách đơn giản nhất, hàm số là một quy tắc hay luật lệ chỉ ra sự phụ thuộc về lượng của một biến này đối với một biến khác. Đây là khái niệm bao trùm trong những môn khoa học chính xác. Nó cũng mang đến cho chúng ta viễn cảnh của tri thức và sự liên kết hiện tượng tự nhiên bằng bộ máy toán học của một sức mạnh vĩ đại đôi khi huyền bí. Trong công việc của tất cả chúng ta, khái niệm về hàm số cực kỳ quan trọng đến mức cần hiểu về nó thật rõ ràng, tránh sự nhầm lẫn. Mục đích đó chính là chủ đề của chương này.

Những phần sau đây chứa nhiều nội dung mà các độc giả đã từng học trước kia. Tuy vậy, chúng cũng cho ta cơ hội để tổng kết và nhớ lại kiến thức. Những người cảm thấy nhàm chán khi đọc mãi những kiến thức cũ có thể khám phá ra những mẩu thông tin và những thử thách thú vị trong phần câu hỏi ở cuối mỗi chương. Chương này chỉ có mục đích tổng kết. Nó có thể được nghiên cứu một cách cẩn thận hay lướt qua, hoặc thậm chí hoàn toàn bỏ qua tuỳ theo trình độ của độc giả. Vấn đề chính yếu của giáo trình thực sự bắt đầu từ chương 2 và rất tiếc nếu có một sinh viên nào đó thấy có nhiều khó khăn hơn là tìm được nguồn bổ trợ trong chương đầu tiên này.

1.2. TRỤC THỰC

Phần lớn những đại lượng mà chúng ta nghiên cứu - như chiều dài, diện tích, thể tích, vị trí, thời gian, tốc độ - đều được đo bằng những số thực và theo ý nghĩa này, Giải tích cũng được dựa trên hệ thống các số thực. Trong thực tế còn có những hệ thống số có ích và quan trọng khác - chẳng hạn, các số phức. Ngoài ra, việc xác định vị trí trong không gian 2 hay 3 chiều, tính vận tốc yêu cầu phải sử dụng véctơ. Những ý tưởng đó sẽ được khảo sát theo trình tự, còn hiện tại chúng ta sẽ làm việc với số thực[*].

Vì các sinh viên đã làm quen với dãy số thực trong đại số sơ cấp, trong chương này chúng tôi đưa ra mô tả ngắn gọn, cần thiết đủ để phục vụ cho mục đích của chúng ta, độc giả nào muốn tìm hiểu sâu hơn về bản chất của các số thực thì có thể tham khảo phần phụ lục C.1 ở cuối sách.

---

[*] Tính từ “thực” được dùng để phân biệt những số này với những số như là $\sqrt{-1}$, được coi là những số “không thực” hay “ảo”.

Hệ thống các số thực bao gồm nhiều dạng số, đặc biệt đáng quan tâm là: *số nguyên dương (*hay *số tự nhiên)*

$$1, 2, 3, \ldots;$$

số nguyên

$$\ldots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots \qquad ;$$

số hữu tỷ, là những số thực được biểu diễn dưới dạng phân số (hay dạng thương của các số nguyên), như:

$$\frac{2}{3},\ -\frac{7}{4},\ \ 4{,}0,\ \ -5{,}3,\ \ 87,\ \ 2\frac{1}{4}$$

Một số thực không hữu tỷ gọi là *số vô tỷ*; ví dụ

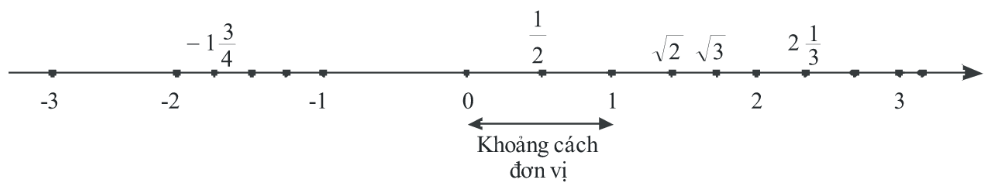
$$\sqrt{2}\,,\ \sqrt{3}\,,\ \sqrt{2}+\sqrt{3}\,,\ \sqrt[3]{5}\,,\ \text{và}\ \pi$$

là những số vô tỷ.

Ghi chú : với mỗi số dương a, ký hiệu $\sqrt{a}$ luôn có nghĩa là căn bậc hai dương của a. Như vậy, $\sqrt{4}$ bằng 2, chứ không thể bằng (- 2), mặc dù $(-2)^2 = 4$. Nếu muốn chỉ rõ cả hai kết quả của căn bậc hai của 4, chúng ta phải viết $\pm\sqrt{4}$. Tương tự như vậy, $\sqrt[n]{a}$ luôn có nghĩa là giá trị dương của căn bậc n của a.

TRỤC THỰC

Việc sử dụng các số thực để đo đạc được phản ảnh theo thói quen bằng cách mô tả những con số này trên hình vẽ bằng các điểm biểu diễn trên một đường thẳng nằm ngang.



Hình 1.1. Trục thực

Sự mô tả này bắt đầu với việc lựa chọn một điểm tuỳ ý như là một điểm gốc (điểm 0), và điểm tuỳ ý khác ở phía bên phải của nó (điểm 1). Khoảng cách giữa hai điểm này (khoảng cách đơn vị) được coi như một tỷ lệ xích, nhờ nó chúng ta có thể đặt trên đường thẳng những số nguyên dương hay âm, cũng như số hữu tỷ, như mô tả trên Hình 1.1. Chúng ta cần đặc biệt chú ý là tất cả các số dương nằm bên phải số 0 và tất cả các số âm nằm phía trái. Cách đặt điểm số thập phân được biểu diễn ở Hình 1.1 cho số $\frac{7}{3} = 2\frac{1}{3}$: khoảng cách giữa 2 và 3 được chia nhỏ bởi hai điểm thành 3 đoạn bằng nhau, và điểm chia đầu tiên trong đoạn này là điểm $2\frac{1}{3}$. Phương pháp sử dụng những đoạn chia nhỏ bằng nhau này được dùng để xác định những điểm trên đường thẳng tương ứng với số thập phân nào đó. Hơn nữa, sự tương ứng giữa số thập phân và các điểm có thể mở rộng cho số vô tỷ, vì như chúng ta sẽ thấy ở cuối mục này khai triển thập phân của số vô tỷ, như là:

$$\sqrt{2} = 1{,}414\ \ldots,\ \sqrt{3} = 1{,}732\ \ldots,\ \pi = 3{,}14159\ldots$$

có thể biểu diễn bằng một dãy các điểm dẫn tới vị trí chính xác của điểm tương ứng.

Ta có thể mô tả tương ứng "một - một" giữa tất cả các số thực và các điểm trên đường thẳng được thiết lập bởi những số này theo những toạ độ tương ứng. Đường thẳng có toạ độ này được gọi là *trục thực* (hay đôi khi gọi là *trục số*). Đây là cách thuận tiện và thông dụng để hợp nhất một cách lôgíc hai khái niệm khác nhau về hệ thống các số thực và trục thực và chúng ta có thể nói một cách thoải mái về các điểm trên trục thực như là những số thực và ngược lại, về những số thực cũng là những điểm được vẽ trên trục thực. Như vậy, các cách diễn đạt hỗn hợp như là "điểm vô tỷ" và "đoạn nằm giữa 2 và 3" là hoàn toàn tự nhiên và sẽ được sử dụng không cần giải thích thêm trong những phần sau.

BẤT ĐẲNG THỨC

Sự tiếp nối tuyến tính từ trái qua phải của các điểm trên trục thực tương ứng với một phần quan trọng trong môn đại số của hệ thống số thực, liên quan đến các bất đẳng thức. Những ý tưởng này có tầm quan trọng đối với Giải tích hơn là với các giáo trình toán học sơ cấp, vì thế chúng ta nhắc lại một cách ngắn gọn một số điểm cần thiết.

Ý nghĩa hình học của bất đẳng thức $a < b$ (đọc là a nhỏ hơn b) đơn giản là a nằm phía bên trái b; bất đẳng thức tương đương $b > a$ (b lớn hơn a) có nghĩa là b nằm phía bên phải của a. Số a dương hay âm tương ứng với $a > 0$ hoặc $a < 0$. Những quy tắc chính được sử dụng trong quá trình làm việc với bất đẳng thức là:

1. Nếu $a > 0$ và $b < c$, thì $ab < ac$.
2. Nếu $a < 0$ và $b < c$, thì $ab > ac$.
3. Nếu $a < b$, thì $a + c < b + c$ với mọi c.

Quy tắc 1 và 2 thường được diễn tả là một bất đẳng thức không đổi chiều trong phép nhân với số dương và đổi chiều trong phép nhân với dấu âm. Quy tắc 3 nói là bất đẳng thức không đổi chiều khi cộng vào hai vế một số bất kỳ (dương hoặc âm). Ta thường thay thế bất đẳng thức $a > b$ bằng bất đẳng thức tương đương $a - b > 0$, và quy tắc 3 thường được dùng để thiết lập bất đẳng thức tương đương.

Nếu ta muốn nói số a dương hoặc bằng không, chúng ta có thể viết $a \geq 0$ và đọc là "a lớn hơn hoặc bằng không ". Tương tự như vậy $a \geq b$ có nghĩa là $a > b$ hoặc $a = b$. Như vậy, $3 \geq 2$ và $3 \geq 3$ đều là bất đẳng thức đúng.

Chúng tôi cũng nhắc lại rằng tích của hai hay nhiều số bằng không khi và chỉ khi có ít nhất một trong các thừa số của tích bằng không. Nếu không có bất kỳ thừa số nào bằng không, thì tích số dương hoặc âm sẽ tuỳ thuộc vào số thừa số âm của nó chẵn hay lẻ.

GIÁ TRỊ TUYỆT ĐỐI

Giá trị tuyệt đối của số a được ký hiệu là $|a|$ và được định nghĩa:

$$|a| = \begin{cases} a & \text{khi } a \geq 0, \\ -a & \text{khi } a < 0. \end{cases}$$

Ví dụ, $|3| = 3$, $|-2| = -(-2) = 2$, và $|0| = 0$. Rõ ràng là phép toán tìm giá trị tuyệt đối giữ lại số dương không thay đổi và thay thế mỗi số âm bởi số dương tương ứng. Những tính chất chính của phép toán này là

$$|ab| = |a||b| \quad \text{và} \quad |a + b| \leq |a| + |b|$$

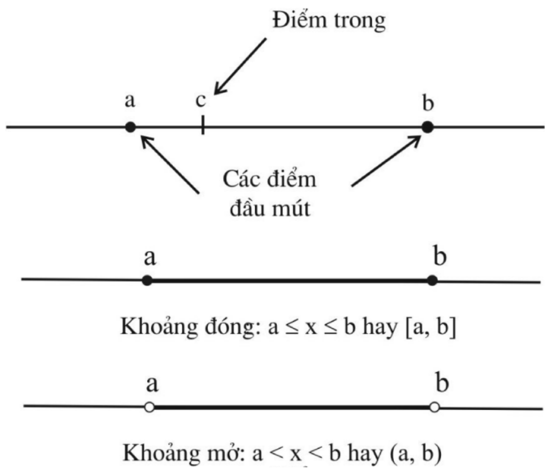
Theo ngôn ngữ hình học, giá trị tuyệt đối của số a đơn giản là khoảng cách từ điểm a đến điểm gốc. Tương tự như vậy, khoảng cách từ a đến b chính là $|a-b|$.

Để giải phương trình $|x + 2| = 3$, chúng ta có thể viết theo dạng $|x - (-2)| = 3$ và hiểu là "khoảng cách từ x đến (– 2) bằng 3". Dựa vào Hình 1.1, hiển nhiên các nghiệm là x = 1 và x = – 5. Ta còn có thể giải phương trình này bằng cách cho $|x + 2| = 3$ nghĩa là x + 2 = 3 hoặc x + 2 = - 3, các nghiệm là x = 1 và x = – 5 như trên.

KHOẢNG

Tập hợp các số thực mà chúng ta hay gặp nhất là khoảng. *Khoảng* đơn giản là một đoạn trên trục thực. Nếu các đầu mút của đoạn là a và b, thì khoảng này bao hàm tất cả các điểm nằm giữa a và b. Tuy nhiên, chúng ta có thể coi hoặc không coi các đầu mút của đoạn này là nằm trong khoảng.

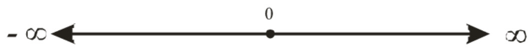
Để chính xác hơn, giả sử rằng a và b là hai số, với $a < b$. *Khoảng đóng* từ a đến b, ký hiệu là [a,b], bao gồm cả hai đầu mút, và như vậy bao gồm tất cả các số thực x, thoả mãn điều kiện $a \le x \le b$. Dấu ngoặc đơn được sử dụng để chỉ ra việc loại bỏ điểm đầu mút. Khoảng *(a, b),* bỏ đi cả hai điểm đầu mút được gọi là *khoảng mở* từ a đến b, bao gồm tất cả các số x thỏa mãn điều kiện $a < x < b$. Đôi khi, ta chỉ muốn thêm vào một điểm đầu mút của khoảng. Như vậy, khoảng được ký hiệu [a,b) và (a,b] được định nghĩa bởi bất đẳng thức tương ứng $a \le x < b$ và $a < x \le b$. Trong mỗi trường hợp, số c bất kỳ thỏa mãn điều kiện $a < c < b$ được gọi là *điểm trong* của khoảng (Hình 1.2).



Hình 1.2

Nói đúng ra, ký hiệu $a \le x \le b$ và [a,b] mang ý nghĩa khác nhau - ký hiệu đầu tiên biểu diễn một điều kiện cho số x, trong khi ký hiệu thứ hai mô tả một tập hợp - nhưng cả hai đều mô tả cùng một khoảng. Chúng ta sẽ coi chúng như nhau và sử dụng chúng thay thế cho nhau, và độc giả nên làm quen với cả hai ký hiệu này. Tuy vậy, ý nghĩa hình học của ký hiệu $a \le x \le b$ dễ nhận thấy hơn và vì thế, chúng ta thường dùng nó nhiều hơn ký hiệu kia.

Một nửa đường thẳng thường được coi là một khoảng mở rộng đến vô cùng theo một chiều nào đó. Ký hiệu ∞ (đọc là "vô cùng") thường được sử dụng để tạo ra những khoảng như vậy. Như vậy, với bất kỳ một số thực a nào, khoảng được xác định bởi bất đẳng thức $a < x$ và $a \ge x$ có thể được viết là $a < x < \infty$ và $-\infty < x \le a$, hoặc tương đương với (a, ∞) và $(-\infty, a]$. Tuy nhiên, cần nhớ là các ký hiệu ∞ và –∞ không biểu thị bất cứ số thực nào; chúng chỉ được dùng để nhấn mạnh rằng x được phép lớn tùy ý (hoặc về phía dương hoặc về phía âm). Như vậy, để dễ nhớ, có thể nghĩ -∞ và ∞ như là những "con số tưởng tượng" đặt ở "điểm cuối" phía trái và phía phải của trục thực, như trong Hình 1.3. Cũng như vậy, để thuận tiện có thể nói bản thân toàn bộ trục thực cũng là một khoảng, $-\infty < x < +\infty$ hoặc $(-\infty, +\infty)$.



Hình 1.3.

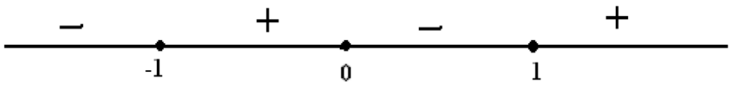
Tập hợp các số được biểu diễn bằng các bất đẳng thức và giá trị tuyệt đối thường là các khoảng. Đó là điều rõ ràng, ví dụ, tập hợp tất cả các số x thỏa mãn điều kiện $|x| < 2$ là khoảng $-2 < x < 2$ hoặc $(-2, 2)$. Ví dụ dưới đây mô tả một vài kỹ thuật hữu ích trong các trường hợp khác nhau.

Ví dụ: Giải bất phương trình $x^3 > x$.

"Giải" một bất phương trình như trên có nghĩa là tìm tất cả các số x làm cho bất phương trình nghiệm đúng. Chúng ta biến đổi bất phương trình đầu tiên thành $x^3 - x > 0$, và sau đó chuyển chúng thành dạng tích

$$x(x+1)(x-1) > 0 \qquad (1)$$

Biểu thức vế trái bằng không khi $x = 0$; $x = -1$, $x = 1$. Ba điểm này chia trục thực thành 4 khoảng, như trong Hình 1.4. Trong mỗi khoảng này, biểu thức $x(x+1)(x-1)$ xác định cùng một dấu. Ví dụ, khi $x < -1$, ta có thể kiểm chứng được rằng cả ba thừa số của biểu thức đều âm. Vì thế, biểu thức $x(x+1)(x-1)$ sẽ có dấu âm. Khi $-1 < x < 0$, chúng ta thấy x và $x-1$ âm, nhưng $x + 1$ dương, và như vậy $x(x+1)(x-1)$ sẽ dương. Ta thử xét mỗi khoảng theo cách này và đưa ra các kết quả như đã thấy trong hình vẽ. Sau khi hoàn thành, ta dễ dàng tìm được các khoảng, trên đó biểu thức (1) thoả mãn và có thể viết được lời giải: $-1 < x < 0$ và $1 < x$, hoặc tương đương với $(-1, 0)$ và $(1, \infty)$.



Hình 1.4.

Ta đưa thêm vài bình luận về việc sử dụng các khoảng để hiểu ý nghĩa hình học của khai triển thập phân một số thực. Trong trường hợp số vô tỷ $\sqrt{2}$, với khai triển thập phân là 1.414 … nghĩa là số $\sqrt{2}$ thoả mãn từng bất đẳng thức trong bảng vô hạn sau:

$1 \le \sqrt{2} \le 2$,

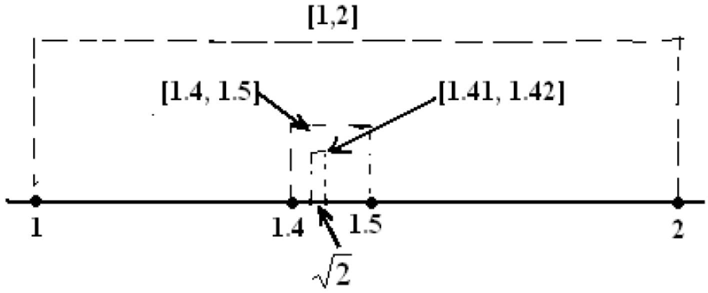
$1.4 \le \sqrt{2} \le 1.5$,

$1.41 \le \sqrt{2} \le 1.42$,

….

Điều này lần lượt có nghĩa là điểm tương ứng nằm trên mỗi khoảng đóng sau đây có các điểm mút là số hữu tỷ: [1, 2], [1.4, 1.5], [1.41, 1.42], … Dãy các khoảng "lồng nhau" trên đây được biểu diễn trên Hình 1.5. Về hình học, rõ ràng là có một và chỉ một điểm nằm trong tất cả các khoảng này, theo ý nghĩa đó, khai triển thập phân của $\sqrt{2}$ có thể hiểu như là một tập các chỉ dẫn chính xác tới vị trí của điểm $\sqrt{2}$ trên trục thực. Vì $\sqrt{2}$ là một số vô tỷ, nó sẽ là điểm trong của tất cả các khoảng trong dãy.

Có thể nhấn mạnh rằng mục đích của cuốn sách này chủ yếu là thực hành. Tuy nhiên, chúng tôi thường đưa ra thảo luận những câu hỏi "không thực hành" đôi chút để một số độc giả có thể thấy thú vị và cuốn hút, như ví dụ làm thế nào để biết số $\sqrt{2}$ là vô tỷ? Với các độc giả muốn dành thời gian cho câu hỏi này - và chúng tôi cũng cho rằng các câu trả lời sẽ giúp họ biết thêm về các điểm còn yếu của mình - chúng tôi cung cấp những vấn đề cần suy nghĩ thêm trong phụ lục đặc biệt (xem Phụ lục A.1 trong "Giải tích nhiều biến số").



Hình 1.5.

BÀI TẬP

1. Tìm tất cả các giá trị x thỏa mãn mỗi điều kiện sau:

(a) $|x| = 5$; (b) $|x + 4| = 3$;

(c) $|x - 2| = 4$; (d) $|x + 1| = |x - 2|$;

(e) $|x + 1| = |2x - 2|$; (f) $|x^2 - 5| = 4$;

(g) $|x - 3| \le 5$.

2. Giải các bất phương trình sau:

(a) $x(x - 1) > 0$; (b) $x^4 < x^2$;

(c) $(x - 1)(x + 2) < 0$; (d) $x^2 - 2 \ge x$;

(e) $x^2(x - 1) \ge 0$; (f) $(2x + 1)^8(x + 1) \le 0$;

(g) $x^2 + 4x - 21 > 0$; (h) $2x^2 + x < 3$;

(i) $1 - x \le 2x^2$; (j) $4x^2 + 10x - 6 < 0$;

(k) $x^3 + 1 < x^2 + x$; (l) $x^2 + 2x + 4 > 0$.

3. Nhớ lại là $\sqrt{a}$ là một số thực khi và chỉ khi $a \ge 0$. Hãy tìm giá trị của x sao cho mỗi số dưới đây là số thực.

(a) $\sqrt{4 - x^2}$; (b) $\sqrt{x^2 - 9}$;

(c) $\dfrac{1}{\sqrt{4 - 3x}}$; (d) $\dfrac{1}{\sqrt{x^2 - x - 12}}$.

4. Tìm giá trị của x để mỗi biểu thức sau đây dương.

(a) $\dfrac{x}{x^2 + 4}$; (b) $\dfrac{x}{x^2 - 4}$;

(c) $\dfrac{x + 1}{x - 3}$; (d) $\dfrac{x^2 - 1}{x^2 - 3x}$.

5. Bằng ví dụ cụ thể, chỉ ra mệnh đề sau đây không đúng: Nếu $a < b$ và $c < d$, thì $ac < bd$ (Mệnh đề này đúng, nghĩa là nó phải đúng với mọi số *a, b, c, d* thỏa mãn các điều kiện đã nêu. Chỉ cần một ngoại lệ - được gọi là một phản ví dụ - đủ để chứng minh rằng mệnh đề này là không đúng).

6. Nếu *a, b, c, d* là các số dương thoả mãn $\frac{a}{b} < \frac{c}{d}$, hãy chứng minh:

$$\frac{a}{b} < \frac{a+c}{b+d} < \frac{c}{d}$$

7. Hãy chỉ ra rằng số $\frac{1}{2}(a + b)$, được gọi là *trung bình cộng* của *a* và *b*, là trung điểm của đoạn $a \le x \le b$. (Gợi ý: Trung điểm là *a* cộng thêm nửa chiều dài của đoạn). Hãy tìm các điểm chia ba của khoảng.

8. Nếu $0 < a < b$, hãy chứng minh $a^2 < b^2$ và $\sqrt{a} < \sqrt{b}$

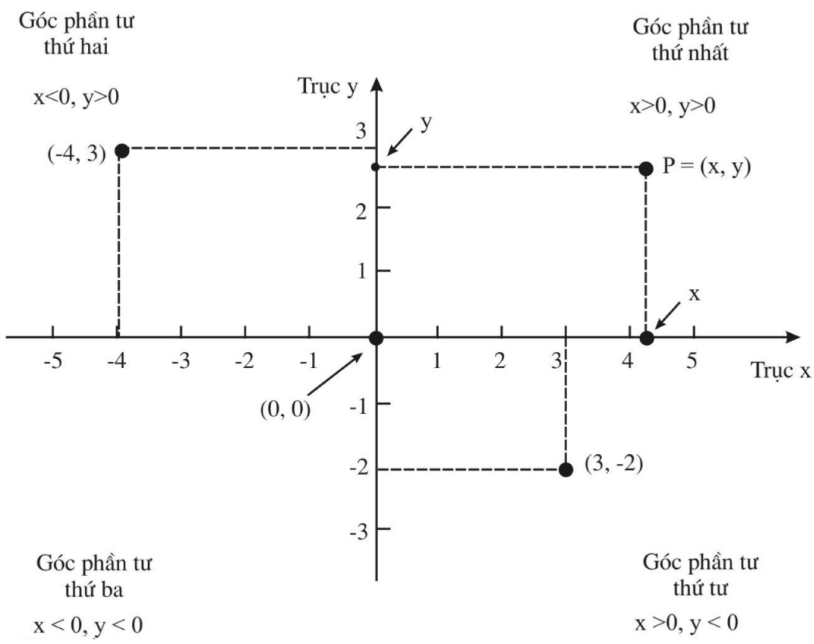
9. Nếu $0 < a < b$, số $\sqrt{ab}$ được gọi là *trung bình nhân* của a và b. Chỉ ra rằng $a < \sqrt{ab} < b$.

10. Nếu *a* và *b* là số dương, chứng minh rằng $\sqrt{ab} \le \frac{1}{2}(a+b)$.

1.3. MẶT PHẲNG TỌA ĐỘ

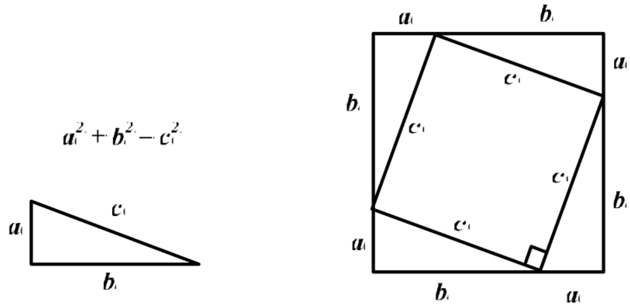
Cũng như các số thực được sử dụng làm tọa độ cho các điểm trên đường thẳng, một cặp số thực có thể dùng làm toạ độ trên một mặt phẳng. Với mục đích này, sau đây chúng ta thiết lập hệ toạ độ vuông góc trên mặt phẳng.

Vẽ hai đường thẳng vuông góc nhau trên mặt phẳng, một đường nằm ngang và đường kia thẳng đứng, như trong Hình 1.6. Những đường thẳng này tương ứng được gọi là trục *x* và trục *y*, giao điểm của chúng được gọi là *gốc toạ độ*. Tọa độ được đặt trên các trục như cách đã được mô tả trước đây, với điểm gốc là điểm 0 và khoảng cách đơn vị như nhau ở cả hai trục. Chiều dương của trục *x* ở phía phải điểm gốc tọa độ, chiều âm ở phía trái. Chiều dương của trục *y* ở phía trên gốc toạ độ và chiều âm ở dưới.



Hình 1.6. Mặt phẳng toạ độ hay mặt phẳng xy

Bây giờ, ta sẽ đặt điểm P ở một vị trí bất kỳ trên mặt phẳng. Vẽ một đường thẳng đi qua P song song với trục y, cắt trục x tại điểm có tọa độ là x. Tương tự như vậy, vẽ đường đi qua P, song song với trục x, cắt trục y tại điểm có toạ độ là y. Số x và y được xác định theo cách này được gọi là *toạ độ x* và *toạ độ y* của P. Để gán các toạ độ cho P, người ta thường viết chúng thành đôi theo thứ tự (x, y), với toạ độ x được viết trước; ta có thể nói rằng P có toạ độ là (x, y)*. Sự tương ứng giữa điểm P và các toạ độ của nó thiết lập tương ứng "một - một" giữa một điểm bất kỳ trên mặt phẳng và cặp số thực có thứ tự; với điểm P sẽ xác định được toạ độ tương ứng duy nhất của nó, và theo quy trình ngược lại, ta thấy rằng mỗi cặp số thực được sắp xếp thứ tự sẽ xác định được điểm P với toạ độ tương ứng là những số này. Giống như với trục thực, thông thường không có sự khác biệt giữa một điểm và toạ độ của nó, và ta nói "điểm (x, y)" thay cho việc nói "điểm có toạ độ là (x, y)". Toạ độ x và y của điểm P còn được gọi là *hoành độ* và *tung độ* của điểm P. Độc giả nên đặc biệt chú ý đến các điểm (x, 0) nằm trên trục x, các điểm (0, y) nằm trên trục y và điểm (0, 0) nằm trên gốc tọa độ. Cũng như vậy, hai trục sẽ chia mặt phẳng thành 4 góc phần tư, như Hình 1.6, và những góc phần tư này được đặc trưng bởi dấu của x và y: góc phần tư thứ nhất, $x > 0$ và $y > 0$; góc phần tư thứ hai, $x < 0$ và $y > 0$; góc phần tư thứ ba, $x < 0$ và $y < 0$; góc phần tư thứ tư, $x > 0$ và $y < 0$.



Hình 1.7. Định lý Pitago và chứng minh

Khi mặt phẳng được trang bị hệ toạ độ như vậy, nó thường được gọi là *mặt phẳng toạ độ* hoặc *mặt phẳng xy*.

CÔNG THỨC KHOẢNG CÁCH

Phần lớn công việc của chúng ta có liên quan đến các ý tưởng hình học - các tam giác vuông, tam giác đồng dạng, các hình tròn, hình cầu, hình nón,... - và giả sử là các sinh viên đều đã nắm vững môn hình học sơ cấp trong các chương trình trước đây. Nội dung có tầm quan trọng đặc biệt là định lý Pitago: với một tam giác vuông bất kỳ, bình phương của cạnh huyền bằng tổng bình phương của hai cạnh góc vuông (Hình 1.7). Có nhiều chứng minh định lý này, nhưng chứng minh dưới đây có vẻ là đơn giản nhất. Giả sử chiều dài hai cạnh góc vuông là a và b, cạnh huyền là c. Xếp 4 tam giác như vậy vào 4 góc của một hình vuông có cạnh là a + b, xem Hình 1.7. Khi đó, diện tích của hình vuông lớn bằng diện tích của 4 hình tam giác vuông cộng với diện tích hình vuông nhỏ, như sau:

$$(a + b)^2 = 4\left(\frac{1}{2}ab\right) + c^2.$$

* Trên thực tế, việc sử dụng cùng một ký hiệu cho một cặp số có thứ tự và cho một đọan mở không bao giờ dẫn tới hiểu lầm, vì chúng luôn được xác định được rõ ràng trong từng ngữ cảnh.

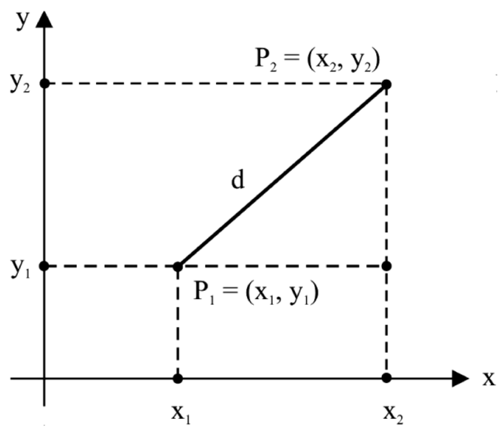
Sau khi rút gọn, ta có ngay: $a^2 + b^2 = c^2$, chính là định lý Pitago*.

Một trong nhiều ứng dụng đầu tiên của định lý này cho chúng ta thu được công thức tính khoảng cách d giữa hai điểm trong mặt phẳng toạ độ. Nếu hai điểm có tọa độ $P_1 = (x_1, y_1)$ và $P_2 = (x_2, y_2)$, khi đó đoạn nối chúng là cạnh huyền của tam giác vuông (Hình1.8) với hai cạnh góc vuông là $|x_1 - x_2|$ và $|y_1 - y_2|$. Theo định lý Pitago:

$$d^2 = |x_1 - x_2|^2 + |y_1 - y_2|^2$$
$$= (x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2$$

Như vậy, $$d = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2} \qquad (1)$$

Đây là *công thức khoảng cách*: $d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$



Hình 1.8.

Ví dụ 1. Khoảng cách d giữa các điểm (–4, 3) và (3,–2) trong Hình 1.6 là:

$$d = \sqrt{(-4-3)^2 + (3+2)^2} = \sqrt{74}$$

Chú ý rằng khi áp dụng công thức (1), thứ tự hai điểm là không quan trọng.

Ví dụ 2. Hãy tìm độ dài của cạnh tam giác mà các đỉnh của nó tạo bởi 3 điểm $P_1 = (-1, -3)$, $P_2 = (5, -1)$, $P_3 = (-2, 10)$.

Áp dụng công thức (1), độ dài các cạnh là:

$$P_1P_2 = \sqrt{(-1-5)^2 + (-3+1)^2} = \sqrt{40} = 2\sqrt{10},$$
$$P_1P_3 = \sqrt{(-1+2)^2 + (-3-10)^2} = \sqrt{170},$$
$$P_2P_3 = \sqrt{(5+2)^2 + (-1-10)^2} = \sqrt{170}.$$

Những phép tính trên chỉ ra rằng tam giác này cân, với hai cạnh P_1P_3 và P_2P_3 bằng nhau.

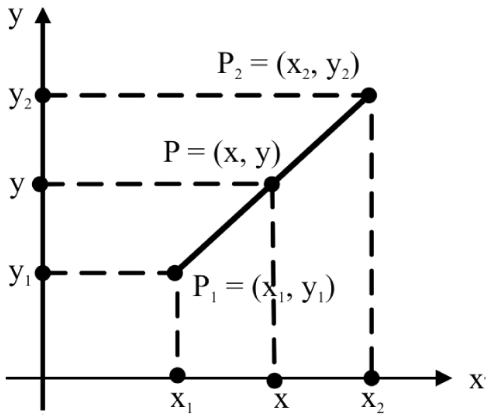
* Những sinh viên quan tâm muốn biết thêm về những con người phi thường, xây dựng nên toán học có thể tìm ở cuối sách (trong Phụ lục B), những nét chính của hầu hết những người có đóng góp được nêu trong giáo trình này.

CÔNG THỨC TÌM TRUNG ĐIỂM

Ta thường muốn biết tọa độ trung điểm của một đoạn nối hai điểm khác nhau cho trước. Nếu các điểm cho trước là $P_1(x_1, y_1)$ và $P_2(x_2, y_2)$, và nếu $P(x, y)$ là trung điểm, thì từ Hình 1.9 rõ ràng x là trung điểm của hình chiếu đoạn này trên trục x, và tương tự với y. Điều này cho chúng ta thấy rằng (xem câu hỏi 7, Phần 1.2):

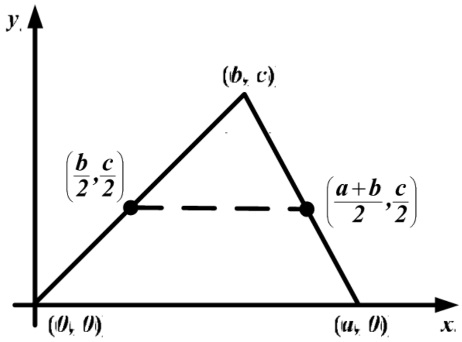
$$x = x_1 + \frac{1}{2}(x_2 - x_1) \text{ và } y = y_1 + \frac{1}{2}(y_2 - y_1), \text{ như vậy:}$$

$$x = \frac{1}{2}(x_2 + x_1) \quad \text{và} \quad y = \frac{1}{2}(y_2 + y_1)$$



Hình 1.9.

Cách khác để tạo thành công thức này là chú ý đến Hình 1.9, ta có $x - x_1 = x_2 - x$, như vậy $2x = x_1 + x_2$ hoặc $x = \frac{1}{2}(x_2 + x_1)$, cũng lập luận như trên, ta có y. Tương tự, nếu P là điểm chia ba đoạn nối P_1 và P_2 thì các toạ độ của nó cũng có thể tìm được với x và y là các điểm chia 3 tương ứng của các hình chiếu đoạn này trên trục x và trục y.



Hình 1.10

Ví dụ 3. Trong một tam giác bất kỳ, đoạn nối trung điểm của hai cạnh bao giờ cũng song song với cạnh thứ ba và có độ dài bằng nửa cạnh này. Để bắt đầu chứng minh điều này, chúng ta chú ý rằng tam giác luôn có thể được đặt ở vị trí như ở Hình 1.10, với cạnh thứ ba nằm trên phía dương của trục x và điểm đầu mút phía trái trùng với gốc toạ độ. Sau đó, ta xác định trung điểm của hai cạnh còn lại, như trong hình vẽ và thấy rằng hai trung điểm này có chung toạ độ y, đoạn nối giữa chúng song song với cạnh thứ ba nằm trên trục x. Độ dài của đoạn này đơn giản là sự chênh lệch toạ độ x của hai trung điểm

$$\frac{a+b}{2}-\frac{b}{2}=\frac{a}{2}$$

tức là một nửa chiều dài bằng của cạnh thứ ba.

Ví dụ trên mô tả cách sử dụng các toạ độ để chứng minh các định lý hình học bằng đại số. Phương thức được dùng ở đây là đặt hình vào những vị trí thích hợp trong hệ toạ độ - hoặc tương tự, chọn hệ toạ độ theo một vị trí thích hợp với hình - với mục đích đơn giản hóa các phép tính đại số.

BÀI TẬP

1. Vẽ trên mặt phẳng hình biểu diễn những điểm (x, y) thoả mãn điều kiện:

(a) $x < 2$;
(b) $-1 < y \le 2$;
(c) $0 \le x \le 1$ và $0 \le y \le 1$;
(d) $x = -1$
(e) $y = 3$
(f) $x = y$

2. Sử dụng công thức khoảng cách để chỉ ra rằng các điểm có toạ độ (–2, 1), (2, 2) và (10, 4) nằm trên cùng một đường thẳng.

3. Chứng tỏ rằng điểm (6, 5) nằm trên đường trung trực của đoạn nối hai điểm (–2, 1) và (2, –3).

4. Chứng minh rằng tam giác có đỉnh là ba điểm (3, –3), (–3, 3) và $(3\sqrt{3}, 3\sqrt{3})$ là tam giác đều.

5. Điểm (2, –2) và (–6, 5) là hai điểm đầu mút của đường kính một đường tròn. Hãy tìm tâm điểm và bán kính đường tròn đó.

6. Tìm các điểm có khoảng cách đến hai trục toạ độ bằng khoảng cách đến điểm (4, 2).

7. Hãy tìm điểm cách đều ba điểm (–9, 0), (6, 3), (–5, 6).

8. Nếu a và b là hai số bất kỳ, chứng minh là:

(g) Các điểm (a, b) và (a, –b) là đối xứng với nhau qua trục x.
(h) Các điểm (a, b) và (–a, b) là đối xứng với nhau qua trục y.
(i) Các điểm (a, b) và (–a, –b) là đối xứng với nhau gốc toạ độ.

9. Điểm (a, b) và (b, a) sẽ đối xứng nhau theo kiểu nào?

10. Trong mỗi trường hợp sau, đặt những hình tương ứng vào vị trí thích hợp trong hệ toạ độ để chứng minh mệnh đề đã cho bằng phương pháp đại số:

(j) Đường chéo của hình bình hành cắt nhau tại trung điểm mỗi đường.
(k) Tổng bình phương của các đường chéo hình bình hành bằng tổng bình phương các cạnh.
(l) Trung điểm cạnh huyền một tam giác vuông cách đều ba đỉnh.

Sử dụng kết quả câu (c) để chứng tỏ rằng khi hai góc nhọn của tam giác vuông là 30^0 và 60^0, cạnh đối diện với góc 30^0 bằng nửa cạnh huyền.

11. Trong tam giác vuông cân, cả hai góc nhọn đều là 45^0. Nếu cạnh huyền là h, hãy tính độ dài hai cạnh góc vuông.

12. $P_1 = (x_1, y_1)$ và $P_2 = (x_2, y_2)$ là hai điểm phân biệt. Nếu $P = (x, y)$ là điểm nằm trên đoạn P_1P_2 và chia ba khoảng cách từ P_1 đến P_2, chứng minh rằng:

$$x = \frac{1}{3}(2x_1 + x_2) \quad \text{và} \quad y = \frac{1}{3}(2y_1 + y_2)$$

Hãy tìm các công thức tương ứng với trường hợp P chia khoảng cách từ P_1 đến P_2 theo tỷ số: 2/3.

13. Cho một tam giác bất kỳ có ba đỉnh là (x_1, y_1), (x_2, y_2) và (x_3, y_3). Hãy tìm điểm nằm trên mỗi trung tuyến và chia khoảng cách từ đỉnh đến trung điểm cạnh đối diện theo tỷ số: 2/3. Hãy tính riêng cho từng trung tuyến để thấy rằng ba điểm này trùng nhau, với tọa độ là:

$$\frac{1}{3}(x_1 + x_2 + x_3) \quad \text{và} \quad \frac{1}{3}(y_1 + y_2 + y_3)$$

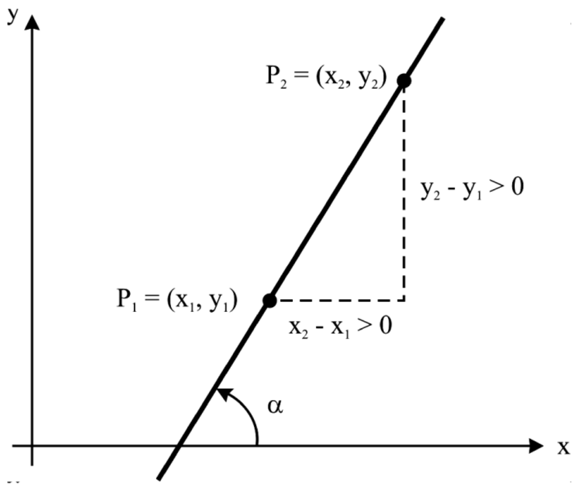
Điều đó chứng minh rằng các đường trung tuyến của một tam giác bất kỳ cắt nhau ở một điểm chia khoảng cách từ đỉnh đến trung điểm cạnh đối diện theo tỷ số: 2/3.

1.4. ĐỘ DỐC VÀ PHƯƠNG TRÌNH ĐƯỜNG THẲNG

Trong mục này chúng ta sẽ dùng ngôn ngữ đại số để mô tả tập hợp tất cả các điểm nằm trên một đường thẳng đã cho. Cách mô tả đại số này được gọi là *phương trình đường thẳng*. Tuy vậy, trước tiên chúng ta cần thảo luận về một khái niệm quan trọng ban đầu.

ĐỘ DỐC CỦA MỘT ĐƯỜNG THẲNG

Bất kỳ đường thẳng không nằm ngang nào đều có một số tương ứng để chỉ phương của nó, gọi là *độ dốc*. Số này được định nghĩa như sau (Hình 1.11).



Hình 1.11

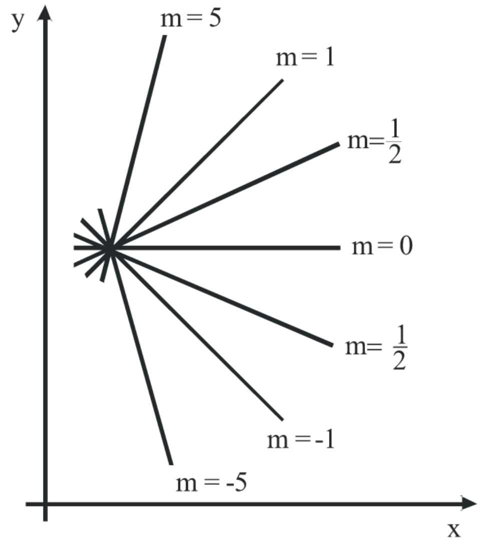
Chọn hai điểm bất kỳ trên đường thẳng, $P_1 = (x_1, y_1)$ và $P_2 = (x_2, y_2)$. Khi đó, độ dốc được ký hiệu là *m* và được xác định bởi công thức:

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \tag{1}$$

Nếu ta đảo theo thứ tự phép trừ ở cả tử số và mẫu số, khi đó dấu của cả tử số và mẫu số sẽ thay đổi nhưng độ dốc m không đổi:

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2}$$

Điều này chỉ ra là độ dốc có thể được tính bằng hiệu hai tung độ chia cho hiệu hai hoành độ với cùng thứ tự ở cả tử và mẫu số. Trong Hình 1.11, khi P_2 được đặt phía phải của P_1 và đường thẳng đi lên về phía phải, độ dốc xác định trong công thức (1) chính là tỷ lệ giữa chiều cao và cạnh đáy của tam giác vuông trong hình. Điều quan trọng là giá trị m phụ thuộc bản thân đường thẳng chứ không phụ thuộc vào vị trí chọn điểm P_1 và P_2 trên đường đó. Dễ dàng nhận thấy việc dịch chuyển P_1 và P_2 đến những vị trí khác nhau trên đường thẳng sẽ tạo nên những tam giác vuông đồng dạng, vì thế mà tỷ số trong (1) không thay đổi.



Hình 1.12. Các độ dốc khác nhau

Nếu ta chọn vị trí P_2 sao cho $x_2 - x_1 = 1$, có nghĩa là nếu ta chọn điểm P_2 ở phía phải P_1 và cách P_1 một đơn vị, khi đó độ dốc $m = y_2 - y_1$. Điều này cho ta thấy rằng độ dốc chính là sự thay đổi của toạ độ y, khi điểm (x, y) chạy trên đường thẳng để tăng *x* lên một đơn vị. Lúc này *y* có thể dương, âm hoặc bằng 0, phụ thuộc vào hướng của đường thẳng. Ta có thể thấy mối tương quan giữa dấu của độ dốc m và hướng của đường thẳng như sau:

$m > 0$; đường thẳng đi lên về phía phải;

$m < 0$; đường thẳng đi xuống về phía phải;

$m = 0$; đường thẳng nằm ngang.

Hơn nữa, giá trị truyệt đối của m là số đo độ dốc của đường thẳng (xem Hình 1.12). Rõ ràng từ biểu thức (1) ta thấy vì sao đường thẳng đứng không có độ dốc, vì trong trường hợp này hai điểm có toạ độ x bằng nhau, vì thế mẫu số của biểu thức (1) bằng không.

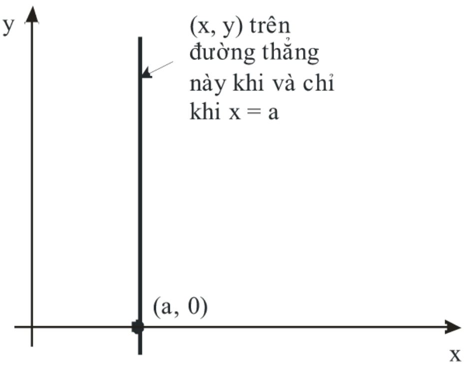
Nếu đường thẳng đang xét cắt trục x, góc α giữa chiều dương của trục x với đường thẳng, tính ngược chiều kim đồng hồ, được gọi là *độ nghiêng* - đôi khi là *góc nghiêng* - của đường thẳng. Các sinh viên đã học lượng giác sẽ thấy trong Hình 1.11, độ dốc chính là tang của góc này, $m = \tan \alpha$.

PHƯƠNG TRÌNH ĐƯỜNG THẲNG

Một đường thẳng đứng trên thực tế có đặc tính là mọi điểm trên nó có cùng một toạ độ x. Nếu đường thẳng này cắt trục x tại điểm (a, 0), thì mọi điểm (x, y) nằm trên đường này khi và chỉ khi

$$x = a, \tag{2}$$

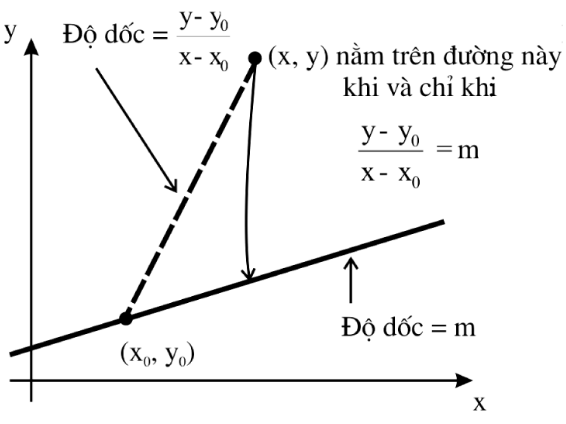
điều này được mô tả ở Hình 1.13. Ta nói rằng (2) là phương trình đường thẳng này với ý nghĩa chính xác là: một điểm (x, y) nằm trên đường thẳng khi và chỉ khi điều kiện (2) được thỏa mãn.



Hình 1.13

Tiếp theo, ta xét đến những đường không thẳng đứng, và được coi là "đã cho" nếu ta đã biết một điểm (x_0, y_0) trên đường và độ dốc m của nó (Hình 1.14). Nếu (x, y) là một điểm nào đó trên mặt phẳng không nằm trên đường thẳng đứng đi qua (x_0, y_0), thì dễ dàng thấy rằng điểm này nằm trên đường thẳng đã cho khi và chỉ khi đường thẳng được xác đinh bởi điểm (x_0, y_0) và (x, y) có cùng một độ dốc như đường thẳng đã cho:

$$\frac{y - y_0}{x - x_0} = m \tag{3}$$



Hình 1.14

Điều này sẽ tạo nên phương trình đường thẳng ngoại trừ một nhược điểm là toạ độ điểm (x_0, y_0) - điểm chắc chắn nằm trên đường thẳng - không thoả mãn phương trình này (do chúng sẽ biến đổi vế trái thành dạng biểu thức vô định 0/0). Ta dễ dàng loại bỏ nhược điểm này bằng cách viết phương trình (3) dưới dạng

$$y - y_0 = m(x - x_0) \qquad (4)$$

Tuy vậy, chúng ta vẫn thường ưa thích dạng (3) hơn, do liên quan trực tiếp giữa dạng này với ý tưởng hình học được mô tả ở Hình 1.14 có vẻ dễ nhớ hơn. Cả hai phương trình này đều được gọi là *phương trình điểm - độ dốc* của đường thẳng, bởi lẽ đường này được xác định ngay từ đầu khi đã biết một điểm trên đó và độ dốc của nó. Để hiểu rõ hơn về ý nghĩa của phương trình (4), hãy tưởng tượng một điểm (x, y) chạy trên đường đã cho. Trong khi điểm này di chuyển, tọa độ x và y của nó thay đổi; nhưng dù thay đổi, các toạ độ này luôn ràng buộc lẫn nhau bằng một quan hệ cố định được mô tả bởi phương trình (4).

Nếu xảy ra trường hợp điểm đã biết trên đường thẳng trùng với giao điểm của nó và trục y, và nếu điểm này được ký hiệu là (0, b), thì phương trình (4) trở thành $y - b = m\,x$ hoặc

$$y = mx + b \qquad (5)$$

Số b được gọi là *khoảng chắn - y* của đường thẳng, và (5) được gọi là *phương trình đoạn chắn - độ dốc* của đường thẳng. Dạng này rất tiện vì nó cho ta một cái nhìn khái quát về vị trí và hướng của một đường thẳng. Ví dụ, nếu phương trình

$$6x - 2y - 4 = 0 \qquad (6)$$

được giải cho y, ta có

$$y = 3x - 2 \qquad (7)$$

So sánh (7) với (5) thấy ngay rằng $m = 3$ và $b = -2$, và như vậy cả (6) và (7) đều biểu diễn đường thẳng qua điểm (0, −2) với độ dốc là 3. Thông tin này giúp ta dễ dàng vẽ được đường này. Có vẻ (6) và (7) là hai phương trình khác nhau, (6) cho ta "một" phương trình đường thẳng, còn (7) sẽ là một phương trình đường thẳng "khác". Tuy vậy, chúng ta nên coi chúng chỉ là những dạng khác nhau của một phương trình. Có thể có nhiều dạng khác nhau của một phương trình, chẳng hạn:

$$y + 2 = 3x, \qquad x = \frac{1}{3}y + \frac{2}{3}, \quad 3x - y = 2$$

Bỏ qua hình thức, việc ta coi tất cả những dạng trên là "một" phương trình đường thẳng là hợp lý.

Tổng quát hơn, mọi phương trình đường thẳng có dạng

$$A\,x + B\,y + C = 0 \qquad (8)$$

trong đó các hằng số A, B không đồng thời bằng 0, biểu diễn một đường thẳng. Nếu $B = 0$, thì $A \neq 0$, phương trình có thể đưa về:

$$x = -\frac{C}{A},$$

rõ ràng đây là phương trình của một đường thẳng đứng. Mặt khác nếu $B \neq 0$, thì

$$y = -\frac{A}{B}x - \frac{C}{B},$$

và phương trình này có dạng (5) với $m = -\frac{A}{B}$ và $b = -\frac{C}{B}$. Phương trình (8) hơi bất tiện với mục đích của chúng ta vì các hệ số của nó không có liên quan trực tiếp đến dạng hình học của đường thẳng. Giá trị chính của nó là ở chỗ nó có khả năng mô tả mọi đường thẳng, không phân biệt giữa trường hợp thẳng đứng hay không thẳng đứng. Vì lý do này mà phương trình (8) được gọi là *phương trình tổng quát của đường thẳng.*

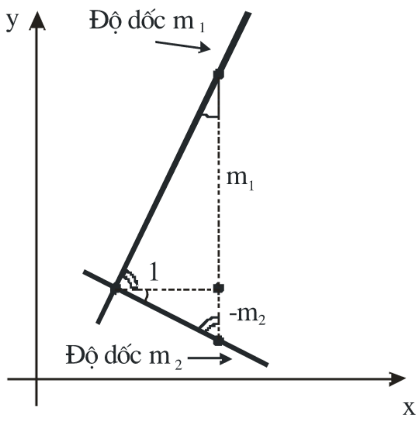
ĐƯỜNG SONG SONG VÀ ĐƯỜNG VUÔNG GÓC

Hai đường thẳng nghiêng với độ dốc là m_1 và m_2 là hai đường thẳng song song khi và chỉ khi chúng có độ dốc bằng nhau:

$$m_1 = m_2.$$

Tiêu chuẩn tương ứng cho hai đường thẳng vuông góc là quan hệ:

$$m_1 \times m_2 = -1 \tag{9}$$



Hình 1.15

Điều này không phải hiển nhiên, nhưng có thể dễ dàng xác lập được nó bằng cách sử dụng các tam giác đồng dạng như sau (Hình 1.15). Giả sử rằng các đường thẳng là vuông góc, như trong Hình 1.15. Vẽ một đoạn thẳng từ giao điểm hai đường thẳng về phía phải có độ dài bằng 1. Và từ điểm đầu mút phía phải của đoạn này vẽ một đoạn thẳng đứng lên trên và một đoạn thẳng đứng xuống phía dưới. Từ ý nghĩa của các độ dốc, hai tam giác vuông được vẽ theo cách này sẽ có độ dài cạnh bên còn lại là m_1; m_2. Vì các đường thẳng vuông góc với nhau, ta có các góc được đánh dấu bằng nhau và hai tam giác này là đồng dạng. Tính đồng dạng này làm cho các tỷ lệ của các cạnh tương ứng phải bằng nhau:

$$\frac{m_1}{1} = \frac{1}{-m_2} \Leftrightarrow m_1 . m_2 = -1$$

Điều này tương đương với (9), vì thế khi hai đường thẳng vuông góc với nhau thì hệ thức (9) đúng. Có thể dễ dàng đảo lại kết luận vừa nêu, tức là nếu (9) đúng, thì hai đường thẳng này vuông góc với nhau. Vì phương trình (9) tương đương với:

$$m_1 = -\frac{1}{m_2} \quad \text{và} \quad m_2 = -\frac{1}{m_1}$$

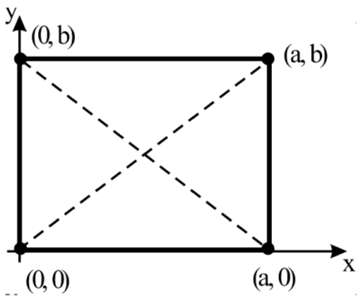
ta thấy rằng hai đường thẳng nghiêng vuông góc với nhau khi và chỉ khi độ dốc của một đường là nghịch đảo của số đối độ dốc đường thẳng kia.

Các ý tưởng trong phần này cho ta những công cụ mạnh hơn để chứng minh các định lý hình học bằng phương pháp đại số.

Ví dụ: Nếu các đường chéo của một hình chữ nhật vuông góc với nhau thì hình chữ nhật này là hình vuông. Để xác định điều này, chúng ta đặt hình chữ nhật vào vị trí thích hợp như trong Hình 1.16. Độ dốc của các đường chéo rõ ràng là $\frac{a}{b}$ và $-\frac{b}{a}$. Nếu các đường chéo này vuông góc với nhau thì

$$\frac{b}{a} = \frac{a}{b} \Leftrightarrow a^2 = b^2 \Leftrightarrow a^2 - b^2 = 0 \qquad \Leftrightarrow (a + b)(a - b) = 0$$

Phương trình cuối cùng cho ta a = b, như vậy hình chữ nhật này là hình vuông.



Hình 1.16

BÀI TẬP

1. Vẽ các cặp điểm sau, kẻ đường thẳng đi qua chúng và tính độ dốc của đường thẳng đó:

(a) (–3, 1), (4, –1); (b) (2, 7), (–1, –1);

(c) (–4, 0), (2, 1); (d) (–4, 3), (5, –6);

(e) (–5, 2), (7, 2); (f) (0, - 4), (1, 6);

2. Vẽ các bộ 3 điểm cho dưới đây, trong mỗi trường hợp hãy sử dụng cách tính độ dốc để xác định ba điểm này có nằm cùng trên một đường thẳng hay không?

(a) (5, –1), (2, 2), (–4, 6) ;

(b) (1, 1), (–5, –2), (5, 3) ;

(c) (4, 3), (10, 14), (–2, –8) ;

(d) (–1, 3), (6, –1), (–9, 7).

3. Vẽ các bộ 3 điểm cho dưới đây, trong mỗi trường hợp hãy sử dụng cách tính độ dốc để xác định ba điểm này có tạo nên một tam giác vuông hay không?

(a) (2, –3), (5, 2), (0, 5) ;

(b) (10, –5), (5, 4), (–7, –2) ;

(c) (8, 2), (–1, –1), (2, –7) ;

(d) (–2, 6), (3, –4), (8, 11) ;

4. Hãy viết phương trình mỗi đường thẳng trong Bài tập 1 bằng cách sử dụng dạng phương trình điểm - độ dốc, sau đó viết lại các phương trình đường thẳng này bằng cách sử dụng dạng y = mx + b và tìm điểm chắn - y.

5. Tìm phương trình của đường thẳng:

(e) qua điểm (2, –3) với độ dốc là –4;
(f) qua điểm (–4, 2) và (3, –1);
(g) có độ dốc bằng 2/3 và điểm chắn - y bằng –4;
(h) qua điểm (2, –4) và song song với trục x;
(i) qua điểm (1, 6) và song song với trục y;
(j) qua điểm (4, –2) và song song với đường $x + 3y = 7$;
(k) qua điểm (5, 3) và vuông góc với $y + 7 = 2x$;
(l) qua điểm (–4, 3) và song song với đường thẳng xác định bởi hai điểm (–2, –2) và (1, 0);
(m) là trung trực của đoạn nối hai điểm (1, –1) và (5, 7);
(n) qua điểm (–2, 3) với độ nghiêng là 135^0.

6. Nếu một đường thẳng cắt trục x tại điểm (a, 0), số a được gọi là điểm chắn - x. Nếu một đường thẳng có điểm chắn - x là $a \neq 0$ và điểm chắn - y là $b \neq 0$, chứng minh rằng, phương trình của nó có dạng:

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$$

Đây là phương trình *đoạn chắn.* Chú ý rằng khi cho y = 0 ta thấy đường thẳng cắt trục x tại điểm x = a, khi cho x = 0, ta thấy đường thẳng cắt trục y tại điểm y = b.

7. Viết mỗi phương trình sau dưới dạng chắn và vẽ đường thẳng tương ứng.

(a) $5x + 3y + 15 = 0$; (b) $3x = 8y - 24$;
(c) $y = 6 - 6x$; (d) $2x - 3y = 9$

8. Tập hợp các điểm (x, y) cách đều hai điểm $P_1 = (-1, -3)$ và $P_2 = (5, -1)$ là đường trung trực của đọan thẳng nối hai điểm đó. Hãy tìm phương trình của đường trung trực này

(o) bằng cách cho khoảng cách từ (x; y) đến P_1và P_2 sau đó rút gọn phương trình thu được;
(p) bằng cách tìm trung điểm của đoạn đã cho và tìm độ dốc phù hợp.

9. Vẽ đường thẳng $3x + 4y = 7$ và $x - 2y = 6$, tìm giao điểm của chúng. Gợi ý: Giao điểm của chúng là điểm (x, y) mà các toạ độ của nó thỏa mãn đồng thời cả hai phương trình.

10. Hãy tìm giao điểm của các cặp đường thẳng sau đây:

(q) $2x + 2y = 2$ và $y = x - 1$;
(r) $10x + 7y = 24$ và $15x - 4y = 7$;
(s) $3x - 5y = 7$ và $15y + 25 = 9x$.

11. F và C là hai ký hiệu về nhiệt độ theo thang Fa - ren - hét và thang Xen - si - us. Hãy tìm phương trình liên hệ giữa F và C, biết rằng nó là tuyến tính, F = 32 khi C = 0, F = 212 khi C = 100.

12. Hãy tìm giá trị của hằng số k để đường thẳng $(k - 3)x - (4 - k^2)y + k^2 - 7k + 6 = 0$

(t) song song với trục x
(u) song song với trục y
(v) đi qua điểm gốc tọa độ

13. Chứng minh rằng các đoạn thẳng nối trung điểm của hai cạnh kề nhau trong một tứ giác bất kỳ tạo thành hình bình hành.

14. Chứng minh rằng các đường thẳng qua một đỉnh bất kỳ của một hình bình hành và trung điểm của các cạnh đối diện chia ba đường chéo.

15. Cho (0, 0), (a, 0) và (b, c) là ba đỉnh của một tam giác bất kỳ có một cạnh nằm trên phía dương trục x, với điểm mút phía trái trùng với gốc tọa độ. Biết bình phương của cạnh này bằng tổng bình phương của hai cạnh kia, hãy sử dụng độ dốc để chứng tỏ rằng tam giác này vuông. Như thế ta sẽ chứng minh được định lý đảo Pi-ta-go.

1.5. ĐƯỜNG TRÒN VÀ ĐƯỜNG PARABOL

Mặt phẳng toạ độ hay mặt phẳng - xy thường được gọi là mặt phẳng Descartes, x và y thường được coi là toạ độ Descartes của điểm P = (x, y). Từ Descartes có nguồn gốc từ Cartesius, là tên La tinh của triết gia toán học người Pháp Descartes, một trong hai người sáng lập chính môn hình học giải tích*. Ý tưởng cơ sở của môn học này rất đơn giản: tìm hiểu tương quan giữa các điểm và tọa độ của chúng để nghiên cứu các vấn đề hình học - đặc biệt là các tính chất của đường cong - bằng công cụ đại số. Độc giả sẽ thấy ý tưởng đó bao trùm cả quyển sách này. Nói một cách tổng quát, hình học là môn học của trực giác và thị giác, trong khi đại số lại giầu khả năng tính toán, mỗi môn có thể hỗ trợ môn kia theo nhiều cách rất hiệu quả.

Phần lớn những người đã học đại số đều biết trên thực tế phương trình:

$$F(x, y) = 0 \qquad (1)$$

thường để xác định đường cong (đồ thị của nó) bao gồm mọi điểm P = (x, y) có toạ độ thoả mãn phương trình đã cho. Ngược lại, một đường cong được xác định bởi một số điều kiện hình học thường có thể được mô tả bằng đại số như dạng (1). Rõ ràng theo trực giác, đường thẳng là đường cong đơn giản nhất, và công việc đã làm ở Phần 1.4 cho ta biết rằng các đường thẳng trên mặt phẳng toạ độ tương ứng với những phương trình tuyến tính theo x và y. Bây giờ chúng ta tiếp tục mô tả bằng đại số một vài đường cong khác, chúng sẽ có ích như là những ví dụ mô tả trong một số chương sau.

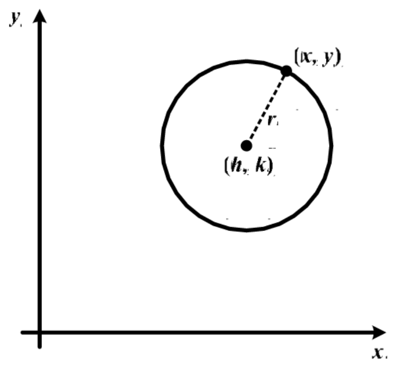
ĐƯỜNG TRÒN

Công thức khoảng cách trong Phần 1.3 thường rất có ích trong việc thiết lập phương trình đường cong mà hình dạng của nó phụ thuộc vào một hay nhiều khoảng cách.

Một trong các đường cong có dạng đơn giản nhất là đường tròn. Đường tròn có thể coi là tập hợp các điểm cách một điểm đã cho (tâm) một khoảng cách không đổi (bán kính). Nếu tâm là điểm (h, k) và bán kính là một số dương r (Hình 1.17), và nếu (x, y) là một điểm tùy ý trên đường tròn, thì điều kiện nói trên là

$$\sqrt{(x-h)^2 + (y-k)^2} = r$$

* Người thứ hai (cũng là người Pháp) là Fecma, ít nổi tiếng hơn Descartes nhưng là nhà toán học vĩ đại hơn.



Hình 1.17. Đường tròn

Để cho tiện ta loại bỏ dấu căn bằng cách bình phương hai vế, khi đó:

$$(x-h)^2 + (y-k)^2 = r^2 \tag{2}$$

Đây là phương trình đường tròn có tâm (h, k) và bán kính r. Nếu tâm đường tròn trùng với gốc toạ độ, thì h = k = 0, phương trình đường tròn sẽ là:

$$x^2 + y^2 = r^2$$

Ví dụ 1. Nếu bán kính của đường tròn là $\sqrt{10}$ và tâm là (–3, 4), thì phương trình của đường tròn là:

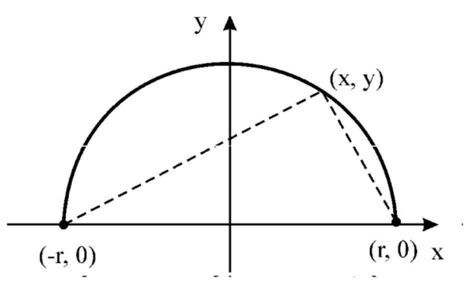
$$(x + 3)^2 + (y - 4)^2 = 10.$$

Chú ý rằng tọa độ của tâm là các số được *trừ đi* từ x và y trong ngoặc đơn.

Ví dụ 2. Góc nội tiếp trong nửa đường tròn là góc vuông. Để chứng minh điều này, ta đặt nửa đường tròn có bán kính r và tâm là gốc tọa độ (Hình 1.18), khi đó phương trình của nó là $x^2 + y^2 = r^2$ với $y \geq 0$. Góc nội tiếp là góc vuông khi và chỉ khi tích các độ dốc hai cạnh của chúng bằng (–1), nghĩa là:

$$\frac{y}{x-r} \cdot \frac{y}{x+r} = -1 \tag{3}$$

Dễ dàng thấy rằng điều này tương đương với $x^2 + y^2 = r^2$, đúng với bất kỳ điểm (x, y) nào trên nửa đường tròn, như vậy đúng góc nội tiếp là góc vuông.



Hình 1.18

Rõ ràng là bất cứ phương trình nào ở dạng (2) đều có thể được giải thích dễ dàng dưới dạng hình học. Ví dụ,

$$(x-5)^2+(y+2)^2=16 \tag{4}$$

được nhận ra ngay lập tức là phương trình đường tròn có tâm (5, –2) và bán kính là 4, những thông tin này cho phép ta vẽ đường tròn không khó khăn gì. Tuy nhiên, nếu phương trình này được viết lại "đơn giản hơn" theo đại số, nó sẽ có dạng:

$$x^2+y^2-10x+4y+13=0 \tag{5}$$

Đây là một phương trình tương đương với (4), nhưng được xáo trộn đi, và các hệ số trong đó không trực tiếp gợi cho ta bất cứ điều gì về dạng tự nhiên của đồ thị. Để xác định dạng của đồ thị, ta cần phải "xáo trộn lại" để làm xuất hiện dạng bình phương.* Muốn vậy, ta bắt đầu bằng cách viết lại phương trình (5) theo dạng:

$$(x^2-10x+\quad)+(y^2+4y+\quad)=-13$$

với hệ số tự do được chuyển sang vế phải và các vị trí trống sẽ được điền vào những hằng số thích hợp. Khi đó bình phương của một nửa hệ số của x được thêm vào vị trí trống đầu tiên và bình phương của một nửa hệ số y vào vị trí trống thứ hai, và để cân bằng hai vế, ta cũng phải cộng thêm vào vế phải phương trình hai hằng số như vậy, ta có:

$$(x^2-10x+25)+(y^2+4y+4)=-13+25+4$$

hay

$$(x-5)^2+(y+2)^2=16 \tag{6}$$

Ta có thể áp dụng cách làm tương tự với dạng phương trình tổng quát của (5):

$$x^2+y^2+Ax+By+C=0, \tag{7}$$

Tuy nhiên, không cần thiết phải viết một cách chi tiết trong trường hợp tổng quát này. Tuy nhiên, cần lưu ý là nếu hằng số 13 trong (5) được thay thế bằng 29, thì (6) sẽ trở thành:

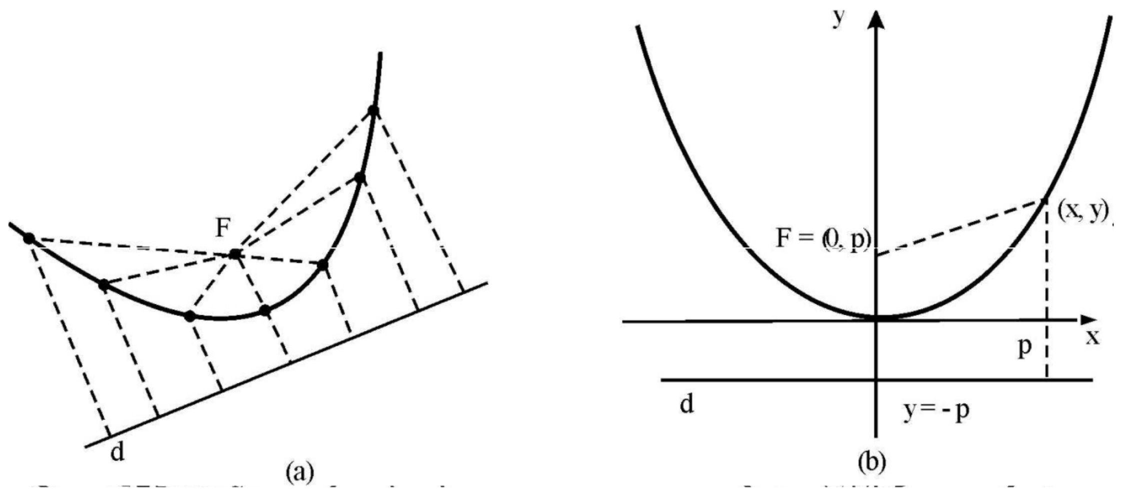
$$(x-5)^2+(y+2)^2=0$$

Đồ thị của nó chỉ là điểm (5, –2). Tương tự, nếu hằng số đó được thay thế bằng một số lớn hơn 29, thì vế phải của (6) trở nên âm và đồ thị là tập rỗng theo nghĩa là không có điểm (x; y) nào trong mặt phẳng có toạ độ thoả mãn phương trình. Như vậy, ta thấy đồ thị của (7) có khi là một đường tròn, có khi là một điểm và đôi khi lại là tập rỗng - hoàn toàn tuỳ thuộc vào các hằng số A, B, C.

PARABOL

Định nghĩa: đường parabol là đường cong bao gồm tất cả các điểm có khoảng cách đến một điểm cố định F (*được gọi là tiêu điểm*) và đến một đường thẳng cố định d (được gọi là *đường chuẩn*) bằng nhau (Hình 1.19a). Khoảng cách từ một điểm đến một đường thẳng luôn được hiểu là độ dài đường vuông góc.

* Dạng của phương trình $(x + a)^2 = x^2 + 2\,ax + a^2$ là chìa khoá của việc làm xuất hiện dạng bình phương. Chú ý vế phải là dạng bình phương đầy đủ – bình phương của x + a – cho ta xác định chính xác hệ số tự do của nó bằng bình phương của nửa hệ số của x.



Hình 1.19. Hình parabol

Để tìm một phương trình đơn giản cho parabol, ta đặt nó vào một hệ tọa độ như Hình 1.19b, với tiêu điểm và đường chuẩn cách đều trục x về phía trên và phía dưới. Đường thẳng đi qua tiêu điểm và vuông góc đường chuẩn được gọi là trục của parabol, đó là trục đối xứng của đường cong, và là trục y của đồ thị. Điểm nằm trên trục cách đều tiêu điểm và đường chuẩn được gọi là đỉnh của parabol; trên đồ thị này, đỉnh parabol nằm ở gốc toạ độ. Nếu (x, y) là điểm bất kỳ trên đường parabol, điều kiện theo định nghĩa được thiết lập bằng đại số nhờ phương trình dạng:

$$\sqrt{x^2 + (y-p)^2} = y + p \qquad (8)$$

Bình phương cả hai vế và rút gọn, ta có

$$x^2 + y^2 - 2\,pq + p^2 = y^2 + 2\,py + p^2$$

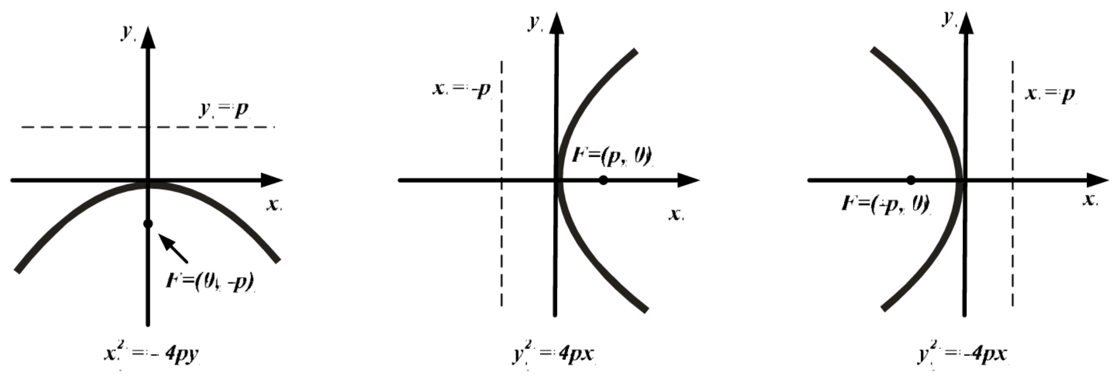
hay $$x^2 = 4\,py \qquad (9)$$

Những bước này có thể đảo ngược được, vậy (8) và (9) là tương đương và (9) là phương trình parabol với tiêu điểm và đường chuẩn được xác định trong Hình 1.19b. Cần chú ý là hằng số dương p trong (9) là khoảng cách từ tiêu điểm đến đỉnh và cũng là khoảng cách từ đỉnh đến đường chuẩn.

Nếu ta đổi vị trí của parabol đối với hai trục tọa độ, ta sẽ thay đổi một cách tự nhiên phương trình của nó. Ba vị trí khác nhau được chỉ ra ở Hình 1.20, với các phương trình tương ứng và với $p>0$. Các sinh viên nên kiểm tra tính đúng đắn của cả ba phương trình. Ta cũng thấy đều có thể đưa được cả bốn phương trình trên về dạng :

$$y = ax^2 \qquad (10)$$

hoặc $$x = ay^2.$$



Hình 1.20. Các dạng parabol

Những dạng này không chứa hằng số p, cũng như không nêu rõ ý nghĩa hình học, nhưng bù lại chúng giúp ta dễ nhận ra trường hợp tổng quát của đồ thị. Chẳng hạn, trong (10) biến x được bình phương nhưng biến y thì không. Điều này nói lên rằng một điểm (x, y) di chuyển trên đường cong, y tăng nhiều và nhanh hơn x, và vì thế đường cong thu hẹp về phía trục y, quay bề lõm lên trên hay xuống dưới phụ thuộc vào hệ số a dương hoặc âm. Điều này cũng nói cho ta biết đồ thị này đối xứng qua trục y, vì x là bình phương, nên ta sẽ nhận cùng một giá trị của y ứng với hai giá trị x đối nhau.

Ví dụ 3. Xét đồ thị của phương trình $12x + y^2 = 0$? Nếu viết theo dạng $y^2 = -12\,x$ và so sánh với phương trình phía phải của Hình 1.20, ta thấy rõ ràng đồ thị là một hình parabol có đỉnh nằm trên gốc toạ độ và bề lõm quay về phía trái. Vì 4p = 12, nên p = 3, và điểm (–3, 0) là tiêu điểm, x = 3 là đường chuẩn.

Ví dụ 4. Đồ thị của $y = 2x^2$ rõ ràng là một parabol có đỉnh nằm trên gốc toạ độ và bề lõm quay lên phía trên. Để tìm tiêu điểm và đường chuẩn của nó, phương trình được viết lại là $x^2 = \frac{1}{2}y$ và được so với phương trình (9). Như vậy, $4p = \frac{1}{2}$, $p = \frac{1}{8}$. Tiêu điểm do vậy là $(0, \frac{1}{8})$ và đường chuẩn là $y = -\frac{1}{8}$.

Ta sẽ bàn đến một vấn đề cuối cùng của đường parabol bằng cách xét phương trình:

$$y = x^2 - 4\,x + 5 \tag{11}$$

Nếu viết thành

$$y - 5 = x^2 - 4\,x$$

và nếu ta biến đổi các số hạng liên quan đến x để có bình phương đủ, kết quả sẽ là

$$y - 1 = (x - 2)^2. \tag{12}$$

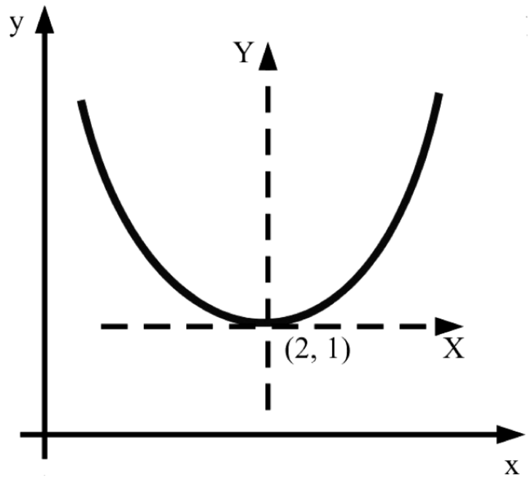
Bây giờ, nếu ta đưa vào các biến mới:

$$X = x - 2, \tag{13}$$

$$Y = y - 1,$$

thì phương trình (12) sẽ trở thành

$$Y = X^2.$$



Hình 1.21

Đồ thị của phương trình này rõ ràng là một parabol quay bề lõm lên trên, có đỉnh tại điểm gốc của hệ tọa độ XY. Theo phương trình (13), điểm gốc trên hệ toạ độ XY là điểm (2, 1) trong hệ toạ độ xy, như Hình 1.21. Điều xảy ra ở đây là hệ toạ độ đã dịch chuyển sang một vị trí mới trên mặt phẳng và các trục đã được đổi tên. Các phương trình (13) biểu thị mối quan hệ giữa các tọa độ của một điểm bất kỳ trong hai hệ toạ độ tương ứng. Cũng theo cách đó, bất kỳ phương trình nào có dạng

$$y = ax^2 + bx + c, \ \ a \neq 0,$$

đều biểu diễn một parabol có trục thẳng đứng, bề lõm quay lên trên hoặc xuống dưới tùy thuộc vào a dương hay âm. Tương tự, phương trình

$$x = ay^2 + by + c, \ \ a \neq 0,$$

biểu diễn một parabol có trục nằm ngang, bề lõm quay về phía phải hay phía trái phụ thuộc vào $a > 0$ hay $a < 0$.

Trong phần trên, ta đã dùng khái niệm tĩnh về đường cong, coi nó như một tập cố định các điểm hay một hình hình học. Ta còn có thể dùng quan điểm động, coi đường cong như là quỹ đạo của một điểm chuyển động. Ví dụ, một đường tròn sẽ là quỹ đạo của một điểm chuyển động sao cho khoảng cách của nó đến một điểm cố định cho trước là không đổi. Theo cách nghĩ này - với lợi thế về sự sống động trực quan của nó - một đường cong thường được gọi là một *quỹ tích*. Như vậy, đường parabol sẽ là quỹ tích của một điểm chuyển động sao cho khoảng cách từ điểm đó đến một điểm và đến một đường thẳng cho trước luôn bằng nhau.

BÀI TẬP

1. Tìm phương trình của đường tròn có tâm và bán kính cho trước:

(a) (4, 6), 3;	(b) (–3, 7), $\sqrt{5}$;
(c) (–5, –9), 7;	(d) (1, –6), $\sqrt{2}$;
(e) (a, 0), a;	(d) (0, a), a.

2. Trong mỗi trường hợp sau, tìm phương trình của đường tròn được xác định theo các điều kiện cho trước:

(a) Tâm là (2, 3) và đi qua điểm (–1, –2).

(b) Điểm mút của một đường kính là (–3, 2) và (5, –8).

(c) Tâm là (4, 5) và tiếp xúc với trục x.

(d) Tâm là (–4, 1) và tiếp xúc với đường thẳng $x = 3$.

(e) Tâm là (–2, 3) và tiếp xúc với đường thẳng $4y - 3x + 2 = 0$.

(f) Tâm nằm trên đường thẳng $x + y = 1$, đi qua điểm (–2, 1) và (–4, 3).

(g) Tâm nằm trên đường thẳng $y = 3x$, tiếp xúc với đường $x = 2y$ tại điểm (2, 1).

3. Trong mỗi trường hợp sau, bằng cách làm xuất hiện bình phương đủ, hãy xác định bản chất của đồ thị phương trình đã cho dưới đây:

(a) $x^2 + y^2 - 4x - 4y = 0$.

(b) $x^2 + y^2 - 18x - 14y + 130 = 0$.

(c) $x^2 + y^2 + 8x + 10y + 40 = 0$.

(d) $4x^2 + 4y^2 + 12x - 32y + 37 = 0$.

(e) $x^2 + y^2 - 8x + 12y + 53 = 0$.

(f) $x^2 + y^2 - \sqrt{2}\,x + \sqrt{2}\,y + 1 = 0$.

(g) $x^2 + y^2 - 16x + 6y - 48 = 0$.

4. Tìm phương trình quỹ tích của điểm P = (x, y) chuyển động theo hai trường hợp với các điều kiện cho sau đây và vẽ đồ thị của chúng:

(a) Tổng bình phương các khoảng cách từ P đến các điểm (a, 0) và (–a, 0) bằng $4b^2$, với $b \geq a > 0$.

(b) Khoảng cách từ P đến điểm (8, 0) gấp đôi khoảng cách từ P đến điểm (0, 4).

5. Công thức tính các nghiệm của phương trình bậc hai $ax^2 + bx + c = 0$ là

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

Ta có công thức này bằng cách chia hai vế phương trình cho a, chuyển hằng số sang phía phải rồi làm xuất hiện dạng bình phương đủ. Trong trường hợp nào phương trình sẽ có các nghiệm phân biệt, nghiệm kép hay không có nghiệm thực?

6. Đường tròn $x^2 + y^2 - 8x - 6y - 11 = 0$ cắt các đường thẳng dưới đây tại các điểm nào?

(a) trục x

(b) trục y

(c) đường thẳng $x + y = 1$.

Vẽ hình và dùng hình vẽ để phán đoán xem các câu trả lời của bạn có hợp lý hay không?

7. Tìm phương trình của tất cả các đường thẳng đi qua điểm (0, 4) và tiếp xúc với đường tròn $x^2 + y^2 = 2y$. Gợi ý: Đường thẳng $y = mx + 4$ tiếp xúc với đường tròn nếu hai đường có một điểm chung duy nhất.

8. Tìm tiêu điểm và đường chuẩn của mỗi parabol dưới đây, vẽ các đường cong đó:

(a) $y^2 = 12x$; (b) $y = 4x^2$;

(c) $2x^2 + 5y = 0$; (d) $4x + 9y^2 = 0$;

(e) $x = -2y^2$; (f) $12y = -x^2$;

(g) $16y^2 = x$; (h) $24x^2 = y$;

(i) $y^2 + 8y - 16x = 16$; (j) $x^2 + 2x + 29 = 7y$.

9. Vẽ parabol sau và viết phương trình của nó nếu biết:

(a) Đỉnh là (0, 0) và tiêu điểm (–3, 0);

(b) Đỉnh là (0, 0) và đường chuẩn là $y = -1$;

(c) Đỉnh là (0, 0) và đường chuẩn là $x = -2$;

(d) Đỉnh là (0, 0) và tiêu điểm $(0, -\frac{1}{3})$;

(e) Đường chuẩn là $x = 2$ và tiêu điểm (– 4, 0);

(f) Đường chuẩn là $y = -1$ và tiêu điểm (3, 3);

10. Xác định tiêu điểm và đường chuẩn của các parabol sau đây, vẽ các đường đó:

(a) $y = x^2 + 1$;

(b) $y = (x - 1)^2$;

(c) $y = (x - 1)^2 + 1$;

(d) $y = x^2 - x$.

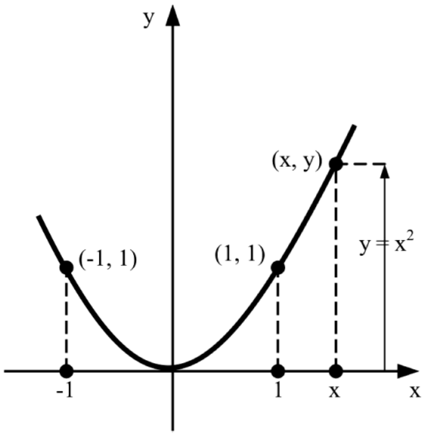
11. Nước phun từ vòi nằm ngang cao 4 ft so với mặt đất, vẽ ra một đường parabol với đỉnh là vòi nước. Biết rằng dòng nước hạ xuống 1ft đầu tiên ứng với chuyển động ngang 10 ft, hỏi khoảng cách theo chiều ngang từ vòi nước đến chỗ nước rơi xuống đất là bao nhiêu ft?

12. Chứng tỏ rằng chỉ có đúng một đường thẳng có độ dốc m cho trước và tiếp xúc với đường parabol $x^2 = 4py$, viết phương trình của đường thẳng này.

13. Chứng minh rằng hai tiếp tuyến parabol từ cùng một điểm bất kỳ trên đường chuẩn thì vuông góc với nhau.

1.6. KHÁI NIỆM HÀM SỐ

Hàm số là nội dung quan trọng nhất trong các bộ môn toán mà ta xem xét kể cả đại số, hình học, lý thuyết số, xác suất, hay các bộ môn toán khác. Tất cả các bộ môn này đều cho thấy hàm số là lĩnh vực đầu tiên cần khám phá. Điều này đặc biệt đúng với giải tích, môn học mà phần lớn công việc liên quan đến việc phát triển công cụ để nghiên cứu hàm số và ứng dụng công cụ này cho các vấn đề trong khoa học và hình học.



Hình 1.22

Hàm số là gì? Ta bắt đầu trả lời câu hỏi này bằng việc xét phương trình: $y = x^2$ và đồ thị của nó. Như đã biết, đồ thị hàm số này là một parabol có bề lõm quay lên phía trên và đỉnh trùng với gốc tọa độ (Hình 1.22). Trong Phần 5.5, ta đã biết phương trình này là mối liên hệ giữa các tọa độ khác nhau của các điểm (x, y) di chuyển dọc theo đường cong. Bây giờ, ta sẽ thay đổi quan điểm và nghĩ đây là công thức giúp ta xác định được giá trị bằng số của y khi cho trước một giá trị bằng số của x. Chẳng hạn, $y = 1$ khi $x = 1$, $y = 4$ khi $x = 2$, $y = \frac{1}{4}$ khi $x = \frac{1}{2}$, $y = 1$ khi $x = -1$, và v.v... Vì thế, giá trị y được coi là *phụ thuộc*, hay là *hàm số của* giá trị x. Sự phụ thuộc này được biểu diễn bằng ký hiệu hàm số như sau:

$$y = f(x) \qquad \text{khi} \qquad f(x) = x^2$$

Ký hiệu f(x) được đọc là "f của x", và chữ f biểu thị quy tắc hay quá trình - bình phương, trong trường hợp cụ thể này - để với một giá trị bằng số bất kỳ của x có thể tính ra được giá trị bằng số tương ứng của y. Các ví dụ bằng số vừa nêu ra có thể viết dưới dạng $f(1) = 1$, $f(2) = 4$, $f(\frac{1}{2}) = \frac{1}{4}$, và $f(-1) = 1$. Ý nghĩa của ký hiệu này có thể được thấy rõ thêm trong các phép tính như:

$f(x + 1) = (x + 1)^2 = x^2 + 2x + 1$ và $f(x^3) = (x^3)^2 = x^6$;

quy tắc f đơn giản là tính bình phương của bất cứ đại lượng nào trong dấu ngoặc.

Bây giờ, ta sẽ không xét trường hợp đặc biệt nữa để xây dựng khái niệm tổng quát của hàm số mà trong phần lớn cuốn sách này sẽ phải dùng đến.

Gọi D là một tập các số thực đã cho. Một hàm số f xác định trên D là một quy tắc, hay quy luật tương ứng cho phép xác định được giá trị y với mỗi giá trị x đã cho trong D. Tập D chứa các giá trị của x được gọi là *miền xác định* (hay *tập xác định*) của hàm số, tập các giá trị tương ứng của y được gọi là *miền giá trị*. Số y được xác định từ x nhờ hàm số f thường được viết là f(x) - như vậy y = f(x) - và được gọi là *giá trị* của f tại x. Thông thường, x được gọi là *biến độc lập* vì ta có thể tự do gán cho x bất cứ giá trị nào trong miền xác định, y được gọi là *biến phụ thuộc* vì giá trị của nó phụ thuộc vào việc chọn giá trị x. Tất nhiên, không nhất thiết phải sử dụng chữ cái x và y mà có thể sử dụng bất cứ chữ cái nào cũng được.

Độc giả chắc đã làm quen với khái niệm *đồ thị* của một hàm số f: nếu ta hình dung miền xác định D trải ra trên trục x trong mặt phẳng tọa độ (Hình 1.23), thì từ mỗi điểm x trong miền D sẽ tương ứng với số y = f(x), và tập hợp tất cả các điểm (x, y) thu được trên mặt phẳng chính là đồ thị. Đồ thị là sự hỗ trợ có giá trị cho phép ta nhìn thấy toàn cảnh các hàm số, và ta sẽ xét kỹ hơn trong Phần 1.8 (Phần Đồ thị hàm số).

Đầu tiên, các hàm duy nhất được các nhà toán học xem xét là các hàm xác định bằng công thức. Điều này dẫn đến cách nghĩ cảm tính là hàm số f "làm cái gì đó" với mỗi số x thuộc miền xác định để "tạo ra" được một số y tương ứng y = f(x). Như vậy, nếu

$$y = f(x) = (x^3 + 4)^2,$$

thì y là kết quả của việc thực hiện một số phép toán cụ thể nào đó với x: lập phương, rồi cộng 4, sau đó bình phương tổng. Ngoài ra, còn có các hàm số không cho bằng công thức, chúng được diễn đạt bằng lời. Đây cũng là các hàm số được cho một cách hợp lý và hoàn hảo, ví dụ:

$$y = f(x) = 0 \begin{cases} 0 & \text{nếu x là số h ữ u tỉ} \\ 1 & \text{nếu x là số vô tỉ} \end{cases}$$

Yêu cầu thực sự của hàm số là khi x đã biết; y phải được xác định một cách duy nhất - theo bất kỳ cách nào; không có điều này, ta không thể nói gì về bản chất của quy tắc f. Trong những cuộc thảo luận hướng về các ý tưởng, không cần đi sâu vào các vấn đề cụ thể, việc tổng quát hóa và mở rộng như vậy thường rất có lợi.

Cần phải thêm một vài chú ý trong cách sử dụng. Nói một cách chặt chẽ, từ "hàm số" ám chỉ quy luật f tương ứng chỉ ra được một số y = f(x) duy nhất với mỗi x trong miền xác định. Những người cầu toàn thường thích nhấn mạnh sự khác biệt giữa hàm f và giá trị f(x) tại x. Tuy nhiên, khi mà sự khác biệt này đã hiểu được dễ dàng, thì phần lớn người làm toán đều thích sử dụng những từ lỏng và thường nói "hàm y = f(x)" hay thậm chí là "hàm f(x)". Hơn nữa, khi quy tắc này được định nghĩa bằng công thức, như trong ví dụ $f(x) = x^2$, ta cũng nói "hàm $f(x) = x^2$" hay "hàm $y = x^2$" thậm chí không cần quan tâm đến y hay f(x), gọi là "hàm x^2 ". Rõ ràng là, có thể sử dụng bất cứ chữ cái nào để ký hiệu hàm. Không có quy định bắt buộc phải sử dụng chữ cái f, nhưng chữ này lại được ưa thích vì những lý do hiển nhiên, và các chữ g, h, F, G, H và nhiều chữ khác cũng rất thông dụng. Điều này thường xảy ra khi ta muốn thảo luận chung về hàm số mà không cần bình luận chính xác về một hàm nào đó. Trong các cuộc thảo luận này, kí hiệu y = f(x) thường được sử dụng.

Chú ý rằng để hiểu đầy đủ về một hàm f(x), cần biết chính xác các số thực nào là giá trị được phép gán cho biến độc lập x. Do vậy, miền xác định là phần không thể thiếu trong khái niệm về hàm số. Tuy nhiên, trên thực tế, phần lớn những dạng hàm đặc biệt mà chúng ta quan tâm đều được xác định bằng công thức, ví dụ như:

$$f(x) = \frac{1}{(x-1)(x+2)} \tag{1}$$

và không nói gì tới miền xác định. Nếu không có ràng buộc nào khác, miền xác định của hàm này sẽ được hiểu là tập tất cả các số thực x, qua đó công thức trên có nghĩa. Trong trường hợp này, miền xác định sẽ là các giá trị x không làm cho mẫu số bằng không, vì biểu thức có mẫu số bằng không sẽ không có nghĩa trong đại số. Do vậy miền xác định của (1), sẽ bao gồm tất cả các số thực trừ hai giá trị x = 1 và x = –2.

Ví dụ: Xét ba hàm số xác định bằng phương trình sau:

$$f(x) = x^2 \tag{2}$$

$$g(x) = \frac{1}{x^2} \tag{3}$$

$$h(x) = \sqrt{25 - x^2} \tag{4}$$

Miền xác định của (2) rõ ràng là tập tất cả các số thực, và miền giá trị của nó là tập mọi số thực không âm. Miền xác định của (3) là tập tất cả các số thực khác không, miền giá trị của nó là tập các số thực dương. Trong trường hợp (4), điều mà ta nghĩ đến ngay là căn bậc hai của một số âm không xác định. Như vậy, miền xác định ở đây là tập tất cả các số x, thoả mãn bất đẳng thức $25 - x^2 \geq 0$, cụ thể là khoảng $-5 \leq x \leq 5$, và miền giá trị là khoảng $[0, 5]$.

Các hàm số thường gặp trong giải tích có dạng hàm hợp được xây dựng từ nhiều hàm đơn giản hơn. Để mô tả ý tưởng này, ta xét hai hàm số:

$$f(x) = x^2 + 3x \qquad \text{và} \qquad g(x) = x^2 - 1.$$

Hàm đơn tạo ra bằng cách : đầu tiên tìm g theo x, sau đó tìm đặt f của g(x) sẽ là:

$$f(g(x)) = f(x^2 - 1) = (x^2 - 1)^2 + 3(x^2 - 1)$$
$$= x^4 + x^2 - 2.$$

Chú ý rằng $f(x^2 - 1)$ nhận được bằng cách thay x bằng $x^2 - 1$ trong công thức $x^2 + 3x$. Ký hiệu f(g(x)) được đọc là “f của g của x”. Nếu thiết lập hàm số theo một trật tự khác (f trước, g sau), ta sẽ có:

$$g(f(x)) = g(x^2 + 3x) = (x^2 + 3x)^2 - 1$$
$$= x^4 + 6x^3 + 9x^2 - 1,$$

như vậy, có thể thấy f(g(x)) và g(f(x)) khác nhau. Đặc biệt, cũng có trường hợp f(g(x)) và g(f(x)) có chung một dạng hàm của x, ví dụ $f(x) = 2x - 3$ và $g(x) = -x + 6$:

$$f(g(x)) = f(-x + 6) = 2(-x + 6) - 3 = -2x + 9,$$

$$g(f(x)) = g(2x - 3) = -(2x - 3) + 6 = -2x + 9.$$

Trong mỗi ví dụ này hai hàm số cho trước kết hợp với nhau thành một hàm hợp duy nhất. Trong thực hành, ta có thể tiến hành kết hợp theo nhiều cách khác nhau, cũng như có thể phân tích một hàm số thành hàm hợp của những hàm đơn giản hơn. Chẳng hạn, nếu

$$y = (x^3 + 1)^7, \tag{5}$$

ta có thể đưa ra một biến phụ u bằng cách đặt $u = (x^3 + 1)$ và phân tách (5) thành:

$$y = u^7 \qquad \text{và} \qquad u = x^3 + 1$$

Ta sẽ thấy rằng cách phân tích này rất có ích trong quá trình tính toán.

BÀI TẬP

1. Nếu $f(x) = x^3 - 3x^2 + 4x - 2$, hãy tính f (1); f (2); f (3); f (0); f (–1) và f (–2).

2. Nếu $f(x) = 2^x$, hãy tính tính f (1); f (3); f (5); f (0) và f (–2).

3. Nếu $f(x) = 4x - 3$, chứng tỏ rằng $f(2x) = 2f(x) + 3$.

4. Tìm miền xác định của $f(x) = \dfrac{1}{(x-8)}$ và $g(x) = x^3$? Tìm h(x) = f(g(x)) và miền xác định của h(x)?

5. Tìm miền xác định của các hàm số sau:

(a) $\sqrt{x}$; (f) $\dfrac{1}{x^2+4}$;

(b) $\sqrt{-x}$; (g) $\sqrt{(x-1)(x+2)}$;

(c) $\sqrt{x^2}$; (h) $\dfrac{1}{\sqrt{(x-1)(x+2)}}$;

(d) $\sqrt{x^2-4}$; (i) $\sqrt{3-2x-x^2}$;

(e) $\dfrac{1}{x^2-4}$; (j) $\sqrt{\dfrac{x}{x-2}}$

6. Nếu f(x) = 1 – x, chứng minh rằng f(f(x)) = x.

7. Nếu f(x) = x/(x – 1), hãy tính f(0), f(1), f(2), f(3) và f(f(3)). Chứng minh rằng f(f(x)) = x.

8. Nếu f(x) = (ax + b)/ (x – a), chứng minh rằng f(f(x)) = x.

9. Nếu f(x) = 1/(1 – x), hãy tính f(0), f(1), f(2), f(f(2)) và f(f(f(2))). Chứng minh rằng f(f(f(x))) = x.

10. Nếu f(x) = ax, chứng minh rằng f(x) + f(1– x) = f(1). Kiểm chứng hệ thức: $f(x_1 + x_2) = f(x_1) + f(x_2)$ với mọi x_1 và x_2.

11. Nếu f(x) = 2x, sử dụng ký hiệu hàm số để minh hoạ tính chất: $2^{x_1}.2^{x_2} = 2^{x_1+x_2}$.

12. Nếu f(x) = log10x, sử dụng ký hiệu hàm số để minh hoạ tính chất:

$\log_{10}(x_1.\ x_2) = \log_{10} x_1 + \log_{10} x_2$.

13. Hàm tuyến tính là hàm có dạng f(x) = ax + b, khi a và b là hằng số. Nếu g(x) = cx + d cũng là hàm tuyến tính, thì đẳng thức f(g(x)) = g(f(x)) có luôn luôn đúng hay không?

14. Nếu f(x) = ax + b là hàm tuyến tính với a ≠ 0, hãy chỉ ra rằng tồn tại một hàm tuyến tính g(x) = αx + β*, sao cho f(g(x)) = x. Chứng minh rằng với hai hàm số này, đẳng thức f(g(x)) = g(f(x)) là đúng.

15. Hàm bậc hai là hàm số có dạng $f(x) = ax^2 + bx + c$, với a, b và c là các hằng số và a ≠ 0.

(a) Hãy tính giá trị của các hệ số a, b, c biết f(0) = 3, f(1) = 2, f(2) = 9.

(b) Hãy chứng tỏ rằng, với mọi a, b, c cho trước, miền giá trị của hàm bậc hai này không thể là tập mọi số thực.

1.7. CÁC DẠNG HÀM SỐ. CÁC CÔNG THỨC HÌNH HỌC

Trong Phần 1.6, ta đã thảo luận về khái niệm hàm số ở một vài khía cạnh. Có thể tổng kết những điều đã thảo luận này thành một vài câu như sau:

Nếu x và y là hai biến có liên quan đến nhau theo cách: với mỗi giá trị số nào đó được gán cho x, ta có thể xác định được giá trị duy nhất bằng số tương ứng của y, thì khi đó y được gọi là *hàm số của*

* Các ký hiệu α và β là các chữ cái trong bản chữ cái Hi Lạp, đọc là “an-pha” và “bê-ta”. Những chữ cái của bản chữ cái này (xem ở phần trước trang cuối cùng) thường được dùng nhiều trong toán học và các môn khoa học khác tới mức sinh viên đã có dịp gặp những ký hiệu này sớm hơn.

x và được biểu diễn ở dạng y = f(x). Ký hiệu chữ cái f là ký hiệu hàm số, đây là một phép toán hay một quy luật mà nhờ đó, ta có một y tương ứng với một giá trị của x. Tuy vậy, trong thực tế ta thích nói "hàm số y = f(x)" thay cho "hàm số f". Điều quan trọng mà sinh viên cần hiểu rõ là hàm số không phải là một công thức và không phải chỉ cho bằng công thức - dù rằng phần lớn các hàm số ta xét đến đều như vậy.

Trên thực tế, hàm số thường xuất hiện trong mối liên hệ đại số giữa các biến. Như vậy, một phương trình gồm hai biến x và y xác định được y là hàm số của x nếu phương trình này tương đương với phương trình trong đó có thể biểu diễn giá trị y duy nhất theo giá trị của x. Ví dụ, phương trình 4x + 2y = 6 có thể được giải ra theo y, y = 3 − 2x, và phương trình thứ hai này xác định y là hàm số của x. Tuy nhiên, trong một số trường hợp, quá trình xác định y lại đưa ra nhiều hơn một giá trị y. Ví dụ, từ phương trình $y^2 = x$, ta có $y = \pm\sqrt{x}$. Bởi vì phương trình $y = x^2$ cho ta hai giá trị của y tương ứng với mỗi một giá trị x dương cho trước, nên bản thân nó không xác định được dạng y là hàm số của x. Nếu muốn, ta có thể tách công thức $y = \pm\sqrt{x}$ thành 2 công thức riêng biệt, $y = \sqrt{x}$ và $y = -\sqrt{x}$. Một trong hai công thức này xác định được y là hàm của x, bởi vậy, từ phương trình trên ta nhận được hai hàm số.

Số lượng hàm số khác nhau hiển nhiên là không có giới hạn. Tuy nhiên, trong quyển sách này, chỉ xuất hiện phần lớn là những dạng hàm tương đối đơn giản và có thể phân chia thành một vài dạng thích hợp. Ta sẽ mô tả qua những dạng hàm đó theo trình tự tăng dần về độ phức tạp, điều này có thể giúp các sinh viên tự định hướng.

HÀM ĐA THỨC

Các hàm số đơn giản hơn cả là các lũy thừa của x với số mũ nguyên, không âm,

$$1, x, x^2, x^3, \ldots, x^n, \ldots$$

Nếu lấy một số hữu hạn các hàm trên nhân với các hằng số và cộng các kết quả lại, ta nhận được một đa thức tổng quát,

$$p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + \ldots + a_nx^n.$$

Bậc của đa thức là số mũ lớn nhất xuất hiện trong đa thức; nếu $a_n \neq 0$, thì bậc của đa thức là *n*. Sau đây những đa thức có bậc 1, 2 và 3:

$$y = 3x - 2, \qquad y = 1 - 2x + x^2, \qquad y = x - x^3.$$

Rõ ràng có thể nhân đa thức với một hằng số, cộng, trừ và nhân đa thức với nhau, kết quả cũng là một đa thức.

HÀM HỮU TỶ

Nếu thực hiện phép chia hai đa thức, ta sẽ có một hàm hữu tỷ, như là:

$$\frac{x}{x^2+1}, \quad \frac{x+2}{x-2}, \quad \frac{x^3-4x^2+x+6}{x^2+x+1}, \quad x+\frac{1}{x}.$$

Hàm hữu tỷ tổng quát có dạng thương của hai đa thức,

$$\frac{a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots + a_nx^n}{b_0 + b_1x + b_2x^2 + \ldots + b_mx^m}$$

và một hàm số có dạng thương (hoặc có thể đưa về dạng thương) sẽ là một hàm hữu tỷ. Nếu mẫu số là một số khác 0, thương sẽ trở thành một đa thức. Như vậy, các hàm đa thức nằm trong số các hàm hữu tỷ.

HÀM ĐẠI SỐ

Nếu thực hiện phép khai căn, ta sẽ chuyển từ các hàm hữu tỷ sang một lớp hàm rộng hơn: các hàm đại số. Hàm này sẽ được định nghĩa trong chương sau. Một số ví dụ đơn giản là:

$$y=\sqrt{x}\ ;\ y=x+\sqrt[3]{x^2+1};\ y=\frac{1}{\sqrt{1-x}};\ y=\sqrt[4]{\frac{x+1}{x-1}}$$

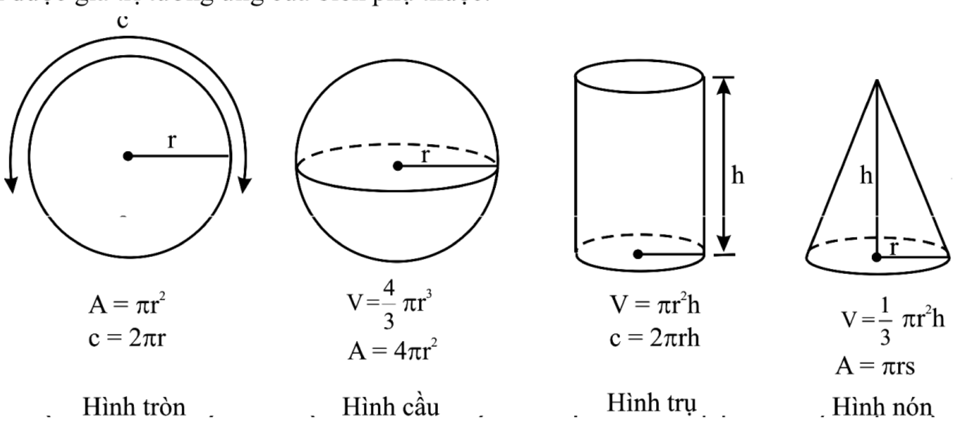
Nếu dùng ký hiệu về số mũ phân số, những hàm số trên có thể viết:

$$y=x^{1/2};\ y=x+\left(x^2+1\right)^{1/3};\ y=\left(1-x\right)^{-1/2};\ y=\left(\frac{x+1}{x-1}\right)^{1/4}$$

HÀM SIÊU VIỆT

Bất cứ hàm nào không phải dạng đại số đều được gọi là hàm siêu việt. Trong giải tích, những hàm siêu việt được nghiên cứu là hàm lượng giác, hàm lượng giác ngược, hàm số mũ và hàm logarit. Chúng tôi không yêu cầu các sinh viên có một ít kiến thức về những hàm này từ trước. Tất cả những hàm này sẽ được giải thích tỷ mỷ trong các chương sau.

Chúng ta sẽ nói qua về một số hàm quan trọng trong hình học để kết thúc phần này. Để làm được rất nhiều các ví dụ và bài tập trong các chương tiếp theo, cần nắm vững các công thức hình học đã cho ở Hình 1.24. Những công thức này - để tính diện tích và chu vi đường tròn, thể tích và diện tích bề mặt của hình cầu, thể tích và diện tích xung quanh của hình trụ và hình nón - có thể chỉ cần hiểu, nhưng trong bất cứ tình huống nào cũng phải nhớ chúng. Bốn công thức đầu tiên, cho đường tròn và hình cầu, xác định các hàm số với biến độc lập r, trong đó, một giá trị r dương cho trước sẽ cho ta xác định được giá trị tương ứng của biến phụ thuộc.



Hình 1.24. Các công thức hình học

Trong cuốn sách này, ta sẽ quan tâm nhiều đến các hàm một biến độc lập, mà ta đã định nghĩa và thảo luận trước đây. Tuy nhiên, ta thấy trong bốn công thức cuối ở Hình 1.24, có các hàm hai biến r và h; những biến này được gọi là độc lập (với nhau) bởi vì giá trị được gán cho biến này không liên quan đến giá trị được gán cho biến kia. Trong những trường hợp đặc biệt, các hàm loại này có thể biểu diễn như hàm có một biến. Ví dụ, nếu chiều cao của hình nón đã cho được biết bằng hai lần bán kính đáy, như vậy h = 2r, khi đó công thức thể tích của nó được viết thành hàm của r hay hàm của h:

$$\mathrm{V}=\frac{1}{3}\pi\mathrm{r}^2\left(2\mathrm{r}\right)=\frac{2}{3}\pi\mathrm{r}^3\qquad\text{hay}\qquad \mathrm{V}=\frac{1}{3}\pi\left(\frac{\mathrm{h}}{2}\right)^2\mathrm{h}=\frac{1}{12}\pi\mathrm{h}^3$$

Các công thức trong Hình 1.24 cũng được diễn tả bằng cách chọn các chữ cái thường dùng để chỉ các đại lượng hình học, như A là diện tích, V là thể tích, r là bán kính, h là chiều cao, …

BÀI TẬP

1. Trong mỗi trường hợp sau, xét xem phương trình có xác định y là hàm số của x hay không, và nếu có, hãy tìm công thức cho các hàm số này:

(a) $3x^2 + y^2 = 1$; (b) $3x^2 + y = 1$;

(c) $\frac{y+1}{y-1} = x$ (d) $x = y - \frac{1}{y}$.

2. Tách phương trình $2x^2 + 2xy + y^2 = 3$ thành hai, để mỗi phương trình xác định y là hàm số của x.

Tất cả những bài tập sau đây đều liên quan đến hình học. Khi làm những bài tập đó, hãy vẽ phác hình và dùng hình vẽ để tìm cách giải.

3. Cho một tam giác đều có độ dài cạnh là x, hãy biểu diễn diện tích của tam giác thành hàm của x.

4. Độ dài hai cạnh bên của một tam giác cân là 2. Nếu x là chiều dài cạnh đáy, hãy biểu diễn diện tích của tam giác thành hàm của x.

5. Nếu cạnh của một hình lập phương là x, hãy biểu diễn thể tích, đường chéo và diện tích mặt của hình lập phương này thành hàm của x.

6. Một hình chữ nhật có chiều dài cạnh đáy là x, nội tiếp trong một đường tròn cố định bán kính a. Biểu diễn diện tích của hình chữ nhật này thành hàm của x.

7. Một sợi dây có độ dài L được cắt thành 2 phần, mỗi phần được xếp thành một vòng tròn và một hình vuông. Nếu x là cạnh của hình vuông, hãy biểu diễn tổng diện tích hai hình trên thành hàm của x.

8. (a) Diện tích của một hình tròn có phải là hàm theo chu vi của nó hay không? Nếu có, thì đó là hàm nào?

(b) Diện tích của một hình vuông có phải là hàm theo chu vi của nó hay không? Nếu có, thì đó là hàm nào?

(c) Diện tích của một tam giác có phải là hàm của chu vi của nó hay không? Nếu có, thì đó là hàm nào?

9. Thể tích của một hình cầu là hàm của diện tích mặt cầu đó. Hãy tìm công thức cho hàm này.

10. Một hình trụ nội tiếp trong một hình cầu cố định có bán kính là a. Nếu h là chiều cao và r là bán kính đáy của hình trụ. Hãy biểu diễn thể tích và diện tích toàn phần thành hàm của r và sau đó là của h.

11. Một hình trụ ngoại tiếp một hình cầu. Nếu thể tích của các hình được ký hiệu là C và S, hãy tìm hàm C theo biến S.

12. Một hình trụ có thể tích cố định V. Biểu diễn diện tích toàn phần của hình trụ thành một hàm theo bán kính r của đáy trụ.

13. Một hình nón cố định có chiều cao là H và bán kính đáy là R. Nếu một hình trụ có bán kính đáy r nội tiếp trong hình nón, hãy biểu diễn thể tích của hình trụ thành hàm theo r.

14. (a) Một nông dân có 100 ft hàng rào để bao quanh khu nuôi gà hình chữ nhật. Nếu x là chiều dài một cạnh khu nuôi gà, hãy chứng tỏ rằng diện tích khu nuôi gà sẽ là:

$$A = 50x - x^2 = 625 - (x - 25)^2.$$

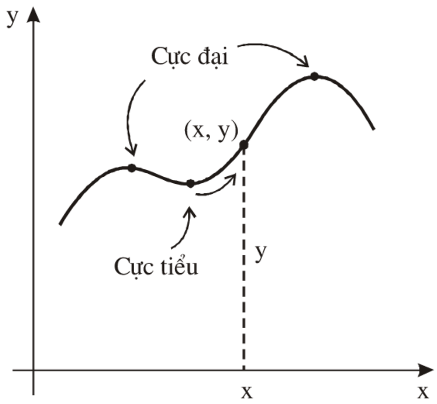
Sử dụng kết quả này để tìm ra diện tích rộng nhất có thể và độ dài các cạnh của khu nuôi gà để có diện tích rộng nhất đó.

(b) Giả sử rằng người nông dân đó trong phần (a) quyết định làm khu nuôi gà bên một kho thóc, vì thế, ông ta chỉ cần quây hàng rào thành 3 cạnh. Nếu x là chiều dài cạnh vuông góc với tường kho thóc, hãy tìm diện tích quây được như là hàm của x. Tìm ra diện tích rộng nhất có thể và độ dài các cạnh của khu nuôi gà để có diện tích rộng nhất đó.

1.8. ĐỒ THỊ HÀM SỐ

Người Trung Quốc có câu tục ngữ có thể biểu thị chân lý cơ bản của việc nghiên cứu toán học: Một bức tranh đẹp đáng giá ngàn lời. Đối với chúng ta, điều này có nghĩa là *cần vẽ các đồ thị khi* nghiên cứu hàm số. Hơn nữa, việc trau dồi thói quen suy nghĩ theo đồ thị, thấy được một điểm tạo nên đồ thị như thế nào gần như là bản năng thứ hai của con người.

Trước khi đi vào các chi tiết của những hàm số đặc biệt, cần nhấn mạnh rằng người ta thường có thể nghĩ về đồ thị của hàm $y = f(x)$ một cách rất cụ thể như là đường đi của một động điểm (Hình 1.25). Giá trị biến độc lập x có thể được thấy di chuyển dọc theo trục x từ trái sang phải; mỗi giá trị của x có thể xác định được tương ứng giá trị biến phụ thuộc y, tung độ của điểm (x, y) so với trục x. Đồ thị của hàm đơn giản là đường đi của điểm (x, y) khi nó di chuyển trong mặt phẳng tọa độ, khi lên, khi xuống, với tung độ khác nhau phụ thuộc vào tính chất của hàm được xét. Đồ thị đưa ra cho ta một bức tranh tổng thể về những sự thay đổi của nó. Đồ thị chỉ ra trong Hình 1.25 ở dạng một đường trơn với hai đỉnh cao và một đỉnh thấp với nhiều trạng thái khác nhau.



Hình 1.25

Bây giờ, ta sẽ thảo luận về các đồ thị của một số ví dụ điển hình của các hàm số được mô tả trong Mục 1.7.

ĐA THỨC

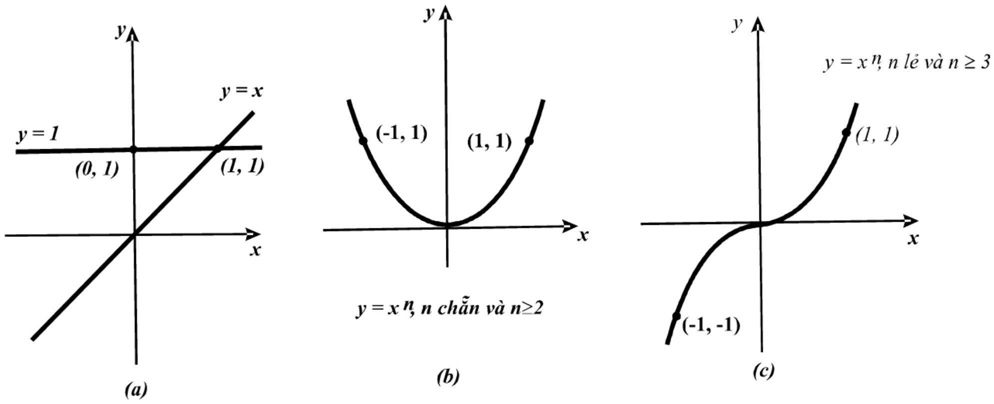
Ta thấy các đa thức đơn giản nhất là lũy thừa với số mũ nguyên không âm.

$$y = 1, x, x^2, x^3, \ldots, x^n, \ldots$$

Như chúng ta đã biết, đồ thị $y = 1$ là đường thẳng nằm ngang đi qua điểm (0, 1), và đồ thị $y = x$ là đường thẳng đi qua điểm gốc tọa độ với độ dốc bằng 1 (Hình 1.26a). Với những số mũ lớn hơn, đồ thị $y = x^n$ có hai dạng khác biệt, phụ thuộc vào n chẵn hay lẻ:

$$y = x^2, x^4, x^6, \ldots$$

và $$y = x^3, x^5, x^7, \ldots$$



Hình 1.26. Đồ thị hàm $y = x^n$

Những dạng đồ thị này được chỉ ra trong phần (b) và (c) của Hình 1.26. Khi n tăng, phần đường cong gần gốc tọa độ trở nên dẹt hơn gần gốc toạ độ và phần đường cong ở ngoài đoạn [−1, 1] trở nên dốc đứng hơn.

Ta cũng đã biết dạng đồ thị của các hàm đa thức bậc 1 và bậc 2, như là

$$y = 2x - 1$$

và $$y = 3x^2 - 2x + 1,$$

là đường thẳng và đường parabol. Những đồ thị này dễ vẽ, không cần phải vẽ theo từng điểm, dựa trên những ý tưởng trình bày ở Phần 1.4 và 1.5.

Để tiếp tục, ta cần biết vài thuật ngữ mới. Không điểm của hàm y = f(x) là nghiệm của phương trình f(x) = 0 tương ứng. Về mặt hình học, không điểm của hàm số này (nếu có) là giá trị của x mà tại đó đồ thị cắt hay tiếp xúc với trục x; chúng là *hoành độ giao điểm* của đồ thị.

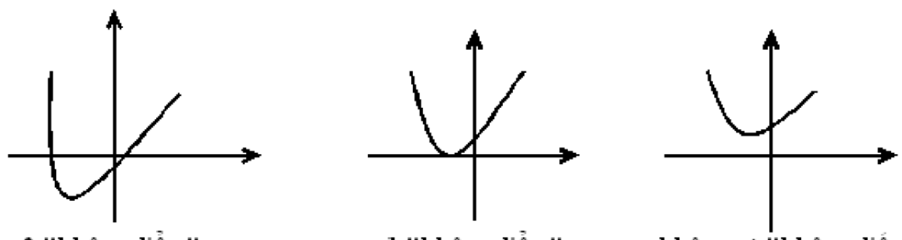
Bây giờ, ta xét đa thức bậc hai tổng quát

$$y = ax^2 + bx + c, \quad a \neq 0 \qquad (1)$$

như đã biết, đồ thị của hàm này là một đường parabol với mọi giá trị của hệ số. Nếu giả sử a > 0, parabol sẽ quay bề lõm lên trên và sẽ có 3 khả năng với không điểm của (1), được vẽ ở Hình 1.27. Khi đó, các nghiệm của phương trình bậc hai $ax^2 + bx + c = 0$ được cho bởi công thức sau:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a},$$

rõ ràng là ba khả năng trong Hình 1.27 tương ứng với điều kiện đại số $b^2 - 4ac > 0$, $b^2 - 4ac < 0$ và $b^2 - 4ac = 0$.



Hình 1.27.

Bài toán vẽ đồ thị của đa thức có bậc n ≥ 3 không dễ. Thảo luận về ví dụ sau đây sẽ đem lại những ý tưởng có ích.

Ví dụ 1. Đồ thị của hàm

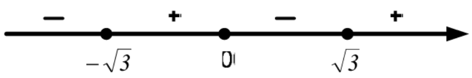
$$y = x^3 - 3x \qquad (2)$$

được vẽ trong Hình 1.28. Ngay lúc này, ta không có phương pháp gì để tìm được những đặc trưng chính của đường cong như vị trí chính xác của điểm cao nhất và thấp nhất của đồ thị. Sau này, ta sẽ tìm cách giải quyết điều này. Tuy vậy, cũng có thể đưa ra một vài quan sát, ít nhất cũng mang lại cho ta một vài chi tiết, tạm đủ để hình dung được dạng đồ thị để các sinh viên có thể vẽ chúng.

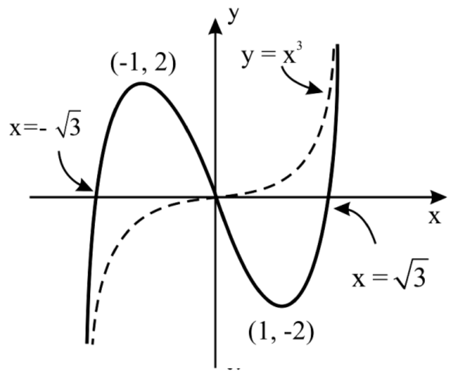
Ta chú ý rằng (2) có thể được viết ở dạng tích như sau:

$$y = x(x^2 - 3) = x(x + \sqrt{3})(x - \sqrt{3}), \qquad (3)$$

vậy hiển nhiên là (3) có ba không điểm 0, $\sqrt{3}$, - $\sqrt{3}$. Ba số này chia trục x thành bốn đoạn, như Hình 1.29 và ta tìm ngay được dấu của (3) trên mỗi đoạn này. Thế là ta biết được trên mỗi đoạn, đồ thị (2) sẽ nằm trên hay dưới trục x (xem Hình 1.28).



Hình 1.29



Hình 1.28

Quan sát thứ hai của ta liên quan đến trạng thái đồ thị (2) khi x là một số lớn về giá trị, nghĩa là xa về phía phải hoặc phía trái trong Hình 1.28. Nếu (2) được viết dưới dạng

$$y = x^3\left(1 - \frac{3}{x^2}\right), \qquad x \neq 0,$$

Như thế, khi x dần ra dương vô cùng hoặc âm vô cùng, biểu thức trong dấu ngoặc gần như bằng 1, và y gần với x^3. Theo ngôn ngữ hình học, khi x lớn, đồ thị của (2) gần với dạng đồ thị y = x^3, như trong Hình 1.28 chỉ rõ. Nói cụ thể, đồ thị của (2) đồng biến về phía phải và nghịch biến về phía trái.

Các sinh viên cần vẽ đồ thị bằng cách chịu khó vẽ nhiều điểm riêng biệt rồi nối chúng bởi một đường cong hợp lý. Tuy vậy, quy trình khá thô này chỉ nên dùng như một phương sách cuối cùng, khi mà những cách dễ hình dung hơn thất bại. Đặc tính quan trọng của hàm số và đồ thị của chúng sẽ được phát hiện rõ ràng hơn nhiều bằng cách tiếp cận định tính với đường cong được xét. Chúng tôi sẽ hướng dẫn cách tiếp cận này và sẽ còn tiếp tục nhấn mạnh sau này.

HÀM HỮU TỶ

Ví dụ 2. Hàm hữu tỷ đơn giản nhất không phải đa thức là:

$$y = \frac{1}{x} \qquad (4)$$

Khi xét (4), ta chú ý những điểm sau: y không xác định khi x = 0; y dương khi x dương, y nhỏ khi x lớn, và lớn khi x gần bằng 0 về phía phải; y âm khi x âm, y nhỏ khi x lớn và lớn khi x gần bằng 0 về phía trái. Đồ thị của (4) đưa ra trong Hình 1.30 miêu tả trực tiếp bằng hình vẽ các mệnh đề trên. Trong trường hợp đặc biệt này, ta cũng dễ dàng vẽ được đồ thị khi có vài điểm như trong hình vẽ. Tuy nhiên, nếu các sinh viên hình dung được tính cách của hàm này trên những phần khác nhau của miền xác định và tự vẽ được những điều họ thấy thì có lợi hơn nhiều.

Một đường thẳng được gọi là *tiệm cận* của một đường cong, nếu khoảng cách từ điểm trên đường cong đến đường thẳng tiến đến 0, khi điểm này chạy đến đầu mút của đường cong. Rõ ràng là cả trục x và trục y đều là đường tiệm cận của đồ thị trong Hình 1.30. Tính cách của hàm số (4) tại điểm x = 0 và lân cận điểm này chỉ rõ y không xác định tại x = 0 và "*trở nên vô hạn*" tại các điểm gần với x = 0, điểm này được gọi là *điểm gián đoạn vô cực* của hàm số.