

## Versuch 14

# Wechselstromwiderstände

---

Praktikant: Eric Bertok  
Mitarbeiter: Kevin Lüdemann  
Email: eric.bertok@stud.uni-goettingen.de  
kevin.luedemann@stud.uni-goettingen.de  
Gruppe: B002  
Betreuer: Björn Klaas  
Durchgeführt am: 08.09.2014  
Abgegeben am: 05.10.2014

Testat:
---------

# Inhaltsverzeichnis

<b>1</b>	<b>Einleitung</b>	<b>1</b>
<b>2</b>	<b>Theorie</b>	<b>1</b>
2.1	Wechselstrom . . . . .	1
2.2	OHMScher Widerstand . . . . .	1
2.3	Induktiver Widerstand . . . . .	2
2.4	Kapazitiver Widerstand . . . . .	2
2.5	Reihen- und Parallelschaltung von komplexen Widerständen . . . . .	3
2.6	Beträge und Phasenverschiebungen . . . . .	3
<b>3</b>	<b>Durchführung</b>	<b>4</b>
3.1	Versuchsaufbau und benötigte Materialien . . . . .	4
3.2	Serienkreis ohne Kondensator . . . . .	5
3.3	Serienkreis mit Kondensator . . . . .	5
3.4	Parallelkreis . . . . .	6
3.5	Ausmessung der Bauteile . . . . .	6
<b>4</b>	<b>Auswertung</b>	<b>6</b>
4.1	Bestimmung der Induktivität und des OHMSchen Widerstands beim Serienkreis ohne Kondensator . . . . .	6
4.2	Bestimmung der Resonanzfrequenz und des OHMSchen Widerstands beim Serienresonanzkreis . . . . .	8
4.3	Bestimmung der Resonanzfrequenz aus der Phasenverschiebung . . . . .	10
4.4	Bestimmung der Phasenverschiebung zwischen $U_{L+R}$ und $U_C$ aus dem Zeigerdiagramm . . . . .	11
4.5	Auswertung des Parallelschwingkreises . . . . .	13
4.6	Zusammenfassung . . . . .	14
4.6.1	OHMScher Widerstand der Spule $R_L$ . . . . .	14
4.6.2	Resonanzfrequenz $\omega_r$ . . . . .	16
4.6.3	Induktivität $L$ . . . . .	16
4.6.4	Kapazität $C$ . . . . .	16
4.6.5	Phasenverschiebung zwischen $U_{L+R}$ und $U_C$ . . . . .	16
<b>5</b>	<b>Diskussion</b>	<b>17</b>
5.1	Fehlerintervalle und relative Fehler . . . . .	17
5.2	Nichtlineare Fits . . . . .	18
5.3	Bestimmung des Spulenwiderstands $R_L$ . . . . .	18
5.4	Bestimmung der Kapazität . . . . .	19
	<b>Literatur</b>	<b>20</b>

## 1 Einleitung

Der Wechselstrom hat sich in vielen Bereichen der Technik gegenüber dem Gleichstrom durchgesetzt. Zum einen ist er durch Generatoren leichter zu erzeugen, zum anderen ist eine einfache Transformation der Spannung möglich (siehe Versuch 16 - "Der Transformator"). In diesem Versuch wird das Verhalten von Spule, Kondensator und dem OHMschen Widerstand bei Wechselspannung untersucht. Durch Messung der Phasenverschiebung zwischen Strom und Spannung und deren Größenverhältnisse wird die Theorie der komplexen Wechselstromwiderstände getestet.

## 2 Theorie

### 2.1 Wechselstrom

Betrachtet wird ein Stromkreis, an dem eine äußere periodische Wechselspannung der Form

$$U_e(t) = U_0 \cdot \cos(\omega t) \quad (2.1.1)$$

anliegt. Dabei ist  $U_0$  die Scheitelspannung und  $\omega = \frac{2\pi}{T}$  die Kreisfrequenz. Im Allgemeinen besitzt der hieraus entstehende Wechselstrom zusätzlich zu seiner Amplitude  $I_0$  eine Phasenverschiebung  $\varphi$ . So lässt sich der Strom  $I$  als

$$I(t) = I_0 \cdot \cos(\omega t - \varphi) \quad (2.1.2)$$

schreiben. Es ist üblich, zur Vereinfachung Strom und Spannung als komplexe Größen zu schreiben [3, S. 253]:

$$U_e(t) = U_0 e^{i\omega t} \quad (2.1.3)$$

$$I(t) = I_0 e^{i(\omega t - \varphi)}. \quad (2.1.4)$$

Dabei ist der Realteil stets der physikalisch relevante Wert. Als Verallgemeinerung des Widerstands wird der komplexe Widerstand  $Z$  eingeführt [3, S. 254]:

$$Z = \frac{U_e}{I} = \frac{U_0}{I_0} e^{i\varphi}. \quad (2.1.5)$$

### 2.2 Ohmscher Widerstand

Betrachtet man einen Stromkreis, welcher nur aus einem OHMschen Widerstand besteht, so gilt nach dem OHMschen Gesetz

$$U(t) = R \cdot I, \quad (2.2.1)$$

dass der Strom keine Phasenverschiebung zur Spannung aufweist. Somit ist  $Z$  reell:

$$Z_R = \operatorname{Re}(Z) = R. \quad (2.2.2)$$

## 2.3 Induktiver Widerstand

Nun besteht der Stromkreis aus einer reinen Induktivität  $L$ . Zum einen folgt aus der KIRCHHOFFSchen Maschenregel [1, S. 55]

$$U_e + U_{ind} = 0, \quad (2.3.1)$$

zum anderen gilt nach dem Induktionsgesetz [1, S. 131]:

$$U_{ind} = -L \cdot \frac{dI}{dt}. \quad (2.3.2)$$

Durch Einsetzen und Integration erhält man als induktiven Widerstand [3, S. 256]

$$Z_L = i\omega L, \quad (2.3.3)$$

welcher rein imaginär ist. Der Strom ist um  $\varphi = \frac{\pi}{2}$  gegenüber der Spannung verzögert.

## 2.4 Kapazitiver Widerstand

Jetzt besteht der Stromkreis, an dem die Wechselspannung anliegt, lediglich aus einer Kapazität  $C$ . Für die Spannung an einem Kondensator gilt [1, S. 152]

$$U_e = \frac{Q}{C}. \quad (2.4.1)$$

Durch Differentiation erhält man [3, S. 257]:

$$I(t) = \frac{dU_e}{dt} C = i\omega C U_e \quad (2.4.2)$$

$$\Longleftrightarrow U_e(t) = \frac{1}{i\omega C} I(t) = -\frac{i}{\omega C} I(t). \quad (2.4.3)$$

Für den kapazitiven Widerstand  $Z_C$  ergibt sich also:

$$Z_C = -\frac{i}{\omega C}. \quad (2.4.4)$$

Der Strom eilt der Spannung um  $\frac{\pi}{2}$  voraus,  $\varphi = -\frac{\pi}{2}$ .

## 2.5 Reihen- und Parallelschaltung von komplexen Widerständen

Die Reihen- und Parallelschaltung von komplexen Widerständen geht analog zu normalen Widerständen. Bei einer Reihenschaltung fließt durch alle Bauteile der gleiche Strom und die Spannungen werden addiert. Folglich werden auch die komplexen Widerstände addiert. Für einen Serienkreis mit OHMSchen Widerstand, Induktivität und Kapazität gilt:

$$Z = Z_R + Z_L + Z_C = R + i \left( \omega L - \frac{1}{\omega C} \right). \quad (2.5.1)$$

Bei einer Parallelschaltung ist die an jedem Bauteil anliegende Spannung identisch. Nach der Knotenregel [1, S. 55] addieren sich die Ströme:

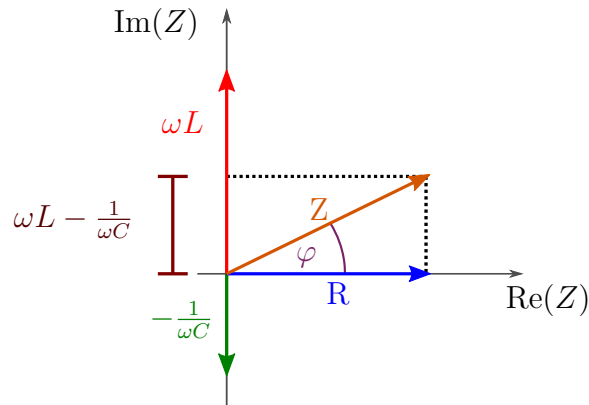
$$\frac{U_e}{Z} = I = I_R + I_L + I_C = \frac{U_e}{Z_R} + \frac{U_e}{Z_L} + \frac{U_e}{Z_C} \quad (2.5.2)$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{1}{Z} = \frac{1}{Z_R} + \frac{1}{Z_L} + \frac{1}{Z_C} \quad (2.5.3)$$

$$= \frac{1}{R} + i \left( \omega C - \frac{1}{\omega L} \right). \quad (2.5.4)$$

## 2.6 Beträge und Phasenverschiebungen

Die obigen Ergebnisse lassen sich sehr anschaulich in der komplexen Zahlenebene darstellen. In Abbildung 1 ist das Ergebnis aus Gleichung (2.5.1) veranschaulicht. Durch



**Abbildung 1:** Darstellung des komplexen Widerstandes  $Z$  in der komplexen Ebene.

den Quotienten von Imaginär- und Realteil lässt sich ein Ausdruck für die Phasenver-

schiebung  $\varphi$  angeben [1, S. 153]:

$$\tan \varphi = \frac{\operatorname{Im}(Z)}{\operatorname{Re}(Z)} = \frac{\omega L - \frac{1}{\omega C}}{R}. \quad (2.6.1)$$

Den Betrag vom komplexen Widerstand

$$|Z| = \sqrt{\operatorname{Re}(Z)^2 + \operatorname{Im}(Z)^2} = \sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2} \quad (2.6.2)$$

bezeichnet man als Impedanz.

## 3 Durchführung

### 3.1 Versuchsaufbau und benötigte Materialien

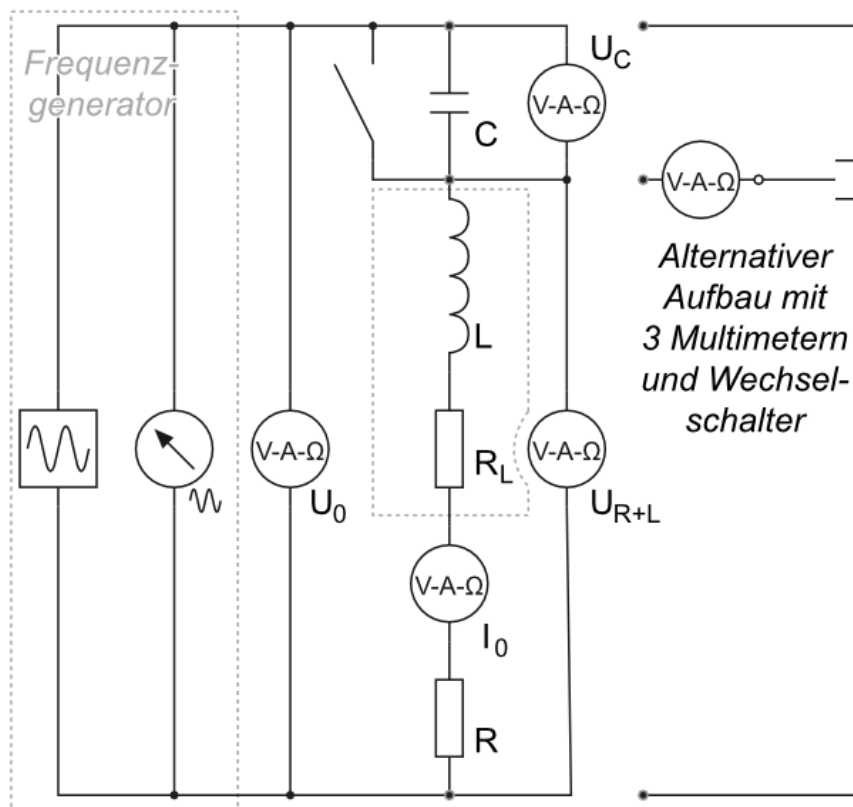
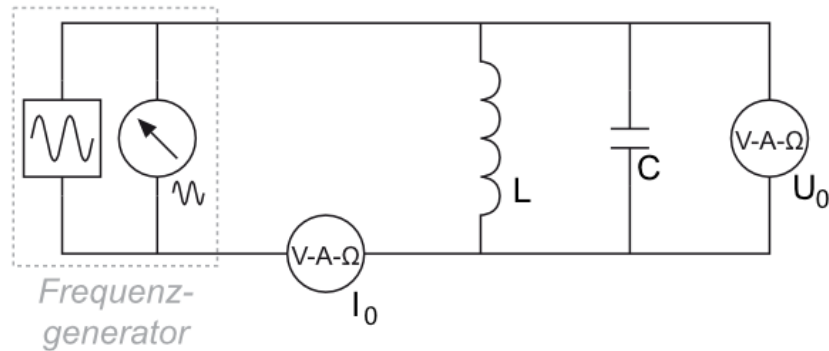


Abbildung 2: Schaltskizze für den Serienkreis [2, Abgerufen am: 05.10.2014]



**Abbildung 3:** Schaltskizze für den Parallelkreis [2, Abgerufen am: 05.10.2014]

In den Abbildungen 2 und 3 sind die Schaltskizzen der beiden Versuchsaufbauten zu sehen. Benötigt werden eine Wechselspannungsquelle mit variabler Frequenz, ein Kondensator, eine Luftspule, ein OHMScher Widerstand, ein Schalter, ein Digitaloszilloskop und vier Multimeter.

### 3.2 Serienkreis ohne Kondensator

Für den ersten Versuchsteil werden die Bauteile gemäß Abbildungen 2 und 3 in Reihe geschaltet. Der Schalter wird geöffnet, um den Kondensator zu überbrücken. Durch das Oszilloskop darf kein Strom fließen. Um die Phasenverschiebung zwischen Strom und Spannung zu messen, wird es deswegen sowohl direkt an die Spannungsquelle als auch parallel zum OHMSchen Widerstand geschaltet. Nun wird in einem Frequenzbereich von ca. 60 bis 480 Hz für zehn verschiedene Frequenzen der Strom  $I$  durch den OHMSchen Widerstand, die Gesamtspannung  $U$  und die Phasenverschiebung  $\varphi$  zwischen Strom und Spannung gemessen. Die Spannung kann dabei an der Spannungsquelle eingestellt werden. Gemessen wird sie trotz der Anzeige der Spannungsquelle am Oszilloskop, da sie dort genauer ausgegeben wird. Die Phasenverschiebung ist ebenfalls am Oszilloskop abzulesen. Dafür muss sich dieses in dem Modus „Messung“ befinden. Zu beachten ist, dass der Innenwiderstand des Amperemeters von dem eingestellten Messbereich abhängt. Um einer möglichen Verfälschung der Messwerte vorzubeugen, sollte deshalb für jeden Versuchsabschnitt ein einheitlicher Messbereich eingestellt werden. Die Widerstände der Voltmeter hingegen sind als unendlich angenommen.

### 3.3 Serienkreis mit Kondensator

Für diesen Versuchsteil wird der Schalter geöffnet, wodurch die Schaltung zu einem Serienschwingkreis wird. Wie in Sektion 3.2 wird für den gleichen Frequenzbereich die Gesamtspannung  $U$ , der Gesamtstrom  $I$  und die Phasenverschiebung  $\varphi$  gemessen. Hierbei ist darauf zu achten, die Resonanzstelle besonders genau abzutasten, um eine genaue

Bestimmung der Resonanzfrequenz zu ermöglichen.

### 3.4 Parallelkreis

Nun wird der Parallelkreis ohne den OHMschen Widerstand aus Abbildung 3 aufgebaut. Er besteht aus einer Spule und einem parallel geschalteten Kondensator. Der in der Spule integrierte Spulenwiderstand  $R_L$  ist in Reihe zu dieser geschaltet. Das Volt- und Amperemeter wird analog zu den vorherigen Schaltungen angeschlossen. Erneut wird die Spannung  $U$ , der Strom  $I$  und die Phasenverschiebung  $\varphi$  notiert, wobei die Resonanzstelle besonders genau vermessen wird.

### 3.5 Ausmessung der Bauteile

Als letztes werden mit den Multimetern die elektrischen Bauteile vermessen. Hierzu gehören der Innenwiderstand des Amperemeters für alle verwendeten Messbereiche, der Widerstand des OHMschen Widerstandes, der Widerstand der Spule, sowie die Kapazität des Kondensators. Ebenfalls zu notieren sind der Durchmesser und die Windungszahl der Luftspule.

## 4 Auswertung

### 4.1 Bestimmung der Induktivität und des Ohmschen Widerstands beim Serienkreis ohne Kondensator

Aus der Messreihe für den Serienkreis bei überbrücktem Kondensator (Sektion 3.2) sollen die Induktivität  $L$  der Spule, sowie der gesamte OHMsche Widerstand  $R$ , bestehend aus Spulenwiderstand  $R_L$  und einzeltem OHMschen Widerstand  $R_\Omega$ , bestimmt werden. Hierfür betrachtet man Gleichung (2.5.1). Da der Kondensator überbrückt ist, besteht der Imaginärteil, woraus für den komplexen Widerstand  $Z$  gilt:

$$Z(\omega) = R + i \omega L. \quad (4.1.1)$$

Berechnet man nun die Impedanz gemäß Gleichung (2.6.2) und quadriert, so erhält man

$$\left(\frac{U}{I}\right)^2 = Z_0^2 = \underbrace{R^2}_b + \omega^2 \underbrace{L^2}_m. \quad (4.1.2)$$

Man erwartet also einen linearen Zusammenhang zwischen dem Impedanzquadrat  $Z^2$  und dem Quadrat der Kreisfrequenz  $\omega^2$ . Die Steigung  $m$  entspricht dabei dem Quadrat der Induktivität  $L^2$  und der Ordinatenabschnitt wird als Quadrat des OHMschen



Messbereich	Fehler
alle Spannungen	1% v. Messwert + 3 Digits
alle Ströme	1.5% v Messwert + 3 Digits

**Tabelle 1:** Messfehler der Multimeter

Gesamtwiderstands  $R^2$  identifiziert. Für die Messfehler der Multimeter wurde der größtmögliche Fehler nach [4, S. 35] verwendet, da die während des Versuchs angenommenen Fehler zu klein sind. Sie sind In Tabelle 1 zu sehen. Der Fehler der Frequenz wurde einheitlich auf  $\sigma_f = 1$  gesetzt, da der auf dem Oszilloskop ausgegebene Wert innerhalb dieses Bereichs schwankte. Das Kreisfrequenzquadrat berechnet sich nach  $\omega^2 = (2\pi f)^2$ . Mit der GAUSSschen Fehlerfortpflanzung ergibt sich ein Fehler von

$$\sigma_{\omega^2} = 8\pi^2 f \cdot \sigma_f. \quad (4.1.3)$$

Der Fehler der gesamten Impedanz berechnet sich nach

$$\sigma_{Z_0^2} = \frac{2}{I^3} \cdot U \cdot \sqrt{I^2 \cdot \sigma_U^2 + U^2 \cdot \sigma_I^2}. \quad (4.1.4)$$

Die Auftragung des Impedanzquadrates über dem Kreisfrequenzquadrat ist in Abbildung 4 zu sehen. Anschließend wird eine lineare Regression durchgeführt. Die Regressionsgerade ist ebenfalls in Abbildung 4 eingezeichnet. Man erhält als Parameter:

$$m = L^2 = (0.163 \pm 0.005) \text{ H}^2 \quad (4.1.5)$$

$$b = R^2 = (6 \pm 3) \times 10^3 \Omega^2. \quad (4.1.6)$$

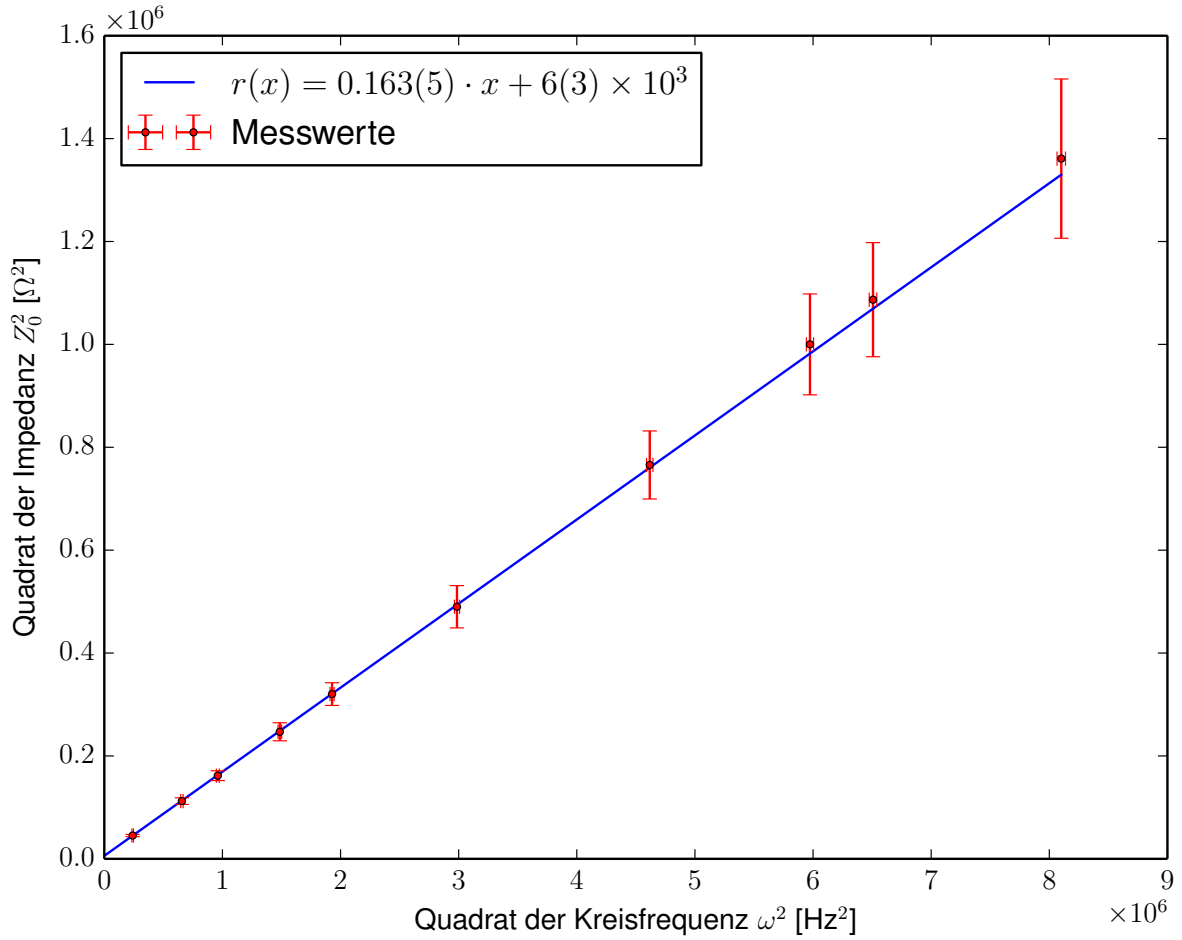
Nach GAUSS ergibt sich für die Fehler von Induktivität  $L$  und Widerstand  $R$ :

$$\sigma_L = \frac{1}{2\sqrt{m}} \cdot \sigma_m, \quad \sigma_R = \frac{1}{2\sqrt{m}} \cdot \sigma_b. \quad (4.1.7)$$

Es ergeben sich als Resultate:

$$L_{\text{lin}} = (0.404 \pm 0.007) \text{ H} \quad (4.1.8)$$

$$R_{\text{lin}} = (76 \pm 18) \Omega. \quad (4.1.9)$$



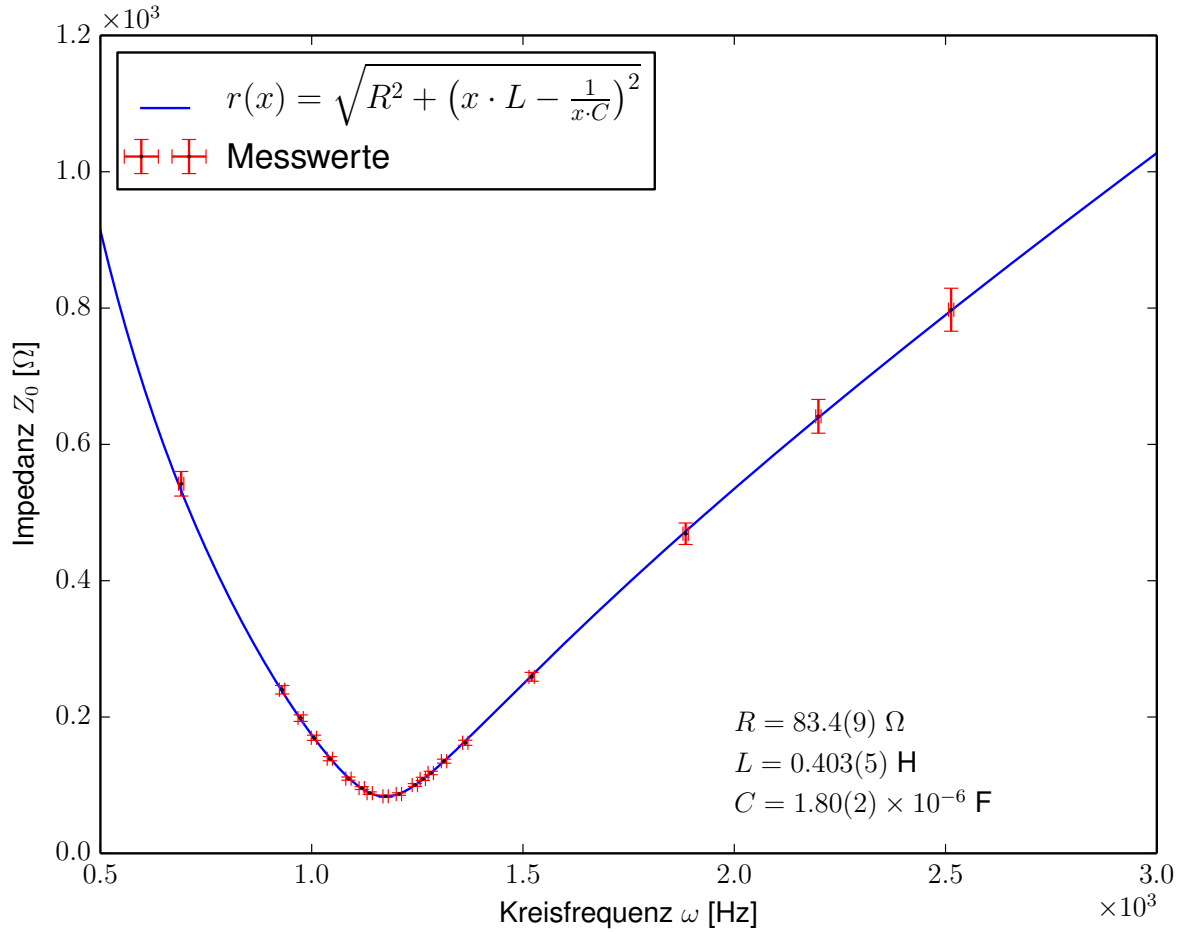
**Abbildung 4:** Auswertung des Serienkreises ohne Kondensator. Das Quadrat der Impedanz wird über dem Quadrat der Kreisfrequenz aufgetragen. Es ergibt sich wie erwartet ein linearer Zusammenhang. In rot sind die Messwerte samt Fehler, in blau die Regressionsgerade aufgetragen.

## 4.2 Bestimmung der Resonanzfrequenz und des Ohmschen Widerstands beim Serienresonanzkreis

Für diesen Auswertungsteil wird die gesamte Impedanz  $Z_0 = \frac{U}{I}$  über der Kreisfrequenz  $\omega = 2\pi \cdot f$  aufgetragen (Abbildung 5). Die Messfehler werden analog zum ersten Auswertungsteil gewählt. Mit der GAUSSschen Fehlerfortpflanzung berechnen sich die Fehler nach:

$$\sigma_\omega = 2 \cdot \pi \cdot \sigma_f \quad (4.2.1)$$

$$\sigma_{Z_0} = \frac{1}{I^2} \cdot \sqrt{I^2 \cdot \sigma_U^2 + U^2 \cdot \sigma_I^2}. \quad (4.2.2)$$



**Abbildung 5:** Auftragung der gesamten Impedanz  $Z_0$  über der Kreisfrequenz  $\omega$ . In rot sind die Messwerte samt Fehler aufgetragen. Um die Parameter  $R$ ,  $L$  und  $C$  zu bestimmen, wird ein nichtlinearer Fit durchgeführt. Die ermittelten Werte sind mit der Regressionskurve eingezeichnet.

Nach Gleichung (2.6.2) ist die Impedanz minimal, wenn  $\omega L = \frac{1}{\omega C}$  gilt. Für die Resonanzfrequenz ergibt sich also

$$\omega_r = \sqrt{\frac{1}{LC}}. \quad (4.2.3)$$

Beim Resonanzminimum gilt ferner  $Z_0 = R$ . Mithilfe eines Python-Skriptes wird eine nichtlineare Regression nach Gleichung (2.6.2) durchgeführt und nach den Parametern

$R$ ,  $L$  und  $C$  gefittet. Die Regression ergibt:

$$R_{\text{fit},1} = (83.4 \pm 0.9) \, \Omega \quad (4.2.4)$$

$$L_{\text{fit},1} = (0.403 \pm 0.005) \, \text{H} \quad (4.2.5)$$

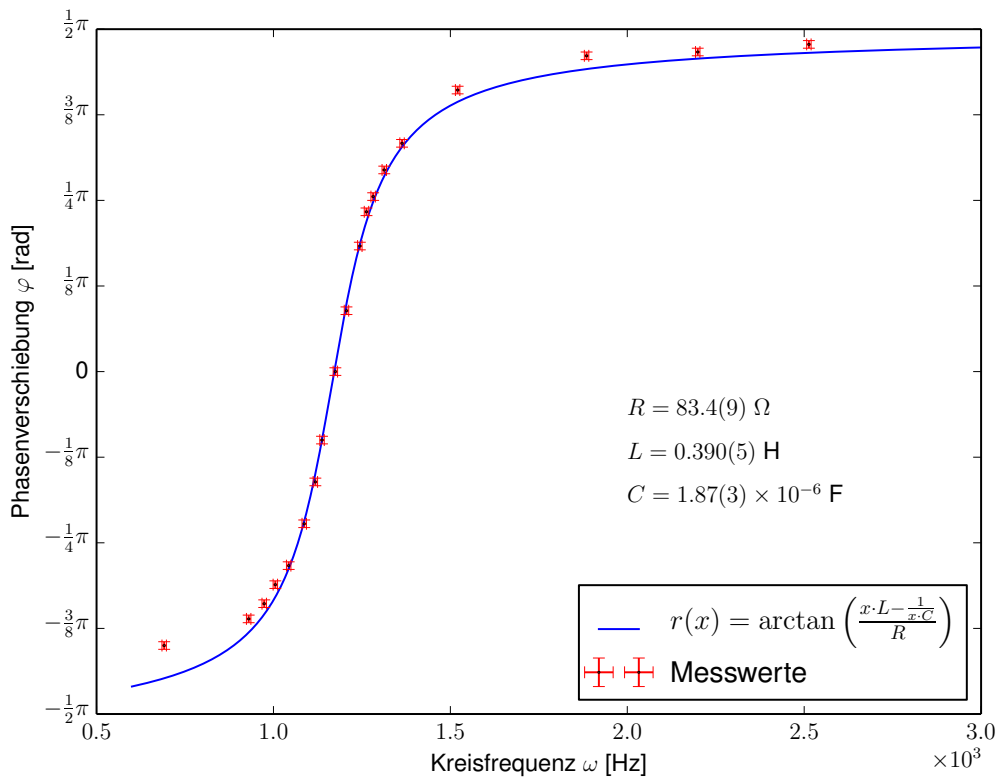
$$C_{\text{fit},1} = (1.80 \pm 0.02) \, \mu\text{F}. \quad (4.2.6)$$

Die Resonanzfrequenz wird nach Gleichung (4.2.3) berechnet. Man erhält

$$\sigma_{\omega_{r,1}} = \sqrt{\frac{\sigma_L^2}{4 \cdot L^3 \cdot C} + \frac{\sigma_C^2}{4 \cdot L \cdot C^3}} \quad (4.2.7)$$

$$\omega_{r,1} = (1174 \pm 3) \, \text{Hz}. \quad (4.2.8)$$

### 4.3 Bestimmung der Resonanzfrequenz aus der Phasenverschiebung



**Abbildung 6:** Auftragung der Phasenverschiebung  $\varphi$  zwischen Strom und Spannung über der Kreisfrequenz  $\omega$ . Die Resonanzfrequenz  $\omega_r$  kann als Nullstelle direkt abgelesen werden. Weiterhin wird ein nichtlinearer Fit durchgeführt, wobei der OHMSche Gesamtwiderstand  $R$  konstant gehalten wird.

Mithilfe der Phasenverschiebung  $\varphi$  soll erneut die Resonanzfrequenz  $\omega_r$  ermittelt werden. Nach Gleichung (2.6.1) gilt bei der Resonanzfrequenz  $\omega_r = \sqrt{\frac{1}{L \cdot C}}$ :

$$\varphi(\omega_r) = 0. \quad (4.3.1)$$

Normalerweise werden die Messwerte nahe der Nullstelle durch eine lineare Funktion interpoliert, um die exakte Resonanzfrequenz zu bestimmen. Bei der hier aufgenommenen Messreihe ist die Bestimmung jedoch trivial, da während des Versuchs bereits eine Phasenverschiebung von 0 gemessen wurde. Der Wert der Frequenz an dieser Stelle beträgt  $f_r = (187 \pm 1)$  Hz. Es ergibt sich nach  $\omega = 2\pi \cdot f$  und der Fehlergleichung  $\sigma_\omega = 2 \cdot \pi \cdot \sigma_f$  für die Resonanzfrequenz:

$$\omega_{r,2} = (1175 \pm 7) \text{ Hz}. \quad (4.3.2)$$

Zusätzlich wird ein nichtlinearer Fit nach Gleichung (2.6.1) durchgeführt. Hierbei wird der OHMSche Gesamtwiderstand  $R$  auf den zuvor erhaltenen Wert dieser Messreihe aus der Regression in Sektion 4.2  $R_{\text{fit},1} = (83.4 \pm 0.09) \Omega$  gesetzt. Wird dies nicht getan, so konvergiert der Fit nicht. Die Ergebnisse sind zusammen mit den Messwerten in Abbildung 6 zu sehen. Man erhält aus dem Fit:

$$L_{\text{fit},2} = (0.390 \pm 0.005) \text{ H} \quad (4.3.3)$$

$$C_{\text{fit},2} = (1.87 \pm 0.03) \text{ pF}. \quad (4.3.4)$$

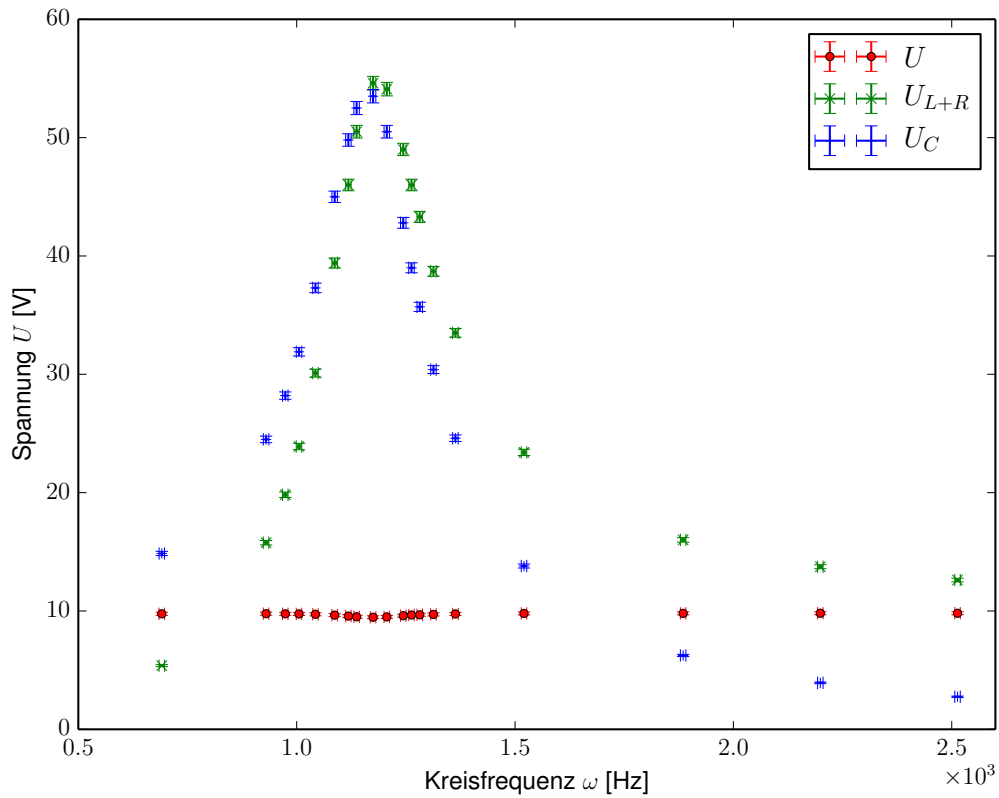
#### 4.4 Bestimmung der Phasenverschiebung zwischen $U_{L+R}$ und $U_C$ aus dem Zeigerdiagramm

Zunächst werden die Spannung am Kondensator  $U_C$ , die Spannung an Spule und OHMSchen Widerstand  $U_{L+R}$  und die Gesamtspannung  $U$  in Abhängigkeit von der Kreisfrequenz  $\omega$  in ein gemeinsames Diagramm gezeichnet. Das Ergebnis ist in Abbildung 7 zu sehen. Man erkennt, dass  $R$  in guter Näherung konstant ist.  $U_{L+R}$  und  $U_C$  haben ein deutliches Maximum an der Resonanzfrequenz. Es ist auch zu erkennen, dass unterhalb der Resonanzfrequenz  $U_C$  größer als  $U_{L+R}$  ist, während es oberhalb der Resonanzstelle umgekehrt ist. Dies zeigt, dass sich der Serienschwingkreis bei niedrigen Frequenzen hauptsächlich kapazitiv verhält und eher durch den Kondensator beschränkt ist, während bei hohen Frequenzen das Verhalten induktiv ist und hier die Spule blockiert. Die Spannungen während der Resonanz können wieder direkt abgelesen werden:

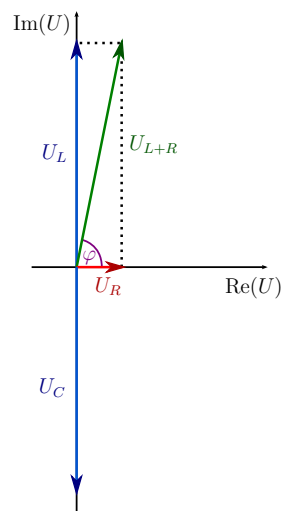
$$U_{L+R} = (54.6 \pm 0.6) \text{ V}, \quad U_C = (53.5 \pm 0.6) \text{ V}. \quad (4.4.1)$$

Der Zusammenhang zwischen diesen Größen wird in Abbildung 8 anhand eines Zeigerdiagramms dargestellt.

Da die Resonanzfrequenz gezeigt ist, sind  $U_L$  und  $U_C$  gleich lang und entgegengesetzt.



**Abbildung 7:** Auftragung von der Gesamtspannung  $U$ , der Spannung an der Spule und dem OHMschen Widerstand  $U_{L+R}$  und der Spannung am Kondensator  $U_C$  über der Kreisfrequenz  $\omega$ .



**Abbildung 8:** Zeigerdiagramm der gemessenen Spannungen.

Es ist somit abzulesen:

$$\sin(\varphi) = \frac{U_L}{U_{L+R}} = \frac{U_C}{U_{L+R}} \quad (4.4.2)$$

$$\iff \varphi = \arcsin\left(\frac{U_C}{U_{L+R}}\right). \quad (4.4.3)$$

Mit der GAUSSschen Fehlerfortpflanzung errechnet sich der Fehler nach

$$\sigma_\varphi = \frac{1}{U_{L+R}} \cdot \sqrt{\frac{1}{U_C^2 - U_{L+R}^2} \cdot \left(-U_C^2 \cdot \sigma_{U_{L+R}}^2 - U_{L+R}^2 \cdot \sigma_{U_C}^2\right)}. \quad (4.4.4)$$

Es ergibt sich daraus eine Phasenverschiebung von

$$\varphi_{\text{Zeiger}} = (1.37 \pm 0.08) \text{ rad}. \quad (4.4.5)$$

## 4.5 Auswertung des Parallelschwingkreises

Der verwendete Parallelschwingkreis besteht aus einem Kondensator, welcher parallel zu einer Reihenschaltung von der Spule und ihrem integrierten Spulenwiderstand geschaltet ist. Nach den Regeln aus Sektion 2.5 gilt:

$$\frac{1}{Z} = \frac{1}{R + i\omega L} - \frac{i}{\omega C}. \quad (4.5.1)$$

Für die Impedanz ergibt sich nach Bildung des Betrags:

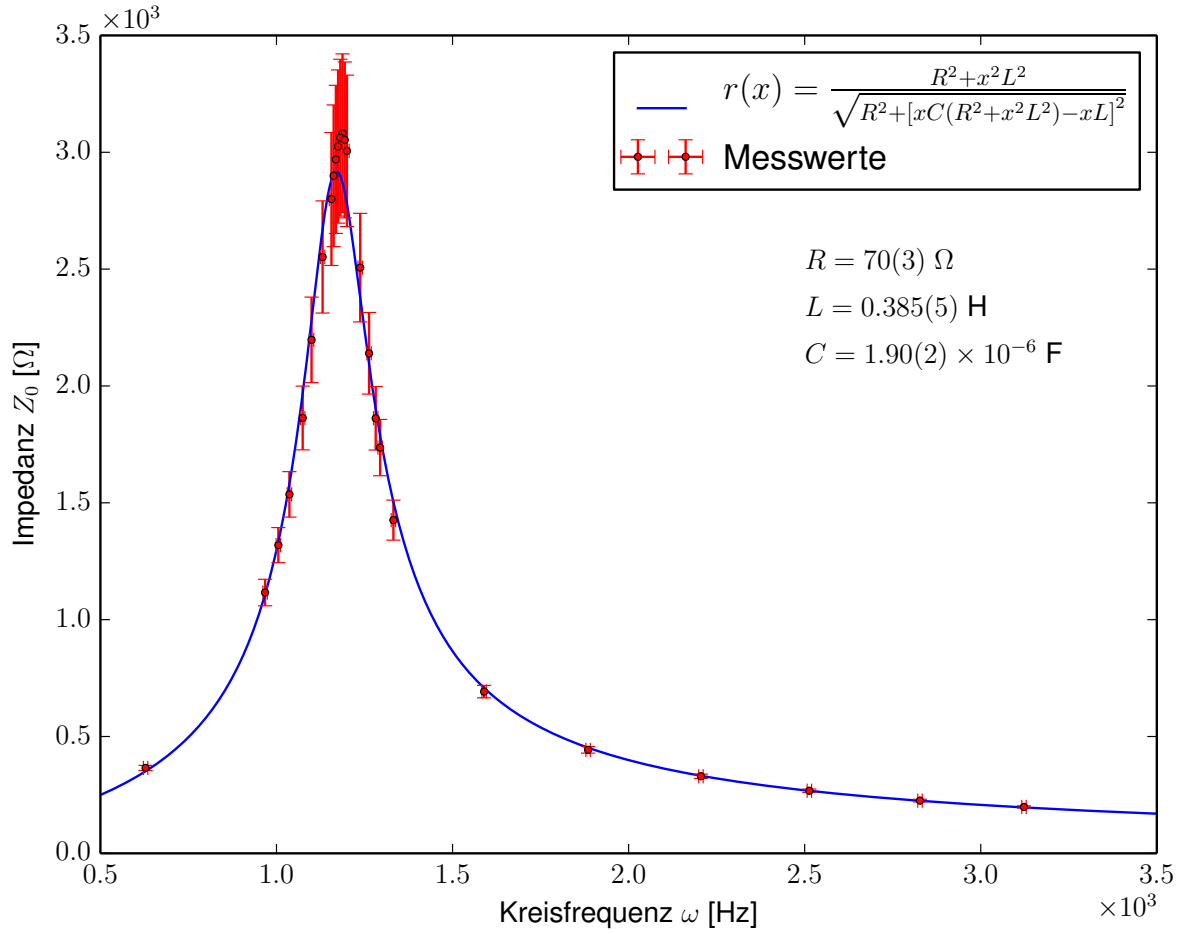
$$Z_0 = \frac{R^2 + \omega^2 L^2}{\sqrt{R^2 + [\omega C(R^2 + \omega^2 L^2) - \omega L]^2}}. \quad (4.5.2)$$

Es werden analog zum Serienresonanzkreis die Werte der gesamten Impedanz  $Z_0$  über der Kreisfrequenz  $\omega$  aufgetragen. Mit Gleichung (4.5.2) wird ein nichtlinearer Fit durchgeführt. Das Ergebnis ist in Abbildung 9 zu sehen. Die Ergebnisse des Fits sind:

$$R_{\text{fit},3} = (70 \pm 3) \, \Omega \quad (4.5.3)$$

$$L_{\text{fit},3} = (0.385 \pm 0.005) \, \text{H} \quad (4.5.4)$$

$$C_{\text{fit},3} = (1.90 \pm 0.02) \, \mu\text{F}. \quad (4.5.5)$$



**Abbildung 9:** Auswertung des Parallelschwingkreises. Die Impedanz  $Z_0$  wird über der Kreisfrequenz  $\omega$  aufgetragen. Mit einem nichtlinearen Fit werden die Parameter  $R$ ,  $L$  und  $C$  ermittelt. In rot sind die Messwerte mit Fehlerintervallen, in blau die Regressionskurve zu sehen.

## 4.6 Zusammenfassung

### 4.6.1 Ohmscher Widerstand der Spule $R_L$

Für den gesamten OHMschen Widerstand im Serienschwingkreis stehen zwei Ergebnisse aus Sektionen 4.1 und 4.2 zur Verfügung. Der gewichtete Mittelwert aus ihnen beträgt

$$\overline{R} = (83.4 \pm 0.9) \Omega. \quad (4.6.1)$$

Die Reihenschaltung besteht aus dem OHMschen Festwiderstand  $R_1$ , dem Spulenwiderstand  $R_L$  und dem Innenwiderstand des Amperemeters  $R_i$ . Mit der Maschenregel nach



Sektion 2.5 gilt

$$R = R_1 + R_L + R_i \quad \Longleftrightarrow \quad R_L = R - R_1 - R_i, \quad (4.6.2)$$

wobei sich der Fehler nach GAUSS berechnet:

$$\sigma_{R_L} = \sqrt{\sigma_{R_1}^2 + \sigma_R^2 + \sigma_{R_i}^2}. \quad (4.6.3)$$

Der Innenwiderstand des Amperemeters für die beiden verwendeten Messbereiche wurde mit einem Multimeter gemessen (Tabelle 2).

Messbereich	Innenwiderstand [ $\Omega$ ]
200 mA	$1.5 \pm 0.5$
20 mA	$11 \pm 0.1$

**Tabelle 2:** Widerstände des Amperemeters

Bei der Versuchsdurchführung wurde versäumt, für jede Messreihe einen einheitlichen Messbereich zu verwenden. Als Näherung wird deshalb das arithmetische Mittel aus beiden Messbereichen verwendet:

$$\overline{R_i} = (7 \pm 0.3). \quad (4.6.4)$$

Um beide Messbereiche gleich zu gewichten, wird der Fehler ebenfalls gemittelt. Der OHMsche Festwiderstand beträgt nach [4, S. 121]

$$R_1 = (10 \pm 1) \, \Omega. \quad (4.6.5)$$

Nach Gleichung (4.6.2) erhält man für den Widerstand der Spule

$$R_L = (66 \pm 2) \, \Omega. \quad (4.6.6)$$

Der mit dem Multimeter bestimmte Spulenwiderstand ist

$$R_{L,\text{Mess}} = (68.0 \pm 0.1) \, \Omega. \quad (4.6.7)$$

Der aus den Messreihen bestimmte Spulenwiderstand ist somit um 3% kleiner als der mit dem Multimeter gemessene Wert.

#### 4.6.2 Resonanzfrequenz $\omega_r$

Aus den Sektionen 4.2 und 4.3 liegen zwei Werte für die Resonanzfrequenz  $\omega_r$  vor. Der gewichtete Mittelwert beträgt

$$\overline{\omega_r} = (1174 \pm 3) \text{ Hz.} \quad (4.6.8)$$

#### 4.6.3 Induktivität $L$

Die erhaltenen Werte für die Induktivität  $L$  stammen aus der linearen Regression aus Sektion 4.1, sowie aus allen drei nichtlinearen Fits. Als gewichteter Mittelwert ergibt sich

$$\overline{L} = (0.394 \pm 0.003) \text{ H.} \quad (4.6.9)$$

#### 4.6.4 Kapazität $C$

Für die Kapazität  $C$  des Kondensators stehen zunächst die Werte aus den drei nichtlinearen Fits zur Verfügung. Alternativ ergibt sich mit Gleichung (4.2.3) und den zuvor errechneten Mittelwerten  $\overline{\omega_r}$  und  $\overline{L}$ :

$$C_{\text{alternativ}} = \frac{1}{\overline{L} \cdot \overline{\omega_r}^2} = (1.84 \pm 0.02) \text{ pF} \quad (4.6.10)$$

$$\sigma_{C_{\text{alternativ}}} = \frac{1}{\overline{L}^2 \cdot \overline{\omega_r}^3} \cdot \sqrt{4 \cdot \overline{L}^2 \cdot \sigma_{\overline{\omega_r}}^2 + \sigma_{\overline{L}}^2 \cdot \overline{\omega_r}^2}. \quad (4.6.11)$$

Für den gewichteten Mittelwert aus diesen vier Größen erhält man:

$$\overline{C} = (1.85 \pm 0.01) \text{ pF.} \quad (4.6.12)$$

Mit dem Multimeter wurde ein Wert von  $C_{\text{Mess}} = (2.193 \pm 0.001) \text{ pF}$  gemessen. Der Mittelwert aus den Auswertungen weicht um 16% vom Multimeterwert ab.

#### 4.6.5 Phasenverschiebung zwischen $U_{L+R}$ und $U_C$

Nach Gleichung (2.6.1) gilt für die Phasenverschiebung zwischen  $U_{L+R}$  und  $U_C$ :

$$\varphi_{\text{Theorie}} = \text{atan} \left( \frac{\overline{L}}{\overline{R}} \cdot \overline{\omega_r} \right) \quad (4.6.13)$$

$$\sigma_{\varphi_{\text{Theorie}}} = \frac{1}{\overline{L}^2 \cdot \overline{\omega_r}^2 + \overline{R}^2} \cdot \sqrt{\overline{L}^2 \cdot \overline{R}^2 \cdot \sigma_{\overline{\omega_r}}^2 + \overline{L}^2 \cdot \sigma_{\overline{R}}^2 \cdot \overline{\omega_r}^2 + \overline{R}^2 \cdot \sigma_{\overline{L}}^2 \cdot \overline{\omega_r}^2}. \quad (4.6.14)$$

Es ergibt sich eine Phasenverschiebung von

$$\varphi_{\text{Theorie}} = (1.393 \pm 0.002) \text{ rad.} \quad (4.6.15)$$

Der zuvor in Sektion 4.4 berechnete Wert von  $\varphi_{\text{Zeiger}} = (1.37 \pm 0.08) \text{ rad}$  ist um 2% kleiner als der Theoriewert.

## 5 Diskussion

OHmscher Wid. [ $\Omega$ ]	Impedanz [H]	Resonanzfrequenz [Hz]	Kapazität [ $\mu\text{F}$ ]
$R_{\text{lin}} = (76 \pm 18)$ $R_{\text{fit},1} = (83.4 \pm 0.9)$	$L_{\text{lin}} = (0.404 \pm 0.007)$ $L_{\text{fit},1} = (0.403 \pm 0.005)$ $L_{\text{fit},2} = (0.390 \pm 0.005)$ $L_{\text{fit},3} = (0.385 \pm 0.005)$	$\omega_{r,1} = (1175 \pm 3)$ $\omega_{r,2} = (1175 \pm 7)$	$C_{\text{fit},1} = (1.80 \pm 0.02)$ $C_{\text{fit},2} = (1.87 \pm 0.03)$ $C_{\text{fit},3} = (1.90 \pm 0.02)$ $C_{\text{alternativ}} = (1.84 \pm 0.02)$
$\bar{R} = (83.4 \pm 0.9)$ $R_L = (66 \pm 2)$	$\bar{L} = (0.394 \pm 0.003)$	$\bar{\omega}_r = (1174 \pm 3)$	$\bar{C} = (1.85 \pm 0.01)$
$R_{L,\text{Mess}} = (68.0 \pm 0.1)$			$C_{\text{Mess}} = (2.193 \pm 0.001)$

Phasenverschiebung [rad]	$\varphi_{\text{Zeiger}} = (1.37 \pm 0.08)$	$\varphi_{\text{Theorie}} = (1.393 \pm 0.002)$
--------------------------	---	--

**Tabelle 3:** Zusammenfassung aller Ergebnisse.

In Tabelle 3 sind alle Ergebnisse aufgeführt.

### 5.1 Fehlerintervalle und relative Fehler

Zunächst soll die Wahl der Fehlerintervalle diskutiert werden. Es ist anzumerken, dass die verwendeten Fehler für die Strom- und Spannungswerte, wie sie in Tabelle 1 zu sehen sind, relativ großzügig gewählt wurden. Besonders bei der linearen Regression aus Sektion 4.1 spiegeln sich die großen Fehler in Form von einem hohen relativen Fehler bei dem OHmschen Widerstand  $R_{\text{lin}}$  wider. Der relative Fehler beträgt hier 24%. Trotz der großzügigen Fehlerintervalle ist der Induktivitätswert aus der linearen Regression  $R_{\text{lin}}$  wesentlich präziser. Hier ergibt sich ein relativer Fehler von nur 2%. Dies ist damit zu erklären, dass alle Messwerte sehr genau auf einer Geraden liegen. Eine Änderung der Fehlerintervalle gibt zwar eine große Freiheit beim Ordinatenabschnitt, jedoch nicht bei der Steigung. Insgesamt fallen alle relativen Fehler unerwartet gering aus. Die mitunter präzisesten Ergebnisse sind die beiden Resonanzfrequenzen  $\omega_{r,1/2}$  mit nur 0.3% relativem Fehler. Dies liegt daran, dass während des Versuchs die Resonanzstelle sehr genau mit dem Frequenzregler abgetastet wurde und das Oszilloskop einen sehr genauen Wert angegeben hat. Die Genauigkeit bei der theoretischen Phasenverschiebung  $\varphi_{\text{Theo}}$  mit

einem relativen Fehler von nur 0.2% ist eine direkte Konsequenz der Genauigkeit der Frequenzen und Induktivitäten. Abgesehen von  $R_{\text{lin}}$  sind die relativen Fehler nicht größer als 3%.

## 5.2 Nichtlineare Fits

Der nichtlineare Fit der gesamten Impedanz  $Z_0$  aus Sektion 4.2 hat eine große Güte. Die Parameter haben alle einen niedrigen relativen Fehler und die Regressionskurve schneidet alle Fehlerintervalle. Im Gegensatz zu den etwas großen Fehlerintervallen bei der linearen Regression sehen diese hier wesentlich sinnvoller aus. Der Serienschwingkreis wirkt wie eine Art Bandpass: Bei der Resonanzstelle ist die Impedanz minimal und der Strom maximal. Die sehr geringen Fehler an der Resonanzstelle ergeben somit Sinn, da bei höheren Strömen der Innenwiderstand des Amperemeters zu geringeren Abweichungen führt. Der Fit der Phasenverschiebung aus Sektion 4.3 ist am schwierigsten durchzuführen. Versucht man, die Theoriekurve mit allen drei Parametern  $R$ ,  $L$  und  $C$  zu fitten, so versagt die Regression komplett und es ergeben sich Fehler von ca 3000%. Der Fit gelingt, sobald man  $R$  festhält. Obwohl die relativen Fehler der Parameter niedrig sind, erkennt man deutliche Abweichungen der Regressionskurve zu den Messfehlern. Besonders bei niedrigen Frequenzen liegen die Messwerte relativ weit über der Kurve. Ein möglicher Grund hierfür ist, dass mehr Messpunkte über der Resonanzfrequenz zur Verfügung stehen als unterhalb von ihr. So wird der Fit für hohe Kreisfrequenzen genauer, büßt aber Genauigkeit bei niedrigen Kreisfrequenzen ein. Der Fit des Parallelresonanzkreises aus Sektion 4.5 verlief ähnlich gut wie der des Serienkreises. Wieder schneiden alle Vertrauensintervalle die Fitkurve und die erhaltenen Parameter haben eine hohe Präzision. Der Parallelkreis wirkt wie eine Art Sperrfilter: Ströme nahe der Resonanzfrequenz werden geschwächt, während Ströme in den restlichen Bereichen nahezu unblockiert durchgelassen werden. Im Gegensatz zum Serienkreis sind deshalb bei diesem Fit die Messwerte außerhalb der Resonanzstelle genauer. Bei der Resonanzstelle unterschätzt die Fitkurve die Messwerte ein wenig. Dennoch liegt die Kurve gut in allen Fehlerintervallen.

## 5.3 Bestimmung des Spulenwiderstands $R_L$

Bei den Werten des OHMschen Widerstandes fällt auf, dass der gewichtete Mittelwert der gleiche ist, wie der des nichtlinearen Fits. Dies liegt an der großen Abweichung von  $R_{\text{lin}}$ . Die große Abweichung ist jedoch berechtigt, da der bestimmte Wert von  $R_L$  mit nur 3% Abweichung zum Multimeterwert  $R_{L,\text{Mess}}$  sehr gut mit dem Referenzwert übereinstimmt. Es überlappen sich ebenfalls die Vertrauensintervalle dieser beiden Werte. Somit war diese Messung ein voller Erfolg.

## 5.4 Bestimmung der Kapazität

Die Bestimmung der Kapazität ist beeinflusst von der Impedanz, der Resonanzfrequenz und der nichtlinearen Fits. Wie bereits gesagt, liefern die Fits gute Werte. Die Impedanzen und Resonanzfrequenzen haben alle eine sehr hohe Präzision. Trotz der hohen Präzision und vorallem der hohen Konsistenz bei den bestimmten Kapazitätswerten, liegt der mit dem Multimeter gemessene Wert bei weitem außerhalb des Vertrauensintervalls von  $1\sigma$ . Der Mittelwert liegt ganze 16% unterhalb des Multimeterwertes. Es wurde bei der Multimetermessung ein sehr geringer Fehler angenommen, jedoch ist die Abweichung zu groß, um den Fehler anzupassen. Man muss hier also von einem systematischen Fehler ausgehen. Einerseits können Kapazitätsmessungen mit Multimetern einen großen Fehler aufweisen. Andererseits kann es zu Abweichungen bei der Theorie kommen, da kein Kondensator wirklich ideal ist. Es wäre hier interessant gewesen, die Messwerte für die Impedanzen mit der Theorie zu vergleichen, aber es wurde versäumt, die Länge der Spule zu notieren. Ahand der großen Konsistenz aller anderen Messwerte, ist es sehr wahrscheinlich, dass die Kapazitätsmessung mit dem Multimeter die fehlerhafte Messung ist.

## Literatur

- [1] W. Demtröder. *Experimentalphysik 2, Elektrizität und Optik*. 6. Aufl. Springer-Verlag, Berlin Heidelberg, 2012. ISBN: 978-3-642-29943-8.
- [2] *Lehrportal der Universität Göttingen*. <https://lp.uni-goettingen.de/get/text/4165>.
- [3] Wolfgang Nolting. *Grundkurs Theoretische Physik 3 - Elektrodynamik*. Springer-Verlag, Berlin Heidelberg, 2013. ISBN: 978-3-642-25465-9.
- [4] Jörn Große-Knetter Peter Schaaf. *Das Physikalische Praktikum, Handbuch 2014 für Studentinnen und Studenten der Physik*. Universitätsdrucke Göttingen, 2014. ISBN: 978-3-86395-157-3.