Anfängerpraktikum der Fakultät für Physik,
Universität Göttingen

Versuch 14
Wechselstromwiderstände

Praktikant:	Eric Bertok
Mitarbeiter:	Kevin Lüdemann
Email:	eric.bertok@stud.uni-goettingen.de
	kevin.luedemann@stud.uni-goettingen.de
Gruppe:	B002
Betreuer:	Björn Klaas
Durchgeführt am:	..2014
Abgegeben am:	..2014

Testat:

Inhaltsverzeichnis

1 Einleitung **1**

2 Theorie **1**
2.1 Wechselstrom . . . 1
2.2 Ohm'scher Widerstand . . . 1
2.3 Induktiver Widerstand . . . 2
2.4 Kapazitiver Widerstand . . . 2
2.5 Reihen- und Parallelschaltung von komplexen Widerständen . . . 3
2.6 Beträge und Phasenverschiebungen . . . 3

3 Durchführung **4**
3.1 Versuchsaufbau und benötigte Materialien . . . 4
3.2 Serienkreis ohne Kondensator . . . 5
3.3 Serienkreis mit Kondensator . . . 5
3.4 Parallelkreis . . . 6
3.5 Ausmessung der Bauteile . . . 6

4 Auswertung **6**
4.1 Bestimmung der Induktivität und des Ohmschen Widerstands beim Serienkreis ohne Kondensator . . . 6
4.2 Bestimmung der Resonanzfrequenz und des Ohmschen Widerstands beim Serienresonanzkreis . . . 8

5 Diskussion **10**

Literatur **11**

1 Einleitung

Der Wechselstrom hat sich vielen Bereichen der Technik gegenüber dem Gleichstrom durchgesetzt. Zum einen ist er durch Generatoren leichter zu erzeugen, zum anderen ist eine einfache Transformation der Spannung möglich (siehe Versuch 16 - "Der Transformator"). In diesem Versuch wird das Verhalten von Spule, Kondensator und dem OHMschen Widerstand bei Wechselspannung untersucht. Durch Messung der Phasenverschiebung zwischen Strom und Spannung und deren Größenverhältnisse wird die Theorie der komplexen Wechselstromwiderstände getestet.

2 Theorie

2.1 Wechselstrom

Betrachtet wird ein Stromkreis, an dem eine äußere periodische Wechselspannung der Form

$$U_e(t) = U_0 \cdot \cos(\omega t) \tag{2.1}$$

anliegt. Dabei ist U_0 die Scheitelspannung und $\omega = \frac{2\pi}{T}$ die Kreisfrequenz. Im Allgemeinen besitzt der hieraus entstehende Wechselstrom zusätzlich zu seiner Amplitude I_0 eine Phasenverschiebung φ. So lässt sich der Strom I als

$$I(t) = I_0 \cdot \cos(\omega t - \varphi) \tag{2.2}$$

schreiben. Es ist üblich, zur Vereinfachung Strom und Spannung als komplexe Größen zu schreiben [2, S. 253]:

$$U_e(t) = U_0 e^{i\omega t} \tag{2.3}$$
$$I(t) = I_0 e^{i\omega t - \varphi}. \tag{2.4}$$

Dabei ist der Realteil stets der physikalisch relevante Wert. Als Verallgemeinerung des Widerstands wird der komplexe Widerstand Z eingeführt [2, S. 254]:

$$Z = \frac{U_e}{I} = \frac{U_0}{I_0} e^{i\varphi}. \tag{2.5}$$

2.2 Ohm'scher Widerstand

Betrachtet man einen Stromkreis, welcher nur aus einem OHMschen Widerstand besteht, so gilt nach dem OHMschen Gesetz

$$U(t) = R \cdot I, \tag{2.6}$$

dass der Strom keine Phasenverschiebung zur Spannung aufweist. Somit ist Z reell:

$$Z_R = \mathrm{Re}(Z) = R. \tag{2.7}$$

2.3 Induktiver Widerstand

Nun besteht der Stromkreis aus einer reinen Induktivität L. Zum einen folgt aus der KIRCHHOFFschen Maschenregel [1, S. 55]

$$U_e + U_{ind} = 0, \tag{2.8}$$

zum anderen gilt nach dem Induktionsgesetz [1, S. 131]:

$$U_{ind} = -L \cdot \frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t}. \tag{2.9}$$

Durch Einsetzen und Integration erhält man als induktiven Widerstand [2, S. 256]

$$Z_L = i\omega L, \tag{2.10}$$

welcher rein imaginär ist. Der Strom ist um $\varphi = \frac{\pi}{2}$ gegenüber der Spannung verzögert.

2.4 Kapazitiver Widerstand

Jetzt besteht der Stromkreis, an dem die Wechselspannung anliegt lediglich aus einer Kapazität C. Für die Spannung an einem Kondensator gilt [1, S. 152]

$$U_e = \frac{Q}{C}. \tag{2.11}$$

Durch Differenziation erhält man [2, S. 257]:

$$I(t) = \frac{\mathrm{d}U_e}{\mathrm{d}t} C = i\omega C \; U_e \tag{2.12}$$

$$\iff \qquad U_e(t) = \frac{1}{i\omega C} I(t) = -\frac{i}{\omega C} I(t). \tag{2.13}$$

Für den kapazitiven Widerstand Z_C ergibt sich also:

$$Z_C = -\frac{i}{\omega C}. \tag{2.14}$$

Der Strom eilt der Spannung um $\frac{\pi}{2}$ voraus, $\varphi = -\frac{\pi}{2}$.

2.5 Reihen- und Parallelschaltung von komplexen Widerständen

Die Reihen- und Parallelschaltung von komplexen Widerständen geht analog zu normalen Widerständen. Bei einer Reihenschaltung fließt durch alle Bauteile der gleiche Strom und die Spannungen werden addiert. Folglich werden auch die komplexen Widerstände addiert. Für einen Serienkreis mit Ohmschen Widerstand, Induktivität und Kapazität gilt:

$$Z = Z_R + Z_L + Z_C = R + i\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right). \tag{2.15}$$

Bei einer Parallelschaltung ist die an jedem Bauteil anliegende Spannung identisch. Nach der Knotenregel [1, S. 55] addieren sich die Ströme:

$$\frac{U_e}{Z} = I = I_R + I_L + I_C = \frac{U_e}{Z_R} + \frac{U_e}{Z_L} + \frac{U_e}{Z_C} \tag{2.16}$$

$$\iff \qquad \frac{1}{Z} = \frac{1}{Z_R} + \frac{1}{Z_L} + \frac{1}{Z_C} \tag{2.17}$$

$$= \frac{1}{R} + i\left(\omega C - \frac{1}{\omega L}\right). \tag{2.18}$$

2.6 Beträge und Phasenverschiebungen

Die obigen Ergebnisse lassen sich sehr anschaulich in der komplexen Zahlenebene darstellen. In Abbildung 1 ist das Ergebnis aus Gleichung (2.15) veranschaulicht. Durch den

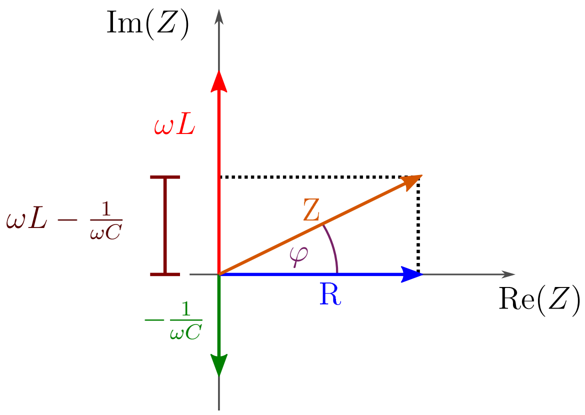

Abbildung 1: Darstellung des komplexen Widerstandes Z in der komplexen Ebene.

Quotienten von Imaginär- und Realteil lässt sich ein Ausdruck für die Phasenverschiebung φ angeben [1, S. 153]:

$$\tan\varphi = \frac{\mathrm{Im}(Z)}{\mathrm{Re}(Z)}. \tag{2.19}$$

Den Betrag vom komplexen Widerstand

$$|Z| = \sqrt{\mathrm{Re}(Z)^2 + \mathrm{Im}(Z)^2} = \sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2} \tag{2.20}$$

bezeichnet man als Impedanz.

3 Durchführung

3.1 Versuchsaufbau und benötigte Materialien

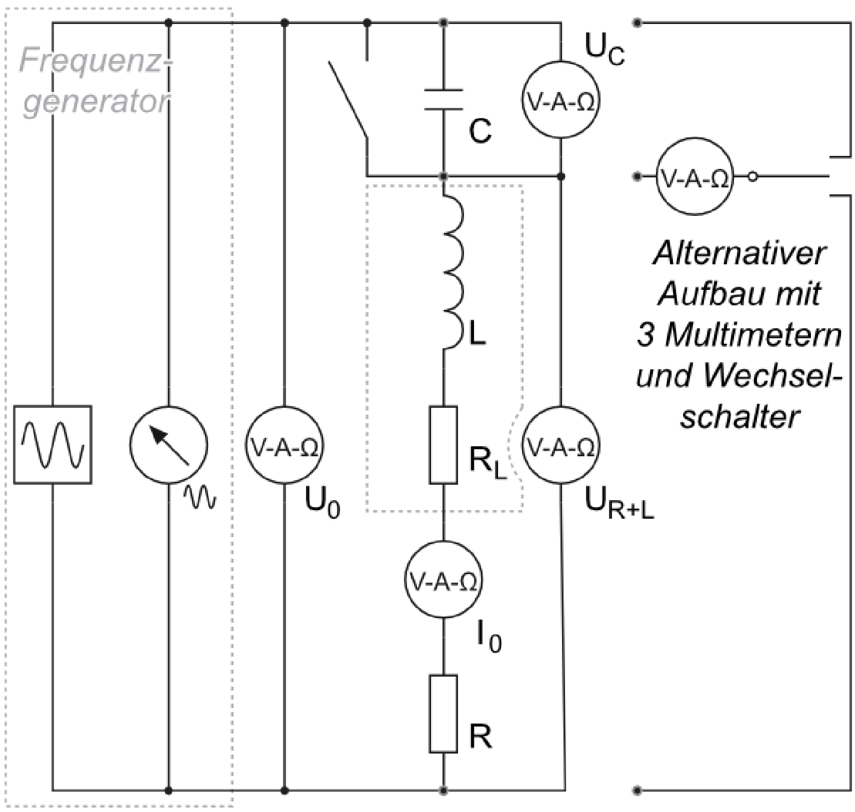

Abbildung 2: Schaltskizze für den Serienkreis

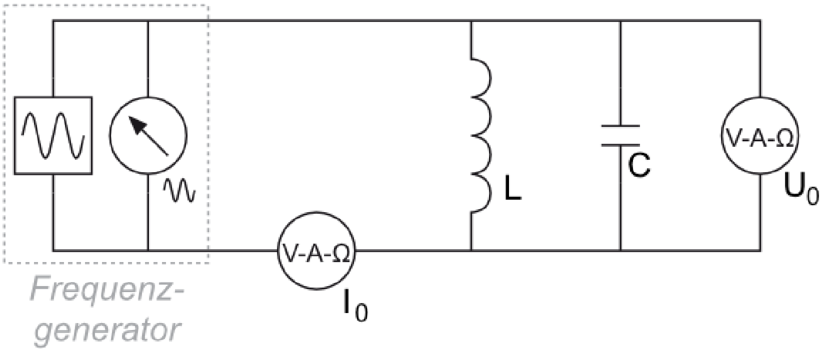

Abbildung 3: Schaltskizze für den Parallelkreis

In den Abbildungen 2 und 3 sind die Schaltskizzen der beiden Versuchsaufbauten zu sehen. Benötigt werden eine Wechselspannungsquelle mit variabler Frequenz, ein Kondensator, eine Luftspule, ein Ohmscher Widerstand, ein Schalter, ein Digitaloszilloskop und vier Multimeter.

3.2 Serienkreis ohne Kondensator

Für den ersten Versuchsteil werden die Bauteile gemäß Abbildungen 2 in Reihe geschaltet. Der Schalter wird geöffnet, um den Kondensator zu überbrücken. Durch das Oszilloskop darf kein Strom fließen. Um die Phasenverschiebung zwischen Strom und Spannung zu messen, wird es deswegen sowohl direkt an die Spannungsquelle als auch parallel zum Ohmschen Widerstand geschaltet. Nun wird in einem Frequenzbereich von ca. 60 bis 80 Hz für zehn verschiedene Frequenzen der Strom I durch den Ohmschen Widerstand, die Gesamtspannung U und die Phasenverschiebung φ zwischen Strom und Spannung gemessen. Die Spannung kann dabei an der Spannungsquelle eingestellt werden. Gemessen wird sie trotz der Anzeige der Spannungsquelle am Oszilloskop, da sie dort genauer ausgegeben wird. Die Phasenverschiebung ist ebenfalls am Oszilloskop abzulesen. Dafür muss sich dieses in dem Modus „Messung“ befinden. Zu beachten ist, dass der Innenwiderstand des Amperemeters von dem eingestellten Messbereich abhängt. Um einer möglichen Verfälschung der Messwerte vorzubeugen, sollte deshalb für jeden Versuchsabschnitt ein einheitlicher Messbereich eingestellt werden. Die Widerstände der Voltmeter hingegen sind als unendlich angenommen.

3.3 Serienkreis mit Kondensator

Für diesen Versuchsteil wird der Schalter geöffnet, wodurch die Schaltung zu einem Serienschwingkreis wird. Wie in Sektion 3.2 wird für den gleichen Frequenzbereich die Gesamtspannung U, der Gesamtstrom I und die Phasenverschiebung φ gemessen. Hierbei ist darauf zu achten, die Resonanzstelle besonders genau abzutasten, um eine genaue

Bestimmung der Resonanzfrequenz zu ermöglichen.

3.4 Parallelkreis

Nun wird der Parallelkreis ohne den OHMschen Widerstand aus Abbildung 3 aufgebaut. Er besteht aus einer Spule und einem parallelgeschalteten Kondensator. Der in der Spule integrierte Spulenwiderstand R_L ist in Reihe zu dieser. Das Volt- und Amperemeter wird analog zu den Vorherigen Schaltungen angeschlossen. Erneut wird die Spannung U, der Strom I und die Phasenverschiebung φ notiert, wobei die Resonanzstelle besonders genau vermessen wird.

3.5 Ausmessung der Bauteile

Als letztes werden mit den Multimetern die elektrischen Bauteile vermessen. Hierzu gehören der Innenwiderstand des Amperemeters für alle verwendeten Messbereiche, der Widerstand des OHMschen Widerstandes, der Widerstand der Spule, sowie die Kapazität des Kondensators. Ebenfalls zu notieren sind der Durchmesser und die Windungszahl der Luftspule.

4 Auswertung

4.1 Bestimmung der Induktivität und des Ohmschen Widerstands beim Serienkreis ohne Kondensator

Aus der Messreihe für den Serienkreis bei überbrücktem Kondensator (Sektion 3.2) soll die Induktivität L der Spule, sowie der gesamte OHMsche Widerstand R, bestehend aus Spulenwiderstand R_L und einzelnem OHMschen Widerstand R_Ω, bestimmt werden. Hierfür betrachtet man Gleichung (2.15). Da der Kondensator überbrückt ist, besteht der Imagiärteil , woraus für den komplexen Widerstand Z gilt:

$$Z(\omega) = R + i\,\omega L. \tag{4.1}$$

Berechnet man nun die Impedanz gemäß Gleichung (2.20) und quadriert, so erhält man

$$\left(\frac{U}{I}\right)^2 = Z^2 = \underbrace{R^2}_{b} + \omega^2 \underbrace{L^2}_{m}. \tag{4.2}$$

Man erwartet also einen linearen Zusammenhang zwischen dem Impedanzquadrat Z^2 und dem Quadrat der Kreisfrequenz ω^2. Die Steigung m entspricht dabei dem Quadrat der Induktivität L^2 und der Ordinatenabschnitt wird als Quadrat des OHMschen

Messbereich	Fehler
alle Spannungen	1% v. Messwert + 3 Digits
alle Ströme	1.5% v Messwert + 3 Digits

Tabelle 1: Messfehler der Multimeter

Gesamtwiderstands R^2 identifiziert. Für die Messfehler der Multimeter wurde der größtmögliche Fehler nach [3, S. 35] verwendet, da die während des Versuchs angenommenen Fehler zu klein sind. Sie sind In Tabelle 1 zu sehen. Der Fehler der Frequenz wurde einheitlich auf $\sigma_f = 1$ gesetzt, da der auf dem Oszilloskop ausgegebene Wert innerhalb dieses Bereichs schwankte. Das Kreisfrequenzquadrat berechnet sich nach $\omega^2 = (2\pi f)^2$. Mit der Gaussschen Fehlerfortpflanzung ergibt sich ein Fehler von

$$\sigma_{\omega^2} = 8\pi^2 f \cdot \sigma_f. \tag{4.3}$$

Der Fehler der gesamten Impedanz berechnet sich nach

$$\sigma_{Z_0^2} = \frac{2}{I^3} \cdot U \cdot \sqrt{I^2 \cdot \sigma_U^2 + U^2 \cdot \sigma_I^2}. \tag{4.4}$$

Die Auftragung des Impedanzquadrates über dem Kreisfrequenzquadrat ist in Abbildung 4 zu sehen. Anschließend wird eine lineare Regression durchgeführt. Die Regressionsgerade ist ebenfalls in Abbildung 4 eingezeichnet. Man erhält als Parameter:

$$m = L^2 = (0.163 \pm 0.005)\ \mathrm{H}^2 \tag{4.5}$$

$$b = R^2 = (6 \pm 3) \times 10^3\ \Omega^2 \tag{4.6}$$

Nach Gauss ergibt sich für die Fehler von Induktivität L und Widerstand R:

$$\sigma_L = \frac{1}{2\sqrt{m}} \cdot \sigma_m, \qquad \sigma_R = \frac{1}{2\sqrt{m}} \cdot \sigma_b. \tag{4.7}$$

Es ergeben sich als Resultate:

$$L_{\mathrm{lin}} = (0.404 \pm 0.007)\ \mathrm{H} \tag{4.8}$$

$$R_{\mathrm{lin}} = (76 \pm 18)\ \Omega. \tag{4.9}$$

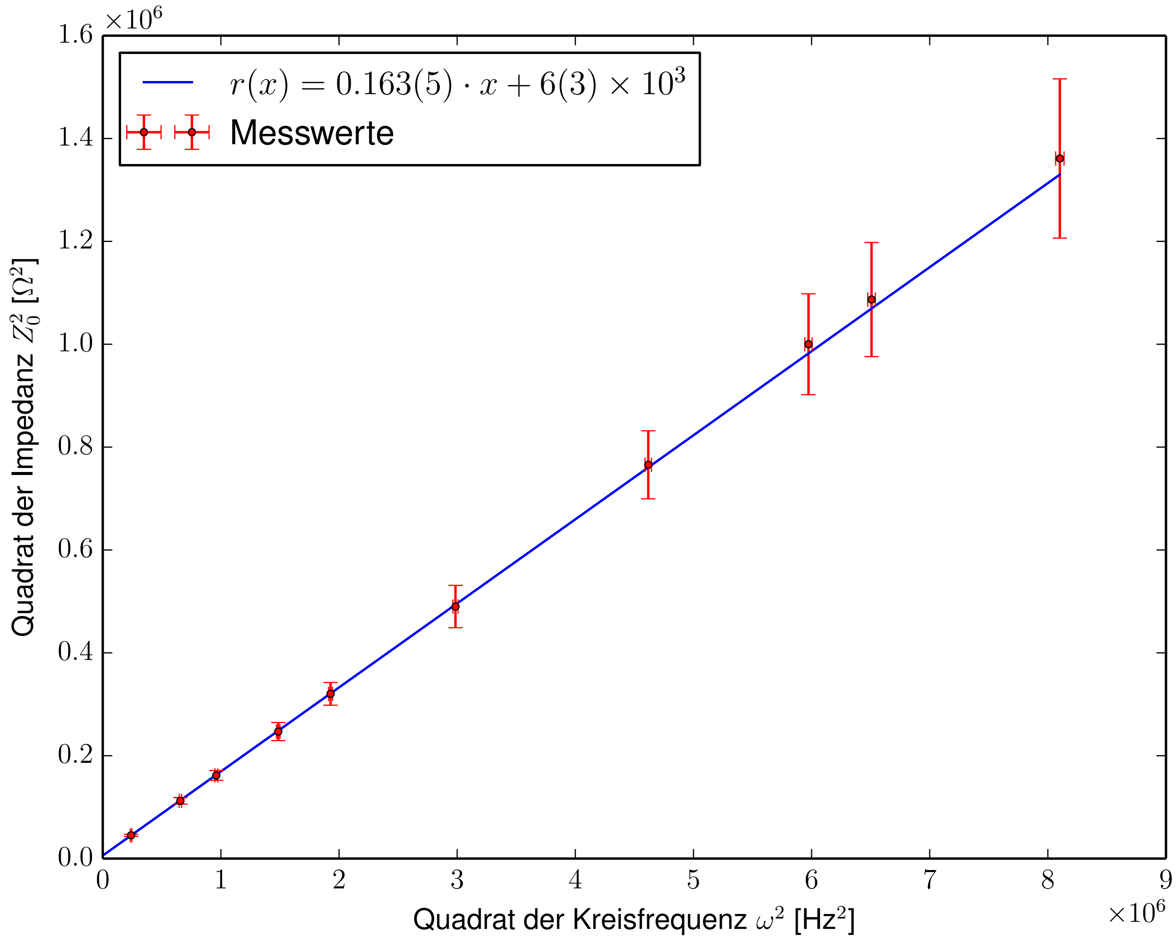

Abbildung 4: Auswertung des Serienkreises ohne Kondensator. Das Quadrat der Impedanz wird über dem Quadrat der Kreisfrequenz aufgetragen. Es ergibt sich wie erwartet ein linearer Zusammenhang. In rot sind die Messwerte samt Fehler, in blau ist die Regressionsgerade aufgetragen.

4.2 Bestimmung der Resonanzfrequenz und des Ohmschen Widerstands beim Serienresonanzkreis

Für diesen Auswertungsteil wird die gesamte Impedanz $Z_0 = \frac{U}{I}$ über der Kreisfrequenz $\omega = 2\pi \cdot f$ aufgetragen (Abbildung 5). Die Messfehler werden analog zum ersten Auswertungsteil gewählt. Mit der GAUSSschen Fehlerfortpflanzung berechnen sich die Fehler nach:

$$\sigma_\omega = 2 \cdot \pi \cdot \sigma_f \tag{4.10}$$

$$\sigma_{Z_0} = \frac{1}{I^2} \cdot \sqrt{I^2 \cdot \sigma_U^2 + U^2 \cdot \sigma_I^2}. \tag{4.11}$$

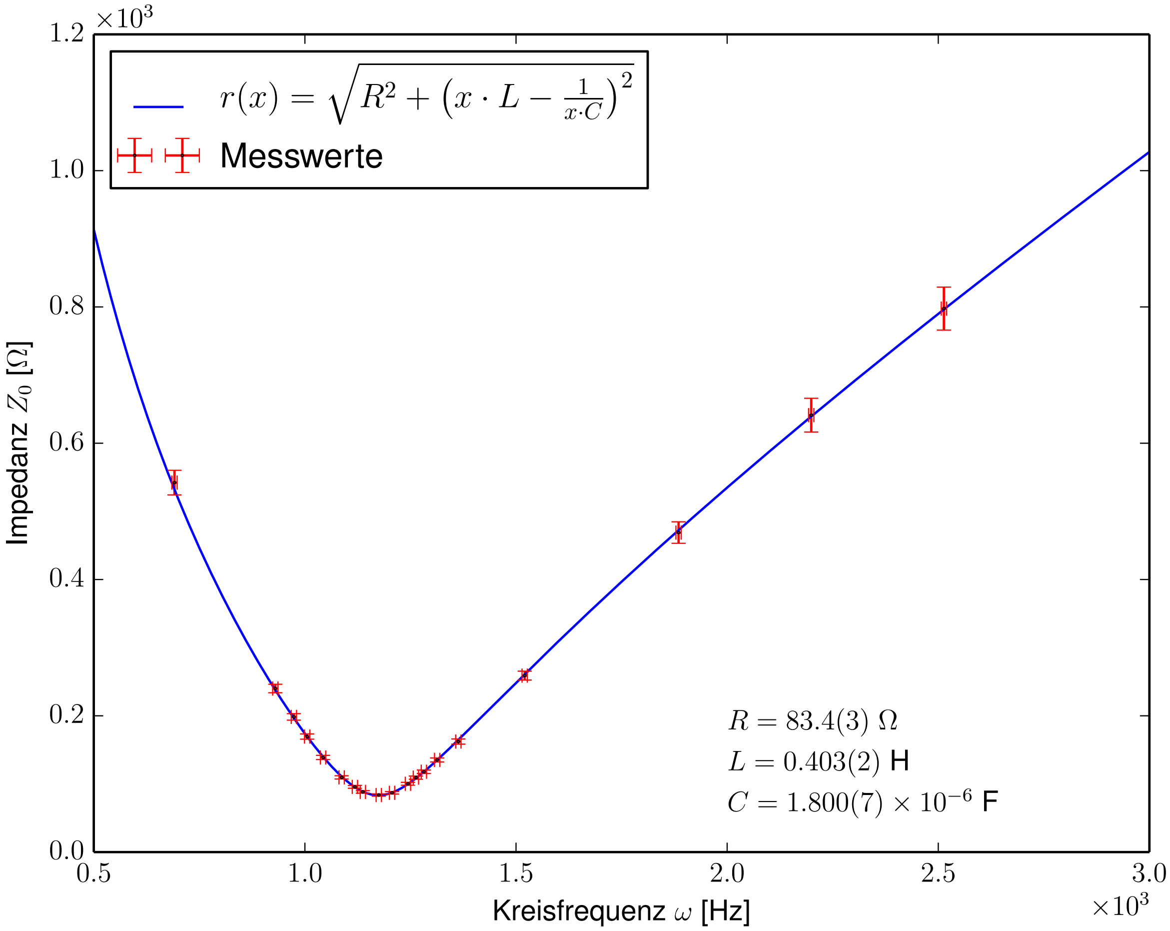

Abbildung 5: blablabla

Nach Gleichung (2.20) ist die Impedanz minimal, wenn $\omega L = \frac{1}{\omega C}$ gilt. Für die Resonanzfrequenz ergibt sich also

$$\omega_r = \sqrt{\frac{1}{LC}}. \tag{4.12}$$

Beim Resonanzminumum gilt ferner $Z_0 = R$. Mithilfe eines Python-Skriptes wird eine nichtlineare Regression nach Gleichung (2.20) durchgeführt und nach den Parametern R, L und C gefittet. Die Regression ergibt:

$$R_{\text{fit},1} = (83.4 \pm 0.03)\ \Omega \tag{4.13}$$
$$L_{\text{fit},1} = (0.403 \pm 0.003)\ \text{H} \tag{4.14}$$
$$C_{\text{fit},1} = (1.800 \pm 0.007)\ \mu\text{F} \tag{4.15}$$

Die Resonanzfrequenz wird nach Gleichung (4.12) berechnet. Man erhält

$$\omega_{r,1} = (1174 \pm 3)\ \mathrm{Hz} \tag{4.16}$$

$$\sigma_{\omega_{r,1}} = \frac{1}{2 \cdot C^{1.5} \cdot L^{1.5}} \cdot \sqrt{C^2 \cdot \sigma_L^2 + L^2 \cdot \sigma_C^2}. \tag{4.17}$$

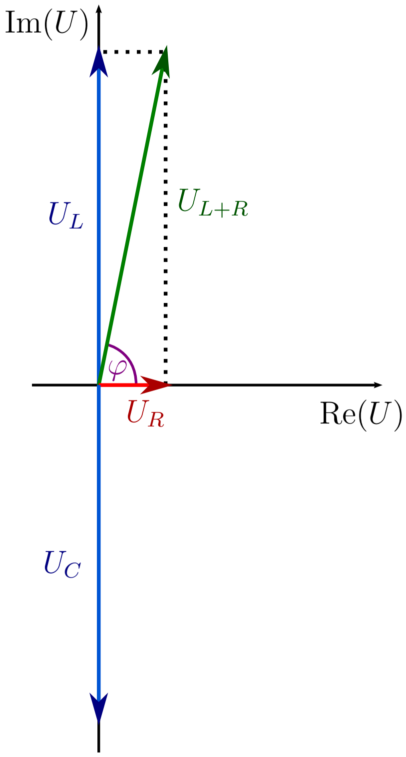

Abbildung 6: BLAH

5 Diskussion

Literatur

[1] W. Demtröder. *Experimentalphysik 2, Elektrizität und Optik*. 6. Aufl. Springer-Verlag, Berlin Heidelberg, 2012. ISBN: 978-3-642-29943-8.

[2] Wolfgang Nolting. *Grundkurs Theoretische Physik 3 - Elektrodynamik*. 2013.

[3] Jörn Große-Knetter Peter Schaaf. *Das Physikalische Praktikum, Handbuch 2014 für Studentinnen und Studenten der Physik*. Universitätsdrucke Göttigen, 2014. ISBN: 978-3-86395-157-3.