

Physikalisches A-Praktikum

Versuch 15

Wechselstromwiderstände

Praktikanten: Nils Kanning
Steffen Klemer

Durchgeführt am: 29.09.2006

Gruppe: 6

Assistent: Boris Landgraf

Inhaltsverzeichnis

1	Einleitung	4
2	Theorie	4
2.1	Spannung und Stromstärke in Wechselstromkreisen	4
2.2	Induktivitäten	5
2.3	Kapazitäten	5
2.4	Reihenschaltung von R, L und C	5
2.5	Parallelschaltung von R, L und C	7
2.6	Leistung im Wechselstromkreis	7
2.7	Bandpässe	8
3	Durchführung	9
4	Auswertung	10
4.1	Reihenschaltung aus L und R_{L+R}	10
4.2	Reihenschaltung aus L , C und R_{L+R}	10
4.2.1	Resonanzfrequenz ω_{Res} und gesamter ohmscher Widerstand R_{L+R}	10
4.2.2	Resonanzfrequenz ω_{Res} aus Phasenverschiebung	11
4.2.3	Ohmscher Widerstand der Spule R_L und Kapazität C des Kondensators	11
4.2.4	U_0 , U_C und U_{L+R} in Abhängigkeit von ω	11
4.2.5	Phasenverschiebung φ aus Zeigerdiagramm	12
4.3	Messungen an der Parallelschaltung	12
5	Einordnung der Ergebnisse	13
A	Tabellen und Grafiken	14

1 Einleitung

Wechselstrom gehört heute zu unserem täglichen Leben, der Umgang mit ihm scheint keine Überraschungen mehr bereitzuhalten. Schließlich müssen wir nur den Stecker in die Dose stecken und schon passiert etwas. Und doch bleiben einige Punkte, die einer näheren Betrachtung lohnen. Diese Phänomene wollen wir im Folgenden betrachten.

2 Theorie

2.1 Spannung und Stromstärke in Wechselstromkreisen

Betrachten wir eine Wechselspannung

$$U = U_0 \cos(\omega t) \quad (1)$$

mit ihrer Amplitude U_0 und Kreisfrequenz ω sowie einen Widerstand R . Da nicht durchgängig die volle Spannung anliegt, ist es sinnvoll einen *Effektivwert* zu definieren. Der Mittelwert scheidet aus, da er 0 ist.

Betrachten wir darum zuerst den Strom. Mit dem OHmschen Gesetz gilt

$$I = \frac{U}{R} = \frac{U_0}{R} \cos(\omega t) = I_0 \cos(\omega t).$$

Damit können wir die mittlere Leistung betrachten:

$$\begin{aligned} \overline{P} &= \frac{1}{T} \int_0^T U I dt \\ &= \frac{1}{T} \int_0^T U_0 I_0 \cos^2(\omega t) dt \\ &= \frac{1}{2} U_0 I_0 = \frac{1}{2} \frac{U_0^2}{R} \end{aligned}$$

Damit besitzt die Spannung mit einer Amplitude U_0 also eine $\frac{1}{\sqrt{2}}$ mal so große Wirkung, wie eine vergleichbare Gleichspannung. Gleiches gilt für die Stromstärke.

$$\begin{aligned} U_{eff} &= \frac{1}{\sqrt{2}} U_0 \\ I_{eff} &= \frac{1}{\sqrt{2}} I_0 \end{aligned}$$

Etwas allgemeiner definiert man für jede Art von Wechselspannung (nicht nur Sinusförmigen) die Effektivwerte durch die Wurzel des zeitlichen Mittelwertes des Quadrates der Größe. Beim einem brückengleichgerichteten Analogmessgerät entspricht dies gerade dem Zeigerausschlag. Digitale Multimeter benutzen zur Berechnung meist den $\sqrt{2}$ -Faktor, gehen also von sinusförmiger Wechselspannung aus.

Andere Spannungsformen sind die Dreiecksspannung mit

$$U_{effD} = \frac{1}{\sqrt{3}} U_0$$

sowie die (*ideale*) Rechteckspannung

$$U_{effR} = U_0$$

2.2 Induktivitäten

Für Induktivitäten gilt mit dem 2. KIRCHHOFFSchen sowie dem Induktionsgesetz

$$U_L = -U_{Ind} = L \frac{dI}{dt}.$$

Betrachten wir wieder die Wechselspannung aus Gl. 1, so ergibt sich

$$\begin{aligned} U_0 \cos(\omega t) &= L \frac{dI}{dt} \text{ und damit} \\ I &= U_0 \cdot \frac{1}{\omega L} \sin(\omega t). \end{aligned}$$

Der Strom läuft der Spannung demzufolge um 90° hinterher. Der Kehrwert des Bruchs entspricht dem Widerstand im Gleichstromkreis und wird als *induktiver Widerstand* X_L bezeichnet. Sind nun sowohl Ohmsche, als auch induktive Widerstände im Stromkreis, so ist es sinnig den Gesamtwiderstand Z als komplexe Zahl mit Betrag und sich ergebender Phasenverschiebung anzugeben. Der Realteil entspricht dabei dem Ohmschen, der Imaginärteil dem induktiven Widerstand.

2.3 Kapazitäten

Analog zu den Induktivitäten bekommen wir für Kondensatoren

$$\begin{aligned} Q &= CU = CU_0 \cos(\omega t) \text{ und nach Differentiation} \\ I &= -C\omega U_0 \sin(\omega t). \end{aligned}$$

An Kondensatoren eilt der Strom also um 90° vorraus. Der *kapazitive* Widerstand X_C wird analog zu eben definiert.

Zusammen erhalten wir mit der Konvention, dass die *Blindwiderstände* X_C und X_L dem Imaginärteil des Widerstandes entsprechen:

$$\begin{aligned} X_C &= \frac{1}{iC\omega} \\ X_L &= iL\omega \\ X &= X_L + X_C = i \left(L\omega - \frac{1}{\omega C} \right) \end{aligned}$$

2.4 Reihenschaltung von R, L und C

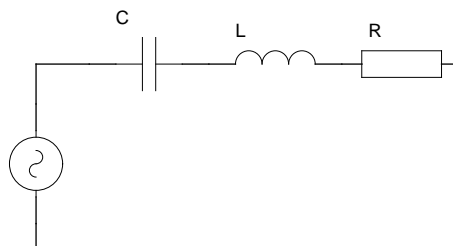


Abbildung 1: Reihenschaltung eines Kondensators, einer Spule sowie eines Widerstandes

Nun betrachten wir eine Reihenschaltung von idealer Spule (rein induktiver Widerstand), Kondensator und Ohmschem Widerstand. Der Gesamtwiderstand, oder *Impedanz*, Z berechnet sich zu

$$Z = R + X = \underbrace{R}_{\text{Wirkwiderstand}} + i \underbrace{\left(L\omega - \frac{1}{\omega C}\right)}_{\text{Blindwiderstand}}.$$

Da Z eine komplexe Zahl ist, können ihr Betrag und ihre Phase leicht mittels

$$\begin{aligned} |Z| &= \sqrt{R^2 + X^2} \\ \tan \varphi &= \frac{X}{|R|} = \frac{L\omega - \frac{1}{\omega C}}{R} \end{aligned} \quad (2)$$

berechnet werden.

Der Betrag der Impedanz ist offensichtlich Frequenzabhängig und erreicht sein Minimum bei $|X_L| = |X_C|$, also $L\omega = 1/C\omega$ und damit

$$\begin{aligned} \omega &= \frac{1}{\sqrt{LC}} \text{ bzw.} \\ f &= \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}}. \end{aligned} \quad (3)$$

Diese Frequenz wird auch *Resonanzfrequenz* genannt, da sie analog auch aus einer Betrachtung der Schaltung als Schwingkreis hervorgeht. Die qualitative Abhängigkeit des Wechselstromwiderstandes ist in Abb. 2 aufgetragen.

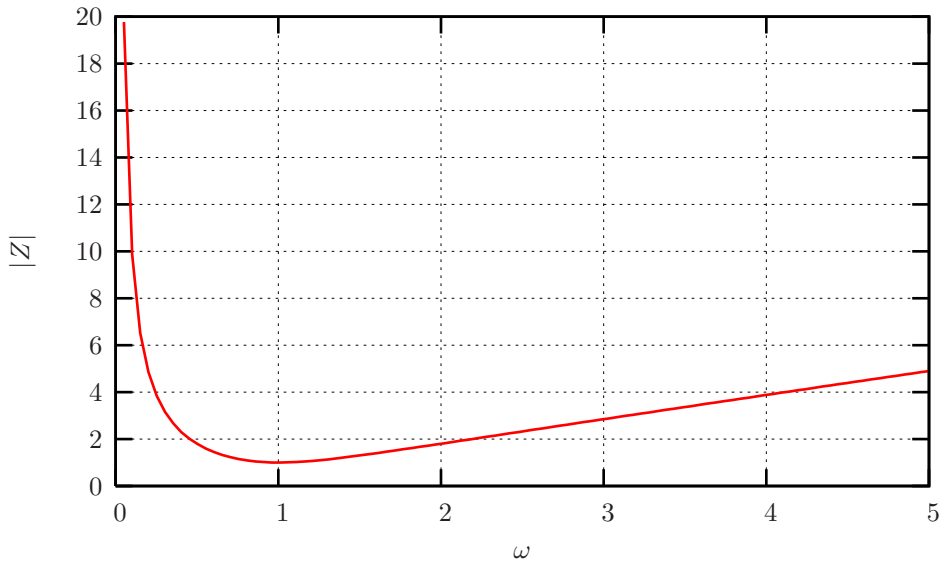


Abbildung 2: Der Betrag der Impedanz im Reihenschwingkreis in Abhängigkeit von der Frequenz

Der Strom kann, wie im Gleichstromkreis über

$$I = \frac{U}{Z} = \frac{U_0}{|Z|} \cos(\omega t - \varphi) = I_0 \cos(\omega t - \varphi)$$

berechnet werden. Auch hier wird wieder die Phasenverschiebung deutlich. Eine Möglichkeit dies zu visualisieren, bilden die Zeigerdiagramme, bei denen auf der Abszisse der Realteil und auf der Ordinate der Imaginärteil aufgetragen werden. Die Länge des sich ergebenden Vektors entspricht dem Betrag der Impedanz. Der Winkel zwischen Abszisse und Vektor entspricht der Phasenverschiebung.

2.5 Parallelschaltung von R, L und C

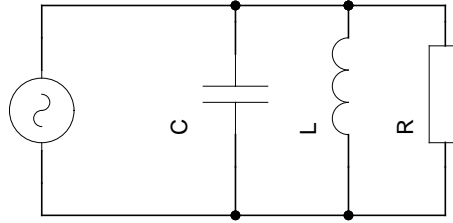


Abbildung 3: Parallelschaltung eines Kondensators, einer Spule sowie eines Widerstandes

Ein etwas anders Bild ergibt sich bei einer Parallelschaltung. Hier berechnet sich der Gesamtwiderstand über die Reziproken Einzelwiderstände:

$$\frac{1}{Z} = \frac{1}{R} + i \left(C\omega - \frac{1}{L\omega} \right).$$

Somit ist der Betrag von Z :

$$|Z| = \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{R^2} + \left(C\omega - \frac{1}{L\omega} \right)^2}}$$

und seine Phasenverschiebung

$$\tan \varphi = R \left(\frac{1}{L\omega} - C\omega \right).$$

Die Resonanzfrequenz liegt bei

$$f = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}},$$

wobei zu beachten ist, dass hier der Resonanzfall einem *maximalen* Widerstand entspricht. Dies ist in Abb. 4 zu sehen.

2.6 Leistung im Wechselstromkreis

Wie bereits weiter oben anklang, ist bei der Betrachtung von Wechselstromkreisen die, über eine Periode gemittelte, Leistung interessant. Liegt nun ein Fall mit Phasenverschiebung vor, so ergibt sich

$$\begin{aligned} \bar{P} &= \frac{1}{T} \int_0^T U I dt \\ &= \frac{1}{T} \int_0^T U_0 I_0 \cos(\omega t) \cos(\omega t - \varphi) dt \\ &= \frac{U_0 I_0}{2} \cos \varphi \\ &= U_{eff} I_{eff} \cos \varphi \end{aligned}$$

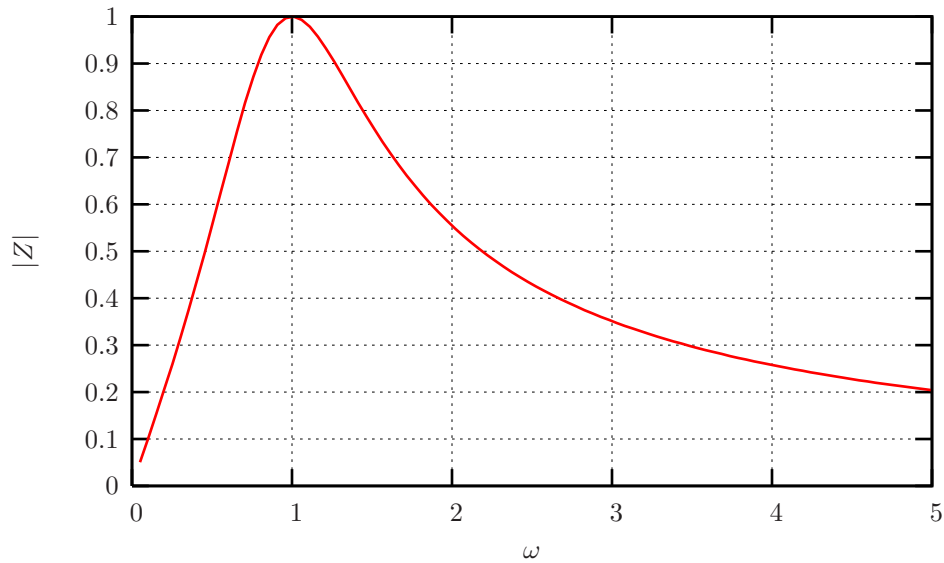


Abbildung 4: Der Betrag der Impedanz im Parallelschwingkreis in Abhängigkeit von der Frequenz

Es ist gut erkennbar, dass die Phasenverschiebung einen großen Einfluss auf die *Wirkleistung* P hat. $\cos \varphi$ wird deshalb auch *Leistungsfaktor* genannt. Das Produkt der Effektivwerte bezeichnet man in diesem Zusammenhang als *Scheinleistung* S , den Wert $\sqrt{S^2 - P^2}$ als *Blindleistung*, da diese keine Arbeit verrichtet, sondern nur zwischen den Bauteilen pendelt und damit die Leitungen erwärmt.

2.7 Bandpässe

Mit den frequenzabhängigen Widerständen können wir nun gezielt Frequenzen ausfiltern. Die einfachste Variante eines *Tiefpasses*, der nur Frequenzen unter einer bestimmten Frequenz durchlässt, zeigt Abb. 5. Die Wirkungsweise ist recht einfach, da die Spule ihren Widerstand mit zunehmender Frequenz vergrößert, fällt über dem Ohmschen Widerstand eine geringere Spannung und damit ein schwächeres Signal ab. Ein *Hochpass* würde einfach beide Bauelemente tauschen.

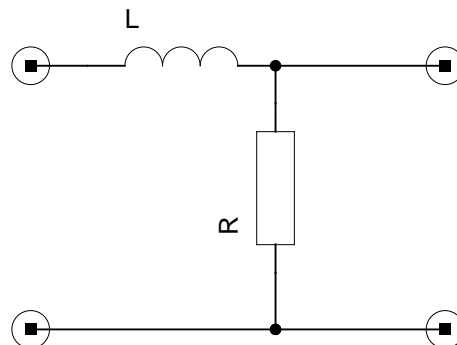


Abbildung 5: Schema eines sehr einfachen Tiefpasses

Völlig analog funktioniert dies auch mit einem Kondensator anstatt der Spule¹. Schärfer trennende Filter können mit Kombinationen aus Kondensator und Spule gebaut werden, wie beispielsweise der Tiefpass in Abb. 6.

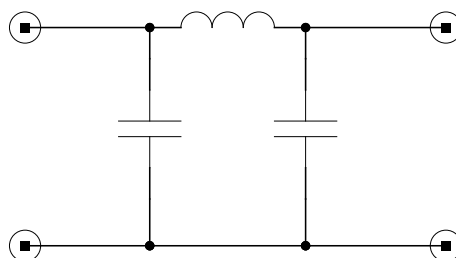


Abbildung 6: Schema eines schärferen Tiefpasses

3 Durchführung

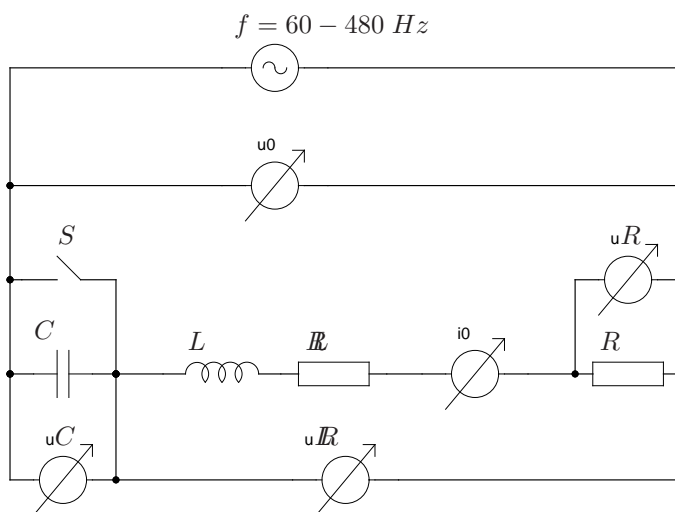


Abbildung 7: Schaltplan der Reihenschaltung

Zunächst wird die in Abb. 7 dargestellte Schaltung aufgebaut. Der Verlauf der Gesamtspannung U_0 und der Spannung U_R wird mit einem Oszilloskop gemessen. Da R ein ohmscher Widerstand ist, ist U_R proportional, d. h. insbesondere in Phase, zum Gesamtstrom I_0 .

Für die erste Messung wird der Kondensator C mit dem Schalter S überbrückt. Dann wird für verschiedene Frequenzen f der Strom I_0 mit einem Ampèremeter und die Spannung U_0 mit einem Voltmeter gemessen. Außerdem wird mit Hilfe des Oszilloskops die Phasenverschiebung der beiden Größen bestimmt.

In einer zweiten Messung ist der Schalter S geöffnet. Nun werden die Spannungen U_0 , U_C , U_{L+R} , der Strom I_0 und erneut die Phasenverschiebung zwischen U_0 und I_0 für verschiedene Frequenzen gemessen. Dabei werden viele Messungen im Bereich der sich abzeichnenden Resonanzfrequenz f_{Res} gemacht.

¹Hierbei müssen natürlich auch die Plätze getauscht werden

Nun wird aus der bereits verwendeten realen Spule und dem Kondensator eine Parallelschaltung aufgebaut. In dieser wird die Gesamtspannung U_0 über ein Voltmeter und der Gesamtstrom I_0 über ein Ampèremeter bestimmt.

Abschließend werden noch Daten zu den verwendeten Komponenten benötigt. Der Innenwiderstand des Ampèremeters, sowie der Wert des einzelnen ohmschen Widerstands R werden notiert. Der ohmsche Widerstand der Spule R_L wird in einer Gleichstromschaltung gemessen und die gegebenen Spulendaten werden übernommen. Schließlich wird die Kapazität des Kondensators C mit einem geeigneten Multimeter bestimmt.

4 Auswertung

4.1 Reihenschaltung aus L und R_{L+R}

Zur Bestimmung der Induktivität L der Spule und des gesamten ohmschen Widerstands R_{L+R} verwenden wir die Messungen am ersten Versuchsaufbau. Theoretisch beträgt die Gesamtimpedanz Z_0 der Schaltung:

$$Z_0 = R_{L+R} + i\omega L$$

Somit folgt:

$$Z_0^2 = \omega^2 L^2 + R_{L+R}^2 \quad (4)$$

Die Größe Z_0^2 können wir nun durch unsere Messwerte berechnen:

$$Z_0^2 = \frac{U_0^2}{I_0^2}$$

In Abb. 8 haben wir Z_0^2 gegen ω^2 aufgetragen. Dabei gilt $\omega = 2\pi f$. Wir nähern den sich ergebenden Graphen mittels linearer Regression durch eine Gerade der Form $m\omega^2 + b$. Laut Gl. 4 können wir so die beiden gesuchten Größen bestimmen:

$$\begin{aligned} L &= \sqrt{m} = \sqrt{0.1492(6)H^2} = 0.3860(8)H \\ R_{L+R} &= \sqrt{b} = \sqrt{7614(80)\Omega^2} = 87.3(5)\Omega \end{aligned} \quad (5)$$

Bei der Regression berücksichtigen wir den Fehler von Z_0 . In diesen gehen die Ungenauigkeiten der Messungen von U_0 und I_0 ein.

4.2 Reihenschaltung aus L , C und R_{L+R}

4.2.1 Resonanzfrequenz ω_{Res} und gesamter ohmscher Widerstand R_{L+R}

Im Resonanzfall gilt laut Gl. 3 die Beziehung $L\omega = 1/\omega C$ damit folgt aus Gl. 2, dass die Impedanz nicht phasenverschoben ist und es gilt:

$$Z_0 = R_{L+R}$$

Somit tragen wir die Impedanz $Z_0 = U_0/I_0$ gegen die Frequenz ω im Abb. 9 auf und lesen aus dem Minimum des sich ergebenden Graphen die gesuchten Werte ab. Dies ergibt:

$$\begin{aligned} \omega_{Res} &= 1262.9 \text{ s}^{-1} \\ R_{L+R} &= 88(2) \Omega \end{aligned}$$

4.2.2 Resonanzfrequenz ω_{Res} aus Phasenverschiebung

Wie bereits oben erwähnt liegt im Resonanzfall keine Phasenverschiebung der Impedanz vor. Allgemein entspricht die Phasenverschiebung zwischen der Impedanz Z_0 und dem Strom I_0 jener zwischen U_0 und I_0 . Da wir die Phasenverschiebung φ am Oszilloskop als Zeit t ablesen muss diese umgerechnet werden:

$$\varphi = t \cdot 2\pi f$$

In Abb. 10 wurde nun die Phasenverschiebung gegen die Frequenz ω aufgetragen. Die Resonanzfrequenz ω_{Res} haben wir als Nulldurchgang des sich ergebenden Graphen abgelesen. Wir erhalten so:

$$\omega_{Res} = 1262.9 s^{-1}$$

4.2.3 Ohmscher Widerstand der Spule R_L und Kapazität C des Kondensators

Bis hierhin wurden die Größen ω_{Res} und R_{L+R} auf zwei verschiedene Arten bestimmt. Wir bilden jeweils den gewichteten Mittelwert:

$$\begin{aligned}\omega_{Res} &= 1262.9 s^{-1} \\ R_{L+R} &= 87.3(5) \Omega\end{aligned}$$

Zusammen mit dem bekannten Widerstand $R = 10.0(3) \Omega$ und dem des Ampèremeters $R_{Amp} = 10,4(3) \Omega$ können wir den ohmschen Widerstand der Spule R_L berechnen:

$$R_L = R_{L+R} - R - R_{Amp}$$

Dies ergibt unter Berücksichtigung der Fehler der eingehenden Größen:

$$R_L = 66,9(3) \Omega$$

Dies entspricht praktisch dem gegebenen Wert von 66Ω .

Zusammen mit der berechneten Induktivität der Spule L aus Gl. 5 und der theoretischen Überlegung in Gl. 3 bestimmen wir mit Hilfe von ω_{Res} die Kapazität C des Kondensators:

$$C = \frac{1}{L\omega_{Res}^2}$$

Dies ergibt unter Berücksichtigung der Fehler von L und ω_{Res} den Zahlenwert:

$$C = 1.624(4) \mu F$$

Das liegt auch sehr nahe an dem gemessenen Wert $1.65(1)\mu F$

4.2.4 U_0 , U_C und U_{L+R} in Abhängigkeit von ω

In Abb. 11 wurden die Spannungen U_0 , U_C und U_{L+R} in einem Diagramm gegen die Frequenz ω aufgetragen. Es zeigt sich, dass die Gesamtspannung konstant bleibt. Die Teilspannungen können jedoch durchaus weit größere Werte als die Gesamtspannung annehmen.

4.2.5 Phasenverschiebung φ aus Zeigerdiagramm

In Abb. 12 wurden die Spannungen U_0 , U_C und U_{L+R} bei der Resonanzfrequenz ω_{Res} in ein Zeigerdiagramm eingetragen.

U_C wird, wie im Theorieteil diskutiert, in Richtung der negativen imaginären Achse notiert.

Auf Grund des Resonanzfalls kompensieren sich die um $\pm\pi/2$ gegenüber dem Strom verschobenen Spannungen über L und C . Somit trägt zur Gesamtspannung U_0 nur die Spannung über dem gesamten ohmschen Widerstand der Schaltung bei. Da die Spannung über diesem stets in Phase zum Strom ist, gilt dies auch für U_0 . Damit tragen wir U_0 in Richtung der positiven reellen Achse ein.

Die Spannung U_{L+R} fällt über dem gesamten ohmschen Widerstand und der Induktivität ab. Damit ist der Realteil dieser Größe identisch mit U_0 . Der Imaginärteil sollte auf Grund des Resonanzfalls der negative Imaginärteil von U_C sein. Somit ist auch der Winkel mit dem wir U_{L+R} in das Zeigerdiagramm eintragen festgelegt.

Wir berechnen anhand des Diagramms nun die Phasenverschiebung φ zwischen $I_0 \propto U_0$ und U_{L+R} :

$$\cos \varphi = \frac{U_0}{U_{L+R}}$$

Es folgt:

$$\varphi = \arccos \frac{U_0}{U_{L+R}}$$

Mit den Fehlern von U_0 und U_{L+R} erhalten wir den Wert:

$$\varphi = 80,2(4)^\circ$$

Diesen Wert überprüfen wir nun durch eine theoretische Betrachtung. Auf Grund des Diagramms sollte ebenfalls bei einem ohmschen Gesamtwiderstand R_{L+R} gelten:

$$\tan \varphi = \frac{\omega_{Res} L}{R_{L+R}}$$

Unter Berücksichtigung der Fehler aller drei eingehenden Größen erhalten wir so:

$$\varphi = 79,8(4)$$

4.3 Messungen an der Parallelschaltung

Wie schon zuvor berechnen wir auch hier für jede gemessene Frequenz ω die Impedanz $Z_0 = U_0/I_0$. Die sich ergebenden Werte sind in Abb. 13 gegen die Frequenz ω aufgetragen.

Dabei ist der theoretische Verlauf des Betrags der Impedanz gegeben durch:

$$|Z| = \sqrt{\frac{R_L^2 + (\omega L)^2}{(\omega C R_L)^2 + (1 - \omega^2 LC)^2}}$$

5 Einordnung der Ergebnisse

Praktisch alle erhaltenen Werte bestätigen die Theorie und liegen im Rahmen der Fehlerintervalle auch bei den vorhergesagten Größen. So haben beide Resonanzfrequenzmessungen den gleichen Wert ergeben, die berechneten Widerstände sind deckungsgleich mit den gemessenen und sogar die Kapazität konnte auf zwei Arten mit dem gleichen Ergebnis ermittelt werden. Selbiges gilt für die Phasenverschiebung im Resonanzfall.

Die sehr gute Übereinstimmung zwischen Theorie und Messung wird zudem durch den Verlauf der theoretischen Kurven in den Abbildungen deutlich.

Alles in allem ist dies ein schöner, weil erfolgreicher, Abschluss des zweiten Praktikumsabschnittes.

A Tabellen und Grafiken

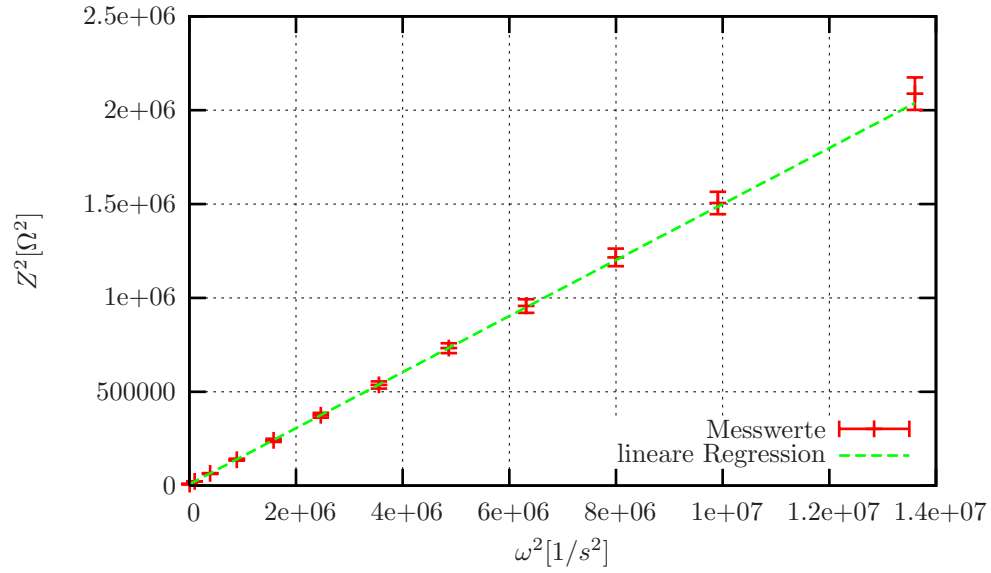


Abbildung 8: Plot zur Bestimmung der Induktivität und des Gleichstromwiderstandes der Spule

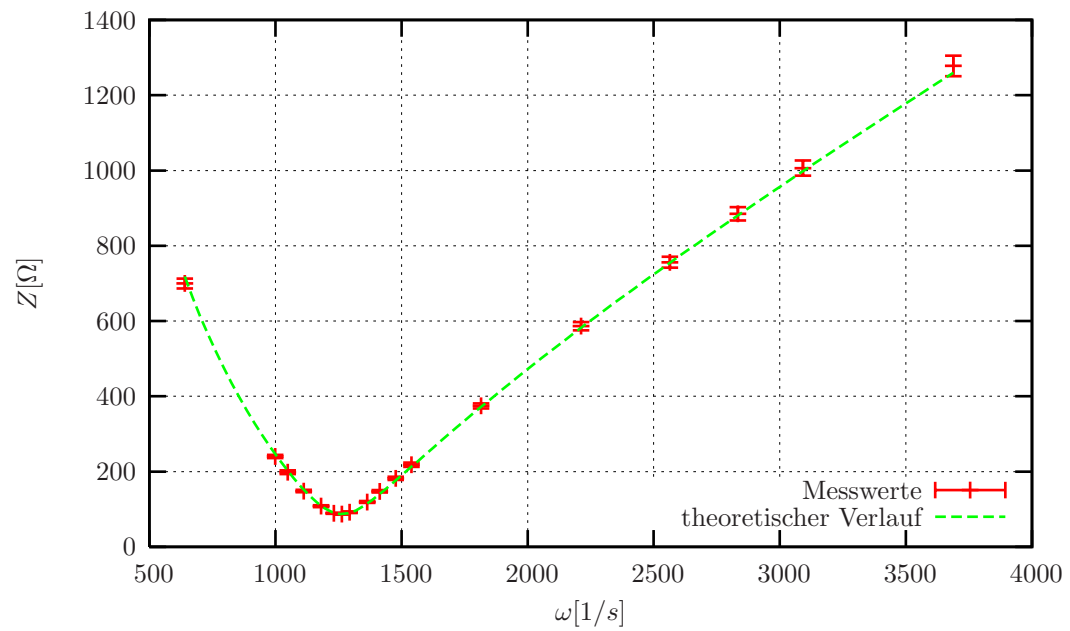


Abbildung 9: Plot zur Bestimmung des Resonanzwiderstandes

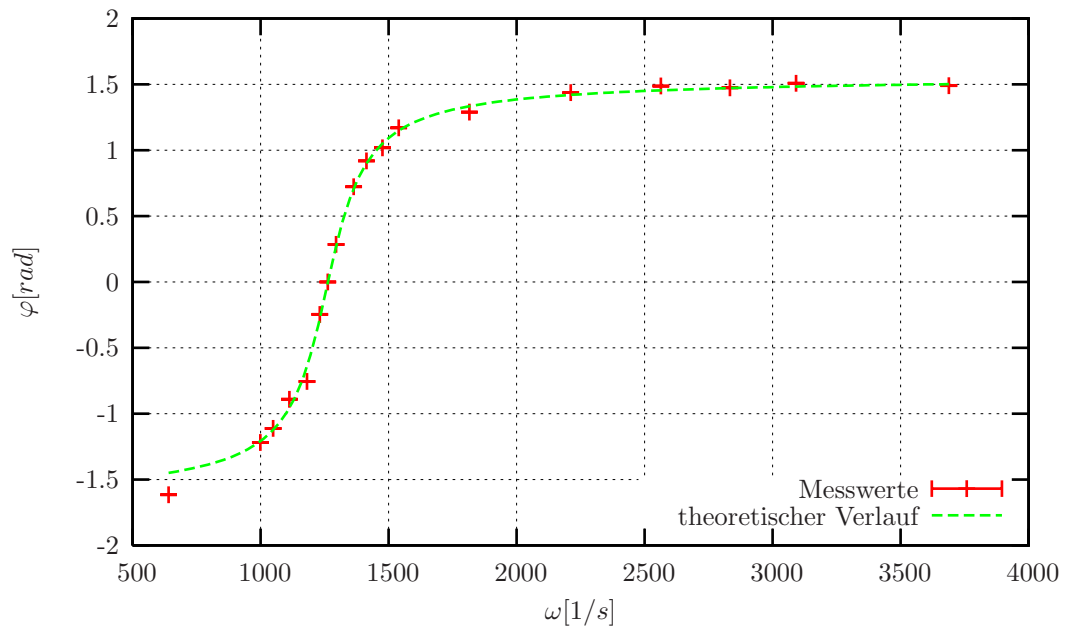


Abbildung 10: Phasenverschiebung gegen Frequenz

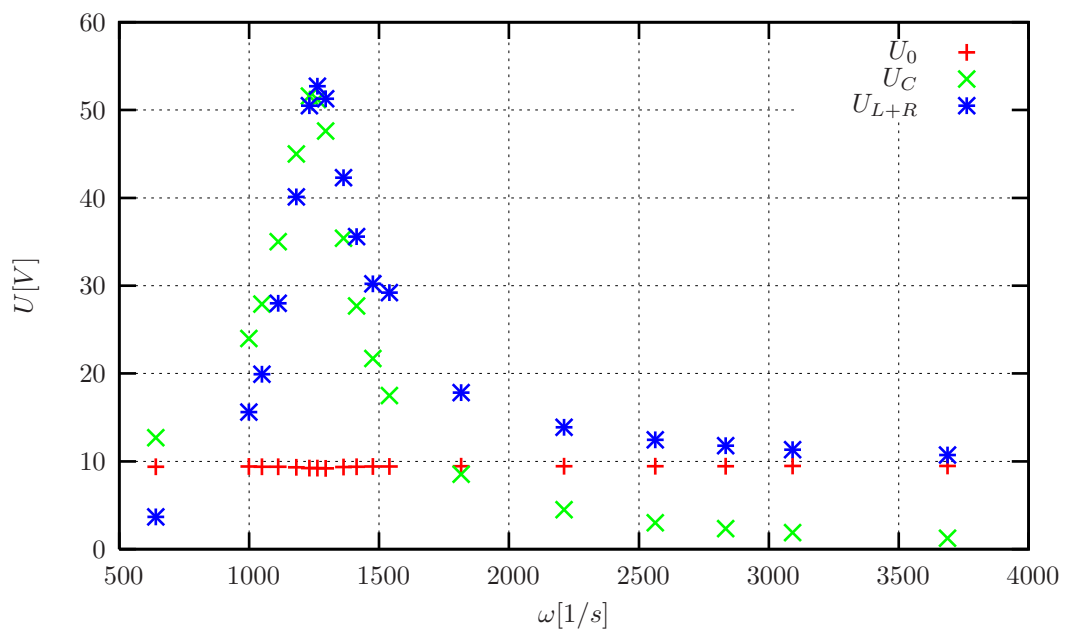


Abbildung 11: Die verschiedenen Spannungen bei den gemessenen Frequenzen

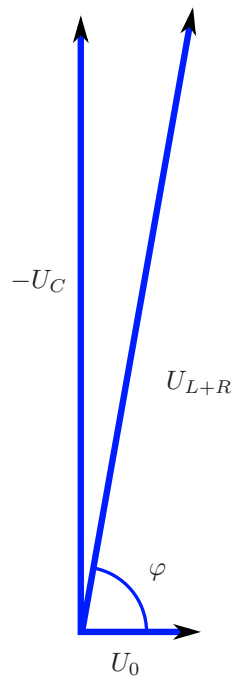


Abbildung 12: Das sich ergebende Zeigerdiagramm

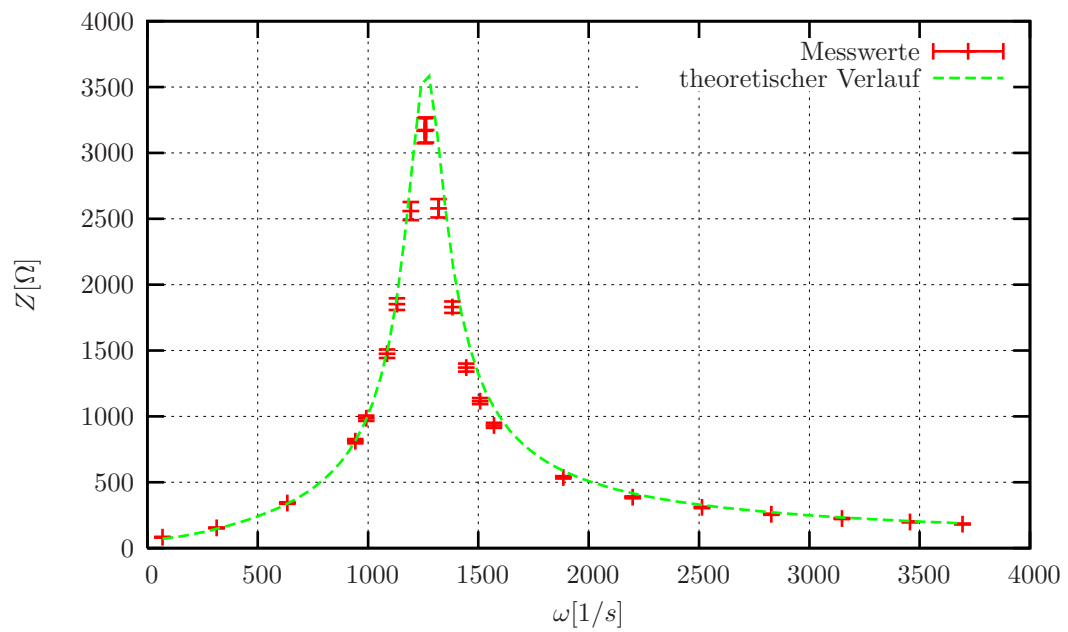


Abbildung 13: Impedanz aufgetragen gegen die Frequenz im Parallelkreis