

**Master-Forschungspraktikum  
Universität Göttingen – Fakultät für Physik**

---

**Ausarbeitung  
zum Versuch FM.TES**

**Tunneleffekt bei Supraleitern**

Name: Eric Bertok  
Email: eric.bertok@stud.uni-goettingen.de  
Datum Versuchsdurchführung: 25. Februar 2017  
Name Betreuer(in): Christoph Meyer  
Kopie der testierten Ausarbeitung gewünscht: ☐ ja ☒ nein  
Unterschrift:

**Abgabe**

Datum: Unterschrift Betreuer(in):

**Testat**

Datum: Name Prüfer(in):  
Punktezahl: Unterschrift:  
Note:



# Inhaltsverzeichnis

<b>1</b>	<b>Einleitung</b>	<b>1</b>
<b>2</b>	<b>Theorie</b>	<b>1</b>
2.1	Grundlagen: Zustandsdichte, Fermiverteilung, Besetzungsdichte . . . . .	1
2.2	Tunneleffekt . . . . .	1
2.3	mikroskopische Theorie der Supraleitung: Cooper- Paare . . . . .	2
2.4	Grundzustand und Quasiteilchenanregungen . . . . .	2
2.5	Tunnelkennlinien von Normalleitern und Supraleitern . . . . .	3
<b>3</b>	<b>Durchführung</b>	<b>3</b>
3.1	Herstellung der Probe . . . . .	3
3.2	Einbau der Probe und Messung des Tunnelstroms . . . . .	5
<b>4</b>	<b>Auswertung</b>	<b>6</b>
4.1	NL/NL-Kennlinie bei Raumtemperatur . . . . .	6
4.2	SL/NL-Kennlinien . . . . .	6
4.3	Vergleich mit der BCS-Theorie . . . . .	9
<b>5</b>	<b>Diskussion</b>	<b>11</b>
5.1	NL/NL - Messung . . . . .	11
5.2	SL/NL - Messung . . . . .	11

## 1 Einleitung

Supraleiter sind elektrische Leiter, die unterhalb einer bestimmten Temperatur, genannt kritische Temperatur, einen Elektrischen Widerstand von Null haben. Dies ist von immenser Bedeutung, zum Beispiel für die Herstellung von starken Magnetfeldern und verlustfreien Stromleitungen. Aber auch für Grundlagenforschung sind Supraleiter relevant. Sie sind das Beispiel eines sogenannten makroskopischen Quanteneffektes, bei der alle Elektronen sich im exakt gleichen Quantenzustand befinden. Eine Untersuchung von den Eigenschaften der Supraleiter erlaubt also Einblicke in die Quantentheorie, insbesondere die Vielteilchendynamik von Elektronen und die Gitterdynamik der Festkörper. Eine besonders geeignete Herangehensweise für die Untersuchung von Supraleitern ist die Ausnutzung des Tunneleffektes, ein weiterer quantenmechanischer Effekt. Durch ihn lassen sich direkt eine Vielzahl an qualitativen und quantitativen Eigenschaften von Supraleitern erschließen, insbesondere die Zustandsdichte (siehe Unten). In diesem Versuch soll zunächst ein Aluminium-Aluminiumoxid-Blei Tunnelkontakt hergestellt und anschließend auf Supraleitung untersucht werden. Dabei werden außerdem eine grundlegende experimentelle Methode der Tieftemperaturphysik, nämlich das Abkühlen der Messsonde auf wenige Grad Kelvin geübt. Die gemessenen Daten werden anschließend auf qualitative und quantitative Art und Weise mit Literaturwerten und der einfachsten Theorie für Supraleiter, der BCS-Theorie, verglichen.

## 2 Theorie

### 2.1 Grundlagen: Zustandsdichte, Fermiverteilung, Besetzungsdichte

Die Zustandsdichte  $D(E)$  gibt die Anzahl der erlaubten Mikrozustände pro Energieintervall  $dE$  an. Sie ist für kontinuierliche Energien allgemein definiert durch  $D(E) := \int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} \delta(E - E(\vec{k}))$  [2], wobei  $\vec{k}$  die Wellenzahl und  $d$  die Dimension (für unseren Fall 3) ist.  $E(\vec{k})$  ist die Dispersionsrelation der Teilchen. Für freie Elektronen ergibt sich [S. 267][2]:

$$D_N(E_{\vec{k}}) = \frac{(2m^*)^{\frac{3}{2}}}{2\pi^2 \hbar^3} \sqrt{E}, \quad (2.1)$$

wobei  $m^*$  die sogenannte effektive Masse der Elektronen ist. Diese ist für freie Elektronen gleich ihrer tatsächlichen Masse, berücksichtigt bei einem Festkörper aber zusätzlich den Einfluss des Kristallpotentials.

Die Fermi-Dirac Verteilung gibt die mittlere thermische Energiebesetzung von Spin-1/2 Teilchen in Abhängigkeit der Temperatur  $T$  und des chemischen Potentials  $\mu$  an. Sie lautet  $f_T(E) = \frac{1}{\exp \beta(E - \mu) + 1}$ , wobei  $\beta = \frac{1}{k_B T}$  der Boltzmann-Faktor ist. Für  $T = 0$  ist sie eine Stufenfunktion: Unterhalb der sogenannten Fermienergie  $E_F = \mu$  sind alle Zustände mit Wahrscheinlichkeit 1 besetzt, während alle oberhalb von  $E_F$  unbesetzt sind. Dies bezeichnet man als "Fermikante".

Die Besetzungsdichte, also die Dichte der tatsächlich besetzten Zustände pro Energieintervall erhält man als Produkt aus Zustandsdichte und Fermiverteilung:  $n(E) = D(E)f_T(E)$ . Hierdurch erreicht man eine Trennung der systemabhängigen Größen in  $D(E)$  und der systemunabhängigen Thermodynamik in  $f_T(E)$ .

### 2.2 Tunneleffekt

Der Tunneleffekt ist ein quantenmechanischer Effekt, bei dem ein Teilchen eine Potentialbarriere endlicher Höhe und Breite durchqueren kann, obwohl sie höher als die Energie des Teilchens ist. Dies kommt dadurch zustande, dass die Wellenfunktion jenseits der Barriere verschieden von Null ist. Durch Lösen der Schrödingergleichung mit einer Kastenbarriere erhält man, dass die Tunnelwahrscheinlichkeit exponentiell mit der Breite  $d$  der Barriere abfällt: [6]

$$A_{\text{tunnel}} \propto e^{-\sqrt{(2m/\hbar^2)(V_0 - E)}d}. \quad (2.2)$$

Jenseits der Barriere das Potential wieder Null. Somit ist die Wellenlänge und damit die Energie des getunnelten Teilchens unverändert. Lediglich die Wahrscheinlichkeit des Tunnelns nimmt ab. In unserem Versuch, in dem ein Aluminium- Aluminiumoxid- Blei- Kontakt verwendet wird, ist die Potentialbreite durch die Dicke der Aluminiumoxidschicht gegeben. Die Höhe des Potentialwalls ist gegeben durch die Differenz der Fermienergien der beiden Leiter Al und Pb und der des Aluminiumoxids. Weiterhin ist zu beachten, dass ein Teilchen nur dann durch die Barriere tunneln kann, wenn es auf der anderen Seite freie Zustände vorfindet. Ist dies nicht der Fall, kommt es zur exponentiellen Abnahme der Amplitude. Auf diese Weise kann man Schlüsse über die Zustandsdichte der betrachteten Materialien ziehen, was in diesem Versuch benutzt wird, um die Energielücke von Supraleitern zu vermessen.

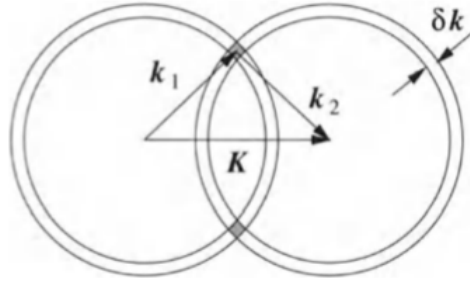


Abb. 1: eq: Impulsschalen im k-Raum. Impulserhaltung wird erfüllt für den Überlapp der beiden Schalen [5, S. 309].

## 2.3 mikroskopische Theorie der Supraleitung: Cooper- Paare

Die BCS Theorie, welche 1957 von Badeen, Cooper und Schrieffer entwickelt wurde, war die erste erfolgreiche mikroskopische Theorie der Supraleitung [3, Kap. 2]. Die positiven Atomrümpfe werden durch die negativ geladenen Elektronen polarisiert. Da die Atomrümpfe vergleichsweise schwer sind, haben sie eine geringe Schwingungsfrequenz. Dadurch kommt es zu einer retardierten Polarisierung. Ein anderes Elektron spürt diese Polarisierung also, wenn das erste bereits eine große Distanz zurückgelegt hat. Aufgrund dessen kann man die Coulombabstoßung zwischen diesen beiden Elektronen vernachlässigen. Mathematisch lässt sich diese anziehende Wechselwirkung zwischen zwei Elektronen als ein Austausch eines virtuellen Phonons beschreiben. Für eine detaillierte Ausarbeitung im Formalismus der zweiten Quantisierung siehe z. B. [5, Kap. 10.4]. Wenn  $\vec{q}$  der Impuls des Phonons und  $\vec{k}_1, \vec{k}_2$  die der beiden Elektronen sind, so gilt nach dem Austausch des Phonons [5, S. 308]

$$\vec{k}'_1 = \vec{k}_1 + \vec{q}, \quad \vec{k}'_2 = \vec{k}_2 - \vec{q}, \quad (2.3)$$

der Gesamtimpuls  $\vec{K} = \vec{k}_1 + \vec{k}_2$  bleibt also erhalten. Aufgrund der Fermiverteilung sind für die Elektronen nur Energien oberhalb der Fermikante zugänglich. Approximiert man die Phononenfrequenz mit der Debye Frequenz  $\omega_D$  [2, S 211 ff.], so liegen die freien Zustände innerhalb der Energieschale  $[E_F, E_F + \hbar\omega_D]$  oder äquivalent im k-Raum innerhalb der Schale mit Dicke  $\frac{m\omega_D}{\hbar k_F}$ , wobei  $k_F$  der Fermiwellenvektor ist. Für beide Elektronen sind diese Schalen in Abb. 1 zu sehen. Impulserhaltung ist erfüllt für alle Vektoren im Überlapp beider Schalen. Dieser ist maximal für  $\vec{k}_1 = -\vec{k}_2$ . Das Fermi Prinzip verlangt außerdem, dass beide Elektronen entgegengesetzten Spin besitzen. Das Paar  $\vec{k}, \uparrow, -\vec{k}, \downarrow$  bezeichnet man als Cooper-Paar (CP). Cooper-Paare sind effektive Bosonen. Durch die Attraktion von Elektronenpaaren wird die Gesamtenergie verringert. Es kommt zu einer makroskopischen Besetzung, bei der im Grundzustand alle Cooper-Paare im exakt gleichen Quantenzustand sind [3, Kap. 2.2]. Die Gesamtheit aller Cooper-Paare wird deswegen als eine makroskopische Wellenfunktion beschrieben.

## 2.4 Grundzustand und Quasiteilchenanregungen

Der im vorherigen Abschnitt beschriebene makroskopische Zustand aus Cooper-Paaren bildet aufgrund der attraktiven Wechselwirkung den neuen Grundzustand. Möchte man den Supraleiter in einen angeregten Energiezustand bringen, so muss man zuerst eine Energie  $\Delta$  aufbringen, um ein CP aufzubrechen. Anschließend muss das freie Elektron auf ein höheres Energieniveau gebracht werden, was wiederum eine Energie von  $\Delta$  benötigt [9].  $\Delta$  ist die Energielücke des Supraleiters, welche hier gemessen werden soll. Die Elektronen, die bei der Aufbrechung eines CP's entstehen, sind keine freien Elektronen, sondern Anregungen im Mehrelektronensystem, sogenannte Quasiteilchen. Mit Quasiteilchen können komplizierte Mehrteilchenphänomene als Einteilchenphänomene beschrieben werden. Aus der BCS-Theorie erhält man durch Aufstellen der freien Energie  $F = E_{\text{kin}} + E_{\text{pot}} - TS$  und deren Minimierung Ausdrücke für die für die Anregungsenergie  $E_{\vec{k}}$  der Quasiteilchenanregungen und für die Zustandsdichte von Supraleitern  $D_S(E_{\vec{k}})$  in Abhängigkeit der Energielücke: [5, Kap. 10.4]:

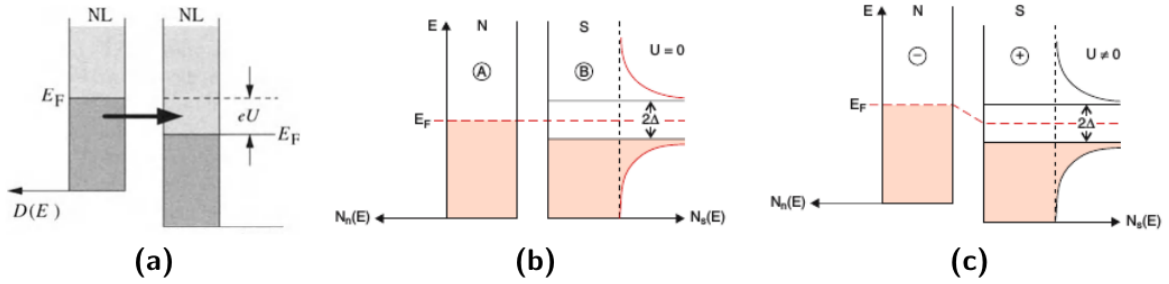


Abb. 2: Tunneleffekt zwischen zwei Normalleitern (a), zwischen einem Normalleiter und einem Supraleiter bei  $V = 0$  (b) und zwischen einem Normalleiter und Supraleiter bei  $U = U_c = \Delta/e$  [4].

$$E_{\vec{k}} = \sqrt{\eta_{\vec{k}}^2 + \Delta^2} \quad (2.4)$$

$$D_S(E_{\vec{k}}) = D_N(E_{\vec{k}}) \frac{|E_{\vec{k}}|}{\sqrt{E_{\vec{k}}^2 - \Delta^2}}, \quad |E_{\vec{k}}| \geq \Delta_{T=0}. \quad (2.5)$$

$\eta_{\vec{k}}$  ist die kinetische Energie der Elektronen gemessen von der Fermienergie. Die Quasiteilchen verhalten sich je nach kinetischer Energie wie Löcher, Elektronen oder Mischzustände. Für  $T = T_c$  ist die kinetische Energie der Cooper-Paare groß genug, um diese aufzubrechen und der Supraleiter geht in den normalleitenden Zustand ohne Energielücke über.

## 2.5 Tunnelkennlinien von Normalleitern und Supraleitern

Im Versuch werden sowohl ein Normalleiter-Normalleiter (NL/NL) und ein Normalleiter-Supraleiterkontakt (NL/SL) verwendet. Die Situation eines NL/NL Kontaktes ist in Abb. 2 (a) zu sehen. Die Zustandsdichte eines Normalleiters kann in der Nähe der Fermienergie als konstant angenommen werden. Liegt keine Spannung an, so tunneln im Mittel gleich viele Elektronen von links nach rechts und umgekehrt. Der Strom ist null. Bei Anlegen einer Spannung verschiebt sich das chemische Potential und Elektronen tunneln in Richtung niedrigeren chemischen Potentials in die zugänglichen freien Zustände. Man erwartet eine Proportionalität zwischen der anliegenden Spannung und dem gemessenen Tunnelstrom, also Ohm'sches Verhalten  $U = RI$ . Für einen NL/SL Kontakt liegt die Fermienergie des Normalleiters in der Mitte der Energielücke des Supraleiters. Somit kann kein Tunnelstrom fließen, da keine freien Zustände unterhalb  $E_F$  vorhanden sind (2 (b)). Erst bei einer Spannung von  $U = \Delta/e$  können Elektronen in den Supraleiter tunneln und man misst einen Tunnelstrom. Dieser steigt sehr steil an, da die Zustandsdichte des Supraleiters eine Van Hove-Singularität aufweist [2, S 209] (2 (c)). Die Tunnelstrom-Kennlinien sind in Abb. 2 für die verschiedenen Fälle gezeigt. Für  $T \neq 0$  ist die Energielücke kleiner als bei  $T = 0$ . Außerdem können durch thermische Fluktuationen bereits früher Elektronen in den Supraleiter tunneln. Dies führt zu einer Aufweitung der Kennlinie (3 (c)).

## 3 Durchführung

### 3.1 Herstellung der Probe

Zunächst wird die Probe hergestellt. Dazu wird ein  $\text{SiO}_2$ -Wafer verwendet, auf den die Tunnelkontakte draufgedampft werden. Dieser wird zunächst in die Halterung der Vakuumblocke eingespannt. Jetzt muss die Schablone für das Aufdampfen montiert werden, wobei auf die korrekte Orientierung zu achten ist. Desweiteren muss das gesamte Gestell nach oben gedreht werden, da zuerst gesputtert wird. Ist alles festgeschraubt, folgt nun die Evakuierung der Glocke, indem zuerst die Vorpumpe benutzt wird und anschließend mit der Turbopumpe ein Vakuum von ca.  $2 \times 10^{-5}$  mbar erzeugt wird. Zum Sputtern muss die Glocke mit ca.  $10^{-2}$  bar Argon gefüllt werden. Nun wird eine ca. 100 nm dicke Goldschicht auf das Substrat gesputtert. Die Dicke wird dabei durch eine Schwingungsquarzwage aufgenommen. Die Anlage berechnet automatisch durch die sich verändernde Schwingungsfrequenz

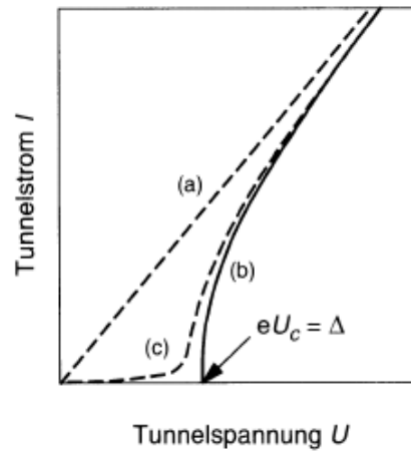


Abb. 3: Tunnelkennlinie eines NL/NL Kontaktes (a), eines NL/SL Kontaktes bei  $T = 0$  (b) und eines NL/SL Kontaktes bei  $0 < T < T_c$  (c) [3, S: 72].

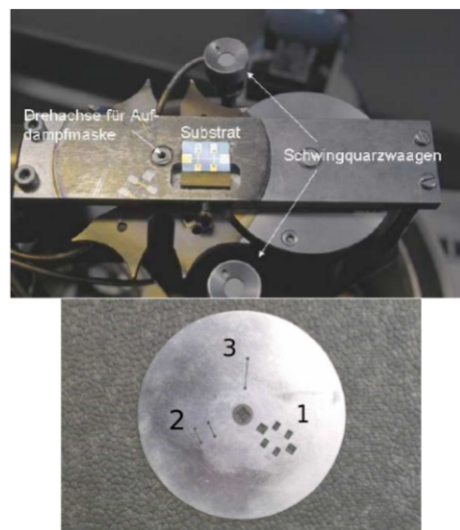


Abb. 4: Versuchsaufbau zur Herstellung der Probe. Oben: Substrathalter und Schwingquarzwagen. Unten: Drehblende [1].

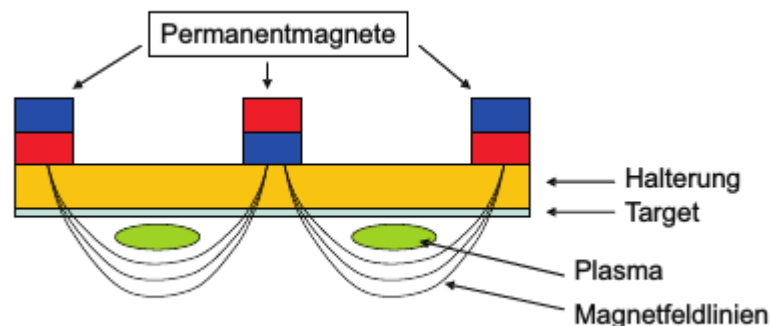


Abb. 5: Schema des Magnetons, welches zum Sputtern verwendet wird [1].

des Quarzes die Masse und mit der Dichte die Schichtdicke. Beim Sputtern wird das Argon ionisiert und die Ionen werden mit einer Spannung von bis zu 1 kV auf die Goldfolie beschleunigt. Dadurch werden Goldatome herausgeschlagen, welche sich auf dem Substrat ablagern. Nun muss das Aluminium aufgedampft werden. Dafür wird das Ag wieder abgesaugt und der Probenhalter wird um  $180^\circ$  nach unten gedreht. Die Schablone wird in die nächste Stellung gedreht und das Aluminium wird durch einen Wolframdraht erhitzt. Wolfram wird deswegen gewählt, weil es eine besonders hohe Schmelztemperatur besitzt. Es muss zunächst langsam erhitzt werden, da die Oxidschicht des Aluminiums zuerst weggedampft werden soll. Während dieses Vorwärmens muss die Schutzblende über der Probe positioniert sein, damit sie kein Aluminiumoxid abbekommt. Wenn das Aluminium geschmolzen ist, kann die Scheibe entfernt werden und der Aufdampfvorgang beginnt. Vorher muss die Schwingungsquarzwage wissen, dass nun Aluminium verwendet wird. Die Al-Schichtdicke soll ungefähr bei 50 nm liegen. Jetzt kommt der kritischste Punkt des Versuches, nämlich die Herstellung der Tunnelbarriere. Hierfür wird für eine kurze Zeit eine besonders dosierte Menge Luft eingelassen, sodass das Aluminium oberflächlich oxidiert. Die genaue Luftmenge und die Belüftungszeit liegen als Rezept im Labor vor. Nach der Oxidation wird wieder ein Vakuum erzeugt. Jetzt kann als letzter Schritt das Blei aufgedampft werden. Dafür wird wieder zunächst die Blende weiter gedreht und anschließend das Blei verdampft. Es soll eine Schichtdicke von ca. 300 nm aufgedampft werden.

Als letztes wird die Probe mithilfe eines Mikroskops untersucht. Hierbei ist insbesondere darauf zu achten, dass die Kontakte unversehrt sind. In unserem Fall waren Einkerbungen höchstens so breit wie  $1/3$  der Kontaktbreite und sollten somit in Ordnung sein.

### 3.2 Einbau der Probe und Messung des Tunnelstroms

Das Substrat wird zunächst in die Messsonde eingebaut. Dafür werden die sechs Kontakte mit Indiumplättchen mit der Messsonde verbunden. Indium ist ein besonders weiches Metall, wodurch ein guter Kontakt mit den Kontakten der Sonde sichergestellt wird. Jetzt sollten die Kontakte mit einem Amperemeter vermessen werden. Alle Widerstandswerte unserer Probe waren in diesem Zustand wie zu erwarten. Die Messsonde kann jetzt in das Kryostat eingebaut werden. Anschließend wird die Messung des Tunnelstroms bei Raumtemperatur durchgeführt. Sowohl Blei als auch Aluminium sind also Normalleiter. Die Messung geschieht automatisch am Computer. Hierbei wird eine sogenannte Vierpunktmessung verwendet. Diese eliminiert den Leitungs- und den Kontaktwiderstand und ist dadurch besonders geeignet für kleine Tunnelströme. Mit Origin können die gemessenen Werte direkt angezeigt werden. Bereits hier hat sich gezeigt, dass unsere Messwerte für die Spannung ungefähr um 2 Größenordnungen zu hoch sind. Nun wird das He-Verdampfungskryostat für die SL/NL-Messung vorbereitet. Dazu wird zunächst mit einer Vakuumpumpe das doppelwandige Gefäß evakuiert. Anschließend wird flüssiger Stickstoff in die Außenwände gefüllt. Dieses kühlt das Gefäß vor und dient als zusätzlicher Wärmeisolator für das flüssige Helium. Mit dem flüssigen Helium wird die Probe auf 4.2 K heruntergekühlt. Bei dieser Temperatur ist das Blei bereits supraleitend. Nun wird die erste Tunnelkennlinie aufgenommen. Auch hier haben unsere Messungen grundsätzlich falsche Ergebnisse geliefert. Es war keine charakteristische Tunnelkennlinie zu beobachten.

Um die Temperaturabhängigkeit der Kennlinien zu untersuchen wird als letztes der Dampfdruck erniedrigt, wodurch Temperaturen bis zu 1.5 K erreicht werden. Hier könnten sich eventuell bereits erste Supraleitende Eigenschaften des Aluminiums herauszeichnen. Da der Druck kontinuierlich erniedrigt wird, sind die hier gemessenen Kennlinien in Wahrheit temperaturabhängig. Es wird also ein Temperatursweep durchgeführt: Kurz vor der gewünschten Tem-



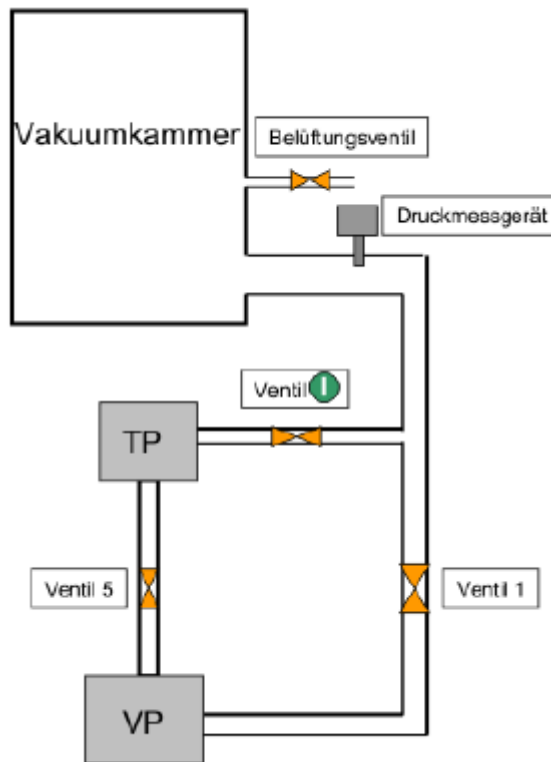


Abb. 6: Vakuumanlage mit Vorpumpe und Turbopumpe [1].

peratur wird die Messung gestartet. Diese dauert dann 30 Sekunden. Währenddessen sinkt der Druck weiter. Aus der Dampfdruckkurve von Helium, welche am Kryostat vermerkt ist, kann dadurch ein Temperaturintervall abgeschätzt werden, welcher als Fehler in die Auswertung eingeht.

## 4 Auswertung

Da die Daten, welche während unseres eigenen Versuches aufgenommen wurden, keine sinnvolle Auswertung erlaubten, handelt es sich im folgenden um Altdaten, die vom Praktikumsassistenten bereitgestellt wurden.

### 4.1 NL/NL-Kennlinie bei Raumtemperatur

Für die bei Raumtemperatur gemessene Stromkennlinie erwartet man eine Proportionalitätsgerade nach dem Ohm'schen Gesetz  $I = U/R = \sigma U$ , wobei  $\sigma = 1/R$  die Leitfähigkeit ist. Um den Widerstand zu ermitteln, wird also ein linearer fit mit dem Ansatz  $f(U) = \sigma U + b$  durchgeführt. Die Ergebnisse sind in Abb. 7 zu sehen. Für die Fitgrößen ergeben sich:

$$\sigma = (0.07591 \pm 0.00001) \, \Omega \quad (4.1)$$

$$b = (-5.717 \times 10^{-6} \pm 0.03 \times 10^{-6}) \, \text{A} \quad (4.2)$$

Hieraus ergibt sich der Widerstand zu  $R = (13.173 \pm 0.002) \, \Omega$ , wobei die Gauß'sche Fehlerfortpflanzungsformel verwendet wurde. Da die Fehler der Messwerte, welche symmetrisch sind, hier keine Auswirkungen auf den fit haben und zudem sehr klein sind ( $\sigma_A = 0.1 \, \text{mA}$ ), wurden sie nicht in die Grafik mit eingetragen.

### 4.2 SL/NL-Kennlinien

In Abb. 8 sind die gemessenen Daten von der SL/NL-Messung bei verschiedenen Temperaturen aufgetragen. Wie bereits erwähnt handelt es sich um einen Temperatursweep um die gewünschte Temperatur. Es sind deutlich die

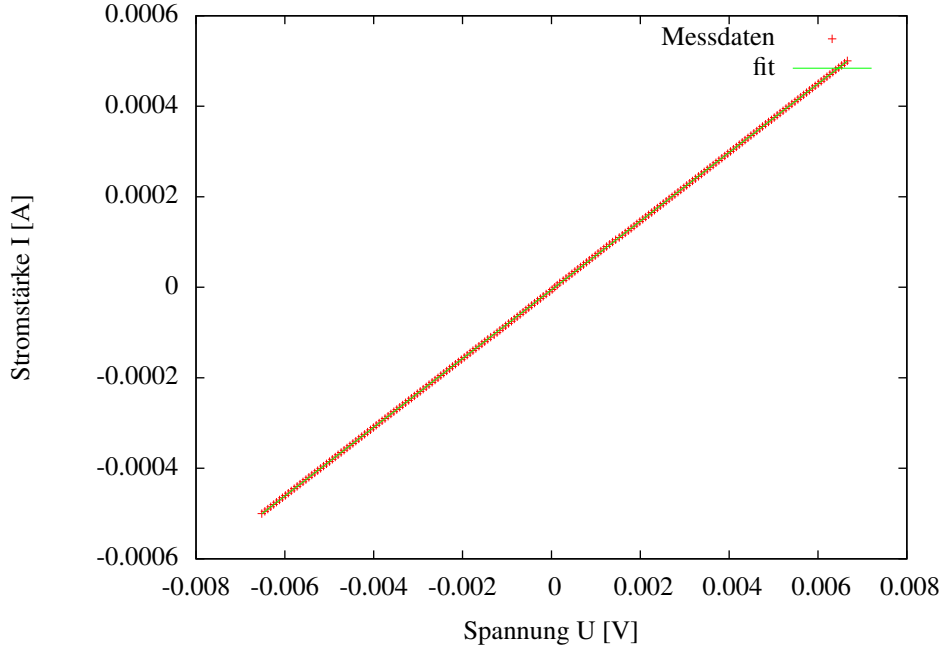


Abb. 7: Bei Raumtemperatur gemessene Strom-Spannungskurve (rot). In grün: Linearer fit. Es handelt sich um eine Ohm'sche Kennlinie mit konstanter Leitfähigkeit  $\sigma = (0.07591 \pm 0.00001) \Omega$ .

theoretisch vorhergesagten Plateaus zu sehen. Bei sehr geringen Spannungen fließt kaum Strom, da die Energielücke  $\Delta$  noch nicht überwunden wurde. Um  $\Delta$  zu bestimmen, werden die Daten numerisch mithilfe des zentralen Differenzenquotienten

$$\frac{dI_j}{dU} \approx \frac{1}{2} \left( \frac{I_{j+1} - I_j}{U_{j+1} - U_j} + \frac{I_j - I_{j-1}}{U_j - U_{j-1}} \right) \quad (4.3)$$

in einem Python-Skript abgeleitet. Die Ergebnisse hiervon sind in Abb. 9 zu sehen. Um den Bereich abzuschätzen, ab dem der Stromfluss beginnt, wird das Maximum der Ableitung gesucht. Dies ist nötig, da für  $T \neq 0$  die Kennlinien "aufgeweicht" sind und kein klarer Sprung zu erkennen ist. Als grobe Näherung reicht es jedoch, das Maximum der Ableitung (= Leitfähigkeit) zu betrachten, da sich dieses ungefähr an der Stelle des Sprunges bei  $T = 0$  befindet. Die Ableitung oszilliert sehr stark, eine Interpolation ist demnach nicht sehr sinnvoll einzusetzen. Für eine grobe Auswertung wird lediglich der tatsächliche maximale Wert für die Leitfähigkeit genommen und ein großzügiges Fehlerintervall von  $\pm 1$  mV abgeschätzt. Eine weitere Möglichkeit wäre es, das Maximum als Schnittpunkt zweier linearer Fits zu ermitteln, aber aufgrund der starken Oszillationen wären diese Fits stark abhängig von dem Fit-Intervall. Es ist also unwahrscheinlich, dass dies zu besseren Ergebnissen führt. Da die Fehler hauptsächlich von der Position des Maximums abhängen, sind die Messfehler von  $\sigma_I = 0.1$  mA ebenfalls vernachlässigbar. Diese sind bereits mit dem großzügigen Fehlerintervall für  $U$  berücksichtigt. Die Maxima werden sowohl bei positiven als auch negativen Spannungen gemessen. Dadurch kann man das doppelte Plateau  $2\Delta = U_{\text{max, rechts}} - U_{\text{max, links}}$  bestimmen. Nach der Gauß'schen Fehlerfortpflanzung ergibt sich  $\sigma_{2\Delta} = \sqrt{\sigma_{\text{max, links}}^2 + \sigma_{\text{max, rechts}}^2} = 1.4 \sigma_{\text{max, links}}$ . Die Ergebnisse sind in Tab. 1 eingetragen. Nach [7] existiert eine Korrekturformel für die Energielücke, die Quasiteilchenanregungen bei endlicher Temperatur berücksichtigt. Sie lautet:

$$\Delta_K = \left( (eU_{\text{max}} - ak_B T)^h - (bk_B T)^h \right)^{\frac{1}{h}}. \quad (4.4)$$

Für den Fehler ergibt sich nach Gauß'scher Fehlerfortpflanzung

$$\sigma_{\Delta_K}(T) = \sqrt{(e\Delta_K(T)^{2h-1}\sigma_{U_{\text{max}}})^2 + (ak_B h T^{h-1}\Delta_K(T)^{2h-1}\sigma_T)^2}. \quad (4.5)$$

Die Parameter sind gegeben durch [7]:

$$a = 1.113, \quad b = 2.107, \quad h = 2.138. \quad (4.6)$$

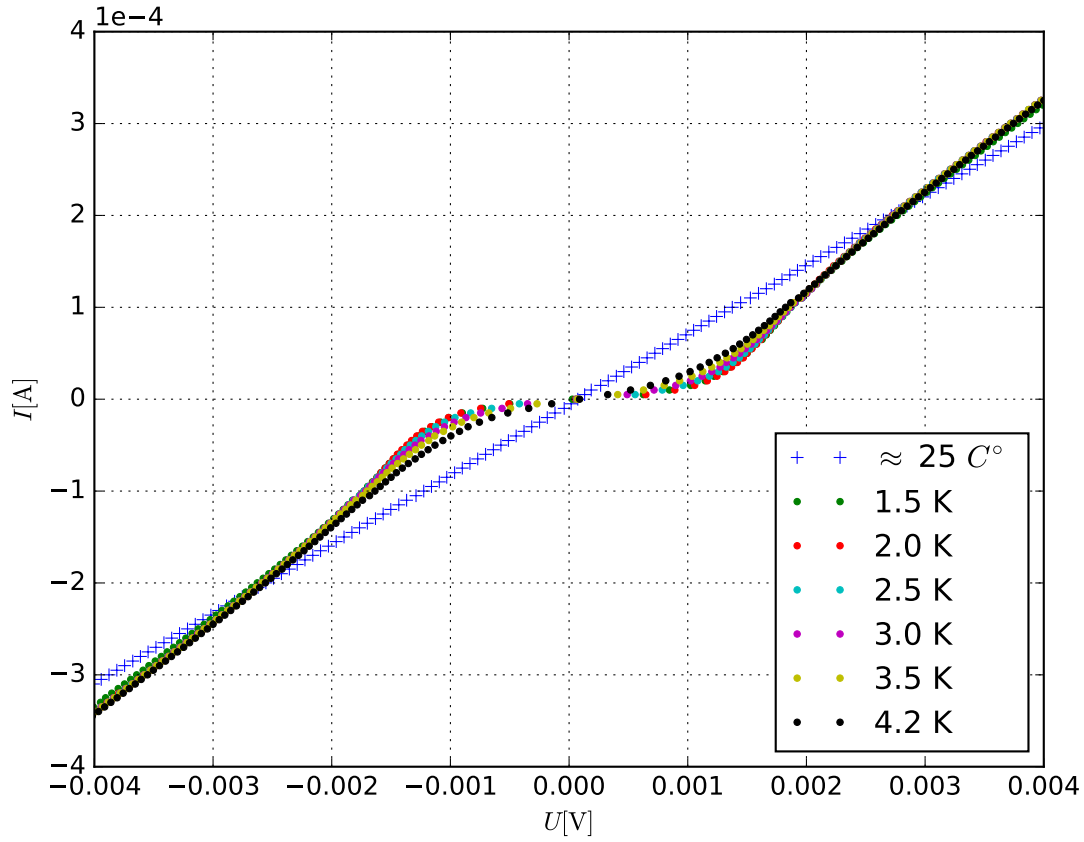


Abb. 8: Gemessene Tunnelkennlinien bei unterschiedlichen Temperaturen. Außerdem eingezeichnet ist die Raumtemperaturmessung. Alle qualitativen Eigenschaften von Tunnelkennlinien sind wieder zu erkennen. Außerdem laufen die Supraleitungs-Kennlinien in etwa gegen die Raumtemperaturmessung.

Temperatur $T[K]$	Ohne Korrektur		Mit Korrektur	
	$2\Delta(T) [mV]$	$2\Delta(T)/(k_B T_C)$	$2\Delta(T) [mV]$	$2\Delta(T)/(k_B T_C)$
$1.50 \pm 0.08$	$3.5 \pm 1.4$	$5.6 \pm 2.3$	$1.6 \pm 1.0$	$5.0 \pm 3.3$
$2.00 \pm 0.10$	$3.0 \pm 1.4$	$4.8 \pm 2.3$	$1.2 \pm 1.1$	$3.8 \pm 3.5$
$2.50 \pm 0.13$	$3.4 \pm 1.4$	$5.4 \pm 2.3$	$1.4 \pm 1.4$	$4.4 \pm 3.5$
$3.00 \pm 0.15$	$4.0 \pm 1.4$	$6.5 \pm 2.3$	$1.7 \pm 1.1$	$5.3 \pm 3.5$
$3.50 \pm 0.18$	$3.5 \pm 1.4$	$5.6 \pm 2.3$	$1.1 \pm 1.2$	$3.6 \pm 4.1$
$4.20 \pm 0.21$	$3.9 \pm 1.4$	$6.3 \pm 2.3$	$0.9 \pm 1.6$	$2.8 \pm 5.3$
Literaturwert: $2\Delta_{Pb}(T = 1K)/(k_B T_{C,Pb})$				$4.33 \pm 0.10 [6]$

Tab. 1: Ergebnisse für die Energielücke  $\Delta$  in mV und in dimensionslosen Größen, mit und ohne Korrektur.

Es ist zu beachten, dass nun eine explizite Temperaturabhängigkeit vorhanden ist. Der Fehler der Temperatur, die durch den Temperatursweep entstehen, kann mithilfe der Dampfdruckkurve von Helium abgeschätzt werden. Durch die exponentielle Abhängigkeit wird der Fehler bei hohen Temperaturen größer. Allerdings wirkt diesem Effekt entgegen, dass bei niedrigen Drücken der Druck langsamer verringert wird. Als grobe Schätzung wird der Fehler linear interpoliert, mit größeren Fehlern für höhere Temperaturen. Die Ergebnisse sind in Tab. 1 zu sehen. Die kritische Temperatur von Blei ist  $T_{C,Pb} = 7.2K$  [1].

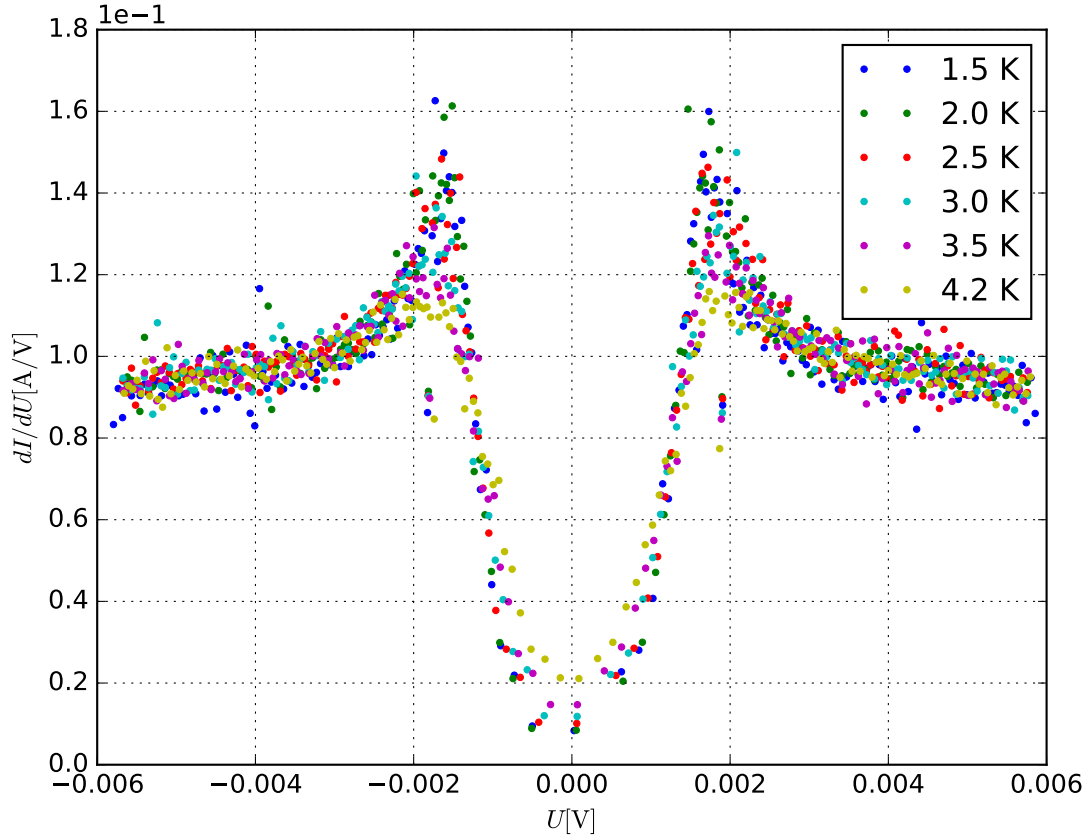


Abb. 9: Ableitung des Tunnelstroms nach der Spannung aufgetragen gegen die Spannung. Es sind deutliche Maxima auf beiden Seiten zu sehen. Wie erwartet sind diese bei hohen Temperaturen größer. Auf Fehlerbalken wurde zugunsten Übersicht verzichtet.

### 4.3 Vergleich mit der BCS-Theorie

Mithilfe der BCS-Theorie lässt sich ein Ausdruck für die Energielücke  $\Delta$ , die Zustandsdichte  $D(E_F)$  bei der Fermienergie sowie die Temperatur  $T$  finden. Dies ist ausführlich z. B. in [5] beschrieben. Man erhält folgende Integraldarstellung:

$$\frac{2}{D(E_F)\nu_0} = \int_0^{\hbar\omega_D} \frac{d\eta}{\sqrt{\eta^2 + \Delta^2}} \left[ \tanh\left(\frac{\sqrt{\eta^2 + \Delta^2}}{2k_B T}\right) \right]. \quad (4.7)$$

$\nu_0$  ist dabei ein Parameter der anziehenden Wechselwirkung durch Phononen. Anstatt diesen Ausdruck numerisch zu integrieren, wird eine Näherungsformel verwendet [8]:

$$\Delta(T) \approx \Delta_0 \tanh\left(k\sqrt{\frac{T_C - T}{T}}\right), \quad (4.8)$$

$$k \approx 1.74. \quad (4.9)$$

Eine wichtige Größe für den Vergleich mit realen Supraleitern ist die Energielücke bei  $T = 0$ :  $\Delta_0 = 1.76k_B T_C$ . Die zuvor errechneten Werte für  $\Delta$ , sowie die nach Gl. 4.8 errechnete Theoriekurve sind in Abb. 10 aufgetragen. Desweiteren wird der Literaturwert für Blei aus Tab. 1 als horizontale Linie eingezeichnet.

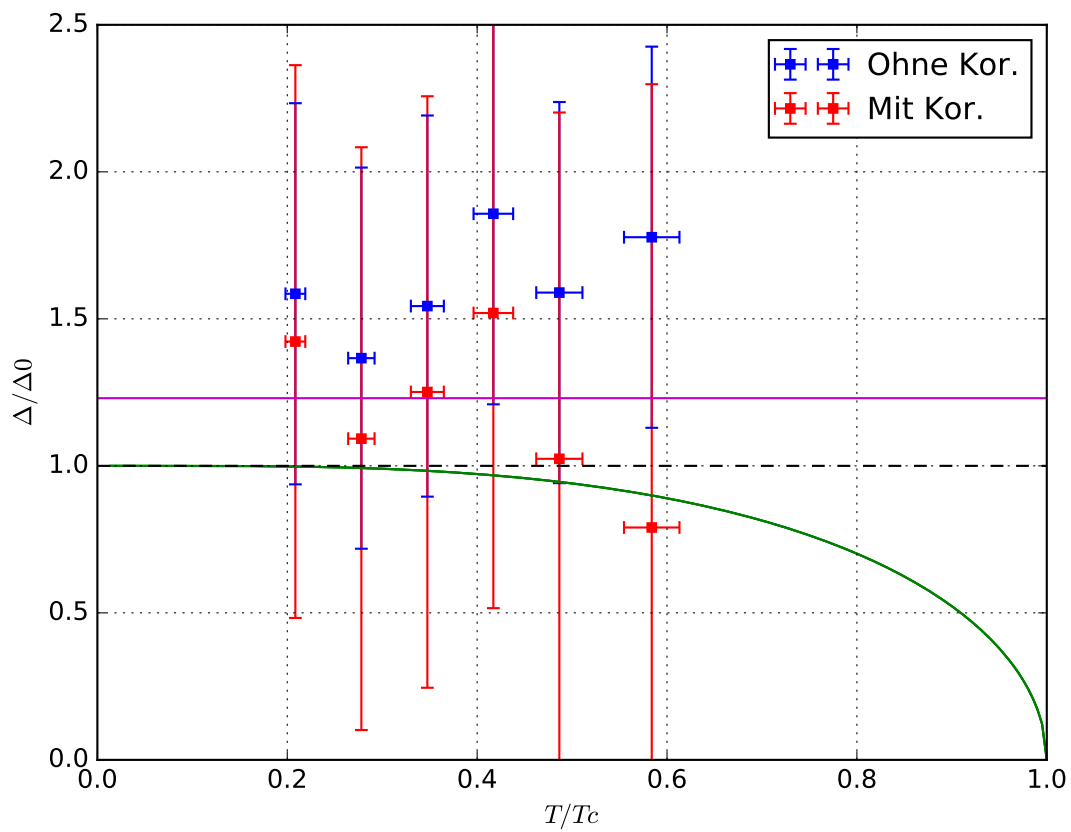


Abb. 10: Unkorrigierte und korrigierte Werte der normierten Energielücke in Abhängigkeit von der Temperatur. Außerdem eingezeichnet ist die Vorhersage der BCS-Theorie in grün. In Pink ist der Literaturwert für Blei bei 1 Grad Kelvin eingezeichnet.

## 5 Diskussion

	Ohne Korrektur		Mit Korrektur	
Temperatur $T[K]$	$2\Delta(T)/(k_B T_C)$	rel. Abw. zum Lit. Wert	$2\Delta(T)/(k_B T_C)$	rel. Abw. zum Lit. Wert
$1.50 \pm 0.08$	$5.6 \pm 2.3$	0.29	$5.0 \pm 3.3$	0.15
$2.00 \pm 0.10$	$4.8 \pm 2.3$	0.11	$3.8 \pm 3.5$	0.12
$2.50 \pm 0.13$	$5.4 \pm 2.3$	0.25	$4.4 \pm 3.5$	0.02
$3.00 \pm 0.15$	$6.5 \pm 2.3$	0.50	$5.3 \pm 3.5$	0.22
$3.50 \pm 0.18$	$5.6 \pm 2.3$	0.29	$3.6 \pm 4.1$	0.17
$4.20 \pm 0.21$	$6.3 \pm 2.3$	0.45	$2.8 \pm 5.3$	0.35
Literaturwert: $2\Delta_{\text{Pb}}(T = 1K)/(k_B T_{C,\text{Pb}})$				$4.33 \pm 0.10$ [6]

Tab. 2: Ergebnisse für die Energielücke  $\Delta$  in mV und in dimensionslosen Größen, mit und ohne Korrektur, sowie die relative Abweichung zum Literaturwert.

### 5.1 NL/NL - Messung

Wie bereits in der Auswertungssektion beschrieben, sind die Daten der Normalleiter-Normalleiter Kennlinie in sehr guter Übereinstimmung mit der Theorie. Es zeigt sich deutlich die Ohm'sche Strom-Spannungskurve. Der errechnete Widerstandswert ist ebenfalls glaubwürdig, da sich die Kennlinien der SL/NL-Messungen nahezu asymptotisch an NL/NL-Kennlinie anschmiegen. Die hier zu sehende Diskrepanz ist am wahrscheinlichsten auf die unterschiedliche Temperatur der beiden Messungen zurückzuführen. So muss bei einem Ohm'schen Leiter ein Temperaturkoeffizient berücksichtigt werden, der den Widerstand bei hohen Temperaturen erhöht. Dies ist konsistent zu der kleineren Steigung, also der geringeren Leitfähigkeit in Abb. 8, im Vergleich zu den Supraleitungs-Messungen. Da sehr viele Messdaten zu Verfügung standen, ist der lineare Fit sehr genau, was zu einem sehr genauen Ergebnis führt. Dies ist also ein guter Anhaltspunkt zur qualitativen Überprüfung der SL/NL-Messungen.

### 5.2 SL/NL - Messung

Die in Abb. 8 zu sehenden Kennlinien erfüllen alle qualitativen theoretischen Vorhersagen. Zum einen erkennt man das charakteristische Plateau bei geringen Spannungen, bei der kein Tunnelstrom fließt. Desweiteren werden die Kennlinien aufgeweichter, je höher die Temperatur ist. In Abb. 9 kann man demnach deutlich erkennen, dass bei niedrigeren Temperaturen das Maximum der Steigung deutlicher zu erkennen ist. Dieses sollte theoretisch unendlich sein bei  $T = 0$ . Trotz der höheren maxima bei kleinen Temperaturen war es schwer, den Punkt des Maximas genau zu bestimmen, aufgrund der Oszillationen in der numerischen Ableitung. Auch eine zweite numerische Ableitung hätte demnach nur ein grobes Intervall für den maximalen Spannungswert geliefert. Es ist möglich, dass eine beidseitige Annäherung mit linearen Fits hier geholfen hätte, obwohl diese - wie bereits erwähnt - ebenfalls Abhängig von der Fitregion ist. Im Allgemeinen lässt sich sagen, dass unsere Fehlerabschätzung etwas zu großzügig geworden ist. Dies ist deutlich in Abb. 10 zu sehen. Die Fehlerbalken sind sowohl bei den korrigierten Werten, als auch bei den unkorrigierten sehr groß, wobei die Temperaturabhängigkeit die Fehler der korrigierten Werte nochmals vergrößert. Der Fehler kommt hier fast ausschließlich durch die Abschätzung des Intervalls maximaler Spannung. Aufgrund dessen und zugunsten der Übersichtlichkeit wurde auf Fehlerbalken in den Plots zuvor verzichtet. Während die Werte ohne Korrektur nicht im ersten Signifikanzintervall die Literaturkurve der BCS-Theorie schneiden, ist dies für alle korrigierten Werte der Fall. Aber auch für die korrigierten Werte ist dies nicht unbedingt zu erwarten, da es sich bei Blei um einen Supraleiter mit starker Phononenkopplung handelt. Die BCS-Theorie ist aber eine Theorie für geringe Phononenkopplung, eine Voraussetzung die für Blei nicht gegeben ist. Man muss demnach die einfache BCS Theorie erweitern, um einen genaueren theoretischen Vergleich mit Blei herzustellen. Dennoch sind vor allem die korrigierten Werte sehr nahe an der BCS-Kurve, besonders für hohe Temperaturen. Dies wird bei vielen Versuchen auch bestätigt [5]. Die zusätzliche Korrektur zur BCS-Theorie ist also immer noch relativ gering. Im Vergleich zu dem Literaturwert der dimensionslosen Energielücke in Tab. 2 sieht man allgemein, dass die korrigierten Werte eine mit durchschnittlich 17% insgesamt niedrigere Abweichung ergeben, als die unkorrigierten mit einer durchschnittlichen relativen Abweichung von 31%. Jedoch ist der Theoriewert bei  $T = 1$  K gegeben und man erwartet die beste Übereinstimmung für den Messwert bei  $T = 1.5$  K. Dies ist jedoch hier nicht der Fall. Dennoch schneiden die Fehlerbalken aller Werte, mit und ohne Korrektur, diesen Theoriewert. Demnach ist die Messung insgesamt als

gelungen einzustufen. Es wurden alle qualitativen Aussagen der Theorie bestätigt und quantitativ ergeben die Werte, wenigstens von der Größenordnung her, eine gute Übereinstimmung zur Theorie.

## Literatur

- [1] *Praktikumshandbuch*. master-fp.physik.uni-goettingen.de. – Zugriff:2017-03-14
- [2] *Festkörperphysik*. Oldenbourg Verlag, 2011
- [3] BUCKEL, Werner ; KLEINER, Reinhold: *Supraleitung: Grundlagen und Anwendungen*. John Wiley & Sons, 2013
- [4] DEMTRÖDER, Wolfgang: *Experimentalphysik 3: Atome, Moleküle und Festkörper*. 2005
- [5] ENSS, Christian ; HUNKLINGER, Siegfried: *Tieftemperaturphysik*. Springer-Verlag, 2011
- [6] GIAEVER, Ivar ; MEGERLE, Karl: Study of superconductors by electron tunneling. In: *Physical Review* 122 (1961), Nr. 4, S. 1101
- [7] PIKE, G. E.: Superconductor Energy Gaps from Tunneling. In: *Journal of Applied Physics* 42 (1971), Nr. 2, S. 883–884
- [8] SENAPATI, Kartik ; BLAMIRE, Mark G. ; BARBER, Zoe H.: Spin-filter Josephson junctions. In: *Nature materials* 10 (2011), Nr. 11, S. 849–852
- [9] TIDECKS, Reinhard: *Current-induced nonequilibrium phenomena in quasi-one-dimensional superconductors*. Springer, 1990