

3

Die Cooper-Paarung

In Kapitel 1 haben wir gesehen, dass die Supraleitung ursächlich mit dem Auftreten einer makroskopischen, kohärenten Materiewelle zu tun hat, die durch Elektronen-Paare gebildet wird. Wir müssen uns jetzt fragen, wie diese Paarung zustandekommt und wie daraus schließlich eine makroskopische Quantenwelle mit wohldefinierter Phase hervorgeht. Wir wollen zunächst die konventionellen Supraleiter (vgl. Abschnitt 2.1) betrachten. In der zweiten Hälfte dieses Kapitels werden wir dann auf unkonventionelle Supraleiter, und hier insbesondere auf die Hochtemperatursupraleiter, eingehen.

3.1

Konventionelle Supraleitung

3.1.1

Cooper-Paarung durch die Elektron-Phonon-Wechselwirkung

Nach den Ausführungen in Kapitel 1 erscheint es relativ leicht, zu einer Theorie der Supraleitung zu kommen, die auf den mikroskopischen Wechselwirkungen der Elektronen untereinander und mit dem sie umgebenden Kristallgitter basiert. Historisch waren allerdings die Schwierigkeiten für eine solche Theorie außerordentlich groß. Man konnte aufgrund der auffallenden Änderung der elektrischen Leitfähigkeit und der magnetischen Eigenschaften beim Eintritt der Supraleitung vermuten, dass es sich im wesentlichen um einen Ordnungsvorgang im System der Leitungselektronen handelt. Diese Leitungselektronen haben, wie wir in Abschnitt 1.1 gesehen haben, wegen des Pauli-Prinzips ganz beträchtliche Energien bis zu einigen eV. Ein eV entspricht einer mittleren thermischen Energie $k_B T$ von etwa 11000 Kelvin. Der Übergang in den supraleitenden Zustand erfolgt aber bei wenigen Kelvin. Es musste also eine Wechselwirkung gefunden werden, die ungeachtet der hohen Energien der Elektronen zu einer Ordnung im Elektronensystem führen konnte.

Nun gibt es eine ganze Reihe von möglichen Wechselwirkungen zwischen den Leitungselektronen eines Metalls. Man hat daran gedacht, dass die Coulomb-Abstoßung der Elektronen zu einer räumlichen Ordnung der Elektronen in Gitter-

förmigen Bereichen führen könnte (Heisenberg, 1947) [1]. Auch eine magnetische Wechselwirkung wäre denkbar (Welker, 1929) [2]. Die mit beachtlichen Geschwindigkeiten – Elektronen mit Energien nahe der Fermi-Energie können Werte im Bereich von etwa einem Prozent der Lichtgeschwindigkeit erreichen – durch das Metallgitter fliegenden Elektronen erzeugen als Ströme ein Magnetfeld und können über dieses Magnetfeld miteinander wechselwirken. Weitere Wechselwirkungen können aus der Struktur der Elektronenzustände (erlaubte Energiebänder, siehe Abschnitt 1.1) resultieren [3].

Alle diese Versuche führten zu keiner auch nur einigermaßen befriedigenden atomistischen Theorie der Supraleitung. Erst 1950/51 wurde gleichzeitig von Fröhlich [4] und unabhängig davon von Bardeen [5] eine Wechselwirkung der Elektronen über die Schwingungen des Gitters angegeben, die, wie sich später zeigte, zu einem grundsätzlichen Verständnis der Supraleitung im Rahmen unserer sonstigen Kenntnisse über die Metalle führen sollte. Ausgehend von dieser Wechselwirkung konnten Bardeen, Cooper und Schrieffer 1957 [6] eine mikroskopische Theorie der Supraleitung – die BCS-Theorie – vorschlagen, die in der Lage war, eine Fülle von bekannten Tatsachen quantitativ zu deuten, und die vor allem ungeheuer stimulierend wirkte. Angeregt durch diese Theorie wurde in den Jahren nach 1957 eine große Zahl ganz neuer Experimente unternommen, die unsere Vorstellungen über die Supraleitung nicht nur beachtlich erweitert, sondern – das darf wohl behauptet werden – grundsätzlich verändert haben.

Dabei war der Weg von der Angabe einer neuen Wechselwirkung (1950) bis zur Entwicklung einer tragfähigen Theorie (1957) noch sehr schwierig. Es muss als ein besonders glücklicher Umstand gewertet werden, dass nahezu gleichzeitig mit der theoretischen Formulierung dieser neuen Wechselwirkung und ihrer möglichen Bedeutung für die Supraleitung eine überraschend eindeutige Bestätigung für die grundsätzliche Richtigkeit der Überlegungen erbracht wurde. Man hatte nämlich bei der Untersuchung verschiedener Isotope eines Supraleiters gefunden, dass die Übergangstemperatur zur Supraleitung T_c von der Atommasse abhängt. Und nicht nur das – die experimentell gefundene Abhängigkeit entsprach sehr genau derjenigen, die nach den ersten theoretischen Ansätzen von Fröhlich erwartet werden musste (s. Abschnitt 3.1.3.1).

Damit war gezeigt, dass ungeachtet aller formalen Schwierigkeiten der Theorie offenbar ein richtiger Kern erkannt war. Diese Bestätigung der neuen Grundidee hatte einen bedeutenden Einfluss auf die folgende Entwicklung.

Wie ist diese Wechselwirkung der Elektronen untereinander, die über Gitterschwingungen vermittelt werden soll, zu verstehen? Wir wollen im folgenden einige Modellvorstellungen für diese Wechselwirkung diskutieren. Es muss aber gleich betont werden, dass diese Modelle nur sehr beschränkte Aussagekraft haben, wenn man versuchen wollte, aus ihnen weitergehende Schlüsse zu ziehen.

Beginnen wir mit einem statischen Modell. Das Gitter der Atomrümpfe, in dem sich die Leitungselektronen wie ein Fermi-Gas bewegen, hat elastische Eigenschaften. Die Atomrümpfe sind nicht starr an ihre Ruhelagen gebunden, sondern können aus den Ruhelagen ausgelenkt werden. Bei endlicher Temperatur schwingen sie, wie wir erläutert haben, um diese Ruhelagen in regelloser Weise. Bringen

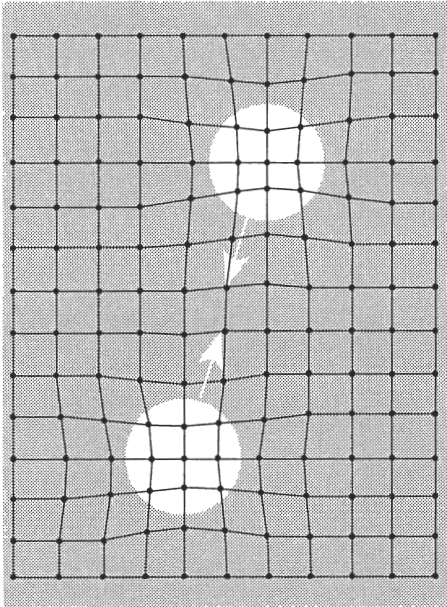


Abb. 3.1 Zur Polarisation des Gitters der Atomrümpfe durch die Elektronen. Diese Polarisation kann in einem *statischen* Modell die Abstoßung der Elektronen aufgrund ihrer gleichen Ladung nicht überkompensieren. Sie kann die Abstoßung nur stark reduzieren.

wir nun nur zwei negative Ladungen in dieses Gitter der Atomrümpfe und vernachlässigen – sehr vereinfachend und auch etwas unrealistisch – alle übrigen Elektronen, so wird die negative Ladung der beiden Elektronen das Gitter in der Weise beeinflussen, dass die umgebenden positiven Ladungen etwas angezogen werden. Man sagt: Das Gitter wird durch die negative Ladung polarisiert. In Abb. 3.1 ist dieser Sachverhalt schematisch dargestellt. Die Polarisation bedeutet gegenüber der gleichmäßigen Verteilung der positiven Ladungen eine Anhäufung von positiver Ladung in der Nähe der polarisierenden negativen Ladung. Das zweite Elektron mit seiner Polarisation kann die Polarisation des ersten Elektrons spüren. Es erfährt eine Anziehung zu der Stelle der Polarisation und damit zu dem ersten Elektron. Wir haben eine anziehende Wechselwirkung zwischen zwei Elektronen über die Polarisation des Gitters beschrieben.

Man kann für diese statische, anziehende Wechselwirkung ein mechanisches Analogon geben. Das elastisch deformierbare Gitter der Atomrümpfe repräsentieren wir durch eine elastische Membran, etwa eine ausgespannte dünne Gummihaut oder die Oberfläche einer Flüssigkeit¹⁾. Nun legen wir zwei Kügelchen auf diese Membran – im Falle der Flüssigkeit dürfen die Kügelchen nicht benetzt werden. Sie werden, wenn sie weit voneinander entfernt sind, jedes für sich die Membran aufgrund ihres Gewichtes deformieren (Abb. 3.2a).

Dies entspricht der Polarisation des Gitters. Auch ohne Rechnung ist es unmittelbar einleuchtend, dass die Energie dieses ganzen Systems (Membran mit zwei

¹ Wegen der Oberflächenspannung erfordert es Energie, eine Flüssigkeitsoberfläche aus der Gleichgewichtskonfiguration zu deformieren.

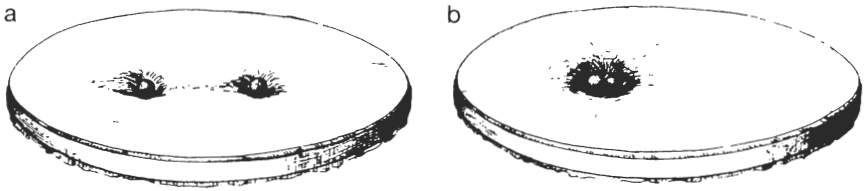


Abb. 3.2 Zur Anziehung von Kugeln auf einer elastischen Membran. Die Konfiguration (a) ist instabil und geht in (b) über.

Kügelchen) abgesenkt werden kann, wenn die beiden Kügelchen in einer einzigen Mulde liegen. Sie werden beide tiefer einsinken (Abb. 3.2b), was einer Abnahme der potenziellen Energie im Schwerfeld entspricht. Damit nimmt auch die Gesamtenergie des Systems ab, wobei die Differenz der mechanischen Energie von Anfangs- und Endzustand durch Reibungseffekte in Wärme umgewandelt wird. Wir haben also über die elastische Membran zwischen den Kügelchen eine Wechselwirkung, die zu einem gebundenen Zustand führt, d. h. zu einem Zustand, bei dem die Kügelchen im Ortsraum möglichst nahe beisammen sind.

Das Modell veranschaulicht uns, dass über elastische Verformungen eine anziehende Wechselwirkung realisiert werden kann. Das ist aber auch schon alles. Die Elektronen im Metall haben beachtliche Geschwindigkeiten. Sie polarisieren das Gitter nicht statisch. Man könnte vermuten, dass vielmehr bei der Bewegung durch das Gitter längs des Weges eine Polarisation auftritt, die ganz entscheidend davon abhängen würde, wie rasch das Gitter einer polarisierenden Wirkung durch das Elektron folgen kann. Es sollte auf die Zeiten ankommen, mit denen das Gitter der Rumpfatome irgendwelche Verrückungen vornehmen kann. Das heißt aber bei einem elastischen System, dass es auf die Eigenfrequenzen ankommt. Mit dieser sehr pauschalen Einfügung eines dynamischen Elementes haben wir einen wesentlichen Fortschritt erzielt. Wir verstehen nun schon, wenigstens qualitativ, dass die Stärke der Polarisation und damit der Wechselwirkung bei sonst gleichen Bedingungen von der Eigenfrequenz des Gitters und damit von der Masse der Rumpfatome abhängen kann. Schwere Isotope schwingen etwas langsamer, haben also kleinere Frequenzen des Gitters. Sie können der polarisierenden Wirkung nur langsamer folgen als leichtere Isotope, d. h. die Polarisation wird geringer bleiben. Damit erwarten wir, dass die Wechselwirkung schwächer und die Temperatur kleiner wird, bei der der Übergang in den supraleitenden Zustand erfolgt. Die Übergangstemperatur sinkt mit wachsender Isotopenmasse. Das entspricht dem experimentellen Befund. Es muss aber ausdrücklich darauf hingewiesen werden, dass diese zuletzt angestellten Überlegungen rein heuristischer Natur sind und quantitative Folgerungen nicht erlauben. Erst eine quantenmechanische Betrachtung kann Aufschluss darüber geben, welche Frequenzen des Gitters für diese Wechselwirkung maßgebend sind.

Wir haben nun zwar dynamische Elemente in die Wechselwirkung über die Polarisation des Gitters eingefügt, haben aber die Vorstellung aus der statischen Betrachtung übernommen, wonach eine Polarisation durch ein Elektron zu einer

Energieabsenkung für ein zweites führen kann. Um unser dynamisches Modell noch etwas weiter zu führen, können wir uns vorstellen, dass das zweite Elektron in der Polarisationsspur des ersten fliegt und dabei seine Energie abgesenkt wird, weil es das Gitter schon in einem polarisierten Zustand vorfindet.

Nun haben wir grundsätzlich zwei Möglichkeiten: Die beiden Elektronen können mit dem gleichen Impuls $\vec{p} = \hbar \vec{k}$ fliegen. Wir hätten dann ein Gebilde, das wir uns bequem als ein Teilchen, nämlich ein Elektronenpaar, vorstellen könnten. Dieses Paar hätte allerdings einen Gesamtimpuls, und zwar den doppelten Impuls eines einzelnen Elektrons. Die andere Möglichkeit besteht darin, dass die Elektronen entgegengesetzten Impuls haben. Das eine kann dabei auch in der Polarisationsspur des anderen fliegen. Nun wird aber die Vorstellung eines neuen Teilchens, eines Elektronenpaares, schwieriger. Wenn wir aber nur etwas abstrahieren, so stellen wir fest, dass im ersten Fall die Einzelelektronen durch die Forderung, gleichen Impuls zu haben, also durch $\vec{p}_1 = \vec{p}_2$ bzw. durch $\vec{k}_1 = \vec{k}_2$ korreliert sind. Eine ebenso eindeutige Korrelation stellt die Forderung $\vec{p}_1 = -\vec{p}_2$ (oder $\vec{k}_1 = -\vec{k}_2$) dar. Wir sind also voll berechtigt, auch *diese* streng korrelierten Elektronen ein Paar zu nennen. Dieses Elektronenpaar hat den Gesamtimpuls null. Solche Paare nennt man »Cooper-Paare«, weil Cooper [7] als Erster zeigen konnte, dass eine derartige Korrelation zu einer Absenkung der Gesamtenergie führt. Wenn wir auch noch den Eigendrehimpuls (Spin) der Elektronen berücksichtigen, was für das statistische Verhalten des neuen Teilchens wichtig ist, so besteht ein Cooper-Paar aus zwei Elektronen mit entgegengesetzten, gleich großen Impulsen und entgegengesetzten Spins:

$$\text{Cooper-Paar}^{2)}: \{ \vec{k} \uparrow, -\vec{k} \downarrow \}$$

Die Korrelation zu Cooper-Paaren wird durch die Polarisierung des positiven Gitters energetisch günstig.

Da die Möglichkeit einer Paarkorrelation die entscheidende Grundlage für die atomistische Theorie der Supraleitung und damit für ein Verständnis des supraleitenden Zustandes ist, soll noch eine wesentlich andere, allgemeinere Betrachtung behandelt werden. Wir können die Bildung von Elektronenpaaren in einem Gitter mit dem sehr allgemeinen Formalismus der sog. Austauschwechselwirkung verstehen.

Es ist eine Trivialität, dass Systeme, die irgendwelche Größen austauschen, in einer Wechselwirkung stehen. Diese Aussage gilt allgemein. Bei der Austauschwechselwirkung der Quantenmechanik geht es nun darum, dass der Austausch zu einer Anziehung zwischen zwei physikalischen Systemen führen kann. Zwei Teilchen z. B. können durch den Austausch eines dritten Teilchens eine Anziehung

² Der Schwerpunkt des oben beschriebenen Cooper-Paars ruht bei einem Gesamtimpuls $\vec{P} = \hbar \vec{K} = 0$. Wenn wir dagegen einen Zustand beschreiben wollen, in dem ein Suprastrom fließt, müssen wir die Cooper-Paarung um einen Schwerpunkt \vec{K} herum durchführen, also einen Zustand $\{ \vec{k} + \vec{K} \uparrow, -\vec{k} + \vec{K} \downarrow \}$ wählen.

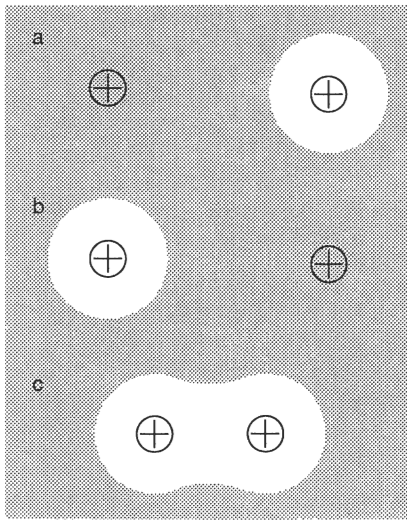


Abb. 3.3 Bindungsenergie eines H_2^+ -Moleküls. Die Größenverhältnisse sind nicht maßstabgerecht.

erfahren, die zu einem Zustand führt, in dem die beiden Teilchen aneinander gebunden sind.

Eine Abstoßung aufgrund eines Teilchenaustausches können wir sehr leicht klassisch verstehen. Zwei Personen, die zwischen sich einen Ball hin- und herwerfen, erfahren eine solche Abstoßung. Das ist unmittelbar einsichtig und kann leicht dadurch geprüft werden, dass man die Personen auf leicht laufende Wagen stellt, die sich längs der Verbindungslinie der Personen bewegen können. Beim Hin- und Herwerfen des Balles werden die Wagen auseinander rollen, wobei diese abstoßende Wechselwirkung allein durch den Austausch des Balles und den damit verbundenen Impulsaustausch zustande kommt.

Wir wollen nicht versuchen, ein ebenso einfaches Modell für eine anziehende Wechselwirkung zu konstruieren. Wir wollen vielmehr ein Beispiel aus der modernen Physik besprechen.

Wir wissen, dass zwei Wasserstoffatome ein Wasserstoffmolekül bilden und dass dieses Molekül recht fest gebunden ist. Es bedarf einer Energie von $26 \cdot 10^4$ Ws/mol (62,5 kcal/mol), um diese Bindung aufzubrechen, d.h. 2 Gramm H_2 zu dissoziieren. Wie können wir diese feste Bindung der an sich doch neutralen H-Atome in einem H_2 -Molekül verstehen? Um das Prinzip klar zu machen, betrachten wir ein etwas einfacheres System, nämlich H_2^+ , d.h. ein einfach positiv geladenes H_2 -Molekülion. Dieses Molekül besteht aus zwei Wasserstoffkernen (zwei Protonen) und einem Elektron. In Abb. 3.3 a und b sind die beiden möglichen Zustände dieses Systems bei großer Entfernung der beiden Protonen gezeichnet. Das Elektron sitzt bei einem der beiden Protonen. Bringen wir nun die Protonen näher zusammen, so kann, wie uns die Quantenmechanik lehrt, das Elektron mit einer gewissen Wahrscheinlichkeit von einem Proton zum anderen »hüpfen«, in unserer Terminologie »ausgetauscht werden«. Die Wahrscheinlichkeit für den Austausch wächst stark mit kleiner werdendem Abstand. Das Elektron gehört dann den beiden

Protonen in gleichem Maße an, wie dies in Abb. 3.3 c angedeutet ist. Die entscheidende Aussage der Quantenmechanik zu diesem Problem ist nun, dass durch diesen Austausch die Gesamtenergie des Systems abgesenkt werden kann. Das bedeutet aber, dass kleinere Abstände R energetisch günstiger sind. Die beiden Protonen werden durch das gemeinsame Elektron gebunden. Der Gleichgewichtsabstand ergibt sich aus der Forderung, dass die anziehende Kraft durch den Elektronenaustausch gerade gleich ist der abstoßenden Kraft der beiden positiven Protonen.

Die Energieabsenkung aufgrund des Elektronenaustausches kann man besonders einfach einsehen, wenn man ein sehr fundamentales Prinzip der modernen Physik, die Unschärferelation, zu Hilfe nimmt. Dieses Prinzip besagt, dass für ein Teilchen die beiden Größen Impuls und Ort nicht beide gleichzeitig scharf bestimmt sein können. Wir können keine genauere Festlegung der beiden Größen haben, als durch folgende Beziehung gegeben wird:

$$\Delta p_x \cdot \Delta x = \hbar \quad (3-1)$$

Das heißt aber für unser System, dass wir die Impulsverschmierung Δp_x verringern können, wenn wir dem Elektron erlauben, bei beiden Protonen zu sein, weil wir dadurch seine Ortsunschärfe Δx vergrößern. Damit wird aber auch die Energieverschmierung kleiner und die Energie des Elektrons wird abgesenkt [8].

Wenn diese Absenkung der Energie größer ist als die Anhebung aufgrund der Coulomb-Abstoßung der beiden positiven Protonen, erhalten wir eine Nettoanziehung. Wir sehen, dass es sich bei der Bindung des H_2 -Moleküls um einen typisch quantenmechanischen Effekt handelt. Die dargelegten Überlegungen bilden die Grundlage für das Verständnis der chemischen Bindung.

Mit ganz ähnlichen Überlegungen können wir auch die anziehende Wechselwirkung zwischen den Leitungselektronen in einem Metall verstehen. In dem Metall können ganz neue Teilchen ausgetauscht werden, nämlich die sog. Phononen. Die Phononen sind nichts anderes als elementare Schwingungsformen des Gitters. Haben wir irgendeinen komplizierten Schwingungsvorgang des Gitters, so können wir diesen in harmonische Wellen zerlegen. Diese Zerlegung entspricht der Fourier-Zerlegung. Die harmonischen Wellen haben für einen makroskopischen Körper eine wohldefinierte Energie. Sie haben außerdem bestimmte Wellenlängen und damit wegen $|\vec{p}| = h/\lambda$ bestimmte Impulse. Wir können sie demnach als Teilchen auffassen und nennen sie Phononen oder Schallquanten.

Ein Elektron im Gitter kann also mit einem anderen Elektron dadurch wechselwirken, dass es mit diesem Phononen austauscht. Man spricht von einer Elektron-Elektron-Wechselwirkung via Phononen. Die Austauschphononen nennt man virtuell, weil sie nur während des Übergangs von einem Elektron zum andern existieren, nicht aber die Möglichkeit haben, als reelle Phononen von den Elektronen weg in das Gitter zu laufen³⁾. Hier wird ein entscheidender Unterschied zu der Wechsel-

3 Werden von einem Elektron reelle Phononen erzeugt, so haben wir einen Prozess, der elektrischen Widerstand erzeugt, weil durch ihn aus dem System der Elektronen Energie an das Gitter übertragen werden kann.

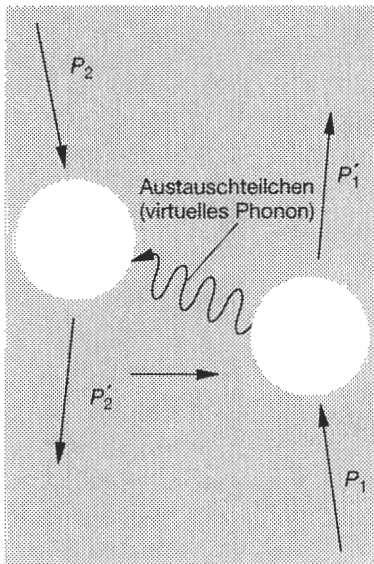


Abb. 3.4 Zur Elektron-Elektron-Wechselwirkung via Phononen.

wirkung im H_2 -Molekül sichtbar. Die Elektronen, die dort ausgetauscht werden, sind reelle Teilchen.

Diese Wechselwirkung wird schematisch in Abb. 3.4 dargestellt. Sie kann unter gewissen Bedingungen, die in Supraleitern vorliegen, so stark sein, dass sie die Abstoßung der Elektronen aufgrund der elektrostatischen Kräfte⁴⁾ überwiegt. Dann können wir die besprochene Paarkorrelation erhalten.

Die mittleren Abstände, über die diese Paarkorrelation wirksam ist, liegen für reine Supraleiter zwischen 100 nm und 1000 nm⁵⁾. Man nennt diese Länge die BCS-Kohärenzlänge ξ_0 des Cooper-Paars, die nicht mit der schon mehrfach erwähnten Ginzburg-Landau-Kohärenzlänge ξ_{GL} zu verwechseln ist. Letztere gibt an, auf welcher Längenskala sich die Gesamtheit aller Cooper-Paare ändern kann.

Man kann die BCS-Kohärenzlänge ξ_0 auch als die mittlere Ausdehnung eines Cooper-Paares deuten und sehr vereinfachend sagen: Ein Cooper-Paar hat in einem reinen Supraleiter eine mittlere Ausdehnung von 10^2 bis 10^3 nm. Diese Ausdehnung ist groß gegen den mittleren Abstand von zwei Leitungselektronen, der bei einigen 10^{-1} nm liegt. Die Cooper-Paare überlappen sehr stark. Im Bereich eines Paares liegen 10^6 bis 10^7 andere Elektronen, die ihrerseits zu Paaren korreliert sind.

4 Man muss beachten, dass die elektrostatische Abstoßung durch die positiven Ladungen der Rumpf-atome sehr stark abgeschirmt wird.

5 Die Wechselwirkung über den Austausch von Phononen ist so schwach, dass sie die Elektronen eines Cooper-Paares nicht schärfer als auf etwa ξ_0 lokalisieren kann. Eine schärfere Lokalisierung würde aufgrund der Unschärferelation eine kinetische Energie der Elektronen ergeben, die größer ist als die Bindungsenergie des Paares. Natürlich kommen diese anschaulichen Beschreibungen schnell in Schwierigkeiten. Man wird z. B. fragen, ob nicht die hohe Fermi-Geschwindigkeit die ganze Paarkorrelation zerstört. Die Antwort lautet »nein«, ohne dass wir versuchen, dies zu begründen. Hier wird einfach das Teilchenbild überstrapaziert.

Man wird intuitiv vermuten, dass eine Gesamtheit von Teilchen, die sich so stark durchdringen, besondere Eigenschaften hat. Davon soll im nächsten Abschnitt die Rede sein.

3.1.2

Der supraleitende Zustand, Quasiteilchen und die BCS-Theorie

Wir haben zumindest qualitativ gesehen, dass sich durch die Elektron-Phonon-Wechselwirkung zwei Elektronen kurzfristig anziehen und somit ein Cooper-Paar $\{\vec{k} \uparrow, -\vec{k} \downarrow\}$ bilden können. Die Frage ist nun, wie diese Paare kollektiv in den gleichen Quantenzustand gelangen können.

Hier fanden Bardeen, Cooper und Schrieffer eine trickreiche Antwort, die wir für den Fall einer Temperatur von Null kurz umreißen wollen.

Führen wir uns zunächst nochmals die Situation ungepaarter Elektronen vor Augen. Diese besetzen bei $T = 0$ die niedrigstmöglichen Energiezustände. Wenn wir die Elektronen als freie Teilchen ansehen, ist deren Energie durch

$$\varepsilon_k = \frac{1}{2m}(p_x^2 + p_y^2 + p_z^2) \quad (3-2a)$$

bzw. mit $\vec{p} = \hbar \vec{k}$ durch

$$\varepsilon_k = \frac{\hbar^2}{2m}(k_x^2 + k_y^2 + k_z^2) \quad (3-2b)$$

gegeben. Die möglichen \vec{k} -Werte sind diskret (vgl. Abschnitt 1.2), und die Elektronen besetzen im einfachsten Fall im \vec{k} -Raum eine Kugel, die Fermi-Kugel (vgl. Abb. 1.17). Alle Zustände im Innern der Fermikugel sind dabei mit Sicherheit von einem Elektron besetzt, alle Zustände außerhalb der Kugel dagegen mit Sicherheit unbesetzt.

Nun sollen die Elektronen in der Nähe der Fermi-Energie attraktiv miteinander wechselwirken, und zwar sei die anziehende Wechselwirkung gleich einer negativen Konstanten $-V$ für Elektronen, deren Energie in einem Intervall $\pm \hbar \omega_c$ um die Fermi-Energie herumliegt⁶⁾. Anderweitig sei die Wechselwirkung gleich Null.

Die Wechselwirkungsenergie V muss nicht notwendigerweise von der Elektron-Phonon-Wechselwirkung herrühren. Wenn dem aber so ist, dann liegt es nahe, die Energie $\hbar \omega_c$ mit einer charakteristischen Phonon-Energie bzw. die Frequenz ω_c mit einer charakteristischen Phonon-Frequenz – nämlich der Debye-Frequenz – zu identifizieren.

Die Cooper-Paare bauen nun um die Oberfläche der Fermi-Kugel herum einen sehr eigenartigen Zustand auf, in dem innerhalb eines gewissen Intervalls um die Fermi-Energie E_F herum die Paar-Zustände $\{\vec{k} \uparrow, -\vec{k} \downarrow\}$ gleichzeitig mit einer Wahrscheinlichkeit $|\mu_k|^2$ unbesetzt und mit einer Wahrscheinlichkeit $|\nu_k|^2$ besetzt sind. Die Wahrscheinlichkeitsamplituden μ_k und ν_k sind im allgemeinen komplexwertige

⁶ Etwas allgemeiner kann man zulassen, dass die Wechselwirkung zwischen den Elektronen vom Impuls bzw. Wellenvektor der Elektronen abhängt.

Zahlen, die vom Wellenvektor \vec{k} abhängen. Es muss $|u_k|^2 + |v_k|^2 = 1$ gelten, da sich die Wahrscheinlichkeiten, einen Zustand besetzt oder unbesetzt zu finden, zu 1 addieren müssen.

Ein derartiger Zustand ist klassisch nicht vorstellbar. In der Quantenmechanik sind aber solche Superpositionen ohne weiteres möglich.

Nun ist es die Aufgabe, die Parameter u und v zu bestimmen. Man erreicht dies dadurch, dass man den obigen Ansatz für die Wellenfunktion der Cooper-Paare in die Schrödinger-Gleichung des Systems einsetzt, die Energie des Systems in Abhängigkeit von u und v ausrechnet und dann u und v so wählt, dass die Energie minimal wird [M3, M4]. Man hat dann den energetisch besten Zustand gefunden, der mit der angenommenen Wellenfunktion möglich ist.

Mit der obigen Prozedur findet man für $|v_k|^2$ den Ausdruck

$$|v_k|^2 = \frac{1}{2} \left[1 - \frac{\varepsilon_k - E_F}{\sqrt{|\Delta|^2 + (\varepsilon_k - E_F)^2}} \right] \quad (3-3a)$$

wobei wir die Energie der einzelnen Elektronen bei Abwesenheit der Wechselwirkung V wie in Gleichung (3-2) als ε_k bezeichnet haben. E_F ist die Fermi-Energie. Die Größe Δ wird im folgenden noch sehr wichtig werden. Sie ist gegeben durch die Summe $\Delta = -V \sum_k u_k v_k$ und damit wie die Wechselwirkung V nur für ε_k -Werte im Intervall $\pm \hbar \omega_c$ verschieden von Null. Im allgemeinen ist Δ eine komplexe Zahl, die wir im folgenden auch als $\Delta = \Delta_0 e^{i\varphi}$ mit einer reellen Amplitude Δ_0 schreiben wollen. Wir haben dann $|\Delta|^2 = \Delta_0^2$.

Für $|u_k|^2 = 1 - |v_k|^2$ findet man

$$|u_k|^2 = \frac{1}{2} \left[1 + \frac{\varepsilon_k - E_F}{\sqrt{|\Delta|^2 + (\varepsilon_k - E_F)^2}} \right] = \frac{1}{2} \left[1 + \frac{\varepsilon_k - E_F}{\sqrt{\Delta_0^2 + (\varepsilon_k - E_F)^2}} \right] \quad (3-3b)$$

Die beiden Funktionen $|u_k|^2$ und $|v_k|^2$ sind in Abb. 3.5 gezeichnet, wobei wir für E_F einen Wert von 1 eV und für Δ_0 einen Wert von 1 meV angenommen haben, was typische Werte für metallische Supraleiter sind. Die Wahrscheinlichkeit $|v_k|^2$, ein Elektronenpaar in einem Zustand \vec{k} (bzw. $|\vec{k}|$) zu finden, ist tief im Inneren der Fermikugel (d.h. für $\varepsilon_k \ll E_F$) praktisch gleich eins, wie dies für nicht wechselwirkende Elektronen auch der Fall gewesen wäre. Ganz analog ist für Energien $\varepsilon_k \gg E_F$ die Wahrscheinlichkeit $|u_k|^2$ nahezu gleich 1, dass dieser Zustand unbesetzt ist. In einem Intervall von etwa $\pm \Delta_0$ um die Fermi-Energie herum weichen aber sowohl $|u_k|^2$ und $|v_k|^2$ stark von Null bzw. Eins ab. Genau dies wäre bei unabhängigen Elektronen nicht der Fall gewesen. In diesem Intervall verhält sich also das Cooper-Paarsystem nichttrivial. Das Verhältnis Δ_0/E_F beträgt in der Abbildung gleich 10^{-3} . In diesem Sinne kann man auch sagen, dass nur etwa ein Promille aller Elektronen nahe der Fermienergie an der Supraleitung teilnimmt.

Die Größe Δ hängt ihrerseits über das Produkt $u_k \cdot v_k$ von allen Zuständen k ab. Dies zeigt, dass alle Cooper-Paare kollektiv miteinander verbunden sind. Im Gegensatz dazu wäre für unabhängige Elektronen Δ immer Null, da entweder u_k oder v_k immer verschwindet.

In dem durch die BCS-Theorie beschriebenen Zustand stimmen alle Paare in allen physikalischen Größen überein. Insbesondere ist die Schwerpunktsbewegung

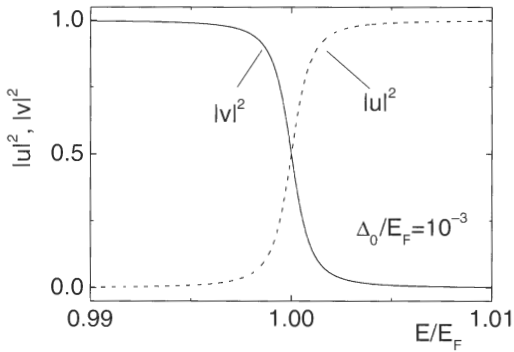


Abb. 3.5 Die Funktionen $|u_k|^2$ und $|v_k|^2$, die nach Gleichung (3-3) die Wahrscheinlichkeit angeben, dass sich ein Cooper-Paar in einem Zustand mit Wellenvektor k befindet ($|v_k|^2$) bzw. nicht befindet ($|u_k|^2$). Für die Darstellung wurde $E_F = 1$ eV und $\Delta_0 = 1$ meV gewählt.

für alle Paare die gleiche, und damit sind wir bei der makroskopischen Materiewelle angelangt, deren Eigenschaften wir in Kapitel 1 ausführlich beschrieben haben.

Welche darüber hinausgehenden Informationen liefert uns die mikroskopische Theorie?

Zunächst kann man den Energiegewinn berechnen, der durch die Cooper-Paarung entsteht, d.h. die Kondensationsenergie. Man findet, dass diese durch $-N(E_F)\Delta_0^2/2$ gegeben ist, wobei $N(E_F)$ die Zustandsdichte an der Fermienergie ist (vgl. Abschnitt 1.1). Außer von $N(E_F)$ hängt die Kondensationsenergie via Δ_0^2 auch noch von der Paar-Wechselwirkung V ab. Offensichtlich ist es für die Supraleitung günstig, wenn die beiden Größen sehr groß werden.

Das nächste wichtige Ergebnis betrifft die Frage, welche Anregungen aus dem supraleitenden Grundzustand heraus möglich sind.

Eine sehr einfache Anregung, die man sich vorstellen kann, besteht darin, ein Cooper-Paar zu zerbrechen und zwei unabhängige Elektronen zu haben. Wir können hierbei als »Elementarprozess« ein einzelnes ungepaartes Elektron betrachten und uns fragen, wie dessen (Anregungs-)Energie im Vergleich zur Energie ϵ_k desselben Elektrons im normalleitenden Zustand aussieht. Das resultierende Elektron inklusive der Wechselwirkung nennt man Quasiteilchen.

Hier findet man, dass die Energie dieses ungepaarten Elektrons durch

$$E_k = \sqrt{(\epsilon_k - E_F)^2 + \Delta_0^2} \quad (3-4)$$

gegeben ist [M3, M4]. Diese Funktion ist in Abb. 3.6 gezeichnet. Wäre Δ_0 gleich Null, würde sich $E_k = \pm(\epsilon_k - E_F)$ ergeben, man erhielte also die Energie der nicht wechselwirkenden Elektronen zurück. Für $\Delta_0 \neq 0$ hat E_k aber einen Mindestwert Δ_0 . Das bedeutet aber auch, dass mindestens zweimal dieser Wert aufgebracht werden muss, um ein Cooper-Paar zu zerbrechen und zwei dieser Quasiteilchen zu erzeugen!

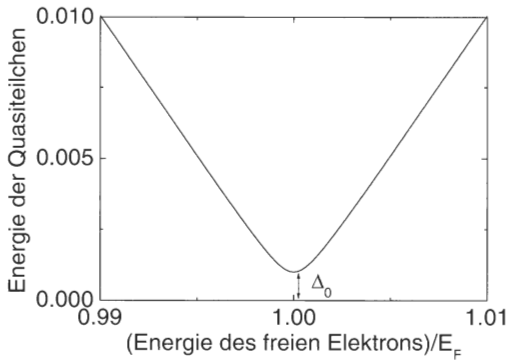


Abb. 3.6 Energie eines ungepaarten Elektrons (»Quasiteilchen«) im Supraleiter.

Wir können hier auch bereits den Einfluss der Cooper-Paar-Wechselwirkung auf die Zustandsdichte der ungepaarten Elektronen angeben. Bereits ohne diese Wechselwirkung ist die Zustandsdichte eine im allgemeinen sehr komplizierte, von der Kristallstruktur abhängende Funktion, die wir als $N_n(E)$ bezeichnen wollen. Es kommt hier aber nur auf ein kleines Intervall $\pm \Delta_0$ in der Nähe der Fermi-Energie an, und in diesem Intervall können wir die Zustandsdichte der nicht wechselwirkenden Elektronen als konstant ansehen: $N_n(E) \approx N_n(E_F)$. In diesem Fall existieren bereits ganz nahe an der Fermi-Energie Zustände, in die man die Elektronen anregen kann. Genau dies geht aber für die Quasiteilchen nicht. Hier benötigt man nach Gleichung (3-4) eine Mindestenergie Δ_0 .

Für die Zustandsdichte der Quasiteilchen bedeutet dies, dass an der Fermi-Energie in einem Intervall $\pm \Delta_0$ eine Lücke entsteht, in der keine Zustände mehr existieren. Der genaue Ausdruck für die Zustandsdichte der Quasiteilchen, die wir als $N_s(E)$ bezeichnen wollen, ergibt sich aus der BCS-Theorie für Energien $|E - E_F| \geq \Delta_0$ zu

$$N_s(E) = N_n(E_F) \cdot \frac{|E - E_F|}{\sqrt{(E - E_F)^2 - \Delta_0^2}} \quad \text{für } |E - E_F| \geq \Delta_0 \quad (3-5)$$

Für Energien $|E - E_F| < \Delta_0$ ist $N_s(E)$ gleich Null. Diese Zustandsdichte ist in Abb. 3.7 gezeichnet. Sie geht bei Energien $E = E_F \pm \Delta_0$ gegen unendlich und nähert sich für große Werte von $|E|$ rasch der Zustandsdichte $N_n(E_F)$ an.

Im Energieintervall $E_F \pm \Delta_0$ gibt es keine Zustände⁷⁾. Man nennt deshalb $2\Delta_0$ auch die »Energieklücke« des Supraleiters.

Es sei hier außerdem angemerkt, dass durch die Cooper-Paarwechselwirkung die Energiezustände der ungepaarten Elektronen zwar energetisch umverteilt, aber nicht vernichtet werden. Integriert man $N_s(E)$ über alle Energien, so erhält man die gleiche Zahl von Zuständen, die man auch im normalleitenden Zustand hat. Die meisten der Zustände, die im Normalleiter im Bereich zwischen E_F und $E_F + \Delta_0$ sind, erscheinen beim Supraleiter bei Energien knapp oberhalb von $E_F + \Delta_0$.

⁷ Wir werden in Abschnitt 3.2 sehen, dass sich diese Eigenschaft ändert, wenn die Cooper-Paare keinen ($L = 0$)-Zustand bilden (vgl. Abschnitt 2.1). Dann existieren Quasiteilchen bei jeder Energie.

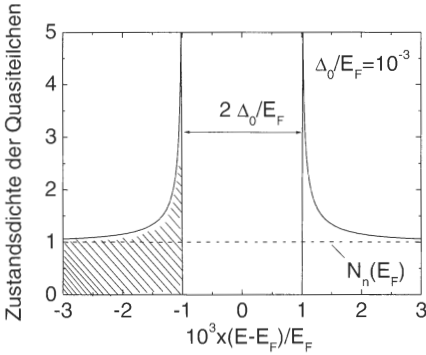


Abb. 3.7 Normierte Zustandsdichte $N_s(E)/N_n(E_F)$ der Quasiteilchen im Supraleiter entsprechend der BCS-Theorie. Für das Verhältnis Δ_0/E_F wurde 10^{-3} gewählt. Bei der Temperatur $T = 0$ sind alle Zustände unterhalb der Fermi-Energie E_F besetzt (schraffierter Bereich).

Wie wir in Abschnitt 3.1.3 sehen werden, kann die Energielücke des Supraleiters sehr schön in Infrarot-Absorptionsexperimenten, und insbesondere mittels supraleitender Tunnelkontakte beobachtet werden. Diese Messungen bestätigen ausgezeichnet unsere Vorstellungen über den supraleitenden Zustand.

Wenden wir uns nun den Eigenschaften des Supraleiters bei endlichen Temperaturen zu.

Für $T > 0$ werden einige Cooper-Paare durch thermische Fluktuationen zerbrochen, und man erhält thermisch angeregte Quasiteilchen. Diese Quasiteilchen sind genau wie die Elektronen im Normalleiter Fermionen. Die Wahrscheinlichkeit, dass in einem gegebenen Energiezustand ein Quasiteilchen vorgefunden wird, ist daher durch die Fermi-Verteilungsfunktion (1-3) gegeben.

Nun »blockiert« aber ein Quasiteilchen im Quantenzustand \vec{k} diesen Zustand für das Kondensat der Cooper-Paare, sodass sowohl die Zahl der Cooper-Paare als auch deren Bindungsenergie zurückgeht. Man erhält eine Abnahme von Δ_0 mit der Temperatur. Für $T \rightarrow T_c$ geht Δ_0 gegen Null.

Wie hängt die Dichte n_s der Cooper-Paare mit Δ_0 zusammen? Man findet: n_s ist *proportional* zu Δ_0^2 . Die Größe Δ_0 tritt uns also einmal als die (halbe) »Energielücke« des Supraleiters entgegen, andererseits bestimmt sie aber auch die Zahl der Cooper-Paare. In Kapitel 1 hatten wir die Cooper-Paardichte als das Betragsquadrat der makroskopischen Wellenfunktion $\Psi = \Psi_0 e^{iq}$ beschrieben. Man kann zeigen, dass $\Delta \propto \Psi$ gilt [9]. Paar-Amplitude Ψ_0 und Δ_0 werden daher häufig auch synonym verwendet.

Schließlich kann man aus der BCS-Theorie einen sehr einfachen Zusammenhang zwischen T_c und den Größen $N_n(E_F)$, $\hbar\omega_c$ und der Cooper-Paar-Wechselwirkung V finden. Er lautet [M3, M4]

$$T_c = 1,13 \frac{\hbar\omega_c}{k_B} \exp\left(-\frac{1}{N_n(E_F)V}\right) \quad (3-6)$$

Identifiziert man ω_c mit der Debye-Frequenz ω_D , dann erhält man auch unmittelbar einen Zusammenhang zwischen der Sprungtemperatur und der Masse M der Gitterbausteine, da die Frequenz der Gitterschwingungen umgekehrt proportional zur Wurzel aus M ist. Ersetzt man ein Isotop eines Gitterbausteins durch ein

anderes, so ändern sich die Wechselwirkungen zwischen diesen Bausteinen ansonsten nicht. Dies ist der Isotopen-Effekt, den man bei einer Cooper-Paarung durch die Elektron-Phonon-Wechselwirkung erwartet.

Weiterhin kann man in der BCS-Theorie einen Zusammenhang zwischen Δ_0 bei der Temperatur Null und T_c aufstellen. Es ergibt sich:

$$2\Delta_0(T=0) = 3,5 k_B T_c \quad (3-7)$$

Sehen wir uns nun im folgenden Abschnitt die experimentellen Befunde für die mikroskopischen Vorstellungen des supraleitenden Zustands genauer an.

3.1.3

Experimente zur unmittelbaren Bestätigung der Grundvorstellungen über den supraleitenden Zustand

Wir haben im vorangegangenen Abschnitt ein Bild des supraleitenden Zustandes entworfen, wie es von der BCS-Theorie, der so überaus erfolgreichen mikroskopischen Theorie der Supraleitung, gegeben wird. Grundsätzlich stellt natürlich die Fülle aller Beobachtungen, die durch die Theorie quantitativ oder auch nur qualitativ erklärt werden können, die volle Rechtfertigung für die wesentlichen Vorstellungen dar. Unter diesen Beobachtungen gibt es einige, die besonders unmittelbar einzelne charakteristische Eigenschaften des supraleitenden Zustandes erkennen lassen.

Wir hatten in Kapitel 1 Ergebnisse besprochen, die unmittelbar zeigen, dass bei der Supraleitung ein makroskopischer Quantenzustand mit wohldefinierter Phase vorliegt. Im folgenden Abschnitt wollen wir weitere Ergebnisse behandeln, um einerseits unser Vertrauen in die doch etwas komplizierten Vorstellungen über den supraleitenden Zustand zu stärken und andererseits diese Vorstellungen anhand konkreter Experimente zu vertiefen. Mit Ausnahme des Isotopen-Effektes sind diese charakteristischen Eigenschaften unabhängig von der speziellen Wechselwirkung, die zu der Paarkorrelation führt.

Einige der experimentellen Fakten, wie etwa das Verhalten der spezifischen Wärme oder der Isotopeneffekt, waren schon vor der Entwicklung der BCS-Theorie bekannt. Andere Experimente, wie etwa Messungen des Tunneleffektes und auch der in Kapitel 1 besprochenen Josephson-Effekte, sind erst durch die mikroskopische Theorie stimuliert worden. Die ebenfalls in Kapitel 1 besprochene Flussquantisierung stellt eine Besonderheit insofern dar, als sie von F. London schon lange vor der BCS-Theorie vermutet wurde, experimentell jedoch erst nach der Entwicklung dieser Theorie beobachtet worden ist und in ihrem quantitativen Ergebnis einen besonders überzeugenden Beweis für die Vorstellung der Cooper-Paarung lieferte.

3.1.3.1 Der Isotopeneffekt

Die Frage, ob die Kernmasse der Gitteratome einen Einfluss auf die Supraleitung hat, ob – anders ausgedrückt – die Supraleitung von dem Gitter der Rumpfatome abhängt oder nur auf das System der Elektronen beschränkt ist, wurde schon 1922 von Kamerlingh-Onnes [10] untersucht. Ihm standen damals nur die in der Natur vorkommenden Bleisorten [(M) = 206 Uranblei und (M) = 207,2 natürliches Blei] zur Verfügung. Mit seiner Nachweisgenauigkeit konnte er keinen Unterschied der Übergangstemperaturen finden. Auch spätere Versuche mit Bleiprobe(n) (E. Justi, 1941) [11] zeigten keinen Einfluss der Atommasse auf T_c .

Erst die modernere Kernphysik gestattet es, in den Kernreaktoren Isotope mit größerem Massenunterschied in genügender Konzentration herzustellen. So wurde 1950 fast gleichzeitig von Maxwell [12] einerseits und Reynolds, Serin, Wright und Nesbitt [13] andererseits bei Quecksilber eine Abhängigkeit der Übergangstemperatur von der Kernmasse festgestellt. In Tabelle 3.1 sind einige Ergebnisse aufgeführt.

Tabelle 3.1 Isotopeneffekt für Quecksilber [13].

Mittleres Atomgewicht	199,7	200,7	202,0	203,4
Übergangstemperatur T_c in K	4,161	4,150	4,143	4,126

Wir haben schon erwähnt, dass diese Ergebnisse für die Entwicklung der Supraleitung deshalb so ausschlaggebend waren, weil sie gerade zur rechten Zeit kamen, um die Idee der Elektron-Phonon-Wechselwirkung so hervorragend zu bestätigen. Schon die ersten mehr qualitativen Überlegungen von Fröhlich bzw. Bardeen ließen erwarten, dass die Übergangstemperatur T_c umgekehrt proportional zur Wurzel der Atommasse M sein sollte:

$$T_c \propto M^{-1/2} \quad (3-8)$$

Diese Abhängigkeit ist auch in der erst 7 Jahre später erschienenen BCS-Theorie geblieben, wie in Abschnitt 3.1.2 erläutert wurde.

Die Abhängigkeit (3-8) ist für eine ganze Reihe von Supraleitern sehr gut erfüllt. In Abb. 3.8 sind die Ergebnisse für Zinn dargestellt. Zinn ist deshalb besonders günstig, weil es eine relativ große Variation der Kernmasse, nämlich von (M) = 113 bis (M) = 123, erlaubt. In Abb. 3.8 sind die Ergebnisse verschiedener Laboratorien eingetragen [14]. Die gestrichelte Gerade entspricht dem Exponenten $-1/2$ in der Beziehung (3-8). Die Übereinstimmung zwischen Experiment und theoretischer Erwartung ist sehr gut.

Das ist aus heutiger Sicht beinahe etwas überraschend, da die zu Gleichung (3-8) führende Theorie sehr starke Vereinfachungen macht. Die Übereinstimmung zeigt uns, dass diese Vereinfachungen offenbar für eine größere Zahl von Supraleitern gerechtfertigt sind. Dass dies nicht immer der Fall ist, zeigt Tabelle 3.2, in der Messungen des Isotopeneffektes für verschiedene Supraleiter zusammengestellt sind.

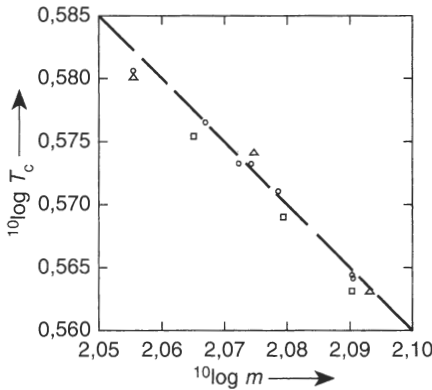


Abb. 3.8 Isotopeneffekt für Zinn.

○ Maxwell; □ Lock, Pippard und Shoenberg;
 Δ Serin, Reynolds und Lohman (nach [14]).

Tabelle 3.2 Isotopeneffekt.

Element	Hg	Sn	Pb	Cd	Tl	Mo	Os	Ru
Isotopenexponent $\beta^{a)}$	0,50	0,47	0,48	0,5	0,5	0,33	0,2	0,0

^{a)} β wird aus den Experimenten durch Anpassung an die Beziehung $T_c \propto M^{-\beta}$ erhalten. Die angegebenen Werte sind dem Buch »Superconductivity« von R. D. Parks, Marcel Dekker Inc, New York 1969, Seite 126, entnommen.

Während die Nichtübergangsmetalle recht gut den erwarteten Exponenten $\beta = 1/2$ besitzen, weichen die Übergangsmetalle doch sehr erheblich von diesem Wert ab. Trotz der beachtlichen Schwierigkeiten⁸⁾, die diese Experimente bieten, kann die Abweichung als gesichert gelten. Für Uran wird nach vorliegenden Messungen sogar ein Wert $\beta = -2,2$, also ein Isotopeneffekt mit umgekehrten Vorzeichen, angegeben [15].

Man wird angesichts der großen Erfolge der BCS-Theorie versuchen, eine Erklärung der von $1/2$ abweichenden Isotopenexponenten im Rahmen dieser Theorie zu finden. Das ist durchaus möglich, wenn man den die Wechselwirkung charakterisierenden Parameter V in Gleichung (3-6) etwas näher analysiert. Dieser Wechselwirkungsparameter ergibt sich im wesentlichen aus der Differenz der *anziehenden* Elektron-Phonon-Wechselwirkung und der *abstoßenden* Coulomb-Wechselwirkung zwischen den Elektronen. Führt man diese beiden Wechselwirkungen explizit in die Theorie ein, was im Zuge der Entwicklung dieser Theorie möglich wurde, so erhält man für T_c die verbesserte, aber auch kompliziertere Formel [16]:

$$T_c \propto \omega_D \cdot \exp \left(- \frac{\lambda^* + 1}{\lambda^* - \mu^* (1 + \lambda^* \cdot \langle \omega \rangle / \omega_D)} \right) \quad (3-9)$$

⁸ Bei den kleinen Änderungen von T_c ist es nicht ganz einfach, die Experimente mit der erforderlichen Genauigkeit durchzuführen. Man ist gezwungen, die T_c -Messungen an verschiedenen Proben zu machen. Dabei muss verlangt werden, dass alle anderen Einflüsse auf T_c , wie etwa innere Verspannungen, Verunreinigungen und Gitterfehler, die alle T_c verändern können, für alle Proben genügend gleich gehalten werden, um den Einfluss der Isotopenmasse allein zu beobachten.

Hier wird die Elektron-Phonon-Wechselwirkung durch λ^* und die Coulomb-Wechselwirkung durch μ^* charakterisiert. $\langle\omega\rangle$ ist ein bestimmter Mittelwert über alle Frequenzen des Gitters⁹⁾.

Wir wollen diese Formel hier nicht näher untersuchen. Entscheidend ist, dass bei einer solchen verbesserten Analyse die Gitterfrequenzen auch, wie zu erwarten ist, explizit in den Exponenten eingehen. Damit kann je nach der Größe von λ^* und μ^* der Einfluss des Faktors ω_D auf T_c (s. Gleichung 3-9) mehr oder weniger verändert werden. Abweichungen der Größe β in $T_c \propto M^{-\beta}$ vom Wert 1/2, ja sogar ein vollständiges Fehlen jeder M -Abhängigkeit von T_c kann deshalb nicht als ein Beweis gegen die Bedeutung der Elektron-Phonon-Wechselwirkung in diesen Supraleitern angeführt werden. Andererseits kann man oft auch nicht mit Sicherheit sagen, ob die für eine Erklärung der anomalen Isotopeneffekte erforderlichen Annahmen über λ^* und μ^* wirklich gerechtfertigt sind. Wir haben heute noch immer nicht genügend quantitative Einsicht in die Zusammenhänge zwischen der Supraleitung und den übrigen Metallparametern.

Einen wesentlichen Fortschritt haben Tunnelexperimente an Supraleitern gebracht, wie wir im nächsten Abschnitt erläutern werden. Die Elektron-Phonon-Wechselwirkung zeichnet sich bei genügender Stärke in der Strom-Spannungskennlinie von Tunneldioden ab. Eine sorgfältige Analyse solcher Kennlinien erlaubt es, die Größen λ^* und μ^* zu bestimmen.

Der Isotopeneffekt zeigt aber ganz unmittelbar den Einfluss der Gitterschwingungen und bestätigt durch seine quantitative Übereinstimmung mit der Theorie zumindest für viele Supraleiter die entscheidende Bedeutung der Elektron-Phonon-Wechselwirkung. Hier hat der Fortschritt der Kernphysik, der die Erzeugung neuer Isotope im Kernreaktor ermöglichte, ganz wesentlich auf die Entwicklung der Supraleitung gewirkt. Dies ist eines der im Zusammenhang mit der Supraleitung zahlreichen Beispiele dafür, wie ganz verschiedene physikalische Gebiete sich in ihrem Fortschritt gegenseitig beeinflussen.

Auch neu entdeckte Supraleiter werden, sofern dies möglich ist, auf den Isotopeneffekt hin untersucht. Die Ergebnisse zu den Hochtemperatursupraleitern werden wir in Abschnitt 3.2.2 besprechen. Als weitere Beispiele nennen wir hier die Fulleride K_3C_{60} und Rb_3C_{60} [17] sowie das Magnesium-Diborid [18]. In den Fullerenen wurde das Kohlenstoffisotop ^{12}C durch das Isotop ^{13}C teilweise oder ganz ersetzt. Da der Kohlenstoff ein leichtes Element ist, konnte hier eine relativ große T_c -Verschiebung im Prozent-Bereich beobachtet werden. Es ergab sich – bei großen Streuungen – ein Isotopenexponent von etwa 0,3. Der Wert ist in guter Übereinstimmung mit der Elektron-Phonon-Kopplung, wenn man annimmt, dass die intramolekularen Schwingungen der C_{60} -Moleküle den dominanten Beitrag zur Cooper-Paarung liefern.

Bei MgB_2 wurde der Isotopeneffekt sowohl bezüglich Mg als auch bezüglich B untersucht. Bei der Variation der Bor-Isotope ($^{10}B \leftrightarrow ^{11}B$) fand man einen Expo-

⁹ Einen gewissen Eindruck von der Größenordnung dieser Parameter vermitteln die folgenden Angaben: λ^* variiert zwischen 0 und ca. 2, wobei für große λ^* die Näherungen zweifelhaft werden; μ^* liegt im Bereich von etwa 0,1 bis 0,2; $\langle\omega\rangle/\omega_D$ ist etwa 0,6.

nenten von etwa 0,3, bei der Variation der Mg-Isotope ($^{26}\text{B} \leftrightarrow ^{27}\text{B}$) dagegen nur einen Exponenten von 0,02. Dies zeigt, dass offensichtlich Schwingungen der Bor-Ionen eine ganz wesentliche Rolle bei der Cooper-Paarung in MgB_2 spielen.

3.1.3.2 Die Energielücke

In Abb. 3.7 (s. Abschnitt 3.1.2) haben wir für $T = 0$ die normierte Zustandsdichte für ungepaarte Elektronen im supraleitenden Zustand dargestellt. Die Existenz eines Bereiches verbotener Energie (»energy gap«) hat uns ein einfaches Verständnis dafür gegeben, dass die Cooper-Paare unterhalb einer kritischen kinetischen Anregungsenergie nicht mit dem Gitter wechselwirken können. Zur Ausmessung der Energielücke können verschiedene Methoden verwendet werden, die wir im folgenden kurz behandeln wollen.

Absorption elektromagnetischer Strahlung

Wir haben schon auf die Möglichkeit hingewiesen, die Energielücke durch Messung der Absorption elektromagnetischer Strahlung zu bestimmen. Der erste experimentelle Nachweis für die Existenz einer Energielücke im Termschema der Einzelelektronen bei $T < T_c$ wurde von Glover und Tinkham 1957 [19] bei Beobachtungen der Infrarotdurchlässigkeit von dünnen supraleitenden Filmen erbracht.

Schon Anfang der 1930er Jahre wurde darauf hingewiesen¹⁰), dass man mit elektromagnetischen Wellen geeigneter Frequenz in der Lage sein sollte, den Ordnungszustand eines Supraleiters unterhalb der Übergangstemperatur aufzubrechen. Dies sollte sich in einer Anomalie der Absorption zeigen. Erfolgreiche Versuche waren in den 1930er Jahren nicht möglich, weil damals der erforderliche Wellenlängenbereich experimentell kaum zugänglich war. Nehmen wir eine Bindungsenergie E_B von ca. 10^{-3} eV an, so benötigen wir für diese Energie Strahlungsquanten mit einer Frequenz $f = E_B/h = 2,4 \cdot 10^{11}$ Hz (240 GHz). Das sind Wellen von ca. 1 mm Wellenlänge, für die in den 1930er Jahren weder die Erzeugungs- noch die Nachweismethoden zur Verfügung standen. Erst gut 20 Jahre später wurde diese Methode erfolgreich zur Ausmessung der Energielücke, deren Größe inzwischen durch die BCS Theorie vorhergesagt werden konnte¹¹), eingesetzt [19]. Heute haben wir auch für den Wellenlängenbereich von ca. 500 μm bis 3 cm genügend gute experimentelle Hilfsmittel, um derartige Messungen zur quantitativen Bestimmung der Energielücke zu verwenden.

Wir wollen diese Methode, deren quantitative Auswertung etwas kompliziert ist, nicht näher behandeln. Die Abb. 3.9 gibt nur ein Beispiel für eine solche Messung [20]. Die Strahlung wurde dabei in einen kleinen Hohlraum geleitet, der aus dem zu untersuchenden Material bestand. In dem Hohlraum erfährt die Strahlung sehr viele Reflexionen, bevor sie nachgewiesen wird. Je stärker die Absorption der

¹⁰ Siehe dazu W. Meißner: Handbuch der Experimentalphysik von Wien u. Harms, Band XI, 2. Teil, Seite 260, Akademische Verlagsgesellschaft Leipzig 1935.

¹¹ Die Existenz einer Energielücke im Termschema des Supraleiters unterhalb von T_c wurde schon 1946 von Daunt und Mendelsohn vorgeschlagen, siehe J. G. Daunt u. K. Mendelsohn: Proc. R. Soc. London, Ser. A 185, 225 (1946).

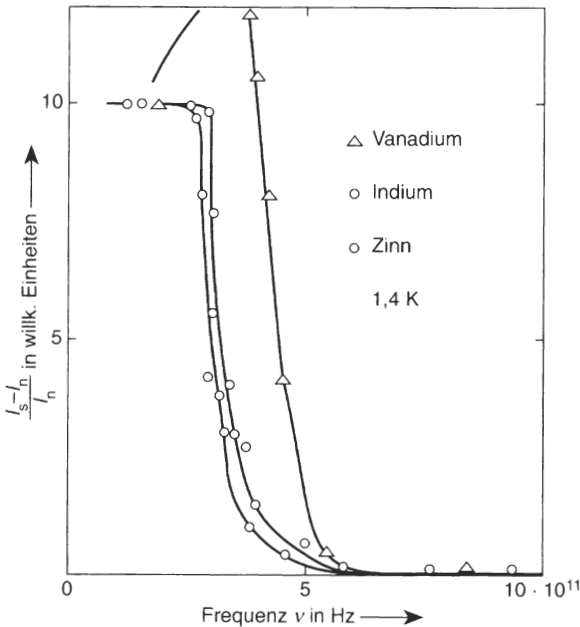


Abb. 3.9 Zur Absorption elektromagnetischer Wellen der Frequenz f in Supraleitern. Übergangstemperaturen T_c : V 5,3 K; In 3,42 K; Sn 3,72 K; Messtemperatur: 1,4 K. Bei Vanadium wird für $f < 2\Delta_0/h$ eine Frequenzabhängigkeit beobachtet, deren mögliche Ursachen hier nicht diskutiert werden können (nach [20]).

Strahlung in der Hohlraumwand ist, umso kleiner wird die nachgewiesene Leistung. Die Messung erfolgt nun in der Weise, dass bei einer festen Temperatur (hier ca. 1,4 K) für jede Wellenlänge die Leistung im supra- und im normalleitenden Zustand, I_s bzw. I_n , bestimmt wird. Die Supraleitung kann dabei durch ein genügend hohes Magnetfeld zerstört werden. Die Differenz dieser Leistungen gibt den Unterschied der Reflexion in beiden Zuständen. In Abb. 3.9 ist diese Differenz bezogen auf die Leistung im normalleitenden Zustand gegen die Frequenz aufgetragen. Bei kleinen Frequenzen ist ein deutlicher Unterschied der Reflexion im supra- bzw. normalleitenden Zustand zu beobachten. Die Reflexion im supraleitenden Zustand ist größer. Bei einer bestimmten Frequenz tritt ein starker Abfall der Differenz auf, und bei größeren Frequenzen wird der Unterschied zwischen beiden Zuständen Null. Die Deutung ist nun, dass der starke Abfall dann auftritt, wenn die Quantenenergie der Strahlung ausreicht, um die Cooper-Paare aufzubrechen. Dies bedeutet eine zusätzliche Absorption¹²⁾. Für Energien $hf > 2\Delta_0$ ist

¹² Solche »Absorptionskanten« werden auch bei Halbleitern beobachtet. Der Bereich verbotener Energie ist dort jedoch sehr viel größer, z. B. ca. 0,8 eV für Germanium. Dementsprechend liegt der Abfall der Absorption bei ca. 1000mal kleineren Wellenlängen, d. h. bei Wellenlängen von ca. 1 μm , also im nahen Infrarot.

praktisch kein Einfluss der Energielücke auf die Absorption vorhanden, weil die Strahlungsquanten die Elektronen weit über die Lücke anregen können. In Tabelle 3.3 sind für einige Elementsupraleiter Werte für die Energielücke bei $T = 0$ aus derartigen Messungen angegeben. Die Tabelle 3.4 gibt Werte für die Energielücke für einige ausgewählte supraleitende Verbindungen und Legierungen an.

Tabelle 3.3 Die Energielücke $2\Delta_0$ für einige Element-Supraleiter, gemessen in Einheiten von $k_B T_c$. Die Zahlen in Klammern geben die Energielücke in meV an.

Element	Messmethode			
	T_c in Kelvin	Tunneleffekt	Ultraschall	Lichtabsorption
Sn	3,72	$3,5 \pm 0,1$ (1,15)	–	3,5
In	3,4	$3,5 \pm 0,1$ (1,05)	$3,5 \pm 0,2$	$3,9 \pm 0,3$
Tl	2,39	$3,6 \pm 0,1$ (0,75)	–	–
Ta	4,29	$3,5 \pm 0,1$ (1,30)	$3,5 \pm 0,1$	3,0
Nb	9,2	$3,6$ (2,90)	$4,0 \pm 0,1$	$2,8 \pm 0,3$
Hg	4,15	$4,6 \pm 0,1$ (1,65)	–	$4,6 \pm 0,2$
Pb	7,2	$4,3 \pm 0,05$ (2,70)		$4,4 \pm 0,1$

Die Werte sind entnommen aus: R. D. Parks »Superconductivity«, S. 141 und S. 216, sowie: D. H. Douglass Jr. und L. M. Falicov: »Progress of Low Temperature Physics«, Band 4, 97 (1964), North-Holland, Amsterdam. Für detaillierte Angaben siehe Physik Daten, »Superconductivity Data« Nr. 19-1 (1982), Fachinformationszentrum Karlsruhe GmbH.

Tabelle 3.4 Die Energielücke $2\Delta_0$ für ausgewählte supraleitende Verbindungen (s-Wellen-Cooper-Paarung); (Messmethoden: Tunneleffekt, optische Methoden, Kernspinresonanz, spezifische Wärme u.a.). Viele Daten findet man auch in der Monographie [M14].

Material	T_c in K	$2\Delta_0$ in meV	$2\Delta_0/k_B T_c$	Lit.	Siehe auch Abschnitt
Nb ₃ Sn	18	6,55	4,2	[21]	2.3.1
NbN	13	4,6	4,1	[22]	2.3.1
MgB ₂	40	3,6–15	1,1–4,5	[18]	2.3.2
Rb ₃ C ₆₀	29,5	10–13	4,0–5,1	[17]	2.4
ErRh ₄ B ₄	8,5	2,7–3	3,8–4,2	[23]	2.5
PbMo ₆ S ₃	12	4–5	4–5	[24]	2.5
YNi ₂ B ₂ C	15,5	4,7	3,5	[25]	2.5
NbSe ₂	7	2,2	3,7	[26]	2.7
BaPb _{0,75} Bi _{0,25} O ₃	11,5	3,5	3,5	[27]	2.8.2
Ba _{0,6} K _{0,4} BiO ₃	25–30	8	3,5	[28]	2.8.2

Ultraschallabsorption

Auch Schallwellen wechselwirken mit dem System der Leitungselektronen in einem Metall. Wir können eine Schallwelle als einen Strom kohärenter Phononen auffassen. Bis vor kurzem standen uns als Ultraschall nur Frequenzen von maximal ca. 30 GHz zur Verfügung. Die meisten Messungen wurden mit Frequenzen von einigen MHz bis 10 MHz durchgeführt. Die Energien dieser Frequenzen sind wesentlich kleiner als die Breite der Energielücke. Nur in unmittelbarer Nähe von T_c , wo die Energielücke $2\Delta_0(T)$ gegen Null geht, ist es möglich, dass die Schallenergie dieser Frequenzen vergleichbar mit $2\Delta_0(T)$ wird. Die Absorption wird da-

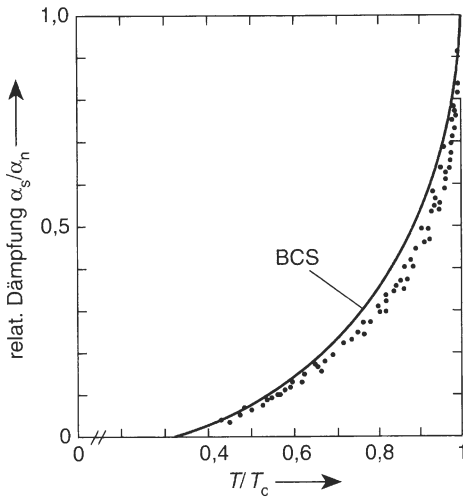


Abb. 3.10 Ultraschallabsorption in supraleitendem Zinn und Indium. Die eingezeichnete Kurve gibt die Werte wieder, wie sie nach der BCS-Theorie für eine Energielücke $2\Delta_0 = 3,5 k_B T_c$ zu erwarten sind (nach [29]).

her neben anderen Mechanismen im wesentlichen von der Zahl der ungepaarten Elektronen abhängen. Unterhalb von T_c nimmt diese Zahl mit sinkender Temperatur rasch ab. Entsprechend nimmt die Schalldämpfung unterhalb von T_c ebenfalls rasch ab. Abb. 3.10 gibt ein Beispiel für eine solche Messung [29]. Da die jeweilige Zahl der ungepaarten Elektronen bei gegebener Temperatur von der Breite der Energielücke abhängt, kann man aus solchen Absorptionsmessungen durch Vergleich mit der theoretisch erwarteten Abhängigkeit diese Breite der Energielücke bestimmen. In Abb. 3.10 ist die nach der BCS-Theorie für $2\Delta_0(T=0) = 3,5 k_B T_c$ (Gleichung 3-7) zu erwartende Kurve eingezeichnet.

Wir können hier auf die ebenfalls nicht ganz einfache Analyse solcher Messungen nicht näher eingehen. Es sei nur erwähnt, dass die Schallwellen gegenüber elektromagnetischen Wellen den großen Vorteil haben, tiefer in das Metall hineinfließen zu können, während die hochfrequenten elektromagnetischen Wellen nur in eine sehr dünne Oberflächenschicht, nämlich bis zur Skintiefe, eindringen können.

Tunnelexperimente

Die Möglichkeit, Tunnelexperimente zur Bestimmung der Energielücke zu verwenden, wurde von I. Giaever 1961 [30, 31] angegeben. Wir wollen diese Messmethode ausführlich behandeln, da sie weit über die Bestimmung der Energielücke hinaus eine Fülle von neuen Erkenntnissen gebracht hat.

Die Methode beruht auf der Beobachtung eines Tunnelstromes durch eine dünne Isolationschicht zwischen einer Referenzprobe und dem Supraleiter, der untersucht werden soll. Im Gegensatz zum Josephsonstrom, den wir in Kapitel 1 behandelt haben, geht es jetzt aber um das Tunneln der ungepaarten Elektronen.

In Abb. 3.11a ist die Anordnung schematisch gezeigt. Zwei metallische Leiter, z.B. zwei Al-Schichten, sind durch eine sehr dünne Isolatorschicht, z.B. Al_2O_3 , getrennt. Das Al_2O_3 ist ein sehr guter Isolator, der sich auch bei einer Dicke von wenigen Nanometern fast perfekt herstellen lässt.

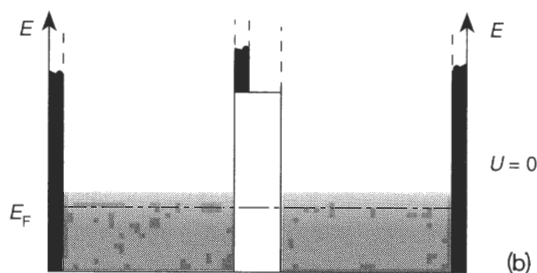
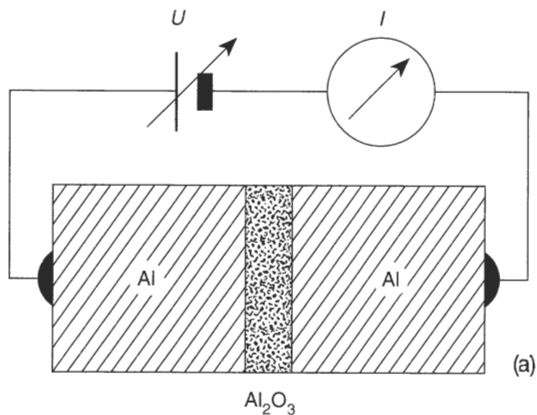


Abb. 3.11 (a) Anordnung zur Messung eines Tunnelstromes (schematisch); (b) Darstellung der erlaubten Energiewerte (schwarz) und ihrer Besetzung (punktiert).

Wir wollen uns diesen Tunneleffekt wegen seiner Bedeutung, z. B. auch in der Halbleiterphysik, etwas genauer ansehen. Dazu sind in Abb. 3.11b die erlaubten und verbotenen Energiebereiche für die drei Teile der Tunnelanordnung in der Umgebung der Fermi-Energie schematisch wiedergegeben. Die vollen vertikalen Balken markieren die erlaubten Energiebänder. Die Punktierung gibt die Besetzung wieder. Die Temperaturverschmierung der Besetzung ist angedeutet. Im Isolator liegen die nächsten erlaubten und unbesetzten Energiewerte sehr viel höher.

Der Tunneleffekt wird auch ohne ausführliche Rechnung verständlich, wenn wir uns an den Wellencharakter unserer Teilchen erinnern. Wenn eine Welle auf die Trennfläche zu einem Medium trifft, in das sie nicht eindringen kann, so muss die Welle *total reflektiert werden*. Dabei ist es intuitiv klar, dass die Welle ein gewisses Stück in den verbotenen Bereich eindringen wird. Sie tastet sozusagen die Möglichkeit ihrer Existenz in diesem Stoff ab. Dabei nimmt ihre Amplitude exponentiell ab, und zwar um so rascher, je größer die Differenz zwischen der Energie der Welle und einem erlaubten Wert der Energie ist, anders ausgedrückt, je höher die Barriere ist. Mit dieser natürlich sehr qualitativen Betrachtung wird sofort klar, dass für genügend dünne Barrieren eine endliche Wahrscheinlichkeit besteht, auch hinter der Barriere eine Welle zu bekommen, nämlich immer dann, wenn die Dicke der Barriere vergleichbar wird mit der Abklingstrecke der Amplitude in dem verbotenen Bereich. Dann nämlich kommt eine endliche Amplitude an der Rückseite an und kann dort wieder in den erlaubten Bereich austreten. Natürlich ist dort die Amplitude sehr klein, d. h. die Wahrscheinlichkeit für den Durchtritt eines Teil-

chens nimmt entsprechend der Wellenamplitude mit wachsender Dicke der Barriere rasch ab. Die Tunnelwahrscheinlichkeit hängt also von der energetischen Höhe und der Dicke der Barriere ab. Die energetische Höhe der Barriere ist dabei von der Energie des Teilchens aus zu messen, in unserem Fall der Abb. 3.11b also praktisch von E_F aus.

Wir haben es bei der vorliegenden Anordnung mit Elektronen, also mit Fermi-Teilchen, zu tun. Für sie gilt das Pauli-Verbot (s. Abschnitt 1.1). Für einen Übergang durch die Barriere muss das Elektron auf der anderen Seite einen freien Zustand finden. Sind dort alle Zustände schon besetzt, so wird auch bei genügend dünner Barriere kein Übergang stattfinden können. Die Zahl der durch die Barriere laufenden Teilchen hängt also von drei Größen ab:

1. der Zahl der Elektronen, die gegen die Barriere anlaufen,
2. der Wahrscheinlichkeit, die Barriere zu durchtunneln,
3. der Zahl der freien Plätze, die auf der anderen Seite zur Verfügung stehen.

Diese drei Größen müssen in die quantitative Beschreibung eines Tunnelstromes von Elektronen eingehen.

In Abb. 3.11b haben wir die Tunnelanordnung *ohne* äußere Spannung dargestellt. Wenn Elektronen zwischen zwei Systemen ausgetauscht werden können, so ist der Gleichgewichtszustand dadurch festgelegt, dass die Fermi-Energie auf gleicher Höhe liegt, in unserer Darstellung also eine horizontale Gerade bildet. Für diesen Zustand ist der Nettoaustausch von Teilchen gerade Null. Es tunneln gleich viele Elektronen von rechts nach links wie umgekehrt.

Nun legen wir eine Spannung $U \neq 0$ an die Anordnung. Die Spannung liegt praktisch vollständig an der Isolierschicht. Das bedeutet, dass sich die Fermi-Energien rechts und links von der Isolierschicht um den Energiebetrag $e \cdot U$ unterscheiden. Es werden sich die Tunnelströme in beiden Richtungen nicht mehr kompensieren, es fließt ein Nettostrom I .

Um uns die Größe des Stromes und seine Abhängigkeit von der Spannung U klarzumachen, ist in Abb. 3.12 eine Darstellung gewählt, die auch die Zustandsdichten enthält. In der unmittelbaren Umgebung der Fermi-Energie können wir die Zustandsdichte im Modell der freien Elektronen näherungsweise als konstant ansehen. In Abb. 3.12 ist die Tunnelanordnung für die Spannungen $U = 0$, $U = U_1$ und $U = U_2 > U_1$ wiedergegeben. Die Besetzung der Zustände wird durch die Schraffur angedeutet. Zur Vereinfachung wurde der Fall $T = 0$ gewählt. Die Energie der Elektronen als negativ geladene Teilchen wird auf der positiven Seite der Spannung gegen die negative Seite abgesenkt. Nun können mehr Elektronen von links nach rechts tunneln als umgekehrt, es fließt ein Elektronenstrom (Pfeil in Abb. 3.12b und c). Da wir die Zustandsdichte konstant angenommen haben, wächst die Zahl der Elektronen, die von links nach rechts tunneln können, proportional zur Spannung U . Der Nettotunnelstrom I ist deshalb ebenfalls proportional zur angelegten Spannung U (Abb. 3.14, gestrichelte Kurve¹³). An dieser Stelle soll aus-

¹³ Wir vernachlässigen bei dieser Betrachtung den Einfluss der angelegten Spannung auf die energetische Höhe der Barriere.

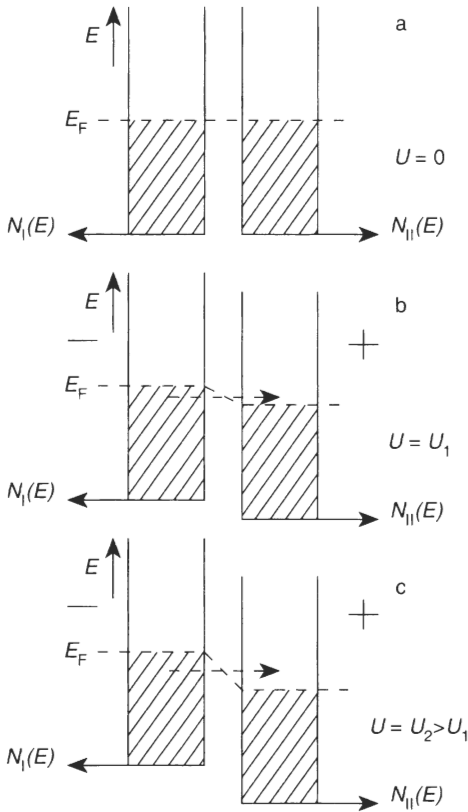


Abb. 3.12 Zum Tunnelstrom zwischen normalleitenden Metallen. Zur Vereinfachung wurde die Besetzung für $T=0$ eingezeichnet. In der Isolierschicht sind in der Nähe von E_F keine Zustände.

drücklich nochmals betont werden, dass wir hier nur Tunnelprozesse bei konstanter Energie betrachten¹⁴⁾, Übergänge also, die in unserer Darstellung horizontal einzuzeichnen sind.

Die Strom-Spannungs-Charakteristik einer solchen Tunnelanordnung ändert sich, wenn die eine oder beide Seiten im supraleitenden Zustand sind. Dies ist sofort ersichtlich, wenn wir bedenken, dass im supraleitenden Zustand eine Energielücke im Termschema der Einzelelektronen auftritt und damit die Zustandsdichte in der Nähe der Fermi-Energie grundsätzlich verändert wird.

In Abb. 3.13 ist der erste Fall, Normalleiter gegen Supraleiter, in der Art der Abb. 3.12 dargestellt. Wieder wählen wir zur Vereinfachung den Fall $T=0$. Die zugehörige Strom-Spannungs-Charakteristik ist in der Abb. 3.14 als Kurve 2 gezeigt. Bis zur Spannung $U = \Delta_0/e$ kann kein Tunnelstrom fließen, weil die Elektronen des Normalleiters keine Zustände im Supraleiter finden. Bei $U = \Delta_0/e$ setzt der Tunnelstrom mit vertikaler Tangente ein. Dieser steile Anstieg ist durch

¹⁴ Ein Elektron kann während des Tunnelprozesses, z. B. in der Barriere, ein Phonon absorbieren oder emittieren. Solche Prozesse, die als »phonon assisted tunneling« bezeichnet werden, sind selten und sollen zunächst außer Betracht bleiben.

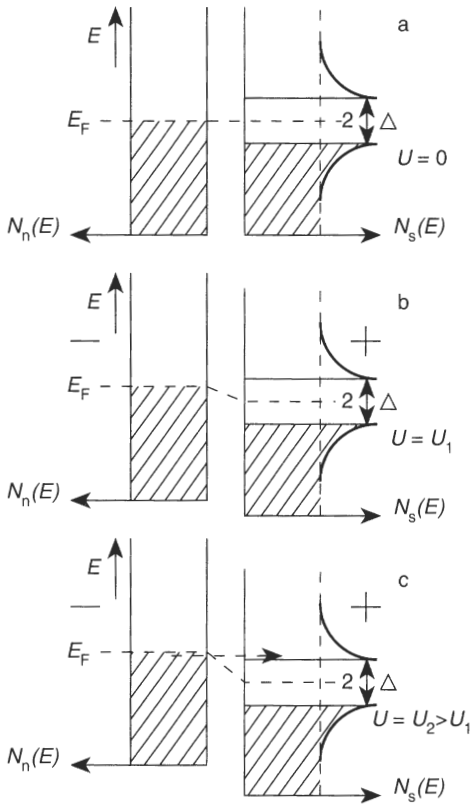


Abb. 3.13 Zum Tunnelstrom zwischen Normalleiter und Supraleiter. $T = 0$ K.

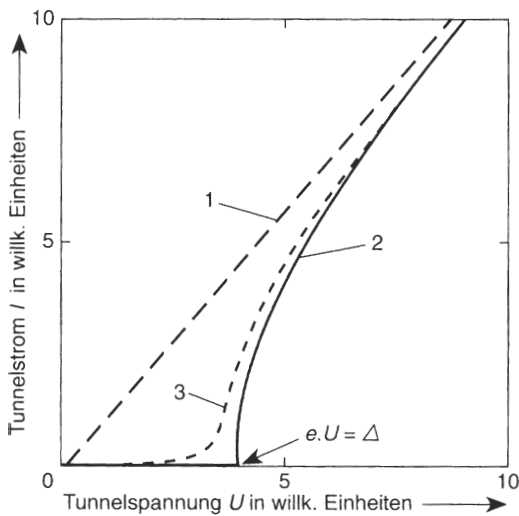


Abb. 3.14 Strom-Spannungs-Kurven für Tunnelkontakte. 1: Normalleiter/Normalleiter, Abb. 3.12; 2: Normalleiter/Supraleiter, $T = 0$ K, Abb. 3.13; 3: Normalleiter/Supraleiter, $0 < T < T_c$.

die hohe Dichte der freien Zustände im Supraleiter bedingt. Bei noch höheren Spannungen läuft die Kurve gegen die Tunnelkennlinie für zwei Normalleiter (Kurve 1). Bei endlichen Temperaturen haben wir die Besetzung im Normalleiter etwas verschmiert und auch entsprechend einige Einzelelektronen im Supraleiter oberhalb der Energielücke, die auch etwas kleiner ist, wie in Abschnitt 3.1.2 erläutert. Dann erhalten wir eine Kennlinie, wie sie durch Kurve 3 schematisch dargestellt ist.

Aus solchen Kennlinien lässt sich die Energielücke bequem bestimmen. Aus dem Verlauf der Funktion $I(U)$ lassen sich bei bekannter Zustandsdichte des Normalleiters auch quantitative Aussagen über den Verlauf der Zustandsdichte für ungepaarte Elektronen im Supraleiter gewinnen. Für $T = 0$ und $N_n(E) = \text{const.}$ gibt die Ableitung dI/dU direkt die Zustandsdichte der Einzelelektronen $N_s(E)$.

Es soll noch erwähnt werden, dass die Tunnelcharakteristik unabhängig von der Richtung der Spannung ist. Bei Umkehr der Spannung vertauschen lediglich die unbesetzten und die besetzten Zustände ihre Rolle. Polen wir den Supraleiter negativ, so können bei $U = \Delta_0/e$ die ungepaarten Elektronen in die freien Zustände des Normalleiters tunneln. Es ist festzuhalten, dass bei einem Tunnelprozess von Einzelelektronen wegen des Pauli-Verbots nicht nur die Elektronen im Ausgangszustand (z. B. links in Abb. 3.13), sondern auch die freien Plätze für den Endzustand (rechts in Abb. 3.13) vorhanden sein müssen.

Bevor wir den Fall 2, nämlich einen Tunnelkontakt aus zwei Supraleitern, behandeln, wollen wir den quantitativen Zusammenhang zwischen den wichtigen Größen betrachten. Wir haben schon festgestellt, dass die Wahrscheinlichkeit für einen Tunnelprozess von der Höhe und Breite der Barriere abhängt. In dem kleinen Energiebereich in der Nähe der Fermi-Energie, den wir hier betrachten, können wir diese Wahrscheinlichkeit als konstant (unabhängig von der Energie) ansehen. Wir nennen sie D (Durchlässigkeit). Die Zahl der pro Zeiteinheit z. B. bei der Energie E von links nach rechts tunnelnden Elektronen ist weiter proportional zur Zahl der links *besetzten* Zustände $N_l(E) \cdot f(E)^{15}$ und zur Zahl der rechts *freien* Plätze.

Die Wahrscheinlichkeit, bei einer Energie E einen freien Platz zu finden ist gerade 1 minus der Wahrscheinlichkeit, dass dieser Platz besetzt ist, also $1-f(E)$. Wenn eine Spannung U über der Barriere abfällt, tunneln die Elektronen von einem Zustand der Energie E auf der linken Seite in einen Zustand der Energie $E + eU$ auf der rechten Seite. Deren Anzahl ist also bei der Spannung U gegeben durch $N_{II}(E + eU) \cdot [1 - f(E + eU)]$.

Die Energie der Elektronen zählen wir im Folgenden von der Fermi-Energie aus: $\tilde{\epsilon} = E - E_F$. Wir haben also in einem kleinen Energieintervall $d\tilde{\epsilon}$ bei der Energie $\tilde{\epsilon}$ den kleinen Beitrag zum Tunnelstrom von links nach rechts:

$$dI_{l \rightarrow II} \propto D \cdot N_l(\tilde{\epsilon}) \cdot f(\tilde{\epsilon}) \cdot N_{II}(\tilde{\epsilon} + eU) \cdot [1 - f(\tilde{\epsilon} + eU)] d\tilde{\epsilon} \quad (3-10)$$

Der gesamte Tunnelstrom $I_{l \rightarrow II}$ wird durch Integration über alle Energien erhalten.

¹⁵ Wir kennzeichnen die Zustandsdichten in den Elektroden mit den Indizes I bzw. II.

Es gilt:

$$I_{I \rightarrow II} \propto D \cdot \int_{-\infty}^{\infty} N_I(\tilde{\epsilon}) \cdot f(\tilde{\epsilon}) \cdot N_{II}(\tilde{\epsilon} + eU) \cdot [1 - f(\tilde{\epsilon} + eU)] d\tilde{\epsilon} \quad (3-11)$$

Wir müssen von $-\infty$ bis $+\infty$ integrieren, da wir die Energie von E_F aus zählen. Ebenso erhalten wir den Tunnelstrom $I_{II \rightarrow I}$ von rechts nach links:

$$I_{II \rightarrow I} \propto D \cdot \int_{-\infty}^{\infty} N_{II}(\tilde{\epsilon} + eU) \cdot f(\tilde{\epsilon} + eU) \cdot N_I(\tilde{\epsilon}) \cdot [1 - f(\tilde{\epsilon})] d\tilde{\epsilon} \quad (3-12)$$

Die Differenz beider liefert schließlich den Nettotunnelstrom:

$$I = I_{I \rightarrow II} - I_{II \rightarrow I} \propto D \cdot \int_{-\infty}^{\infty} N_I(\tilde{\epsilon}) \cdot N_{II}(\tilde{\epsilon} + eU) \cdot [f(\tilde{\epsilon}) - f(\tilde{\epsilon} + eU)] d\tilde{\epsilon} \quad (3-13)$$

Dabei ist nach Gleichung (1-3):

$$f(\tilde{\epsilon}) = \frac{1}{e^{\tilde{\epsilon}/k_B T} + 1} \quad \text{mit } \tilde{\epsilon} = E - E_F \quad (3-14)$$

Wir haben diese kurze Ableitung deshalb gebracht, weil sie uns in so einfacher Weise als Bilanzgleichung den quantitativen Zusammenhang gibt. Für die Verhältnisse der Abb. 3.13 z. B. können wir $N_n(\tilde{\epsilon}) = \text{const}$ annehmen und für $N_s(\tilde{\epsilon})$ die Beziehung (3-5) aus Abschnitt 3.1.2, umgeschrieben von E auf $\tilde{\epsilon}$, verwenden:

$$N_s(\tilde{\epsilon}) = N_n(0) \cdot \frac{|\tilde{\epsilon}|}{\sqrt{\tilde{\epsilon}^2 - \Delta_0^2}} \quad \text{für } |\tilde{\epsilon}| \geq \Delta_0 \quad (3-15)$$

Wir können dann den Verlauf der Tunnelkennlinie berechnen. Ein besonders einfaches Übungsbeispiel ist der in Abb. 3.12 dargestellte Fall eines Tunnelkontaktes zwischen zwei Normalleitern¹⁶⁾.

Nun betrachten wir den Fall eines Tunnelkontaktes aus zwei Supraleitern. In Abb. 3.15a und b ist ein solcher Kontakt in der uns schon bekannten Weise dargestellt. Hier ist lediglich das Teilbild für $U = 0$ weggelassen. Im Teilbild c der Abb. 3.15 ist die Strom-Spannungs-Charakteristik schematisch wiedergegeben.

Da sich in diesem Fall die Kennlinie für endliche Temperaturen grundsätzlich von der für $T = 0$ unterscheidet, haben wir hier eine Besetzung für $T \neq 0$ angenommen. Die gestrichelte Linie in Abb. 3.15c würde man für $T = 0$ erhalten. Bei $e \cdot U = \Delta_{II} - \Delta_I$ wird ein Maximum des Tunnelstromes erreicht, weil nun alle Einzelelektronen des Supraleiters I nach rechts tunneln können und dort eine besonders hohe Dichte unbesetzter Zustände finden. Der Strom nimmt dann mit wachsender Spannung ab, weil die Dichte der unbesetzten Zustände in II abnimmt.

¹⁶ Im Fall der Abb. 3.12 wird für alle $\tilde{\epsilon} > 0$ die Klammer $[f(\tilde{\epsilon}) - f(\tilde{\epsilon} + eU)]$ gleich Null, da beide Fermifunktionen den Wert Null haben. Dabei ist unabhängig vom Vorzeichen der Elektronenladung $eU > 0$ angenommen. Für $\tilde{\epsilon} < -eU$ wird die Klammer ebenfalls gleich Null, da beide Fermifunktionen den Wert 1 haben. Nur in dem Bereich $-eU < \tilde{\epsilon} < 0$ hat die Klammer den Wert 1. Die als konstant angenommene Zustandsdichte können wir vor das Integral ziehen. Wir erhalten (vgl. Kurve 1 in Abb. 3.14):

$$I \propto D \cdot N_I \cdot N_n \cdot \int_{-eU}^0 1 \cdot d\tilde{\epsilon} \propto U$$

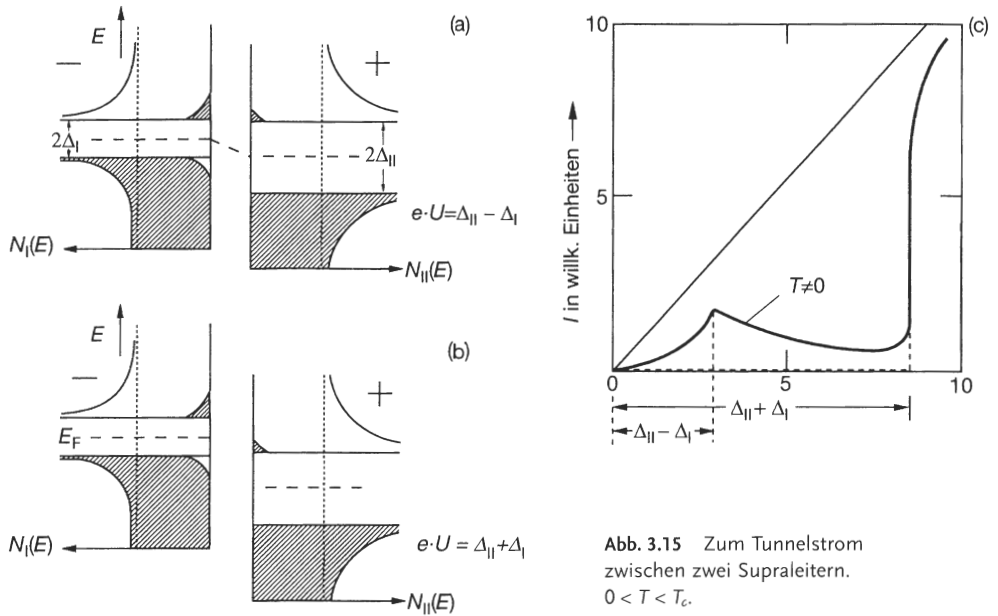


Abb. 3.15 Zum Tunnelstrom zwischen zwei Supraleitern. $0 < T < T_c$.

Bei $e \cdot U = \Delta_{II} + \Delta_I$ wird dann ein besonders steiler Anstieg von I beobachtet. Hier kommt nun sowohl die hohe Dichte der besetzten als auch der unbesetzten Zustände zur Wirkung. In dem besonders steilen Anstieg liegt der messtechnische Vorteil bei der Verwendung von zwei Supraleitern.

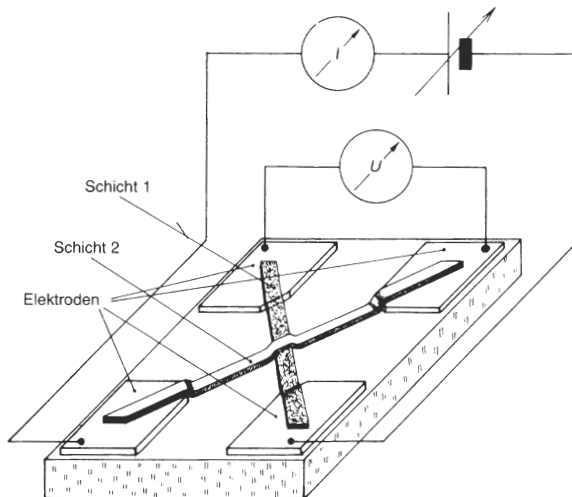


Abb. 3.16 Tunnelkontakt aus zwei Schichten. Schicht 1 wurde vor der Kondensation von Schicht 2 oxidiert. Die Schichtdicken sind für die Darstellung stark vergrößert. Sie sind meist kleiner als $1 \mu\text{m}$. Für die Oxidbarrieren sind Dicken von ca. 3 nm zweckmäßig.

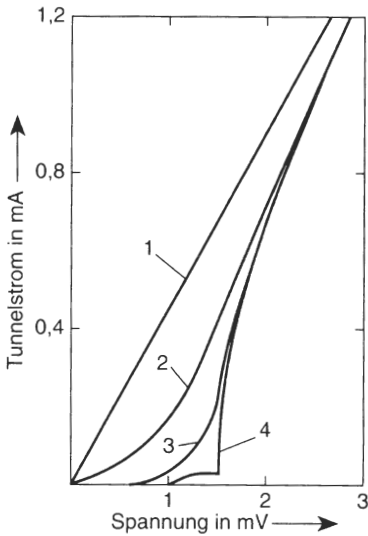


Abb. 3.17 Strom-Spannungs-Kennlinien eines Tunnelkontaktes Al-Al₂O₃-Pb. Kurve 1: $T = 10$ K; Kurve 2: $T = 4,2$ K; Kurve 3: $T = 1,64$ K; Kurve 4: $T = 1,05$ K; bei 1,05 K ist auch das Al supraleitend. Der steile Anstieg bei $e \cdot U = \Delta_I + \Delta_{II}$ ist deutlich sichtbar. Übergangstemperaturen: Pb 7,2 K; Al 1,2 (nach [32]).

Mit Hilfe von Tunnelexperimenten ist eine Fülle von Aussagen über die Energielücke gewonnen worden. Meist werden zwei dünne aufgedampfte Schichten mit einer Oxidschicht als Barriere verwendet. Es können aber auch kompakte Proben verwendet werden, um etwa schwer verdampfbare Substanzen zu untersuchen. Die Barriere kann auch hier aus einer Oxidschicht bestehen oder durch Bedampfen mit einem Isolator erzeugt werden. Die Untersuchung von kompakten Proben ist dann erforderlich, wenn man Einkristalle verwendet, um die Energielücke für eine bestimmte Kristallrichtung festzustellen.

Die Abb. 3.16 gibt eine Anordnung für aufgedampfte Schichten wieder. Die Fläche für den Tunnelstrom wird zweckmäßigerweise klein gehalten, um keine zu großen Tunnelströme zu bekommen und um die Wahrscheinlichkeit für Löcher in der Oxidschicht herabzusetzen.

Abb. 3.17 zeigt die Ergebnisse an einem Tunnelkontakt Al-Al₂O₃-Pb bei vier verschiedenen Temperaturen [32]. Für die Kurven 1, 2 und 3 ist das Al normallei-

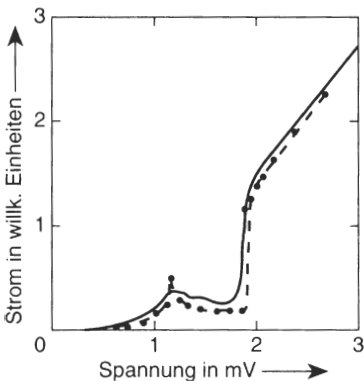


Abb. 3.18 Strom-Spannungs-Kennlinie eines Tunnelkontaktes Niob-Isolator-Zinn bei $T = 3,38$ K. Die ausgezogene Kurve ist eine Registrierkurve des Experiments. Die vollen Punkte sind nach Gleichung (3-13) berechnet mit $2\Delta_{Sn} = 0,74$ meV und $2\Delta_{Nb} = 2,98$ meV (nach [33]).

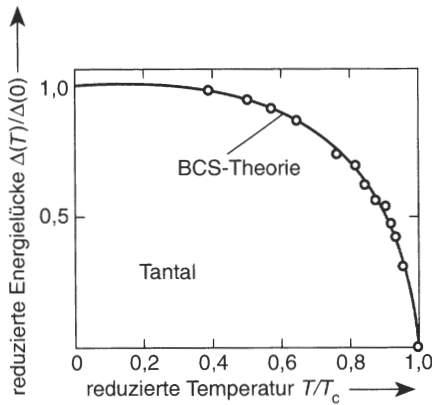


Abb. 3.19 Temperaturabhängigkeit der Energielücke von Tantal; $\Delta(0) = 1,3 \text{ meV}$ (nach [34]).

tend. Nur für die Kurve 4 haben wir es mit einer Anordnung aus zwei Supraleitern zu tun, wobei allerdings die Messtemperatur 1,05 K nur wenig unter der Übergangstemperatur des Al (1,2 K) liegt. Deutlich ist jedoch schon die neue Form der Kennlinie zu sehen.

Die Abb. 3.18 zeigt uns die Kennlinie für einen typischen Kontakt aus zwei Supraleitern, nämlich Nb-Nioboxid-Sn bei 3,4 K [33]. Bei dieser Temperatur sind Nb ($T_c = 9,3 \text{ K}$) und Sn ($T_c = 3,7 \text{ K}$) supraleitend. Die ausgezogene Kurve ist die Registrierkurve des Experiments. Die Punkte sind berechnet nach Gleichung (3-13) für geeignete Werte der Energielücken ($2\Delta_{\text{Sn}} = 0,74 \text{ meV}$; $2\Delta_{\text{Nb}} = 2,98 \text{ meV}$).

Die Abb. 3.19 schließlich zeigt ein Beispiel für die Temperaturabhängigkeit der Energielücke, und zwar für Tantal [34]. Die Kreise geben die Messwerte und die ausgezogene Kurve zeigt die nach der BCS-Theorie erwartete Abhängigkeit von $\Delta_0(T)/\Delta_0(0)$. Die Übereinstimmung ist hervorragend.

Die Tabellen 3.3 und 3.4, die nur einen kleinen Teil der vielen Ergebnisse enthalten, zeigen, dass eine Reihe von Metallen eine Energielücke beim Temperatur-Null-Verhältnis $2\Delta_0 (T=0)/k_B T_c$ nahe dem von der BCS-Theorie vorhergesagten Wert von 3,5 aufweist (Gleichung 3-7). Abweichungen bei Metallen wie Nb können leicht durch Verunreinigungen der Oberfläche bedingt sein. Für solche Metalle ist es sehr schwer, eine völlig saubere Oberfläche herzustellen.

Deutliche Abweichungen von den Werten der BCS-Theorie zeigen die Supraleiter Pb und Hg. Diese Abweichungen werden mit einer besonders starken Elektron-Phonon-Wechselwirkung in diesen Metallen verständlich.

Es ist nun möglich durch Tunnelexperimente festzustellen, ob die zur Cooper-Paarung führende Wechselwirkung tatsächlich der Austausch von Phononen ist.

Ist die Kopplung zwischen den Gitterschwingungen und dem Elektronensystem genügend stark, so wird die Zustandsdichte der Quasiteilchen durch diese Ankopplung verändert. Diese Veränderungen werden in der Tunnelcharakteristik sichtbar und können mit genügend empfindlichen Anordnungen ausgemessen werden. Mit einiger Rechenarbeit gelingt es, daraus die Kopplungskonstante λ^* der anziehenden Elektron-Elektron-Wechselwirkung und die Konstante μ^* der abstoßenden Coulomb-Wechselwirkung (siehe Gleichung 3-9) zu bestimmen. Man erhält auf diese

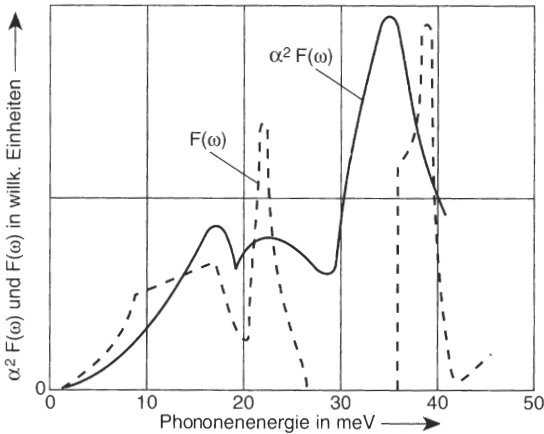


Abb. 3.20 $\alpha^2 F(\omega)$ aus Tunnelmessungen und $F(\omega)$ aus Neutronenstreuexperimenten in Abhängigkeit von der Phononenenergie ω für Pd-D-Proben (vgl. Abschnitt 2.3.3) (nach [35, 36]).

Weise die sogenannte Eliashberg-Funktion $\alpha^2 F(\omega)$, die eng mit λ^* verknüpft ist. $F(\omega)$ ist die Zustandsdichte der Phononen. Um jede Verwechslung mit der Zustandsdichte der Elektronen zu vermeiden, bezeichnen wir hier die Energie mit ω .

Mit der Tunnelmessung können wir also – das ist entscheidend – nur Phononen erfassen, die an das Elektronensystem ankoppeln. Dagegen kann man mit Neutronenstreuexperimenten die Zustandsdichte der Phononen unabhängig davon, ob sie an die Elektronen gekoppelt sind, ausmessen. Ein Vergleich der beiden Messungen liefert damit eine Aussage über die Kopplung. Die Abb. 3.20 zeigt einen solchen Vergleich für Pd-D-Proben, deren Eigenschaften in Abschnitt 2.3.3 charakterisiert wurden [35, 36]. Trotz der stark verschiedenen Deuteriumkonzentration sieht man deutlich, dass die wesentlichen Strukturen in beiden Messungen sichtbar sind. Insbesondere sind die Phononen bei hohen Energien, die vom eingebauten Deuterium herrühren, auch in der Tunnelmessung sichtbar, d. h. diese Schwingungen koppeln gut an die Elektronen. Mit dieser Kenntnis werden die relativ hohen Übergangstemperaturen im Palladium-Wasserstoff-System verständlich.

Die Bestimmung der Funktion $\alpha^2 F(\omega)$ aus der Feinstruktur der Tunnelleitfähigkeit und der Vergleich mit dem etwa aus der Neutronenstreuung gewonnenen Spektrum der Phononen $F(\omega)$ war das Schlüsselexperiment dafür, dass die Cooper-Paarung in den konventionellen Supraleitern durch die Elektron-Phonon-Wechselwirkung zustande kommt.

In ähnlicher Weise kann man für jeden neu entdeckten Supraleiter versuchen, die Quasiteilchen-Zustandsdichte über die Tunnelspektroskopie präzise auszumessen – vorausgesetzt, es gelingt, einen solchen Tunnelkontakt mit hoher Qualität herzustellen. Wir werden im folgenden Abschnitt 3.2 sehen, dass die Tunnelspektroskopie, aber auch andere Methoden, für die Hochtemperatursupraleiter sehr eigenartige Ergebnisse liefern, die zum Teil noch nicht verstanden sind. Sie machen aber klar, dass dort die Cooper-Paarung unkonventionell ist.

Wir wollen schon hier noch drei weitere Fragestellungen im Zusammenhang mit der Energielücke erwähnen, die wir in Abschnitt 3.1.4 genauer kennenlernen werden.

1. Die Energielücke kann in verschiedenen Richtungen eines Kristalls unterschiedlich groß sein. Man nennt solche Supraleiter anisotrop. Diese Anisotropie kann die Ursache für unterschiedliche Ergebnisse bei verschiedenen Experimenten sein. Je nach den Aufdampfbedingungen können auch bei Experimenten mit dünnen Schichten spezielle Kristallrichtungen bevorzugt wirksam werden. Messungen an Einkristallen in verschiedenen Richtungen geben Aufschluss über die Größe der Anisotropie.
2. Bei einigen Verbindungen scheinen sich mindestens zwei unterschiedliche Energielücken auszubilden. Ein Beispiel ist mit Niob dotiertes SrTiO_3 , das unterhalb von 0,7 K supraleitend wird [37]. Ein weiteres Beispiel ist MgB_2 [38]. Bei diesen Materialien tragen zwei oder auch mehrere unterschiedliche Fermiflächen bzw. Energiebänder zur Supraleitung bei, die dann jeweils ihre eigene Energielücke ausbilden (»Zweibandsupraleitung«).
3. Die Energielücke kann schon durch sehr kleine Konzentrationen von Verunreinigungen, die einen atomaren Drehimpuls und damit ein magnetisches Moment haben (paramagnetische Verunreinigungen), grundsätzlich verändert werden. Auf diese Weise können Supraleiter entstehen, die keine Energielücke mehr besitzen (»gapless superconductor«), die aber noch supraleitend sind, da sie noch eine Paarkorrelation aufweisen.

Bei der bisherigen Darstellung der Tunnelexperimente mit Supraleitern haben wir nur von den ungepaarten Elektronen gesprochen. Wir haben zur Deutung der Beobachtungen die Zustandsdichten für die Einzelelektronen im supraleitenden Zustand herangezogen. Es war dabei nirgendwo die Rede von den Cooper-Paaren und deren Bindungsenergie. Dies konnte auch nicht der Fall sein, weil wir in diesem Bild der Einzelelektronen die gesamte Wechselwirkung in der Veränderung der Zustandsdichte für die Einzelelektronen zum Ausdruck bringen.

Da wir aber den supraleitenden Zustand entscheidend mit der Vorstellung der Cooper-Paare verbinden, wird man auch gerne ein Bild haben, in dem die Cooper-Paare deutlich sichtbar werden. Ein solches Bild soll im folgenden noch kurz diskutiert werden. Eine gewisse Schwierigkeit für dieses Bild besteht allerdings darin, dass in *einem* Schema Zustände für Paare, also Kollektivzustände, mit Zuständen von Einzelteilchen zusammen dargestellt werden.

Wir wollen dafür den Fall eines Tunnelkontaktes aus zwei verschiedenen Supraleitern (siehe Abb. 3.15) wählen und nehmen der Einfachheit halber $T=0$ an. Die Supraleiter werden jetzt charakterisiert durch die Angabe von Cooper-Paaren in einem Zustand und die Angabe der Zustände, die beim Aufbrechen eines Paares in Einzelteilchen zur Verfügung stehen (Abb. 3.21). Im Gleichgewicht ohne äußere Spannung sind die Cooper-Paarzustände auf gleiche Höhe zu zeichnen. Das System stellt sich so ein, wenn wir den Austausch von Teilchen erlauben. Beim Anlegen einer Spannung erwarten wir in dem Fall $T=0$ nach Abb. 3.15 keinen Tunnelstrom I für $e \cdot U < \Delta_I + \Delta_{II}$ und bei $e \cdot U = \Delta_I + \Delta_{II}$ ein sehr steiles Ansteigen von I . Die Abb. 3.21 b und c geben die Situation für die beiden möglichen Polungen der Spannung $U = (\Delta_I + \Delta_{II})/e$ wieder. In diesem Bild müssen wir nun das Auftreten

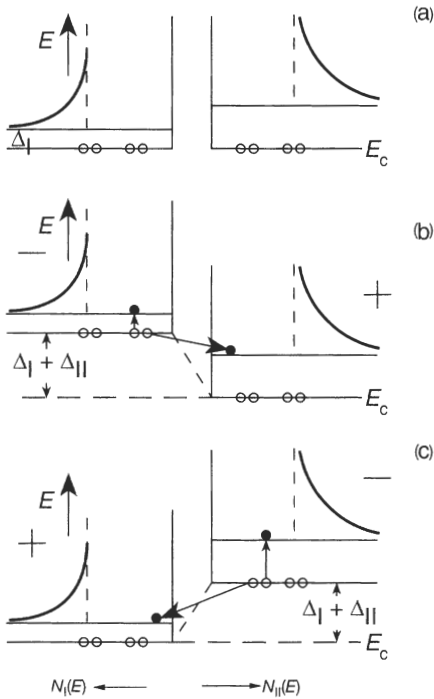


Abb. 3.21 Darstellung des Tunnelleffektes zwischen Supraleitern im Bild der Cooper-Paare und der »angeregten« Einzelelektronen. ○○ Cooper-Paare, ● Einzelelektronen (Anregungen).

eines Tunnelstromes bei dieser Spannung mit einem Aufbrechen der Cooper-Paare erklären. Die angelegte Spannung muss mindestens so groß sein, dass ein Paar in ein Elektron im Supraleiter I und in ein Elektron im Supraleiter II zerfallen kann. Dies ist gerade der Prozess, den wir beschreiben wollen, nämlich der Übergang *eines* Teilchens durch die Isolierschicht. Mit wachsender Spannung U tritt die erste Möglichkeit für einen solchen Prozess bei $U = (\Delta_I + \Delta_{II})/e$ auf. Wird durch die Spannung der Supraleiter II gegen I abgesenkt, so kann bei $U = (\Delta_I + \Delta_{II})/e$ ein Paar in I aufgebrochen werden, wobei ein Einzelelektron im tiefsten Zustand von I entsteht und das andere Einzelelektron in den tiefsten Zustand von II tunnelt. Dieser Prozess läuft unter konstanter Energie ab. Die Anregungsenergie des einen Elektrons kann durch den Übergang des anderen Elektrons im Feld der äußeren Spannung geliefert werden. Entscheidend für die erforderliche Spannung sind die Endzustände, in die die beiden Elektronen gehen können. Für Spannungen $U < (\Delta_I + \Delta_{II})/e$ gibt es keine Möglichkeit, die Elektronen eines Paares unter Energieerhaltung auf zwei Einzelelektronenzustände in I und II zu bringen. Polt man den Supraleiter II negativ, so wird wieder bei $|U| = (\Delta_I + \Delta_{II})/e$ ein Paar, diesmal aber in II, aufbrechen können, so dass die Einzelelektronen Zustände in I und II besetzen¹⁷⁾. Wegen der besonders großen Dichte der Zustände für Einzelelektronen bei $E = \Delta_I$ setzt der Tunnelstrom bei $|U| = (\Delta_I + \Delta_{II})/e$ sehr steil ein. Hier

¹⁷ Es ist also die Bedingung $I(U) = -I(-U)$ die für jeden Tunnelkontakt gelten muss, erfüllt.

argumentieren wir wie im anderen Bild. Die Zahl der Prozesse ist proportional zur Zahl der möglichen Endzustände.

Will man dieses Bild auch für endliche Temperaturen beibehalten und daraus wenigstens den qualitativen Verlauf der Strom-Spannungs-Kennlinie herleiten, so muss man für die im thermischen Gleichgewicht vorhandenen Einzelelektronen das zuerst behandelte Bild verwenden.

Eine weitere Möglichkeit, die Energielücke zu bestimmen, werden wir in Abschnitt 4.2 bei der Behandlung der spezifischen Wärme des supraleitenden Zustands kennenlernen. Wir werden in Kapitel 4 ebenfalls sehen, dass beispielsweise die Londonsche Eindringtiefe, die ja eine Eigenschaft der Cooper-Paare ist, in ihrer Temperaturabhängigkeit von der Energielücke abhängt. Grundsätzlich kann jede physikalische Eigenschaft, die von der Zustandsdichte der Einzelelektronen abhängt, zur Bestimmung von Δ_0 benützt werden. Wir haben mit der Lichtabsorption, der Ultraschalldämpfung und dem Einelektronentunneln von diesen Möglichkeiten drei besprochen, die besonders viele Ergebnisse geliefert haben und zudem in ihren Grundlagen sehr durchsichtig sind.

3.1.4

Spezielle Eigenschaften der konventionellen Supraleiter

Zum Abschluss dieses »mikroskopischen« Abschnitts über konventionelle Supraleiter wollen wir noch einige spezielle Eigenschaften ansprechen, die unser Verständnis der (konventionellen) Supraleitung vertiefen werden. Wir werden dabei insbesondere auf den Einfluss gestörter Kristallgitter und den Einfluss von Fremdatomen auf die supraleitenden Eigenschaften eingehen

3.1.4.1 Der Einfluss von Gitterstörungen auf die konventionelle Cooper-Paarung

Als Gitterstörungen bezeichnen wir alle Abweichungen von der strengen Periodizität des Kristallgitters, unabhängig davon, ob diese durch den Einbau von Fremdatomen oder durch reine Baufehler, d.h. Verrückungen der Atome aus ihren regulären Plätzen hervorgerufen werden. Der primäre Einfluss solcher Gitterstörungen auf das System der Leitungselektronen besteht darin, dass sie als Streuzentren wirken und so die mittlere freie Weglänge der Elektronen verkürzen. Im allgemeinen werden die Gitterstörungen aber alle Eigenschaften eines Supraleiters beeinflussen. Einige Effekte, die dabei auftreten, sollen in diesem Abschnitt diskutiert werden.

Der Anisotropieeffekt

Die Korrelation der Elektronen zu Cooper-Paaren erfolgt über die elastischen Schwingungen des Gitters, die Phononen. Nun kann diese Wechselwirkung in einem Kristall richtungsabhängig sein. Sehr vereinfachend kann man sagen, dass bei Vorliegen einer solchen Anisotropie bestimmte Kristallrichtungen hinsichtlich der Supraleitung »günstiger« sind als andere.