

# **Nichtgleichgewichtssupraleitung in stromtragenden Haarkristallen**

**Dissertation  
zur Erlangung des Doktorgrades  
der  
Mathematisch-Naturwissenschaftlichen Fakultät  
der Georg-August-Universität Göttingen**

**vorgelegt von  
Reinhard Tidecks  
aus Bremerhaven**

**Göttingen 1980**

## 2. Quasiteilchenanregungen

Wir haben den Begriff der Quasiteilchenanregung bisher schon häufig benutzt. Wir haben von lochartigen und elektronartigen Quasiteilchen und Streuprozessen dieser Quasiteilchen gesprochen.

Eine vollständige Erklärung dieser Begriffe würde eine Darstellung der BCS-Theorie der Supraleitung erfordern [1 Kap.2, 4 Kap.4, 5 Kap.5.2, 57-65]. Dies soll hier natürlich nicht geschehen. Es soll vielmehr versucht werden, ein, soweit es möglich ist, anschauliches Bild von dem zu vermitteln, was man sich in der BCS-Theorie unter einer Quasiteilchenanregung vorstellt.

Die BCS-Theorie geht von Einelektronenzuständen mit dem Wellenzahlvektor  $\underline{k}$  und dem Spin  $\sigma$  aus, wobei  $\sigma = +1, -1$  den Spinrichtungen  $\uparrow, \downarrow$  entspricht. Dabei handelt es sich um Einteilchenblochzustände von Leitungselektronen, die sich in einem periodischen Potential, das durch die Ionenrümpfe und die anderen Leitungselektronen hervorgerufen wird, unabhängig voneinander bewegen. Wechselwirkungen untereinander und Wechselwirkungen zwischen Elektronen und Gitterschwingungen bleiben dabei unberücksichtigt.

Diese Wechselwirkungen zwischen den Elektronen untereinander und der Elektronen mit dem Gitter werden durch eine effektive Elektron-Elektron Wechselwirkung  $V_{\text{eff}}$  berücksichtigt. Diese Wechselwirkung kann attraktiver Natur sein. Dieses führt zum supraleitenden Grundzustand.

In der BCS-Theorie ist dieser Grundzustand aus Elektronenpaaren ( $\underline{k}\uparrow, -\underline{k}\downarrow$ ), sogenannten "Cooperpaaren" aufgebaut. Die Elektronen dieser Paare verspüren durch Streuprozesse mit "virtuellen" Phononen eine anziehende gegenseitige Wechselwirkung.

Man stellt sich dabei klassisch vor, daß ein Elektron, das sich durch den Kristall bewegt, diesen lokal polarisiert. Dadurch spürt ein anderes Elektron, das sich durch das polarisierte Gebiet des Gitters bewegt, nicht mehr das periodische Potential, das für die Einteilchenblochzustände maßgebend war, sondern ein modifiziertes Potential.

Diesen Vorgang beschreibt man dadurch, daß man annimmt, daß

ein Elektron ( $\underline{K}, \uparrow$ ) ein virtuelles Phonon mit Wellenzahlvektor  $\underline{q}$  emittiert (also eine "virtuelle" Gitterschwingung anregt) und dabei in einen Zustand ( $\underline{K}' = \underline{K} - \underline{q}, \uparrow$ ) gestreut wird. Dieses Phonon wird dann später von einem zweiten Elektron ( $-\underline{K}, \uparrow$ ) absorbiert und dieses Elektron dabei in den Zustand ( $-\underline{K}' = -\underline{K} + \underline{q}, \uparrow$ ) gestreut. Da die Fermigeschwindigkeit der Elektronen viel größer ist als die Schallgeschwindigkeit im Kristall, bleibt das Phonon während dieses Streuprozesses praktisch am Ort der Emission. Es handelt sich hier also um eine punktförmige zeitretardierte Wechselwirkung. Diese Wechselwirkung läßt sich durch das folgende Diagramm veranschaulichen:

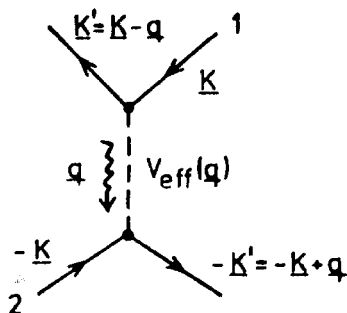


Abb. 46:

Effektive Elektron-Elektron Wechselwirkung der Elektronen 1 und 2 durch den Austausch eines "virtuellen" Phonons.

Die bei dem Streuprozess ausgetauschten Phononen sind in zweierlei Hinsicht virtuell: Einerseits sind es Phononen, die lediglich als Austauschteilchen zwischen den Elektronen ausgetauscht werden können, nicht aber ins Gitter abwandern können. Das würde ja Energiedissipation bedeuten. Weiterhin wird bei dem Streuprozess zwar der Impuls erhalten, bezüglich der Energieerhaltung kann es sich hierbei aber nicht um einen Streuprozess zwischen Blochzuständen mit wirklichen Phononen handeln: Die Energie solcher Blochzustände wäre durch  $\hbar^2 \underline{K}^2 / 2m$  gegeben. Nach dem Energiesatz müßten die Energien vor und nach dem Streuprozess gleich sein und deshalb  $|\underline{K}'| = |\underline{K}|$  sein. Das widerspricht aber der Tatsache, daß ein wirkliches Phonon nicht nur Impuls, sondern auch Energie trägt, und deshalb beim Streuprozess des Elektrons 1 gerade  $|\underline{K}'| < |\underline{K}|$  zu fordern wäre.

Im Supraleiter finden solche Streuprozesse in einer "Energieschale"  $\pm \hbar \omega_D$  um die Fermienergie  $E_F$  (genauer um  $\mu_F$ ), bzw. in einem Bereich  $\pm \delta K$  um die Fermiwellenzahl  $K_F$  statt ( $\omega_D$  ist die Debye Frequenz [66 Kap.6]).

Um diese Streuprozesse zu ermöglichen, besitzt der Supraleiter (selbst bei  $T = 0$ ) keine scharfe Fermikante. Diese ist ähnlich wie beim Normalleiter bei  $T > 0$  stets aufgeweicht, d.h. es gibt unbesetzte  $K$ -Zustände unterhalb von  $K_F$  und besetzte Zustände oberhalb von  $K_F$ . Der Energiegewinn beim Übergang in den supraleitenden Zustand ist also größer als der Energiebetrag, der für das Aufweichen der Fermikante aufgebracht werden muß.

Der Supraleiter braucht also Einelektronenblochzustände in der Umgebung von  $K_F$ , die mit einer gewissen Wahrscheinlichkeit besetzt, aber auch mit einer gewissen Wahrscheinlichkeit unbesetzt sind zur Bildung des supraleitenden Zustands oder kürzer gesagt zur Bildung von Cooperpaaren. Wäre einer dieser Zustände, etwa  $(\underline{K}\uparrow)$ , sicher (mit der Wahrscheinlichkeit 1) besetzt und der Platz  $(-\underline{K}\uparrow)$  sicher leer, so könnte das Elektron  $(\underline{K}\uparrow)$  nicht den zuvor besprochenen Paarbildungsstreuprozeß (Abb.46) durchführen und der energieabsenkende Paarzustand  $(\underline{K}\uparrow, -\underline{K}\uparrow)$  wäre blockiert. Der Supraleiter wäre dann nicht mehr im supraleitenden Grundzustand, sondern in einem angeregten Zustand.

Dieser angeregte Zustand läßt sich beispielsweise dadurch erreichen, daß man ein Elektron von außen auf einen geeigneten  $\underline{K}\uparrow$ -Platz injiziert.

Auch die Extraktion eines Elektrons von einem Platz  $(-\underline{K}\uparrow)$ , wobei  $(\underline{K}\uparrow)$  besetzt ist, führt zu einem angeregten Zustand. Beide angeregten Zustände sind gleich, gehören aber zu einer um 1 verschiedenen Zahl von Cooperpaaren im Supraleiter.

Im Supraleiter unterscheidet sich nun ein solcher angeregter Zustand energetisch um mindestens den Betrag  $\Delta(T)$  vom Grundzustand. Diesen Wert  $\Delta(T)$  bezeichnet man als "Energieklücke" des Supraleiters.

Da man in Experimenten nicht gezielt Einzelelektronen auf bestimmte  $\underline{K}$ -Plätze injiziert bzw. von bestimmten Plätzen extrahiert, sondern beispielsweise ein Elektron eines Paares

durch Einstrahlen von Energie auf einen bestimmten  $\underline{K}$ -Wert setzt, wird die physikalisch meßbare Energielücke stets  $2\Delta(T)$  betragen, nämlich  $\Delta(T)$  um das Elektron von einem Platz zu entfernen und  $\Delta(T)$  um es an einen anderen Platz zu setzen. Man sagt auch, man hätte ein Paar gebrochen.

Dabei können zwei "Einteilchenanregungen" entstehen, bei denen die Einzelelektronen des Paares ( $\underline{K}\uparrow, -\underline{K}\downarrow$ ) nach der Anregung auf Plätzen ( $\underline{K}\uparrow$ ) und ( $\underline{\tilde{K}}\downarrow$ ) sitzen. Es kann aber auch ein "angeregtes Paar" entstehen, bei denen die Einzelelektronen auf den Plätzen ( $\underline{K}\uparrow$ ) und ( $-\underline{K}\downarrow$ ) zu finden sind.

Sehr übersichtlich lassen sich diese angeregten Zustände in der Sprache der sogenannten "2.Quantisierung" mit Erzeugungs- und Vernichtungsoperatoren darstellen [61,63].

Die Wellenfunktion des Grundzustands ist:

$$\Psi_0 = \prod_{\underline{K}} (u_{\underline{K}} + v_{\underline{K}} c_{\underline{K}\uparrow}^* c_{-\underline{K}\downarrow}^*) \Omega_0, \quad (14)$$

die einer "Einteilchenanregung", beispielsweise

$$\Psi_{\underline{K}_1\uparrow} = c_{\underline{K}_1\uparrow}^* \prod_{\underline{K} \neq \underline{K}_1} (u_{\underline{K}} + v_{\underline{K}} c_{\underline{K}\uparrow}^* c_{-\underline{K}\downarrow}^*) \Omega_0, \quad (15)$$

die eines "angeregten Paares" ist der zum Grundzustand orthogonale Teil von

$$\Psi_{\underline{K}_1, -\underline{K}_1} = c_{\underline{K}_1\uparrow}^* c_{-\underline{K}_1\downarrow}^* \prod_{\underline{K} \neq \underline{K}_1} (u_{\underline{K}} + v_{\underline{K}} c_{\underline{K}\uparrow}^* c_{-\underline{K}\downarrow}^*) \Omega_0. \quad (16)$$

Dabei sind  $c_{\underline{K}\sigma}^*$  Erzeugungsoperatoren für ein Elektron im Blochzustand ( $\underline{K}\sigma$ ) in dem Vakuum  $\Omega_0$ ,  $u_{\underline{K}}$  und  $v_{\underline{K}}$  sind Funktionen, die wir später noch definieren werden.

Eine besonders übersichtliche Darstellung von angeregten Zuständen wird durch die Einführung neuer, sogenannter "Quasiteilchenoperatoren" möglich (Bogoliubov-Valentin Transformation) [61,63]:

$$B_{\underline{K}\sigma}^* = u_{\underline{K}}^* c_{\underline{K}\sigma}^* - v_{\underline{K}} c_{-\underline{K}, -\sigma} \quad (17)$$

Wendet man nämlich beispielsweise  $B_{\underline{K}\uparrow}^*$  auf  $\Psi_0$  an, so ergibt sich gerade  $\Psi_{\underline{K}\uparrow}$ .

Die Operatoren  $B_{\underline{K}\sigma}^*$  erzeugen also aus dem Grundzustand "Einteilchenanregungen". Analog zu definierende Operatoren  $B_{\underline{K}\sigma}$  vernichten übrigens Anregungen.

Das Vakuum, in dem diese Operatoren angeregte Zustände erzeugen, ist der Grundzustand  $\Psi_0$ , d.h.  $B_{\underline{K}\sigma} \Psi_0 = 0$ .

Da diese Operatoren  $B_{\underline{K}\sigma}^*$  ganz ähnlich wie die  $c_{\underline{K}\sigma}^*$ -Operatoren Elektronen erzeugen, ihrerseits angeregte Zustände erzeugen und zudem noch Fermivertauschungsrelationen gehorchen (wie die  $c_{\underline{K}\sigma}$ -Operatoren) ordnet man den von ihnen erzeugten Anregungen Teilchencharakter zu. Der Begriff der "Quasiteilchenanregung", oder kurz des "Quasiteilchens" im Supraleiter ist in dieser Weise zu verstehen.

Die Quasiteilchenoperatoren geben auch Auskunft darüber, wie sich eine Quasiteilchenanregung verhält. Das erkennt man an der Struktur des Operators:

Betrachten wir beispielsweise den Operator

$$B_{\underline{K}\uparrow}^* = u_{\underline{K}}^* c_{\underline{K}\uparrow}^* - v_{\underline{K}} c_{-\underline{K}\downarrow} \quad (18)$$

Dieser Operator erzeugt ein Elektron im Zustand  $(\underline{K}\uparrow)$  mit der Amplitude  $u_{\underline{K}}^*$  und er vernichtet gleichzeitig ein Elektron im Zustand  $(-\underline{K}\downarrow)$  mit der Amplitude  $v_{\underline{K}}$ . Dabei sind die Amplituden gegeben durch::

$$|u_{\underline{K}}|^2 = (1/2) (1 + \epsilon(\underline{K}) / (\epsilon^2(\underline{K}) + |\Delta|^2)^{1/2}) \quad (19)$$

$$|v_{\underline{K}}|^2 = (1/2) (1 - \epsilon(\underline{K}) / (\epsilon^2(\underline{K}) + |\Delta|^2)^{1/2}) \quad (20)$$

Dabei ist

$$\epsilon(\underline{K}) = \hbar^2 \underline{K}^2 / (2m) - \mu_F = \eta(\underline{K}) - \mu_F \quad (21)$$

die Energie des Einteilchenblochzustands ( $\eta(\underline{K})$ ) relativ zum chemischen Potential  $\mu_F$  gemessen.

Ist  $\epsilon(\underline{K}) > 0$  mit  $|\epsilon(\underline{K})| \gg \Delta$ , so daß  $\underline{K}$  deutlich oberhalb von  $K_F$  liegt, so ist  $|u_{\underline{K}}|^2 \approx 1$  und  $|v_{\underline{K}}|^2 \approx 0$  und  $B_{\underline{K}\uparrow}^*$  erzeugt ein Quasiteilchen, das aussieht wie ein Elektron bei  $(\underline{K}\uparrow)$ .

Ist  $\varepsilon(\underline{K}) < 0$  mit  $|\varepsilon(\underline{K})| \gg \Lambda$ , so daß  $\underline{K}$  deutlich unterhalb von  $K_F$  liegt, so ist  $|u_{\underline{K}}|^2 \approx 0$  und  $|v_{\underline{K}}|^2 \approx 1$  und  $B_{\underline{K}\uparrow}^*$  erzeugt ein Quasiteilchen, das aussieht wie ein unbesetzter Zustand ("Loch") bei  $(-\underline{K}\uparrow)$ .

Für Energien  $|\varepsilon(\underline{K})|$  vergleichbar mit  $\Lambda$ , also  $\underline{K}$  in der Nähe von  $K_F$  ergeben sich Quasiteilchen, die gemischten Charakter haben, nämlich gleichzeitig teilweise den Charakter eines Elektrons bei  $(\underline{K}\uparrow)$  und den eines "Lochs" bei  $(-\underline{K}\uparrow)$  besitzen.

Die Anregungen im Supraleiter sind also Quasiteilchen, die ihren Charakter vom reinen Elektron weit oberhalb von  $K_F$  bis zum reinen Loch weit unterhalb von  $K_F$  kontinuierlich ändern.

Bei all diesen Interpretationen muß man aber stets beachten, daß eine Anregung zwar den Charakter einer Mischung von Loch und Elektron hat, aber keine Mischung von Loch und Elektron ist. Zu diesem Ergebnis würde man nämlich kommen, wenn man  $B_{\underline{K}\sigma}^*$  auf die N-Teilchen Projektion des Grundzustands  $\Psi_0$  anwendet, d.h. auf einen Zustand, den man sich als Vielteilchenwellenfunktion aus den den Grundzustand aufbauenden Einteilchenzuständen aufgebaut denkt. Das ist aber falsch, da  $B_{\underline{K}\sigma}^*$  nur auf den Grundzustand  $\Psi_0$  angewendet werden darf, so daß ein Quasiteilchen mit dem Wellenzahlvektor  $\underline{K}$  und dem Spin  $\sigma$  stets ein Elektron ist, das den Platz  $(\underline{K}\sigma)$  sicher besetzt, während der Platz  $(-\underline{K}-\sigma)$  sicher unbesetzt ist.

Auch ohne die Einführung der Operatoren  $B_{\underline{K}\sigma}^*$  hätte man sich den Charakter einer Quasiteilchenanregung im Supraleiter überlegen können: Stellen wir uns dazu den Grundzustand des Supraleiters vor. Er wird aufgebaut aus den sicher besetzten  $\underline{K}$ -Zuständen weiter unterhalb von  $K_F$  und einem schmalen Gebiet der Breite  $2\delta K$  um  $K_F$ , in dem es  $\underline{K}$ -Zustände gibt, die nur mit einer bestimmten Wahrscheinlichkeit besetzt sind. Weiter außerhalb von  $K_F$  sind die Zustände sicher unbesetzt.

Sorgt man jetzt dafür, daß ein Zustand  $(\underline{K}\uparrow)$  mit  $|\underline{K}|$  deutlich größer als  $K_F$  sicher mit einem Elektron besetzt ist, während der Zustand  $(-\underline{K}\uparrow)$  sicher unbesetzt ist, den Grundzustand aber ansonsten unverändert läßt, so sieht diese Anregung so

aus, wie ein Elektron im Zustand  $(\underline{K}\uparrow)$ . Das ist nämlich das einzige, was zum Grundzustand hinzukommt. Der Zustand bei  $(-\underline{K}\uparrow)$  war nämlich auch vorher schon unbesetzt.

Eine entsprechende Anregung mit  $|\underline{K}|$  deutlich kleiner als  $K_F$ , sieht aber so aus wie ein Loch bei  $(-\underline{K}\uparrow)$ , da der Zustand bei  $(\underline{K}\uparrow)$  auch schon vorher besetzt war. Liegt  $|\underline{K}|$  in der Schale der Breite  $2\delta K$  um  $K_F$ , so sieht die entsprechende Anregung wie ein Gemisch von einem Elektron bei  $(\underline{K}\uparrow)$  und einem Loch bei  $(-\underline{K}\uparrow)$  aus. In diesem Fall ist nämlich der Zustand bei  $(\underline{K}\uparrow)$  schon mit einer gewissen Wahrscheinlichkeit mit einem Elektron besetzt und man erhöht nur die Besetzungswahrscheinlichkeit auf den Wert 1. Auch  $(-\underline{K}\uparrow)$  ist mit einer bestimmten Wahrscheinlichkeit mit einem Elektron besetzt und man verringert nur diese Wahrscheinlichkeit auf den Wert Null.

Man muß also stets bedenken, daß die Vorstellung eines Quasiteilchens nur ein Bild ist, um das Verhalten einer Anregung im Vielteilchensystem Supraleiter durch ein Einteilchenbild zu beschreiben.

In der Abb.47 ist das Anregungsspektrum für Einteilchenanregungen des BCS-Supraleiters dargestellt und zwar der Teil für  $\underline{K}$ -Werte in der Nähe von  $K_F$ , da hier die größten Abweichungen vom Anregungsspektrum des Normalleiters bestehen. Während die Anregungsenergien im Normalleiter durch  $E(\underline{K}) = |\epsilon(\underline{K})|$  gegeben wären, folgt nach der BCS-Theorie für die Quasiteilchenanregungen im Supraleiter:

$$E(\underline{K}) = (\epsilon^2(\underline{K}) + \Delta^2)^{1/2} \quad (22)$$

In dieser Abbildung gehören Energien  $\epsilon(\underline{K}) < 0$  zu Wellenzahlvektoren  $|\underline{K}| < K_F$  und Energien  $\epsilon(\underline{K}) > 0$  zu Wellenzahlvektoren  $|\underline{K}| > K_F$ . Oft findet man deshalb auch Darstellungen in der die Anregungsenergie  $E(\underline{K})$  als Funktion der Wellenzahl  $K = |\underline{K}|$  aufgetragen wird [64 Abb.204]. Bei diesen Darstellungen liegt dann  $K_F$  dort, wo in unserer Darstellung  $\epsilon(\underline{K}) = 0$  ist.



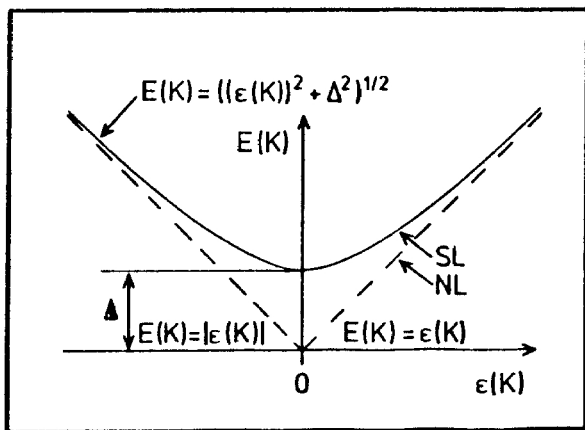


Abb.47: BCS-Anregungsspektrum des Supraleiters im thermodynamischen Gleichgewicht.

Die Anregungsenergie für eine Einteilchenanregung<sup>1/2</sup> im Supraleiter (SL) ist durch  $E(K) = ((\epsilon(K))^2 + \Delta^2)^{1/2}$  gegeben (durchgezogene Linie). Dabei ist  $\epsilon(K)$  die Energie eines Einteilchenblochzustands relativ zum chemischen Potential gemessen,  $\Delta = \Delta(T)$  die Energielücke zwischen dem BCS-Grundzustand und dem Anregungsspektrum.

Die gestrichelte Linie zeigt das entsprechende Anregungsspektrum für einen Normalleiter (NL), nämlich  $E(K) = |\epsilon(K)|$  bzw.  $E(K) = \epsilon(K)$ .

Wir haben den Begriff des Quasiteilchens deshalb in diesem Abschnitt so ausführlich erläutert, weil wir ihn in den nächsten Abschnitten laufend benutzen. Dabei werden wir oft so tun, als ob wir es mit wahren Teilchen zu tun hätten. Das vereinfacht viele Interpretationen, ist aber stets im Sinne dieses Abschnitts gemeint.

## XII. Literaturverzeichnis (Auszug)

- 1 Buckel, W.: Supraleitung, 2. Auflage.  
D-6940 Weinheim: Physik Verlag 1977
- 4 Tinkham, M.: Introduction to Superconductivity, 1st ed.  
New York: Mc Graw Hill Book Company 1975
- 5 Saint-James, D., Thomas, E.J., Sarma, G.: Type II Superconductivity, 1st ed. London: Pergamon Press 1969
- 57 Bardeen, J., Cooper, L.N., Schrieffer, J.R.: Phys. Rev. 108, 1175 (1957)
- 58 Cooper, L.N., Am. J. Phys. 28, 91 (1960)
- 59 Bogoljubov, N.N.: Il Nuovo Cimento 7, 794 (1958)
- 60 Valentin, J.G.: Il Nuovo Cimento 7, 843 (1958)
- 61 Schrieffer, J.R.: Theory of Superconductivity. 1st ed. Chap. 2 (insbesondere Chap. 2.5). New York, Amsterdam: W.A. Benjamin, Inc., Publishers 1964
- 62 Tinkham, M.: Superconductivity. Chap. IV, V (insbesondere Chap. IV C, V B). Documents on Modern Physics, edited by Montroll, E.W., Vineyard, G.H., Lévy, M. New York, London, Paris: Gordon and Breach Science Publishers 1965
- 63 Tinkham, M.: Superconductivity. Chap. IV, V (insbesondere Chap. IV C, V B). Low Temperature Physics (Physique des basses températures), edited by De Witt, C., Dreyfuß, B., De Gennes, P.G. Paris: Presses Universitaires de France, New York: Gordon and Breach Science Publishers 1961
- 64 Ziman, J.M.: Prinzipien der Festkörpertheorie 1. Auflage Kap. 11 (insbesondere Kap. 11.4). Berlin: Akademie-Verlag 1974
- 65 De Gennes, P.G.: Superconductivity of Metals and Alloys 1st ed. Chap. 4 (insbesondere Chap. 4-2, 4-3). New York, Amsterdam: W. Benjamin, Inc. Publishers 1966