

**Master-Forschungspraktikum  
Universität Göttingen – Fakultät für Physik**

---

**Ausarbeitung  
zum Versuch FM.ULP**

**Spatial and Temporal Distortion of Ultrashort  
Light Pulses**

Name: Eric Bertok  
Email: eric.bertok@stud.uni-goettingen.de  
Datum Versuchsdurchführung: 22. November 2017  
Name Betreuer(in): Dr. Sabine Steil  
Kopie der testierten Ausarbeitung gewünscht: ☐ ja ☒ nein  
Unterschrift:

**Abgabe**

Datum: Unterschrift Betreuer(in):

**Testat**

Datum: Name Prüfer(in):  
Punktezahl: Unterschrift:  
Note:



# Inhaltsverzeichnis

<b>1</b>	<b>Einleitung</b>	<b>1</b>
<b>2</b>	<b>Theorie</b>	<b>1</b>
2.1	Grundlagen . . . . .	1
2.2	Instantane Frequenz und Chirp . . . . .	1
2.3	Gaußpuls und Bandprodukt . . . . .	2
2.4	Dispersion im Medium . . . . .	2
<b>3</b>	<b>Experimentelle Methoden und Messgrößen</b>	<b>3</b>
3.1	Räumliche Verzerrungen . . . . .	3
3.2	Prismenkrompressor . . . . .	3
<b>4</b>	<b>Durchführung</b>	<b>3</b>
<b>5</b>	<b>Auswertung</b>	<b>3</b>
5.1	Pulse front tilt . . . . .	3
<b>6</b>	<b>Diskussion</b>	<b>3</b>

# 1 Einleitung

## 2 Theorie

### 2.1 Grundlagen

Zur Beschreibung Ultrakurzer Laserpulse verwendet man einen semiklassischen Ansatz, bei dem die Maxwell-Gleichungen für eine makroskopische Polarisierung gelöst wird. Im Folgenden wird das Vektorfeld des elektrischen Feldes  $\vec{E}$  durch einen Skalar  $E$  genähert [Diels]. Hiermit wird eine für das Experiment relevante Polarisationsrichtung beachtet. Im Allgemeinen sind auch Effekte möglich, bei denen verschiedene Polarisationsrichtungen miteinander koppeln, was eine genauere Betrachtung erfordert. Ausgehend von dem elektrischen Feld  $E(t)$  definiert man mithilfe der Fourier Transformation das komplexe Spektrum  $\tilde{E}(\omega) = \mathcal{F}[E(t)] = \int_{\mathbb{R}} E(t)e^{-i\omega t} dt$ . Die Rücktransformation ergibt sich zu  $E(t) = \mathcal{F}^{-1}[\tilde{E}(\omega)] = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \tilde{E}(\omega)e^{i\omega t} d\omega$ . Dies funktioniert aufgrund der Linearität der Maxwell-Gleichungen. Die Lösung kann somit in eine Superposition von ebenen Wellen zerlegt werden. Hier ist  $\omega$  die Kreisfrequenz der ebenen Welle. Nach konvention wird häufig nur der positive Anteil des Spektrums betrachtet. Er hat aufgrund der Reellwertigkeit von  $E$  den vollen Informationsgehalt [Diels]. Bei der Fourier-Rücktransformation integriert man so nur über alle positiven  $\omega$  [Diels]. Ein Puls wird nun beschrieben durch [Trebino lec]

$$E(t) = \frac{1}{2} \sqrt{I(t)} \exp(i[\omega_0 t - \Phi(t)]), \quad (2.1)$$

wobei  $\omega_0$  die sog. Trägerfrequenz und  $\phi(t)$  eine allgemeine Phase in Abhängigkeit von der Zeit  $t$  ist. Die Trägerfrequenz ist der oszillatorische Anteil des Pulses innerhalb der Einhüllenden  $\sqrt{I(t)}$  und wird häufig in eine komplexe Einhüllende  $E_0$  integriert. Die Phase  $\phi(t)$  beschreibt die zeitliche Veränderung der Farbe des Pulses.  $I(t) = |E(t)|^2$  ist die Intensität des Pulses. Ist  $I$  eine stark gepeakte Funktion, so redet man von einem "ultrakurzen Puls". Analog kann man durch  $S = |\tilde{E}(\omega)|^2$  die spektrale Intensität einführen. Somit gilt  $\tilde{E}(\omega) = \sqrt{S(\omega)} \exp(-i\varphi(\omega))$ , wobei  $\varphi(\omega)$  die spektrale Phase ist. Diese ist zentrale Größe bei der Beschreibung von gechirpten Pulsen (siehe unten). Die Beschreibung des Spektrums ist auch mithilfe der Wellenlänge  $\lambda$  möglich. Die Umrechnung ergibt sich zu [Trebino lec]:

$$S_\lambda(\lambda) = S_\omega \left( \frac{2\pi c}{\lambda^2} \right) \frac{2\pi c}{\lambda^2}. \quad (2.2)$$

### 2.2 Instantane Frequenz und Chirp

Die instantane Frequenz eines ultrakurzen Pulses ist definiert als [trebino lec]

$$\omega_{\text{inst}} = \omega_0 - \frac{d\phi}{dt}, \quad (2.3)$$

mit der Phase  $\phi$  und der Trägerfrequenz  $\omega_0$ . Man kann nun sowohl die Phase, als auch die spektrale Phase taylor-entwickeln:

$$\phi(t) = \phi_0 + \underbrace{\frac{d\phi}{dt}|_{t=0}}_{\phi_1} t + \underbrace{\frac{d^2\phi}{dt^2}|_{t=0}}_{\phi_2} \frac{t^2}{2} + \dots, \quad (2.4)$$

$$\varphi(\omega) = \varphi_0 + \underbrace{\frac{d\varphi}{d\omega}|_{\omega=\omega_0}}_{\varphi_1} (\omega - \omega_0) + \underbrace{\frac{d^2\varphi}{d\omega^2}|_{\omega=\omega_0}}_{\varphi_2} \frac{(\omega - \omega_0)^2}{2} + \dots. \quad (2.5)$$

Hier ist  $\varphi_1 = \frac{d\varphi}{d\omega}|_{\omega=\omega_0}$  der sogenannte "group delay" (GD) und  $\varphi_2 = \frac{d^2\varphi}{d\omega^2}|_{\omega=\omega_0}$  die "group delay dispersion" (GDD). Hieraus ist zu sehen: Eine nichtverschwindendes  $\phi_1$  erzeugt nach Gleichung (2.3) einen konstanten offset in der instantanen Frequenz. Dies resultiert nach dem Fourier shift theorem [CITE] zu einer Verschiebung im Spektrum. Andersherum erzeugt ein nicht verschwindender GD einen offset in der temporalen Intensität. Dies ist zur bestimmung von Pulslängen irrelevant. Ist jedoch  $\varphi_2$  ungleich Null, so kommt es zur Dispersion: Die Gruppengeschwindigkeit ändert sich für verschiedene Frequenzen unterschiedlich und der Puls veräuft. Einen solchen Puls nennt man (linear) gechirpt. Analoges passiert bei einem nichtverschwindenden  $\phi_2$ . Die instantane Frequenz ändert sich hier linear mit der Zeit.

## 2.3 Gaußpuls und Bandprodukt

Die am einfachsten zu handhabende Pulsform ist die eines Gaußpulses: [DIELS]

$$E(t) = E_0 \exp \left[ -2 \ln 2 \left( \frac{t}{\tau_{\text{FWHM}}} \right)^2 \right]. \quad (2.6)$$

$\tau_{\text{FWHM}}$  bezeichnet die “full-width half maximum”, also die Halbwertsbreite des Pulses, welche eine von vielen Definitionen zur Beschreibung der Puls- oder Spektralbreite ist. Sie ist definiert als die Breite an der Halben Pulshöhe. Im Folgenden wird stets  $\tau \equiv \tau_{\text{FWHM}}$  gesetzt. Der Gaußpuls ist neben seiner einfachen Handhabbarkeit auch eine der am häufigsten auftretenden Pulsformen.

Da (Kreis-) Frequenz und Zeit konjugierte Variablen einer Fourier Transformation sind, gilt für sie die Unschärferelation, genannt “Zeit-Bandbreiteprodukt”: [Diels]

$$\langle \omega^2 \rangle \langle t^2 \rangle \geq \frac{M^4}{4} \kappa_c, \quad (2.7)$$

wobei  $\langle \Delta \omega^2 \rangle$  bzw.  $\langle \Delta t^2 \rangle$  die Pulsbreite bzw die Bandbreite -berechnet durch das zweite Moment [Diels]- bezeichnet.  $M$  ist ein Formfaktor, der die Abweichung zum idealen Gaußpuls bezeichnet [CITE].  $\kappa_c$  ist der Chirpfaktor, welcher angibt, dass bei gechirpten Pulsen das Zeit-Bandbreiteprodukt größer ist, als für ungechirpte Pulse. Einen ungechirpten Puls bezeichnet man demnach auch als “Fourier-limitiert”. Fourier-limitierte Pulse sind also für eine konstante Bandbreite stets am kürzesten. Die Umrechnung von den zweiten Momenten zur Halbwertsbreite ist für Gaußpulse einfach über die Varianz einer Gaußverteilung zu berechnen. Es gilt  $\tau^2 = 2\sqrt{2 \ln 2} \langle t^2 \rangle$ . Aus Gleichung (2.7) mit  $M = 1$  und  $\kappa_c = 1$  lässt sich ebenfalls  $\langle \omega^2 \rangle = \frac{1}{4 \langle t^2 \rangle}$  durch die Halbwertsbreite ausdrücken.

## 2.4 Dispersion im Medium

Bewegt sich ein Lichtpuls durch ein Medium, so wird eine Transferfunktion im Frequenzbild zum elektrischen Feld multipliziert [trebino lec]:  $\tilde{E}_{\text{out}}(\omega) = \tilde{E}_{\text{in}}(\omega) \exp(-\alpha(\omega)L) \exp(-in(\omega)k_0L)$ . Hier beschreibt  $\alpha$  die Absorption, welche in diesem Versuch ignoriert wird.  $n(\omega)$  ist der Brechungsindex des Materials in Abhängigkeit von der Frequenz,  $k_0$  ist die Wellenzahl bei der Trägerfrequenz und  $L$  ist die Länge des Materials. Relevant für die Verbreiterung von Pulslängen ist die Modulation der spektralen Phase. Aufgrund der Form der Transferfunktion wird diese direkt hinzuaddiert [trebino]:

$$\varphi_{\text{out}}(\omega) = \varphi_{\text{in}} + n(\omega)k_0L. \quad (2.8)$$

Eine Taylornäherung des Wellenvektors  $k(\omega) = n(\omega)k_0$  ergibt analog zu Gleichung (2.5) die sog. “group velocity dispersion” (GVD): [TREBINO]

$$\text{GVD} = k''(\omega_0) = \frac{1}{2} \frac{\lambda_0^3}{2\pi c_0^2} \frac{d^2 n}{d\lambda^2}, \quad (2.9)$$

mit der Trägerwellenlänge  $\lambda_0$  und der Lichtgeschwindigkeit  $c_0$ . Es gilt  $\text{GDD} = \text{GVD} L$ . Der wellenlängenabhängige Brechungsindex berechnet sich aus der Sellmeier Gleichung [CITE refr.]:

$$n^2(\lambda) = \frac{B_1 \lambda^2}{\lambda^2 - C_1} + \frac{B_2 \lambda^2}{\lambda^2 - C_2} + \frac{B_3 \lambda^2}{\lambda^2 - C_3}, \quad (2.10)$$

mit materialspezifischen numerischen Konstanten  $B_i, C_i$ , die z.B. in [1] aufgelistet sind.

Für die Veränderung der Pulsbreite in Abhängigkeit der GDD gilt folgende Beziehung, die in dieser Version durch Wigner-Distributionen [DIELS] hergeleitet wird:

$$\langle t^2 \rangle = \langle t_0^2 \rangle + \left[ \frac{d^2 \varphi}{d\omega^2} \Big|_0 \right]^2 \langle \omega^2 \rangle, \quad (2.11)$$

der Chirp, den der Puls erfährt berechnet sich also durch “GDD  $\times$  Bandbreite”. Aus den Umrechnungsregeln in Abschnitt 2.3 kann man somit den Effekt von einer group velocity dispersion auf einen Puls mit gegebener Bandbreite berechnen.

Objekt	Spatial Chirp [ $10^{-5} \Delta\lambda/\Delta x$ ]		Pulse front tilt [fs/mm]	
	unkompensiert	kompensiert	unkompensiert	kompensiert
5 mm BK7	-30	-5	-8.52	-8.80
10 mm BK7	-59	2760	-8.6	-9.80
5 mm MgF2	-20	-5	-8.59	-9.01
5 mm BK7 +30°	-28	0.07	-6.59	-7.86
5 mm BK7 .30°	-31	-8	-8.44	-8.69
BK7 Keil (wedge)	-11	11	-15.87	-15.1
longpass	-90	-44	-7.06	-8.08

### 3 Experimentelle Methoden und Messgrößen

#### 3.1 Räumliche Verzerrungen

Im Vergleich zu ebenen Wellen (continuous waves, cw's) bestehen ultrakurze Pulse aus sehr vielen Frequenzen: Sie haben eine hohe Bandbreite. Dies folgt unmittelbar aus dem Fourierzusammenhang zwischen Bandbreite und Pulslänge, dem Bandprodukt aus Gleichung (2.7). Aufgrund dieser hohen Bandbreite sind ultrakurze Laserpulse sehr viel anfälliger gegenüber Verzerrungen in der Zeit (temporaler Chirp) und im Raum, da Dispersion stets durch einen veränderlichen Brechungsindex in Abhängigkeit der verschiedenen Wellenlängen auftritt. Zeitliche Verzerrungen sorgen für eine Pulsverbreiterung nach Gleichung (2.7). Ein analoger Effekt tritt auch räumlich ein: Es kommt zu einem räumlichen Chirp, wenn verschiedene Wellenlängen einen unterschiedlichen Weg durch das Medium nehmen, wie zum Beispiel in einem Prismenkompressor (s.u.). Anstatt zu verschiedenen Zeiten findet man hier die Farben des Pulses an verschiedenen Orten, der Puls wird räumlich aufgefächert. Dieser Effekt tritt durch Winkeldispersion, wie im Prismenkompressor, aber auch in einem schrägen Glas ein, was in ?? aufgezeigt ist.

#### 3.2 Prismenkompressor

Mithilfe des Prismenkompressors (PC) kann ein gechirpter Puls wieder zu einem (nahezu) fourierlimitierten Puls komprimiert werden. Der Aufbau des Prismenkompressors ist in ?? zu sehen. Der Puls durchquert zwei Prismen, die entgegengesetzt parallel zueinander aufgestellt sind. Dabei sind sie so positioniert, dass der Puls beim ersten Prisma gerade durch die Spitze durchquert. Nach Snell's Gesetz verlassen die unterschiedlichen Wellenlängen das erste Prisma in unterschiedlichen Winkeln. Dadurch durchqueren sie unterschiedlich lange Strecken im zweiten Prisma. Durch die spezielle Positionierung verlassen alle Wellenlängen das zweite Prisma wieder parallel, aber mit einem räumlichen Chirp. Um diesen auszugleichen wird der Strahl an einem Spiegel zurückreflektiert und nimmt somit den gleichen Weg erneut durch den Prismenkompressor. Durch die unterschiedlichen Weglängen der verschiedenen Frequenzen kann bei richtiger Positionierung des zweiten Prismas die Group Delay Dispersion negativ werden, wodurch ein gechirpter Puls entchirpt werden kann. Für die GDD des Prismenkompressors gilt: [DIELS]

$$\frac{d^2\varphi}{d\omega^2}|_{\omega_0} = 2 \frac{\lambda_0^2}{2\pi c_0^2} \left[ L_g \frac{d^2 n}{d\lambda^2}|_{\lambda_0} - \left( 4L + \frac{L_g}{n(\lambda_0)^3} \right) \left( \frac{dn}{d\lambda}|_{\lambda_0} \right)^2 \right], \quad (3.1)$$

wobei  $\lambda_0$  die Trägerwellenlänge,  $L_g$  die Weglänge im Glas für die Trägerwellenlänge und  $L$  der Abstand der Spitzen der beiden Prismen ist. Für symmetrisch positionierte Prismen in Brewsterwinkelkonfiguration gilt  $L_g = 2I \frac{1}{\sqrt{1+n(\lambda_0)^2}}$  mit dem Einschub (insertion) des zweiten Prismas  $I$ , welcher im Experiment mit der Millimeter-schraube direkt eingestellt wird.

### 4 Durchführung

### 5 Auswertung

#### 5.1 Pulse front tilt

### 6 Diskussion

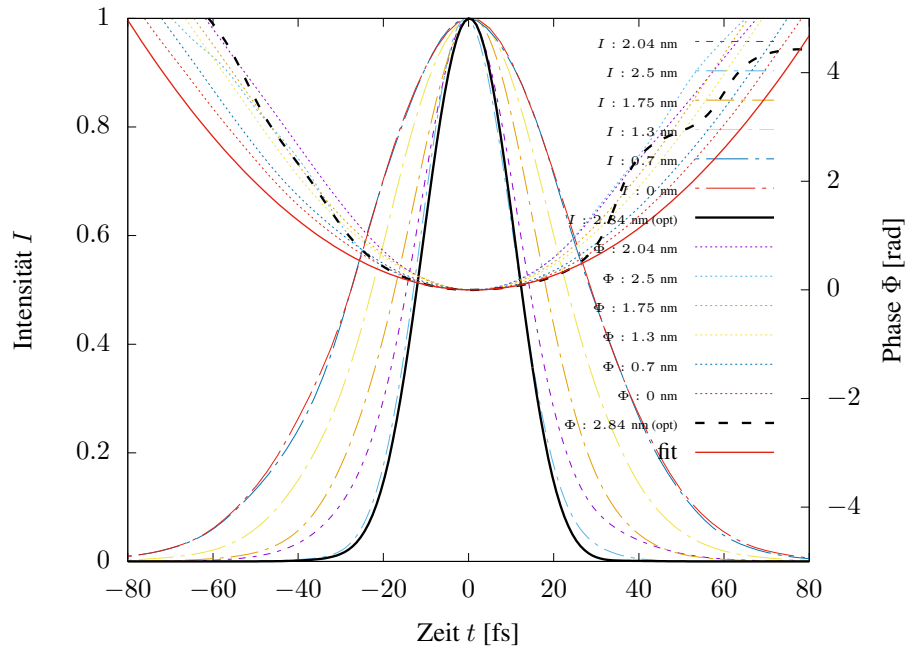


Abb. 1: blah

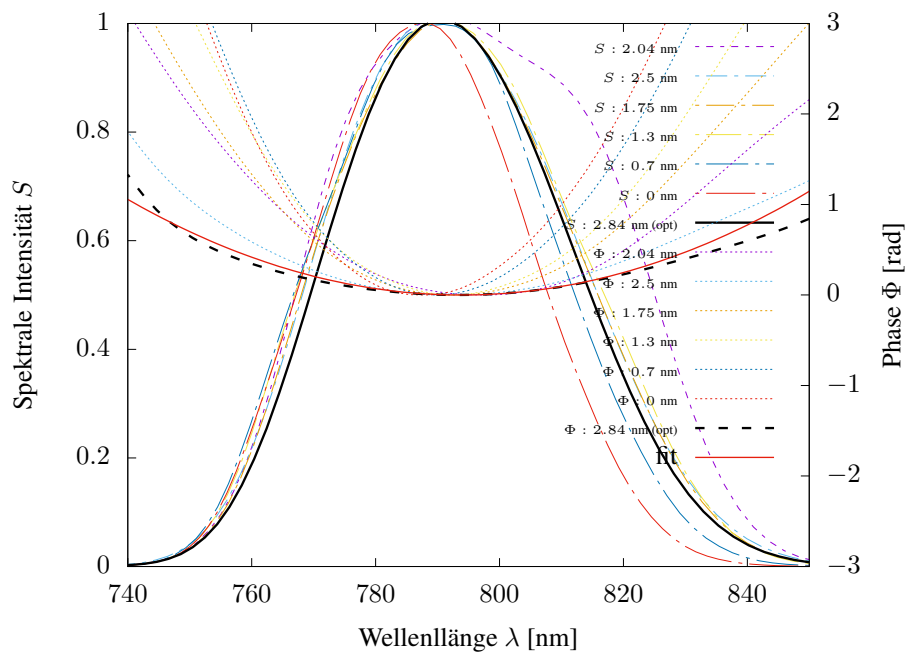


Abb. 2: blah

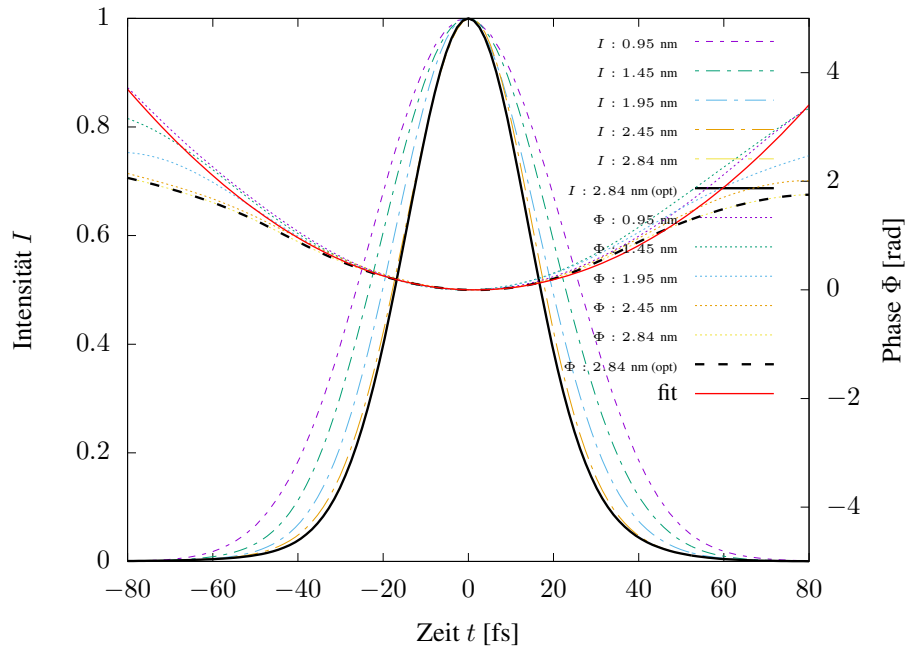


Abb. 3: blah2

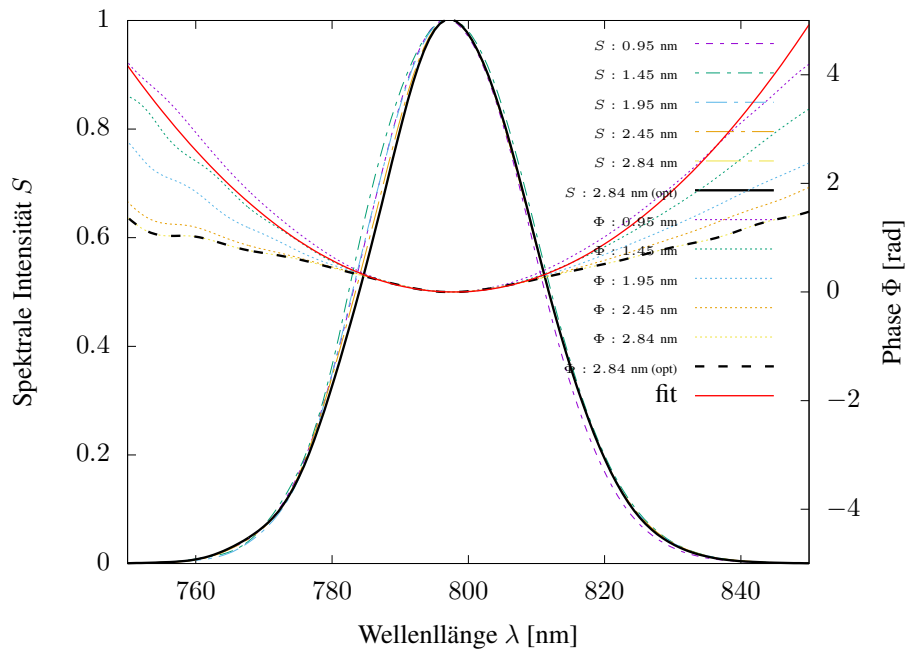


Abb. 4: blah2



## Literatur

- [1] : *refractive index database*. <https://refractiveindex.info/>
- [2] TIDECKS, Reinhard: *Current-induced nonequilibrium phenomena in quasi-one-dimensional superconductors*. Springer, 1990