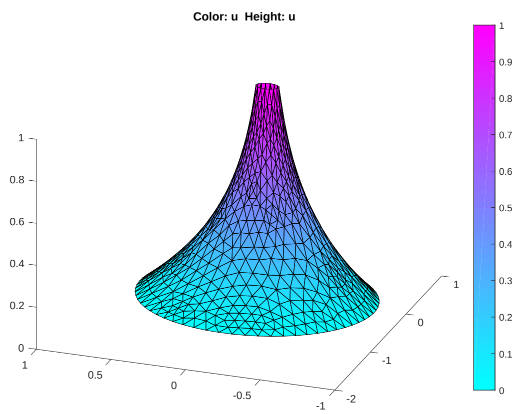

Figur 1. Tältproblemet i uppgift 4-7 löst med `pdetool` i uppgift 8.

Laboration 2 (SF1693): Värmeledning och utböjning av membran

Avsikten med denna laboration är att:

- studera värmeledning i en stav med varierande konduktivitet,
- studera utböjningen av ett membran,
- använda variationsmetoder och minimeringsmetoder för stationära elliptiska problem,
- programmera och använda finita elementmetoden,
- programmera och använda iterativ minimeringsmetod för elliptiskt problem,
- hantera begreppen konvergens, noggrannhet, beräkningskomplexitet, kvadratur och maximumprincip.

Värmeledning i en stav

1. Låt en stav med längden 1 och varierande konduktivitet vara värmd med källan $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ per längdenhet. Motivera varför temperaturen $u : [0, 1] \to \mathbb{R}$ i staven, där ena änden har temperaturen 0 och den andra änden har värmeflödet $g \in \mathbb{R}$, kan modelleras av randvärdesproblemet

$$\begin{aligned} -\big(a(x)u'(x)\big)' &= f(x)\,, \quad x \in (0, 1) \\ u(0) &= 0 \\ a(1)u'(1) &= g \end{aligned} \tag{1}$$

där $a : [0, 1] \to (0, \infty)$ och $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ är givna funktioner. Anta att värmeflödet kring stavens omkrets är försumbar och att temperaturen är tidsoberoende. Hur beror a på tvärsnittarean och värmekonduktiviteten?

Skriv ett finitelementprogram i Matlab för att approximera (1) med styckvis linjära element, konstant elementstorlek och godtyckliga funktioner $a : [0, 1] \to (0, \infty)$, $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ och flöden $g \in \mathbb{R}$. Använd Gausskvadratur, med en respektive två punkter per element, för att beräkna integralerna över elementen.

2. Härled den exakta lösningen, $u(x) = \int_0^x \frac{g+\int_y^1 f(z)\mathrm{d}z}{a(y)}\mathrm{d}y$, till (1).

3. Låt $g = 1$ och betrakta de två fallen $(a(x) = 1 + x\,, f(x) = 0)$ respektive $(a(x) = e^x, f(x) = e^x)$, för $x \in [0, 1]$. Studera beräkningskomplexiteten experimentellt, det vill säga bestäm hur många lika stora element (eller beräkningstid) som behövs för givet fel i energinormen. Ändras beräkningskomplexiteten betydelsefullt om Gausskvadraturen görs med en eller två punkter i varje element?

Utböjningen i ett membran: Dirichlets princip

4. Betrakta ett nästan koniskt tält som ett uppspänt membran där tältdukens höjd över marken, $u(x_1, x_2)$ i punkten $(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$, uppfyller

$$\begin{aligned} -\Delta u(x_1, x_2) &= 0\,, \quad \epsilon^2 < x_1^2 + x_2^2 < 1\,, \\ u(x_1, x_2) &= 1\,, \quad x_1^2 + x_2^2 = \epsilon^2\,, \\ u(x_1, x_2) &= 0\,, \quad x_1^2 + x_2^2 = 1\,. \end{aligned} \tag{2}$$

Låt $0 < \epsilon < 1$ och $\Omega_\epsilon := \{x \in \mathbb{R}^2 \ : \ \epsilon \le |x| \le 1\}$. Visa att $u : \Omega_\epsilon \to \mathbb{R}$ uppfyller

$$\min_{v\in V_\epsilon} \int_{\epsilon<|x|<1} |\nabla v(x)|^2 \mathrm{d}x = \int_{\epsilon<|x|<1} |\nabla u(x)|^2 \mathrm{d}x$$

där $V_\epsilon := \{v : \Omega_\epsilon \to \mathbb{R} \ : \ \int_{\epsilon<|x|<1} |\nabla v(x)|^2 \mathrm{d}x < \infty,\ v(x) = 0 \text{ för } |x| = 1,\ \text{och } v(x) = 1 \text{ för } |x| = \epsilon\}$. Bestäm lösningen u analytiskt. Vad händer när $\epsilon \to 0+$? Vad säger maximumprincipen om tältdukens höjd u i detta fall?

5. I polära koordinater har vi för $0 < \epsilon < 1$

$$\int_{\epsilon<|x|<1} |\nabla u(x)|^2 \mathrm{d}x = 2\pi \min_{v\in\hat{V}_\epsilon} \int_\epsilon^1 \big(v'(r)\big)^2 r \mathrm{d}r \tag{3}$$

där $\hat{V}_\epsilon := \{v : [\epsilon, 1] \to \mathbb{R} \ : \ \int_\epsilon^1 \big((v(x))^2 + (v'(x))^2\big)\mathrm{d}x < \infty,\ v(1) = 0 \text{ och } v(\epsilon) = 1\}$ och u löser (2). Finns det en lösning $w \in \hat{V}_0$ till

$$\int_0^1 \big(w'(r)\big)^2 r\mathrm{d}r = \min_{v\in\hat{V}_0} \int_0^1 \big(v'(r)\big)^2 r\mathrm{d}r \ ?$$

Relatera slutsatsen till villkoren för existens och entydighet av lösning i Sats 2.1 i C-J (eller Sats 1.3 i ”A short introduction to the finite element method” i Canvas filer)

6. Skriv ett Matlabprogram för att approximera (3) numeriskt med finita elementmetoden enligt följande: Låt

$$U(x) = \sum_{i=0}^N u_i\varphi_i(x)\,, \text{ med } u_0 = 1 \text{ och } u_N = 0\,, \tag{4}$$

där φ_i är styckvis linjära basfunktioner som uppfyller $\varphi_i(x_j) = 0$ om $i \neq j$ och $\varphi_i(x_i) = 1$ i nodpunkterna $x(i) = \epsilon + i(1-\epsilon)/N$. Vad gäller för den approximativa lösningen U när $\epsilon \to 0+$?

Visa att minimeringsproblemet

$$\min_{(u_1,\ldots,u_{N-1})\in\mathbb{R}^{N-1}} \int_\epsilon^1 x\big(U'(x)\big)^2 \mathrm{d}x \tag{5}$$

kan skrivas

$$\min_{(u_1,\ldots,u_{N-1})\in\mathbb{R}^{N-1}} \sum_{i=0}^N \sum_{j=0}^N A_{ij}u_iu_j$$

och leder till ekvationssystemet

$$\sum_{j=1}^{N-1} A_{ij}u_j = -A_{i0}\,, \quad i = 1,\ldots,N-1\,,$$

där $A_{ij} = \int_\epsilon^1 x\varphi_i'(x)\varphi_j'(x)\mathrm{d}x$.

7. Låt U vara given av (4) och (5). En iterativ metod för att approximera minimeringsproblemet är gradientmetoden

$$u_k[n+1] = u_k[n] - \delta\frac{\partial}{\partial u_k}(\sum_{i=0}^N\sum_{j=0}^N A_{ij}u_i[n]u_j[n])\,, \quad n = 1,\ldots,N-1\,, \tag{6}$$

för $\delta > 0$ och iterationer $n = 1, 2, 3, \ldots$. Hur kan δ väljas och hur många iterationer behövs för att få tillräcklig noggrannhet? Det är användbart att relatera (6) till värmeledningsekvationen med explicit tidsstegning för att hantera denna fråga. Välj till exempel $\epsilon = 0.1$.

Iterativ minimering är inte bara användbar för numerisk approximation utan även fundamental i teorin för partiella differentialekvationer: till exempel visas existens och entydighet av lösningar till elliptiska partiella differentialekvationer i Lax-Milgrams sats med iterativ minimering, se Sats 1.9 i ”A short introduction to the finite element method” i Canvas filer.

Historien om Dirchlets princip är intressant och lärorik, se till exempel [R. Courant, Dirichlets principle, conformal mapping and minimal surfaces, Springer-Verlag] and [John Goulet, The Dirichlet problem: a mathematical development, Pi Mu Epsilon Journal, Vol. 7, No. 8 (SPRING1983), pp. 502-511,

Matlab Partial Differential Equation Toolbox

I Matlab finns en lättanvänd modul som löser vissa stationära och tidsberoende partiella differentialekvationer i två rumsdimensioner med finita elementmetoden. Starta med matlabkommandot `pdetool`. I fönstret som öppnas ange beräkningsområdet, randvillkor, ekvationen, beräkningsnät, lös (med begynnelsevärde angivna som parametrar), plotta. En guide till `pdetool` finns bland ”filer” på kursens Canvassidor.

8. Lös med `pdetool` en valfri partiell differentialekvation. Uppgiftens syfte är bara att bekanta sig med programmet för att kunna använda det senare i kursen.